Adéles sobre el cuerpo de los números p- ádicos

Manuel Fernando Pedraza

Trabajo de Grado para optar al título de Matemático

Directora

Adriana Alexandra Albarracín Mantilla

Doctorado en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2023

Dedicatoria

Este trabajo viene dedicado para todas aquellas personas que apoyaron el desarrollo y ejecución de esta tesis, de manera especial, dedico este trabajo a mi familia, a mi mamá, a mi novia, a mis amigos, mis benefactores, mis profesores y a todos aquelos que hicieron parte de este proceso.

En especial reconozco la permanente presencia de Dios en mi camino de vida.

Agradecimientos

Agradezco a Dios en primera instancia, por permitirme cumplir una meta más en la construcción de mi proyecto de vida. A mi familia por el apoyo ecónomico y moral que tuvieron para conmigo durante el desarrollo de mi carrera. También agradezco a mis amigos y compañeros por las vivencias de estos inolvidables años de universidad.

Un reconocimiento y agradecimiento importante lo realizo a los profesores por sus enseñanzas y sus valiosos aportes, a mi directora de trabajo de grado, por dedicar su tiempo, experiencia y conocimiento en la guía de mi proyecto.

Tabla de Contenido

Resumen

Título: Adéles sobre el cuerpo de los números p-ádicos [*]

Autor: Manuel Fernando Pedraza [**]

Palabras Clave: Anillo finito de Adéles, Cuerpo de los Números *p-ádicos*, Producto Directo Restringido.

Descripción: El el presente trabajo se mostrará la construcción del anillo de los adéles finitos, la cual se basa en la construcción del cuerpo de los números *p-ádicos* $\mathbb{Q}_p$. El anillo finito de adéles $\mathbb{A}_f$ se define como el producto directo del cuerpo $\mathbb{Q}_p$ (Katok, 2007) sobre todos los números primos (finitos) con respecto al anillo de enteros *p-ádicos* $\mathbb{Z}_p$. La construcción de este anillo se fundamenta en pegar todas las completaciones *p-ádicas* de los números racionales. Es decir: Sea $\mathbb{Z}_p$ el anillo de los enteros *p-ádicos* y $\mathbb{Q}_p$ el cuerpo de los números *p-ádicos*. Un adéle finito de $\mathbb{Q}$, denotado por $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},fin} = \mathbb{A}_f$ es el producto directo restringido de $\mathbb{Q}_p$ con respecto a $\mathbb{Z}_p$ (Aguilar-Arteaga et al., 2020). Esto es:

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q},fin} = \mathbb{A}_f = \left\{ (a_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Q}_p : a_p \in \mathbb{Z}_p, \text{ para casi todos los primos } p \in \mathbb{P} \right\},$$

donde $\mathbb{P}$ denota el conjunto de los números primos.

---

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Adriana Alexandra Albarracín Mantilla, Doctorado en Matemáticas.

Abstract

Title: Adéles on the field of p-adic numbers [*]

Author: Manuel Fernando Pedraza [**]

Keywords: Finite Ring of Adéles, Field of the p-adic numbers, Restricted Direct Product.

Description: In the present paper it be will shown the construction of the finite ring of Adéles, wich is based of the construction of the field of *p-adic* numbers $\mathbb{Q}_p$. The finite ring of Adéles $\mathbb{A}_f$ is defined as the direct product of the field $\mathbb{Q}_p$ (Katok, 2007) over all prime(finite) numbers with respect to the ring of the *p-adic* integers $\mathbb{Z}_p$. The construction of this ring is based on gluing together all the *p-adic* completions of the rational numbers $\mathbb{Q}$, i.e: Let be $\mathbb{Z}_p$ the ring of *p-adic* integers and $\mathbb{Q}_p$ the field of *p-adic* numbers. An finite adéle of $\mathbb{Q}$ denoted by $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},fin} = \mathbb{A}_f$ is the restricted direct product of $\mathbb{Q}_p$ with respect to $\mathbb{Z}_p$ (Aguilar-Arteaga et al., 2020). This is:

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q},fin} = \mathbb{A}_f = \left\{ (a_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Q}_p : a_p \in \mathbb{Z}_p, \text{ for almost all primes } p \in \mathbb{P} \right\},$$

where $\mathbb{P}$ denotes the set of prime numbers.

---

[*] Bachelor Thesis

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Adriana Alexandra Albarracín Mantilla, Doctorado en Matemáticas.

Introducción

La teoría de los números *p-ádicos* hace historia en las matemáticas modernas al expresar las congruencias de números enteros a través del valor absoluto no arquimediano, con respecto al cual se completa $\mathbb{Q}$ para construir el cuerpo de los números *p-ádicos* denotados por $\mathbb{Q}_p$ (Burgos Guerrero et al., 2019; Galletti, 2018; Katok, 2007; Quintero Campo, 2020; Vladimirov et al., 1994).

Existe actualmente un gran número de aportes y explicaciones en diferentes áreas de las ciencias como Análisis Complejo, Topología algebraica, Álgebra Moderna, Física, Biología, Genética, entre otras. En el presente trabajo monográfico se hace un estudio detallado de la estructura del anillo $\mathbb{A}_f$ definido como el producto directo del cuerpo $\mathbb{Q}_p$ sobre todos los números primos (finitos) con respecto al anillo de enteros *p-ádicos* $\mathbb{Z}_p$. La construcción de $\mathbb{A}_f$ se fundamenta en pegar todas las completaciones *p-ádicas* de los números racionales.

El documento consta de tres secciones, la primera, de preliminares en donde se da a conocer algunas nociones de la teoría de números *p-ádicos* con ejemplos y resultados importantes (Carrillo Blanquicett, 2014; Deitmar and Echterhoff, 2014; Halmos, 1950; Herrero, 2010; Neira Uribe, 2011; Pérez, 2015; Becerra, 2004). En la segunda, se inicia definiendo las funciones de Chebyshev y de von Mangoldt, posteriormente se define el subgrupo aditivo $e^{\Psi(n)}\mathbb{Z}$, y cuya colección de estos subgrupos es una base de vecindad de cero numerable, para una topología segundo numerable invariante aditiva sobre $\mathbb{Q}$, la cual se denomina la topología finita adélica sobre $\mathbb{Q}$. Sobre esta topo-

logía, se definen las sucesiones de Cauchy, con las cuales se construirá un elemento $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, donde $\overline{\mathbb{Q}} = \mathscr{C}(\mathbb{Q})/\mathscr{C}_0(\mathbb{Q})$ se denomina el anillo finito de los números adélicos, y los conjuntos $\mathscr{C}(\mathbb{Q})$ y $\mathscr{C}_0(\mathbb{Q})$ se introducen en 3.2.3 y 3.2.5 respectivamente. Dicho elemento x es llamado una serie ádica, la cual es una representación de los elementos de $\overline{\mathbb{Q}}$. Además, se mostrarán propiedades algebraicas y topológicas del anillo finito de los números adélicos, las cuales serán base fundamental para definir una medida de Haar sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ (ver (76) y el Teorema 3.6.1). En la tercera sección, se introduce el concepto del anillo $\mathbb{A}_f$, el cual es definido como el producto restringido de $\mathbb{Q}_p$ con respecto a $\mathbb{Z}_p$ (ver Definición 4.1.2); así mismo, se dará a conocer algunas de sus propiedades algebraicas y topológicas como en (Aguilar-Arteaga et al., 2020; Burgos Guerrero et al., 2019; Deitmar and Echterhoff, 2014; Galletti, 2018; Goldstein, 1971; Quintero Campo, 2020). De igual manera, la medida de Haar descrita en (76) y el Teorema 3.6.1 será sumamente importante, ya que esta jugará un papel trascendental al definir la integral en $\mathbb{A}_f$; además, se mostrarán algunos ejemplos de integración en este anillo, los cuales son análogos como en el caso de $\mathbb{Q}_p$ (ver subsecciones 2.5 y 4.3). Al final de esta sección, se define la transformada de Fourier sobre $\mathbb{A}_f$, teniendo en cuenta las funciones localmente constantes con soporte compacto (subsección 4.4).

Se espera que este trabajo de grado juege un papel fundamental para aquellos lectores que estén interesados en el estudio y profundización sobre el tema del anillo de los Adéles $\mathbb{A}_f$.

1. Objetivos

Objetivo general

Estudiar el anillo finito de Adéles $\mathbb{A}_f$ y sus respectivas propiedades algebraicas y topológicas.

Objetivos específicos

Determinar explícitamente el grupo de caracteres de los adéles y de los cuerpos K_p, asociado al cuerpo de números algebraicos K.

Definir una medida de Haar sobre $\mathbb{A}_K$, a partir de las medidas de Haar definidas sobre K_p.

2. Fundamentación teórica

2.1. Normas sobre $\mathbb{Q}$

Si se piensa en el concepto de norma, se puede afirmar que es un operador matemático que mide longitudes o distancias, por ejemplo, en $\mathbb{R}^n$ se define la norma usual entre vectores. Dado que $\mathbb{Q}$ es cuerpo, podemos definir una norma (o distancia) sobre los racionales. Intuitivamente se podría pensar en la distancia usual (o el valor absoluto en $\mathbb{R}$). ¿Se puede definir otras normas sobre $\mathbb{Q}$? Ahora bien, los números reales, se obtienen a partir de la completación de $\mathbb{Q}$ con respecto al valor absoluto (norma) usual. En esta sección se mostrará otra norma sobre $\mathbb{Q}$.

Definición 2.1.1. *Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo fijo. La valuación p-ádica sobre $\mathbb{Z}$ es la función $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{0\}$, definida como sigue: Para cada $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, sea $v_p(n)$ el único entero no negativo que satisface*

$$n = p^{v_p(n)} n', \text{ donde } p \nmid n'. \tag{1}$$

Observación 2.1.1. *De la Definición 2.1.1:*

- *Si $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces*

$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b), \text{ donde } v_p(0) = +\infty. \tag{2}$$

- *La valuación p-ádica es la máxima potencia que divide a n, es decir,*

$$v_p(n) = \text{máx}\{k : p^k \mid n\}. \tag{3}$$

- *El teorema fundamental de la aritmética garantiza la existencia y unicidad de la función* $v_p(n)$ *en la definición anterior, esto se tiene para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

- *La valuación p-ádica de cualquier* $x \in \mathbb{Q} - \{0\}$ *está determinada por la fórmula*

$$x = p^{v_p(x)}\frac{a}{b};\ \textit{donde}\ a,b \in \mathbb{Z},\ \textit{y}\ p \nmid ab \tag{4}$$

Teorema 2.1.1. *Si* $m,n \in \mathbb{Z}$, *entonces* $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$.

Demostración. Sean $m,n \in \mathbb{Z}$, entonces $m = p^{v_p(m)}m'$, donde $p \nmid m'$ y $n = p^{v_p(n)}n'$, cuando $p \nmid n'$. Luego:

$$mn = p^{v_p(m)}m'p^{v_p(n)}n' = p^{v_p(m)+v_p(n)}m'n',\ \text{y}\ p \nmid m'n'.$$

Por lo tanto, $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$. □

Teorema 2.1.2. *La valuación p-ádica cumple las siguientes propiedades:*

(*i*) *Para cualquier* $x \in \mathbb{Q}$, *el valor de* $v_p(x)$ *no depende de su representación como cociente de dos enteros.*

(*ii*) $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$ *para todo* $x, y \in \mathbb{Q}$.

(*iii*) $v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$, *para todo* $x, y \in \mathbb{Q}$, *con la convención de que* $x < +\infty$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *y* $x + \infty = +\infty$.

Demostración. (*i*) Sea $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $b, d \neq 0$. De esta manera,

$$\begin{aligned} ad = bc &\Longrightarrow v_p(ad) = v_p(bc), \\ &\Longrightarrow v_p(a) + v_p(d) = v_p(b) + v_p(c), \quad \text{(Por Teorema 2.1.1.)} \\ &\Longrightarrow v_p(a) - v_p(b) = v_p(c) - v_p(d), \\ &\Longrightarrow v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p\left(\frac{c}{d}\right). \quad \text{(Por (2) de la Observación 2.1.1)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $v_p(x)$ no depende de su representación como cociente de dos enteros.

(*ii*) La condición se cumple para $x = 0$ o $y = 0$. Ahora, si $x, y \neq 0$, se define $x = \frac{a}{b}$ y $y = \frac{c}{d}$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $b, d \neq 0$. Luego,

$$\begin{aligned} v_p(x) + v_p(y) &= v_p\left(\frac{a}{b}\right) + v_p\left(\frac{c}{d}\right), \\ &= \big(v_p(a) - v_p(b)\big) + \big(v_p(c) - v_p(d)\big), \quad \text{(Por (2) de la Obs. 2.1.1)} \\ &= \big(v_p(a) + v_p(c)\big) - \big(v_p(b) + v_p(d)\big), \quad \text{(Por propiedad asociativa)} \\ &= v_p(ac) - v_p(bd), \quad \text{(Por Teorema 2.1.1)} \\ &= v_p\left(\frac{ac}{bd}\right) = v_p(xy), \quad \text{(Por (2) de la Obs. 2.1.1)} \end{aligned}$$

(iii) Razonando de manera análoga, si $x = 0$ o $y = 0$, la afirmación es verdadera. Sean $x, y \neq 0$ tal que $x = \dfrac{a}{b}$ y $y = \dfrac{c}{d}$. Por (4) de la Observación 2.1.1, se tiene que

$$x+y = \quad p^{v_p(x)}\frac{a'}{b'} + p^{v_p(y)}\frac{c'}{d'} = p^t p^{-t} p^{v_p(x)}\frac{a'}{b'} + p^t p^{-t} p^{v_p(y)}\frac{c'}{d'} = p^t\left(p^{v_p(x)-t}\frac{a'}{b'} + p^{v_p(y)-t}\frac{c'}{d'}\right)$$

donde $t = \text{mín}\left\{v_p(x), v_p(y)\right\}$. Lo anterior implica que $v_p(x+y) \geq \text{mín}\left\{v_p(x), v_p(y)\right\}$.

□

Definición 2.1.2. *Para cualquier $x \in \mathbb{Q}$, p-primo, se define el valor absoluto p-ádico de x como sigue:*

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)}, & si\ x \neq 0, \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Teorema 2.1.3. *La función $|\cdot|_p$ definida en (5) es un valor absoluto no arquimediano sobre $\mathbb{Q}$.*

Demostración. Para ver que $|\cdot|_p$ es un valor absoluto no arquimediano, se deben verificar las siguientes condiciones:

- $|x|_p = 0$ si y solo si, $x = 0$.
- $|xy|_p = |x|_p|y|_p$; $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, y además, $|\cdot|_p$ satisface la desigualdad triangular fuerte; es decir:

$$|x+y|_p \leq \text{máx}\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Note que:

(i) $|x|_p = 0$ si y solo si $x = 0$.

(ii) Sean $x, y \in \mathbb{Q}$:

- Si $x = 0$ o $y = 0$, $|xy|_p = |x|_p |y|_p = 0$.
- Si $x, y \neq 0$, entonces

$$|xy|_p = p^{-v_p(xy)} = p^{-\left(v_p(x)+v_p(y)\right)} = p^{-v_p(x)-v_p(y)} = p^{-v_p(x)} p^{-v_p(y)} = |x|_p |y|_p.$$

(iii) Sean $x, y \in \mathbb{Q}$. Si $x = 0$ o $y = 0$, se obtiene $|x+y|_p = \text{máx}\left\{|x|_p, |y|_p\right\}$. Ahora, para $x, y \neq 0$, sea $k = \text{máx}\left\{-v_p(x), -v_p(y)\right\}$, entonces $k = -\text{mín}\left\{v_p(x), v_p(y)\right\}$. usando el Teorema 2.1.2:

$$v_p(x+y) \geq -k \Longleftrightarrow k \geq -v_p(x+y) \Longleftrightarrow p^k \geq p^{-v_p(x+y)}.$$

Por lo tanto, $\text{máx}\left\{|x|_p, |y|_p\right\} \geq |x+y|_p$, es decir, $|x+y|_p \leq \text{máx}\left\{|x|_p, |y|_p\right\}$ Así, $|\cdot|_p$ es un valor absoluto no arquimediano.

□

A continuación, se darán algunos ejemplos numéricos de las funciones valuación p-ádica y el valor absoluto p-ádico (o norma p-ádica).

Ejemplo 2.1.1. *Calculemos las valuaciones indicadas:*

- $v_3(18)$.
- $v_2(1728)$.
- $v_5\left(\frac{49}{50}\right)$.

Solución: *Para resolver estas valuaciones p-ádicas, se debe tener en cuenta la siguiente observación: Si $mcd(p,n) = 1$, entonces $v_p(n) = 0$. Así, usando la definición y las propiedades de la valuación, se tiene:*

- $v_3(18) = v_3(2\cdot 9) = v_3\left(2\cdot 3^2\right) = v_3(2) + v_3\left(3^2\right) = 0+2 = 2.$
- $v_2(1728) = v_2\left(2^6\cdot 3^3\right) = v_2\left(2^6\right) + v_2\left(3^3\right) = 6+0 = 6.$
- $v_5\left(\frac{49}{50}\right) = v_5(49) - v_5(50) = 0 - v_5\left(2\cdot 5^2\right) = 0 - \left(v_5(2) + v_5\left(5^2\right)\right) = 0-(0+2) = 0-2 = -2.$

Ejemplo 2.1.2. *Determinemos el valor los siguientes valores absolutos:*

- $|9|_3$,
- $|24|_2$,
- $\left|\frac{15}{28}\right|_7$.

Solución: *Usando la definición de valor absoluto p-ádico y propiedades de la valuación p-ádica, se obtiene:*

- $|9|_3 = 3^{-v_3(9)} = \dfrac{1}{3^{v_3(9)}} = \dfrac{1}{3^{v_3(3^2)}} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}.$
- $|24|_2 = 2^{-v_2(24)} = \dfrac{1}{2^{v_2(24)}} = \dfrac{1}{2^{v_2(2^3\cdot 3)}} = \dfrac{1}{2^{v_2(2^3)+v_2(3)}} = \dfrac{1}{2^{3+0}} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}.$
- $\left|\dfrac{15}{28}\right|_7 = 7^{-v_7\left(\frac{15}{28}\right)} = 7^{-\left(v_7(15)-v_7(28)\right)} = 7^{0+v_7(28)} = 7^{v_7(7\cdot 2^2)} = 7^{v_7(7)+v_7(2^2)} = 7^{1+0} = 7.$

Hasta este momento, se establecieron condiciones necesarias y suficientes para definir una norma sobre $\mathbb{Q}$ la cual es llamada la norma *p-ádica* (o el valor absoluto *p-ádico*). Ahora bien, ¿qué condiciones se satisfacen para que dos normas definidas sobre $\mathbb{Q}$ no sean equivalentes[1]?

Teorema 2.1.4. *En el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$, si p,q son números primos distintos, entonces $|\cdot|_p$ y $|\cdot|_q$ no son equivalentes.*

Demostración. Sean $p \neq q$ y considere la sucesión $x_n = \left(\dfrac{p}{q}\right)^n$. Luego:

$$|x_n|_p = \left|\frac{p}{q}\right|_p^n = \frac{|p|_p^n}{|q|_p^n} = \frac{\left(p^{-v_p(p)}\right)^n}{\left(p^{-v_p(q)}\right)^n} = \frac{\left(p^{-1}\right)^n}{\left(p^0\right)^n} = \frac{1}{p^n}.$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} |x_n|_p = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p^n}\right) = 0.$$

---

[1] Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes ($\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$), si ellas inducen métricas equivalentes. Ver (Katok, 2007)

Razonando de manera análoga, se sigue que

$$|x_n|_q = \left|\frac{p}{q}\right|_q^n = \frac{|p|_q^n}{|q|_q^n} = \frac{\left(q^{-v_q(p)}\right)^n}{\left(q^{-v_q(q)}\right)^n} = \frac{\left(q^0\right)^n}{\left(q^{-1}\right)^n} = \frac{(1)^n}{\left(\frac{1}{q^n}\right)} = q^n.$$

De esta manera

$$\lim_{n\to\infty} |x_n|_p = \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty.$$

Por lo tanto, $|x_n|_p \to 0$, pero $|x_n|_q \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$. Así $|\cdot|_p$ y $|\cdot|_q$ no son equivalentes. □

Teorema 2.1.5. *Sea $|\cdot|$ un valor absoluto definido sobre $\mathbb{Q}$. Si se conoce $|n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se puede determinar $|x|$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.*

Demostración.

- Si $n = 0$, entonces $|n| = 0$.
- Para todo $n \in \mathbb{Z}^-$, entonces $-n \in \mathbb{Z}^+$. AsÃ: $|n| = |-n|$.
- Para todo $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$: $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{|1|}{|n|} = \frac{1}{|n|}$. Así, tomando $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$:

$$|x| = \left|\frac{a}{b}\right| = \left|a \cdot \frac{1}{b}\right| = |a|\frac{|1|}{|b|} = |a|\frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}.$$

Por lo tanto, se puede determinar $|x|$, para todo $x \in \mathbb{Q}$. □

Teorema 2.1.6 (Ostrowski). *Cada valor absoluto no trivial sobre $\mathbb{Q}$ es equivalente a uno de los*

valores absolutos $|\cdot|_p$*, donde p es un número primo o* $p=\infty$*.* ($|\cdot|_\infty$ *denota el valor absoluto usual en* $\mathbb{R}$).

Demostración. Sea $|\cdot|$ un valor absoluto no trivial sobre $\mathbb{Q}$. Considere los siguientes casos:

(i) $|\cdot|$ **es arquimediano:** Sea n_0 el menor entero positivo para el cual $|n_0|>1$. Usando la propiedad arquimediana, existe tal entero, ya que en caso contrario $|\cdot|$ no sería arquimediano. Defina $\alpha=\log_{n_0}(|n_0|)$. Luego $|n_0|=n_0^\alpha$. Se probará que $|x|=|x|_\infty^\alpha$ para todo $x\in\mathbb{Q}$; para ello, basta con verificar que $|n|=|n|_\infty^\alpha$ para todo $n\in\mathbb{N}$, y usando el Teorema 2.1.5, se obtiene la conclusión. Sea $n\in\mathbb{N}$, escribiendo n en base n_0, se sigue que

$$n=a_0+a_1n_0+a_2n_0^2+\cdots+a_kn_0^k,$$

donde $a_i\in\mathbb{Z}$ tal que $0\leq a_i\leq n_0-1$ para todo $i=1,2,\cdots,k$ y $a_k\neq 0$. Luego

$$\begin{aligned}|n|&=\left|a_0+a_1n_0+a_2n_0^2+\cdots+a_kn_0^k\right|\leq|a_0|+|a_1n_0|+\left|a_2n_0^2\right|+\cdots+\left|a_kn_0^k\right|,\\&=|a_0|+|a_1||n_0|+|a_2|\left|n_0^2\right|+\cdots+|a_k|\left|n_0^k\right|=|a_0|+|a_1|n_0^\alpha+|a_2|n_0^{2\alpha}+\cdots+|a_k|n_0^{k\alpha}.\end{aligned}$$

Dado que n_0 es el entero más pequeño cuyo valor absoluto es mayor que 1, se tiene que $|a_i|\leq 1$ para todo $i=1,2,\cdots,k$. Así, usando este hecho y la serie geométrica, se obtiene

$$\begin{aligned}|n|&\leq 1+n_0^\alpha+n_0^{2\alpha}+\cdots+n_0^{k\alpha}=n_0^{k\alpha}\left(1+n_0^{-\alpha}+n_0^{-2\alpha}+\cdots+n_0^{-k\alpha}\right),\\&=n_0^{k\alpha}\sum_{k\geq 0}n_0^{-k\alpha}=n_0^{k\alpha}\left(\frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha-1}\right).\end{aligned}$$

Sea $C = \dfrac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1}$, luego $C > 0$. De esta manera

$$|n| \leq C n_0^{k\alpha} \leq C n^\alpha.$$

Esta última desigualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$, puesto que n se tomó de manera arbitraria.

Ahora, para $N \in \mathbb{N}$:

$$\left|n^N\right| \leq C n^{N\alpha} \Longrightarrow |n| \leq \sqrt[N]{C} n^\alpha.$$

Haciendo $N \to \infty$, se obtiene

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{C} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{N\to\infty} |n| \leq \lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{C} n^\alpha \Longrightarrow |n| \leq n^\alpha. \tag{6}$$

La desigualdad (6) es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, puesto que $n_0^k \leq n \leq n_0^{k+1}$, usando el hecho de que $|n_0| = n_0^\alpha$ y la desigualdad triangular:

$$n_0^{(k+1)\alpha} = \left|n_0^{k+1}\right| = \left|n + n_0^{k+1} - n\right| \leq |n| + \left|n_0^{k+1} - n\right|.$$

De lo anterior, usando nuevamente $|n_0| = n_0^{\alpha}$:

$$n_0^{(k+1)\alpha} - \left|n_0^{k+1} - n\right| \leq |n| \Longrightarrow n_0^{(k+1)\alpha} - \left(n_0^{k+1} - n\right)^{\alpha} \leq |n|.$$

Puesto que $n \geq n_0^k$, se sigue que

$$|n| \geq n_0^{(k+1)\alpha} - \left(n_0^{k+1} - n_0^k\right)^{\alpha} = n_0^{(k+1)\alpha}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^{\alpha}\right) = C' n_0^{(k+1)\alpha} > C' n^{\alpha},$$

donde $C' = 1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^{\alpha} > 0$. Ahora, para $N \in \mathbb{N}$

$$\left|n^N\right| > C' n^{N\alpha} \Longrightarrow |n| > \sqrt[N]{C'} n^{\alpha}.$$

Haciendo $N \to \infty$,

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{C'} = 1.$$

Así,

$$\lim_{N\to\infty} |n| \geq \lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{C'} n^{\alpha} \Longrightarrow |n| \geq n^{\alpha} \tag{7}$$

Por lo tanto, usando (6) y (7), se obtiene $|n| = n^{\alpha}$. Así

$$\big||n|\big|_{\infty} = \big|n^{\alpha}\big|_{\infty} \implies |n| = |n|_{\infty}^{\alpha},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, usando el Teorema 2.1.5, $|x| = |x|_{\infty}^{\alpha}$, para todo $x \in \mathbb{Q}$.

(ii) $|\cdot|$ **no es arquimediano:** Bajo esta condición, se sigue que $|n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Puesto que $|\cdot|$ es distinto del valor absoluto trivial, para algún $m \in \mathbb{Z}$, $|m| < 1$. Sea n_0 el menor número natural para el que $|n_0| < 1$. Se afirma que n_0 es primo: En efecto, ya que si n_0 no es primo, existen enteros a y b tales que $1 < a, b < n_0$ y $n_0 = ab$. Por la elección de n_0, se tiene que $|a| = |b| = 1$, luego $|n_0| = |a||b| = 1$, lo cual contradice que $|n_0| < 1$. Considere $n_0 = p$, y observe que $|x| = |x|_p^{\alpha}$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Para ello, se usará el Teorema 2.1.5 verificando la hipótesis, es decir: $|n| = |n|_p^{\alpha}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y considere $\alpha = \log_{\frac{1}{p}}(|p|)$:

- Si $p \nmid n$, entonces $n = pq + r$ donde $0 < r < p$. Luego, por la elección de p, se sigue que $|r| = 1$. Además, $|pq| < 1$, ya que $|p| < 1$ y $|q| \leq 1$. Lo anterior implica que $|n| = \text{máx}\{|pq|, |r|\} = 1$.
- Si $p \mid n$, entonces $n = p^r n'$ donde $p \nmid n'$. Así,

$$\begin{aligned} |n| &= |p|^r \big|n'\big| = |p|^r \qquad \Big(\text{Porque } \big|n'\big| = 1\Big), \\ &= \left(\frac{1}{p}\right)^{\alpha p} = |n|_p^{\alpha} \quad \left(\text{Porque } \alpha = \log_{\frac{1}{p}}(|p|) \Longrightarrow |p| = \left(\frac{1}{p}\right)^{\alpha} \text{ y Def. norma pádica}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|\cdot|$ es equivalente a $|\cdot|_p$.

□

Teorema 2.1.7. *Sea K un cuerpo con norma no-arquimediana*[2]*. Si* $x, a \in K$*, satisfacen la desigualdad* $\|x-a\| < \|a\|$*, entonces* $\|x\| = \|a\|$.

Demostración. Por hipótesis, $\|x-a\| < \|a\|$, y usando la desigualdad triangular fuerte, se tiene:

$$\|x\| = \|x-a+a\| \leq \text{máx}\{\|x-a\|, \|a\|\} = \|a\| \Longrightarrow \|x\| \leq \|a\| \tag{8}$$

Por otra parte:

$$\|a\| = \|a-x+x\| \leq \text{máx}\{\|a-x\|, \|x\|\} = \text{máx}\{\|x-a\|, \|x\|\}. \tag{9}$$

Ahora, si $\|x-a\| > \|x\|$, esto implica que $\|a\| \leq \text{máx}\{\|x-a\|, \|x\|\} = \|x-a\|$. Por consiguiente, $\|a\| \leq \|x-a\|$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto se tiene que:

$$\|x-a\| \leq \|x\| \Longrightarrow \|a\| \leq \text{máx}\{\|x-a\|, \|x\|\} = \|x\| \tag{10}$$

Así, de (8) *y* (10)*, se concluye que* $\|x\| = \|a\|$. □

---

[2] Una norma es llamada no-arquimediana, si satisface la desigualdad triangular fuerte. Es decir $\|x+y\| \leq \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$. Ver (Katok, 2007)

Una interpretación geométrica de lo anterior es la siguiente: *En un cuerpo K con norma no-arquimediana, todo triángulo es isósceles, y la longitud de su base no excede las longitudes de los otros dos lados.*

2.2. El cuerpo $\mathbb{Q}_p$

- Sea K un cuerpo y $|\cdot|$ un valor absoluto sobre K. Una sucesión (x_n) de elementos en K, es llamada una sucesión de Cauchy, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$ siempre que $n, m \geq M$.

- Un cuerpo K es llamado completo con respecto a $|\cdot|$ si cada sucesión de Cauchy de elementos de K tiene un límite en K.

Teorema 2.2.1. *Una sucesión (x_n) de números racionales es una sucesión de Cauchy con respecto a un valor absoluto no arquimediano $|\cdot|$ si, y solo si se tiene:*

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0. \tag{11}$$

Demostración. ($\Longrightarrow$) Dado que (x_n) es una sucesión de Cauchy, se sigue que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Tomando $m = n + 1$, se tiene que si $n, m \geq N$, entonces

$$|x_{n+1} - x_n| = |x_m - x_n| = |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0.$$

($\Longleftarrow$) Suponga que $\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, implica que $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. Ahora, sean $m, n \geq N$, y sin pérdida de generalidad, suponga que $m > n$; tomando $m = n + r$, se sigue que si $m, n \geq N$, entonces:

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |x_{n+r} - x_n|, \\
&= |x_{n+r} - x_{n+r-1} + x_{n+r-1} - x_{n+r-2} + x_{n+r-2} - \cdots - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n|, \\
&= \left|(x_{n+r} - x_{n+r-1}) + (x_{n+r-1} - x_{n+r-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)\right|, \\
&\leq \text{máx}\left\{|x_{n+r} - x_{n+r-1}|, |x_{n+r-1} - x_{n+r-2}|, \cdots, |x_{n+1} - x_n|\right\}, \\
&< \text{máx}\{\varepsilon, \varepsilon, \cdots, \varepsilon\} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Lo anterior se obtuvo del hecho que $|\cdot|$ es no-arquimediano y usando la desigualdad triangular fuerte. Por lo tanto, $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Así, (x_n) es una sucesión de Cauchy. □

Teorema 2.2.2. *El cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$ no es completo con respecto a cualquiera de los valores absolutos no triviales.*

Demostración. Se usará el Teorema 2.1.6 (Ostrowski):

- $\mathbb{Q}$ no es completo con respecto a $|\cdot|_\infty$, donde $|\cdot|_\infty$ denota el valor absoluto usual en $\mathbb{R}$.
- Considere a $\mathbb{Q}$ con el valor absoluto $|\cdot|_p$, donde p es un número primo fijo. Sea (x_n) una

sucesión definida por:

$$x_n = 1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n + \cdots$$

Se afirma que (x_n) es una sucesión de Cauchy. En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n|_p = \lim_{n\to\infty} \left|p^{n+1}\right|_p = \lim_{n\to\infty} \left(p^{-v_p(p)}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(p^{-1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{p^{n+1}}\right) = 0$$

Lo anterior se obtiene de la definición de valor absoluto p-ádico, y de las hipótesis del Teorema 2.2.1. Así, (x_n) es una sucesión de Cauchy; además, (x_n) converge al número $1+p+p^2+p^3+\cdots+p^n+\cdots$. Tomando $s = 1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n + \cdots \in \mathbb{Q}$, se obtiene

$$s = 1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n + \cdots = 1 + p\left(1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n + \cdots\right) = 1 + ps.$$

Esto implica que s es igual a un número mayor que el mismo, lo cual es absurdo. Así, $1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n + \cdots \notin \mathbb{Q}$. Por lo tanto, $\mathbb{Q}$ con el valor absoluto $|\cdot|_p$ no es completo. □

Definición 2.2.1. *Sea $|\cdot| = |\cdot|_p$ un valor absoluto no-arquimediano sobre $\mathbb{Q}$. Se denota por $\mathscr{C}$ o $\mathscr{C}_p(\mathbb{Q})$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de elementos en $\mathbb{Q}$ con respecto a $|\cdot|_p$, esto es:*

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_p(\mathbb{Q}) = \left\{(x_n) : (x_n) \text{ es una sucesión de Cauchy de } \mathbb{Q} \text{ con respecto a } |\cdot|_p\right\} \qquad (12)$$

Teorema 2.2.3. *Definiendo*

$$(x_n)+(y_n)=(x_n+y_n),$$

$$(x_n)\cdot(y_n)=(x_n\cdot y_n),$$

$$0=(0),$$

$$1=(1),$$

se tiene que $\mathscr{C}$ es un anillo conmutativo con unidad.

Teorema 2.2.4. *La función $f:\mathbb{Q}\to\mathscr{C}$ dada por $f(x)=(x)$ es una inclusión de $\mathbb{Q}$ en $\mathscr{C}$, donde (x) es un elemento del conjunto $\mathscr{C}_p(\mathbb{Q})$.*

Demostración. Se probará que f está bien definida, es inyectiva y es un morfismo de anillos:

(i) f está bien definida y es inyectiva por definición de f.

(ii) f es un morfismo de anillos: Sean $x,y\in\mathbb{Q}$ tales que $f(x)=(x)$ y $f(y)=(y)$, así

$a)$ $f(x+y)=(x+y)=(x)+(y)=f(x)+f(y)$,

$b)$ $f(1)=(1)=1$,

$c)$ $f(xy)=(xy)=(x)(y)=f(x)f(y)$.

□

Teorema 2.2.5. *Si (x_n) es una sucesión de Cauchy tal que $x_n\nrightarrow 0$, entonces existen $c>0$ y $N\in\mathbb{N}$ tal que $|x_n|_p>c$, para $n\geq N$.*

Demostración. Dado que $x_n \nrightarrow 0$, se sigue que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $M \in \mathbb{N}, |x_n|_p > \varepsilon$. Puesto que (x_n) es una sucesión de Cauchy, por definición, se tiene que dado $\varepsilon > 0$ (en particular, el que se definió anteriormente), existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N'$, entonces $|x_n - x_m|_p < \varepsilon$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_N|_p > \varepsilon$ y $N \geq N'$. Para todo $n \geq N$:

$$|x_n - x_N|_p < \varepsilon \Rightarrow \Big| |x_n|_p - |x_N|_p \Big|_{\mathbb{R}} \leq |x_n - x_N|_p < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < |x_n|_p - |x_N|_p < \varepsilon \Rightarrow |x_N|_p - \varepsilon < |x_n|_p.$$

Tomando $c = |x_N|_p - \varepsilon$, se obtiene $|x_n|_p > c$ para todo $n \geq N$. □

Definición 2.2.2. *Se define $\mathscr{N} \subset \mathscr{C}$ como el conjunto*

$$\mathscr{N} = \big\{(x_n) : x_n \longrightarrow 0\big\} = \left\{(x_n) : \lim_{n\to\infty} |x_n|_p = 0\right\}, \tag{13}$$

es decir, el conjunto de todas las sucesiones que convergen a cero con respecto al valor absoluto $|\cdot|_p$. De hecho, $\mathscr{N}$ es un ideal maximal de $\mathscr{C}$. En efecto, sea $\mathscr{I}$ un ideal de $\mathscr{C}$ tal que $\mathscr{N} \subset \mathscr{I}$ y $\mathscr{N} \neq \mathscr{I}$; se debe verificar que $\mathscr{I} = \mathscr{C}$. Dado que $\mathscr{N} \neq \mathscr{I}$, se puede garantizar que existe $(x_n) \in \mathscr{N}$ tal que $x_n \nrightarrow 0$. Puesto que $\mathscr{N} \subset \mathscr{I}$, se sigue que $(x_n) \in \mathscr{I}$. Además, usando el hecho de que (x_n) es de Cauchy, Por el Teorema 2.2.5, existen $c > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $|x_n|_p > c$. Se define la sucesión (y_n) como sigue:

$$y_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n < N, \\ \dfrac{1}{x_n}, & \text{si } n \geq N. \end{cases}$$

Luego:

$$|y_{n+1}-y_n|_p = \left|\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}\right| = \frac{|x_n-x_{n+1}|_p}{|x_{n+1}|_p|x_n|_p} < \frac{|x_n-x_{n+1}|_p}{c^2},\ \textit{para } n \geq N.$$

Como (x_n) *es de Cauchy, por el Teorema 2.2.1, se sigue que* $\lim_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|_p = 0$. *Así:*

$$\lim_{n\to\infty}|y_{n+1}-y_n|_p \leq \lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x_n|_p}{c^2} = 0.$$

Lo anterior, implica que $\lim_{n\to\infty}|y_{n+1}-y_n|_p = 0$*; y usando el Teorema 2.2.1, se concluye que* (y_n) *es de Cauchy. Así,* $(x_n)(y_n) \in \mathscr{I}$*, ya que* $\mathscr{I}$ *es un ideal de* $\mathscr{C}$*. Por otra parte, se define la sucesión:*

$$(x_n y_n) = \begin{cases} 0, & \textit{si } n < N, \\ 1, & \textit{si } n \geq N. \end{cases}$$

Entonces $1-(x_n y_n) \in \mathscr{N}$*, ya que para todo* $n \geq N$*:* $\lim_{n\to\infty}|x_n y_n - 1|_p = 0$. *Ahora, sea* $(z_n) = 1-(x_n)(y_n)$*; luego* $1 = (z_n)+(x_n y_n) \in \mathscr{I}$*, dado que* $(z_n) \in \mathscr{N} \subset \mathscr{I}$ *y* $(x_n y_n) = (x_n)(y_n) \in \mathscr{I}$*. Por lo tanto,* $\mathscr{I} = \mathscr{C}$*. Así,* $\mathscr{N}$ *es ideal maximal.*

Definición 2.2.3. *Se define el cuerpo de los números p-ádicos como:* $\mathbb{Q}_p = \mathscr{C}/\mathscr{N}$.

Para extender el valor absoluto al cuerpo $\mathbb{Q}_p$, se mostrará un resultado que involucra las sucesiones de Cauchy.

Teorema 2.2.6. *Sea* $(x_n) \in \mathscr{C}$*,* $(x_n) \notin \mathscr{N}$*. La sucesión de números reales es eventualmente esta-*

cionaria, es decir, existe un entero N tal que $|x_n|_p = |x_m|_p$ *si n,* $m \geq N$.

Demostración. Puesto que $(x_n) \in \mathscr{C}$, se sigue que (x_n) es de Cauchy. Además, dado que $(x_n) \notin \mathscr{N}$, se tiene que $x_n \nrightarrow 0$, y así, existen $c > 0$ y $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$, entonces $|x_n|_p \geq c > 0$. Por otra parte, (x_n) es una sucesión de Cauchy, luego $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si n, $m \geq N_2$, entonces $|x_n - x_m|_p < \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = c > 0$, se tiene: $|x_n - x_m|_p < c$. Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$; luego, si n, $m \geq N$, entonces:

$$|x_n - x_m|_p < c \leq |x_n|_p, \text{ y } |x_n - x_m|_p < c \leq |x_m|_p.$$

Si n, $m \geq N$, entonces $|x_n - x_m|_p \leq \text{máx}\{|x_n|_p, |x_m|_p\}$. Dado que $|\cdot|_p$ es no-arquimediano, se tiene que todos los triángulos son isósceles, y por tanto, $|x_n|_p = |x_m|_p$ si n, $m \geq N$. □

Definición 2.2.4. *Si* $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ *y* (x_n) *es cualquier sucesión de Cauchy representante de* λ*, se define:*

$$|\lambda|_p = \lim_{n\to\infty} |x_n|_p. \tag{14}$$

Abusando de la notación, suele usarse el mismo símbolo $(|\cdot|_p)$ para representar el valor absoluto *p-ádico* sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}_p$, ya que posteriormente se trabajará sobre $\mathbb{Q}_p$.

Teorema 2.2.7. *La función* $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}^+$ *definida por* $|\lambda|_p = \lim_{n\to\infty} |x_n|_p$*, es un valor absoluto no arquimediano.*

2.3. Propiedades de $\mathbb{Q}_p$

En la sección anterior, se abordaron elementos conceptuales importantes, dentro de los cuales $\mathbb{Q}_p$ es completo con respecto a la norma (o valor absoluto) *p-ádica* $|\cdot|_p$. Asimismo, el conjunto

de valores de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}_p$ bajo $|\cdot|_p$ es igual, es decir:

$$\left\{x \in \mathbb{R}^+ : x = |\lambda|_p,\ \lambda \in \mathbb{Q}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : x = |\lambda|_p,\ \lambda \in \mathbb{Q}_p\right\}.$$

De lo anterior, se tiene que para cada $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$, existe un entero $v_p(x)$ tal que $|x|_p = p^{-v_p(x)}$. Esto implica que la valuación *p-ádica* se extiende a $\mathbb{Q}_p$. Como consecuencia de la desigualdad triangular fuerte $|x+y|_p \leq \text{máx}\{|x|_p, |y|_p\}$ se obtiene la siguiente definición.

Definición 2.3.1. *El anillo de enteros p-ádicos es el conjunto*

$$\mathbb{Z}_p = \left\{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\right\}. \tag{15}$$

Definición 2.3.2. *El anillo $\mathbb{Z}_p$ de enteros p-ádicos, es un anillo local cuyo ideal maximal es el ideal principal*

$$p\mathbb{Z}_p = \left\{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq \frac{1}{p}\right\}. \tag{16}$$

Por tanto, cada elemento del complemento $\mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p$ es invertible en $\mathbb{Z}_p$, siendo los únicos elementos invertibles en $\mathbb{Z}_p$. En efecto, con base en la definición anterior:

(i) $\mathbb{Z}_p$ es un subanillo de $\mathbb{Q}_p$, es decir,

a) Si $x, y \in \mathbb{Z}_p$, implica que $(x-y) \in \mathbb{Z}_p$.

b) Si $x, y \in \mathbb{Z}_p$, entonces $xy \in \mathbb{Z}_p$.

c) $1 \in \mathbb{Z}_p$, puesto que $|1|_p = 1 \leq 1$. Por lo tanto, de *a*), *b*) y *c*), se sigue que $\mathbb{Z}_p$ es un subanillo de $\mathbb{Q}_p$.

(*ii*) $p\mathbb{Z}_p$ es ideal de $\mathbb{Z}_p$.

(*iii*) $p\mathbb{Z}_p$ es ideal maximal de $\mathbb{Z}_p$, y además es único.

(*iv*) Cada elemento de $\mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p$ es invertible en $\mathbb{Z}_p$, siendo los únicos elementos invertibles en $\mathbb{Z}_p$.

Definición 2.3.3. *El grupo de unidades de $\mathbb{Z}_p$ es el conjunto*

$$\mathbb{Z}_p^* = \left\{ x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1 \right\}. \tag{17}$$

Definición 2.3.4. *Se define la bola con centro en a y radio p^r como el conjunto*

$$B(a, p^r) = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leq p^r,\ r \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{18}$$

Observación 2.3.1. *Es irrelevante hacer distinción entre una bola abierta y una bola cerrada, puesto que*

$$B(a, p^r) = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p < p^r,\ r \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leq p^{r-1},\ r \in \mathbb{Z} \right\} = \overline{B}(a, p^{r-1}).$$

Definición 2.3.5. *La esfera con centro en a y radio p^r es el conjunto*

$$S(a, p^r) = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p = p^r,\ r \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{19}$$

Teorema 2.3.1. *Se tienen las siguientes propiedades de las esferas y las bolas en $\mathbb{Q}_p$:*

i) $B(a,p^r)$ *es un conjunto abierto y cerrado.*

ii) *Si* $b \in B(a,p^r)$, *entonces* $B(a,p^r) = B(b,p^r)$.

iii) *Si* $a,b \in \mathbb{Q}_p$, *entonces* $B(a,p^r) \cap B(b,p^s) \neq \varnothing$, *si y solo si,* $B(a,p^r) \subset B(b,p^s)$ *o* $B(b,p^s) \subset B(a,p^r)$.

Teorema 2.3.2. *Sean $a \in \mathbb{Q}_p$ y $n \in \mathbb{Z}$. Los conjuntos de la forma $a + p^n\mathbb{Z}_p$ son bolas en $\mathbb{Q}_p$; más específicamente, $a + p^n\mathbb{Z}_p = B(a,p^{-n})$.*

Demostración. Sea $a + p^n\mathbb{Z}_p = \left\{a + p^n y : y \in \mathbb{Z}_p\right\}$. Luego:

$$
\begin{aligned}
x \in a + p^n\mathbb{Z}_p &\iff x = a + p^n y, && \left(\text{Definición de } a + p\mathbb{Z}_p,\ y \in \mathbb{Z}_p\right),\\
&\iff x - a = p^n y, && \left(\text{Sumando } (-a) \text{ a ambos lados}\right),\\
&\iff |x-a|_p = |p^n y|_p = |p^n|_p |y|_p, && \left(|xy|_p = |x|_p |y|_p\right),\\
&\iff |x-a|_p = p^{-n}|y|_p \leq p^{-n}(1) = p^{-n}, && \left(y \in \mathbb{Z}_p, \text{ y por def. de valuación } p\text{-ádica}\right),\\
&\iff x \in B(a,p^{-n}), && \left(\text{Definición de } B(a,p^{-n})\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $a + p^n\mathbb{Z}_p = B(a,p^{-n})$. □

Teorema 2.3.3. *Sean $a \in \mathbb{Q}_p$ y $n \in \mathbb{Z}$. Los conjuntos de la forma $a + p^n\mathbb{Z}_p^*$ son esferas en $\mathbb{Q}_p$; más específicamente, $a + p^n\mathbb{Z}_p^* = S(a,p^{-n})$.*

Teorema 2.3.4. *$\mathbb{Q}_p$ es un espacio de Hausdorff totalmente disconexo.*

Definición 2.3.6. *Sean $a,b \in \mathbb{Q}_p$. Se dice que a y b son congruentes módulo p^n, y se escribe:*

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\, p^n) \Longleftrightarrow |a-b|_p \leq p^{-n}. \tag{20}$$

Teorema 2.3.5. *La inclusión $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$ con la topología de subespacio tiene una imagen densa. En particular, dado $x \in \mathbb{Z}_p$ y $n \geq 1$, existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq \alpha \leq p^n - 1$, tal que $|x-\alpha|_p \leq p^{-n}$. El entero α con estas propiedades es único. Para cualquier $x \in \mathbb{Z}_p$, existe una sucesión de Cauchy α_n que converge a x con las siguientes características:*

i) $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ *para todo n y* $0 \leq \alpha_n \leq p^n - 1$.

ii) *Para cada n, se tiene que* $\alpha_n \equiv \alpha_{n-1}(\mathrm{mod}\ p^{n-1})$.

La sucesión (α_n) con estas propiedades es única.

Teorema 2.3.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{Z}_p$. Por el Teorema 2.3.5, se sigue que existe un único $\alpha_x \in \mathbb{Z}$ tal que $|x-\alpha_x|_p \leq p^{-n}$ y $0 \leq \alpha_x \leq p^n - 1$. Sea $f : \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ dada por $f(x+p^n\mathbb{Z}_p) = \alpha_x + p^n\mathbb{Z}$.

i) f está bien definida: Considere los conjuntos

$$x + p^n\mathbb{Z}_p = \left\{x + p^n z : z \in \mathbb{Z}_p\right\}.$$

$$y + p^n\mathbb{Z}_p = \left\{y + p^n w : w \in \mathbb{Z}_p\right\}.$$

$$p^n\mathbb{Z}_p = \left\{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq p^{-n}\right\}.$$

Si $x+p^n\mathbb{Z}_p = y+p^n\mathbb{Z}_p$, entonces sea $a \in x+p^n\mathbb{Z}_p$, luego $a = x+p^n z = y+p^n w$, donde $z,w \in \mathbb{Z}_p$. De esta manera, $x-y = (w-z)p^n = mp^n$, con $m = w-z \in \mathbb{Z}_p$. Así, $x-y \in p^n\mathbb{Z}_p$, y por definición, $|x-y|_p \leq p^{-n}$. Entonces

$$\begin{aligned}\left|\alpha_x-\alpha_y\right|_p &= \left|\alpha_x-x+x-y+y-\alpha_y\right|_p = \left|(\alpha_x-x)+(x-y)+(y-\alpha_y)\right|_p,\\ &\leq \text{máx}\left\{\left|(\alpha_x-x)\right|_p,\left|(x-y)\right|_p,\left|(y-\alpha_y)\right|_p\right\} = p^{-n}.\end{aligned}$$

Lo anterior implica que $\alpha_x \equiv \alpha_y (\text{mod}\, p^n)$, esto es $\alpha_x + p^n\mathbb{Z} = \alpha_y + p^n\mathbb{Z}$. Por lo tanto, $f(x+p^n\mathbb{Z}_p) = f(y+p^n\mathbb{Z}_p)$. Así, f está bien definida.

ii) f es biyección.

- f es inyectiva: Puesto que si $f(x+p^n\mathbb{Z}_p) = f(y+p^n\mathbb{Z}_p)$, entonces $\alpha_x + p^n\mathbb{Z} = \alpha_y + p^n\mathbb{Z}$, lo cual implica que $\alpha_x \equiv \alpha_y (\text{mod}\, p^n)$. Luego,

$$\begin{aligned}|x-y|_p &= \left|x-\alpha_x+\alpha_x-\alpha_y+\alpha_y-y\right|_p,\\ &\leq \text{máx}\left\{\left|(x-\alpha_x)\right|_p,\left|(\alpha_x-\alpha_y)\right|_p,\left|(\alpha_y-y)\right|_p\right\} \leq p^{-n},\end{aligned}$$

  y por definición, se sigue que $x-y \in p^n\mathbb{Z}_p$. Así, $x+p^n\mathbb{Z}_p = y+p^n\mathbb{Z}_p$. Por tanto, f es inyectiva.

- f es sobreyectiva: Dado que para cada $k+p^n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, existe un $x+p^n\mathbb{Z}_p \in \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$ tal que $f(x+p^n\mathbb{Z}_p) = k+p^n\mathbb{Z}$.

iii) f es homomorfismo.

- Se tiene que $f(1+p^n\mathbb{Z}_p) = 1+p^n\mathbb{Z}$.

- Se verificará que $f((x+p^n\mathbb{Z}_p)+(y+p^n\mathbb{Z}_p)) = f(x+p^n\mathbb{Z}_p)+f(y+p^n\mathbb{Z}_p)$. Puesto que si $x,y \in \mathbb{Z}_p$, entonces $x+y \in \mathbb{Z}_p$. Además, usando el Teorema 2.3.5, se sigue que existe únicos α_x, α_y, $\alpha_{x+y} \in \mathbb{Z}$ tales que $|x-\alpha_x|_p \leq p^{-n}$, $|y-\alpha_y|_p \leq p^{-n}$, $|x+y-\alpha_{x+y}|_p \leq p^{-n}$; donde $0 \leq \alpha_x \leq p^n-1$, $0 \leq \alpha_y \leq p^n-1$ y $0 \leq \alpha_{x+y} \leq p^n-1$. Así

$$\begin{aligned}
|\alpha_x+\alpha_y-\alpha_{x+y}|_p &= |\alpha_x-x+\alpha_y-y+x+y-\alpha_{x+y}|_p, \\
&\leq \text{máx}\left\{|\alpha_x-x|_p, |\alpha_y-y|_p, |x+y-\alpha_{x+y}|_p\right\}, \\
&= \text{máx}\left\{|x-\alpha_x|_p, |y-\alpha_y|_p, |x+y-\alpha_{x+y}|_p\right\} \leq p^{-n}.
\end{aligned}$$

Lo anterior, implica que $\alpha_x+\alpha_y \equiv \alpha_{x+y} (\text{mod}\, p^n)$; de esta manera, $\alpha_{x+y}+p^n\mathbb{Z} = \alpha_x+\alpha_y+p^n\mathbb{Z}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
f((x+p^n\mathbb{Z}_p)+(y+p^n\mathbb{Z}_p)) &= f(x+y+p^n\mathbb{Z}_p) = \alpha_{x+y}+p^n\mathbb{Z} = \alpha_x+\alpha_y+p^n\mathbb{Z}, \\
&= (\alpha_x+p^n\mathbb{Z})+(\alpha_y+p^n\mathbb{Z}) = f(x+p^n\mathbb{Z}_p)+f(y+p^n\mathbb{Z}_p).
\end{aligned}$$

- Ahora, se probará que $f((x+p^n\mathbb{Z}_p)(y+p^n\mathbb{Z}_p)) = f(x+p^n\mathbb{Z}_p)f(y+p^n\mathbb{Z}_p)$. Dado que $x,y \in \mathbb{Z}_p$, se tiene que $xy \in \mathbb{Z}_p$; usando el Teorema 2.3.5, se sigue que existen únicos α_x, α_y, $\alpha_{xy} \in \mathbb{Z}$ tales que $|x-\alpha_x|_p \leq p^{-n}$, $|y-\alpha_y|_p \leq p^{-n}$, $|xy-\alpha_{xy}|_p \leq p^{-n}$; donde

$0 \leq \alpha_x \leq p^n - 1$, $0 \leq \alpha_y \leq p^n - 1$ y $0 \leq \alpha_{xy} \leq p^n - 1$. Luego

$$\begin{aligned}\left|\alpha_{xy} - \alpha_x\alpha_y\right|_p &= \left|\alpha_{xy} - xy + xy - y\alpha_x + y\alpha_x - \alpha_x\alpha_y\right|_p, \\ &\leq \text{máx}\left\{\left|\alpha_{xy} - xy\right|_p, |xy - y\alpha_x|_p, \left|y\alpha_x - \alpha_x\alpha_y\right|_p\right\}, \\ &= \text{máx}\left\{\left|xy - \alpha_{xy}\right|_p, |y|_p|x - \alpha_x|_p, |\alpha_x|_p\left|y - \alpha_y\right|_p\right\} \leq p^{-n}.\end{aligned}$$

De esta manera, $\alpha_x\alpha_y \equiv \alpha_{xy} (\text{mod}\, p^n)$, lo cual implica que $\alpha_{xy} + p^n\mathbb{Z} = \alpha_x\alpha_y + p^n\mathbb{Z}$. Así

$$\begin{aligned}f((x + p^n\mathbb{Z}_p)(y + p^n\mathbb{Z}_p)) &= f(xy + p^n\mathbb{Z}_p) = \alpha_{xy} + p^n\mathbb{Z} = \alpha_x\alpha_y + p^n\mathbb{Z}, \\ &= (\alpha_x + p^n\mathbb{Z})(\alpha_y + p^n\mathbb{Z}) = f(x + p^n\mathbb{Z}_p)f(y + p^n\mathbb{Z}_p).\end{aligned}$$

Luego, f es homomorfismo y biyectiva. Por lo tanto, $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

□

Teorema 2.3.7. *Las esferas son conjuntos abiertos y cerrados.*

Demostración. Dado que $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p$, por el Teorema 2.3.6, se sigue que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Esto implica que los números $0, 1, 2, \cdots, p^n - 1$ son representantes de las clases de $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$, es decir

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{i=0}^{p^n-1} (i + p^n\mathbb{Z}_p) = \bigcup_{i=0}^{p^n-1} B(i, p^{-n}) \Longrightarrow \mathbb{Z}_p^* = \bigcup_{i=1}^{p-1} (i + p\mathbb{Z}_p) = \bigcup_{i=1}^{p-1} B(i, p).$$

En consecuencia,

$$S(a,p^n) = a + p^{-n}\mathbb{Z}_p^* = a + p^{-n}\left(\bigcup_{i=1}^{p-1}(i+p\mathbb{Z}_p)\right) = \bigcup_{i=1}^{p-1}(a+ip^{-n}+pp^{-n}\mathbb{Z}_p),$$
$$= \bigcup_{i=1}^{p-1}(a+ip^{-n}+p^{-n+1}\mathbb{Z}_p) = \bigcup_{i=1}^{p-1}(a+ip^{-n}+p^{-(n-1)}\mathbb{Z}_p) = \bigcup_{i=1}^{p-1}B(a+ip^{-n},p^{-(n-1)}).$$

Así, $S(a,p^n)$ es un conjunto abierto y cerrado para cada $a \in \mathbb{Q}_p$ y $n \in \mathbb{Z}$, pues las bolas son conjuntos abiertos y cerrados. □

Hasta este momento, se han abordado algunas propiedades algebraicas y topológicas de $\mathbb{Q}_p$. Los siguientes resultados permiten establecer la compacidad de $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$ y de sus esferas y bolas. Asimismo, dichos resultados serán de gran utilidad para introducir posteriormente un proceso de integración en $\mathbb{Q}_p$.

Teorema 2.3.8. *$\mathbb{Z}_p$ es compacto.*

Demostración. Dado que $\mathbb{Z}_p = \left\{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\right\} = B(0,1)$ es un conjunto cerrado, y además $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$ donde $\mathbb{Q}_p$ es completo, se tiene que $\mathbb{Z}_p$ es completo. Usando el Teorema 2.3.6, se sigue que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Entonces los números $0,1,2,\cdots,p^n-1$ son representantes de las clases de $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$, es decir

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{i=0}^{p^n-1}(i+p^n\mathbb{Z}_p) = \bigcup_{i=0}^{p^n-1}B(i,p^{-n}).$$

Luego, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p^{-n} < \varepsilon$, de esta manera se obtiene

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{i=0}^{p^n-1} B(i, p^{-n}) \subset \bigcup_{i=0}^{p^n-1} B(i, \varepsilon).$$

Así, $\mathbb{Z}_p$ es totalmente acotado. Usando el Teorema de Heine-Borel[3], se sigue que $\mathbb{Z}_p$ es compacto.

□

Teorema 2.3.9. *Las esferas y las bolas son conjuntos compactos.*

Teorema 2.3.10. $\mathbb{Q}_p$ *es localmente compacto*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{Q}_p$ y se define $B(a,1) = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leq 1 \right\} \subset \mathbb{Q}_p$. Usando el Teorema 2.3.9, se sigue que $B(a,1)$ es compacto. Dado que $\mathbb{Q}_p$ es un espacio de Hausdorff,[4] se tiene que $\mathbb{Q}_p$ es localmente compacto. □

Teorema 2.3.11. $\mathbb{Q}_p^*$ *es localmente compacto.*

Teorema 2.3.12. $\mathbb{Z}_p^*$ *es compacto.*

---

[3] **Teorema de Heine-Borel:** Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ con la topología usual. Entonces K es compacto si, y solo si, K es cerrado y acotado. (Herrero, 2010)

[4] Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces X es localmente compacto si y solo si, cada $x \in X$ tiene una vecindad relativamente compacta. (Pérez, 2015)

2.4. Representación en $\mathbb{Q}_p$

Teorema 2.4.1. *Cada $x \in \mathbb{Z}_p$ puede escribirse de la forma*

$$x = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + \cdots + b_n p^n + \cdots,$$

donde $0 \leq b_i \leq p-1$. Además, esta representación es única.

Teorema 2.4.2. *Cada $x \in \mathbb{Q}_p$ puede escribirse de la forma*

$$x = b_{-n_0} p^{-n_0} + b_{-n_0+1} p^{-n_0+1} + \cdots + b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_n p^n + \cdots = \sum_{n \geq -n_0} b_n p^n,$$

donde $0 \leq b_n \leq p-1$ y $b_{-n_0} \neq 0$. Esta representación es única. Además $v_p(x) = -n_0$.

Ejemplo 2.4.1. *Se tiene que $-1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \cdots$. En efecto, tomando sumas parciales, se obtiene*

$$\begin{aligned} S_n &= (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \cdots + (p-1)p^n, \\ &= (p-1)(1 + p + p^2 + \cdots + p^n) = (p-1)\sum_{i=0}^{n} p^i. \end{aligned}$$

Puesto que $\sum_{i=0}^{n} p^i$ representa una serie geométrica, se sigue que

$$S_n = (p-1)\sum_{i=0}^{n} p^i = (p-1)\left(\frac{p^{n+1}-1}{p-1}\right) = p^{n+1} - 1.$$

Ahora: $\lim_{n\to\infty}\left|p^{n+1}\right|_p = \lim_{n\to\infty} p^{-n-1} = 0$. *Esto implica que* $\lim_{n\to\infty} p^{n+1} = 0$. *Así,*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}(p^{n+1}-1),\\ &= \lim_{n\to\infty} p^{n+1} - \lim_{n\to\infty} 1,\\ &= 0-1=-1.\end{aligned}$$

De lo anterior, se tiene que $-1=(p-1)\sum_{i=0}^{\infty} p^i$. *Así,* $\sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{1}{1-p}$.

Ejemplo 2.4.2. *Probar que la expansión p-ádica de* $\frac{1}{p}$ *es:* $\frac{1}{p} = \frac{p+1}{p} + \frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^{\infty} p^i$.

Demostración. Considere la serie $\frac{p+1}{p} + \frac{p-1}{p}p + \frac{p-1}{p}p^2 + \cdots + \frac{p-1}{p}p^n + \cdots$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{p+1}{p} + \frac{p-1}{p}p + \cdots + \frac{p-1}{p}p^n + \cdots &= \frac{p+1}{p} + \frac{p-1}{p}p\left(1+p+p^2+\cdots+p^n+\cdots\right),\\ &= \frac{p+1}{p} + \frac{p-1}{p}p\sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{p+1}{p} + \frac{p-1}{p}p\left(\frac{1}{1-p}\right),\\ &= \frac{p+1}{p} - 1 = \frac{p+1-p}{p} = \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la expansión *p-ádica* de $\frac{1}{p}$ está dada por $\frac{p+1}{p} + \frac{p-1}{p}p\sum_{i=1}^{\infty} p^i = \frac{1}{p}$.

□

2.5. Integración en $\mathbb{Q}_p$

En $\mathbb{Q}_p$ existe una medida que es una generalización de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Se presentarán a continuación algunos resultados sin demostración. Ver (Halmos, 1950).

Definición 2.5.1. *Sea $(G,*)$ un conjunto con una operación binaria y $\mathscr{T}$ una familia de subconjuntos de G. Un grupo topológico es una terna $(G,\mathscr{T},*)$ que satisface las siguientes propiedades:*

i) $(G,\mathscr{T})$ *es un espacio topológico,*

ii) $(G,*)$ *es un grupo, y,*

iii) las funciones $f: G\times G\to G$ y $h: G\to G$ definidas por $f(x,y)=xy$ y $h(x)=x^{-1}$ son continuas.

Definición 2.5.2. *Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función $f: X\to Y$ es un homeomorfismo si f es continua, biyectiva, y si además f^{-1} también es una función continua. Si existe un homeomorfismo $f: X\to Y$ se dice que los espacios X y Y son homeomorfos.*

Teorema 2.5.1. *Sea $(G,*)$ un grupo topológico localmente compacto. Entonces existe una medida regular de Borel única, salvo multiplicación por constantes positivas tal que*

i) $\int_U dx > 0$ *para cada conjunto abierto de Borel U distinto de vacío, y,*

ii) $\int_{x*E} dx = \int_E dx$ *para cada conjunto de Borel.*

Para obtener los detalles de la prueba del Teorema 2.5.1, consultar en (Halmos, 1950).

Definición 2.5.3. *La medida descrita en el Teorema 2.5.1, es una medida de Haar sobre G.*

Observación 2.5.1. *De lo anterior:*

- $(\mathbb{Q}_p,+)$ *es un grupo topológico localmente compacto. Entonces, de la definición anterior, se sigue que existe una medida de Haar dx sobre $(\mathbb{Q}_p,+)$, que es invariante respecto a los desplazamientos, es decir, $d(x+a)=dx$ para cada $a\in\mathbb{Q}_p$.*

- *Puesto que $\mathbb{Z}_p$ es compacto, y dx es una medida regular, se tiene:*

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx < \infty. \tag{21}$$

Así, se puede normalizar la medida por la condición:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1, \tag{22}$$

entonces dx es única.

- *Los abiertos compactos de $\mathbb{Q}_p$, es decir, $a + p^n\mathbb{Z}_p$, generan la σ-álgebra de Borel.*

- *La medida dx asigna a cada subconjunto abierto compacto U, un número real no negativo $\int_U dx$, que además satisface*

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{U_n} dx, \tag{23}$$

para todos los subconjuntos abiertos compactos U_n en $\mathbb{Q}_p$, que son disjuntos dos a dos tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ es compacto. Además, se cumple que

$$\int_{x_0+U} dx = \int_U dx. \tag{24}$$

Teorema 2.5.2. *Sea $d(ax)$ definida por $d(ax)(U) = dx(aU)$, entonces $d(ax)$ es una medida de*

Haar, y

$$d(ax) = |a|_p dx, \text{ donde } a \in \mathbb{Q}_p^*, \tag{25}$$

es decir

$$\int_{aU} dx = |a|_p \int_U dx. \tag{26}$$

Demostración. Sea $T_a : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ definida por $T_a(x) = ax$.

i) T_a está bien definida y es inyectiva: En efecto, si $x = y$, entonces:

$$x = y \iff ax = ay \iff T_a(x) = T_a(y).$$

ii) T_a es sobreyectiva: Sea $y \in \mathbb{Q}_p$, entonces $y = ax$, luego $x = \dfrac{y}{a}$. Así:

$$T_a(x) = T_a\left(\frac{y}{a}\right) = a\left(\frac{y}{a}\right) = y.$$

Por lo tanto, T_a es una biyección. Ahora, T_a es la restricción de la operación producto al conjunto $\{a\} \times \mathbb{Q}_p$, lo cual implica que T_a es continua.

Dado que la operación de tomar inversos multiplicativos es continua, se sigue que T_a^{-1} es continua, y usando la Definición 2.5.2, T_a es un homeomorfismo de $\mathbb{Q}_p$ en $\mathbb{Q}_p$; así, $d(ax)$ es una medida de Borel regular sobre $\mathbb{Q}_p$. Por la Observación 2.5.1, la invarianza de traslación

de dx, implica la invarianza de traslación de $d(ax)$, esto es para cada $y \in \mathbb{Q}_p$, se tiene

$$d(ax)(y+U) = dx(a(y+U)) = dx(ay+aU) = dx(aU) = d(ax)(U).$$

Por tanto, $d(ax)$ es una medida de Haar sobre $\mathbb{Q}_p$. Luego, existe una constante positiva $C(a)$ tal que $\int_{aU} dx = C(a) \int_U dx$. Sin pérdida de generalidad, para calcular $C(a)$ se escogerá un subconjunto abierto compacto $U = \mathbb{Z}_p$. Sea $a \in \mathbb{Z}_p$, entonces $|a|_p = p^{-k}$, donde $k \in \mathbb{N}$. Luego, $\mathbb{Z}_p = \bigcup_{i=0}^{p^k-1} (i + p^k\mathbb{Z}_p)$. Así, usando (23),

$$1 = \int_{\mathbb{Z}_p} dx = \int_{\bigcup_{i=0}^{p^k-1}(i+p^k\mathbb{Z}_p)} dx = \sum_{i=0}^{p^k-1} \int_{p^k\mathbb{Z}_p} dx = p^k \int_{p^k\mathbb{Z}_p} dx \Longrightarrow \int_{p^k\mathbb{Z}_p} dx = p^{-k} = |a|_p.$$

Puesto que $|a|_p = p^{-k}$, entonces $a = p^k u$, donde $u \in \mathbb{Z}_p^*$. Usando $\mathbb{Z}_p = u\mathbb{Z}_p$ se obtiene

$$\int_{a\mathbb{Z}_p} dx = \int_{p^k u\mathbb{Z}_p} dx = \int_{p^k\mathbb{Z}_p} dx = |a|_p.$$

Por lo tanto,

$$\int_{a\mathbb{Z}_p} dx = C(a) \int_{\mathbb{Z}_p} dx \Longrightarrow C(a) = |a|_p.$$

Para $a \notin \mathbb{Z}_p$ la prueba es análoga. Así

$$d(ax) = |a|_p dx, \ \textit{donde } a \in \mathbb{Q}_p^*.$$

□

Corolario 2.5.1. *Sea $f : U \to \mathbb{C}$, donde U es un conjunto de Borel (los conjuntos borelianos son abiertos y compactos). Entonces*

$$\int_U f(x)dx = |a|_p \int_{a^{-1}U+a^{-1}b} f(ay+b)dy, \tag{27}$$

para cualesquiera $a \in \mathbb{Q}_p^*$ y $b \in \mathbb{Q}_p$.

Ejemplo 2.5.1. *Calcular $\int_{B(0,p^r)} dx$, donde $r \in \mathbb{Z}$.*

Solución: *Dado que $0 + p^{-r}\mathbb{Z}_p = p^{-r}\mathbb{Z}_p = B(0,p^r)$, y escribiendo $x = p^{-r}y$, se sigue que $dx = d(p^{-r}y) = p^r y$. Además, $\left|p^{-r}\right|_p = p^r$, usando (22) y (26) del Teorema 2.5.2, se obtiene:*

$$\int_{B(0,p^r)} dx = \int_{p^{-r}\mathbb{Z}_p} dx = \left|p^{-r}\right|_p \int_{\mathbb{Z}_p} dx = p^r \int_{\mathbb{Z}_p} dx = p^r(1) = p^r.$$

Por lo tanto, $\int_{B(0,p^r)} dx = p^r$.

Ejemplo 2.5.2. *Calcular $\int_{S(0,p^r)} dx$, donde $r \in \mathbb{Z}$.*

Solución: *Puesto que $S(a,p^r) = B(a,p^r) - B(a,p^{r-1})$, usando el Ejemplo 2.5.1, se sigue que*

$$\int_{S(0,p^r)} dx = \int_{B(0,p^r)-B(0,p^{r-1})} dx = \int_{B(0,p^r)} dx - \int_{B(0,p^{r-1})} dx = p^r - p^{r-1} = p^r(1-p^{-1}).$$

Por lo tanto, $\int_{S(0,p^r)} dx = p^r(1-p^{-1})$.

Ejemplo 2.5.3. *Estimar* $Z(f,s)=\int_{\mathbb{Z}_p}|x|_p^s dx$, *donde* $s\in\mathbb{C}$ *y* $\mathrm{Re}(s)>-1$. *Además,* $\mathrm{Re}(s)$ *denota la parte real del número s.*

Solución: *Tomando* $\{0,1,2,...,p-1\}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}_p$ *como un sistema de representantes de* $\mathbb{F}_p\cong\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$, *se tiene que*

$$\mathbb{Z}_p=\bigcup_{k=0}^{p-1}(k+p\mathbb{Z}_p).$$

Así, usando (23), *se obtiene*

$$\begin{aligned}Z(f,s)&=\int_{\mathbb{Z}_p}|x|_p^s dx=\int_{\bigcup_{k=0}^{p-1}(k+p\mathbb{Z}_p)}|x|_p^s dx,\\&=\sum_{k=0}^{p-1}\int_{k+p\mathbb{Z}_p}|x|_p^s dx=\int_{p\mathbb{Z}_p}|x|_p^s dx+\sum_{k=1}^{p-1}\int_{k+p\mathbb{Z}_p}|x|_p^s dx.\end{aligned}$$

Ahora, si $x\in k+\mathbb{Z}_p$, *donde* $k=1,2,...,p-1$, *entonces* $x=k+pw$ *con* $w\in\mathbb{Z}_p$. *Por consiguiente,* $|x|_p=|k+pw|_p\leq \max\left\{|k|_p,|pw|_p\right\}=\max\left\{1,p^{-1}|w|_p\right\}$. *Lo anterior implica que* $|x|_p=1$. *Por tanto, usando* (22), (23), (24) *y* (26) *del Teorema 2.5.2,*

$$\begin{aligned}Z(f,s)&=\int_{\mathbb{Z}_p}|x|_p^s dx=\sum_{k=1}^{p-1}\int_{k+p\mathbb{Z}_p}|x|_p^s dx+\int_{p\mathbb{Z}_p}|x|_p^s dx,\\&=\sum_{k=1}^{p-1}\int_{k+p\mathbb{Z}_p}dx+\int_{p\mathbb{Z}_p}|x|_p^s dx=\sum_{k=1}^{p-1}\int_{p\mathbb{Z}_p}dx+\int_{p\mathbb{Z}_p}|x|_p^s dx,\\&=(p-1)\int_{p\mathbb{Z}_p}dx+\int_{p\mathbb{Z}_p}|x|_p^s dx=(p-1)|p|_p\int_{\mathbb{Z}_p}dx+\int_{p\mathbb{Z}_p}|x|_p^s dx,\\&=(p-1)p^{-1}\int_{\mathbb{Z}_p}dx+\int_{p\mathbb{Z}_p}|x|_p^s dx=(p-1)p^{-1}(1)+\int_{p\mathbb{Z}_p}|x|_p^s dx=\frac{p-1}{p}+\int_{p\mathbb{Z}_p}|x|_p^s dx.\end{aligned}$$

Dado que $\mathbb{Z}_p = \bigcup_{k=0}^{p-1}(k+p\mathbb{Z}_p)$, *entonces* $p\mathbb{Z}_p = \bigcup_{k=0}^{p-1}(pk+p^2\mathbb{Z}_p)$. *Sea* $x \in (pk+p^2\mathbb{Z}_p)$, *entonces* $x = pk+p^2t$, *donde* $k = 1,2,...,p-1$ *y* $t \in \mathbb{Z}_p$. *Razonando de igual manera que en el paso anterior, se sigue que* $|x|_p = p^{-1}$. *Así*

$$\begin{aligned}
Z(f,s) &= \frac{p-1}{p} + \int_{p\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx = \frac{p-1}{p} + \int_{\bigcup_{k=0}^{p-1}(pk+p^2\mathbb{Z}_p)} |x|_p^s dx, \\
&= \frac{p-1}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \int_{pk+p^2\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx = \frac{p-1}{p} + \sum_{k=1}^{p-1} \int_{pk+p^2\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx + \int_{p^2\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx, \\
&= \frac{p-1}{p} + \sum_{k=1}^{p-1} \int_{pk+p^2\mathbb{Z}_p} (p^{-1})^s dx + \int_{p^2\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx, \\
&= \frac{p-1}{p} + \sum_{k=1}^{p-1} p^{-s} \int_{pk+p^2\mathbb{Z}_p} dx + \int_{p^2\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx, \\
&= \frac{p-1}{p} + (p-1)p^{-s} \int_{p^2\mathbb{Z}_p} dx + \int_{p^2\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx, \\
&= \frac{p-1}{p} + (p-1)p^{-s} \left|p^2\right|_p \int_{\mathbb{Z}_p} dx + \int_{p^2\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx, \\
&= \frac{p-1}{p} + \frac{p-1}{p^2} p^{-s}(1) + \int_{p^2\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx = \frac{p-1}{p} + \frac{p-1}{p^2} p^{-s} + \int_{p^2\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, continuando con este proceso de manera similar, y usando el hecho de que la serie que se obtiene es geométrica, se sigue que

$$\begin{aligned}
Z(f,s) &= \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx = \frac{p-1}{p} + \frac{p-1}{p^2} p^{-s} + \frac{p-1}{p^3} p^{-2s} + \cdots, \\
&= \frac{p-1}{p}\left(1 + p^{-s-1} + p^{2(-s-1)} + p^{3(-s-1)} \cdots\right) = \frac{p-1}{p}\left(\frac{1}{1-p^{-s-1}}\right), \text{ donde } \mathrm{Re}(s) > -1.
\end{aligned}$$

De esta manera, se concluye que $Z(f,s) = \frac{p-1}{p}\left(\frac{1}{1-p^{-s-1}}\right)$, *para* $\mathrm{Re}(s) > -1$.

Ejemplo 2.5.4. *Sea $U = \mathbb{Z}_p - \{0\}$, y considere la sucesión (p^{-n}). Luego, $\lim_{n\to\infty} p^{-n} = 0$, además cualquier subsucesión (p^{-n_k}) de (p^{-n}) converge a $0 \notin U$. De esta manera, U no es secuencialmente compacto y por tanto, U no es compacto.*

Por otra parte,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} p^n\mathbb{Z}_p = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(0,p^{-n}) = \{0\}.$$

Puesto que cada $p^n\mathbb{Z}_p$ es un conjunto de Borel, $p\mathbb{Z}_p \supset p^2\mathbb{Z}_p \supset p^3\mathbb{Z}_p \supset \cdots$ y $\int_{p\mathbb{Z}_p} dx = p^{-1}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{p^n\mathbb{Z}_p} dx = \lim_{n\to\infty} p^{-n} = 0 = \int_{\{0\}} dx.$$

Por lo tanto, usando (22) se obtiene

$$\int_{\mathbb{Z}_p-\{0\}} dx = \int_{\mathbb{Z}_p} dx - \int_{\{0\}} dx = 1 - 0 = 1.$$

Así, $\int_{\mathbb{Z}_p-\{0\}} dx = 1.$

Dado que $(\mathbb{Q}_p^*, \cdot)$ es un grupo topológico localmente compacto, entonces existe una medida de Haar $d\mu^*$ que se puede normalizar por la condición

$$\int_{\mathbb{Z}_p^*} d\mu^* = 1. \tag{28}$$

Teorema 2.5.3. *Se tiene la siguiente relación de medidas:*

$$d\mu^*(x) = \frac{1}{1-p^{-1}}\frac{dx}{|x|_p}. \tag{29}$$

Demostración. Se define la medida en $\mathbb{Q}_p^*$ como sigue:

$$A \to \int_A \frac{1}{1-p^{-1}}\frac{dx}{|x|_p}.$$

Para $b \in \mathbb{Q}_p^*$, tomando $x = bz$ y usando (26) del Teorema 2.5.2, se obtiene:

$$\int_{bA} \frac{1}{1-p^{-1}}\frac{dx}{|x|_p} = \int_A \frac{1}{1-p^{-1}}\frac{d(bz)}{|bz|_p} = \int_A \frac{1}{1-p^{-1}}\frac{|b|_p dz}{|b|_p|z|_p} = \int_A \frac{1}{1-p^{-1}}\frac{dz}{|z|_p}.$$

□

2.6. Caracteres sobre $\mathbb{Q}_p$

Para definir un caracter sobre $\mathbb{Q}_p$, se dará la definición de un caracter sobre $\mathbb{R}$. Se mostrarán algunos resultados que serán importantes para el desarrollo de la sección; algunos tendrón sus respectivas demostraciones, y en otros solo la referencia. Se denotará por $\widehat{G}$ al conjunto de todos los caracteres de G, donde G es un grupo localmente compacto.

Teorema 2.6.1. (***Teorema de la función abierta***)**.** *Sean G_1 y G_2 grupos localmente compactos tal que G_1 es unión contable de subconjuntos compactos. Si $\phi : G_1 \to G_2$ es un homomorfismo sobreyectivo, entonces es abierto. En particular, si ϕ es un homomorfismo biyectivo entonces es*

un isomorfismo.

Demostración. Ver (Deitmar and Echterhoff, 2014), Teorema 4.2.10. □

Lema 2.6.1. *Sea G un grupo topológico tal que existe una familia $\mathscr{F}$ de subgrupos de G,de manera que cualquier entorno de 1 contiene a un elemento de $\mathscr{F}$. Sea χ un cuasi-caracter en G. Entonces, el núcleo de χ contiene un elemento de $\mathscr{F}$. Si además, G es compacto y los elementos de $\mathscr{F}$ son entornos, se tiene que χ es un caracter de orden finito.*

Demostración. Ver (Galletti, 2018), Lema 2.3.5. □

Definición 2.6.1. *Si $a \in A$, se define ψ_a como el caracter de $(A,+)$ dado por $\psi_a(x) = \psi(ax)$ [6].*

Teorema 2.6.2. *La aplicación $\Psi : A \to \widehat{A}$ dada por $\Psi(a) = \psi_a$ es un homomorfismo de grupos topológicos. Además, si A es un cuerpo y ψ es no trivial, entonces Ψ es inyectiva.*

Demostración. Ver (Galletti, 2018), Proposición 2.3.4. □

Ejemplo 2.6.1. *La aplicación $e_\infty : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $e_\infty(x) = e^{2\pi ix}$ es un caracter de $\mathbb{R}$. Para cada $a \in \mathbb{R}$, los caracteres en $\mathbb{R}$ son de la forma $(e_\infty)_a \in \widehat{\mathbb{R}}$, donde $\widehat{\mathbb{R}}$ denota el conjunto de caracteres en $\mathbb{R}$, y S^1, el subgrupo de números complejos $\mathbb{C}$ de norma 1.*

Ahora, en el siguiente teorema se mostrará la forma de todos los caracteres en $\mathbb{R}$.

Teorema 2.6.3. *Sea χ un caracter de $\mathbb{R}$. Entonces, existe un único número real a, tal que $\chi = (e_\infty)_a$.*

Demostración. Note que la unicidad se obtiene por el Teorema 2.6.2, ya que $\mathbb{R}$ es cuerpo y e_∞ es un caracter no trivial. Ahora, se probará la existencia de a. Puesto que $\chi(0) = 1$ y χ es continuo, entonces existe $h > 0$ tal que $c = \int_0^h \chi(t)dt \neq 0$. Así, usando el Teorema 2.6.2, se sigue que χ es un homomorfismo. Luego, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\chi(x)c = \int_0^h \chi(x)\chi(t)dt = \int_0^h \chi(x+t)dt = \int_x^{x+h} \chi(t)dt,$$

y por tanto

$$\chi(x) = c^{-1}\int_x^{x+h} \chi(t)dt.$$

Dado que χ es diferenciable, usando el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\chi'(x) = c^{-1}\left(\chi(x+h) - \chi(x)\right) = c^{-1}\left(\chi(x)\chi(h) - \chi(x)\right) = c^{-1}\left(\chi(h) - 1\right)\chi(x) = k\chi(x),$$

donde $k = c^{-1}\left(\chi(h) - 1\right)$. De lo anterior, se tiene que $\chi'(x) = k\chi(x)$. Resolviendo esta ecuación diferencial de variables separables, se obtiene

$$\begin{aligned}\chi'(x) = k\chi(x) &\iff \frac{\chi'(x)}{\chi(x)} = k \iff \int \frac{\chi'(x)}{\chi(x)}dx = \int k dx,\\ &\iff \ln(\chi(x)) = kx + C_1 \iff e^{\ln(\chi(x))} = e^{kx+C_1},\\ &\iff \chi(x) = Ce^{kx},\end{aligned}$$

donde $C_1, C \in \mathbb{R}$. Ahora, usando la condición inicial $\chi(0) = 1$, se obtiene que $C = 1$. De esta manera, $\chi(x) = e^{kx}$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Puesto que $\left|\chi(x)\right| = 1$ para toda x, se escoge $a \in \mathbb{R}$ tal que $k = 2\pi ia$. Por lo tanto, $\chi(x) = e^{2\pi iax}$, y así, se concluye que $\chi = (e_\infty)_a$. □

Teorema 2.6.4. *La función $\Psi_\infty : \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$ dada por $\Psi_\infty(a) = (e_\infty)_a$ es un isomorfismo.*

Demostración. Dado que $\mathbb{R}$ es cuerpo y e_∞ es un caracter no trivial, por el Teorema 2.6.2, se sigue que Ψ_∞ es un homomorfismo inyectivo. Usando el Teorema 2.6.3, se tiene la unicidad de $a \in \mathbb{R}$, y por lo tanto, para cada $(e_\infty) \in \widehat{\mathbb{R}}$, existe un elemento $a \in \mathbb{R}$ tal que $\Psi_\infty(a) = (e_\infty)_a$. Por tanto, Ψ_∞ es sobreyectiva. Así, usando el Teorema 2.6.1, se sigue que Ψ_∞ es un isomorfismo. □

Definición 2.6.2. *Se define $\{x\}_p$ como la parte fraccionaria de $x \in \mathbb{Q}$ de la siguiente manera:*

$$\{x\}_p = \begin{cases} p^m \left(x_0 + x_1 p + \cdots + x_{|m|-1} p^{|m|-1}\right), & m < 0, \\ 0, & m \geq 0 \ o \ x = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Note que a partir de la Definición 2.6.2, se sigue que $\{x+y\}_p = \{x\}_p + \{y\}_p - N$, donde $N = 0, 1$.

Definición 2.6.3. *Se llama un caracter de grupo aditivo $\mathbb{Q}_p$, a una función continua (de valor complejo) $\chi(x)$ definida en $\mathbb{Q}_p$, tal que satisface las siguientes condiciones:*

i) $\left|\chi(x)\right| = 1$,

ii) $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$; $x, y \in \mathbb{Q}_p$.

Definición 2.6.4. *La función* $\chi : \mathbb{Q}_p \to S^1$ *dada por* $\chi_p(\xi x) = e^{2\pi i\{\xi x\}_p}$ *define un caracter aditivo de el cuerpo* $\mathbb{Q}_p$ *y* $B(a, p^r)$.

El caracter aditivo sobre $\mathbb{Q}_p$ definido anteriormente satisface las siguientes propiedades:

i) $\chi(0) = 1$.

ii) $\chi(-x) = \chi^{-1}(x)$.

iii) $\chi(nx) = \{\chi(x)\}^n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.6.5. *El grupo de los caracteres aditivos sobre* $\mathbb{Q}_p$ *es isomorfo al grupo aditivo* $\mathbb{Q}_p$. *La aplicación* $\xi \to \chi_p(\xi x)$ *define este isomorfismo. Denotando*

$$x_\infty(x) = e^{2\pi ix}, \tag{31}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, *entonces, la siguiente fórmula es válida para todo* $x \in \mathbb{Q}$:

$$\prod_{2 \le p \le \infty} \chi_p(x) = 1, \tag{32}$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{Q}$ arbitrario, tal que $x = N p_1^{-\alpha_1} p_2^{-\alpha_2} \cdots p_n^{-\alpha_n}$; donde $\alpha_j \in \mathbb{Z}^+$, p_j son números primos y $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\text{mcd}(N, p_j) = 1$, con $j = 1, 2, 3, \cdots, n$. Usando teoría de congruencias[5],

---

[5] Ver (Vladimirov et al., 1994; Vinogradov, 2003)

se sigue que x se puede expresar de la siguiente manera:

$$x = \frac{N_1}{p^{\alpha_1}} + \frac{N_2}{p^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{N_n}{p^{\alpha_n}} + M, \tag{33}$$

para algún $N_j \in \mathbb{Z}^+$, $1 \leq N_j < p_j^{\alpha_j} - 1$ y $M \in \mathbb{Z}$. Ahora, de la Definición 2.6.2, se tiene que la parte fraccionaria de x, está dada por:

$$\{x\}_{p_j} = \frac{N_j}{p_j^{\alpha_j}}, \{x\}_p = 0, p \neq p_j \text{ y } j = 1, 2, \cdots, n. \tag{34}$$

Por lo tanto:

$$\prod_{2 \leq p \leq \infty} \chi_p(x) = \prod_{1 \leq j \leq n} \chi_{p_j}(x) = \prod_{1 \leq j \leq n} e^{2\pi i \{x\}_{p_j}} = \prod_{1 \leq j \leq n} e^{2\pi i (N_j / p_j^{\alpha_j})} = e^{2\pi i \sum\limits_{1 \leq j \leq n} \{x\}_{p_j}} = e^{2\pi i x} = 1.$$

□

Definición 2.6.5. *Un caracter multiplicativo de $\mathbb{Q}_p^*$ es una aplicación continua $\pi : \mathbb{Q}_p^* \to \mathbb{C}^*$ que satisface $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$, con $x, y \in \mathbb{Q}_p^*$. Todo caracter multiplicativo de $\mathbb{Q}_p^*$ se puede escribir como*

$$\pi(x) = |x|_p^{s-1} \pi_0(|x|_p x), \tag{35}$$

donde π_0 es un caracter del grupo $S(0,1)$, $\left|\pi_0(x')\right|_p = 1$, $x' \in S(0,1)$ y $s \in \mathbb{C}$.

En efecto, sea π un caracter multiplicativo de $\mathbb{Q}_p$. Entonces, cualquier elemento $x \in \mathbb{Q}_p^*$ se

representa de la forma

$$x = |x|_p^{-1} x', \tag{36}$$

donde $x' \in S(0,1)$. Por tanto

$$\pi(x) = \pi(|x|_p^{-1} x') = \pi(|x|_p^{-1})\pi(x') = \pi(p^N)\pi(x') = [\pi(p)]^N \pi_0(x') = p^{(1-s)N}\pi_0(x') = |x|_p^{1-s}\pi_0(x'),$$

donde se denota $|x|_p = p^{-N}$ y $\pi(p) = p^{1-s}$.

3. Adéles $\mathbb{A}$

En esta sección se introducirá al concepto del anillo de los Adéles definido sobre un cuerpo de números algebraicos K (en particular y para el desarrollo del presente trabajo, el cuerpo de los números racionales).

3.1. Preliminares

Definición 3.1.1. *Sean* $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ *el conjunto de los números naturales y* $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ *el conjunto de los números primos. La función* $\psi(n)$ *denota la* ***segunda función de Chebyshev****, y se define por la relación:*

$$e^{\psi(n)} = \text{mcm}(1, 2, ..., n), \quad n \in \mathbb{N}; \tag{37}$$

donde $\text{mcm}(a, b)$ *denota el mínimo común múltiplo entre a y b.*

Por ejemplo, para $n = 7$ el valor de la segunda función de Chebyshev está dado por,

$$e^{\psi(7)} = \text{mcm}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) = 420.$$

Definición 3.1.2. *Se define la* ***función de von Mangoldt*** *denotada por* $\Lambda(n)$ *como*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p), & \text{si } n = p^k, \text{ para algún } p \in \mathbb{P},\ k \in \mathbb{N} \text{ y } k \geq 1, \\ 0, & \text{en otro caso}. \end{cases} \tag{38}$$

Para $n = 2 = 2^1$ el valor de la función de von Mangoldt está dado por $\Lambda(2) = \text{Log}(2)$. En la siguiente tabla se darán algunos valores para la función $\Lambda(n)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Lambda(n)$	0	$\text{Log}(2)$	$\text{Log}(3)$	$\text{Log}(2)$	$\text{Log}(5)$	0	$\text{Log}(7)$	$\text{Log}(2)$	$\text{Log}(3)$

Note que (37) y (38) están relacionadas por las ecuaciones equivalentes,

$$\psi(n) = \sum_{k=1}^{n} \Lambda(k), \;\; y \;\; e^{\psi(n)} = \prod_{k=1}^{n} e^{\Lambda(k)}. \tag{39}$$

En efecto, si $\psi(n) = \sum_{k=1}^{n} \Lambda(k)$, entonces

$$\begin{aligned} e^{\psi(n)} &= e^{\sum_{k=1}^{n} \Lambda(k)}, \\ &= e^{\Lambda(1)+\Lambda(2)+\cdots+\Lambda(n)}, \\ &= e^{\Lambda(1)} e^{\Lambda(k)} \cdots e^{\Lambda(n)} = \prod_{k=1}^{n} e^{\Lambda(k)}. \end{aligned}$$

Definición 3.1.3. *(Segunda Función de Chebyshev) Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, se define* ***la segunda función de Chebyshev*** *por*

$$\psi(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{|n|}\psi(|n|), & si\ n \neq 0, \\ 0, & si\ n = 0. \end{cases} \tag{40}$$

Definición 3.1.4. *La **función simétrica de von Mangoldt** está dada por la relación*

$$e^{\Lambda(n)} = \frac{e^{\psi(n)}}{e^{\psi(n-1)}}; \tag{41}$$

esto es

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \Lambda(n), & \text{si } n > 0, \\ \Lambda(|n-1|) = \Lambda(|n|+1), & \text{si } n \leq 0. \end{cases} \tag{42}$$

Definición 3.1.5. *Dos sucesiones de Cauchy (a_n) y (b_n) de números racionales son equivalentes si $(a_n - b_n)$ converge a la sucesión nula. Es decir, para todo $l \in \mathbb{Z}$*

$$(a_n - b_n) \in e^{\psi(l)}\mathbb{Z}, \text{ para n suficientememte grande.} \tag{43}$$

Observación 3.1.1. *De lo anterior, se tiene:*

i) Si $e^{\psi(n)} < e^{\psi(n+1)}$, entonces $\dfrac{e^{\psi(n+1)}}{e^{\psi(n)}}$ es un número primo dado por $e^{\Lambda(n+1)} = \dfrac{e^{\psi(n+1)}}{e^{\psi(n)}}$. Por ejemplo, si $n = 7$, el valor de la función $e^{\Lambda(n)}$

$$e^{\Lambda(7)} = \frac{e^{\psi(7)}}{e^{\psi(6)}} = \frac{\text{mcm}(1,2,3,4,5,6,7)}{\text{mcm}(1,2,3,4,5,6)} = \frac{420}{60} = 7.$$

ii) Si $e^{\psi(n)} = e^{\psi(n+1)}$, entonces $e^{\Lambda(n)} = 1$. Un caso en particular se da cuando $n = 10$, dado que $e^{\psi(10)} = e^{\psi(9)} = 2520$ y

$$e^{\Lambda(10)} = \frac{e^{\psi(10)}}{e^{\psi(9)}} = \frac{\text{mcm}(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)}{\text{mcm}(1,2,3,4,5,6,7,8,9)} = \frac{2520}{2520} = 1.$$

- *Los valores para el caso i), forman el conjunto:*

$$\mathscr{C} = \left\{-p^l : l \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}\right\} \cup \left\{p^l - 1 : l \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}\right\}. \tag{44}$$

- *Sea $\rho : \mathbb{Z} \to \mathscr{C}$ la única función biyectiva para la cual, la función $e^{\psi(\rho(n))}$ es estrictamente creciente, con $e^{\psi(\rho(0))} = 1$. Para efectos prácticos, se escribirá $e^{\psi(n)}$ y $e^{\Lambda(n)}$, en lugar de $e^{\psi(\rho(n))}$ y $e^{\Lambda(\rho(n))}$ respectivamente.*

- $\dfrac{e^{\psi(n+1)}}{e^{\psi(n)}}$ *es un número primo positivo $e^{\Lambda(n+1)}$. Además, para cualquier número $n > m$, las funciones $\psi(n)$ y $\Lambda(n)$ satisfacen*

$$\psi(n) - \psi(m) = \sum_{k=m+1}^{n} \Lambda(k), \;\; y \;\; \frac{e^{\psi(n)}}{e^{\psi(m)}} = \prod_{k=m+1}^{n} e^{\Lambda(k)}. \tag{45}$$

En efecto, usando (39)*:*

$$\begin{aligned}
\psi(n) - \psi(m) \sum_{k=1}^{n} \Lambda(k) - \sum_{k=1}^{m} \Lambda(k), & \\
&= \big(\Lambda(1) + \cdots + \Lambda(m) + \cdots + \Lambda(n)\big) - \big(\Lambda(1) + \Lambda(2) + \cdots + \Lambda(m)\big), \\
&= \big(\Lambda(m+1) + \Lambda(m+2) + \cdots + \Lambda(n)\big), \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} \Lambda(k).
\end{aligned}$$

Análogamente:

$$\frac{e^{\psi(n)}}{e^{\psi(m)}} = \frac{\prod_{k=1}^{n} e^{\Lambda(k)}}{\prod_{k=1}^{m} e^{\Lambda(k)}} = \frac{e^{\Lambda(1)}e^{\Lambda(2)}\cdots e^{\Lambda(m)}e^{\Lambda(m+1)}\cdots e^{\Lambda(n)}}{e^{\Lambda(1)}e^{\Lambda(2)}\cdots e^{\Lambda(m)}},$$

$$= e^{\Lambda(m+1)}e^{\Lambda(m+2)}\cdots e^{\Lambda(n)},$$

$$= \prod_{k=m+1}^{n} e^{\Lambda(k)}.$$

- *De* (37)*, las sucesiones* $\left(e^{\psi(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ *y* $\left(\frac{1}{e^{\psi(-n)}}\right)_{n=0}^{\infty}$ *son equivalentes para* $n \in \mathbb{Z}^{-}$*. En efecto, si* $n < 0$*, usando* (40)*:*

$$e^{\psi(n)} = e^{-\frac{n}{n}\psi(-n)} = e^{-\psi(-n)} = \frac{1}{e^{\psi(-n)}}.$$

Por lo tanto, las sucesiones son equivalentes para $n < 0$*.*

- *Utilizando un procedimiento similar para escribir cualquier número racional con respecto a una base entera dada, cualquier número racional positivo q, admite una única representación como una suma finita:*

$$q = \sum_{k=\gamma}^{N} a_k e^{\psi(k)}, \quad \left(q \in \mathbb{Q}^{+}, \gamma \in \mathbb{Z}\right), \tag{46}$$

donde $a_\gamma \neq 0$ *y* $a_k \in \left\{0, 1, 2, ..., e^{\Lambda(k+1)} - 1\right\}$.

La observación anterior es de gran importancia para el análisis no-arquimediano del anillo finito de adéles $\mathbb{A}_f$, el cual se abordará en las secciones posteriores de este trabajo.

3.2. El anillo finito de los números adélicos

Definición 3.2.1. *A cada número entero n, le corresponde un subgrupo aditivo $e^{\Psi(n)}\mathbb{Z}$ de los números racionales $\mathbb{Q}$.*

- *Si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $e^{\Psi(n)}\mathbb{Z}$ es un ideal de $\mathbb{Z}$.*
- *Si $n \in \mathbb{Z}^-$, entonces $e^{\Psi(n)}\mathbb{Z}$ es un ideal fraccionario de $\mathbb{Q}$.*
- *La familia de todos estos subgrupos está totalmente ordenada bajo la relación de inclusión.*
- *La filtración*

$$\{0\} \subset \cdots \subset e^{\Psi(n)}\mathbb{Z} \subset \cdots \subset \mathbb{Z} \subset \cdots \subset e^{\Psi(m)}\mathbb{Z} \subset \cdots \subset \mathbb{Q}, \quad (m < 0 < n), \tag{47}$$

posee las siguientes propiedades:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} e^{\Psi(n)}\mathbb{Z} = \{0\}, \, y \, \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} e^{\Psi(n)}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}. \tag{48}$$

La colección de todos los subgrupos aditivos $\left\{e^{\Psi(n)}\mathbb{Z}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de vecindad de cero numerable, para una topología segundo numerable invariante aditiva sobre $\mathbb{Q}$. Puesto que $\mathbb{Q}$ es numerable, la topología sobre $\mathbb{Q}$ es generada por una colección numerable de conjuntos abiertos. Dicha topología sobre $\mathbb{Q}$ se denomina la **topología finita adélica** sobre $\mathbb{Q}$. Ahora, dado que la intersección numerable de la base de vecindad sobre cero, consta únicamente del punto cero se sigue que la topología adélica finita sobre $\mathbb{Q}$ es Hausdorff.

Definición 3.2.2. *Una sucesión (a_n) de números racionales es de* ***Cauchy*** *en la* ***topología finita adélica*** *sobre $\mathbb{Q}$, si para todo $k \in \mathbb{Z}$, existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$, entonces $(a_n - a_m) \in e^{\psi(k)}\mathbb{Z}$; es decir, $e^{\psi(k)}$ divide a $(a_n - a_m)$, esto es, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $ce^{\psi(k)} = a_n - a_m$.*

Toda sucesión constante de números racionales es de Cauchy, (en particular, la sucesión nula).

Ejemplo 3.2.1. *Sea S_n las sumas parciales de la sucesión $x = \sum_{k=\gamma}^{\infty} a_k e^{\psi(k)}$ dada por*

$$S_n = \sum_{k=\gamma}^{n} a_k e^{\psi(k)}. \tag{49}$$

Entonces, S_n es una sucesión de Cauchy sobre la topología finita adélica sobre $\mathbb{Q}$. En efecto, si $n \geq m$,

$$\begin{aligned} S_n - S_m &= (a_\gamma e^{\psi(\gamma)} + \cdots + a_m e^{\psi(m)} + \cdots + a_n e^{\psi(n)}) - (a_\gamma e^{\psi(\gamma)} + \cdots + a_m e^{\psi(m)}), \\ &= (a_{m+1} e^{\psi(m+1)} + a_{m+2} e^{\psi(m+2)} + \cdots + a_n e^{\psi(n)}) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k e^{\psi(k)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $e^{\psi(k)}$ divide a $S_n - S_m$. Así, S_n es una sucesión de Cauchy.

Definición 3.2.3. *Se define el conjunto $\mathscr{C}(\mathbb{Q})$ de todas las sucesiones de Cauchy sobre la topología finita adélica como sigue:*

$$\mathscr{C}(\mathbb{Q}) = \left\{(a_n) : (a_n) \text{ es una sucesión de Cauchy}\right\}. \tag{50}$$

De la definición anterior, se tiene que $\mathscr{C}(\mathbb{Q})$ es un anillo conmutativo con unidad. En efecto:

- $(\mathscr{C}(\mathbb{Q}),+)$ es un grupo abeliano.
- $(\mathscr{C}(\mathbb{Q}),\cdot)$ es conmutativa.
- Existe $1=(1)\in\mathscr{C}(\mathbb{Q})$ tal que para toda $(a_n)\in\mathscr{C}(\mathbb{Q})$: $(1)\cdot(a_n)=(1\cdot a_n)=(a_n)$.
- $\big((a_n)+(b_n)\big)\cdot(c_n)=(a_n)(c_n)+(b_n)(c_n)$, para cada $(a_n),(b_n),(c_n)\in\mathscr{C}(\mathbb{Q})$.

Definición 3.2.4. *Una sucesión de Cauchy se llama trivial, si ésta converge a cero. es decir,* $a_n\to 0$ *cuando* $n\to\infty$.

Definición 3.2.5. *Se define el conjunto* $\mathscr{C}_0(\mathbb{Q})$ *de todas las sucesiones de Cauchy triviales sobre la topología finita adélica como sigue:*

$$\mathscr{C}_0(\mathbb{Q})=\big\{(a_n):(a_n)\text{ es una sucesión de Cauchy y }a_n\to 0\text{, cuando }n\to\infty\big\}. \tag{51}$$

Definición 3.2.6. *La terminación* $\overline{\mathbb{Q}}$ *de* $\mathbb{Q}$ *es el conjunto* $\overline{\mathbb{Q}}=\mathscr{C}(\mathbb{Q})/\mathscr{C}_0(\mathbb{Q})$ *con la topología dada por las sucesiones de Cauchy definidas anteriormente.*

De lo anterior, se infiere que $\overline{\mathbb{Q}}$ es un espacio topológico completo en el que la inclusión natural de $\mathbb{Q}$ con la topología finita adélica en $\overline{\mathbb{Q}}$ es densa.

3.3. Series Ádicas

Las series ádicas son una representación de los elementos de $\overline{\mathbb{Q}}$, y esta representación es una generalización de las series en $\mathbb{Q}_p$. La construcción de un elemento $x\in\overline{\mathbb{Q}}$ visto como una serie, se

mostrará en esta sección.

Sea (a_n) una sucesión de Cauchy de números racionales. Si (a_n) no es la sucesión nula en $\overline{\mathbb{Q}}$, entonces existe un elemento máximo γ tal que existe una subsucesión (b_n) con $b_n \notin e^{\psi(\gamma)}\mathbb{Z}$. Puesto que (b_n) es una sucesión de Cauchy, existe una subsucesión (c_n) tal que $c_n \notin e^{\psi(\gamma)}\mathbb{Z}$ y $c_n - c_{n-1} \in e^{\psi(\gamma)}\mathbb{Z}$. Por lo tanto, existe un único entero $l_{\gamma-1} \in \left\{1, 2, \cdots, e^{\Lambda(\gamma)} - 1\right\}$ tal que $c_n - l_{\gamma-1}e^{\psi(\gamma-1)} \in e^{\psi(\gamma)}\mathbb{Z}$ para todo n.

Razonando de manera análoga, si $c_n - l_{\gamma-1}e^{\psi(\gamma-1)}$ es una sucesión de Cauchy, entonces existe una subsucesión d_n de c_n tal que

$$d_n - d_{n-1} \in e^{\psi(\gamma+1)}\mathbb{Z}. \tag{52}$$

Por lo tanto, existe un único entero l_γ tal que $l_\gamma \in \left\{0, 1, 2, \cdots, e^{\Lambda(\gamma+1)} - 1\right\}$, y

$$d_n - l_{\gamma-1}e^{\psi(\gamma-1)} - l_\gamma e^{\psi(\gamma)} \in e^{\psi(\gamma+1)}\mathbb{Z}, \textit{ para todo } n. \tag{53}$$

Inductivamente, las sumas parciales de la forma

$$\left(\sum_{k=\gamma-1}^{\gamma-1+n} l_k e^{\psi(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \tag{54}$$

constituyen una sucesión representante de $(a_n) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Por tanto, todo elemento x distinto de cero en $\overline{\mathbb{Q}}$ tiene un representante, denotado también por x, que puede escribirse unívocamente como la

serie convergente

$$x = \sum_{k=\gamma}^{\infty} l_k e^{\psi(k)},\ \gamma \in \mathbb{Z}, \tag{55}$$

donde $l_k \in \left\{0, 1, 2, \cdots, e^{\Lambda(\gamma+1)} - 1\right\}$, $l_\gamma \neq 0$. Dada la representación de x mencionada anteriormente, el anillo $\overline{\mathbb{Q}}$ se denomina el **anillo finito de los números adélicos**.

3.4. Operaciones aritméticas en $\overline{\mathbb{Q}}$

Definición 3.4.1. *Sean $x, y \in \overline{\mathbb{Q}}$ con representación en series*

$$x = \sum_{k=\gamma}^{\infty} a_k e^{\psi(k)},\ y,\ y = \sum_{k=\gamma}^{\infty} b_k e^{\psi(k)}, \tag{56}$$

y sean $S_k(x)$ y $S_k(y)$ las sumas parciales

$$S_k(x) = \sum_{l=\gamma}^{k} a_l e^{\psi(l)},\ y,\ S_k(y) = \sum_{l=\gamma}^{k} b_l e^{\psi(l)}. \tag{57}$$

Los coeficientes $(c_n)_{k=\lambda}^{\infty}$ de la representación en serie de la suma

$$z = x + y = \sum_{k=\gamma}^{\infty} c_k e^{\psi(k)}, \tag{58}$$

están dados de la siguiente manera: Puesto que $e^{\psi(\gamma)}e^{\Lambda(\gamma+1)} = e^{\psi(\gamma+1)}$*, existe un único* $c_\gamma \in \left\{0,1,2,\cdots,e^{\Lambda(\gamma+1)}-1\right\}$ *tal que*

$$c_\gamma e^{\psi(\gamma)} \equiv a_\gamma e^{\psi(\gamma)} + b_\gamma e^{\psi(\gamma)} (\mathrm{mod}\, e^{\psi(\gamma+1)}). \tag{59}$$

Inductivamente, existe $c_k \in \left\{0,1,2,\cdots,e^{\Lambda(\gamma+1)}-1\right\}$*, con* $k \geq \gamma$ *tal que*

$$\sum_{l=\gamma}^{k} c_l e^{\psi(l)} = S_k(x) + S_k(y) (\mathrm{mod}\, e^{\psi(k+1)}). \tag{60}$$

Además, los coeficientes $(c_k)_{k=\lambda}^{\infty}$ *de la representación de la serie producto*

$$z = xy = \sum_{k=\gamma}^{\infty} c_k e^{\psi(k)}, \tag{61}$$

pueden encontrase de forma inductiva considerando

$$\sum_{l=\gamma}^{k} c_l e^{\psi(l)} = S_k(x) S_k(y) (\mathrm{mod}\, e^{\psi(k+1)}), \tag{62}$$

donde $c_k \in \left\{0,1,2,\cdots,e^{\psi(k+1)}-1\right\}$*. Además,* $\overline{\mathbb{Q}}$ *con las operaciones de suma y producto constituye un* ***anillo topológico,*** *puesto que las operaciones de suma y producto en este espacio topológico son continuas.*

Teorema 3.4.1. *Sean* $x, y \in \overline{\mathbb{Q}}$ *dos adéles finitos como representaciones en serie*

$$x=\sum_{k=\gamma}^{\infty} a_k e^{\psi(k)},\ y,\ y=\sum_{k=\gamma}^{\infty} b_k e^{\psi(k)}.$$

Los coeficientes $(c_k)_{k=\lambda}^{\infty}$ *de la representación de la serie suma* $z=x+y=\sum_{k=\gamma}^{\infty} c_k e^{\psi(k)}$, *están dados por*

$$c_k = a_k + b_k + r_{k-1} (\mathrm{mod}\, e^{\Lambda(k+1)}), \tag{63}$$

donde $c_k \in \{0,1,2,\cdots,e^{\Lambda(k+1)}-1\}$, $r_{\gamma-1}=0$ (*para* $k=\gamma,\cdots$), *y* r_k *es uno o cero, si* $(a_k+b_k+r_{k-1})$ *es mayor que* $e^{\Lambda(k+1)}$ *o no.*

Demostración. Ver (Aguilar-Arteaga et al., 2020).

□

3.5. Topología adélica

Definición 3.5.1. *Se define la función ord:* $\overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ *como*

$$\gamma(x) = ord(x) = \min\{k : a_k \neq 0\},\ \textit{donde}\ x=\sum_{k=\gamma}^{\infty} a_k e^{\psi(k)}. \tag{64}$$

La función $ord(x)$ satisface las siguientes propiedades:

i) $ord(x) \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

ii) $ord(x)=\infty$ si y solo si $x=0$.

iii) $ord(x+y) \geq \min\{ord(x), ord(y)\}$, para cualquier $x,y \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Definición 3.5.2. *Una métrica no arquimediana sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ está dada por*

$$d_{\overline{\mathbb{Q}}}(x,y) = e^{-\psi(ord(x-y))}, \text{ para todo } x,y \in \overline{\mathbb{Q}}. \tag{65}$$

Del item *iii*) de la Definición 3.5.1, implica que

$$d_{\overline{\mathbb{Q}}}(x,z) \leq \text{máx}\left\{d_{\overline{\mathbb{Q}}}(x,y), d_{\overline{\mathbb{Q}}}(y,z)\right\}, \text{ para todo } x,y \in \overline{\mathbb{Q}}. \tag{66}$$

La ultramétrica $d_{\overline{\mathbb{Q}}}$ toma valores en el conjunto $\left\{e^{\psi(n)}\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \{0\}$.

Definición 3.5.3. *Las bolas centradas en cero y radio distinto de cero son las completaciones de la filtración original*

$$B(0,e^{\psi(n)}) = \left\{ x \in \overline{\mathbb{Q}} : x = \sum_{k=\gamma}^{\infty} a_k e^{\psi(k)}, \text{ con } n \leq \gamma,\ n \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{67}$$

Definición 3.5.4. *La colección de números enteros finitos adélicos $\widehat{\mathbb{Z}}$ es la bola unitaria de $\overline{\mathbb{Q}}$*

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \left\{ x \in \overline{\mathbb{Q}} : x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{\psi(k)} \right\}. \tag{68}$$

Observación 3.5.1. *Note que:*

- *De la definición de adición y multiplicación, se sigue que $\widehat{\mathbb{Z}}$ es compacto y abierto de $\overline{\mathbb{Q}}$.*
- *$\widehat{\mathbb{Z}}$ contiene el conjunto de los números enteros como un subconjunto denso.*

- *De la construcción de $\overline{\mathbb{Q}}$, y usando el hecho de que $e^{\psi(n)}\mathbb{Z}$ es un ideal de $\mathbb{Z}$, se tiene que $\widehat{\mathbb{Z}}$ es la terminación profinita del anillo de los enteros $\mathbb{Z}$ (esto es: $\widehat{\mathbb{Z}}$ es el límite inverso de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para $n = 1,2,3,...$).*

- *Geométricamente, la propiedad no-arquimediana muestra que cualquier punto de una bola es su propio centro (de manera similar a $\mathbb{Q}_p$); además, una bola está contenida en otra o las dos son disjuntas.*

- *La propiedad no-arquimediana puede definirse algebraicamente de la siguiente manera: Para cada $n \in \mathbb{Z}$, se define*

$$\mathfrak{a}_n = e^{-\psi(n)}\widehat{\mathbb{Z}} = \left\{ x \in \overline{\mathbb{Q}} : e^{-\psi(n)}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right\}. \tag{69}$$

- *La colección $\{\mathfrak{a}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de vecindad de cero para la topología finita adélica sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Cada subgrupo $\mathfrak{a}_n$ provee una partición disjunta*

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{x\in\overline{\mathbb{Q}}/\mathfrak{a}_n} (x+\mathfrak{a}_n), \tag{70}$$

donde la unión se toma sobre un conjunto completo (numerable) de representantes del cociente $\overline{\mathbb{Q}}/\mathfrak{a}_n$. Sea $B_n(x)$ una bola con centro en x y radio $e^{\psi(n)}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{Z}$. Usando la propiedad no-arquimediana, se tiene que cualquier bola es compacta y abierta. Además, cada bola de la forma $B_n(x)$ coincide con el conjunto $x+\mathfrak{a}_n$, es decir $B_n(x) = x+\mathfrak{a}_n$.

Por lo tanto, la unión descrita en (70) *puede resscribirse como*

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{x \in \overline{\mathbb{Q}}/\mathfrak{a}_n} B_n(x), \tag{71}$$

donde la unión se toma de un conjunto completo de representantes del cociente $\overline{\mathbb{Q}}/\mathfrak{a}_n$.

- *Un conjunto completo de representantes del cociente* $\mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_{n-1}$ *determina*

$$\mathfrak{a}_n = \bigcup_{x \in \mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_{n-1}} (x + \mathfrak{a}_{n-1}), \tag{72}$$

la cual induce la partición

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{\substack{y \in \overline{\mathbb{Q}}/\mathfrak{a}_n \\ x \in \mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_{n-1}}} (y + x + \mathfrak{a}_{n-1}). \tag{73}$$

- *Una forma equivalente de describir a* $\overline{\mathbb{Q}}$ *es la función,*

$$\gamma(q) = \min\{l : q \in e^{\psi(l)}\mathbb{Z}\}, \tag{74}$$

que es un orden sobre $\mathbb{Q}$*, ya que satisface las propiedades de la Definición 3.5.1, y la función*

$$d_{\mathbb{Q}}(p,q) = e^{-\psi(ord(p-q))}, \tag{75}$$

para $p,q \in \mathbb{Q}$ *define una ultramétrica sobre* $\overline{\mathbb{Q}}$*. Ahora, como una consecuencia de escribir*

cualquier elemento de $\overline{\mathbb{Q}}$, se mostrará un resultado que caracteriza todos los subconjuntos compactos de $\overline{\mathbb{Q}}$.

Teorema 3.5.1. *El anillo topológico $\overline{\mathbb{Q}}$ satisface la propiedad de Heine-Borel; es decir, un subconjunto $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ es compacto si y solo si, K es cerrado y acotado. Por lo tanto, $\overline{\mathbb{Q}}$ es un anillo topológico localmente compacto.*

Demostración. Dado que en $\overline{\mathbb{Q}}$ se define una métrica no arquimediana (es decir se satisface la ultramétrica o desigualdad triangular fuerte (ver (66)), es suficiente probar que cualquier conjunto cerrado y acotado $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ es secuencialmente compacto (es decir, toda sucesión en $(x_k) \subset K$, posee una subsucesión convergente (x_{k_j}) tal que $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} \in K$). Sea $(x_k)_{k\geq 1}$ una sucesión acotada en $\overline{\mathbb{Q}}$ y se escribe

$$x_k = \sum_{l=\gamma(x_k)}^{\infty} a_k(l)e^{\psi(l)},\ (a_k(l) \in \{0,1,2,\cdots,e^{\Lambda(l+1)}-1\}).$$

Puesto que $(x_k)_{k\geq 1}$ es acotada, el conjunto $\{\gamma(x_k)\}$ es acotado inferiormente, se denota esta cota inferior por γ_0. Si el conjunto $\{\gamma(x_k)\}$ no es acotado superiormente, entonces $(x_k)_{k\geq 1}$ posee una subsucesión que converge a cero. Ahora, si el conjunto $\{\gamma(x_k)\}$ es acotado superiormente, entonces este solo tiene un número finito de valores. Por lo tanto, para algún $\gamma \in \mathbb{Z}$, existe una subsucesión de $(x_k)_{k\geq 1}$ con elementos de la forma

$$a_0e^{\psi(\gamma)} + a_1e^{\psi(\gamma+1)} + a_2e^{\psi(\gamma+2)} + \cdots,\ (a_l \in \{0,1,2,\cdots,e^{\Lambda(\gamma+l)}-1\},\ a_0 \neq 0).$$

Además, dado que a_0 puede tomar solo un número finito de valores, $a_0 \in \{1,\cdots,e^{\Lambda(\gamma)}-1\}$. Puesto que cada a_k puede tomar solo un número finito de valores, inductivamente, se puede encontrar una sucesión que converge a un punto límite distinto de cero

$$x = \sum_{l=\gamma}^{\infty} a_l e^{\psi(l)},\ (a_l \in \{0,1,2,\cdots,e^{\Lambda(l+1)}-1\},\ a_0 \neq 0).$$

□

Observación 3.5.2. *Para cada $p,q \in \mathbb{Q}$, donde $p,q \neq 0$, se tiene que $p\mathbb{Z}\cdot q\mathbb{Z} = pq\mathbb{Z}$. Por lo tanto, para cualquier número racional $l \neq 0$, la preimagen de $l\mathbb{Z}$ bajo la aplicación producto $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, es la unión de todo $p\mathbb{Z}\times q\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}^2$ tal que $pq = l$, esto es $f^{-1}(l\mathbb{Z}) = \bigcup_{p,q\in\mathbb{Q},\, pq=l} p\mathbb{Z}\times q\mathbb{Z}$. Puesto que la unión descrita anteriormente es un conjunto abierto, la terminación de los números racionales de la filtración anterior, produce un anillo topológico.*

De la observación anterior, puesto que $\overline{\mathbb{Q}}$ es un anillo topológico, entonces para cada $q \in \mathbb{Q}$ ($q \neq 0$), el conjunto $q\widehat{\mathbb{Z}}$ es un subgrupo abierto y compacto de $\overline{\mathbb{Q}}$. Por lo tanto, cualquier subgrupo abierto y compacto de $\overline{\mathbb{Q}}$ es de la forma $q\widehat{\mathbb{Z}}$ para todo $q \in \mathbb{Q}$ ($q \neq 0$).

3.6. Medida de Haar sobre los números adélicos finitos

Considere la función aditiva dx sobre las bolas adélicas dada por:

$$dx(B_n(x)) = dx(\mathfrak{a}_n) = e^{\psi(n)} = \begin{cases} [\mathfrak{a}_n : \widehat{\mathbb{Z}}]; & \text{si } n > 0, \\ [\widehat{\mathbb{Z}} : \mathfrak{a}_n]; & \text{si } n \leq 0, \end{cases} \tag{76}$$

donde $B_n(x) = x + \mathfrak{a}_n$ es una bola con centro en x y radio $e^{\psi(n)}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. Asimismo, $[\mathfrak{a}_n : \widehat{\mathbb{Z}}]$ representa el índice de $\mathfrak{a}_n$ en $\widehat{\mathbb{Z}}$. El conjunto de todas las bolas de radio positivo y el conjunto vacío forman un semianillo, y la función aditiva dx es una premedida σ-finita. Así, existe una

única medida de Borel sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ también denotada por dx. Puesto que cada bola $B_n(x)$ es compacta y abierta, por la construcción de dx, esta medida es invariante bajo traslaciones, es decir, para cada $a \in \overline{\mathbb{Q}}$, $d(x+a) = dx$. Por lo tanto, es una medida de Haar sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Teorema 3.6.1. *Para cada $q \in \mathbb{Q}$, la medida de Haar de $q\widehat{\mathbb{Z}}$ es q^{-1}.*

Demostración. Es suficiente calcular el índice de los subgrupos $l\widehat{\mathbb{Z}}$ para todo natural l. Note que $l\mathbb{Z} \cap e^{\Psi(n)}\mathbb{Z} = \text{mcd}(l, e^{\Psi(n)})\mathbb{Z} = l\mathbb{Z}$ para n suficientemente grande. La terminación de $l\mathbb{Z}$ es $l\widehat{\mathbb{Z}}$, además:

$$[\widehat{\mathbb{Z}} : l\widehat{\mathbb{Z}}] = [\mathbb{Z} : l\mathbb{Z}] = l.$$

□

Observación 3.6.1. *Como resumen de esta sección, se puede afirmar:*

- *La inclusión $\mathbb{Q} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ es densa y $\overline{\mathbb{Q}}$ es un espacio topológico separable.*
- *$\overline{\mathbb{Q}}$ tiene una métrica no-arquimediana $d_{\overline{\mathbb{Q}}}$ tal que, $(\overline{\mathbb{Q}}, d_{\overline{\mathbb{Q}}})$ es un espacio ultramétrico completo, y por lo tanto, es un espacio topológico totalmente disconexo.*
- *La ultramétrica $d_{\overline{\mathbb{Q}}}$ es la única ultramétrica aditiva invariante sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ cuyas bolas centradas en cero es precisamente, la colección $\{\mathfrak{a}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, y tal que la medida de Haar de cualquier bola es igual a su radio. En particular, $\widehat{\mathbb{Z}}$ tiene diámetro uno.*
- *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, si $x \in B_n(y)$, entonces $B_n(x) = B_n(y)$. Geométricamente, esto implica que todo punto de la bola es su propio centro.*

4. El anillo $\mathbb{A}_f$

4.1. Definiciones y resultados importantes

Definición 4.1.1. *Sea $\mathfrak{B}$ un conjunto de índices. Para cada $\alpha \in \mathfrak{B}$, sea G_α un grupo localmente compacto, tal que para $\alpha \in \mathfrak{B}$ excepto en algún subconjunto finito S_0, existe un subgrupo compacto y abierto H_α de G_α. Se define un grupo localmente compacto llamado* ***el producto directo restringido*** *de la familia de grupos $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{B}}$ con respecto a la familia de subgrupos $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{B}}$, denotado por $\prod_{\alpha\in\mathfrak{B}} (G_\alpha : H_\alpha)$ como sigue:*

$$\prod_{\alpha\in\mathfrak{B}} (G_\alpha : H_\alpha) = \left\{ (a_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\mathfrak{B}} G_\alpha : \ a_\alpha \in H_\alpha, \text{ para casi todo } \alpha \in \mathfrak{B} \right\}. \tag{77}$$

Definición 4.1.2. *Sea $\mathbb{Z}_p$ el anillo de los enteros p-ádicos y $\mathbb{Q}_p$ el cuerpo de los números p-ádicos. Un adéle finito de $\mathbb{Q}$, denotado por $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},fin} = \mathbb{A}_f$ es el producto restringido de $\mathbb{Q}_p$ con respecto a $\mathbb{Z}_p$. Esto es,*

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q},fin} = \mathbb{A}_f = \left\{ (a_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Q}_p : a_p \in \mathbb{Z}_p, \text{ para casi todos los primos } p \in \mathbb{P} \right\}, \tag{78}$$

donde $\mathbb{P}$ denota el conjunto de los números primos.

Observación 4.1.1. *Note que:*

- *La topología del producto directo restringido es la topología invariante aditiva única gene-*

rada por la base de vecindad de cero

$$\mathscr{N} = \left\{ q \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p : \ q \in \mathbb{Q},\, q \neq 0 \right\}, \tag{79}$$

la cual consiste de todos los subgrupos compactos y abiertos de $\mathbb{A}_f$, por el teorema de Tychonoff (*dado que $\mathbb{Z}_p$ es compacto y abierto*).

- *La inclusión diagonal de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{A}_f$ es densa, por lo cual $\mathbb{Q}$ tiene una única topología cuya terminación $\overline{\mathbb{Q}}$ es isomorfa como anillo topológico a $\mathbb{A}_f$. En el siguiente teorema, se darán más detalles sobre la relación existente entre $\overline{\mathbb{Q}}$ y $\mathbb{A}_f$.*

Teorema 4.1.1. *Existe un isomorfismo de anillos topológicos*

$$\overline{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_f, \tag{80}$$

el cual preserva la inclusión de $\mathbb{Q}$ en ambos anillos.

Demostración. Ver (Aguilar-Arteaga et al., 2020), pág 16. □

Observación 4.1.2. *Del Teorema 4.1.1 se obtiene:*

- *La representación en serie de cualquier adéle finito x es válida en $\mathbb{A}_f$. Es decir, la suma parcial*

$$s(x,N) = \sum_{l=\gamma}^{N} x_l e^{\psi(l)}, \tag{81}$$

es convergente en $\mathbb{A}_f$, con la topología del producto directo restringido. Ahora, usando la ultramétrica d_f, todo adéle finito $x \in \mathbb{A}_f$ se puede escribir como la serie

$$x = \sum_{l=\gamma}^{\infty} x_l e^{\psi(l)},\ (x_l \neq 0,\ l \in \mathbb{Z}), \tag{82}$$

con $x_l \in \{0,1,2,\cdots,e^{\Lambda(l+1)}-1\}$. Esta serie es convergente con la ultramétrica de $\mathbb{A}_f$. Los números x_l de la representación son únicos, y $ord(x) = \gamma \in \mathbb{Z}$.

- *Como parte de la notación de la ultramétrica en $\mathbb{A}_f$, se escribe $d_f(x,y) = d_{\overline{\mathbb{Q}}}(x,y)$ para $x,y \in \mathbb{A}_f$. Así, $|\cdot|_f = d_f(0,\cdot)$.*

Definición 4.1.3. *El anillo de adéles de $\mathbb{Q}$, denotado por $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{A}$, es definido como el producto de los adéles finitos con el producto de las completaciones con respecto a los primos infinitos del cuerpo de números algebraicos $\mathbb{Q}$. Es decir,*

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_f \times \prod_{p \leq \infty} \mathbb{Q}_p, \tag{83}$$

donde S_∞ denota el conjunto de los primos infinitos.

Definición 4.1.4. *La topología definida sobre $\mathbb{A}$ es llamada la topología restringida, donde los abiertos son de la forma*

$$U = \prod_{p \in S} U_p \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p, \tag{84}$$

donde S es un subconjunto finito de primos el cual siempre contiene a los primos infinitos y además, $U_p \subset \mathbb{Q}_p$ es abierto bajo la topología inducida por la valuación asociada al primo p.

Definición 4.1.5. *Sea $S \subset \mathbb{P}$ un subconjunto finito de números primos, el cual contiene a los primos infinitos. Entonces se define el conjunto de S-adéles de $\mathbb{Q}$ como*

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{S} = \prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p. \tag{85}$$

Observación 4.1.3. *Note que:*

- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{S}$ *es un subanillo de* $\mathbb{A}$.
- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{S}$ *es abierto y cerrado, ya que $\mathbb{Z}_p$ siempre es abierto y compacto para cada primo finito p.*
- *Para cada subconjunto finito de primos $S \subset \mathbb{P}$, se tiene que $\mathbb{A} = \bigcup_{S} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{S}$, donde la unión es tomada sobre cada subconjunto finito $S \subset \mathbb{P}$.*
- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{S}$ *es un subanillo de $\mathbb{A}_f$ localmente compacto con la topología producto debido al Teorema de Tychonoff (Carrillo Blanquicett, 2014), y además, contiene a $\prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p$ como anillo maximal.*
- $\prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p$ *es un subanillo localmente compacto.*

A continuación, se demostrarán algunas propiedades topológicas de $\mathbb{A}$, que involucran elementos de continuidad sobre una vecindad del elemento cero en $\mathbb{A}$. Así mismo, se mostrará otra forma de escritura del anilo de adéles $\mathbb{A}$, teniendo en cuenta que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo de números algebraicos y definiendo a S_∞ como el conjunto de primos infinitos.

Teorema 4.1.2. $\mathbb{A}$ *es un grupo topológico aditivo.*

Demostración. Basta con demostrar la continuidad alrededor del elemento cero de la función de adición. Sea

$$U = \prod_{p\in S} U_p \times \prod_{p\notin S} \mathbb{Z}_p = \left\{ (x_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p : x_p \in U_p, \text{ para cada } p \in S \right\}, \tag{86}$$

un abierto del cero en $\mathbb{A}$ como se definió en (85). Entonces existe un abierto V_p para cada $p \in S$ tal que $V_p^2 \subset U_p$. Ahora, se define

$$V = \prod_{p\in S} V_p \times \prod_{p\notin S} \mathbb{Z}_p = \left\{ (y_p)_{p\in\mathbb{P}} \in \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p : y_p \in V_p, \text{ para cada } p \in S \right\}, \tag{87}$$

como un conjunto abierto. Entonces se sigue que $V \times V$ es un abierto de $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$, tal que su imagen está contenida en U, es decir, $f(V \times V) \subset U$. □

Teorema 4.1.3. $\mathbb{A}$ *es localmente compacto.*

Demostración. Note que para cada $S \subset \mathbb{P}$ finito de números primos, entonces la topología inducida en $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^S$ por la topología en $\mathbb{A}$ coincide con la topología producto considerada en $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^S$.

Por el Teorema de Tychonoff (Carrillo Blanquicett, 2014), $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^S$ es localmente compacto con la topología producto, lo cual implica que $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^S$ es localmente compacto con la topología inducida. Por lo tanto, $\mathbb{A}$ es localmente compacto alrededor del elemento cero, ya que $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^S$ es abierto, el cual contiene a tal elemento. Luego, cada $(x_p) \in \mathbb{A}$ pertenece al conjunto abierto $(x_p) + \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^S$. Así, $\mathbb{A}$ es localmente compacto. □

Teorema 4.1.4. ***Teorema de aproximación:*** *Sea $\varepsilon > 0$ dado. Sean $p_1, p_2, \cdots, p_r$ en O_K, (K-cuerpo) y $x_1, x_2, \cdots, x_r \in K$. Entonces existe $x \in K$ tal que $|x - x_i|_{p_i} < \varepsilon$ y $v_p(x) \geq 0$ para $p \neq p_i$, (donde $1 \leq i \leq r$, y O_K es el anillo O definido sobre el cuerpo K).*

Para ver los detalles de este Teorema con su respectiva demostración, puede consultar en (Galletti, 2018) y en (Goldstein, 1971). Ahora, se usará el Teorema de aproximación para probar el siguiente resultado:

Teorema 4.1.5. *Sea S_∞ el conjunto de primos infinitos, entonces $\mathbb{A} = \mathbb{Q} + \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{S_\infty}$.*

Demostración. Note que $\mathbb{Q} + \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{S_\infty} \subset \mathbb{A}$.

Sea $a = (a_p) \in \mathbb{A}$ y se define el conjunto $T = \{p : a_p \notin \mathbb{Z}_p\}$. Usando el Teorema de aproximación, existe $y \in \mathbb{Q}$ tal que $v_p(y - a_p) \geq 0$ para $p \in T$, y $v_p(y) \geq 0$ para $p \notin T \cup S_\infty$.

- Si $p \in T$, entonces $y - a_p \in \mathbb{Z}_p$ por como se escogió y.
- Si $p \notin T \cup S_\infty$, entonces $y - a_p \in \mathbb{Z}_p$, ya que $v_p(y - a_p) \geq \text{mín}\{v_p(y), v_p(a_p)\} \geq 0$.

Por lo tanto, $y - (a_p) \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{S_\infty}$. Así, $a \in \mathbb{Q} + \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{S_\infty}$.

□

4.2. Caracteres sobre $\mathbb{A}_f$

En esta sección se introducirá el grupo de caracteres aditivos del grupo abeliano ($\mathbb{A}_f$,+). De igual manera, se definirá la parte fraccionaria de cualquier $x \in \mathbb{A}_f$, teniendo como referencia la serie definida en (82).

Definición 4.2.1. *Un caracter aditivo sobre el anillo $\mathbb{A}_f$ es un homomorfismo de grupos continuo $\chi : \mathbb{A}_f \to \mathbb{S}^1$, donde $\mathbb{S}^1$ denota el grupo multiplicativo de los números complejos $\mathbb{C}$ con norma igual a 1.*

Definición 4.2.2. *Se define* $\mathrm{Char}(\mathbb{A}_f)$ *como el grupo topológico que consiste de todos los homomorfismos continuos de $\mathbb{A}_f$ en $\mathbb{S}^1$ dotado de la topología compacta abierta. Esto es,*

$$\mathrm{Char}(\mathbb{A}_f) = \left\{ \chi : \mathbb{A}_f \to \mathbb{S}^1 : \ \chi \text{ es un homomorfismo continuo} \right\}. \tag{88}$$

Este grupo es llamado el **dual de Pontryagin** de $\mathbb{A}_f$, o el grupo de caracteres de $\mathbb{A}_f$. Note que si $\mathbb{A}_f$ es un grupo abeliano localmente compacto, entonces $\mathrm{Char}(\mathbb{A}_f)$ es también un grupo abeliano localmente compacto.

De la Observación 4.1.2 se sigue que cada adéle finito $x \in \mathbb{A}_f$ admite una representación de serie única como en (82):

$$x = \sum_{k=\gamma(x)}^{\infty} a_k e^{\psi(k)},$$

donde $a_{\gamma(x)} \neq 0$ y $a_k \in \{0, 1, 2, \cdots, e^{\Lambda(k+1)} - 1\}$. Ahora, si $\gamma(x) < 0$, entonces x puede descomponerse así:

$$x = \sum_{k=\gamma(x)}^{-1} a_k e^{\psi(k)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{\psi(k)}, \tag{89}$$

lo cual conlleva a la siguiente definición:

Definición 4.2.3. *La parte fraccionaria de $x \in \mathbb{A}_f$ se define como:*

$$\{x\} = \begin{cases} \sum_{k=\gamma(x)}^{-1} a_k e^{\psi(k)}, & si\ \gamma(x) < 0, \\ 0, & si\ \gamma(x) \geq 0\ . \end{cases} \tag{90}$$

De la definición anterior, se tiene que $x \in \widehat{\mathbb{Z}}$ si y solo si $\{x\} = 0$. Además, para cada $x \in \mathbb{A}_f$ con $\gamma(x) < 0$, la parte fraccionaria satisface la desigualdad

$$e^{\psi(\gamma)} \leq \{x\} \leq 1 - e^{\psi(\gamma)},\ (\gamma = ord(x)). \tag{91}$$

De lo anterior, se tiene que $\{x+y\} = \{x\} + \{y\} - N$, donde $N = 0, 1$.

Definición 4.2.4. *La función $\chi : \mathbb{A}_f \to \mathbb{S}^1$ dada por*

$$\chi(x) = \exp(2\pi i\{x\}),\ (x \in \mathbb{A}_f), \tag{92}$$

es un caracter aditivo canónico sobre $\mathbb{A}_f$.

La función definida en (92), es un homomorfismo de grupos bien definido sobre el círculo unitario. Ahora:

- Si $x \in \widehat{\mathbb{Z}}$, se tiene que $\{x\} = 0$. Por lo tanto, $\chi(x) = 1$.

- Si $x \in \mathbb{A}_f/\widehat{\mathbb{Z}}$, entonces $\gamma = \gamma(x) < 0$. Así:

$$\begin{aligned}
\chi(x) &= \exp(2\pi i\{x\}), \\
&= \exp\left(2\pi i \sum_{k=\gamma}^{-1} a_k e^{\psi(k)}\right), \\
&= \exp\left(\frac{2\pi i}{e^{-\psi(\gamma)}}\left(a_\gamma + a_{\gamma+1}e^{\psi(\gamma+1)-\psi(\gamma)} + \cdots + a_{-1}e^{\psi(-1)-\psi(\gamma)}\right)\right), \\
&= \exp\left(\frac{2\pi i}{e^{-\psi(\gamma)}} l\right),
\end{aligned}$$

  donde $l = a_\gamma + a_{\gamma+1}e^{\psi(\gamma+1)-\psi(\gamma)} + \cdots + a_{-1}e^{\psi(-1)-\psi(\gamma)}$ es un número entero menor que $e^{-\psi(\gamma)}$.

- Dado que la multiplicación es continua sobre $\mathbb{A}_f$, se tiene que para cada $\xi \in \mathbb{A}_f$, la función $\chi_\xi : \mathbb{A}_f \to \mathbb{S}^1$ definida por

$$\chi_\xi(x) = \chi(\xi x) = \exp(2\pi i\{\xi x\}), \tag{93}$$

  es un caracter aditivo sobre $\mathbb{A}_f$.

- Note que si $\chi \in \mathrm{Char}(\mathbb{A}_f)$ es cualquier caracter aditivo no-trivial, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que χ es trivial sobre $\mathfrak{a}_n$, pero no es trivial sobre $\mathfrak{a}_{n+1}$, donde

$$\mathfrak{a}_n = e^{-\psi(n)}\widehat{\mathbb{Z}} = \left\{ x \in \overline{\mathbb{Q}} : e^{-\psi(n)}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right\}.$$

En efecto: sea $V \subset \mathbb{S}^1$ una vecindad abierta de la identidad $1 \in \mathbb{S}^1$ tal que ningún subgrupo no-trivial de $\mathbb{S}^1$ está contenido en V. Puesto que $\chi \in \text{Char}(\mathbb{A}_f)$, usando la continuidad de χ, se sigue que $\chi^{-1}(V)$ es una vecindad abierta de $0 \in \mathbb{A}_f$, y por tanto, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathfrak{a}_n \subset \chi^{-1}(V)$. Dado que χ es un homomorfismo, esto implica que $\chi(\mathfrak{a}_n) \subset V$ es un subgrupo de $\mathbb{S}^1$, y por tanto debe ser trivial. Como χ es no-trivial, existe un mínimo $n \in \mathbb{Z}$ tal que χ es trivial sobre $\mathfrak{a}_n$, pero no es trivial sobre $\mathfrak{a}_{n+1}$. El número n es llamado el rango del caracter χ.

4.3. Integración en $\mathbb{A}_f$

Por el Teorema 3.6.1, se sigue que si $q \in \mathbb{Q}$, con $q \neq 0$, de esta manera el siguiente cambio de variable es válido:

$$d(qx) = q^{-1}dx. \tag{94}$$

Entonces, para cada $b \in \mathbb{A}_f$,

$$\int_C f(x)dx = q^{-1} \int\limits_{q^{-1}C - q^{-1}b} f(qx+b)dx, \tag{95}$$

donde $C \subset \mathbb{A}_f$ es cualquier subconjunto compacto. Puesto que $\widehat{\mathbb{Z}}$ es abierto y compacto de $\overline{\mathbb{Q}}$ (donde $\overline{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_f$), y, dx es una medida de Haar sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, se sigue que

$$\int_{\widehat{\mathbb{Z}}} dx < \infty. \tag{96}$$

Por lo tanto, esta medida se puede normalizar por la condición

$$\int_{\widehat{\mathbb{Z}}} dx = 1. \tag{97}$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, la bola $B(0, e^{\psi(n)})$ centrada en cero y de radio $e^{\psi(n)}$ es precisamente el subgrupo $\mathfrak{a}_n$.

Ejemplo 4.3.1. *Sea $q\mathfrak{a}_n = qe^{-\psi(n)}\widehat{\mathbb{Z}}$. Entonces, usando* (95) *y* (97)*,*

$$\int_{q\mathfrak{a}_n} dx = \int_{qe^{-\psi(n)}\widehat{\mathbb{Z}}} dx = q^{-1}e^{\psi(n)} \int_{\widehat{\mathbb{Z}}} dx = q^{-1}e^{\psi(n)}(1) = q^{-1}e^{\psi(n)}.$$

Ejemplo 4.3.2. *Se define la esfera centrada en cero y radio $e^{\psi(n)}$ como $\mathfrak{s}_n = \mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_{n-1}$. Dado que $e^{\Lambda(n)} = \dfrac{e^{\psi(n)}}{e^{\psi(n-1)}}$, entonces, se tiene*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{s}_n} dx &= \int\limits_{\mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_{n-1}} dx = \int_{\mathfrak{a}_n} dx - \int_{\mathfrak{a}_{n-1}} dx, \\
&= \int\limits_{e^{-\psi(n)}\widehat{\mathbb{Z}}} dx - \int\limits_{e^{-\psi(n-1)}\widehat{\mathbb{Z}}} dx, \\
&= e^{\psi(n)} - e^{\psi(n-1)} = e^{\psi(n)} - \frac{e^{\psi(n)}}{e^{\Lambda(n)}} = e^{\psi(n)}\left(1 - e^{-\Lambda(n)}\right).
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.3.3. *Para una función radial, se sigue que*

$$\int_{\mathbb{A}_f} f(|x|_f)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(e^{\psi(n)}\right) e^{\psi(n)}\left(1 - e^{-\Lambda(n)}\right). \tag{98}$$

Teorema 4.3.1. *(Criterio de la Integral) Si $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ es una función continua no creciente, entonces*

$$\int_{\mathbb{A}_f} f(|x|_f)dx < \int_0^{\infty} f(t)dt. \tag{99}$$

Demostración. Ver (Aguilar-Arteaga et al., 2020), pág 22. □

Ejemplo 4.3.4. *Se probará que para cada $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\int_{\mathfrak{a}_n} \chi(-\xi x)dx = \begin{cases} e^{\psi(n)}, & si\ |\xi|_f \leq e^{-\psi(n)}, \\ 0, & si\ |\xi|_f > e^{-\psi(n)}\ . \end{cases} \tag{100}$$

Demostración. Considere los siguientes casos:

- Si $|\xi|_f \leq 1$, entonces χ es un caracter trivial sobre $\mathfrak{a}_n$, lo cual implica que $\chi(-\xi x) = 1$. Así:

$$\int_{\mathfrak{a}_n} \chi(-\xi x)dx = \int\limits_{e^{-\psi(n)}\widehat{\mathbb{Z}}} \chi(-\xi x)dx = \int\limits_{e^{-\psi(n)}\widehat{\mathbb{Z}}} dx = e^{\psi(n)} \int\limits_{\widehat{\mathbb{Z}}} dx = e^{\psi(n)}.$$

- Si $|\xi|_f > 1$, entonces $\chi(-\xi x)$ es no trivial sobre $\mathfrak{a}_n$; luego, existe $b \in \mathfrak{a}_n$ tal que $\chi(-\xi x) \neq 1$ para todo $x \in \mathfrak{a}_n$. Por lo tanto, usando la invarianza de la medida de Haar, y el hecho de que χ es un homomorfismo, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{a}_n} \chi(-\xi x)dx &= \int_{\mathfrak{a}_n} \chi(-\xi(x+b))dx = \int_{\mathfrak{a}_n} \chi((-\xi x)+(-\xi b))dx, \\ &= \int_{\mathfrak{a}_n} \chi((-\xi x)\chi((-\xi b))dx = \chi((-\xi b)) \int_{\mathfrak{a}_n} \chi((-\xi x))dx. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que

$$\int_{\mathfrak{a}_n} \chi(-\xi x)dx - \chi((-\xi b))\int_{\mathfrak{a}_n} \chi((-\xi x))dx = (1-\chi((-\xi b)))\int_{\mathfrak{a}_n} \chi(-\xi x)dx = 0.$$

Dado que $\chi(-\xi x) \neq 1$, se sigue que $\int_{\mathfrak{a}_n} \chi(-\xi x)dx = 0$.

□

4.4. La transformada de Fourier sobre $\mathbb{A}_f$

Definición 4.4.1. *Una función $\varphi : \mathbb{A}_f \to \mathbb{C}$ se llama localmente constante, si para cada $x \in \mathbb{A}_f$, existe un abierto $U \subset \mathbb{A}_f$ tal que $\varphi(x+y) = \varphi(x)$, para cada $y \in U$.*

De la Definición 4.4.1, se obtiene que φ es invariante bajo traslaciones para cada $y \in U$.

Ejemplo 4.4.1. *Cualquier función localmente constante $\varphi : \mathbb{A}_f \to \mathbb{C}$ se puede expresar como una combinación lineal de funciones características de la forma*

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n 1_{\mathfrak{a}_n}(x), \tag{101}$$

donde $c_n \in \mathbb{C}$, y

$$1_{\mathfrak{a}_n}(x) = \begin{cases} 0; & si\ x \notin \mathfrak{a}_n, \\ 1; & si\ x \in \mathfrak{a}_n, \end{cases} \tag{102}$$

es la función característica definida sobre $\mathfrak{a}_n$. Además, cada $\mathfrak{a}_n \subset \mathbb{A}_f$ son abiertos y compactos

disjuntos dos a dos, y que cubren a $\mathbb{A}_f$.

Ejemplo 4.4.2. *Sea* $\varphi : \mathbb{A}_f \to \mathbb{C}$ *una función localmente constante, y sea* U *localmente compacto. Dado que cada abierto se puede cubrir con un número finito de bolas disjuntas, entonces* $U = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$, *donde* $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$, *con* $\mathfrak{a}_i$ *abierto y compacto. Lo anterior implica que*

$$\varphi\big|_U(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i 1_{\mathfrak{a}_i}(x), \tag{103}$$

donde $c_i \in \mathbb{C}$. *Por lo tanto, se obtiene*

$$\int_U \varphi(x)dx = c_1 \int_{\mathfrak{a}_1} dx + c_2 \int_{\mathfrak{a}_2} dx + \cdots c_k \int_{\mathfrak{a}_k} dx. \tag{104}$$

Definición 4.4.2. *Se denominan funciones de* ***Bruhat-Schwartz*** *a las funciones localmente constantes con soporte compacto. Estas funciones forman un espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$ *el cual se denotará por* $\mathscr{D}(\mathbb{A}_f) = \mathscr{D}$. *Dicho espacio vectorial se llama el espacio de* ***Bruhat-Schwartz***.

De otra forma: El espacio de **Bruhat-Schwartz** es el espacio de las funciones localmente constantes de $\mathbb{A}_f$ con soporte compacto. Note que si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{A}_f)$ es diferente de la función nula, entonces existe un máximo $\ell = \ell(\varphi) \in \mathbb{Z}$ tal que para cada $x \in \mathbb{A}_f$,

$$\varphi(x+y) = \varphi(x), \text{ para todo } y \in \mathfrak{a}_\ell. \tag{105}$$

El número ℓ es llamado el parámetro de constancia de φ.

Definición 4.4.3. *Sean $\ell, k \in \mathbb{Z}$, con $\ell \leq k$. Se define la colección de funciones localmente constantes con soporte compacto dentro de la bola compacta $\mathfrak{a}_k$ y parámetro de constancia ℓ como el conjunto $\mathscr{D}_k^\ell(\mathbb{A}_f)$.*

Teorema 4.4.1. *El conjunto $\mathscr{D}_k^\ell(\mathbb{A}_f)$ forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión $e^{\psi(k)}/e^{\psi(\ell)}$.*

Demostración. De la propiedad no-arquimediana de $\mathbb{A}_f$, se sigue que toda función $\varphi \in \mathscr{D}_k^\ell(\mathbb{A}_f)$ puede escribirse como

$$\varphi(x) = \sum_{a \in \mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_\ell} \varphi(a) 1_{\mathfrak{a}_\ell}(x-a),$$

donde la suma es tomada sobre un conjunto de representantes de $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_\ell$. Ahora, note que $\left|\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_\ell\right| = e^{\psi(k)}/e^{\psi(\ell)}$. De ahí, se tiene que $\dim(\mathscr{D}_k^\ell(\mathbb{A}_f)) = e^{\psi(k)}/e^{\psi(\ell)}$. □

De lo anterior, se sigue que si $k' \leq k$ y $\ell' \leq \ell$, entonces $\mathscr{D}_{k'}^{\ell'}(\mathbb{A}_f) \subset \mathscr{D}_k^\ell(\mathbb{A}_f)$.

Teorema 4.4.2. *Sean $\mathscr{D}(Q) \subset \mathscr{D}(\mathbb{A}_f)$ el subespacio de las funciones localmente constantes con soporte compacto definidas sobre un subconjunto compacto $Q \subset \mathbb{A}_f$, y $C(Q)$ el espacio de funciones continuas de valor complejo sobre Q. Entonces el espacio $\mathscr{D}(Q)$ es denso en $C(Q)$, por lo tanto, $\mathscr{D}(\mathbb{A}_f)$ es denso en $L^\rho(\mathbb{A}_f)$ con $1 \leq \rho < \infty$. Además, $L^\rho(\mathbb{A}_f)$ es separable para $1 \leq \rho < \infty$.*

Demostración. Ver (Aguilar-Arteaga et al., 2020), pág 27. □

Definición 4.4.4. *La transformada de Fourier de $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{A}_f)$ está dada por:*

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \mathscr{F}[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{A}_f} \varphi(x)\chi(\xi x)dx. \tag{106}$$

La transformada de Fourier de la función característica de la bola unitaria $\widehat{\mathbb{Z}}$ coincide consigo misma. Además, para cualquier $\ell \in \mathbb{Z}$:

$$\mathscr{F}[1_{\mathfrak{a}_\ell}(x)](\xi) = e^{\psi(\ell)} 1_{\mathfrak{a}_{-\ell}}(\xi) \tag{107}$$

Teorema 4.4.3. *La transformada de Fourier es una aplicación lineal de $\mathscr{D}_k^\ell(\mathbb{A}_f)$ a $\mathscr{D}_{-k}^{-\ell}(\mathbb{A}_f)$.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathscr{D}_k^\ell(\mathbb{A}_f)$, entonces

$$\varphi(x) = \sum_{a \in \mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_\ell} \varphi(a) 1_{\mathfrak{a}_\ell}(x-a),$$

donde la suma es tomada sobre un conjunto de representantes de $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_\ell$. Es suficiente aplicar la transformada de Fourier y usando (107) sobre las funciones características de la forma $1_{\mathfrak{a}_\ell}(x-a)$ para $a \in \mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_\ell$ fijo:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[1_{\mathfrak{a}_\ell}(x-a)](\xi) &= \int_{\mathbb{A}_f} \chi(\xi x) 1_{\mathfrak{a}_\ell}(x-a) dx = \int_{\mathbb{A}_f} \chi(\xi(x+a)) 1_{\mathfrak{a}_\ell}(x) dx, \\
&= \int_{\mathbb{A}_f} \chi(\xi x + \xi a) 1_{\mathfrak{a}_\ell}(x) dx = \int_{\mathbb{A}_f} \chi(\xi x)\chi(\xi a) 1_{\mathfrak{a}_\ell}(x) dx, \\
&= \chi(\xi a) \int_{\mathbb{A}_f} \chi(\xi x) 1_{\mathfrak{a}_\ell}(x) dx = \chi(\xi a) e^{\psi(\ell)} 1_{\mathfrak{a}_{-\ell}}(\xi).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathscr{F}[1_{\mathfrak{a}_\ell}(x-a)]$ tiene soporte sobre $\mathfrak{a}_{-\ell}$. Puesto que $a \in \mathfrak{a}_k$, el caracter $\chi(\xi a)$ es localmente constante sobre las bolas de radio $e^{\psi(-k)}$, es decir, tiene rango $-k$. Así, $\mathscr{F} : \mathscr{D}_k^\ell(\mathbb{A}_f) \to \mathscr{D}_{-k}^{-\ell}(\mathbb{A}_f)$ es una aplicación lineal. □

Teorema 4.4.4. *La transformada de Fourier es un isomorfismo lineal continuo del espacio $\mathscr{D}(\mathbb{A}_f)$ en si mismo. Además, la fórmula de inversión se cumple:*

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{A}_f} \chi(\xi x)\widehat{\varphi}(-\xi)d\xi,\ (\varphi \in \mathbb{A}_f)\ . \tag{108}$$

Adicionalmente, se cumple la igualdad de Parseval - Steklov:

$$\int_{\mathbb{A}_f} \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx = \int_{\mathbb{A}_f} \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(x)}d\xi. \tag{109}$$

Demostración. Dado que $\mathscr{F}$ es una transformación lineal de $\mathscr{D}(\mathbb{A}_f)$ en si misma, se probará que la fórmula de inversión se satisface. Usando el Teorema 4.4.3, se sigue que si $\varphi \in \mathscr{D}_k^{\ell}(\mathbb{A}_f)$, entonces $\widehat{\varphi} \in \mathscr{D}_{-k}^{-\ell}(\mathbb{A}_f)$. Así, usando el Teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{A}_f} \chi(\xi x)\widehat{\varphi}(-\xi)d\xi &= \int_{\mathfrak{a}_{-\ell}} \chi(\xi x)\int_{\mathfrak{a}_k} \varphi(-y)\chi(\xi y)dyd\xi = \int_{\mathfrak{a}_k} \varphi(-y)\int_{\mathfrak{a}_{-\ell}} \chi(\xi x)\chi(\xi y)d\xi dy,\\
&= \int_{\mathfrak{a}_k} \varphi(-y)\int_{\mathfrak{a}_{-\ell}} \chi(\xi x+\xi y)d\xi dy = \int_{\mathfrak{a}_k} \varphi(-y)\int_{\mathfrak{a}_{-\ell}} \chi(\xi(x+y))d\xi dy,\\
&= \int_{\mathfrak{a}_k} \varphi(-y)e^{-\psi(\ell)}1_{\mathfrak{a}_\ell}(x+y)dy = \sum_{a\in\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_\ell} \varphi(a)\int_{a+\mathfrak{a}_\ell} e^{-\psi(\ell)}1_{\mathfrak{a}_\ell}(x+y)dy,\\
&= \sum_{a\in\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_\ell} \varphi(a)\int_{\mathfrak{a}_\ell} e^{-\psi(\ell)}1_{\mathfrak{a}_\ell}(x+y)dy = \sum_{a\in\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_\ell} \varphi(a)\int_{e^{-\psi(\ell)}\widehat{\mathbb{Z}}} e^{-\psi(\ell)}1_{\mathfrak{a}_\ell}(x+y)dy,\\
&= \sum_{a\in\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_\ell} \varphi(a)e^{\psi(\ell)}e^{-\psi(\ell)}\int_{\widehat{\mathbb{Z}}} 1_{\mathfrak{a}_\ell}(x+y)dy = \sum_{a\in\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_\ell} \varphi(a)1_{\mathfrak{a}_\ell}(x-a) = \varphi(x).
\end{aligned}$$

□

Referencias Bibliográficas

Aguilar-Arteaga, V. A., Cruz-López, M., and Estala-Arias, S. (2020). Non-archimedean analysis and a wave-type pseudodifferential equation on finite adèles. *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications*, 11(3):1139–1181.

Becerra, L. R. J. (2004). *Teoría de números [para principiantes]*. Universidad Nacional de Colombia.

Burgos Guerrero, V. M. et al. (2019). Funciones zeta locales de igusa y operadores pseudodiferenciales sobre campos p-ádicos.

Carrillo Blanquicett, A. (2014). *El teorema de Tychonoff sobre varias estructuras topológicas*. PhD thesis, Universidad de Cartagena.

Deitmar, A. and Echterhoff, S. (2014). *Principles of harmonic analysis*. Springer.

Galletti, H. B. (2018). Analisis de fourier en el grupo de ideles y funciones l de dirichlet.

Goldstein, L. J. (1971). Analytic number theory. *(No Title)*.

Halmos, P. R. (1950). Measure theory. 1950. *New york*.

Herrero, P. (2010). Topologıa de espacios métricos. *Espana: Universidad de Murcia*.

Katok, S. (2007). *p-adic Analysis Compared with Real*, volume 37. American Mathematical Soc.

Neira Uribe, C. M. (2011). Topología general.

Pérez, J. A. (2015). Topología de conjuntos, un primer curso. *Publicaciones Electrónicas*, 18.

Quintero Campo, J. A. (2020). Fórmulas explícitas y cuerpos p-ádicos.

Vinogradov, I. M. (2003). *Elements of number theory*. Courier Corporation.

Vladimirov, V. S., Volovich, I. V., and Zelenov, E. I. (1994). *p-adic Analysis and Mathematical Physics*. World Scientific.