Ecuaciones diferenciales difusas y aplicaciones en teoría de control

Vladimir Angulo Castillo

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Maestría en Matemáticas
Bucaramanga
2013

Ecuaciones diferenciales difusas y aplicaciones en teoría de control

Autor

Vladimir Angulo Castillo

Trabajo de grado como requisito parcial para optar el título de

Magister en Matemáticas

Director

Elder Jesús Villamizar Roa, Ph.D.

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Maestría en Matemáticas
Bucaramanga
2013

Agradecimientos

- ◇ Agradezco a Dios por estar siempre cuidándome y protegiéndome en todo momento.
- ◇ Agradezco al profesor Elder por toda su colaboración e interés en mi proyecto, por todas sus recomendaciones y por su dedicación y empeño.
- ◇ Agradezco todo el apoyo que me brindó mi familia y amigos. En particular, a mi novia que siempre estuvo ahí para apoyarme y animarme a escribir mi proyecto.
- ◇ A todos quienes hicieron posible este gran logro que representa par mi.

Índice general

Índice de figuras

TITULO: ECUACIONES DIFERENCIALES DIFUSAS Y APLICACIONES EN TEORÍA DE CONTROL[1]

AUTOR: Vladimir Angulo Castillo[2]

PALABRAS CLAVE: Conjuntos difusos; Funciones difusas; Funciones débilmente contractivas; Diferenciabilidad difusa; Problemas de valor inicial difuso; Ecuación integro-diferencial.

DESCRIPCIÓN

Durante los últimos años, la teoría de las ecuaciones diferenciales difusas (EDD) y con ellos, los problemas de valor inicial asociados a las EDD, han tenido un sorprendente desarrollo debido en gran parte a su importancia en el modelado de sistemas dinámicos con datos que poseen cierto grado de imprecisión o incertidumbre, resolviendo de esta manera, varios inconvenientes que se presentan en el modelado matemático a través de la teoría clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Su desarrollo ha tomado diferentes direcciones teóricas, y un gran número de aplicaciones en diferentes problemas reales ha sido considerado (ver por ejemplo [3, 5, 7, 12, 16, 23, 27, 30, 31, 32]).

El presente trabajo lo hemos organizado de la siguiente manera. En el primer capítulo, presentamos los preliminares básicos sobre algunos de los diferentes tipos de derivadas difusas que han surgido y sobre algunos conceptos y propiedades de los espacios $\mathcal{F}^n$ y $C(J, \mathcal{F}^n)$.

En el segundo capítulo, presentamos algunos de los resultados recientes de punto fijo de funciones débilmente contractivas monótonas y generalizaciones, definidas sobre conjuntos parcialmente ordenados, y con ellos, probamos algunos resultados de punto fijo, los cuales constituirán una herramienta importante para el estudio de PVID.

En el tercer capítulo, primero recopilamos algunos de los resultados más destacados sobre la existencia y unicidad de soluciones a PVID usando H-derivada y GH-derivada y luego probamos algunos resultados sobre existencia y unicidad de solución a un PVID usando gH-derivada y teoremas de punto fijo dados en el Capítulo 2.

Finalmente, en el cuarto capítulo, mostramos algunos resultados que obtuvimos sobre existencia y unicidad de solución a un EDD con retardo finito, y también, estudiamos los PVID de una ecuación integro-diferencial con control. Estos resultados constituyen el aporte novedoso de este trabajo.

[1] Proyecto de Grado

[2] FACULTAD DE CIENCIAS, ESCUELA DE MATEMÁTICAS.
DIRECTOR Ph. D. Élder Jesús Villamizar Roa

TITLE: FUZZY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND APPLICATIONS IN CONTROL THEORY[1]
AUTHOR: Vladimir Angulo Castillo[2]

KEY WORDS: Fuzzy sets; Fuzzy functions; Weakly contractive functions; Fuzzy differentiability; Fuzzy initial value problems; Integro-differential equation.

DESCRIPTION In recent years, the theory of fuzzy differential equations (EDD) and with them, the initial value problems associated to the EDD, have had a surprising development due in large part to its importance in the modeling of dynamic systems with data that have certain degree of imprecision or uncertainty, thus solving several drawbacks that arise in the mathematical modeling through the classical theory of ordinary differential equations. Its development has taken different theoretical directions, and a large number of applications in different real problems has been considered (see for example [3, 5, 7, 12, 16, 23, 27, 30, 31, 32]).

The present paper have been organized as follows. In the first chapter, we present the basic preliminaries about some of the different types of fuzzy derivatives that have emerged and about some concepts and properties of the spaces $\mathcal{F}^n$ and $C(J, \mathcal{F}^n)$.

In the second chapter, we present some recent results from fixed point of weakly contractive monotone functions and generalizations, defined on partially ordered sets. Moreover, we prove some fixed point results, which constitute an important tool for the study of PVID .

In the third chapter, first we collect some of the most important results on the existence and uniqueness of solutions for PVID using H-derivative and GH-derived and then tried some results on existence and uniqueness of solution for PVID using gH-derivative and fixed point theorems given in Chapter 2.

Finally, in the fourth chapter, we show some results that we obtained on existence and uniqueness of solution for EDD with a finite delay, and also, we study the PVID of a integro-differential equation with control. These results constitute the novelty contribution of this work.

[1]Degree Project
[2]FACULTY OF SCIENCES, SCHOOL OF MATHEMATICS.
DIRECTOR Ph. D. Élder Jesús Villamizar Roa

Introducción

Durante los últimos años, la teoría de las ecuaciones diferenciales difusas (EDD) y con ellos, los problemas de valor inicial asociados a las EDD, han tenido un sorprendente desarrollo debido en gran parte a su importancia en el modelado de sistemas dinámicos con datos que poseen cierto grado de imprecisión o incertidumbre, resolviendo de esta manera, varios inconvenientes que se presentan en el modelado matemático a través de la teoría clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Su desarrollo ha tomado diferentes direcciones teóricas, y un gran número de aplicaciones en diferentes problemas reales ha sido considerado (ver por ejemplo [3, 5, 7, 12, 16, 23, 27, 30, 31, 32]). En términos generales, un problema de valor inicial (PVID) asociado a una EDD ordinaria de primer orden, consiste en encontrar una función difusa x definida en un intervalo J de números reales, con valores en una clase de conjuntos difusos definidos sobre $\mathbb{R}^n$, tal que

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $x_0 \in X$, X es una clase de conjuntos difusos, $t_0 \in J$ y $f\colon J \times X \longrightarrow X$ es una función difusa. Así, al plantear el PVID (1), observamos como primera medida, la necesidad de conocer el sentido de la derivada $x'(t)$ de la función incógnita difusa $x(t)$, lo cual ha sido el factor semilla en la búsqueda de abordajes teóricos para analizar la existencia de solución. Naturalmente, conocer el sentido de la derivada de x' no solo implica el desarrollo de la teoría de la diferenciabilidad de funciones difusas y sus propiedades, sino también, el desarrollo de la teoría de integrabilidad de funciones difusas.

El primer y más común abordaje de la derivada de x' ha sido a través de la denominada diferenciabilidad de Hukuhara para las funciones con valores difusos [16, 23, 27, 31]. Bajo este enfoque, varios resultados de existencia y unicidad de soluciones de problemas de valor inicial difuso (PVID) han sido obtenidos. Sin embargo, en los últimos años se ha conocido que en muchos casos, este enfoque relativo a la derivada de Hukuhara sufre ciertas desventajas debido a que la solución se vuelve "más difusa" a medida que aumenta el tiempo, y consecuentemente, la solución difusa se comporta bastante diferente de la solución en el contexto de PVI$'$s asociados a ecuaciones diferenciales ordinarias. Se considera que este problema se debe a la "fusificación" particular de la derivada usada en la formulación de la EDD. Adicionalmente, se conoce que la clase de funciones Hukuhara diferenciables, es bastante restrictiva. Como consecuencia de esto, en los últimos años han sido propuestas algunas definiciones de diferenciabilidad difusa, más generales que la derivada de Hukuhara, aumentando así la clase de funciones difusas diferenciables y mejorando el comportamiento difuso de la solución. La más reciente noción de derivada para funciones difusas es la llamada gH-derivada, introducida en [30], la cual es basada en el concepto de la gH-diferencia introducida en [33]. Este nuevo concepto de diferenciabilidad difusa amplía la clase de funciones difusas Hukuhara diferenciables y preserva buenas propiedades relacionadas con la integral de funciones difusas [5, 7].

Con base en lo anterior, el objetivo principal de este trabajo consiste en estudiar el problema de valor inicial difuso (1) asociado a una EDD ordinaria de primer orden, usando la derivada generalizada de Hukuhara (gH-derivada). Por su parte, en la búsqueda de teoremas de existencia y unicidad, en lugar de usar el teorema clásico de punto fijo de contracciones, usamos algunos teoremas de punto fijo establecidos en [14] sobre funciones débilmente contractivas, y generalizaciones, definidas sobre conjuntos parcialmente ordenados. Como una primera aplicación de los resultados teóricos conseguidos, obtenemos un resultado sobre existencia de solución de un PVID con retardo (*delay*) finito, el cual expresa el hecho de que la función incógnita en un sistema dinámico no sólo depende del estado del sistema en un instante dado, sino que también depende de la historia de la trayectoria hasta ese instante (ver [21]). Además, usando las ideas de los resultados de existencia de solución para el PVID (1), exploramos su aplicación en el tratamiento de problemas de control difuso asociados a ecuaciones integro-diferenciales difusas con perturbaciones, los cuales poseen diversas aplicaciones en el modelado matemático de muchas situaciones de las ciencias e ingenierías, principalmente en el análisis de los circuitos eléctricos. Esta última aplicación que damos ha sido estudiada por varios autores, sin embargo siempre ha sido abordada usando la noción de la H-diferenciabilidad y controles difusos basados en las ideas dadas en [1, 25].

El presente trabajo lo hemos organizado de la siguiente manera. En el primer capítulo, presentamos los conceptos de H-diferencia y gH-diferencia sobre los subconjuntos compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$ y propiedades; también revisamos la definición de conjunto difuso y presentamos el concepto de α-nivel de un conjunto difuso junto con algunas de sus propiedades más destacadas, para posteriormente, mostrar la extensión de los conceptos de H-diferencia y gH-diferencia a la clase de los conjuntos difusos normales y con α-niveles compactos y convexos no vacíos de $\mathbb{R}^n$. También, presentamos el concepto de función difusa y algunos ordenes parciales definidos sobre $\mathcal{F}^n$ y $C(J, \mathcal{F}^n)$, donde $C(J, \mathcal{F}^n)$ denota el espacio de las funciones difusas continuas con valores en $\mathcal{F}^n$, los cuales serán necesarios, principalmente, para obtener resultados generales de teoría de puntos fijos de aplicaciones difusas. Posteriormente, mostraremos los conceptos de H-diferenciabilidad, GH-diferenciabilidad y gH-diferenciabilidad aplicados a funciones difusas a partir de los conceptos de H-diferencia y gH-diferencia dados previamente, junto con algunos resultados y propiedades relacionadas con esos conceptos. Finalmente, destacamos el concepto de la integrabilidad de funciones difusas y algunos resultados relacionados con los conceptos de diferenciabilidad difusa, destacando una versión del Teorema Fundamental del Cálculo con la gH-derivada.

En el segundo capítulo, presentamos algunos de los resultados recientes de punto fijo de funciones débilmente contractivas monótonas y algunas generalizaciones de funciones débilmente contractivas, definidas sobre conjuntos parcialmente ordenados. Además, siguiendo las ideas de [14] y de [23], probamos algunos resultados de punto fijo de funciones débilmente contractivas para los elementos que están relacionados definidas sobre los espacios $\mathcal{F}^n$ y $C(J, \mathcal{F}^n)$, respectivamente. Destacamos que el desarrollo de todos estos resultados de punto fijo serán fundamentales en el estudio de la existencia y unicidad de soluciones a problemas de valor inicial en el contexto difuso.

En el tercer capítulo, primero recopilamos algunos de los resultados más destacados sobre la existencia y unicidad de soluciones a PVID usando H-derivada y GH-derivada y luego probamos algunos resultados sobre existencia y unicidad de solución a un PVID usando gH-derivada y teoremas de punto fijo dados en el Capítulo 2.

Finalmente, en el cuarto capítulo, mostramos algunos resultados que obtuvimos sobre existencia y unicidad de solución a un EDD con retardo finito, y también, estudiamos los PVID de una ecuación integro-diferencial con control. Estos resultados constituyen el aporte novedoso de este trabajo.

Capítulo 1

Diferenciabilidad e integrabilidad difusa

En este capítulo haremos una revisión de algunos conceptos y resultados relevantes relativos a la diferenciabilidad e integrabilidad en el contexto difuso. La relevancia del estudio de la diferenciabilidad e integrabilidad difusa se debe principalmente a la necesidad de introducir y analizar ecuaciones diferenciales en el contexto difuso como una forma natural para modelar la incertidumbre de sistemas dinámicos (ver [2, 3, 7, 12, 16, 22, 26, 30, 31]). Nos centraremos en la derivada de Hukuhara y la derivada generalizada de Hukuhara y su conexión con la integrabilidad de funciones difusas vía generalizaciones del Teorema Fundamental del Cálculo en el contexto difuso.

1.1. Diferencia de Hukuhara sobre subconjuntos compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$

Para poder definir un concepto de diferenciabilidad de una aplicación con valores en la clase de los conjuntos difusos, se hace necesario introducir el concepto de diferencia entre conjuntos difusos que cumple ciertas propiedades algebraicas mínimas como por ejemplo, la propiedad modulativa. Esto lleva a plantear de manera natural el sentido adecuado de la diferencia entre conjuntos compactos y convexos no vacíos. En ese sentido, en esta sección iniciamos recordando la diferencia de Hukuhara, introducida en [15], sobre el espacio $\mathcal{K}_c^n$ de todos los subconjuntos no vacíos, compactos y convexos del espacio euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Si $A, B \in \mathcal{K}_c^n$ y $||\cdot||$ denota la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$, la métrica de Hausdorff d sobre $\mathcal{K}_c^n$ se define por

$$d(A,B)=\text{máx}\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}||a-b||,\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}||a-b||\right\}.$$

Para $A,B\in\mathcal{K}_c^n$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, las siguientes operaciones son conocidas como operaciones de Minkowski:

$$A+B=\{a+b\mid a\in A,\ b\in B\}\qquad \text{y}\qquad \lambda A=\{\lambda a\mid a\in A\}. \tag{1.1}$$

Proposición 1.1.1 ([26])**.** *$(\mathcal{K}_c^n,d)$ es un espacio métrico completo.*

Algunas propiedades que verifica la métrica d son resumidas en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.2 ([26])**.** *Sean $A,B,C,D\in\mathcal{K}_c^n$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, entonces*

(i) $d(\lambda A,\lambda B)=|\lambda|d(A,B)$,

(ii) $d(A+B,C+D)\leq d(A,C)+d(B,D)$,

(iii) $d(A+C,B+C)=d(A,B)$.

Es bien conocido que $\mathcal{K}_c^n$, con las operaciones (1.1), es un semigrupo conmutativo, es decir, la adicción es cerrada, asociativa, conmutativa y modulativa con elemento neutro $\{0\}$. Adicionalmente, en $\mathcal{K}_c^n$ se cumple la ley de cancelación, esto es, $A+C=B+C\Leftrightarrow A=B$. Además, si $\lambda,\gamma\in\mathbb{R}$ y $A,B\in\mathcal{K}_c^n$, entonces $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$, $\lambda(\gamma A)=(\lambda\gamma)A$, $1A=A$, y si $\lambda\cdot\gamma\geq 0$, entonces $(\lambda+\gamma)A=\lambda A+\gamma A$ (ver [28]). Sin embargo, en general $A+(-A)\neq\{0\}$, donde $-A=(-1)A=\{-a\mid a\in A\}$. En consecuencia, $\mathcal{K}_c^n$ no es un espacio lineal. Además, en general, aunque la ley de cancelación aditiva es verdadera, esto no implica que $(A+B)-B=A$. En general, $(A+B)-B\neq A$.

Ejemplo 1.1.3. *Sean $A=[0,1]$ y $B=[-1,0]$, entonces $A,B\in\mathcal{K}_c^n$, $-A=B$ y*

$$\begin{aligned}(A+B)-B&=([0,1]+[-1,0])-[-1,0]=[-1,2]\neq A.\\ A+(-A)&=[-1,1]\neq\{0\}.\end{aligned}$$

Dado que con las operaciones de Minkowski las leyes cancelativa y modulativa no se cumplen, algunas alternativas para superar esta dificultad han sido propuestas. De hecho, en [15], inicialmente fue introducida la diferencia de Hukuhara (o H-diferencia). Si $A,B\in\mathcal{K}_c^n$, la H-diferencia entre A y B, denotado por $A\ominus_H B$, es definida como

$$A\ominus_H B=C\Longleftrightarrow A=B+C. \tag{1.2}$$

Con esta definición, $A \ominus_H A = \{0\}$ para todo $A \in \mathcal{K}_c^n$ y $(A+B) \ominus_H B = A$, para todo $A, B \in \mathcal{K}_c^n$. Además, si existe $C \in \mathcal{K}_c^n$ tal que $A \ominus_H B = C$, entonces C es único. Sin embargo, la H-diferencia no siempre existe. De hecho, una condición necesaria para la existencia de $A \ominus_H B$ es que $A \supset \{c\} + B$, siendo $\{c\} + B$ una traslación de B, donde c es un punto en $\mathbb{R}^n$. Además, es claro que si $diam(B) > diam(A)$, entonces $A \ominus_H B$ no existe. En general, $A - B \neq A \ominus_H B$.

Ejemplo 1.1.4. *Sean $A = [0,1]$ y $B = [2,3]$, entonces $A, B \in \mathcal{K}_c^n$, $A \ominus_H B = \{-2\}$ y $A - B = A + (-B) = [-3,-1]$, y por lo tanto, $A - B \neq A \ominus_H B$.*

1.2. Diferencia generalizada de Hukuhara sobre subconjuntos compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$

Debido a la naturaleza restrictiva de la H-diferencia mostrada en la Sección 1.1, Stefanini en [32, 33], propuso una generalización que llamaremos la diferencia generalizada de Hukuhara de A y B (o gH-diferencia), denotada por $A \ominus_g B$ y definida como sigue: para $A, B \in \mathcal{K}_c^n$, la gH-diferencia $A \ominus_g B$ es el elemento $C \in \mathcal{K}_c^n$ tal que

$$A \ominus_g B = C \iff \begin{cases} (i) & A = B + C, \quad \text{ó} \\ (ii) & B = A + (-1)C. \end{cases} \tag{1.3}$$

Claramente, la gH-diferencia $A \ominus_g B$ es una generalización de la H-diferencia. La gH-diferencia satisface, entre otras, las siguientes propiedades básicas.

Proposición 1.2.1 ([32])**.** *Sean $A, B, C \in \mathcal{K}_c^n$. Entonces*

(i) *Si $C = A \ominus_g B$ existe, es único.*

(ii) *Si $A \ominus_H B$ existe, $A \ominus_g B = A \ominus_H B$.*

(iii) *$A \ominus_g A = \{0\}$.*

(iv) *(a) $(A+B) \ominus_g B = A$; (b) $A \ominus_g (A - B) = B$; (c) $A \ominus_g (A+B) = -B$.*

(v) *$A \ominus_g B$ existe si y sólo si $B \ominus_g A$ y $(-B) \ominus_g (-A)$ existe y $A \ominus_g B = (-B) \ominus_g (-A) = -(B \ominus_g A)$.*

(vi) *En general, $A \ominus_g B = B \ominus_g A$ no implica que $A = B$; pero $A \ominus_g B = B \ominus_g A = C$ si y sólo si $C = -C$ y, en particular, $C = \{0\}$ si y sólo si $A = B$.*

(vii) *Si $B \ominus_g A$ existe entonces $A + (B \ominus_g A) = B$ ó $B - (B \ominus_g A) = A$ y ambas desigualdades se cumplen si y sólo si $B \ominus_g A$ es un conjunto unitario.*

(viii) *Si* $B \ominus_g A = C$ *existe, entonces para todo* $D \in \mathcal{K}_c^n$ *se tiene* $(B + D) \ominus_g A = C + D$ *ó* $B \ominus_g (A + D) = C - D$.

Al contrario de la H-diferencia, en el espacio $\mathcal{K}_c^1$ la gH-diferencia $A \ominus_g B$ siempre existe. De hecho, sean $A = [a^-, a^+]$ y $B = [b^-, b^+]$ dos elementos de $\mathcal{K}_c^1$, entonces la gH-diferencia esta dada por

$$[a^-, a^+] \ominus_g [b^-, b^+] = [c^-, c^+] \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) \begin{cases} a^- = b^- + c^-, \\ a^+ = b^+ + c^+, \end{cases} \\ \qquad \text{ó} \\ (ii) \begin{cases} b^- = a^- - c^-, \\ b^+ = a^+ - c^+. \end{cases} \end{cases}$$

Así,

$$c^- = \text{mín}\left\{a^- - b^-, a^+ - b^+\right\} \quad \text{y} \quad c^+ = \text{máx}\left\{a^- - b^-, a^+ - b^+\right\}. \tag{1.4}$$

Por lo tanto,

$$[a^-, a^+] \ominus_g [b^-, b^+] = \left[\text{mín}\left\{a^- - b^-, a^+ - b^+\right\}, \text{máx}\left\{a^- - b^-, a^+ - b^+\right\}\right].$$

1.3. Conjuntos difusos

En esta sección iniciamos recordando algunos preliminares sobre la teoría de los conjuntos difusos definidos sobre $\mathbb{R}^n$. Comenzamos diciendo que un conjunto difuso sobre $\mathbb{R}^n$ es una función $u\colon \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, donde el valor $u(x)$ denota el grado de pertenencia del elemento x al conjunto difuso u. Para $0 < \alpha \leq 1$, el α-nivel de u es definido por el conjunto

$$[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) \geq \alpha\}.$$

Para $\alpha = 0$, el soporte de u es definido como el conjunto

$$[u]^0 = \text{supp}(u) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) > 0\}}.$$

Recordemos que si u, v son dos conjuntos difusos, entonces $u = v$ si y sólo si $[u]^\alpha = [v]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$. De aquí en adelante, usaremos el símbolo $\mathcal{F}^n$ con el fin de denotar la colección de los conjuntos difusos u sobre $\mathbb{R}^n$ satisfaciendo:

(i) u es normal, esto es, existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $u(x_0) = 1$.

(ii) u es convexo, esto es, $u(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \text{mín}\{u(x), u(y)\}$ para cualquier $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.

(iii) u is semicontinua superior, esto es, $[u]^\alpha$ es cerrado para todo $\alpha \in [0,1]$.

(iv) $[u]^0$ es compacto.

Las condiciones (i)-(iv) que deben verificar los conjuntos difusos u que pertenecen al espacio $\mathcal{F}^n$, hacen que todos los α-niveles de esos conjuntos difusos u sean elementos del espacio $\mathcal{K}_c^n$, es decir, dado un conjunto difuso $u \in \mathcal{F}^n$ se sigue que $[u]^\alpha$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ acotado, cerrado, convexo y distinto de vacío.

Por otro lado, de acuerdo al Principio de Extensión de Zadeh [34], las operaciones de adición y multiplicación escalar sobre $\mathcal{F}^n$ están definidas como:

$$(u+v)(x) = \sup_{y+z=x} \text{mín}\{u(y), v(z)\}, \qquad \text{y} \qquad (\lambda u)(x) = \begin{cases} u(\frac{x}{\lambda}), & \lambda \neq 0, \\ \chi_{\{0\}}(x), & \lambda = 0, \end{cases}$$

donde $\chi_{\{0\}}$ es la función característica de $\{0\}$. Además, se cumplen las siguientes relaciones:

$$[u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha, \qquad \text{y} \qquad [\lambda u]^\alpha = \lambda [u]^\alpha, \quad \forall u, v \in \mathcal{F}^n,\ \forall \alpha \in [0,1]. \tag{1.5}$$

En [27], se mostró que la adición sobre $\mathcal{F}^n$ satisface la ley de cancelación, es decir, si $u, v, w \in \mathcal{F}^n$ y $u + w = v + w$, se sigue que $u = v$. Además, la métrica de Hausdorff d en $\mathcal{K}_c^n$ puede ser extendida a $\mathcal{F}^n$ definiendo la distancia

$$d_\infty(u,v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d([u]^\alpha, [v]^\alpha), \quad \forall u, v \in \mathcal{F}^n, \tag{1.6}$$

y consecuentemente el espacio $(\mathcal{F}^n, d_\infty)$ es un espacio métrico completo [26].

El siguiente resultado es conocido como el Teorema de Representación de Negoita-Ralescu, el cual permite relacionar un conjunto difuso con una familia de subconjuntos de $\mathcal{K}_c^n$.

Teorema 1.3.1 ([22])**.** *Si $u \in \mathcal{F}^n$, entonces*

(i) $[u]^\alpha \in \mathcal{K}_c^n$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$,

(ii) $[u]^\beta \subseteq [u]^\alpha \subseteq [u]^0$ *para todo* $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$,

(iii) Si $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ *es una sucesión no-decreciente convergente a* $\alpha > 0$, *entonces* $[u]^\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n}$.

Inversamente, si $\{N_\alpha \mid \alpha \in [0,1]\}$ *es una familia de subconjuntos de* $\mathcal{K}_c^n$ *satisfaciendo* $(i) - (iii)$, *entonces existe* $u \in \mathcal{F}^n$ *tal que* $[u]^\alpha = N_\alpha$, *para todo* $\alpha \in (0,1]$, *y* $[u]^0 = \overline{\bigcup_{0<\alpha\leq 1} N^\alpha} \subseteq N^0$.

El siguiente resultado determina completamente los conjuntos difusos en $\mathcal{F}^1$ a partir de las funciones extremo que se obtienen de los α-niveles.

Teorema 1.3.2 ([11]). *Un elemento $u \in \mathcal{F}^1$ está completamente determinado por cualquier pareja $u = (u^-, u^+)$ de funciones $u^-, u^+ : [0,1] \to \mathbb{R}$, definiendo los puntos finales de los α-niveles, verificando las siguientes condiciones:*

(i) $u^- : \alpha \to u^-_\alpha \in \mathbb{R}$ *es una función acotada, no-decreciente y continua a la izquierda en* $(0,1]$ *y esta es continua a la derecha en* 0.

(ii) $u^+ : \alpha \to u^+_\alpha \in \mathbb{R}$ *es una función acotada, no-creciente y continua a la izquierda en* $(0,1]$ *y esta es continua a la derecha en* 0.

(iii) $u^-_\alpha \leq u^+_\alpha$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$.

1.4. Diferencia de Hukuhara en $\mathcal{F}^n$

La diferencia de Hukuhara definida sobre $\mathcal{K}^n_c$ en la Sección 1.2, fue extendida a $\mathcal{F}^n$ en [27]. En esta sección, presentamos la definición de la diferencia de Hukuhara sobre el espacio $\mathcal{F}^n$, junto con algunas propiedades y observaciones que usaremos en los Capítulos 3 y 4.

Definición 1.4.1. *Sean $u, v, w \in \mathcal{F}^n$. El elemento w es llamado la diferencia de Hukuhara (H-diferencia) de u y v, si este verifica la ecuación $u = v + w$. Si la H-diferencia existe, ésta será denotada por $u \ominus_H v$.*

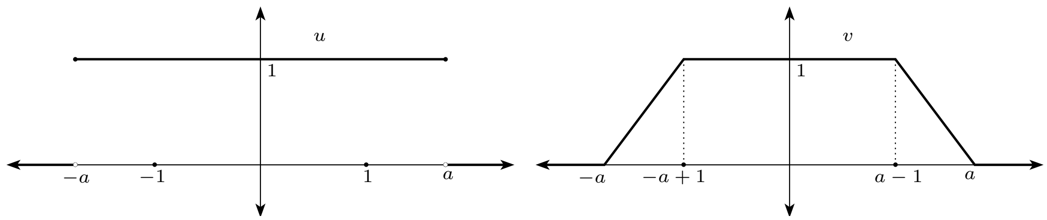
Con esta diferencia obtenemos que $u \ominus_H u = \{0\}$, y también, si $u \ominus_H v$ existe, ésta es única. Además, si $u, v \in \mathcal{F}^n$, la existencia de $u \ominus_H v$ implica la existencia de $[u \ominus_H v]^\alpha$, y además, $[u \ominus_H v]^\alpha = [u]^\alpha \ominus_H [v]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$, pero en general, el recíproco no se cumple. Por ejemplo, sea $a \geq 1$ un número real y considere $u, v : \mathbb{R} \to [0,1]$ los conjuntos difusos definidos por:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [-a, a], \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \qquad v(t) = \begin{cases} t + a & \text{si} \quad t \in [-a, -a+1], \\ 1 & \text{si} \quad t \in (-a+1, a-1), \\ -t + a & \text{si} \quad t \in [a-1, a], \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En este caso, la diferencia de Hukuhara entre los α-niveles de u y v existe, es decir,

$$[u]^\alpha \ominus_H [v]^\alpha = [-a, a] \ominus_H [-a + \alpha, a - \alpha] = [-\alpha, \alpha].$$

Figura 1.1 – Gráfica de los conjuntos difusos u y v.



Sin embargo, la diferencia de Hukuhara $u \ominus_H v$ no existe. Para ver esto, note que la familia $\{[-\alpha, \alpha] : \alpha \in [0,1]\}$, con $\alpha \in [0,1]$, satisface que si $\beta \leq \alpha$, entonces $[-\beta, \beta] \subseteq [-\alpha, \alpha]$. En consecuencia, la familia $\{[-\alpha, \alpha] : \alpha \in [0,1]\}$ no verifica la condición (ii) del Teorema 1.3.1, y por lo tanto, no define un conjunto difuso.

1.5. Diferencia generalizada de Hukuhara en $\mathcal{F}^n$

Al igual que en el caso de $\mathcal{K}_c^n$, en el contexto difuso la diferencia de Hukuhara puede ser generalizada de manera tal que se amplia la clase de conjuntos difusos de $\mathcal{F}^n$ para los cuales la diferencia existe. En esta sección presentamos la definición y algunas de las propiedades básicas de la diferencia generalizada de Hukuhara introducida en [33], para introducir una noción de derivada, y así, poder definir problemas de valor inicial difuso en un contexto más general. También, mostramos un resultado que garantiza la existencia de la diferencia generalizada de Hukuhara sobre $\mathcal{F}^1$.

Definición 1.5.1 ([32]). *Para $u, v \in \mathcal{F}^n$, la diferencia generalizada de Hukuhara de u y v (o gH-diferencia), denotada por $u \ominus_g v$, es definida como el elemento $z \in \mathcal{F}^n$ tal que*

$$u \ominus_g v = z \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (i) & u = v + z, \quad ó \\ (ii) & v = u + (-1)z. \end{cases} \tag{1.7}$$

Note que si $u \ominus_g v$ y $u \ominus_H v$ existen, $u \ominus_g v = u \ominus_H v$; si (i) y (ii) en (1.7) se satisfacen simultáneamente, entonces z es un número "crisp"[1]; también, $u \ominus_g u = u \ominus_H u = \{0\}$, y si $u \ominus_g v$ existe, la gH-diferencia es única. Además, si $u, v \in \mathcal{F}^1$, donde $v = \{c\}$, $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$u \ominus_g v = u - v \quad \text{y} \quad v \ominus_g u = v - u. \tag{1.8}$$

Para el caso unidimensional $\mathcal{F}^1$, en [32] Stefanini mostró que $u \ominus_g v$ no siempre existe, pero se tiene un resultado que garantiza la existencia de $u \ominus_g v$, el cual es dado por la siguiente proposición.

[1] En el contexto difuso un número "crisp" es un elemento de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.5.2 ([32]). *Sea $u, v \in \mathcal{F}^1$ dos números difusos con α-niveles dados por $[u]^\alpha$ y $[v]^\alpha$, respectivamente. La gH-diferencia $u \ominus_g v \in \mathcal{F}^1$ existe, si y sólo si una de las dos condiciones se satisfacen:*

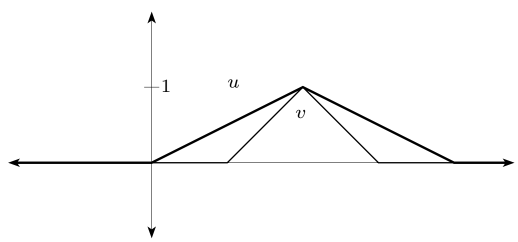
(a) $len([u]^\alpha) \geq len([v]^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0,1]$, $u_\alpha^- - v_\alpha^-$ es creciente con respecto a α, y $u_\alpha^+ - v_\alpha^+$ es decreciente con respecto a α (aquí $len(A)$ denota la longitud del intervalo $A \in \mathcal{K}_c^1$), ó

(b) $len([u]^\alpha) \leq len([v]^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0,1]$, $u_\alpha^+ - v_\alpha^+$ es creciente con respecto a α, y $u_\alpha^- - v_\alpha^-$ es decreciente con respecto a α.

Ejemplo 1.5.3. *Considere los conjuntos difusos u y v definidos por:*

$$u(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \quad y \quad t > 4, \\ \frac{1}{2}t & si \quad 0 < t \leq 2, \\ -\frac{1}{2}t + 2 & si \quad 2 < t \leq 4. \end{cases} \qquad v(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 1 \quad y \quad t > 3, \\ t - 1 & si \quad 1 < t \leq 2, \\ -t + 3 & si \quad 2 < t \leq 3. \end{cases}$$

Figura 1.2 – Diferencia generalizada de Hukuhara de dos conjuntos difusos u y v.



Observe que $[u]^\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha]$ y $[v]^\alpha = [\alpha + 1, 3 - \alpha]$, y así,

$$len([u]^\alpha) = 4 - 4\alpha \geq 2 - 2\alpha = len([v]^\alpha).$$

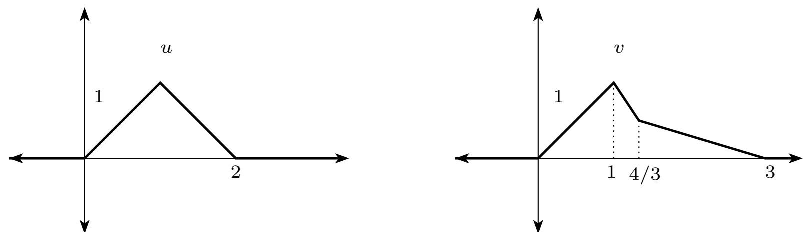
Además, $u_\alpha^+ - v_\alpha^+ = 1 - \alpha$ es decreciente con respecto a α y $u_\alpha^- - v_\alpha^- = \alpha - 1$ es creciente con respecto a α. Por lo tanto, la gH-diferencia $u \ominus_g v$ existe.

A continuación, presentamos un ejemplo donde los conjuntos difusos u y v no verifican ninguna de las dos condiciones (a) y (b) de la Proposición 1.5.2.

Ejemplo 1.5.4. *Considere los conjuntos difusos*

$$u(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \quad y \quad t > 2, \\ t & si \quad 0 < t \leq 1, \\ 2 - t & si \quad 1 < t \leq 2. \end{cases} \qquad v(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \quad y \quad t > 3, \\ t & si \quad 0 < t \leq 1, \\ -\frac{3}{2}t + \frac{5}{2} & si \quad 1 < t \leq \frac{4}{3}, \\ -\frac{3}{10}t + \frac{9}{10} & si \quad \frac{4}{3} < t \leq 3. \end{cases}$$

Figura 1.3 – Gráfica de los conjuntos difusos u y v.



Note que $[u]^\alpha = [u^-_\alpha, u^+_\alpha]$ *y* $[v]^\alpha = [v^-_\alpha, v^+_\alpha]$*, donde*

$$u^-_\alpha = v^-_\alpha = \alpha, \qquad u^+_\alpha = 2 - \alpha, \qquad v^+_\alpha = \begin{cases} 3 - \dfrac{10}{3}\alpha & si \quad 0 \leq \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3}\alpha & si \quad \dfrac{1}{2} \leq \alpha < 1. \end{cases}$$

Entonces, $u^-_\alpha - v^-_\alpha = 0$ *y* $u^+_\alpha - v^+_\alpha$ *es decreciente con respecto a* α*, y por otro lado, se tiene que* $len([u]^\alpha) = 2 - \alpha$ *,* $len([v]^\alpha) = 3 - \frac{13}{3}\alpha$ *si* $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *y* $len([v]^\alpha) = \frac{5}{3} - \frac{5}{3}\alpha$ *si* $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$*. De ahí se tiene que*

$$\begin{aligned} len([u]^\alpha) &\leq len([u]^\alpha), \quad si \quad \alpha \in \left[0, \frac{3}{7}\right), \\ len([u]^\alpha) &\geq len([u]^\alpha), \quad si \quad \alpha \in \left[\frac{3}{7}, 1\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la Proposición 1.5.2, no existe $u \ominus v \in \mathcal{F}^1$*.*

1.6. Funciones difusas y orden parcial en $\mathcal{F}^n$

En esta sección introducimos la clase $C(J, \mathcal{F}^n)$ de funciones difusas continuas definidas sobre un intervalo J y con valores en $\mathcal{F}^n$, y también, consideramos ordenes parciales sobre los espacios $\mathcal{F}^n$ y $C(J, \mathcal{F}^n)$. Además, presentamos algunas propiedades que estos espacios verifican y que serán de utilidad en los siguientes capítulos. Inicialmente, consideramos sobre $\mathcal{F}^n$ el siguiente orden parcial[2]

$$u, v \in \mathcal{F}^n, u \preceq v \iff [u]^\alpha \subseteq [v]^\alpha \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]. \tag{1.9}$$

Además del orden parcial (1.9), en $\mathcal{F}^1$ se puede definir otro orden parcial; en efecto, si $u, v \in \mathcal{F}^1$ con $[u]^\alpha = [u^-_\alpha, u^+_\alpha]$ y $[v]^\alpha = [v^-_\alpha, v^+_\alpha]$, podemos definir el orden parcial $\lesssim$ como

$$u \lesssim v \iff u^-_\alpha \leq v^-_\alpha \text{ y } u^+_\alpha \leq v^+_\alpha. \tag{1.10}$$

[2]Recordemos que un orden parcial sobre un conjunto es una relación binaria que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Figura 1.4 – Ejemplo de dos conjuntos difusos u y v donde $v \preceq u$.

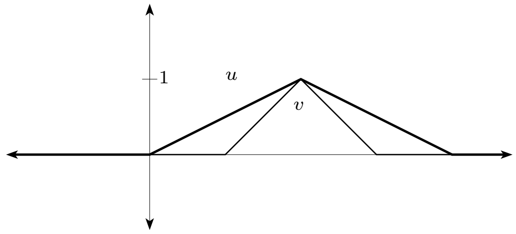
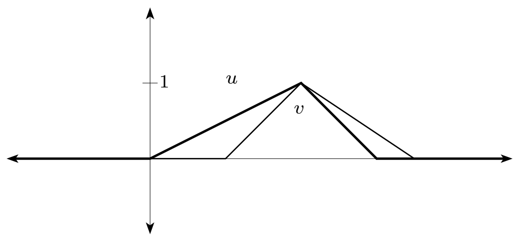


Figura 1.5 – Ejemplo de dos conjuntos difusos u y v donde $v \lesssim u$.



Denotamos el complemento del orden parcial $\preceq$ (respectivamente $\lesssim$) por $\gtrsim$ (respectivamente $\succeq$). Algunas consecuencias interesantes con respecto a los ordenes parciales $\lesssim$ y $\preceq$ son

$$u \lesssim v \Longrightarrow u + w \lesssim v + w, \text{ para } u, v, w \in \mathcal{F}^1,$$
$$u \preceq v \Longrightarrow u + w \preceq v + w, \text{ para } u, v, w \in \mathcal{F}^n.$$

Observación 1.6.1. *Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^n$, con $n \geq 1$, es una sucesión no-decreciente, si $u_k \lesssim u_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por otro lado, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^n$, con $n \geq 1$, es una sucesión no-creciente, si $u_{k+1} \lesssim u_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.*

Lema 1.6.2 ([23])**.** *Sobre $\mathcal{F}^n$, con $n \geq 1$, las siguientes propiedades se cumplen:*

(i) Si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^1$ es una sucesión no-decreciente tal que $u_k \to u$ en $\mathcal{F}^1$, entonces $u_k \lesssim u$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^1$ es una sucesión no-creciente tal que $u_k \to u$ en $\mathcal{F}^1$, entonces $u_k \gtrsim u$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

(iii) Si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^n$ es una sucesión no-decreciente tal que $u_k \to u$ en $\mathcal{F}^n$, entonces $u_k \preceq u$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

(iv) Si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^n$ es una sucesión no-creciente tal que $u_k \to u$ en $\mathcal{F}^n$, entonces $u_k \succeq u$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Primero suponga que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^1$ es una sucesión no-decreciente tal que $u_k \to u$ en $\mathcal{F}^1$. Entonces $u_k \lesssim u_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y así, se tiene que

$$(u_k)^-_\alpha \leq (u_{k+1})^-_\alpha \quad \text{y} \quad (u_k)^+_\alpha \leq (u_{k+1})^+_\alpha,\ \forall \alpha \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado que

$$\begin{aligned} d_\infty(u_k, u) &= \sup_{\alpha\in[0,1]} d\left([u_k]^\alpha, [u]^\alpha\right) \\ &= \sup_{\alpha\in[0,1]} \text{máx}\left\{\left|(u_k)^-_\alpha - (u)^-_\alpha\right|, \left|(u_k)^+_\alpha - (u)^+_\alpha\right|\right\} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

se sigue que $(u_k)^-_\alpha \to (u)^-_\alpha$ y $(u_k)^+_\alpha \to (u)^+_\alpha$ cuando $n \to \infty$, para cada $\alpha \in [0,1]$. Además, $((u_k)^-_\alpha)_{k\in\mathbb{N}}$ y $((u_k)^+_\alpha)_{k\in\mathbb{N}}$ son sucesiones decrecientes en $\mathbb{R}$, lo cual implica que $(u_k)^-_\alpha \leq (u)^-_\alpha$ y $(u_k)^+_\alpha \leq (u)^+_\alpha$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in [0,1]$. Por lo tanto, $u_k \lesssim u$, para todo $k \in \mathbb{N}$. De manera similar se prueba (ii).

Ahora suponga que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^n$ es una sucesión no-decreciente, con el orden $\preceq$, tal que $u_k \to u$ en $\mathcal{F}^n$. Entonces $u_k \preceq u_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir,

$$[u_k]^\alpha \subseteq [u_{k+1}]^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad \text{y} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Así, para cada $\alpha \in [0,1]$, la sucesión $([u_k]^\alpha)_{k\in\mathbb{N}}$ es no-decreciente, la cual converge a $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[u_k]^\alpha}$. Por otro lado, $[u_k]^\alpha \to [u]^\alpha$ para cada $\alpha \in [0,1]$, y por lo tanto,

$$[u_k]^\alpha \subseteq [u]^\alpha = \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[u_k]^\alpha}, \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad \text{y} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Entonces $u_k \lesssim u$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Con esto probamos (iii).
Para probar (iv), suponga que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^n$ es una sucesión no-creciente, con el orden $\preceq$, tal que $u_k \to u$ en $\mathcal{F}^n$. Entonces, $u_{k+1} \preceq u_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir,

$$[u_{k+1}]^\alpha \subseteq [u_k]^\alpha = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}[u_k]^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad \text{y} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, para cada $\alpha \in [0,1]$, la sucesión $([u_k]^\alpha)_{k\in\mathbb{N}}$ es no-creciente, la cual converge a $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}[u_k]^\alpha$. Luego

$$[u_k]^\alpha \subseteq [u]^\alpha = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}[u_k]^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad \text{y} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Entonces $u \lesssim u_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Definición 1.6.3. *Decimos que una función difusa es una aplicación* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathcal{F}^n$*, donde* $f(t) \in \mathcal{F}^n$ *para cada* $t \in [a,b]$*. Para cada* $\alpha \in [0,1]$*, se define la multifunción* $f_\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathcal{K}_c^n$ *por* $f_\alpha(t) = [f(t)]^\alpha$*. En particular, si* f *es una función difusa que va del intervalo* $[a,b]$ *en* $\mathcal{F}^1$*, se tiene que* $f_\alpha(t) = [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$*, donde* f_α^- *y* f_α^+ *son funciones reales sobre* $[a,b]$*.*

Consideramos los siguientes ordenes parciales sobre $C(J, \mathcal{F}^1)$:

$$f, g \in C(J, \mathcal{F}^1),\ f \lesssim g \iff f(t) \lesssim g(t), \quad \forall t \in J, \tag{1.11}$$

$$f, g \in C(J, \mathcal{F}^1),\ f \preceq g \iff f(t) \preceq g(t), \quad \forall t \in J. \tag{1.12}$$

Lema 1.6.4 ([23])**.** *Sobre* $\mathcal{F}^n$ *con* $n \geq 1$*, las siguientes propiedades se cumplen:*

(i) *Si* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C(J, \mathcal{F}^1)$ *es una sucesión no-decreciente, con el orden* $\lesssim$ *(o* $\preceq$*), tal que* $f_k \to f$ *en* $C(J, \mathcal{F}^1)$*, entonces* $f_k \lesssim f$ *(o* $f_k \preceq f$*) para cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

(ii) *Si* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C(J, \mathcal{F}^1)$ *es una sucesión no-creciente, con el orden* $\lesssim$ *(o* $\preceq$*), tal que* $f_k \to f$ *en* $C(J, \mathcal{F}^1)$*, entonces* $f_k \gtrsim f$ *(o* $f_k \succeq f$*) para cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

(iii) *Si* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C(J, \mathcal{F}^n)$ *es una sucesión no-decreciente, con el orden* $\preceq$*, tal que* $f_k \to f$ *en* $C(J, \mathcal{F}^n)$*, entonces* $f_k \preceq f$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

(iv) *Si* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C(J, \mathcal{F}^n)$ *es una sucesión no-creciente, con el orden* $\preceq$*, tal que* $f_k \to f$ *en* $C(J, \mathcal{F}^n)$*, entonces* $f_k \succeq f$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

Demostración. Primero suponga que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C(J, \mathcal{F}^1)$ es una sucesión no-decreciente, con el orden $\lesssim$, tal que $f_k \to f$ en $C(J, \mathcal{F}^1)$, entonces

$$\begin{aligned} D(f_k, f) &= \sup_{t\in J} d_\infty\left(f_k(t), f(t)\right) \\ &= \sup_{t\in J} \sup_{\alpha\in[0,1]} d\left([f_k(t)]^\alpha, [f(t)]^\alpha\right) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Luego para cada $t \in J$, $(f_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión no decreciente en $\mathcal{F}^1$ y convergente a $f(t) \in \mathcal{F}^1$. Así, por el Lema 1.6.2 tenemos que $f_k(t) \lesssim f(t)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $t \in J$. Por lo tanto, $f_k \lesssim f$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Con esto probamos (i). Los otros casos se siguen de manera similar. $\square$

Sobre los espacios $(\mathcal{F}^1, \leq)$, $(\mathcal{F}^n, \preceq)$, $(C(J, \mathcal{F}^1), \leq)$ y $(C(J, \mathcal{F}^n), \preceq)$, $n \geq 1$, cualquier pareja de elementos siempre tiene una cota superior (ver [23]). Por otro lado, sobre $C(J, \mathcal{F}^n)$, con $n \geq 1$ y J un intervalo, podemos considerar la métrica D definida por

$$D(f, g) = \sup_{t\in J} d_\infty(f(t), g(t)), \quad f, g \in C(J, \mathcal{F}^n). \tag{1.13}$$

Entonces se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.6.5 ([9]). *$(C(J, \mathcal{F}^n), D)$ es un espacio métrico completo.*

1.7. Derivada de Hukuhara de funciones difusas

En esta sección mostramos la definición y propiedades de la derivada de Hukuhara aplicada a funciones difusas. Iniciamos estableciendo la definición de continuidad de funciones difusas.

Definición 1.7.1. *Una función difusa $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathcal{F}^n$ es continua en un punto $t_0 \in [a, b]$, si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_\infty(f(t), f(t_0)) < \varepsilon$, para cada $t \in [a, b]$ con $|t - t_0| < \delta$.*

A continuación presentamos la definición de la derivada de Hukuhara dada por [27] para $f\colon (a, b) \to \mathcal{F}^n$.

Definición 1.7.2 ([27]). *Una función difusa $f\colon (a, b) \to \mathcal{F}^n$ es Hukuhara diferenciable (ó H-diferenciable) en $t_0 \in (a, b)$, si existen $f'(t_0) \in \mathcal{F}^n$, $f(t_0 + h) \ominus_H f(t_0)$ y $f(t_0) \ominus_H f(t_0 - h)$ para h suficientemente pequeño, tal que los límites*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(t_0 + h) \ominus_H f(t_0)}{h} \quad y \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(t_0) \ominus_H f(t_0 - h)}{h}$$

existen y son iguales a $f'(t_0)$. Aquí, el límite es tomado en el espacio $(\mathcal{F}^n, d_\infty)$.

Dada una función difusa H-diferenciable que va del intervalo (a, b) en $\mathcal{F}^1$, las funciones reales f_α^- y f_α^+ definidas por los α-niveles resultan ser diferenciables como se observa en el siguiente Teorema.

Teorema 1.7.3 ([16]). *Sea $f\colon (a, b) \longrightarrow \mathcal{F}^1$ una función difusa H-diferenciable. Si $f_\alpha(t) = [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, entonces las funciones reales f_α^- y f_α^+ son diferenciables y*

$$[f'(t)]^\alpha = [(f_\alpha^-)'(t), (f_\alpha^+)'(t)].$$

Para funciones reales, la diferenciabilidad de un función real implica su continuidad. El siguiente Teorema rescata esa propiedad en el contexto difuso.

Teorema 1.7.4 ([16]). *Si $f\colon (a, b) \longrightarrow \mathcal{F}^n$ es una función difusa H-diferenciable, entonces esta es continua. Además, si $g\colon (a, b) \longrightarrow \mathcal{F}^n$ es otra función H-diferenciable y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $(f + g)'(t) = f'(t) + g'(t)$ y $(\lambda f)'(t) = \lambda f'(t)$.*

Ejemplo 1.7.5. *Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{F}^2$ la función difusa definida por $f(t) = \chi_R$, donde R es cualquier rectángulo compacto de $\mathbb{R}^2$. Entonces f es H-diferenciable en todo $\mathbb{R}$, y además, $f'(t) = \chi_{\{0\}}$.*

Observamos sin embargo que la Definición 1.7.2 es muy restrictiva puesto que muchas funciones difusas no resultan ser diferenciables, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.7.6. *Considere la función difusa* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{F}^1$ *definida por* $f(t) = (1-t^2)\chi_{[-1,1]}$. *Aunque esta función difusa es bastante "buena", no es diferenciable en el intervalo* $(0,1)$. *Para ver esto, sea* $t_0 \in (0,1)$ *y observe que la función real* $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $g(t) = 1 - t^2$ *verifica que* $g'(t_0) = -2t_0 < 0$. *Por lo tanto, las* H*-diferencias* $f(t_0+h) \ominus_H f(t_0)$ *y* $f(t_0) \ominus_H f(t_0-h)$ *no existen, puesto que* $len([f(t_0+h)]^\alpha) \leq len([f(t_0)]^\alpha)$ *y* $len([f(t_0)]^\alpha) \leq len([f(t_0-h)]^\alpha)$ *para un* $h > 0$ *suficientemente pequeño. Por consiguiente,* f *no es* H*-diferenciable sobre el intervalo* $(0,1)$, *y por tanto* f *no es* H*-diferenciable.*

1.8. Derivada fuertemente generalizada de Hukuhara de funciones difusas

Dado que la clase de funciones H-diferenciables es bastante restrictiva, en [3] fue introducida una primera generalización del concepto de H-diferenciabilidad difusa, el cual es dado por la siguiente definición.

Definición 1.8.1. *Sean* $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{F}^n$ *y* $t_0 \in (a,b)$. *Se dice que* f *es fuertemente diferenciable (ó* $GH-$*diferenciable) en* t_0, *si existe un elemento* $f'(t_0) \in \mathcal{F}^n$ *tal que, para todo* $h > 0$ *suficientemente pequeño, se tiene que:*

(i) existen las diferencias $f(t_0+h) \ominus_H f(t_0)$, $f(t_0) \ominus_H f(t_0-h)$ *y*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(t_0+h) \ominus_H f(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(t_0) \ominus_H f(t_0-h)}{h} = f'(t_0), \tag{1.14}$$

ó

(ii) existen las diferencias $f(t_0) \ominus_H f(t_0+h)$, $f(t_0-h) \ominus_H f(t_0)$ *y*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(t_0) \ominus_H f(t_0+h)}{(-h)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(t_0-h) \ominus_H f(t_0)}{(-h)} = f'(t_0), \tag{1.15}$$

ó

(iii) existen las diferencias $f(t_0+h) \ominus_H f(t_0)$, $f(t_0-h) \ominus_H f(t_0)$ *y*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(t_0+h) \ominus_H f(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(t_0-h) \ominus_H f(t_0)}{(-h)} = f'(t_0), \tag{1.16}$$

ó

(iv) existen las diferencias $f(t_0) \ominus_H f(t_0 + h)$, $f(t_0) \ominus_H f(t_0 - h)$, *y*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(t_0) \ominus_H f(t_0 + h)}{(-h)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(t_0) \ominus_H f(t_0 - h)}{h} = f'(t_0). \tag{1.17}$$

Aquí, los límites son tomados en el espacio $(\mathcal{F}^n, d_\infty)$.

Note que la condición (i) de la Definición 1.8.1 corresponde al concepto de H-diferenciabilidad (ver [27]), relacionando de esta manera, los conceptos de H-diferenciabilidad y GH-diferenciabilidad. Además, con la Definición 1.8.1, funciones que no eran diferenciales en el sentido de Hukuhara son GH-diferenciables, así como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.8.2. *Recordemos que la función difusa dada en el Ejemplo 1.7.6 no es* H*-diferenciable, puesto que las* H*-diferencias* $f(t_0 + h) \ominus_H f(t_0)$ *y* $f(t_0) \ominus_H f(t_0 - h)$ *no existen en el intervalo* $(0, 1)$. *Sin embargo, con la Definición 1.8.1,* f *es* GH*-diferenciable en el sentido* (ii), *puesto que las* H*-diferencias* $f(t_0) \ominus_H f(t_0 + h)$ *y* $f(t_0 - h) \ominus_H f(t_0)$ *existen, y en ese caso,*

$$f'(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(t_0) \ominus_H f(t_0 + h)}{(-h)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(t_0 - h) \ominus_H f(t_0)}{(-h)} = -2t\chi_{[-1,1]}.$$

Note que si para f y t_0 dados se cumplen simultáneamente al menos dos de las cuatro posibilidades en la Definición 1.8.1, no se obtiene ninguna contradicción. Por ejemplo, supongamos que se cumplen las posibilidades (i) y (iii). Entonces, existen las H-diferencias $f(t_0+h) \ominus_H f(t_0)$, $f(t_0) \ominus_H f(t_0-h)$ y $f(t_0-h) \ominus_H f(t_0)$, y así, existen $u, v, w \in \mathcal{F}^1$ tales que $f(t_0+h) = f(t_0) + u$, $f(t_0) = f(t_0 - h) + v$ y $f(t_0) = f(t_0 - h) + w$. Entonces $f(t_0) = f(t_0) + (v + w)$, lo cual implica que $v + w = 0$, y así se tienen dos casos, el primero cuando $v = w = 0$, obteniendo $f'(t_0) = 0$; y el segundo, cuando $v = -w$, obteniendo $f'(t_0) = \chi_{\{c\}}$, $c \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.8.3. *Sea* $f \colon (a, b) \longrightarrow \mathcal{F}^1$ *una función difusa* GH*-diferenciable en cada punto* $t \in (a, b)$ *y en el sentido* (iii) *o* (iv) *de la Definición 1.8.1. Entonces* $f'(t) = \chi_{\{c\}}$, *para algún* $c \in \mathbb{R}$ *y para todo* $t \in (a, b)$.

Observe que si $c \in \mathcal{F}^1$, $g \colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una función diferenciable en $t_0 \in (a, b)$ y $g'(t_0) > 0$, entonces la función difusa $f \colon (a, b) \longrightarrow \mathcal{F}^1$ definida por $f(t) = c \cdot g(t)$ para todo $t \in (a, b)$, es H-diferenciable en t_0, y además, $f'(t_0) = c \cdot g'(t_0)$. Por otro lado, cuando $g'(t_0) < 0$, f no es H-diferenciable ya que no es posible garantizar la existencia de las H-diferencias $f(t_0 + h) \ominus_H f(t_0)$, $f(t_0) \ominus_H f(t_0 - h)$, y de la derivada $f'(t_0)$. Sin embargo, de acuerdo a la Definición 1.8.1, tenemos que f es GH-diferenciable en t_0. Así, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.8.4. *[3] Si $g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función real diferenciable sobre (a,b) y $c \in \mathcal{F}^1$, entonces $f(t) = c \cdot g(t)$ es GH-diferenciable sobre (a,b) y $f'(t) = c \cdot g'(t)$ para todo $t \in (a,b)$.*

1.9. Derivada generalizada de Hukuhara de funciones difusas

Basado en la gH-diferencia dada en [30] fue introducida la siguiente definición de diferenciabilidad de funciones difusas, la cual generaliza la H-diferenciabilidad y la GH-diferenciabilidad. Las ventajas de esta definición consisten en que por un lado se amplia la clase de funciones difusas diferenciables, manteniendo sus propiedades fundamentales, y por otro presenta un buen comportamiento respecto a la integrabilidad difusa.

Definición 1.9.1 ([5])**.** *Una función $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{F}^1$ se dice gH-diferenciable en t_0, si existe $f'_g(t_0) \in \mathcal{F}^1$ tal que*

$$f'_g(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(t_0+h) \ominus_g f(t_0)\right]. \tag{1.18}$$

El elemento $f'_g(t_0)$ indica la gH-derivada en t_0. Aquí, el límite es tomado en el espacio $(\mathcal{F}^n, d_\infty)$.

A través del siguiente ejemplo podemos observar que la noción de gH-diferenciabilidad es más general que la noción de GH-diferenciabilidad.

Ejemplo 1.9.2. *Sea u el conjunto difuso triangular definido por $u(t) = 0$ si $|t| \geq 1$, $u(t) = 1 + t$ si $-1 < t < 0$ y $u(t) = 1 - t$ si $0 \leq t < 1$. Considere la función difusa $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{F}^1$ definida por*

$$f(t) = \begin{cases} \left(1 - t^2 \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)\right) u & \text{si} \quad t \neq 0, \\ u & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Observe que

$$[f(t)]^\alpha = \begin{cases} \left(1 - t^2 \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)\right) [u]^\alpha & \text{si} \quad t \neq 0, \\ [u]^\alpha & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde $[u]^\alpha = [-1+\alpha, 1-\alpha]$. Entonces, las funciones reales f^-_α y f^+_α definidas por

$$f^-_\alpha(t) = \begin{cases} \left(1 - t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)(-1+\alpha) & \text{si} \quad t \neq 0, \\ -1+\alpha & \text{si} \quad t = 0, \end{cases} \qquad f^+_\alpha(t) = \begin{cases} \left(1 - t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)(1-\alpha) & \text{si} \quad t \neq 0, \\ 1-\alpha & \text{si} \quad t = 0, \end{cases}$$

son diferenciables y verifican que $\left(f^-_\alpha\right)'(0) = \left(f^+_\alpha\right)'(0) = 0$. Así, f es gH-diferenciable en $t = 0$ y $f'_g(0) = \chi_{\{0\}}$. Sin embargo, f no es GH-diferenciable en $t = 0$, puesto que no existe un $\delta > 0$ tal que las H-diferencias $f(h) \ominus_H f(0)$ y $f(-h) \ominus_H f(0)$ existan para todo $h \in (0, \delta)$.

Dada una aplicación difusa $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{F}^1$, se tiene que los α-niveles de f son intervalos compactos, esto es, $[f(t_0)]^\alpha = [f_\alpha^-(t_0), f_\alpha^+(t_0)]$, donde f_α^- y f_α^+ son funciones reales sobre (a,b). De acuerdo a la Definición 1.9.1, se distinguen dos casos de diferenciabilidad cuando f_α^- y f_α^+ son funciones diferenciables.

Definición 1.9.3 ([5])**.** *Sea $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{F}^1$ y $t_0 \in (a,b)$ con f_α^- y f_α^+ ambas diferenciables en t_0. Decimos que*

(I) f es (i)-gH-diferenciable en t_0 si

$$[f_g'(t_0)]^\alpha = [(f_\alpha^-)'(t_0), (f_\alpha^+)'(t_0)], \ \forall \alpha \in [0,1]. \tag{1.19}$$

(II) f is (ii)-gH-diferenciable en t_0 si

$$[f_g'(t_0)]^\alpha = [(f_\alpha^+)_g'(t_0), (f_\alpha^-)_g'(t_0)], \ \forall \alpha \in [0,1]. \tag{1.20}$$

En [30] los autores mostraron que el concepto de gH-diferenciabilidad es más general que el de la GH-diferenciabilidad, y también, establecieron condiciones necesarias para que una aplicación difusa gH-diferenciable sea GH-diferenciable. Antes de establecer ese resultado, es necesario dar la definición de *switching point* de una función difusa.

Definición 1.9.4 ([30])**.** *Sea $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{F}^1$ una función gH-diferenciable. Un elemento $t_0 \in (a,b)$ se dice que es "switching point" de f, si para toda vecindad $\mathcal{U}$ de t_0 existen puntos $t_1 < t_0 < t_2$ tal que*

(i) (tipo I) en t_1, se cumple (1.19) mientras que no se cumple (1.20), y en t_2, se cumple (1.20) y no se cumple (1.19), ó

(ii) (tipo II) en t_1, se cumple (1.20) mientras que no se cumple (1.19), y en t_2, se cumple (1.19) y no se cumple (1.20).

El siguiente resultado relaciona los conceptos de GH-diferenciabilidad y gH-diferenciabilidad en $\mathcal{F}^1$.

Teorema 1.9.5 ([30])**.** *Sea $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{F}^1$ una función con $[f(t_0)]^\alpha = [f_\alpha^-(t_0), f_\alpha^+(t_0)]$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) f es GH-diferenciable,

(ii) f es gH-diferenciable y el conjunto de switching points de f es finito.

1.10. Integrabilidad difusa

El objetivo de esta sección es presentar algunas definiciones y propiedades relacionadas con la integral de funciones difusas las cuales serán usadas en los Capítulos 3 y 4 para abordar la existencia de solución de PVI asociado a ecuaciones diferenciales ordinarias en el contexto difuso.

Definición 1.10.1. *Sea* $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{F}^1$ *una función difusa. Decimos que* f *es integralmente acotada, si existe una función* $h\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable tal que* $||x|| \leq h(t)$ *para todo* $x \in [f(t)]^0$ *y* $t \in (a,b)$*. Además,* f *se dice fuertemente medible si la multifunción* $f_\alpha\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{K}_c^1$*, definida como* $f_\alpha(t) = [f(t)]^\alpha$*, es medible para cada* $\alpha \in [0,1]$*.*

Definición 1.10.2 ([16])**.** *Una función* $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{F}^1$ *es integrable, si* f *es integralmente acotada y fuertemente medible.*

Definición 1.10.3 ([16])**.** *Sea* $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{F}^1$*. La integral de* f *sobre* (a,b)*, denotada por* $\int_a^b f(t)\ dt$*, está definida a través de sus* α*-niveles por la ecuación*

$$\left[\int_a^b f(t)\ dt\right]^\alpha = \int_a^b [f(t)]^\alpha\ dt, \quad \alpha \in [0,1]. \tag{1.21}$$

El siguiente teorema, dado en [16], resume algunas propiedades de la integral de funciones difusas que serán necesarias en los Capítulos 3 y 4.

Teorema 1.10.4. *Sean* $f, g\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{F}^1$ *dos funciones difusas y* $c \in \mathbb{R}$*. Entonces,*

(i) $\int_a^b (f+g)(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt + \int_a^b g(t)\ dt$,

(ii) $\int_a^b cf(t)\ dt = c\int_a^b f(t)\ dt$,

(iii) $d_\infty(f(t), g(t))$ *es integrable,*

(iv) $d_\infty(\int_a^b f(t)\ dt, \int_a^b g(t)\ dt) \leq \int_a^b d_\infty(f(t), g(t))\ dt$,

(v) Si $f \lesssim g$ *(respectivamente* $f \preceq g$*) y* f, g *son continuas, entonces* $\int_a^b f(t)\ dt \lesssim \int_a^b g(t)\ dt$ *(respectivamente* $\int_a^b f(t)\ dt \preceq \int_a^b g(t)\ dt$*).*

Por otro lado, destacamos el siguiente Lema dado en [4].

Lema 1.10.5. *Sea* $x \in \mathcal{F}^1$ *tales que las funciones* $x^\pm$ *definidas como en el Teorema 1.3.2 son diferenciables, con* x^- *creciente y* x^+ *decreciente sobre* $[0,1]$*, existen las constantes* $c_1 > 0$*,* $c_2 < 0$ *satisfaciendo* $(x_\alpha^-)' \geq c_1$ *y* $(x_\alpha^+)' \leq c_2$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$*. Sean* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathcal{F}^1$ *continua con respecto a* t *y* M, M_1, M_2 *constantes tal que* $len([f(t)]^1) \leq M$ *para todo* $t \in [a,b]$*,* $\left|\frac{\partial f_\alpha^-(t)}{\partial \alpha}\right| \leq M_1$ *y* $\left|\frac{\partial f_\alpha^+(t)}{\partial \alpha}\right| \leq M_2$*. Además, supóngase que* b *es tal que* $b \leq \frac{c_1}{M_1}$*,* $b \leq \frac{|c_2|}{M_2}$ *y* $b \leq \frac{len([x]^1)}{M}$*. Si* *(a)* $x^-(1) < x^+(1)$

ó si

(b) $x^-(1) = x^+(1)$ *y el conjunto* $[f(s)]^1$ *consiste de exactamente un elemento para cualquier* $s \in [a,b]$, *entonces la* H*-diferencia*

$$x \ominus_H \int_a^t f(s)\ ds$$

existe para cualquier $t \in [a,b]$.

Teorema 1.10.6 ([5]). *Sea* $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{F}^1$ *continua con* $[f(t)]^\alpha = [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$. *Entonces*

(i) *La función* $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ *es* gH*-diferenciable y* $F'_{gH}(x) = f(x)$,

(ii) *La función* $G(x) = \int_x^b f(t)\ dt$ *es* gH*-diferenciable y* $G'_{gH}(x) = -f(x)$.

Observación 1.10.7 ([16]). *Si* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathcal{F}^1$ *es integrable, entonces*

$$\left[\int f\right]^\alpha = \left[\int f_\alpha^-, \int f_\alpha^+\right],$$

donde $[f(t)]^\alpha = [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$ *y* $\alpha \in [0,1]$.

Teorema 1.10.8 ([5]). *Si* $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{F}^1$ *es* GH*-diferenciable sin ningún switching point en el intervalo* (a,b), *entonces*

$$\int_a^b f'_g(t)\ dt = f(b) \ominus_g f(a). \tag{1.22}$$

Un resultado análogo al Teorema Fundamental del Cálculo en el contexto difuso es el siguiente.

Teorema 1.10.9 ([5]). *Supóngase que* $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{F}^1$ *es* gH*-diferenciable con* n *switching points en* c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n < c_{n+1} = b$. *Entonces*

$$f(b) \ominus_g f(a) = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{c_{i-1}}^{c_i} f'_g(t)\ dt \ominus_g (-1) \int_{c_i}^{c_{i+1}} f'_g(t)\ dt\right]. \tag{1.23}$$

Además,

$$\int_a^b f'_g(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n+1} (f(c_i) \ominus_g f(c_{i-1})). \tag{1.24}$$

Una versión más débil que el Teorema 1.10.9 es el Corolario 1.10.10, el cual considera funciones difusas con *switching points* siendo números “crisp”.

Corolario 1.10.10 ([5])**.** *Sea* $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{F}^1$ *gH-diferenciable. Si* c_i *son switching point de* f *y* $f(c_i)$ *son números "crisp" para todo* $i = 1, 2, \ldots, n$*, entonces*

$$\int_a^b f'_g(t)\ dt = f(b) \ominus_g f(a). \tag{1.25}$$

Demostración. Por (1.24) se sigue que $\int_a^b f'_g(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n+1} (f(c_i) \ominus_g f(c_{i-1}))$, donde $c_0 = a$, $c_{n+1} = b$ y los c_i, $i = 1, \ldots, n$, son los *switching points* de f. Por otro lado, por (1.8) y dado que $f(c_i)$ son números "crisp" para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ se sigue que las gH-diferencias

$$f(c_i) \ominus_g f(c_{i-1}) = f(c_i) - f(c_{i-1}), \quad \forall i = 0, \ldots, n+1.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(f(c_i) \ominus_g f(c_{i-1})) &= f(b) \ominus_g f(c_n) + \cdots + f(c_1) \ominus_g f(a) \\ &= f(b) - f(c_n) + \cdots + f(c_1) - f(a) = f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Así, $\int_a^b f'_g(t)\ dt = f(b) \ominus_g f(a)$. □

Capítulo 2

Teoremas de punto fijo de funciones débilmente contractivas sobre conjuntos parcialmente ordenados

En este capítulo presentamos algunos de los resultados recientes de punto fijo de funciones débilmente contractivas y algunas generalizaciones de funciones débilmente contractivas, definidas sobre conjuntos parcialmente ordenados. Además, siguiendo las ideas de [14] y de [23], mostramos algunos resultados de punto fijo de funciones débilmente contractivas definidas sobre $\mathcal{F}^n$ y $C(J, \mathcal{F}^n)$, respectivamente. Destacamos que el desarrollo de todos estos resultados de punto fijo serán fundamentales en el estudio de la existencia y unicidad de soluciones a problemas de valor inicial en el contexto difuso.

2.1. Algunos resultados de punto fijo de funciones débilmente contractivas monótonas

En [14] se obtuvieron algunos resultados de punto fijo de funciones débilmente contractivas sobre espacios métricos completos, que luego fueron aplicados al estudio de existencia y unicidad de soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con condiciones de frontera de tipo periódico. En esta sección presentamos algunos de esos resultados.

Definición 2.1.1. *Una función de distancia alternante (o "altering distance") es una función* $\psi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *tal que:*

(i) ψ *es continua y no-decreciente (con el orden usual en* $[0,\infty)$*).*

(ii) $\psi(t) = 0$ *si y sólo si* $t = 0$.

Definición 2.1.2 ([14])**.** *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* $f\colon X \to X$ *una función. Se dice que* f *es débilmente contractiva si*

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)), \tag{2.1}$$

para todo $x, y \in X$*, donde* ψ *y* ϕ *son funciones de distancia alternante.*

Observación 2.1.3. *Recordemos que una contracción es una función* $f\colon X \longrightarrow X$*, donde* (X, d) *es un espacio métrico, tal que existe* $0 \leq \lambda < 1$ *verificando*

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) \quad \textit{para todo} \quad x, y \in X. \tag{2.2}$$

Así, note que dentro de las funciones débilmente contractivas están las contracciones ya que es posible escribir (2.2) como (2.1) considerando las funciones de distancia alternante ψ *y* ϕ *definidas por* $\psi(t) = t$ *y* $\phi(t) = (1 - \lambda)t$.

Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $f\colon X \longrightarrow X$ una función. Decimos que f es monótona no-decreciente, si para cada $x, y \in X$ con $x \leq y$ implica que $f(x) \leq f(y)$. La función f es monótona no-creciente, si para todo $x, y \in X$ con $x \leq y$ implica que $f(x) \geq f(y)$. A continuación mostramos algunos resultados de punto fijo obtenidos en [14], donde la función f no es necesariamente continua.

Teorema 2.1.4 ([14])**.** *Sea* $(X, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado y supóngase que existe una métrica* d *en* X *tal que* (X, d) *es un espacio métrico completo. Sea* $f\colon X \longrightarrow X$ *una función monótona no-decreciente tal que*

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)), \ \textit{para} \ \ x \geq y, \tag{2.3}$$

para algunas funciones de distancia alternante ψ *y* ϕ*. Supóngase que* X *verifica que si una sucesión no-decreciente* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *es convergente a* $x \in X$*, entonces* $x_k \leq x$*, para todo* $k \in \mathbb{N}$*, ó que* f *sea continua. Si existe* $x_0 \in X$ *tal que* $x_0 \leq f(x_0)$*, entonces* f *tiene un punto fijo.*

Observación 2.1.5. *Note que la condición (2.3) en el Teorema 2.1.4 que satisface f, es más débil que la condición (2.1) que verifica una función débilmente contractiva, ya que se exige esta condición solamente para cada pareja de elementos que están relacionados.*

Un resultado similar al Teorema 2.1.4, cuya prueba es similar a la prueba del Teorema 2.1 en [14], es el siguiente.

Teorema 2.1.6. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y supóngase que existe una métrica d en X tal que (X, d) es un espacio métrico completo. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ una función monótona no-decreciente tal que se cumple (2.3). Supóngase que X verifica que si una sucesión no-creciente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente a $x \in X$, entonces $x \leq x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ó que f es continua. Si existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \geq f(x_0)$, entonces f tiene un punto fijo.*

El próximo teorema garantiza la existencia y unicidad de un punto fijo y la convergencia global del método de aproximaciones sucesivas, esto es, si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $f\colon X \longrightarrow X$ es una función, la sucesión $(f^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge al punto fijo de f para todo $x \in X$.

Teorema 2.1.7 ([14])**.** *Bajo las hipótesis del Teorema 2.1.4 (respectivamente del Teorema 2.1.6), si toda pareja de elementos de X tiene una cota superior o una cota inferior, f tiene un único punto fijo. Además, si $\overline{x}$ es el punto fijo de f, entonces para todo $x \in X$ $\lim_{k\to\infty} f^k(x) = \overline{x}$.*

A continuación mostramos algunos teoremas de punto fijo sobre espacios parcialmente ordenados de funciones débilmente contractivas para elementos comparables. Siguiendo algunas ideas dadas por [14] y [23], obtenemos el siguiente resultado para funciones f monótonas no-crecientes.

Teorema 2.1.8. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y suponga que existe una métrica d en X tal que (X, d) es un espacio métrico completo. Sea $f : X \longrightarrow X$ una aplicación monótona no-creciente tal que se cumple (2.3). Supóngase que X verifica que si una sucesión no-creciente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente a $x \in X$, entonces $x \leq x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, o que f es continua. Si existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \geq f(x_0)$, entonces f tiene un punto fijo.*

Demostración. Si $f(x_0) = x_0$, se tiene que x_0 es punto fijo de f. Supóngase que $x_0 > f(x_0)$. Como f es no-creciente se tiene que

$$\cdots \leq f^{k+1}(x_0) \leq f^k(x_0) \leq \cdots \leq f^2(x_0) \leq f(x_0) < x_0.$$

Sea $x_{k+1} = f(x_k)$. Entonces, dado que f verifica (2.3) y como x_{k+1} y x_k son comparables se sigue que

$$\begin{aligned}\psi(d(x_{k+1},x_k)) &= \psi(d(f(x_k),f(x_{k-1})))\\ &\le \psi(d(x_k,x_{k-1})) - \phi(d(x_k,x_{k-1}))\\ &\le \psi(d(x_k,x_{k-1})).\end{aligned}$$

Suponga que $d(x_k,x_{k-1}) < d(x_{k+1},x_k)$, entonces $\psi(d(x_k,x_{k-1})) \le \psi(d(x_{k+1},x_k))$. Así, tenemos que $\psi(d(x_k,x_{k-1})) = \psi(d(x_{k+1},x_k))$. Luego, de la desigualdad

$$\psi(d(x_{k+1},x_k)) \le \psi(d(x_k,x_{k-1})) - \phi(d(x_k,x_{k-1})),$$

se sigue que $0 \le -\phi(d(x_k,x_{k-1}))$, lo cual implica que $\phi(d(x_k,x_{k-1})) = 0$. Entonces, $d(x_k,x_{k-1}) = 0$, y por lo tanto,

$$0 = \psi(0) = \psi(d(x_k,x_{k-1})) = \psi(d(x_{k+1},x_k)).$$

Así, $d(x_{k+1},x_k) = 0$. De ahí se obtiene una contradicción. Por consiguiente,

$$d(x_{k+1},x_k) \le d(x_k,x_{k-1}).$$

Si existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{k_0},x_{k_0-1}) = 0$ se tiene que $x_{k_0} = f(x_{k_0-1}) = x_{k_0-1}$, y así, x_{k_0-1} es un punto fijo de f. Supóngase que para todo $k \in \mathbb{N}$, $d(x_{k_0},x_{k_0-1}) \neq 0$. Luego, teniendo en cuenta que $(d(x_{k+1},x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente se tiene que existe $r \ge 0$ tal que

$$d(x_{k+1},x_k) \to r \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Así, haciendo $k \to \infty$ en (2.1) se tiene que

$$\psi(r) \le \psi(r) - \phi(r) \le \psi(r).$$

De ahí que $\phi(r) = 0$, y por lo tanto, $r = 0$. Entonces,

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{k+1},x_k) = 0.$$

Ahora se probará que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Supóngase que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ no es una sucesión de Cauchy. Luego existe $\varepsilon > 0$ para el cual se pueden encontrar subsucesiones $(x_{k(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ y $(x_{k(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $k(i) > k(j) > j$ tal que

$$d(x_{k(i)},x_{k(j)}) \ge \varepsilon. \tag{2.4}$$

Considere que $k(i)$ corresponde al menor entero tal que $k(i) > k(j)$ verificando (2.4). Por lo tanto,

$$d(x_{k(i)-1}, x_{k(j)}) < \varepsilon.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq d(x_{k(i)}, x_{k(j)}) \\ &\leq d(x_{k(i)}, x_{k(i)-1}) + d(x_{k(i)-1}, x_{k(j)}) \\ &< d(x_{k(i)}, x_{k(i)-1}) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Haciendo $k \to \infty$ se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{k(i)}, x_{k(j)}) = \varepsilon. \tag{2.5}$$

Usando la desigualdad triangular se tiene

$$\begin{aligned}d(x_{k(i)}, x_{k(j)}) &\leq d(x_{k(i)}, x_{k(i)-1}) + d(x_{k(i)-1}, x_{k(j)-1}) + d(x_{k(j)-1}, x_{k(j)}) \\ d(x_{k(i)-1}, x_{k(j)-1}) &\leq d(x_{k(i)-1}, x_{k(i)}) + d(x_{k(i)}, x_{k(j)}) + d(x_{k(j)}, x_{k(j)-1}).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{k(i)-1}, x_{k(j)-1}) = \varepsilon. \tag{2.6}$$

Teniendo en cuenta (2.5) y (2.6), y haciendo $k \to \infty$ se tiene

$$\psi(\varepsilon) \leq \psi(\varepsilon) - \phi(\varepsilon).$$

De ahí que $\phi(\varepsilon) = 0$, y por ende, $\varepsilon = 0$. Pero esto es contradictorio. Consecuentemente, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, y dado que (X, d) es un espacio métrico completo, existe $x \in X$ tal que $x_k \to x$ cuando $k \to \infty$. En caso de que f es continua se tiene que

$$x = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\lim_{k\to\infty} x_k) = f(x).$$

Por consiguiente, $x \in X$ es punto fijo de f. Por otro lado, si X verifica que dada una sucesión monótona no-creciente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente a $x \in X$, entonces $x \leq x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\psi(d(x_{k+1}, f(x))) \leq \psi(d(x_k, x)) - \phi(d(x_k, x))$$

Haciendo $k \to \infty$ se tiene que $\psi(d(x, f(x))) \leq \psi(0) - \phi(0) = 0$. Entonces $d(x, f(x)) = 0$, y así, x es punto fijo de f. $\square$

Agregando la condición de que cualquier pareja de elementos del espacio parcialmente ordenado tenga una cota superior o inferior obtenemos unicidad de punto fijo en funciones débilmente contractivas f, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.9 ([14]). *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 2.1.8, si toda pareja de elementos de X tiene una cota superior o una cota inferior, entonces f tiene un único punto fijo. Si $\overline{x}$ es el punto fijo de f, entonces para cada $x \in X$, $\lim\limits_{k\to\infty} f^k(x) = \overline{x}$.*

2.2. Resultados de punto fijo sobre los espacios $\mathcal{F}^1$ y $C(J, \mathcal{F}^1)$

Usando los Teoremas 2.1.4-2.1.8 y haciendo $X = \mathcal{F}^1$ y $X = C(J, \mathcal{F}^1)$ se obtienen los siguientes resultados:

Teorema 2.2.1. *Sea $F : \mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^1$ una función monótona no-decreciente tal que*

$$\psi\Big(d_\infty(F(u), F(v))\Big) \leq \psi(d_\infty(u, v)) - \phi(d_\infty(u, v)), \ \ si \ \ u \gtrsim v, \tag{2.7}$$

donde ψ y ϕ son funciones de distancia alternante. Suponga que existe $u_0 \in \mathcal{F}^1$ con $F(u_0) \gtrsim u_0$ ó $F(u_0) \lesssim u_0$, entonces F tiene un único punto fijo.

Demostración. Por lo hecho en la Sección 1.6, se tiene que $(\mathcal{F}^1, \lesssim)$ es un conjunto parcialmente ordenado, $(\mathcal{F}^1, d_\infty)$ es un espacio métrico completo (ver [23]), y toda pareja de elementos de $\mathcal{F}^1$ tiene una cota superior. Por hipótesis, F es no-decreciente y verifica (2.7). Además, existe $u_0 \in \mathcal{F}^1$ con $F(u_0) \gtrsim u_0$ o $F(u_0) \lesssim u_0$. Suponga que existe $u_0 \in \mathcal{F}^1$ tal que $F(u_0) \gtrsim u_0$. Entonces aplicando el Teorema 2.1.4 se sigue que F tiene un punto fijo. Por otro lado, si existe $u_0 \in \mathcal{F}^1$ tal que $F(u_0) \lesssim u_0$. Entonces al aplicar el Teorema 2.1.6 se sigue que F tiene un punto fijo. Dado que toda pareja de elementos de $\mathcal{F}^1$ tiene una cota superior se tiene la unicidad del punto fijo. ☐

Teorema 2.2.2. *Sea $F : C(J, \mathcal{F}^1) \longrightarrow C(J, \mathcal{F}^1)$ una función monótona no-decreciente tal que*

$$\psi\Big(D(F(\beta), F(\gamma))\Big) \leq \psi(D(\beta, \gamma)) - \phi(D(\beta, \gamma)), \ \ si \ \ \beta \gtrsim \gamma, \tag{2.8}$$

donde ψ y ϕ son funciones de distancia alternante. Suponga que existe $\beta_0 \in C(J, \mathcal{F}^1)$ con $F(\beta_0) \gtrsim \beta_0$ ó $F(\beta_0) \lesssim \beta_0$, entonces F tiene un único punto fijo.

Demostración. De igualmente como en la prueba del Teorema 2.2.1, se tiene que $(C(J, \mathcal{F}^1), \lesssim)$ es un conjunto parcialmente ordenado, $(C(J, \mathcal{F}^1), D)$ es un espacio métrico completo (ver [23]), y toda pareja de elementos de $C(J, \mathcal{F}^1)$ tiene una cota superior. Por hipótesis, F es no-decreciente y verifica (2.8). Además, existe $\beta_0 \in C(J, \mathcal{F}^1)$ con $F(\beta_0) \gtrsim \beta_0$ ó $F(\beta_0) \lesssim \beta_0$. Suponga que existe $\beta_0 \in C(J, \mathcal{F}^1)$

tal que $F(\beta_0) \gtrsim \beta_0$. Entonces aplicando el Teorema 2.1.4 se sigue que F tiene un punto fijo. Por otro lado, si existe $\beta_0 \in C(J, \mathcal{F}^1)$ tal que $F(\beta_0) \lesssim \beta_0$. Entonces al aplicar el Teorema 2.1.6 se sigue que F tiene un punto fijo. Dado que toda pareja de elementos de $C(J, \mathcal{F}^1)$ tiene una cota superior se tiene que F tiene un único punto fijo. $\square$

Para el caso de los conjuntos difusos $n-$dimensionales, con $n \geq 1$, se obtienen los siguientes resultados:

Teorema 2.2.3. *Sea $F : \mathcal{F}^n \longrightarrow \mathcal{F}^n$ una función monótona no-decreciente tal que*

$$\psi\Big(d_\infty(F(u), F(v))\Big) \leq \psi(d_\infty(u, v)) - \phi(d_\infty(u, v)), \;\; si \;\; u \succeq v, \tag{2.9}$$

donde ψ y ϕ son funciones de distancia alternante. Suponga que existe $u_0 \in \mathcal{F}^n$ con $F(u_0) \succeq u_0$ ó $F(u_0) \preceq u_0$, entonces F tiene un único punto fijo.

Demostración. Por lo hecho en la Sección 1.6, se tiene que $(\mathcal{F}^n, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, $(\mathcal{F}^n, d_\infty)$ es un espacio métrico completo (ver [23]), y toda pareja de elementos de $\mathcal{F}^n$ tiene una cota superior. Por hipótesis, F es no-decreciente y verifica (2.9). Además, existe $u_0 \in \mathcal{F}^1$ con $F(u_0) \succeq u_0$ ó $F(u_0) \preceq u_0$. Suponga que existe $u_0 \in \mathcal{F}^n$ tal que $F(u_0) \succeq u_0$. Entonces aplicando el Teorema 2.1.4 se sigue que F tiene un punto fijo. Por otro lado, si existe $u_0 \in \mathcal{F}^n$ tal que $F(u_0) \preceq u_0$. Entonces al aplicar el Teorema 2.1.6 se sigue que F tiene un punto fijo, al aplicar el Teorema 2.1.6. Dado que toda pareja de elementos de $\mathcal{F}^n$ tiene una cota superior se tiene que F tiene un único punto fijo. $\square$

Teorema 2.2.4. *Sea $F : C(J, \mathcal{F}^n) \longrightarrow C(J, \mathcal{F}^n)$ una función monótona no-decreciente tal que*

$$\psi\Big(D(F(\beta), F(\gamma))\Big) \leq \psi(D(\beta, \gamma)) - \phi(D(\beta, \gamma)), \;\; si \;\; \beta \succeq \gamma, \tag{2.10}$$

donde ψ y ϕ son funciones de distancia alternante. Suponga que existe $\beta_0 \in C(J, \mathcal{F}^n)$ con $F(\beta_0) \succeq \beta_0$ ó $F(\beta_0) \preceq \beta_0$, entonces F tiene un único punto fijo.

Demostración. De igualmente como en la prueba del Teorema anterior, se tiene que $(C(J, \mathcal{F}^n), \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, $(C(J, \mathcal{F}^n), D)$ es un espacio métrico completo (ver [23]), y toda pareja de elementos de $C(J, \mathcal{F}^n)$ tiene una cota superior. Por hipótesis, F es no-decreciente y verifica (2.10). Además, existe $\beta_0 \in C(J, \mathcal{F}^n)$ con $F(\beta_0) \succeq \beta_0$ ó $F(\beta_0) \preceq \beta_0$. Suponga que existe $\beta_0 \in C(J, \mathcal{F}^n)$ tal que $F(\beta_0) \succeq \beta_0$. Entonces aplicando el Teorema 2.1.4 se sigue que F tiene un punto fijo. Por otro lado, si existe $\beta_0 \in C(J, \mathcal{F}^n)$ tal que $F(\beta_0) \preceq \beta_0$. Entonces al aplicar el Teorema 2.1.6 se sigue que F tiene un punto fijo. Dado que toda pareja de elementos de $C(J, \mathcal{F}^n)$ tiene una cota superior se tiene que F tiene un único punto fijo. $\square$

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales ordinarias difusas de primer orden

En este capítulo estudiamos la existencia y unicidad de soluciones de PVID asociados a ecuaciones diferenciales difusas ordinarias de primer orden usando la gH-derivada. En aras de encontrar la solución a un PVID usaremos algunos de los teoremas de punto fijo de funciones débilmente contractivas dadas en el Capítulo 2. Inicialmente presentamos algunos resultados destacados sobre la existencia y unicidad de soluciones a PVID usando diferentes conceptos de diferenciabilidad difusa encontrados en la literatura, y posteriormente, mostraremos los teoremas que obtuvimos sobre existencia y unicidad de soluciones a PVID, los cuales constituyen el aporte novedoso de este trabajo.

3.1. Algunos resultados de existencia y unicidad de soluciones de PVID usando H-derivada

Recordemos que el Teorema clásico de Peano garantiza la existencia de una solución del siguiente PVI asociado a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

donde $f\colon \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ es continua y X es un espacio de Banach finito dimensional. En ese sentido, una pregunta natural es saber si existe una versión análoga al Teorema de Peano para el caso de los PVID. Sucede que debido a que el espacio métrico $(\mathcal{F}^1, d_\infty)$ no es localmente compacto, la condición de continuidad de la función difusa f en el Problema (3.1) no es suficiente para garantizar la existencia local de soluciones (ver [18] y referencias que allí se encuentran). Como consecuencia de este hecho, han surgido varios resultados de existencia (y unicidad) de soluciones a PVID agregándole condiciones adicionales a la continuidad de f. En esta sección presentamos algunos resultados destacados que se encuentran en la literatura sobre la existencia y unicidad de soluciones a PVID usando diferentes tipos de diferenciabilidad difusa. Comenzamos presentando el siguiente teorema pionero obtenido por Kaleva, el cual usa la H-derivada. Para ello, supongamos que $f\colon [a,b]\times\mathcal{F}^n \longrightarrow \mathcal{F}^n$ es una función continua y consideremos el siguiente problema de valor inicial difuso

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(a) = x_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Se dice que una solución para el Problema 3.1 es una función $x\colon [a,b] \longrightarrow \mathcal{F}^n$ continua verificando la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s))\ ds.$$

Kaleva en [16] obtuvo el siguiente resultado de existencia de una única solución global para el Problema 3.1 con la noción de la H-derivada.

Teorema 3.1.1 ([16])**.** *Sea $f\colon [a,b]\times\mathcal{F}^n \longrightarrow \mathcal{F}^n$ continua y asuma que existe un $\lambda > 0$ tal que*

$$d_\infty(f(t,x), f(t,y)) \le \lambda d_\infty(x,y)$$

para todo $x, y \in \mathcal{F}^n$ y $t \in [a,b]$. Entonces el Problema 3.1 tiene una única solución sobre $[a,b]$.

Al debilitar la condición de Lipschitz de f con respecto a la segunda componente dada en el Teorema 3.1.1 por una condición de acotamiento, Nieto en [24] obtuvo el siguiente resultado sobre la existencia local de solución del Problema 3.1 usando la noción de la H-diferenciabilidad.

Teorema 3.1.2 ([24])**.** *Supóngase que $f\colon [a,b]\times\mathcal{F}^n \longrightarrow \mathcal{F}^n$ es continua y acotada. Entonces, el Problema 3.1 posee al menos una solución sobre el intervalo $[a,b]$.*

Los Teoremas 3.1.1 y 3.1.2 usan la noción de la H-diferenciabilidad, la cual es generalizada por la noción de la GH-diferenciabilidad como se mostró en el primer capítulo. El siguiente resultado ofrece condiciones para garantizar la existencia y unicidad de solución del Problema 3.1, usando la noción de la GH-diferenciabilidad.

Teorema 3.1.3 ([3])**.** *Suponga que se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) Sea $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(x_0, q)$, $p, q > 0$, $x_0 \in \mathcal{F}^1$, *donde* $\overline{B}(x_0, q) = \left\{x \in \mathcal{F}^1 : d_\infty(x, x_0) \leq q\right\}$ *denota la bola cerrada y sea* $f\colon R_0 \longrightarrow \mathcal{F}^1$ *una función difusa continua tal que* $d_\infty(f(t,x), \chi_{\{0\}}) = ||f(t,x)||_{\mathcal{F}^1} \leq M$ *para todo* $(t,x) \in R_0$.

(ii) Sea $g\colon [t_0, t_0 + p] \times [0, q] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $g(t, 0) \equiv 0$ *y* $0 \leq g(t, y) \leq M_1$, *para todo* $t \in [t_0, t_0 + p]$, $0 \leq y \leq q$ *tal que* $g(t, y)$ *es no-decreciente en* y *y* g *es tal que el PVI* $y'(t) = g(t, y(t))$, $y(t_0) = 0$ *tiene solo la solución* $y(t) \equiv 0$ *sobre* $[t_0, t_0 + p]$.

(iii) Asúmase que $d_\infty(f(t,x), f(t,z)) \leq g(t, d_\infty(x,z))$, *para todo* $(t,x), (t,z) \in R_0$ *y* $d_\infty(x,z) \leq q$.

(iv) Supóngase que existe $d > 0$ *tal que para* $t \in [t_0, t_0 + d]$, *la sucesión* $\overline{x}_k\colon [t_0, t_0 + d] \longrightarrow \mathcal{F}^1$ *dada por* $\overline{x}_0(t) = x_0$, $\overline{x}_{k+1}(t) = x_0 \ominus_H \left(-\int_{t_0}^{t} f(t, \overline{x}_k)\ dt\right)$ *está definida para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Entonces el PVID (con GH-derivada)

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

tiene dos soluciones (una diferenciable en el sentido (i) de la Definición 1.8.1 y la otra en el sentido (ii) de la misma definición) $x, \overline{x}\colon [t_0, t_0 + r] \longrightarrow B(x_0, q)$, *donde* $r = \text{mín}\left\{p, \frac{q}{M}, \frac{q}{M_1}, d\right\}$ *y las sucesiones iterativas*

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \quad x_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_k)\ ds, \\ \overline{x}(0) &= x_0, \quad \overline{x}_{k+1}(t) = x_0 \ominus_H \left(-\int_{t_0}^{t} f(t, \overline{x}_k)\ dt\right), \end{aligned}$$

convergen a esas dos soluciones, respectivamente.

El siguiente resultado también garantiza la existencia y unicidad de solución de un PVID bajo la noción de GH-diferenciabilidad; sin embargo es una generalización del Teorema 3.1.3 en el sentido que la función f depende de una variable adicional.

Teorema 3.1.4 ([4]). *Sean* $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(x_0, q) \times \overline{B}(x_0, q)$ *con* $p, q > 0$ *y* $x_0 \in \mathcal{F}^1$ *y* $f\colon R_0 \longrightarrow \mathcal{F}^1$ *continua verificando las siguientes condiciones:*

(i) Existe una constante $L > 0$ *tal que*

$$d_\infty(f(t,x,u), f(t,y,v)) \leq L\left(d_\infty(x,y) + d_\infty(u,v)\right), \quad \forall (t,x,u), (t,y,v) \in R_0.$$

(ii) Sea $[f(t,x,u)]^\alpha = [F_\alpha^-(t,x,u), F_\alpha^+(t,x,u)]$, *la representación de* f *como en el Teorema 1.3.2*

tal que $F_\alpha^-, F_\alpha^+ \colon R_0 \longrightarrow \mathcal{F}^1$ *tienen derivadas parciales acotadas con respecto a* $\alpha \in [0,1]$ *y con cotas siendo independientes de* $(t,x,u) \in R_0$ *y* $\alpha \in [0,1]$.

(*iii*) *Las funciones* x_0^- *y* x_0^+ *son diferenciables, existiendo* $c_1 > 0$ *con* $x_0^-(\alpha) \geq c_1$, *y* $c_2 < 0$ *con* $x_0^+(\alpha) \leq c_1$, *para todo* $\alpha \in [0,1]$ *de manera tal que*

(*a*) $x_0^-(1) < x_0^+(1)$, *ó*

(*b*) *si* $x_0^-(1) = x_0^+(1)$, *entonces el conjunto* $[f(t,x,u)]^1$ *consiste en exactamente un elemento para cualquier* $(t,x,u) \in R_0$, *siempre que* $[x]^1$ *y* $[u]^1$ *consisten en exactamente un solo elemento.*

Si $h \colon [t_0, t_0+p] \longrightarrow [t_0, t_0+p]$ *es continua, entonces el problema de valor inicial difuso*

$$x'(t) = f(t, x(t), x(h(t))), \quad x(t_0) = x_0,$$

tiene exactamente dos soluciones definidas en un intervalo $[t_0, t_0+k]$ *para algún* $k > 0$.

3.2. Resultados de existencia y unicidad de soluciones a problemas de valor inicial usando derivada generalizada

En esta sección usamos el concepto de la gH-derivada junto con los teoremas de punto fijo del Capítulo 2, con el fin de obtener nuevos resultados sobre la existencia y unicidad de soluciones para PVID con valores en $\mathcal{F}^1$, generalizando algunos de los resultados obtenidos en [3, 6, 16, 21, 23, 27, 30, 31]. Consideramos el siguiente PVID:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

donde la derivada x' es considerada en el sentido de la gH-diferenciabilidad y la función $f \colon J \times \mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^1$ es continua. Además, permitiremos un número finito de "switching points" y ellos son números "crisp" (ver Definición 1.9.4). El dato inicial x_0 se asume en $\mathcal{F}^1$. Denotemos por $C^1(J, \mathcal{F}^1)$ el conjunto de todas las funciones continuas $f \colon J \longrightarrow \mathcal{F}^1$ con derivada continua. Basados en el Teorema 1.10.9 y en el Corolario 1.10.10 establecemos la siguiente definición.

Definición 3.2.1. *Una solución para el Problema 3.2 es una función* $x \in C^1(J, \mathcal{F}^1)$ *satisfaciendo*

$$x(t) \ominus_g x_0 = \int_0^t f(s, x(s))\, ds, \quad t \in J = [0,T]. \tag{3.3}$$

Ejemplo 3.2.2. *Considere el siguiente PVID*

$$x' = -x(t) \ , \quad x(0) = C, \tag{3.4}$$

donde la condición inicial $C = (-1, 0, 1)$ es un número triangular difuso.
Si consideramos la gH-derivada de x en el primer sentido, obtenemos una solución $x^1(t)$ para (3.4), la cual es diferenciable en el primer sentido, dada por

$$x^1(t) = C \cdot e^t.$$

Si consideramos la gH-derivada de x en el segundo sentido, obtenemos una solución $x^2(t)$ para (3.4), la cual es diferenciable en el segundo sentido, dada por

$$x^2(t) = C \cdot e^{-t}.$$

Ahora, podemos combinar las derivadas en el primer y segundo sentido con el fin de obtener otras soluciones. Por ejemplo para resolver el Problema 3.4, primero consideramos la solución x^2 sobre el intervalo $[0, 1]$ y entonces consideramos el siguiente Problema:

$$x' = -x(t) \ , \quad x(0) = x^2(1), \tag{3.5}$$

del cual obtenemos la solución (diferenciable en el primer sentido) $x^a(t) = C \cdot e^{t-2}$ para $t \in [1, 3]$. Entonces, nuevamente consideramos la derivada en el segundo sentido y resolvemos el siguiente Problema:

$$x' = -x(t) \ , \quad x(0) = x^a(3), \tag{3.6}$$

Así, obtenemos la solución (diferenciable en el segundo sentido) $x^b(t) = C \cdot e^{1-t}$, para todo $t \geq 3$. Así, tenemos una tercera solución x^3 para el Problema (3.4) la cual es dada por

$$x^3(t) = \begin{cases} C \cdot e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1 \\ C \cdot e^{t-2}, & 1 \leq t \leq 3 \\ C \cdot e^{1-t} & t \geq 3. \end{cases}$$

En este caso, $t = 1$ es un "switching point" de tipo I, y $t = 3$ es un "switching point" de tipo II para la diferenciabilidad de x^3. Similarmente al proceso anterior, podemos obtener muchas otras soluciones para el Problema (3.4).

Del ejemplo previo, podemos ver que no existe una única solución para el Problema 3.2 puesto que al usar el concepto de "switching point", podemos construir muchas otras soluciones combinando las que son diferenciables en el primer y segundo sentido. Así, es interesante estudiar la existencia de solución para el Problema 3.2.

Definición 3.2.3. *Una función $\mu \in C^1(J, \mathcal{F}^1)$ se dice que es una solución inferior para el Problema 3.2, si*

$$\mu'(t) \lesssim f(t, \mu(t)), \quad t \in J, \quad \mu(0) \lesssim x_0.$$

Una función $\mu \in C^1(J, \mathcal{F}^1)$ se dice que es una solución inferior para el Problema 3.2, si

$$\mu'(t) \gtrsim f(t, \mu(t)), \quad t \in J, \quad \mu(0) \gtrsim x_0.$$

Nuestro principal resultado sobre la existencia y unicidad soluciones para PVID es dado por el siguiente Teorema.

Teorema 3.2.4. *Supóngase que existe una solución inferior $\mu \in C^1(J, \mathcal{F}^1)$ para el Problema 3.2. Sean $x_0 \in \mathcal{F}^1$, el cual no es numero "crisp", y $f\colon J \times \mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^1$ continua tal que:*

(i) $len([x_0]^\alpha) \geq len\left(\left[\int_0^t f(s, x(s))\ ds\right]^\alpha\right)$ para todo $\alpha \in [0,1]$, $(x_0)^-_\alpha - F^-_\alpha(t)$ es creciente con respecto a α, y $(x_0)^+_\alpha - F^+_\alpha(t)$ es decreciente con respecto a α, donde $[x_0]^\alpha = [(x_0)^-_\alpha, (x_0)^+_\alpha]$ y $\left[\int_0^t f(s, x(s))\ ds\right]^\alpha = [F^-_\alpha(t), F^+_\alpha(t)]$.

(ii) f es no-decreciente en la segunda variable, esto es, si $x \gtrsim y$ entonces $f(t, x) \gtrsim f(t, y)$,

(iii) f es débilmente contractiva para los elementos comparables, esto es, para algunas funciones de distancia alternante ψ y ϕ, se cumple

$$\psi\left(d_\infty(f(t, x), f(t, y))\right) \leq \psi(d_\infty(x, y)) - \phi(d_\infty(x, y)), \ \text{si} \ \ x \gtrsim y. \tag{3.7}$$

Entonces, el Problema 3.2 tiene dos únicas soluciones dependiendo del caso de la gH-diferencia considerado.

Observación 3.2.5. *La condición (i) del Teorema 3.2.4 puede ser obtenida si x_0 y f verifican las hipótesis del Lema 1.10.5.*

Demostración. La idea de la prueba consiste en aplicar el Teorema 2.1.6; para esto usamos algunas ideas de [23]. Como estamos considerando la gH-derivada de f y permitimos solo un número finito de "switching points" y ellos son números "crisp", entonces del Teorema 1.10.9 y del Corolario

1.10.10, el Problema 3.2 puede ser escrito como la ecuación integral

$$x(t) \ominus_g x_0 = \sum_{i=1}^{n+1} x(c_i) \ominus_g x(c_{i-1}) = \int_0^t f(s, x(s))\ ds, \quad t \in J, \tag{3.8}$$

donde c_i son los "switching points" de x, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, $c_0 = 0$ y $c_{n+1} = x(t)$. De acuerdo a la definición de gH-diferencia, la ecuación (3.8) puede ser expresada como

$$\begin{cases} \text{Caso I: } x(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t f(s, x(s))\ ds, & t \in J = [0, T], \\ \text{Caso II: } x(t) = x_0 \ominus_H \left(- \displaystyle\int_0^t f(s, x(s))\ ds \right), & t \in J = [0, T]. \end{cases}$$

Case I: Definimos el operador $\mathcal{A}_1 \colon C(J, \mathcal{F}^1) \to C(J, \mathcal{F}^1)$ por

$$[\mathcal{A}_1 x](t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\ ds, \quad t \in J.$$

Note que si $x \in C(J, \mathcal{F}^1)$ es un punto fijo de $\mathcal{A}_1$, entonces $x \in C^1(J, \mathcal{F}^1)$ es una solución del Problema 3.2 y recíprocamente. En $C(J, \mathcal{F}^1)$, para $\rho > 0$ suficientemente grande tal que $\frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho} < 1$, considere la métrica

$$D_\rho(x, y) = \sup_{s \in J} \left\{ d_\infty(x(s), y(s))\ e^{-\rho s} \right\}, \quad x, y \in C(J, \mathcal{F}^1).$$

Esta métrica es equivalente a la métrica D, porque $D_\rho(x, y) \leq D(x, y) \leq e^{\rho T} D_\rho(x, y)$ para todo $x, y \in C(J, \mathcal{F}^1)$. Además, $(C(J, \mathcal{F}^1), D_\rho)$ es un espacio métrico completo ([9]).

De la suposición (ii) y del Teorema 1.10.4 tenemos

$$[\mathcal{A}_1 x](t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\ ds \gtrsim x_0 + \int_0^t f(s, y(s))\ ds = [\mathcal{A}_1 y](t),$$

siempre que $x \gtrsim y$ y $t \in J$. Entonces, $\mathcal{A}_1 y \lesssim \mathcal{A}_1 x$ siempre que $y \lesssim x$, y consecuentemente, el operador $\mathcal{A}_1$ es no-decreciente.

Ahora, de (iii), f verifica $\psi\left(d_\infty(f(t, x), f(t, y))\right) \leq \psi(d_\infty(x, y)) - \phi(d_\infty(x, y))$, si $x \gtrsim y$. Entonces, para todo $x \gtrsim y$,

$$\psi\left(d_\infty(f(t, x), f(t, y))\right) \leq \psi(d_\infty(x, y)). \tag{3.9}$$

Supóngase que $d_\infty(x, y) < d_\infty(f(t, x), f(t, y))$, para todo $x \gtrsim y$. Entonces, dado que ψ es no-decreciente se cumple $\psi(d_\infty(x, y)) \leq \psi\left(d_\infty(f(t, x), f(t, y))\right)$. Así, de (3.9),

$$\psi(d_\infty(x, y)) = \psi\left(d_\infty(f(t, x), f(t, y))\right),$$

para todo $x \gtrsim y$. Por lo tanto, reemplazando en (3.7), se sigue que $0 \leq -\phi(d_\infty(x,y))$, y consecuentemente, $\phi(d_\infty(x,y)) = 0$. Entonces, $d_\infty(x,y) = 0$, y así, $\psi\left(d_\infty(f(t,x), f(t,y))\right) = \phi(d_\infty(x,y)) = 0$. Por lo tanto, como ϕ es una función de distancia alternante, obtenemos que $d_\infty(f(t,x), f(t,y)) = 0$ llegando a una contradicción. Así,

$$d_\infty(f(t,x), f(t,y)) \leq d_\infty(x,y), \text{ para todo } x \gtrsim y. \tag{3.10}$$

Entonces, para $x \gtrsim y$ se cumple

$$\begin{aligned}
D_\rho(\mathcal{A}_1 x, \mathcal{A}_1 y) &= \sup_{t\in J}\left\{d_\infty\left([\mathcal{A}_1 x](t), [\mathcal{A}_1 y](t)\right) e^{-\rho t}\right\}\\
&= \sup_{t\in J}\left\{d_\infty\left(x_0 + \int_0^t f(s,x(s))\ ds, x_0 + \int_0^t f(s,y(s))\ ds\right)\ e^{-\rho t}\right\}\\
&= \sup_{t\in J}\left\{d_\infty\left(\int_0^t f(s,x(s))\ ds, \int_0^t f(s,y(s))\ ds\right) e^{-\rho t}\right\}\\
&\leq \sup_{t\in J}\left\{\int_0^t d_\infty\left(f(s,x(s)), f(s,y(s))\right)\ ds\ e^{-\rho t}\right\}\\
&\leq \sup_{t\in J}\left\{\int_0^t d_\infty(x(s),y(s))\ ds\ e^{-\rho t}\right\} && \text{(por (3.10))}\\
&= \sup_{t\in J}\left\{\int_0^t d_\infty(x(s),y(s))\ e^{-\rho s}\ e^{\rho s}\ ds\ e^{-\rho t}\right\}\\
&\leq \sup_{t\in J}\left\{D_\rho(x,y)\ \int_0^t e^{\rho s}\ ds\ e^{-\rho t}\right\}\\
&= \sup_{t\in J}\left\{D_\rho(x,y)\ \frac{1-e^{-\rho t}}{\rho}\right\} = \frac{1-e^{-\rho T}}{\rho}\ D_\rho(x,y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $D_\rho(\mathcal{A}_1 x, \mathcal{A}_1 y) \leq \frac{1-e^{-\rho T}}{\rho}\ D_\rho(x,y)$. Se cumple que

$$\begin{aligned}
\gamma\left(D_\rho(\mathcal{A}_1 x, \mathcal{A}_1 y)\right) &\leq \gamma\left(D_\rho(x,y)\ \frac{1-e^{-\rho T}}{\rho}\right)\\
&= \gamma(D_\rho(x,y)) - \left[\gamma(D_\rho(x,y)) - \gamma\left(D_\rho(x,y)\ \frac{1-e^{-\rho T}}{\rho}\right)\right],
\end{aligned}$$

para alguna función de distancia alternante creciente γ. Entonces, si $\Phi(t) = \gamma(t) - \gamma\left(\frac{1-e^{-\rho T}}{\rho} t\right)$ se sigue que para $x \gtrsim y$.

$$\gamma(D_\rho(\mathcal{A}_1 x, \mathcal{A}_1 y)) \leq \gamma(D_\rho(x,y)) - \Phi(D_\rho(x,y)). \tag{3.11}$$

Finalmente, usando la existencia de una solución inferior, se cumple

$$\mu(t) = \mu(0) + \int_0^t \mu'(s)\ ds \leq x_0 + \int_0^t f(s,\mu(s))\ ds = [\mathcal{A}_1 \mu](t), \quad t \in J.$$

Así, $\mu \leq \mathcal{A}_1\mu$. En esta forma el operador $\mathcal{A}_1$ verifica todas las hipótesis del Teorema 2.1.7, y por lo tanto, $\mathcal{A}_1$ tiene un punto fijo en $C(J, \mathcal{F}^1)$. Dado que $C(J, \mathcal{F}^1)$ verifica que toda pareja de elementos de $C(J, \mathcal{F}^1)$ tiene una cota superior (ver Teorema 2.1.7), se sigue que el operador $\mathcal{A}_1$ tiene un único punto fijo.

Case II: En este caso, definimos el operador $\mathcal{A}_2 \colon C(J, \mathcal{F}^1) \to C(J, \mathcal{F}^1)$ por

$$[\mathcal{A}_2 x](t) = x_0 \ominus_g \left(- \int_0^t f(s, x(s))\ ds \right), \quad t \in J.$$

Similarmente al Caso I, si $x \in C(J, \mathcal{F}^1)$ es un punto fijo de $\mathcal{A}_2$, entonces $x \in C^1(J, \mathcal{F}^1)$ es una solución para el Problema 3.2 e inversamente. También, se cumple que el operador $\mathcal{A}_2$ es no-decreciente, pues para $x \gtrsim y$,

$$[\mathcal{A}_2 x](t) = x_0 \ominus_g \left(- \int_0^t f(s, x(s))\ ds \right) \gtrsim x_0 \ominus_g \left(- \int_0^t f(s, y(s))\ ds \right) = [\mathcal{A}_2 y](t), \quad t \in J.$$

Como f verifica (iii) tenemos que $\psi\left(d_\infty(f(t,x), f(t,y))\right) \leq \psi(d_\infty(x,y))$ para todo $x \gtrsim y$. Entonces $d_\infty(f(t,x), f(t,y)) \leq d_\infty(x,y)$. Así, siempre que $x \gtrsim y$ se cumple que

$$\begin{aligned} d_\infty\left([\mathcal{A}_2 x](t), [\mathcal{A}_2 y](t)\right) &= d_\infty\left(x_0 \ominus_g \left(- \int_0^t f(s, x(s))\ ds \right), x_0 \ominus_g \left(- \int_0^t f(s, x(s))\ ds \right) \right) \\ &= d_\infty\left(\int_0^t f(s, x(s))\ ds, \int_0^t f(s, y(s))\ ds \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se sigue que $D_\rho(\mathcal{A}_2 x, \mathcal{A}_2 y) \leq \frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho}\ D_\rho(x,y)$. Entonces, para alguna función de distancia alternante creciente γ, se cumple

$$\begin{aligned} \gamma\left(D_\rho(\mathcal{A}_2 x, \mathcal{A}_2 y)\right) &\leq \gamma\left(D_\rho(x,y)\ \frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho} \right) \\ &= \gamma(D_\rho(x,y)) - \left[\gamma(D_\rho(x,y)) - \gamma\left(D_\rho(x,y)\ \frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho} \right) \right]. \end{aligned}$$

Entonces, si $\Phi(t) = \gamma(t) - \gamma\left(\frac{1-e^{-\rho T}}{\rho} t\right)$ y siempre que $x \gtrsim y$, se sigue que

$$\gamma(D_\rho(\mathcal{A}_2 x, \mathcal{A}_2 y)) \leq \gamma(D_\rho(x,y)) - \Phi(D_\rho(x,y)). \tag{3.12}$$

Finalmente, note que

$$\mu(t) = \mu(0) \ominus_g \left(- \int_0^t \mu'(s)\ ds \right) \lesssim x_0 \ominus_g \left(- \int_0^t f(s, \mu(s))\ ds \right) = [\mathcal{A}_2 \mu](t), \quad t \in J.$$

Luego $\mu \lesssim \mathcal{A}_2\mu$. Entonces, el operador $\mathcal{A}_2$ verifica todas las hipótesis del Teorema 2.1.4, y por lo tanto, $\mathcal{A}_2$ tiene un punto fijo en $C(J,\mathcal{F}^1)$. Dado que $C(J,\mathcal{F}^1)$ verifica que toda pareja de elementos de $C(J,\mathcal{F}^1)$ tiene una cota superior (ver Teorema 2.1.7), el operador $\mathcal{A}_2$ tiene un único punto fijo. $\square$

Corolario 3.2.6. *Supóngase que existe una solución inferior $\mu \in C^1(J,\mathcal{F}^1)$ del Problema 3.2. Sea $f\colon J\times\mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^1$ continua tal que:*

(i) $len([x_0]^\alpha) \geq len\left(\left[\int_0^t f(s,x(s))\ ds\right]^\alpha\right)$ para todo $\alpha\in[0,1]$, $(x_0)^-_\alpha - F^-_\alpha(t)$ es creciente con respecto a α, y $(x_0)^+_\alpha - F^+_\alpha(t)$ es decreciente con respecto a α, donde $[x_0]^\alpha = [(x_0)^-_\alpha,(x_0)^+_\alpha]$ y $\left[\int_0^t f(s,x(s))\ ds\right]^\alpha = [F^-_\alpha(t),F^+_\alpha(t)]$.

(ii) f es no-decreciente en la segunda variable, esto es, si $x \gtrsim y$ entonces $f(t,x)\gtrsim f(t,y)$,

(iii) para alguna función de distancia alternante ϕ, se cumple $d_\infty(f(t,x),f(t,y)) \leq d_\infty(x,y) - \phi(d_\infty(x,y))$, $x\gtrsim y$.

Entonces, el Problema 3.2 tiene dos únicas soluciones dependiendo del caso de la gH-diferencia considerado.

Demostración. Basta considerar $\psi(t)=t$ y usar el Teorema 3.2.4. $\square$

Cambiando la existencia de una solución inferior por la existencia de una solución superior al Teorema 3.2.4 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.7. *Reemplazando la existencia de una solución inferior al Problema 3.2 por una solución superior al Problema 3.2, la conclusión del Teorema 3.2.4 aún es válida.*

Demostración. Si μ es una solución superior para el Problema 3.2, tenemos que

$$\mu(t)=\mu(0)+\int_0^t \mu'(s)\ ds \gtrsim x_0 + \int_0^t f(s,\mu(s))\ ds = [\mathcal{A}_1\mu](t),\quad t\in J. \tag{3.13}$$

$$\mu(t)=\mu(0)\ominus_H\left(-\int_0^t \mu'(s)\ ds\right)\gtrsim x_0\ominus_H\left(-\int_0^t f(s,\mu(s))\ ds\right)=[\mathcal{A}_2\mu](t),\quad t\in J. \tag{3.14}$$

Así, $\mu \geq \mathcal{A}_i\mu$, $i=1,2$, el cual corresponde a cada caso considerado en el Teorema 3.2.4. La existencia de una solución para el Problema 3.2 se sigue del Teorema 2.1.6, ya que $C(J,\mathcal{F}^1)$ verifica que si una sucesión no-creciente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente a $x\in C(J,\mathcal{F}^1)$, entonces $x\lesssim x_k$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Dado que toda pareja de elementos de $C(J,\mathcal{F}^1)$ tiene una cota superior, el operador $\mathcal{A}_i\mu$, $i=1,2$, tiene un único punto fijo. $\square$

Corolario 3.2.8. *Reemplazando la existencia de una solución inferior por una solución superior al Problema 3.2, la conclusión del Corolario 3.2.6 aún es valida.*

Observación 3.2.9. *Las dos soluciones obtenidas del Teorema 3.2.4 (respectivamente Teorema 3.2.7) para el Problema 3.2 coinciden, si* $f(t, u(t))$ *es una función característica para todo* $x \in C(J, \mathcal{F}^1)$*. Además, esas soluciones pueden ser obtenidas como* $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{A}_i^k(x)$*,* $i = 1, 2$*, para cualquier* $x \in C(J, \mathcal{F}^1)$*. En particular,* $(\mathcal{A}_i^k(\mu))_{k\in\mathbb{N}}$*,* $i = 1, 2$*, son sucesiones monótonas no-decrecientes y convergentes en* $C(J, \mathcal{F}^1)$ *a cada una de las dos soluciones del Problema 3.2.*

Observación 3.2.10. *Los resultados dados en [23] sobre PVID usan la derivada de Hukuhara y requieren como hipótesis que* f *sea Lipschitz en la segunda variable para los elementos relacionados. Obtenemos una generalización de esos resultados, si simplemente cambiamos la hipótesis de contractividad de* f *por la siguiente condición*

$$\psi(d_\infty(f(t, x), f(t, y))) \leq \psi(d_\infty(x, y)) - \phi(d_\infty(x, y)), \quad t \in J, \tag{3.15}$$

donde ψ, ϕ *son funciones de distancia alternante.*

Observación 3.2.11. *Considerando el orden parcial "*$\preceq$*" es posible dar una definición similar a la Definición 3.2.3 y obtener resultados similares al Teorema 3.2.4, Corolario 3.2.6, Teorema 3.2.7 y Corolario 3.2.8.*

Capítulo 4

Aplicaciones

En este capítulo consideramos dos aplicaciones de los PVID usando la noción de la gH-diferenciabilidad. En la primera aplicación estudiamos un PVID con retardo finito, el cual está asociado a una ecuación diferencial difusa, considerando la gH-derivada, con el cual la función difusa incógnita $x(t)$ en un cierto tiempo, es escrita en términos de los valores de la función difusa en tiempos previos al tiempo inicial. Y finalmente, como una segunda aplicación, estudiamos un PVID con control asociado a una ecuación integro-diferencial difusa, la cual modela muchas situaciones de las ciencias e ingenierías, principalmente en el análisis de los circuitos eléctricos.

4.1. Problemas de valor inicial difuso con retardo finito

Las ecuaciones diferenciales ordinarias en el contexto difuso con retardo finito, expresan el hecho en el que la función incógnita en un sistema dinámico depende, no sólo sobre el estado del sistema en un instante dado, sino que depende de la historia de la trayectoria hasta ese instante (ver [21]), además de la naturaleza difusa de los datos. Estas ecuaciones juegan un papel importante en un número creciente de modelos sobre diferentes campos de la ciencia; de hecho, existe una extensa literatura sobre ecuaciones diferenciales de funciones con retardo finito y aplicaciones; en particular, EDD con retardo finito, usando H-derivada, han sido estudiadas en [23]. El objetivo de esta sección es aplicar ideas de los resultados de la Sección 3.2 para tratar PVID de funciones difusas con retardo finito usando la gH-derivada.

Sea $\tau > 0$ y denotemos por $C_0 = C([-\tau, 0], \mathcal{F}^1)$. Consideremos sobre C_0 la métrica H definida por

$$H(\eta, \lambda) = \max_{-\tau \leq s \leq 0} d_\infty(\eta(s), \lambda(s)), \quad \eta, \lambda \in C_0.$$

Supóngase que $x \in C(J_0, \mathcal{F}^1)$, donde $J_0 = [-\tau, T]$, $T > 0$. Entonces, para $t \geq 0$ y $t \in J_0$, la traslación $x_t \in C_0$ de x sobre $[-\tau, 0]$ es definida como la restricción de x al intervalo $[t-\tau, t]$, es decir, $x_t(s) = x(t+s)$, $-\tau \leq s \leq 0$.

Considere el siguiente PVID con retardo finito

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t), \quad t \in J = [0, T], \\ x_0 = \eta \in C_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

donde $f \in C(J \times C_0, \mathcal{F}^1)$ y la derivada x' es considerada en el sentido de la gH-diferenciabilidad. Además permitimos sólo un número finito de "switching points" y ellos son números "crisp" (ver Definición 1.9.4).

Definición 4.1.1. *Una solución de (4.1) es una función difusa $x \in C(J_0, \mathcal{F}^1) \cap C^1(J, \mathcal{F}^1)$ tal que*

$$\begin{cases} x(t) = \eta(t), & si \;\; t \in [-\tau, 0], \\ x(t) \ominus_g \;\eta(0) = \displaystyle\int_0^t f(s, x_s)\; ds, & si \;\; t \in J. \end{cases} \tag{4.2}$$

Definición 4.1.2. *Una función $\mu \in C(J_0, \mathcal{F}^1) \cap C^1(J, \mathcal{F}^1)$ es una solución inferior de (4.1) si*

$$\mu'(t) \lesssim f(t, \mu_t), \quad t \in J, \quad \mu_0 \lesssim \eta.$$

Una función $\mu \in C(J_0, \mathcal{F}^1) \cap C^1(J, \mathcal{F}^1)$ es una solución superior de (4.1) si

$$\mu'(t) \gtrsim f(t, \mu_t), \quad t \in J, \quad \mu_0 \gtrsim \eta.$$

Teorema 4.1.3. *Supóngase que existe una solución inferior $\mu \in C(J_0, \mathcal{F}^1) \cap C^1(J, \mathcal{F}^1)$ para el Problema 4.1. Sean $x_0(t) \in \mathcal{F}^1$, $t \in [-\tau, T]$, el cual no es número "crisp", y $f\colon J \times C_0 \longrightarrow \mathcal{F}^1$ continua tal que:*

(i) $len([x_0(t)]^\alpha) \geq len\left(\left[\int_0^t f(s, x_s)\; ds\right]^\alpha\right)$ para todo $\alpha \in [0,1]$, $(x_0(t))_l^\alpha - \int_0^t f_l^\alpha(s)\; ds$ es creciente con respecto a α, y $(x_0(t))_r^\alpha - \int_0^t f_r^\alpha(s)\; ds$ es decreciente con respecto a α, donde $[x_0(t)]^\alpha = [(x_0(t))_l^\alpha, (x_0(t))_r^\alpha]$ y $\left[\int_0^t f(s, x_s)\; ds\right]^\alpha = [\int_0^t f_l^\alpha(s)\; ds, \int_0^t f_r^\alpha(s)\; ds]$.

(ii) f es no-decreciente en la segunda variable, es decir, si $\eta \gtrsim \lambda$ entonces $f(t, \eta) \gtrsim f(t, \lambda)$,

(iii) f es débilmente contractivo para los elementos comparables, esto es, para algunas funciones

de distancia alternante ψ y ϕ, se cumple que

$$\psi\left(d_\infty(f(t,\eta), f(t,\lambda))\right) \leq \psi(H(\eta,\lambda)) - \phi(H(\eta,\lambda)), \ \ si \ \ \eta \gtrsim \lambda \ y \ t \in J.$$

Entonces, el Problema 4.1 tiene dos únicas soluciones dependiendo del caso de la gH-diferencia considerado.

Demostración. Sobre $C(J_0, \mathcal{F}^1)$, para $\rho > 0$ suficientemente grande tal que $\frac{1-e^{-\rho T}}{\rho} < 1$, consideramos la métrica

$$D_\rho(x,y) = \sup_{t\in[-\tau,T]} \left\{ d_\infty(x(t), y(t)) \ e^{-\rho t} \right\}, \quad x, y \in C(J, \mathcal{F}^1).$$

Entonces $(C(J_0, \mathcal{F}^1), D_\rho)$ es un espacio métrico completo (ver [9]). Consideramos dos casos dependiendo del caso de la gH-diferencia considerado.

Case I: Definimos el operador $\mathcal{A}_1 \colon C(J_0, \mathcal{F}^1) \longrightarrow C(J_0, \mathcal{F}^1)$ por

$$[\mathcal{A}_1 x](t) = \begin{cases} \eta(t) & \text{si } \ t \in [-\tau, 0], \\ \eta(0) + \displaystyle\int_0^t f(s, x_s) \ ds & \text{si } \ t \in J. \end{cases}$$

Si $x \in C(J_0, \mathcal{F}^1)$ es un punto fijo de $\mathcal{A}_1$, entonces $x \in C^1(J, \mathcal{F}^1)$ es una solución del Problema 4.1 y recíprocamente. Por otro lado, para $x \gtrsim y$, si $t \in [-\tau, 0]$, $[\mathcal{A}_1 x](t) = \eta(t) = [\mathcal{A}_1 y](t)$, y si $t \in J$, de la suposición (ii), tenemos que

$$[\mathcal{A}_1 x](t) = \eta(0) + \int_0^t f(s, x_s) \ ds \gtrsim \eta(0) + \int_0^t f(s, y_s) \ ds = [\mathcal{A}_1 y](t).$$

Así $\mathcal{A}_1 x \gtrsim \mathcal{A}_1 y$ siempre que $x \gtrsim y$, y por lo tanto, el operador $\mathcal{A}_1$ es no-decreciente.

Por otro lado, de la suposición (iii) se cumple que

$$\psi\left(d_\infty(f(t, x_s), f(t, y_s))\right) \leq \psi(H(x_s, y_s)) \text{ para todo } x \gtrsim y,$$

para alguna función de distancia alternante ψ. Entonces

$$d_\infty(f(t, x_s), f(t, y_s)) \leq H(x_s, y_s) \text{ para todo } x \gtrsim y. \tag{4.3}$$

Por lo tanto, para $x \gtrsim y$, si $t \in [-\tau, 0]$, $d_\infty([\mathcal{A}_1 x](t), [\mathcal{A}_1 y](t)) = d_\infty(\eta(t), \eta(t)) = 0$ y si $t \in J$,

$$d_\infty\left([\mathcal{A}_1 x](t), [\mathcal{A}_1 y](t)\right) = d_\infty\left(\eta(0) + \int_0^t f(s, x_s) ds, \eta(0) + \int_0^t f(s, y_s) ds\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^t d_\infty\left(f(s,x_s), f(s,y_s)\right) ds \\
&\leq \int_0^t H\left(x_s, y_s\right) ds && \text{(por (4.3))} \\
&= \int_0^t \max_{-\tau\leq r\leq 0} d_\infty(x_s(r), y_s(r))\ ds.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
D_\rho(\mathcal{A}_1x, \mathcal{A}_1y) &= \sup_{t\in[-\tau,T]} \left\{ d_\infty\left([\mathcal{A}_1x](t), [\mathcal{A}_1y](t)\right) e^{-\rho t} \right\} \\
&\leq \sup_{t\in J} \left\{ \int_0^t \max_{-\tau\leq r\leq 0} d_\infty(x_s(r), y_s(r)) ds\ e^{-\rho t} \right\} \\
&= \sup_{t\in J} \left\{ \int_0^t \max_{-\tau\leq r\leq 0} d_\infty(x(s+r), y(s+r)) ds\ e^{-\rho t} \right\} \\
&\leq \sup_{t\in J} \left\{ D_\rho(x,y)\ \int_0^t \max_{-\tau\leq r\leq 0} e^{\rho(s+r)} ds\ e^{-\rho t} \right\} \\
&\leq D_\rho(x,y) \sup_{t\in J} \left\{ \int_0^t e^{-\rho s} ds\ e^{-\rho t} \right\} \\
&= D_\rho(x,y) \sup_{t\in J} \left\{ \frac{1-e^{-\rho t}}{\rho} \right\} = \frac{1-e^{-\rho T}}{\rho}\ D_\rho(x,y).
\end{aligned}
$$

Así $D_\rho(\mathcal{A}_1x, \mathcal{A}_1y) \leq \frac{1-e^{-\rho T}}{\rho}\ D_\rho(x,y)$, y para alguna función de distancia alternante creciente γ se cumple

$$
\begin{aligned}
\gamma\left(D_\rho(\mathcal{A}_1x, \mathcal{A}_1y)\right) &\leq \gamma\left(D_\rho(x,y)\ \frac{1-e^{-\rho T}}{\rho} \right) \\
&= \gamma(D_\rho(x,y)) - \left[\gamma(D_\rho(x,y)) - \gamma\left(D_\rho(x,y)\ \frac{1-e^{-\rho T}}{\rho} \right) \right].
\end{aligned}
$$

Entonces, tomando $\Phi(t) = \gamma(t) - \gamma\left(\frac{1-e^{-\rho T}}{\rho} t\right)$ se sigue que Φ es una función de distancia alternante y

$$
\gamma(D_\rho(\mathcal{A}_1x, \mathcal{A}_1y)) \leq \gamma(D_\rho(x,y)) - \Phi(D_\rho(x,y)). \tag{4.4}
$$

Finalmente, note que si $t \in [-\tau, 0]$ y $\mu(0) \lesssim \eta$, $\mu(t) \lesssim \eta(t) = [\mathcal{A}_1\mu](t)$, y si $t \in J$,

$$
\mu(t) = \mu(0) + \int_0^t \mu'(s)\ ds \lesssim x_0 + \int_0^t f(s, \mu_s)\ ds = [\mathcal{A}_1\mu](t).
$$

Así $\mu \leq \mathcal{A}_1\mu$. De esta manera el operador $\mathcal{A}_1$ verifica las hipótesis del Teorema 2.1.4, y por lo tanto, $\mathcal{A}_1$ tiene un punto fijo en $C(J_0, \mathcal{F}^1)$.

Caso II: De la misma forma como en el Caso I, definimos el operador $\mathcal{A}_2\colon C(J_0, \mathcal{F}^1) \longrightarrow C(J_0, \mathcal{F}^1)$

por:

$$[\mathcal{A}_2 u](t) = \begin{cases} \eta(t) & \text{si} \quad t \in [-\tau, 0], \\ \eta(0) \ominus_H \left(- \displaystyle\int_0^t f(s, x_s)\ ds \right) & \text{si} \quad t \in J. \end{cases} \tag{4.5}$$

La condición (i) garantiza que la H-diferencia dada en (4.5) exista. Si $x \in C(J_0, \mathcal{F}^1)$ es un punto fijo de $\mathcal{A}_2$, entonces $x \in C^1(J, \mathcal{F}^1)$ es una solución del Problema 4.1 y recíprocamente. Como en la primera parte, the operador $\mathcal{A}_2$ es no-decreciente y verifica

$$\gamma(D_\rho(\mathcal{A}_2 x, \mathcal{A}_2 y)) \leq \gamma(D_\rho(x, y)) - \Phi(D_\rho(x, y)), \tag{4.6}$$

donde Φ es definido como $\Phi(t) = \gamma(t) - \gamma\left(\frac{1-e^{-\rho T}}{\rho} t\right)$, con γ creciente. Además, $\mu \lesssim \mathcal{A}_2 \mu$. Por lo tanto, el operador $\mathcal{A}_2$ verifica las hipótesis del Teorema 2.1.6, y por lo tanto, $\mathcal{A}_2$ tiene un punto fijo en $C(J_0, \mathcal{F}^1)$. Como toda pareja de elementos de $C(J_0, \mathcal{F}^1)$ tiene una cota superior, se sigue que el operador $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, tiene un único punto fijo. $\square$

Teorema 4.1.4. *Reemplazando la existencia de una solución inferior por una solución superior al Problema 4.1, la conclusión del Teorema 4.1.3 aún es válida.*

Demostración. Si μ es una solución superior al Problema 4.1, verificamos que

- Para el Caso I

$$\mu(t) \gtrsim \eta(t) = [\mathcal{A}_1 \mu](t), \quad t \in [-\tau, 0],$$
$$\mu(t) = \mu(0) + \int_0^t \mu'(s)\ ds \gtrsim \eta(0) + \int_0^t f(s, \mu_s)\ ds = [\mathcal{A}_1 \mu](t), \quad t \in J.$$

- Para el Caso II

$$\mu(t) \gtrsim \eta(t) = [\mathcal{A}_2 \mu](t), \quad t \in [-\tau, 0],$$
$$\mu(t) = \mu(0) \ominus_H \left(- \int_0^t \mu'(s)\ ds \right) \gtrsim \eta(0) \ominus_H \left(\int_0^t f(s, \mu_s)\ ds \right) = [\mathcal{A}_2 \mu](t), \quad t \in J.$$

La unicidad de la solución, en cada caso, viene del Teorema 2.1.6. $\square$

Observación 4.1.5. *Las dos únicas soluciones al Problema 4.1 en el Teorema 4.1.3 (respectivamente el Teorema 4.1.4) pueden ser obtenidas como* $\lim_{k \to \infty} \mathcal{A}_i^k(\mu)$, $i = 1, 2$.

Observación 4.1.6. *Los resultados de esta sección también son válidos si cambiamos el orden parcial "$\lesssim$" por "$\preceq$", el cual es definido en (1.12).*

4.2. Problemas de valor inicial asociados a ecuaciones integro-diferenciales difusas con control

Inicialmente decimos que la Teoría de control es una rama de las matemáticas que manipula el comportamiento de los sistemas dinámicos logrando, de esta manera, un efecto deseado sobre los mismos. Como un aporte que hacemos a esta teoría, en esta sección estudiamos la existencia y unicidad de soluciones a un PVI asociado a una ecuación integro-diferencial difusa con control usando la noción de la gH-diferenciabilidad. Así, consideremos el siguiente PVID

$$\begin{cases} x'(t) = & f(t, x(t), u(t)) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} h_1(t, s, x(s), u(s))\ ds \\ & + g\left(t, x(t), \displaystyle\int_{t_0}^{t} h_2(t, s, x(s), u(s)\ ds, u(t))\right), \\ x(t_0) = & x_0, \end{cases} \tag{4.7}$$

donde las funciones difusas $f\colon J \times \mathcal{F}^1 \times \mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^1$, $g\colon J \times \mathcal{F}^1 \times \mathcal{F}^1 \times \mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^1$ y $h_1, h_2\colon J \times J \times \mathcal{F}^1 \times \mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^1$ son continuas y $J = \{t\colon |t - t_0| \leq \delta \leq s \leq a\}$ es un intervalo dado con $a > 0$. Decimos que un control $u\colon J \longrightarrow \mathcal{F}^1$ es admisible, si éste es integrable.

Denotemos los siguientes conjuntos: $Q = J \times B[x_0; b_1] \times B[u_0; b_2]$, $Q_0 = J \times B[x_0; b_1] \times B[x_0; b_1] \times B[u_0; b_2]$ y $Q_1 = J \times J \times B[x_0; b_1] \times B[u_0; b_2]$, donde $b_1, b_2 > 0$, $x_0, u_0 \in \mathcal{F}^1$ y las bolas cerradas $B[x_0; b_1]$ y $B[u_0; b_2]$ están definidas por los conjuntos

$$B[x_0; b_1] = \{x(t) \in \mathcal{F}^1 : d_\infty(x(t), x_0) \leq b_1,\ t \in J\},$$
$$B[u_0; b_2] = \{u(t) \in \mathcal{F}^1 : d_\infty(u(t), u_0) \leq b_2,\ t \in J\}.$$

Definición 4.2.1. *Una función $x\colon J \longrightarrow \mathcal{F}^1$ es una solución para el Problema 4.7, si ésta es continua y satisface la ecuación integral*

$$\begin{aligned} x(t) \ominus_g x_0 = & \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), u(s))\ ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} h_1(s, \tau, x(s), u(\tau))\ d\tau\ ds \\ & + \int_{t_0}^{t} g\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} h_2(s, \tau, x(\tau), u(\tau))\ d\tau, u(s)\right)\ ds, \end{aligned} \tag{4.8}$$

para todo $t \in J$.

Note que (4.8) se puede escribir como

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), u(s))\ ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} h_1(s, \tau, x(s), u(\tau))\ d\tau\ ds$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{t_0}^{t} g\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} h_2(s,\tau,x(\tau),u(\tau))\ d\tau, u(s)\right)\ ds; &(4.9)\\
x(t) =& x_0 \ominus_H \left(-\int_{t_0}^{t} f(s,x(s),u(s))\ ds - \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} h_1(s,\tau,x(s),u(\tau))\ d\tau\ ds\right.\\
&\left.-\int_{t_0}^{t} g\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} h_2(s,\tau,x(\tau),u(\tau)\ d\tau), u(s)\right)\ ds\right). &(4.10)
\end{aligned}
$$

Ahora suponga que $x, y\colon J \longrightarrow \mathcal{F}^1$ son dos funciones difusas que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) Del conjunto de controles admisibles, consideramos aquellos que verifican que $\int_{t_0}^{t} d_\infty(u(s),\chi_{\{0\}})\ ds < \widetilde{B}$, donde $\widetilde{B} > 0$ es una constante.

(ii) Suponga que la función difusa $f\colon Q \longrightarrow \mathcal{F}^1$ es continua y que para todo $(t,x(t),u(t)),(t,y(t),v(t)) \in Q$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\psi\left(d_\infty\left[f(t,x(t),u(t)), f(t,y(t),v(t))\right]\right) \leq\ & \psi(d_\infty(x(t),y(t)) + d_\infty(u(t),v(t)))\\
&-\phi(d_\infty(x(t),y(t)) + d_\infty(u(t),v(t))),\\
\psi\left(d_\infty\left[f(t,x(t),u(t)),\chi_{\{0\}}\right]\right) \leq\ & \psi(d_\infty(x(t),\chi_{\{0\}}) + d_\infty(u(t),\chi_{\{0\}}))\\
&-\phi(d_\infty(x(t),\chi_{\{0\}}) + d_\infty(u(t),\chi_{\{0\}})),
\end{aligned}
$$

para algunas funciones de distancia alternante ψ y ϕ.

(iii) Suponga que la función difusa $g\colon Q_0 \longrightarrow \mathcal{F}^1$ es continua y que para todo $(t,x_1(t),y_1(t),u(t)),(t,x_2(t),y_2(t),v(t)) \in Q_0$ se tiene

$$
\begin{aligned}
&\psi\left(d_\infty\left[g(t,x_1(t),y_1(t),u(t)), g(t,x_2(t),y_2(t),v(t))\right]\right)\\
&\quad\leq \psi[d_\infty(x_1(t),x_2(t)) + d_\infty(y_1(t),y_2(t)) + d_\infty(u(t),v(t))]\\
&\quad-\phi[d_\infty(x_1(t),x_2(t)) + d_\infty(y_1(t),y_2(t)) + d_\infty(u(t),v(t))],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi\left(d_\infty\left[g(t,x_1(t),y_1(t),u(t)),\chi_{\{0\}}\right]\right) \leq\ & \psi[d_\infty(x_1(t),\chi_{\{0\}}) + d_\infty(y_1(t),\chi_{\{0\}}) + d_\infty(u(t),\chi_{\{0\}})]\\
&-\phi[d_\infty(x_1(t),\chi_{\{0\}}) + d_\infty(y_1(t),\chi_{\{0\}}) + d_\infty(u(t),\chi_{\{0\}})],
\end{aligned}
$$

para algunas funciones de distancia alternante ψ y ϕ.

(iv) Suponga que las funciones difusas $h, k\colon Q_1 \longrightarrow \mathcal{F}^1$ son continuas y para cualquier

$(t,s,x,u),(t,s,y,v) \in Q_1$ tenemos para $i=1,2$ que

$$\psi\left(d_\infty[h_i(t,s,x,u),\chi_{\{0\}}]\right) \leq \psi\left[d_\infty(x,\chi_{\{0\}})+d_\infty(u,\chi_{\{0\}})\right] - \phi\left[d_\infty(x,\chi_{\{0\}})+d_\infty(u,\chi_{\{0\}})\right]$$
$$\psi\left(d_\infty[h_i(t,s,x,u),h_i(t,s,y,v)]\right) \leq \psi\left[d_\infty(x,y)+d_\infty(u,v)\right] - \phi\left[d_\infty(x,y)+d_\infty(u,v)\right].$$

Teorema 4.2.2. *Si las condiciones (i)-(iv) se cumplen, entonces existen dos únicas soluciones* $x(t)$ *y* $y(t)$ *(dependiendo del caso considerado de la gH-diferencia) al Problema 4.7, definidas sobre el conjunto* $\{t \in J : |t-t_0| \leq \delta\}$*. Además, las sucesiones* $(x_k(t))_{k\in\mathbb{N}}, (y_k(t))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^1$, $t \in J$, *definidas por*

$$\begin{aligned} x_k(t) = \quad & x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x_{k-1}(s),u(s))\ ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} h_1(s,\tau,x_{k-1}(s),u(\tau))\ d\tau\ ds \\ & + \int_{t_0}^{t} g\left(s,x_{k-1}(s),\int_{t_0}^{s} h_2(s,\tau,x_{k-1}(\tau),u(\tau)\ d\tau),u(s)\right)\ ds, \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} y_k(t) = \quad & x_0 \ominus_H \Bigg(-\int_{t_0}^{t} f(s,y_{k-1}(s),u(s))\ ds - \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} h_1(s,\tau,y_{k-1}(s),u(\tau))\ d\tau\ ds \\ & - \int_{t_0}^{t} g\left(s,y_{k-1}(s),\int_{t_0}^{s} h_2(s,\tau,y_{k-1}(\tau),u(\tau)\ d\tau),u(s)\right)\ ds\Bigg), \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde $x(t_0)=y(t_0)=x_0$ *y la H-diferencia en (4.12) existe para cada* $k\in\mathbb{N}$*, convergen, cuando* $k\to\infty$ *sobre* $|t-t_0|\leq\sigma$ *a* $x(t)$ *y a* $y(t)$*, respectivamente.*

Demostración. Considere la sucesión $(x_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}^1$ de aproximaciones sucesivas definida en (4.11). Para $k=1$ y $t\in J$ tenemos

$$\begin{aligned} x_1(t) = x_0 & + \int_{t_0}^{t} f(s,x_0,u(s))\ ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} h_1(s,\tau,x_0,u(\tau))\ d\tau\ ds \\ & + \int_{t_0}^{t} g\left(s,x_0,\int_{t_0}^{s} h_2(s,\tau,x_0,u(\tau)\ d\tau),u(s)\right) ds. \end{aligned}$$

Dado que las funciones difusas f,g,h_1 y h_2 son continuas por α-niveles se sigue que $x_1(t)$ es continua sobre $|t-t_0|\leq a$, y por tanto, sobre $|t-t_0|\leq\delta$. Además, notemos que se tienen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} d_\infty(f(s,x_0(s),u(s)),\chi_{\{0\}})\ ds & \leq \int_{t_0}^{t} \left(d_\infty\left(x_0(s),\chi_{\{0\}}\right)+d_\infty\left(u(s),\chi_{\{0\}}\right)\right)\ ds \\ & \leq |t-t_0|\left(d_\infty\left(x_0,\chi_{\{0\}}\right)+\widetilde{B}\right). \end{aligned}$$

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} d_\infty(h_1(s,\tau,x_0(\tau),u(\tau)),\chi_{\{0\}})\ d\tau ds \leq \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left(d_\infty\left(x_0,\chi_{\{0\}}\right)+d_\infty\left(u(\tau),\chi_{\{0\}}\right)\right)\ d\tau ds$$
$$\leq \frac{(t-t_0)^2}{2!}\left(d_\infty\left(x_0,\chi_{\{0\}}\right)+\widetilde{B}\right).$$

$$\int_{t_0}^{t} d_\infty(g(s,x_0(s),\int_{t_0}^{s} h_2(s,\tau,x_0(\tau),u(\tau))d\tau,u(s)),\chi_{\{0\}})ds$$
$$\leq \int_{t_0}^{t}\left(d_\infty\left(x_0,\chi_{\{0\}}\right)+d_\infty\left(u(s),\chi_{\{0\}}\right)+\int_{t_0}^{s} d_\infty\left(h_2(s,\tau,x_0(\tau),u(\tau)),\chi_{\{0\}}\right)\ d\tau\right)\ ds$$
$$\leq |t-t_0|\left(d_\infty\left(x_0,\chi_{\{0\}}\right)+\widetilde{B}\right)+\frac{(t-t_0)^2}{2!}\left(d_\infty\left(x_0,\chi_{\{0\}}\right)+\widetilde{B}\right).$$

Luego, haciendo $M=\left(d_\infty\left(x_0,\chi_{\{0\}}\right)+\widetilde{B}\right)$ tenemos

$$\begin{aligned}
d_\infty\left(x_1(t),x_0\right) =&\ d_\infty\Big(x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x_0(s),u(s))\ ds+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} h_1(s,\tau,x_0(s),u(\tau))\ d\tau\ ds\\
&+\int_{t_0}^{t}(g(s,x_0(s),\int_{t_0}^{s} h_2(s,\tau,x_0(\tau),u(\tau))d\tau,u(s))ds,x_0\Big)\\
\leq& \int_{t_0}^{t} d_\infty(f(s,x_0(s),u(s)),\chi_{\{0\}})\ ds+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} d_\infty\left(h_1(s,\tau,x_0(\tau),u(\tau)),\chi_{\{0\}}\right)\ d\tau ds\\
&+\int_{t_0}^{t} d_\infty\Big(g(s,x_0(s),\int_{t_0}^{s} h_2(s,\tau,x_0(\tau),u(\tau))\ d\tau,u(s)),\chi_{\{0\}}\Big)ds\\
\leq&\ 2M\left(|t-t_0|+\frac{(t-t_0)^2}{2!}\right).
\end{aligned}$$

Ahora suponga que x_{k-1} es continua sobre $|t-t_0|\leq\delta$ y que

$$d_\infty\left(x_{k-1}(t),x_0\right)\leq 2M\left(|t-t_0|+\frac{(t-t_0)^2}{2!}\right). \tag{4.13}$$

De (4.11) y (4.13), x_k es continua sobre $|t-t_0|\leq\delta$ y

$$d_\infty\left(x_k(t),x_0\right)\leq 2M\left(|t-t_0|+\frac{(t-t_0)^2}{2!}\right).$$

Probemos que $d_\infty\left(x_k(t),x_{k-1}(t)\right)\to 0$ uniformemente sobre $|t-t_0|\leq\delta$ cuando $k\to\infty$. Para ello, note que

$$d_\infty\left(x_2(t),x_1\right)=d_\infty\Bigg[x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x_1(s),u(s))\ ds+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} h_1(s,\tau,x_1(s),u(\tau))\ d\tau\ ds$$
$$+\int_{t_0}^{t} g(s,x_1(s),\int_{t_0}^{s} h_2(s,\tau,x_1(\tau),u(\tau))d\tau,u(s))ds,\quad x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x_0(s),u(s))\ ds$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} h_1(s,\tau,x_0(s),u(\tau))\ d\tau\ ds + \int_{t_0}^{t} g(s,x_0(s),\int_{t_0}^{s} h_2(s,\tau,x_0(\tau),u(\tau))d\tau,u(s))ds\Big] \\
&\leq \int_{t_0}^{t} d_\infty\Big[f(s,x_1(s),u(s)),f(s,x_0(s),u(s))\Big]\ ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} d_\infty\Big[h_1(s,\tau,x_1(\tau),u(\tau)),h_1(s,\tau,x_0(\tau),u(\tau))\Big]\ d\tau ds \\
&+ \int_{t_0}^{t} d_\infty\left[g\left(s,x_0(s),\int_{t_0}^{s} h_2(s,\tau,x_1(\tau),u(\tau))d\tau,u(s)\right),g\left(s,x_1(s),\int_{t_0}^{s} h_2(s,\tau,x_0(\tau),u(\tau))d\tau,u(s)\right)\right]ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} d_\infty(x_1(s),x_0)\ ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} d_\infty(x_1(\tau),x_0)\ d\tau ds + \int_{t_0}^{t}\left(d_\infty(x_1(s),x_0 + \int_{t_0}^{s} d_\infty(x_1(\tau),x_0)\ d\tau\right)\ ds \\
&\leq 4M\left(\frac{(t-t_0)^2}{2!} + 2\frac{|t-t_0|^3}{3!} + \frac{(t-t_0)^4}{4!}\right).
\end{aligned}
$$

De igual manera tenemos que

$$
d_\infty\left(x_{k+1}(t),x_k(t)\right) \leq 2^{k+1}M\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{\delta^{k+1+j}}{(k+1+j)!}\right). \tag{4.14}
$$

Así $d_\infty\left(x_{k+1}(t),x_k(t)\right) \to 0$ uniformemente sobre $|t-t_0| \leq \delta$ cuando $k \to \infty$. Por lo tanto, existe una función difusa $x\colon J \longrightarrow \mathcal{F}^1$ tal que $d_\infty(x_k(t),x(t)) \to 0$ uniformemente sobre $|t-t_0| \leq \delta$ cuando $k \to \infty$. Entonces, note que se cumple:

- Para la función difusa f se tiene que

$$
d_\infty\Big(f(t,x_k(t),u(t)),f(t,x(t),u(t))\Big) \leq d_\infty(x_k(t),x(t)) \to 0 \tag{4.15}
$$

  uniformemente sobre $|t-t_0| \leq \delta$ cuando $k \to \infty$.

- Para la función difusa g se tiene que

$$
\begin{aligned}
d_\infty&\left(g\Big(t,x_k(t),\int_{t_0}^{t} h_2(t,s,x_k(s),u(s))\ ds,u(t)\Big),g\Big(t,x(t),\int_{t_0}^{t} h_2(t,s,x(s),u(s))\ ds,u(t)\Big)\right) \\
&\leq d_\infty(x_k(t),x(t)) + \int_{t_0}^{t} d_\infty(x_k(t),x(t))\ ds \to 0,
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

  uniformemente sobre $|t-t_0| \leq \delta$ cuando $n \to \infty$.

- Y finalmente, para las funciones difusas h_1 y h_2 se tiene que

$$
d_\infty\left(h_1\Big(t,s,x_k(s),u(s)\Big),h_1\Big(t,s,x(s),u(s)\Big)\right) \leq d_\infty(x_k(t),x(t)) \to 0, \tag{4.17}
$$

$$
d_\infty\left(h_2\Big(t,s,x_k(s),u(s)\Big),h_2\Big(t,s,x(s),u(s)\Big)\right) \leq d_\infty(x_k(t),x(t)) \to 0, \tag{4.18}
$$

uniformemente sobre $|t-t_0| \leq \delta$ cuando $k \to \infty$.

Así, sobre $|t-t_0| \leq \delta$ se sigue que la función difusa

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), u(s))\ ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} h_1(s, \tau, x(s), u(\tau))\ d\tau\ ds \tag{4.19}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} g\left(s, x(s), \int_{t_0}^{s} h_2(s, \tau, x(\tau), u(\tau)\ d\tau), u(s)\right)\ ds, \tag{4.20}$$

es solución del Problema 4.7 en el sentido (i) de la definición de gH-derivada. Ahora probemos la unicidad. Suponga que $\overline{x}(t)$ es otra solución del Problema 4.7; entonces

$$\begin{aligned} d_\infty(x_{k+1}(t), \overline{x}(t)) = \ & d_\infty\Bigg(\int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s), u(s))\ ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} h_1(s, \tau, x_k(s), u(\tau))\ d\tau\ ds \\ & + \int_{t_0}^{t} g\left(s, x_k(s), \int_{t_0}^{s} h_2(s, \tau, x_k(\tau), u(\tau)\ d\tau), u(s)\right)\ ds, \\ & \int_{t_0}^{t} f(s, \overline{x}(s), u(s))\ ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} h_1(s, \tau, \overline{x}(s), u(\tau))\ d\tau\ ds \\ & + \int_{t_0}^{t} g\left(s, \overline{x}(s), \int_{t_0}^{s} h_2(s, \tau, \overline{x}(\tau), u(\tau)\ d\tau), u(s)\right)\ ds\Bigg) \\ \leq \ & 2\int_{t_0}^{t} d_\infty(x_k(s), \overline{x}(s))\ ds + 2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} d_\infty(x_k(\tau), \overline{x}(\tau))\ d\tau ds. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Dado que $d_\infty(\overline{x}(t), x_0) \leq b_1$ sobre $|t-t_0| \leq \delta$ y por (4.21), se sigue que

$$\begin{aligned} d_\infty(\overline{x}(t), x_1) &\leq 2\int_{t_0}^{t} d_\infty(x_0, \overline{x}(s))\ ds + 2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} d_\infty(x_0, \overline{x}(\tau))\ d\tau ds \\ &\leq 2b_1\left[|t-t_0| + \frac{|t-t_0|^2}{2!}\right], \end{aligned}$$

sobre $|t-t_0| \leq \delta$. También

$$\begin{aligned} d_\infty(\overline{x}(t), x_2) &\leq 2\int_{t_0}^{t} d_\infty(x_1, \overline{x}(s))\ ds + 2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} d_\infty(x_1, \overline{x}(\tau))\ d\tau ds \\ &\leq 2^2 b_1\left[\frac{|t-t_0|^2}{2!} + 2\frac{|t-t_0|^3}{3!} + \frac{|t-t_0|^4}{4!}\right] \end{aligned}$$

sobre $|t-t_0| \leq \delta$. Ahora asuma que

$$d_\infty(\overline{x}(t), x_k) \leq 2^k b_1\left[\binom{k}{0}\frac{|t-t_0|^k}{k!} + \binom{k}{1}\frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!} + \ldots + \binom{k}{k}\frac{|t-t_0|^{2k}}{(2k)!}\right] \tag{4.22}$$

sobre $|t-t_0| \leq \delta$. De (4.21) y (4.23), se sigue que

$$\begin{aligned} d_\infty(\overline{x}(t), x_{k+1}) \leq & 2^{k+1} b_1 \left[\binom{k+1}{0} \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!} + \binom{k+1}{1} \frac{|t-t_0|^{k+2}}{(k+2)!} \right. \\ & \left. + \ldots + \binom{k+1}{k} \frac{|t-t_0|^{2k+1}}{(2k+1)!} + \binom{k+1}{k+1} \frac{|t-t_0|^{2k+2}}{(2k+2)!} \right]. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Consecuentemente, (4.23) se cumple para todo $k \in \mathbb{N}$, y así, se tiene que

$$d_\infty(\overline{x}(t), x_k(t)) = d_\infty(x(t), x_k(t)) \to 0,$$

sobre el intervalo $|t-t_0| \leq \delta$ cuando $n \to \infty$. Esto prueba la unicidad de la solución para el Problema 4.7.

Para la sucesión $(y_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ (4.12), se realiza el mismo proceso y vemos que esta sucesión es convergente a la solución $y(t)$ del Problema 4.7. $\square$

Conclusiones

- ◇ En este trabajo se realizó una revisión de los diversos conceptos de diferenciabilidad de funciones difusas, sus propiedades y la relación existente entre ellas; adicionalmente, con el fin de estudiar problemas de valor inicial en el contexto difuso, se analizó la relación entre el concepto de diferenciabilidad difusa en el sentido generalizado de Hukuhara y el concepto de integración de funciones difusas vía un Teorema fundamental del Cálculo.

- ◇ Se realizó una revisión bibliográfica sobre resultados recientes de punto fijo de funciones débilmente contractivas y generalizaciones, definidos sobre conjuntos parcialmente ordenados.

- ◇ Como aporte a la Teoría de las ecuaciones diferenciales difusas, se presentaron algunos resultados sobre la existencia y unicidad de soluciones a problemas de valor inicial difuso usando derivada generalizada de Hukuhara y resultados de punto fijo de funciones débilmente contractivas.

- ◇ Como aplicaciones de los resultados obtenidos sobre problemas de valor inicial en el contexto difuso, se probaron algunos resultados sobre problemas de valor inicial difuso con retardo finito, así como también, un resultado sobre existencia y unicidad de solución a un problema de valor inicial asociado a un problema de control.

Trabajos futuros

A lo largo del desarrollo de este trabajo de maestría fueron quedando algunas preguntas las cuales pueden ser analizadas en trabajos futuros, a saber:

- ◇ Analizar problemas de valor inicial difuso asociado a ecuaciones diferenciales difusas de orden superior y ecuaciones diferenciales parciales difusas usando la gH-derivada.
- ◇ Estudiar los problemas de valor inicial difuso usando otro tipo de métricas sobre la clase de conjuntos difusos que se trabajo.
- ◇ Ahondar en las aplicaciones de los resultados obtenidos sobre los problemas de retardo finito y control.
- ◇ Explorar algoritmos numéricos para resolver problemas de valor difuso usando la gH-derivada.

Bibliografía

[1] Balachandran, K. & Kanagarajan, K., *Existence of solutions of perturbed fuzzy integrodifferential equations*, Differential Equations and Applications, 4 (2007), 29-40.

[2] Banks, H.T. & Jacobs, M.Q., *A differential calculus for multifunctions*, J. Math. Anal. Appl. 29 (1970), 246-272.

[3] Bede, B. & Gal, S.G., *Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems, 151 (2005), 581-599.

[4] Bede, B. & Gal, S.G., *Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability*, Commun. Math. Anal. 9 (2010), 22-41.

[5] Bede, B. & Stefanini, L., *Generalized differentiability of fuzzy-valued functions*, Fuzzy Sets and Systems, 230 (2013), 119-141.

[6] Chalco-Cano, Y.; Rufián-Lizana, A.; Román-Flores, H. & Jiménez-Gamero, M.D., *Calculus for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative and applications*, Fuzzy Sets and Systems, 219 (2013), Pages 49-67.

[7] Chalco-Cano, Y.; Román-Flores, H. & Jiménez-Gamero, M.D., *Generalized derivative and* $\pi-$*derivative for set-valued functions*, Inf. Sci. 181 (2013), 2177-2188.

[8] Chalco-Cano, Y. & Román-Flores, H., *On new solutions of fuzzy differential equations*, Chaos Solitons and Fractals, 38 (2008), 112-119.

[9] Diamond P., & Kloeden, P.E., *Metric spaces of fuzzy sets: theory and applications*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1994.

[10] Dhutta, P.N. & Choudhury, B.S., *A generalization of contraction principle in metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., (2008).

[11] Goetschel, R. & Voxman, W., *Elementary fuzzy calculus*, Fuzzy Sets and Systems, 18 (1986) 31-43.

[12] González, V. & Villamizar-Roa, E.J., *A note on the Cauchy problem of fuzzy differential equations*. Rev. Acad. Colombiana Cienc. Exact. Fís. Natur. 34 (2010), 541-552.

[13] Hagen, K., *Multivalued Fields in Condensed Matter, Electrodynamics and Gravitation*, World Scientific Singapore (2008).

[14] Harjani, J. & Sadarangani, K., *Generalized contractions in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations*, Nonlinear Analysis 72 (2010), 1188-1197.

[15] Hukuhara, M., *Intégration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe*, Funkcialaj Ekvacioj, 10 (1967), 205-223.

[16] Kaleva, O., *Fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems 24 (1987), 301-317.

[17] Kandel, A. & Byatt, W.J., *Fuzzy differential equations*, Proceedings of the International Conference on Cybernetics and Society, Tokyo, (1978), 1213-1216.

[18] Lakshmikantham, V. & Mohapatra, R.N., *Theory of fuzzy differential equations and inclusions*, Series in Mathematical Analysis and Applications, 6. Taylor & Francis, Ltd., London, (2003).

[19] Lakshmikantham, V. & Nieto, J.J., *Differential equations in metric spaces: an introduction and an application to fuzzy differential equations*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 10 (2003), no. 6, 991-1000.

[20] Li, T., *Set valued mapping and its application*, Applied mathematics and mechanics, 27 (2006), 263-268.

[21] Lupulescu, V. & Abbas, U., *Fuzzy delay differential equations*, Fuzzy Optim. Decis. Mak. 11 (2012), 99-111.

[22] Negoita, C.V. & Ralescu, D., *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*, Wiley, New York, (1975).

[23] Nieto, J.J. & Rodríguez-López, R., *Applications of contractive-like mapping principles to fuzzy equations*, Rev. Mat. Complut. 19 (2006), 361-383.

[24] Nieto, J.J., *The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems 102 (1999), 259-262.

[25] Phuong-N; Phung-N-N and Vu-H, *Existence and uniqueness of fuzzy control integro-differential equation with perturbed*, Bulletin of Mathematical Sciences & Applications, 2 (2013), 50-58.

[26] Puri, M., & Ralescu, D., *Fuzzy random variables*, J. Math. Anal. Appl., 114 (1986), 409-422.

[27] Puri, M. & Ralescu, D., *Differential of fuzzy functions*, J. Math. Anal. Appl., 91 (1983), 552-558.

[28] Radström, H., *An embedding theorem for spaces of convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 165-169.

[29] Rhoades, B.E., *Some theorems on weakly contractive maps*, Nonlinear Anal. 47 (2001) 2683-2693.

[30] Stefanini, L. & Bede, B., *Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations*, Nonlinear Analysis 71 (2009), 1311-1328.

[31] Stefanini, L.; Sorini, L. & M. Guerra, L., *Parametric representation of fuzzy numbers and application to fuzzy calculus*, Fuzzy Sets and Systems, 157 (2006), 2423-2455.

[32] Stefanini, L., *A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic*, Fuzzy sets and systems 161 (2010), 1564-1584.

[33] Stefanini, L., *A generalization of Hukuhara difference for interval and fuzzy arithmetic*, in D. Dubois, M.A. Lubiano, H. Prade, M.A. Gil, P. Grzegorzewski, O. Hryniewicz (Eds), Soft Methods for Handling Variability and Imprecision, Series on Advances in Soft Computing, Springer, 2008.

[34] Zadeh, L.A., *Fuzzy sets*, Infor. and Control, 8 (1965), 338-353.