

ESTUDIO TEÓRICO Y NUMÉRICO DE UN MODELO DE QUIMIOTAXIS DOBLE EN
FLUIDOS

Sergio Andrés Jiménez Jerez

Trabajo de Grado para optar al título de Magíster en Matemática Aplicada

Director

Jhean Eleison Pérez López

Doctor en Matemáticas

Codirector

Diego Armando Rueda Gómez

Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2022

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis directores Jhean Eleison Pérez López y Diego Armando Rueda Gómez, por la dedicación, disposición y apoyo a lo largo de este proceso. Sus aportes, conocimientos, observaciones y sugerencias permitieron el desarrollo del presente trabajo. Fue un honor haber trabajado con ellos.

Con mucho amor, quiero agradecer y dedicar este trabajo a mis padres, Luis Francisco Jiménez Hernández, Flor Alba Jerez Barajas y Lucía Marín Moreno, quienes han sido un soporte fundamental para todos los proyectos emprendidos hasta ahora. Gracias por creer y tener más fe en mí de la que yo me puedo tener.

Finalmente, deseo agradecer a mis amigos, Mateo, Camilo y Jairo; y mi novia Daniela, quienes estuvieron presentes en aquellos días difíciles brindándome su apoyo, amor, conocimiento y energía.

Tabla de Contenido

Introducción	8
1. Estudio teórico de un modelo de quimiotaxis doble en fluidos	19
1.1. Preliminares	19
1.1.1. Espacios de Herz débiles	19
1.1.2. Espacios de Besov-Herz débiles	21
1.1.3. Estimaciones del núcleo de calor	27
1.2. Resultados principales	28
1.3. Estimaciones clave	34
1.3.1. Estimaciones producto	34
1.3.2. Estimaciones lineales	35
1.3.3. Estimaciones bilineales	38
1.4. Demostraciones de los resultados principales	45
1.4.1. Demostración del Teorema 1.14	48
1.4.2. Demostración del Corolario 1.15	49
1.4.3. Demostración del Teorema 1.16	51
2. Implementación numérica del MRD en un problema de quimiotaxis doble en fluidos	61

2.1. El Método de Reciprocidad Dual	61
2.1.1. Discretización de las integrales	63
2.1.1.1. Evaluación de integrales	68
2.1.2. Construcción de las Matrices	72
2.1.3. Determinación numérica de coeficientes c_i	74
2.1.4. Uso del MRD en la ecuación de Laplace ($\Delta u = 0$)	76
2.1.5. Uso del MRD en la ecuación de Poisson ($\Delta u = b(x, y)$)	79
2.1.5.1. Funciones aproximantes	83
2.1.6. Ecuación de tipo $\Delta u = b(x, y, u)$	85
2.1.7. Ecuación de tipo $\Delta u = -\partial u / \partial x$	91
2.1.8. Ecuación de Difusión	93
2.1.9. Cálculo del Laplaciano discreto	96
2.2. Ecuaciones de Navier-Stokes	97
2.2.1. Implementación numérica	100
2.3. Modelo de quimiotaxis	107
2.3.0.1. Discretización para n	108
2.3.0.2. Discretización para c y Δc	109
2.3.0.3. Discretización para \mathbf{u}	110
2.3.1. Implementación Numérica	111
2.4. Quimiotaxis doble en fluidos	117
2.4.0.1. Discretización para n	117

Estudio teórico y numérico de un modelo de quimiotaxis doble en fluidos	5
2.4.0.2. Discretización para v y Δv	118
2.4.1. Implementación numérica	119
3. Conclusiones	125
Referencias Bibliográficas	127
Anexo	134

Resumen

Título: Estudio teórico y numérico de un modelo de quimiotaxis doble en fluidos. *

Autor: Sergio Andrés Jiménez Jerez **

Palabras Clave: Quimiotaxis, ecuaciones de Navier-Stokes, espacios de Besov, espacios de Herz, buena colocación, estimativas producto, vorticidad, método de reciprocidad dual, diferencias finitas.

Descripción: En este trabajo se estudia teórica y numéricamente un modelo matemático con doble término de quimiotaxis, acoplado con las ecuaciones de Navier-Stokes. Para la parte teórica, considerando todo el espacio \mathbb{R}^N con $N \geq 2$, se usan nuevas estimativas producto para demostrar la existencia y unicidad de solución blanda para datos pequeños en espacios críticos de Besov-Herz débiles; también se trabaja la auto-similaridad y el comportamiento asintótico de las soluciones. Para la parte numérica, se considera un dominio acotado de \mathbb{R}^2 , sobre el cual se aplica el método de reciprocidad dual (MRD) para aproximar, inicialmente, las ecuaciones de Navier-Stokes, y posteriormente, el modelo de quimiotaxis doble en fluidos.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Jhean Eleison Pérez López, Doctor en Matemáticas. Codirector: Diego Armando Rueda Gómez, Doctor en Matemáticas.

Abstract

Title: Theoretical and numerical study of a model of double chemotaxis in fluids. *

Author: Sergio Andrés Jiménez Jerez **

Keywords: Chemotaxis, Navier-Stokes equations, Besov spaces, Herz spaces, well posedness, product estimates, vorticity, dual reciprocity method, finite differences.

Description: In this work, we study theoretically and numerically a mathematical model with double chemotaxis term, coupled with the Navier-Stokes equations. For the theoretical part, considering the whole space \mathbb{R}^N with $N \geq 2$, new product estimates are used to prove the existence and uniqueness of mild solution for small data in weak Besov-Herz critical spaces; we also work the self similarity and asymptotic behavior of the solutions. For the numerical part, a bounded domain of \mathbb{R}^2 is considered, on which the Dual Reciprocity Method (DRM) is applied to approximate, initially, the Navier-Stokes equations, and subsequently, the model of double chemotaxis in fluids.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Jhean Eleison Pérez López, Doctor en Matemáticas. Codirector: Diego Armando Rueda Gómez, Doctor en Matemáticas.

Introducción

Las células detectan y responden a una gran variedad de señales químicas externas, integran dichas señales complejas entrantes y cambian su morfología, dinámica y comportamiento. El movimiento celular es una de las características de las células vivas; es un proceso complejo y desempeña un papel fundamental en diversos procesos fisiológicos y patológicos, como el desarrollo embrionario, la curación de heridas, las respuestas inmunitarias, el crecimiento celular, la metástasis cancerosa y la angiogénesis. Entre los principales fenómenos implicados en el movimiento celular encontramos la *quimiotaxis*, que corresponde a un proceso biológico de movimiento celular direccional en función de la concentración de una señal química. Cuando el movimiento se realiza hacia lugares con mayores niveles de concentración, se dice que la quimiotaxis es positiva; y, en este caso, la sustancia química se denomina atractor. En cambio, cuando las células se desplazan hacia regiones con niveles de concentración más bajos, la quimiotaxis es negativa y la sustancia química se denomina repelente.

El modelo clásico de quimiotaxis fue introducido por Keller y Segel (Keller, 1980; Keller and Segel, 1970, 1971) con el objetivo de describir la agregación de especies biológicas (amebas o bacterias, por ejemplo) que se mueven en dirección a las mayores concentraciones de una sustancia química, que puede ser segregada por ellos mismos o producida por el

entorno. En su versión simplificada, este modelo viene dado por el siguiente sistema de EDP:

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = \Delta n - \nabla \cdot (n \nabla v), \\ \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - v + n, \end{cases} \quad (1)$$

donde $n = n(\mathbf{x}, t)$ y $v = v(\mathbf{x}, t)$ representan las densidades de los organismos y del atractor químico, respectivamente, y donde el término no lineal $-\nabla \cdot (n \nabla v)$ modela el efecto de la quimioatracción. El sistema (1) puede dividirse en dos casos básicos: el caso parabólico-elíptico (cuando $\varepsilon = 0$) y el caso parabólico-parabólico (cuando $\varepsilon = 1$). En el caso parabólico-elíptico considerando todo el espacio \mathbb{R}^2 , se ha demostrado que 8π es un valor límite para la masa inicial de los microorganismos de tal manera que, si la masa inicial es menor que este valor, existe una solución global en el tiempo; mientras que, en caso contrario, la solución explota en tiempo finito (Blanchet et al. (2006); Calvez and Corrias (2008); Dolbeault and Perthame (2004)).

Por otro lado, para el caso parabólico-parabólico, considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera suave, e imponiendo condiciones de contorno tipo Neumann, Nagai et al. (1997) demostraron la existencia de soluciones globales para datos iniciales no negativos n_0, v_0 en el espacio $H^{1+\delta}(\Omega)$ ($0 < \delta \leq 1$) con masa inferior a 4π ; mientras que, en todo el espacio \mathbb{R}^2 , en (Calvez and Corrias (2008)) obtuvieron soluciones globales para masa subcrítica (inferior a 8π). Para \mathbb{R}^N , con $N \geq 3$, en (Corrias and Perthame (2006)) se demostró la existencia de una solución débil para el modelo (1), considerando los datos iniciales $n_0 \in L^a(\mathbb{R}^N)$

y $\nabla v_0 \in L^N(\mathbb{R}^N)$ (para $N/2 < a \leq N$) con norma pequeña. En (Kozono and Sugiyama (2008)), los autores demostraron la existencia de solución global en el tiempo del sistema (1) considerando datos iniciales $(n_0, v_0) \in L^{(N/2, \infty)}(\mathbb{R}^N) \times BMO$ con norma pequeña; y posteriormente, en (Kozono and Sugiyama (2009)) se amplió este resultado para incluir los datos iniciales en $H^{\frac{N}{a}-2, a}(\mathbb{R}^N) \times H^{\frac{N}{a}, a}(\mathbb{R}^N)$ para $\max\{1, N/4\} < a < N/2$. En la literatura se pueden encontrar resultados de existencia de soluciones globales blandas con datos iniciales pequeños en espacios críticos más generales, como ejemplos tenemos los espacios de Besov $\dot{B}_{p, \infty}^{-(2-\frac{N}{p})} \times \dot{B}_{p, \infty}^{\frac{N}{p}}$ (Zhai (2010)), espacios de Morrey (Biler (1998); Wakabayashi (2018)) y espacios Besov-Morrey $\mathcal{N}_{q, q_1, \infty}^{-(2-\frac{N}{q})} \times \dot{B}_{\infty, \infty}^0$ (Ferreira and Precioso (2011)).

Como primer problema en este trabajo, consideramos un sistema de quimiotaxis doble en donde además consideramos que el movimiento celular se desarrolla en un fluido. El sistema planteado en todo el espacio \mathbb{R}^N viene dado por

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial n}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)n = \Delta n - \nabla \cdot (n \nabla c) - \nabla \cdot (n \nabla v), & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)c = \Delta c - nc, & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)v = \Delta v - \gamma v + n, & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nu(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} - \nabla \pi - n\mathbf{f}, & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ n(\mathbf{x}, 0) = n_0(\mathbf{x}), \quad c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}), \quad v(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{array} \right. \quad (2)$$

donde $N \geq 2$ y las incógnitas son $n(\mathbf{x}, t)$, $c(\mathbf{x}, t)$, $v(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ y $\pi(\mathbf{x}, t)$ que representan la densidad celular, la concentración de oxígeno, la concentración del químico atractor, el campo de velocidades del fluido y la presión del fluido, respectivamente. La cuarta y quinta ecuación en (2) corresponden a las conocidas ecuaciones de Navier-Stokes introducidas para modelar el movimiento de un fluido viscoso e incompresible. El sistema (2) es una extensión del sistema de quimiotaxis-Navier-Stokes introducido por Tuval et al. (2005), al considerar adicionalmente una señal quimioatrayente que es producida por las células.

En el caso del modelo de quimiotaxis-Stokes (considerando $c = \nu = \varepsilon = 0$), Lorz (2012) mostró que, en \mathbb{R}^N , si la masa inicial es pequeña entonces el sistema tiene una solución débil global en el tiempo (para $N = 2$); y si la norma $L^{\frac{3}{2}}$ del dato inicial n_0 es pequeña, entonces el sistema también tiene una solución débil global en el tiempo (para $N = 3$). Para el modelo de quimiotaxis-Navier-Stokes (sistema (2) con $v = 0$), Zhang (2014) demostró la buena colocación local en tiempo asumiendo datos iniciales (n_0, c_0, \mathbf{u}_0) en los espacios de Besov no homogéneos $B_{p,r}^s(\mathbb{R}^N) \times B_{p,r}^{s+1}(\mathbb{R}^N) \times B_{p,r}^{s+1}(\mathbb{R}^N)$ ($N = 2, 3$), bajo algunas condiciones sobre los índices p, r y s ; en \mathbb{R}^3 , en (Choe and Lkhagvasuren (2017)) demostraron la existencia de una única solución global blanda para (n_0, c_0, \mathbf{u}_0) con norma pequeña en espacios de Besov críticos $\dot{B}_{r,1}^{-2+\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3) \times \dot{B}_{r,1}^{\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3) \times \dot{B}_{r,1}^{-1+\frac{3}{r}}(\mathbb{R}^3)$, para $r \in [1, 3)$; y este resultado fue extendido en (Zhao and Zhou (2018)) para $r \in [1, 6)$.

Para el sistema completo (2) en todo el espacio \mathbb{R}^N y $\varepsilon = 1$, Kozono et al. (2016) obtuvieron la existencia de soluciones globales blandas considerando $N \geq 2$, datos iniciales pequeños $n_0 \in L^{\frac{N}{2}, \infty}$ ($n_0 \in L^1$, si $N = 2$), $c_0 \in L^\infty$ con $\nabla c_0 \in L^{N, \infty}$, $v_0 \in \mathcal{S}'$ con $\nabla v_0 \in L^{N, \infty}$

y $\mathbf{u}_0 \in L^{N,\infty}$, y fuerza $\mathbf{f} \in L^{N,\infty}$. En (Ferreira and Postigo (2019)) (véase también Duarte-Rodríguez et al. (2020) para un resultado relacionado) demostraron la buena colocación global para datos iniciales pequeños en los espacios de Besov-Morrey $\mathcal{N}_{q,q_1,\infty}^s(\mathbb{R}^N)$; más precisamente, consideraron la siguiente clase de datos iniciales críticos:

$$\begin{aligned} n_0 &\in \mathcal{N}_{q,q_1,\infty}^{-2+\frac{N}{q}}(\mathbb{R}^N), \quad c_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ con } \nabla c_0 \in \mathcal{N}_{r,r_1,\infty}^{-1+\frac{N}{r}}(\mathbb{R}^N), \\ v_0 &\in \mathcal{S}'/\mathcal{P} \text{ con } \nabla v_0 \in \mathcal{N}_{r,r_1,\infty}^{-1+\frac{N}{r}}(\mathbb{R}^N), \text{ y } \mathbf{u}_0 \in \mathcal{N}_{p,p_1,\infty}^{-1+\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

El objetivo principal en el desarrollo de nuestro primer problema es demostrar la buena colocación global del sistema (2) con datos iniciales pequeños en un marco funcional de espacios críticos basados en los espacios de Herz débiles, a saber, los espacios de Besov-Herz débiles $\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{\alpha,s} = \dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{\alpha,s}(\mathbb{R}^N)$ (ver Definición 1.3 más abajo). Los espacios de tipo Herz y los espacios de tipo Besov-Herz han sido utilizados con éxito en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales (véase Tsutsui (2011); Ferreira and Pérez-López (2018)); y recientemente, Azevedo et al. (2022) utilizaron una clase de espacios de Besov-Herz débiles para estudiar la buena colocación de un sistema de Keller-Segel fraccionario en tiempo. En nuestro caso, consideramos la siguiente clase de datos iniciales críticos:

$$n_0 \in \dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}}, \quad c_0 \in L^\infty \cap \dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}}, \quad v_0 \in \dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_0 \in \dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}}, \quad (3)$$

con la fuerza externa $\mathbf{f} \in \dot{B}W\dot{K}_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}$, bajo algunas condiciones sobre N, q, r, p, l (ver Hipótesis 1.12). Resaltamos que bajo las condiciones en la Hipótesis 1.12 se tienen las siguientes

inclusiones continuas

$$\begin{aligned}
 L^1 \hookrightarrow \dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{2}{q}} (N=2), \quad L^{\frac{N}{2},\infty} \hookrightarrow W\dot{K}_{\frac{N}{2},\infty}^0 \hookrightarrow \dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}} (N \geq 3), \\
 L^{N,\infty} \hookrightarrow \dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{r}} (N \geq 2).
 \end{aligned} \tag{4}$$

De las inclusiones anteriores, tenemos que nuestra clase de datos iniciales y la clase de fuerzas externas extienden la clase de Kozono et al. (2016). Además, en el caso $N=3$, tenemos las inclusiones (para $\tilde{r} < q, p, r$)

$$\begin{aligned}
 \dot{B}_{\tilde{r},1}^{-2+\frac{3}{\tilde{r}}} \hookrightarrow \dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{3}{q}}, \quad \dot{B}_{\tilde{r},1}^{\frac{3}{\tilde{r}}} \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,1}^0 \hookrightarrow L^\infty, \\
 \dot{B}_{\tilde{r},1}^{\frac{3}{\tilde{r}}} \hookrightarrow \dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{3}{r}} \quad \dot{B}_{\tilde{r},1}^{-1+\frac{3}{\tilde{r}}} \hookrightarrow \dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{3}{p}},
 \end{aligned}$$

y así, considerando el sistema (2) sólo con el efecto de la concentración de oxígeno (es decir, $v=0$), nuestra clase de datos iniciales incluye la clase de datos iniciales en (Choe and Lkhagvasuren (2017)) y complementa la considerada en (Zhao and Zhou (2018)). Además, hasta donde conocemos, no existe relación de inclusión entre las clases $\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,s}$ y $\mathcal{N}_{q,q_1,\infty}^s$, por lo que nuestra clase de datos iniciales no es directamente comparable con la clase de datos iniciales utilizada en (Ferreira and Postigo (2019)).

En este trabajo, adaptamos la metodología clásica utilizada para demostrar la buena colocación global de problemas de EDP en los espacios de Besov-Morrey o Besov-Herz débiles, pero, a diferencia de la estrategia clásica en la que las estimativas producto se realizan en los espacios base (Morrey o Herz débiles), en nuestro caso realizamos las estimativas producto

en los espacios de Besov-Herz débiles, lo que al final nos permite incluir una clase más amplia de datos iniciales. Además, al no coincidir con las estimaciones de producto habituales, se han redactado en detalle en el Apéndice A, con el objetivo de que puedan ser utilizadas en futuros trabajos.

En la segunda parte de este trabajo, planteamos la implementación de un método numérico para el estudio de problemas de quimiotaxis y quimiotaxis doble en fluidos en un dominio acotado de \mathbb{R}^2 . Los métodos numéricos son de gran ayuda en el estudio de las EDP, y entre los más usados se encuentran los métodos de diferencias finitas, elementos finitos y volúmenes finitos. Entre las técnicas alternativas para la aproximación numérica de problemas de ecuaciones diferenciales parciales podemos encontrar el Método de Elementos en la Frontera (MEF), el cual es ahora una técnica numérica bien establecida que proporciona una alternativa eficiente para la solución de una amplia gama de problemas de ingeniería. La idea básica detrás del MEF consiste en hacer uso de soluciones fundamentales para transformar la ecuación diferencial en un problema equivalente, involucrando ecuaciones integrales únicamente sobre la frontera del dominio. El método fue usado inicialmente por Jaswon (1963) y Symm (1963) para solucionar ecuaciones tipo Laplace en el modelado de problemas de potenciales.

Específicamente, en este trabajo estamos interesados usar el método de reciprocidad dual (MRD) que fue introducido en (Nardini and Brebbia (1983)) para problemas elastodinámicos y extendido en (Brebbia and Wrobel (1986)) a problemas de difusión. La esencia del MRD es emplear una solución fundamental correspondiente a una ecuación más simple

y tratar los términos restantes, así como otros términos no homogéneos en la ecuación original, a través de un procedimiento que implica una expansión en serie utilizando funciones de aproximación global. El método de reciprocidad dual, aunque no tan usado como los métodos de elementos finitos o diferencias finitas, ha sido utilizado en diversos trabajos de investigación, incluyendo las ecuaciones de Navier-Stokes y problemas de difusión cruzada.

En el caso del sistema de Navier-Stokes, el cual puede ser escrito como

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

el MRD ha sido usado exitosamente considerando su formulación en las variables originales e implementando una estrategia de pasos fraccionarios en el tiempo y el uso de una pseudo-presión (véase Choi and Balaras (2009); Sariaydin and Tezer-Sezgin (2012) y algunas de sus referencias). Por otro lado, haciendo uso de la llamada formulación *velocidad-vorticidad* (en el caso 2-dimensional), el sistema (5) fue estudiado en (Eldho and Young (2004)). En todos los trabajos anteriores, la efectividad del método ha sido validada usando la prueba clásica del *Flujo impulsado en una cavidad cuadrada*.

Hasta donde conocemos, el único trabajo que aplica el MRD a problemas con difusión cruzada es el presentado por Meral (2019), donde aborda un modelo de quimiotaxis-

haptotaxis dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c}{\partial t} = D_c \Delta c - \xi_c \nabla \cdot (c \nabla n) - \chi_c \nabla \cdot (c \nabla m) + \mu_1 c (1 - c - n), \\ \frac{\partial n}{\partial t} = -\delta_n m n + \mu_2 n (1 - c - n), \\ \frac{\partial m}{\partial t} = D_m \Delta m + \mu_3 c - \delta_m m, \end{array} \right. \quad (6)$$

donde c, n y m denotan la densidad de células cancerosas, la densidad de células sanas y la enzima degradante de la matriz (EDM), respectivamente. En dicho trabajo se aborda un esquema mixto que sigue la estrategia general del MRD, pero las segundas derivadas que aparecen de los términos no lineales que modelan la difusión cruzada son aproximadas usando el método de diferencias finitas.

Estudios numéricos sobre sistemas acoplados tipo quimiotaxis-Navier-Stokes han sido realizados usando el método de elementos finitos; en particular, en (Duarte-Rodríguez et al. (2021)) fue considerado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla n = D_n \Delta n - \chi \nabla \cdot (n \nabla c), \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = D_c \Delta c - \gamma n c, \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = D_{\mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} - \nabla \pi + n \nabla \phi, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{array} \right. \quad (7)$$

donde $n = n(\mathbf{x}, t)$, $c = c(\mathbf{x}, t)$, $\pi(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ denotan, respectivamente, la densidad celular,

la concentración de una señal química atrayente, la presión hidrostática y la velocidad del fluido, en la posición $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ y tiempo $t \in (0, T]$. En dicho trabajo se propone un esquema numérico, para el cual se prueba su buen planteamiento, y se obtienen algunas estimaciones uniformes para las variables discretas que permiten probar convergencia hacia soluciones regulares del sistema, con estimaciones de error óptimas. Así mismo se presentan algunas pruebas numéricas para validar los resultados teóricos obtenidos.

En la segunda parte de este trabajo, implementaremos un esquema numérico usando el MRD para aproximar las soluciones del sistema de quimiotaxis doble en fluidos dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla n = D_n \Delta n - \chi_c \nabla \cdot (n \nabla c) + \chi_v \nabla \cdot (n \nabla v), \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = D_c \Delta c - \alpha n c, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v = D_v \Delta v - \gamma v + \beta n, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = D_u \Delta \mathbf{u} - \nabla \pi - n \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{array} \right. \quad (8)$$

donde $n = n(\mathbf{x}, t)$, $c = c(\mathbf{x}, t)$, $v = v(\mathbf{x}, t)$, $\pi(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ denotan, respectivamente, la densidad celular, la concentración de una señal química atractiva, la concentración de una señal química repulsiva, la presión hidrostática y la velocidad del fluido, en la posición $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ y tiempo $t \in (0, T]$. Los resultados obtenidos en el caso particular $v = 0$ son comparados con los obtenidos en (Duarte-Rodríguez et al. (2021)) para mostrar la efectividad del planteamiento. En el caso general de quimiotaxis doble en fluidos, no tenemos referencia en la

literatura para comparar los resultados obtenidos; por lo tanto, únicamente son presentadas y analizadas las simulaciones numéricas.

Este trabajo está dividido de la siguiente forma: En el primer capítulo, se aborda todo lo relacionado al estudio teórico del problema de quimiotaxis doble en fluidos; en la Sección 1.1 establecemos algunos preliminares sobre los espacios de Herz débiles y Besov-Herz débiles; en la Sección 1.2 formulamos nuestros principales resultados teóricos; y en la Sección 1.3 probamos las estimaciones centrales necesarias esta parte del trabajo; en la Sección 1.4 probamos nuestros resultados de buena colocación, auto-similaridad y comportamiento asintótico para el sistema (2). Dada la longitud de las demostraciones de las estimaciones producto, éstas son presentadas en el Apéndice A. En el segundo capítulo, implementaremos el MRD al sistema de quimiotaxis doble en fluidos; en la Sección 2.1 establecemos algunos preliminares sobre el método de reciprocidad dual; en la Sección 2.2 implementaremos el método a las ecuaciones de Navier-Stokes; en la Sección 2.3 implementamos el método a un sistema de quimiotaxis-Navier-Stokes; en la Sección 2.4 ampliamos el estudio de la sección anterior considerando ahora un sistema de quimiotaxis doble en fluidos; finalmente, en la Sección 3 presentamos algunas conclusiones relacionadas con nuestro estudio e implementación del MRD.

1. Estudio teórico de un modelo de quimiotaxis doble en fluidos

Este capítulo consideramos un sistema de quimiotaxis doble en fluidos en todo el espacio \mathbb{R}^N para $N \geq 2$. Demostramos nuevos resultados relacionados con la buena colocación del sistema, auto-similaridad y comportamiento asintótico de las soluciones, en un contexto de espacios críticos de Besov-Herz débiles.

1.1. Preliminares

En esta sección recordamos algunas definiciones y propiedades sobre los espacios de Herz débiles y Besov-Herz débiles considerados a lo largo de este capítulo. Para propiedades adicionales sobre estos espacios, referimos al lector interesado a (Ferreira and Pérez-López (2018); Hernández and Yang (1999); Tsutsui (2011)).

1.1.1. Espacios de Herz débiles. Introducimos aquí los espacios de Herz débiles. Para ello, sea $k \in \mathbb{Z}$ y defina los conjuntos \dot{A}_k como

$$\dot{A}_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N; 2^{k-1} \leq |\mathbf{x}| < 2^k\}. \quad (9)$$

Note que $\mathbb{R}^N \setminus \{0\} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \dot{A}_k$.

Presentamos ahora la definición de los espacios de Herz débiles (homogéneos).

Definición 1.1. Sea $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. El espacio de Herz débil $WK_{p,q}^\alpha = WK_{p,q}^\alpha(\mathbb{R}^N)$ es definido como el conjunto de todas las funciones medibles tales que la siguiente

cantidad es finita

$$\|f\|_{W\dot{K}_{p,q}^\alpha} := \begin{cases} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} \|f\|_{L^{p,\infty}(A_k)}^q \right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } q < \infty, \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\alpha} \|f\|_{L^{p,\infty}(A_k)} & \text{si } q = \infty. \end{cases} \quad (10)$$

Para $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$, la cantidad $\|\cdot\|_{W\dot{K}_{p,q}^\alpha}$ define una norma sobre $W\dot{K}_{p,q}^\alpha$ y el par $(W\dot{K}_{p,q}^\alpha, \|\cdot\|_{W\dot{K}_{p,q}^\alpha})$ es un espacio de Banach (véase, por ejemplo, Hernández and Yang (1999); Tsutsui (2011)).

Se deduce directamente de la definición de los espacios $W\dot{K}_{p,q}^\alpha$ que, si $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$, entonces $W\dot{K}_{p,q_1}^\alpha \hookrightarrow W\dot{K}_{p,q_2}^\alpha$. Además, tenemos las inclusiones continuas $L^p \hookrightarrow L^{p,\infty} = W\dot{K}_{p,p}^0 \hookrightarrow W\dot{K}_{p,\infty}^0$ para todo $1 < p \leq \infty$, que son estrictas para $p < \infty$ (véase Ferreira and Pérez-López (2018)). Por otra parte, hasta donde sabemos, no existe una relación de inclusión entre los espacios de Herz débiles $W\dot{K}_{p,\infty}^0$ y los espacios de Morrey \mathcal{M}_q^p . Para la definición y algunas propiedades de los espacios de Morrey, remitimos al lector a (Kozono and Yamazaki (1994)) (véase también Kato (1992) para una definición equivalente y propiedades adicionales).

La desigualdad de Hölder se mantiene en el contexto de los espacios de Herz débiles. Para ser más precisos, si $1 < p, p_1, p_2 \leq \infty$, $1 \leq q, q_1, q_2 \leq \infty$ y $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ son tales que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, y $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, entonces

$$\|fg\|_{W\dot{K}_{p,q}^\alpha} \leq C \|f\|_{W\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1}} \|g\|_{W\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2}}, \quad (11)$$

donde $C > 0$ es una constante universal. Tomando en particular $(\alpha_1, p_1, q_1) = (0, \infty, \infty)$ en (11), obtenemos

$$\|fg\|_{W\dot{K}_{p,q}^\alpha} \leq C \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{W\dot{K}_{p,q}^\alpha}. \quad (12)$$

Una desigualdad de tipo Young para la convolución también es válida en los espacios de Herz débiles (véase Ferreira and Pérez-López (2018)).

Lema 1.2. *(Convolución) Sean $1 \leq p_1 < \infty$ y $1 < r, p_2 < \infty$ tales que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. También, sean $1 \leq q \leq \infty$, $-\frac{N}{r} < \alpha < N\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$, y $\theta \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ tales que $\theta|\cdot|^{N/p_1} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Entonces, existe una constante positiva C independiente de θ tal que*

$$\|\theta * f\|_{W\dot{K}_{r,q}^\alpha} \leq C \max\left\{\|\theta\|_{L^{p_1}}, \left\|\left|\cdot\right|^{N/p_1} \theta\right\|_{L^\infty}\right\} \|f\|_{W\dot{K}_{p_2,q}^\alpha}, \quad (13)$$

para todo $f \in W\dot{K}_{p_2,q}^\alpha$.

1.1.2. Espacios de Besov-Herz débiles. Ahora introducimos los espacios de Besov-Herz débiles (homogéneos). Aquí también presentamos una serie de propiedades sobre estos espacios que serán útiles en nuestro estudio de las ecuaciones del modelo de quimiotaxis doble en fluidos.

En lo que sigue, sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ una función radialmente simétrica tal que

$$\text{supp } \varphi \subset \left\{x; \frac{3}{4} \leq |x| \leq \frac{8}{3}\right\},$$

y tal que

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi_j(\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

donde $\varphi_j(\xi) := \varphi(\xi 2^{-j})$. Ahora podemos definir los conocidos operadores de localización Δ_j y S_j como

$$\Delta_j f = \varphi_j(D)f = (\varphi_j)^\vee * f \quad \text{y} \quad S_k f = \sum_{j \leq k} \Delta_j f.$$

Un cálculo directo muestra las siguientes identidades de cancelación

$$\Delta_j \Delta_k f = 0 \quad \text{si} \quad |j - k| \geq 2 \quad \text{y} \quad \Delta_j (S_{k-2} g \Delta_k f) = 0 \quad \text{si} \quad |j - k| \geq 5.$$

Por último, la descomposición de Bony (véase Bony (1981)) da

$$fg = T_f g + T_g f + R(fg), \tag{14}$$

donde

$$T_f g := \sum_{j \in \mathbb{Z}} S_{j-2} f \Delta_j g, \quad R(fg) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f \tilde{\Delta}_j g \quad \text{y} \quad \tilde{\Delta}_j g := \sum_{|j-j'| \leq 1} \Delta_{j'} g.$$

Definición 1.3. Sean $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q, r \leq \infty$ y $\alpha, s \in \mathbb{R}$. Los espacios de Besov-Herz débiles $\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{\alpha,s} = \dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{\alpha,s}(\mathbb{R}^N)$ son definidos como

$$\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{\alpha,s} = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) / \mathcal{P}; \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{\alpha,s}} < \infty \right\},$$

donde

$$\|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{\alpha,s}} := \begin{cases} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j sr} \|\Delta_j f\|_{W\dot{K}_{p,q}^{\alpha}}^r \right)^{1/r} & \text{si } r < \infty \\ \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j s} \|\Delta_j f\|_{W\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} & \text{si } r = \infty. \end{cases} \quad (15)$$

Observación 1.4. (i) El espacio $\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{\alpha,s}$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{\alpha,s}}$.

(ii) La inclusión continua $\dot{B}_{p,r}^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,r}^{0,s}(\mathbb{R}^N)$ es válida para todos los $s \in \mathbb{R}$,

$1 < p \leq \infty$, y $1 \leq r \leq \infty$, donde $\dot{B}_{p,r}^s$ representan los espacios de Besov homogéneos.

Para ello, basta con recordar la definición de los espacios de Besov (véase, por ejemplo

(Bergh and Löfström, 1976, p.146)), (15) y utilizar la inclusión $L^p \hookrightarrow W\dot{K}_{p,\infty}^0$.

Ahora recordamos algunas relaciones de inclusión que involucran a los espacios de Herz débiles, Besov y bmo^{-1} (véase Tsutsui (2011)).

Observación 1.5. i) Para $1 < p < \infty$ y $0 \leq \alpha < N(1 - 1/p)$, tenemos $W\dot{K}_{p,\infty}^{\alpha} \hookrightarrow$

$$\dot{B}_{\infty,\infty}^{-(\alpha+N/p)}.$$

ii) Para $N < p \leq \infty$ y $0 \leq \alpha < 1 - N/p$, la inclusión $W\dot{K}_{p,\infty}^{\alpha} \hookrightarrow bmo^{-1}$ se tiene.

Observación 1.6. Utilizando las propiedades de interpolación de los espacios de Besov y de

los espacios de Besov-Herz débiles (véase Ferreira and Pérez-López (2018)) y el ítem *i*) de

la Observación 1.5, para $1 < p < \infty$ y $0 \leq \alpha < N(1 - 1/p)$ podemos obtener la inclusión

continua

$$\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,r}^{\alpha,s} \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,r}^{s-(\alpha+N/p)}. \quad (16)$$

En particular, tenemos las inclusiones

$$\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{\alpha,\alpha+\frac{N}{p}-1} \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,\infty}^{-1} \text{ y } \dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,1}^{0,\frac{N}{p}} \hookrightarrow \dot{B}_{\infty,1}^0 \hookrightarrow L^\infty. \quad (17)$$

Observación 1.7. Note que para $s - (\alpha + N/p) < 0$ y $r > 1$, o $s - (\alpha + N/p) \leq 0$ y $r = 1$, la inclusión (16) implica que para $f \in \dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,r}^{\alpha,s}$, la serie $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \Delta_j f$ converge en \mathcal{S}' a un representante de f en \mathcal{S}'/\mathcal{P} (véase, por ejemplo, Lemarié-Rieusset (2002)). Así, en estos casos el espacio $\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,r}^{\alpha,s}$ puede considerarse como un subespacio de \mathcal{S}' . En adelante, decimos que $f \in \mathcal{S}'$ pertenece a $\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,r}^{\alpha,s}$ con $s - (\alpha + N/p) < 0$ y $r > 1$, o $s - (\alpha + N/p) \leq 0$ y $r = 1$, si f es el representante canónico de la clase en \mathcal{S}'/\mathcal{P} , esto es, si $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Delta_j f$ en \mathcal{S}' .

El siguiente lema es un resultado sobre multiplicadores de tipo Hörmander-Mihlin en el contexto de los espacios de Besov-Herz débiles (véase Ferreira and Pérez-López (2018)).

Lema 1.8. Sean $1 < p < \infty$, $1 \leq q, r \leq \infty$, $-\frac{N}{p} < \alpha < N \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ y $m, s \in \mathbb{R}$. Sea $P \in C^N(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ una función tal que $\left| \partial_\xi^\beta P(\xi) \right| \leq C |\xi|^{(m-|\beta|)}$ para todo multi-índice β satisfaciendo $|\beta| \leq N$. Entonces

$$\|P(D) f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{\alpha,s-m}} \leq C \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{\alpha,s}}.$$

Ahora presentamos un lema de tipo Bernstein en el contexto de los espacios de Herz débiles. Debido a su importancia central en este trabajo, presentamos sólo el caso especial $\alpha = 0$ y $q = \infty$.

Lema 1.9. (*Desigualdades de tipo Bernstein*)

i) Sean $1 < p < \infty$ y γ un multi-índice. Dado $C_1 > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$\|D^\gamma f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0} \leq C2^{j|\gamma|} \|f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0}, \quad (18)$$

para toda $f \in W\dot{K}_{p,\infty}^0$ tal que $\text{supp } \hat{f} \subset B(0, C_1 2^j)$.

ii) Sea $1 < p \leq r < \infty$, entonces tenemos la estimación

$$\|f\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \leq C2^{j\left(\frac{N}{p} - \frac{N}{r}\right)} \|f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0}, \quad (19)$$

para todo $f \in W\dot{K}_{p,\infty}^0$ tal que $\text{supp } \hat{f} \subset B(0, C_1 2^j)$.

Demostración. Parte i). Tome $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\theta \equiv 1$ en $B(0, C_1)$ y defina $\theta_j(\xi) = \theta\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$.

Tenemos que $\theta_j \equiv 1$ en $B(0, C_1 2^j)$ y

$$\widehat{D^\gamma f}(\xi) = i^{|\gamma|} \xi^\gamma \widehat{f}(\xi) = i^{|\gamma|} \xi^\gamma \theta_j(\xi) \widehat{f}(\xi) = \widehat{D^\gamma(\theta_j \cdot)}(\xi) \widehat{f}(\xi).$$

Así que,

$$D^\gamma f = D^\gamma(\theta_j \cdot) * f = 2^{j|\gamma|} 2^{jn} ((D^\gamma \check{\theta})(2^j \cdot)) * f.$$

Usando el Lema 1.2, podemos estimar

$$\begin{aligned}
\|D^\gamma f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0} &\leq C2^{j|\gamma|} \|2^{jN}((D^\gamma\check{\theta})(2^j\cdot) * f)\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0} \\
&\leq C2^{j|\gamma|} \text{máx} \left\{ \|2^{jN}((D^\gamma\check{\theta})(2^j\cdot))\|_{L^1}, \left\| |\cdot|^N 2^{jN}((D^\gamma\check{\theta})(2^j\cdot)) \right\|_{L^\infty} \right\} \|f\|_{W\dot{K}_{p,q}^0} \\
&\leq C2^{j|\gamma|} \|f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0},
\end{aligned}$$

lo que demuestra (18).

Parte ii). Ahora consideramos (19). Como antes, elija $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\theta \equiv 1$ en $B(0, C_1)$ y defina $\theta_j(\xi) = \theta\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$. En este caso tenemos

$$f = \check{\theta}_j * f = 2^{jN}(\check{\theta}(2^j\cdot)) * f.$$

Usando el Lema 1.2 tenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} &= \|2^{jN}(\check{\theta}(2^j\cdot)) * f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0} \\
&\leq C \text{máx} \left\{ \|2^{jN}(\check{\theta}(2^j\cdot))\|_{L^{p_1}}, \left\| |\cdot|^{N/p_1} 2^{jN}(\check{\theta}(2^j\cdot)) \right\|_{L^\infty} \right\} \|f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0},
\end{aligned}$$

donde p_1 es tal que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p}$. Así,

$$\|f\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \leq C2^{jN}2^{-j\frac{N}{p_1}} \|f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0} \leq C2^{j\left(\frac{N}{p} - \frac{N}{r}\right)} \|f\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0}.$$

□

Ahora presentamos un teorema de inmersión de tipo Sobolev en el contexto de los espacios de Besov-Herz débiles (véase Ferreira and Pérez-López (2018)).

Lema 1.10. Sean $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q, r \leq \infty$, $p \leq p_1 < \infty$, $1 < p_2 \leq p_1$ y $-\frac{N}{p} < \alpha < N \left(1 + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p}\right)$. Entonces

$$\|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{\alpha,s}} \leq C \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p_2,q,r}^{\alpha+N\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\right),s+N\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\right)}}. \quad (20)$$

En particular, para $1 < p_2 \leq p_1 < \infty$, se deduce que

$$\|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p_1,q,r}^{0,s}} \leq C \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p_2,q,r}^{0,s+\left(\frac{N}{p_2}-\frac{N}{p_1}\right)}}. \quad (21)$$

1.1.3. Estimaciones del núcleo de calor. Terminamos esta sección proporcionando algunas estimaciones para el semigrupo de calor $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq 0}$ en espacios de Besov-Herz débiles. Recordemos que, trabajando en todo el espacio \mathbb{R}^N , este semigrupo puede definirse como $e^{t\Delta}f = \left(\exp(-t|\xi|^2)\hat{f}\right)^\vee$ para todo $f \in \mathcal{S}'$ y $t \geq 0$. En el contexto de los espacios de Besov-Herz débiles tenemos las siguientes estimaciones (véase Ferreira and Pérez-López (2018)).

Lema 1.11. Sean $s, \sigma \in \mathbb{R}$, $s \leq \sigma$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q, r \leq \infty$ y $-\frac{N}{p} < \alpha < N \left(1 - \frac{1}{p}\right)$. Entonces, existe $C > 0$ (independiente de f) tal que

$$\|e^{t\Delta}f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{\alpha,\sigma}} \leq Ct^{(s-\sigma)/2} \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,r}^{\alpha,s}}, \quad (22)$$

para todo $t > 0$. Además, si $s < \sigma$, para todo $t > 0$ tenemos la estimación

$$\|e^{t\Delta} f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,1}^{\alpha,\sigma}} \leq Ct^{(s-\sigma)/2} \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,s}}. \quad (23)$$

1.2. Resultados principales

En esta sección presentamos nuestros resultados de buena colocación global, auto-similaridad y comportamiento asintótico del sistema (2).

Para ser precisos en la presentación de nuestros resultados, sea $\mathbb{P} = Id + \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}$ el proyector Leray-Helmholtz sobre los espacios campos vectoriales solenoidales, aquí Id es el operador de identidad y $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_N)$ es un vector de operadores cuyas componentes son las transformadas de Riesz \mathcal{R}_j . Aplicando \mathbb{P} en la cuarta ecuación de (2) y utilizando el principio de Duhamel, el sistema (2) es formalmente equivalente al siguiente sistema integral:

$$\begin{cases} n(t) = e^{t\Delta} n_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u} \cdot \nabla n)(\tau) d\tau - \int_0^t \nabla \cdot e^{(t-\tau)\Delta} (n \nabla c + n \nabla v) d\tau, \\ c(t) = e^{t\Delta} c_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u} \cdot \nabla c + nc)(\tau) d\tau, \\ v(t) = e^{-\gamma t} e^{t\Delta} v_0 - \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u} \cdot \nabla v - n)(\tau) d\tau, \\ \mathbf{u}(t) = e^{t\Delta} \mathbf{u}_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P}(n\mathbf{f})(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (24)$$

Soluciones (n, c, v, \mathbf{u}) del sistema integral (24) son llamadas soluciones blandas o *mild* del sistema diferencial (2).

Note que en el caso $\gamma = 0$ y suponiendo que \mathbf{u} es una distribución homogénea de grado -1 , tenemos que si (n, c, v, \mathbf{u}) es una solución blanda de (2), entonces, para cada $\lambda > 0$, $(n_\lambda, c_\lambda, v_\lambda, \mathbf{u}_\lambda)$ es también una solución blanda para los datos iniciales $(\lambda^2 n_0(\lambda \mathbf{x}), c_0(\lambda \mathbf{x}), v_0(\lambda \mathbf{x}), \lambda \mathbf{u}_0(\lambda \mathbf{x}))$, donde $n_\lambda(\mathbf{x}, t) := \lambda^2 n(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t)$, $c_\lambda(\mathbf{x}, t) := c(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t)$, $v_\lambda(\mathbf{x}, t) := v(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t)$ y $\mathbf{u}_\lambda(\mathbf{x}, t) := \lambda \mathbf{u}(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t)$. Esto nos lleva a considerar la aplicación de *scaling*

$$(n, c, v, \mathbf{u}) \rightarrow (\lambda^2 n(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t), c(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t), v(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t), \lambda \mathbf{u}(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t)), \quad (25)$$

y la correspondiente para los datos iniciales

$$(n_0, c_0, v_0, \mathbf{u}_0) \rightarrow (\lambda^2 n_0(\lambda \mathbf{x}), c_0(\lambda \mathbf{x}), v_0(\lambda \mathbf{x}), \lambda \mathbf{u}_0(\lambda \mathbf{x})). \quad (26)$$

Soluciones invariantes por (25), esto es, tales que $(n, c, v, \mathbf{u}) = (n_\lambda, c_\lambda, v_\lambda, \mathbf{u}_\lambda)$ para todo $\lambda > 0$, se denominan soluciones auto-similares. Note que, para que (n, c, v, \mathbf{u}) sea una solución auto-similar, es necesario que los datos iniciales $n_0, c_0, v_0, \mathbf{u}_0$, y la fuerza f sean distribuciones homogéneas de grado $-2, 0, 0, -1$, y -1 , respectivamente. Para efectos de análisis matemático, las relaciones de escala anteriores también funcionan bien para el caso $\gamma \neq 0$ y los espacios funcionales invariantes por ellas se denominan críticos para (2). El análisis anterior motiva la elección de la clase de datos iniciales dada en (3), la cual es invariante por el *scaling* (26).

Para lo que resta del capítulo, asumimos la siguiente hipótesis sobre los índices usados.

Hipótesis 1.12. *En todas las estimaciones y resultados que siguen suponemos que los índices*

$\rho_1, \rho_2, \rho_3, q, r, p, l$ y N verifican las siguientes condiciones:

$$C1). N \geq 2;$$

$$C2). \rho_1 \geq 0, \rho_2, \rho_3 \in (0, 1), \rho_1 > \rho_2, \rho_1 > \rho_3, \rho_1 + \rho_2 < 2, \rho_1 + \rho_3 < 2, \rho_2 + \rho_3 < 2;$$

$$C3). 1 < q \leq r < \infty, 1 < l \leq p < \infty;$$

$$C4). 2 + \frac{N}{r} - \frac{N}{q} - \rho_1 > 0, 2 + \frac{N}{p} - \frac{N}{q} - \rho_1 > 0, 1 + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} > 0, 1 + \frac{N}{p} - \frac{N}{r} - \rho_2 > 0;$$

$$C5). 3 - N - (\rho_1 + \rho_2) < 0 \text{ y } 2 - N - \rho_1 < 0 \text{ si } r \leq q', \text{ o } 3 - \frac{N}{q} - \frac{N}{r} - (\rho_1 + \rho_2) < 0 \text{ y } \\ 2 - \frac{N}{q} - \frac{N}{r} - \rho_1 < 0 \text{ si } q' < r;$$

$$C6). 2 - N - 2\rho_3 < 0 \text{ si } p \leq 2 \text{ o } 1 - \frac{N}{p} - \rho_3 < 0 \text{ si } 2 < p;$$

$$C7). 3 - N - (\rho_1 + \rho_3) < 0 \text{ si } p \leq q' \text{ o } 3 - \frac{N}{q} - \frac{N}{p} - (\rho_1 + \rho_3) < 0 \text{ si } q' < p;$$

$$C8). 2 - N - (\rho_2 + \rho_3) < 0 \text{ si } p \leq r' \text{ o } 2 - \frac{N}{p} - \frac{N}{r} - (\rho_2 + \rho_3) < 0 \text{ si } r' < p;$$

$$C9). 3 - N - \rho_1 < 0 \text{ si } l \leq q' \text{ o } 3 - \frac{N}{q} - \frac{N}{l} - \rho_1 < 0 \text{ si } q' < l.$$

Observación 1.13. El conjunto de índices que verifica las condiciones C1)-C9) es no vacío.

Por ejemplo, para $N = 2$, podemos tomar $\rho_1 = 1.1, \rho_2 = 0.6, \rho_3 = 0.6$ y $q, r, p, l = 2$, y para

$N = 3$ podemos tomar $q = 3/2$ y $r, p, l = 3$ y cualquier combinación de $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in (0, 1)$ tal

que $\rho_1 > \rho_2$ y $\rho_1 > \rho_3$.

En lo que sigue, dado un espacio de Banach \mathcal{Z} continuamente incluido en \mathcal{S}' , denotamos por $BC_w((0, \infty); \mathcal{Z})$ la clase de funciones acotadas de $(0, \infty)$ a \mathcal{Z} que son débilmente continuos en el tiempo en el sentido de \mathcal{S}' . Para simplificar la notación, para $1 < p \leq \infty$ y $s \in \mathbb{R}$ definimos los siguientes espacios de funciones

$$X_p^s := \dot{B}W\dot{K}_{p, \infty, \infty}^{0, s},$$

y

$$\mathcal{X}_1 := \left\{ n; t^{\frac{\rho_1}{2}} n \in BC_w \left((0, \infty); X_q^{-2 + \frac{N}{q} + \rho_1} \right) \right\} \quad (27)$$

$$\mathcal{X}_2 := \left\{ c; c \in BC_w \left((0, \infty); L^\infty \cap X_r^{\frac{N}{r}} \right) \text{ y } t^{\frac{\rho_2}{2}} c \in BC_w \left((0, \infty); X_r^{\frac{N}{r} + \rho_2} \right) \right\}, \quad (28)$$

$$\mathcal{X}_3 := \left\{ v; t^{\frac{\rho_2}{2}} v \in BC_w \left((0, \infty); X_r^{\frac{N}{r} + \rho_2} \right) \right\}, \quad (29)$$

$$\mathcal{X}_4 := \left\{ \mathbf{u}; t^{\frac{\rho_3}{2}} \mathbf{u} \in BC_w \left((0, \infty); X_p^{-1 + \frac{N}{p} + \rho_3} \right) \right\}. \quad (30)$$

Los espacios $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$ son espacios de Banach con las respectivas normas

$$\|n\|_{\mathcal{X}_1} := \sup_{t>0} t^{\frac{\rho_1}{2}} \|n(t)\|_{X_q^{-2 + \frac{N}{q} + \rho_1}}, \quad \|c\|_{\mathcal{X}_2} := \sup_{t>0} \|c(t)\|_{L^\infty} + \sup_{t>0} \|c(t)\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} + \sup_{t>0} t^{\frac{\rho_2}{2}} \|c(t)\|_{X_r^{\frac{N}{r} + \rho_2}},$$

$$\|v\|_{\mathcal{X}_3} := \sup_{t>0} t^{\frac{\rho_2}{2}} \|v(t)\|_{X_r^{\frac{N}{r} + \rho_2}}, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} := \sup_{t>0} t^{\frac{\rho_3}{2}} \|\mathbf{u}(t)\|_{X_p^{-1 + \frac{N}{p} + \rho_3}}.$$

También definimos los espacios de Banach \mathcal{X} e \mathcal{I} como

$$\mathcal{X} := \{(n, c, v, \mathbf{u}); n \in \mathcal{X}_1, c \in \mathcal{X}_2, v \in \mathcal{X}_3, \mathbf{u} \in \mathcal{X}_4\}, \quad (31)$$

con la norma habitual

$$\|(n, c, v, \mathbf{u})\|_{\mathcal{X}} := \|n\|_{\mathcal{X}_1} + \|c\|_{\mathcal{X}_2} + \|v\|_{\mathcal{X}_3} + \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4},$$

y el espacio de datos iniciales

$$\mathcal{I} := \{(n_0, c_0, v_0, \mathbf{u}_0) ; n_0, c_0, v_0 \text{ y } \mathbf{u}_0 \text{ son como en (3)}\}$$

con la norma

$$\|(n_0, c_0, v_0, \mathbf{u}_0)\|_{\mathcal{I}} := \|n_0\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}}} + \|c_0\|_{L^\infty} + \|c_0\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} + \|v_0\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} + \|\mathbf{u}_0\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}}}.$$

Ahora estamos en condiciones de presentar nuestro resultado principal.

Teorema 1.14 (Buena postura). *Sean $N \in \mathbb{N}$ y $\rho_1, \rho_2, \rho_2, q, r, p, l$ números reales que verifican las condiciones de la Hipótesis 1.12. Suponga que $(n_0, c_0, v_0, \mathbf{u}_0) \in \mathcal{I}$ y que $\mathbf{f} \in \dot{B}W\dot{K}_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}$. En estas condiciones, existen constantes positivas ε, δ y K_1 tales que si $\|(n_0, c_0, v_0, \mathbf{u}_0)\|_{\mathcal{I}} \leq \delta$, entonces el sistema (24) tiene una solución global única $(n, c, v, \mathbf{u}) \in \mathcal{X}$ satisfaciendo $\|(n, c, v, \mathbf{u})\|_{\mathcal{X}} \leq 2K_1\varepsilon$. Además, la aplicación dato-solución es localmente Lipschitz continua.*

Corolario 1.15 (soluciones auto-similares). *Además de las condiciones del Teorema 1.14, suponga que $\gamma = 0$. También, asuma que $(n_0, c_0, v_0, \mathbf{u}_0)$ y f son homogéneas de grado*

$-2, 0, 0, -1$, y -1 , respectivamente. Entonces, la solución (n, c, v, \mathbf{u}) obtenida mediante el Teorema 1.14 es auto-similar.

Finalmente, presentamos un resultado de estabilidad asintótica para las soluciones blandas del sistema (2).

Teorema 1.16 (Comportamiento asintótico). *Supongamos que (n, c, v, \mathbf{u}) y $(\tilde{n}, \tilde{c}, \tilde{v}, \tilde{\mathbf{u}})$ son dos soluciones dadas por el Teorema 1.14 correspondientes a los datos iniciales $(n_0, c_0, v_0, \mathbf{u}_0)$ y $(\tilde{n}_0, \tilde{c}_0, \tilde{v}_0, \tilde{\mathbf{u}}_0)$, respectivamente. Entonces tenemos que*

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\rho_1}{2}} \|n(\cdot, t) - \tilde{n}(\cdot, t)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|c(\cdot, t) - \tilde{c}(\cdot, t)\|_{L^\infty} \\ & = \lim_{t \rightarrow \infty} \|c(\cdot, t) - \tilde{c}(\cdot, t)\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\rho_2}{2}} \|c(\cdot, t) - \tilde{c}(\cdot, t)\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} \\ & = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\rho_2}{2}} \|v(\cdot, t) - \tilde{v}(\cdot, t)\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\rho_3}{2}} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\cdot, t)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

si y sólo si,

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\rho_1}{2}} \|e^{t\Delta} (n_0 - \tilde{n}_0)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{t\Delta} (c_0 - \tilde{c}_0)\|_{L^\infty} \\ & = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\rho_2}{2}} \|e^{t\Delta} (c_0 - \tilde{c}_0)\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{t\Delta} (c_0 - \tilde{c}_0)\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} \\ & = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\rho_2}{2}} \|e^{-\gamma t} e^{t\Delta} (v_0 - \tilde{v}_0)\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\rho_3}{2}} \|e^{t\Delta} (\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_0)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

1.3. Estimaciones clave

En esta sección presentamos las estimaciones centrales necesarias en la demostración de los Teoremas 1.14 y 1.16. Estas estimaciones incluyen nuevas estimaciones producto en el contexto de los espacios de Besov-Herz débiles, así como estimativas lineales y bilineales para los términos que aparecen en la formulación integral (24).

1.3.1. Estimaciones producto. Presentamos aquí algunas estimaciones producto en el contexto de los espacios de Besov-Herz débiles. Estas estimaciones son importantes para controlar los términos bilineales que aparecen en la formulación integral (24). Este tipo de estimaciones de productos en espacios de Besov-Herz débiles parece ser nuevo en la literatura y juega un papel central en este trabajo. Debido a su extensión, y para facilitar la lectura del trabajo, las demostraciones de estas estimaciones producto se presentan en el Apéndice A. En todas las siguientes estimaciones consideramos índices que verifican la Hipótesis 1.12.

Lema 1.17. *Para $n \in X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}$ y $c \in X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}$, tenemos que $n\nabla c \in X_q^{-3+\frac{N}{q}+\rho_1+\rho_2}$ y la siguiente estimación producto se tiene*

$$\|n\nabla c\|_{X_q^{-3+\frac{N}{q}+\rho_1+\rho_2}} \leq C \|n\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}}. \quad (34)$$

Lema 1.18. *Para $n \in X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}$ y $c \in X_r^{\frac{N}{r}} \cap L^\infty$, tenemos que $nc \in X_r^{-2+\frac{N}{r}+\rho_1}$ y vale que*

$$\|nc\|_{X_r^{-2+\frac{N}{r}+\rho_1}} \leq C \left(\|n\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \left(\|c\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} + \|c\|_{L^\infty} \right) \right). \quad (35)$$

Lema 1.19. Para $\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}} \in X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}$, tenemos que $\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}} \in X_p^{-2+\frac{N}{p}+2\rho_3}$ y se sigue la estimación producto

$$\|\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}\|_{X_p^{-2+\frac{N}{p}+2\rho_3}} \leq C \|\mathbf{u}\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}}. \quad (36)$$

Lema 1.20. Para $n \in X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}$ y $\mathbf{u} \in X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}$, tenemos que $\mathbf{u}n \in X_q^{-3+\frac{N}{q}+\rho_1+\rho_3}$ y

$$\|\mathbf{u}n\|_{X_q^{-3+\frac{N}{q}+\rho_1+\rho_3}} \leq C \|n\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|\mathbf{u}\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}}. \quad (37)$$

Lema 1.21. Para $\mathbf{u} \in X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}$ y $c \in X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}$, tenemos que $\mathbf{u}\nabla c \in X_r^{-2+\frac{N}{r}+\rho_2+\rho_3}$ y

$$\|\mathbf{u}\nabla c\|_{X_r^{-2+\frac{N}{r}+\rho_2+\rho_3}} \leq C \|c\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} \|\mathbf{u}\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}}. \quad (38)$$

Lema 1.22. Para $\mathbf{f} \in \dot{B}K_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}$ y $n \in X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}$, tenemos que $\mathbf{f}n \in X_p^{-3+\frac{N}{p}+\rho_1}$ y

$$\|\mathbf{f}n\|_{X_p^{-3+\frac{N}{p}+\rho_1}} \leq C \|\mathbf{f}\|_{\dot{B}K_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} \|n\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}}. \quad (39)$$

1.3.2. Estimaciones lineales.

Ahora presentamos las estimaciones necesarias para manejar los términos lineales que aparecen en la formulación integral (24). Comenzamos con la estimación para los datos iniciales.

Lema 1.23. Sea $y = (e^{t\Delta}n_0, e^{t\Delta}c_0, e^{-\gamma t}e^{t\Delta}v_0, e^{t\Delta}\mathbf{u}_0)$; entonces

$$\|y\|_{\mathcal{X}} \leq C_0 \|(n_0, c_0, v_0, \mathbf{u}_0)\|_{\mathcal{I}},$$

para todo $(n_0, c_0, v_0, \mathbf{u}_0) \in \mathcal{I}$.

Demostración. A partir del Lema 1.11 tenemos

$$\|e^{t\Delta} n_0\|_{\mathcal{X}_1} = \sup_{t>0} t^{\frac{\rho_1}{2}} \|e^{t\Delta} n_0\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \leq C \sup_{t>0} t^{\frac{\rho_1}{2}} t^{-\frac{\rho_1}{2}} \|n_0\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}}} \leq C \|n_0\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}}},$$

$$\begin{aligned} \|e^{t\Delta} c_0\|_{\mathcal{X}_2} &= \sup_{t>0} t^{\frac{\rho_2}{2}} \|e^{t\Delta} c_0\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} + \sup_{t>0} \|e^{t\Delta} c_0\|_{L^\infty} + \sup_{t>0} \|e^{t\Delta} c_0\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} \\ &\leq C \sup_{t>0} t^{\frac{\rho_2}{2}} t^{-\frac{\rho_2}{2}} \|c_0\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} + \sup_{t>0} \|c_0\|_{L^\infty} + \sup_{t>0} \|c_0\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} \leq C \left(\|c_0\|_{L^\infty} + \|c_0\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} \right), \end{aligned}$$

$$\|e^{-\gamma t} e^{t\Delta} v_0\|_{\mathcal{X}_3} = \sup_{t>0} t^{\frac{\rho_2}{2}} \|e^{-\gamma t} e^{t\Delta} v_0\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} \leq C \sup_{t>0} t^{\frac{\rho_2}{2}} t^{-\frac{\rho_2}{2}} \|v_0\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} \leq C \|v_0\|_{X_r^{\frac{N}{r}}},$$

$$\|e^{t\Delta} \mathbf{u}_0\|_{\mathcal{X}_4} := \sup_{t>0} t^{\frac{\rho_3}{2}} \|e^{t\Delta} \mathbf{u}_0\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \leq \sup_{t>0} t^{\frac{\rho_3}{2}} t^{-\frac{\rho_3}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}}} \leq C \|\mathbf{u}_0\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}}}.$$

Uniendo las estimaciones anteriores obtenemos el resultado. \square

Ahora presentamos estimaciones para los términos lineales que aparecen en la parte integral de (24).

Lema 1.24. *Tenemos la estimación*

$$\left\| \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} n(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{X}_3} \leq C \|n\|_{\mathcal{X}_1}, \quad (40)$$

para todo $n \in \mathcal{X}_1$.

Demostración. Usando el Lema 1.11, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} n(\tau) d\tau \right\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} \leq C \left\| \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} n(\tau) d\tau \right\|_{X_q^{\frac{N}{q}+\rho_2}} \\
& \leq C \int_0^t \|e^{-\gamma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} n(\tau)\|_{X_q^{\frac{N}{q}+\rho_2}} d\tau \leq C \int_0^t (t-\tau)^{\frac{(-2+\frac{N}{q}+\rho_1)-(\frac{N}{q}+\rho_2)}{2}} \|n(\tau)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} d\tau \\
& = C \int_0^t (t-\tau)^{\frac{(-2+\frac{N}{q}+\rho_1)-(\frac{N}{q}+\rho_2)}{2}} \tau^{-\frac{\rho_1}{2}} \tau^{\frac{\rho_1}{2}} \|n(\tau)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} d\tau \\
& \leq C \|n\|_{\mathcal{X}_1} \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}} \tau^{-\frac{\rho_1}{2}} d\tau = C \|n\|_{\mathcal{X}_1} t^{-\frac{\rho_2}{2}} \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}} z^{-\frac{\rho_1}{2}} dz \\
& \leq \alpha \|n\|_{\mathcal{X}_1} t^{-\frac{\rho_2}{2}}.
\end{aligned}$$

Multiplicando por $t^{\frac{\rho_2}{2}}$ y tomando el supremo para $t > 0$ obtenemos el resultado. \square

Lema 1.25. Sea $\mathbf{f} \in \dot{B}K_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}$, entonces tenemos la estimación lineal

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P}(n\mathbf{f})(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{X}_4} \leq \beta \|n\|_{\mathcal{X}_1} \quad (41)$$

para todo $n \in \mathcal{X}_1$.

Demostración. De los Lemas 1.11, 1.8 y 1.22 tenemos

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P}(n\mathbf{f})(\tau) d\tau \right\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \leq C \int_0^t \left\| e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P}(n\mathbf{f})(\tau) \right\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} d\tau \\
& \leq C \int_0^t (t-\tau)^{\frac{(-3+\frac{N}{p}+\rho_1)-(-1+\frac{N}{p}+\rho_3)}{2}} \left\| (n\mathbf{f})(\tau) \right\|_{X_p^{-3+\frac{N}{p}+\rho_1}} d\tau \\
& \leq C \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_1-\rho_3}{2}} \|n\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_3}} \|\mathbf{f}\|_{\dot{B}\dot{K}_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} d\tau \\
& \leq C \|\mathbf{f}\|_{\dot{B}\dot{K}_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} \|n\|_{\mathcal{X}_1} \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_1-\rho_3}{2}} \tau^{-\frac{\rho_1}{2}} d\tau \\
& = C \|\mathbf{f}\|_{\dot{B}\dot{K}_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} \|n\|_{\mathcal{X}_1} t^{-1+\frac{\rho_1-\rho_3}{2}-\frac{\rho_1}{2}+1} \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_1-\rho_3}{2}} z^{-\frac{\rho_1}{2}} dz \\
& \leq \beta \|n\|_{\mathcal{X}_1} t^{-\frac{\rho_3}{2}}.
\end{aligned}$$

Multiplicando por $t^{\frac{\rho_3}{2}}$ y tomando el supremo para $t > 0$, obtenemos el resultado. \square

1.3.3. Estimaciones bilineales.

En esta subsección presentamos las estimaciones necesarias para manejar los términos bilineales que aparecen en la formulación integral (24).

Lema 1.26. *Tenemos la estimación*

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u}\nabla n)(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{X}_1} \leq C_1 \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4}, \quad (42)$$

para todo $n \in \mathcal{X}_1$ y $\mathbf{u} \in \mathcal{X}_4$.

Demostración. De los Lemas 1.11 y 1.20 tenemos

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u} \nabla n)(\tau) d\tau \right\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} = \left\| \int_0^t \nabla \cdot e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u} n)(\tau) d\tau \right\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \\
& \leq \int_0^t \left\| \nabla \cdot e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u} n)(\tau) \right\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} d\tau \\
& \leq C \int_0^t (t-\tau)^{\frac{(-3+\frac{N}{q}+\rho_1+\rho_3)-(-2+\frac{N}{q}+\rho_1)}{2}-\frac{1}{2}} \left\| (\mathbf{u} n)(\tau) \right\|_{X_q^{-3+\frac{N}{q}+\rho_1+\rho_3}} d\tau \\
& \leq C \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} \|n\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|\mathbf{u}\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} d\tau \\
& \leq C \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} \tau^{-\frac{\rho_1}{2}} \tau^{-\frac{\rho_3}{2}} d\tau \\
& = C \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} t^{-1+\frac{\rho_3}{2}-\frac{\rho_1}{2}-\frac{\rho_3}{2}+1} \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} z^{-\frac{\rho_1+\rho_3}{2}} dz \\
& \leq C_1 \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} t^{-\frac{\rho_1}{2}}, \tag{43}
\end{aligned}$$

lo cual implica (42). □

Lema 1.27. *Tenemos las estimaciones*

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \nabla \cdot (n \nabla c)(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{X}_1} \leq C_2 \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|c\|_{\mathcal{X}_2}, \tag{44}$$

y

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \nabla \cdot (n \nabla v)(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{X}_1} \leq C_3 \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|v\|_{\mathcal{X}_3}, \tag{45}$$

para todo $n \in \mathcal{X}_1$, $c \in \mathcal{X}_2$ y $v \in \mathcal{X}_3$.

Demostración. De los Lemas 1.11 y 1.17 tenemos

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \nabla \cdot (n \nabla c)(\tau) d\tau \right\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \leq \int_0^t \left\| e^{(t-\tau)\Delta} \nabla \cdot (n \nabla c)(\tau) \right\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} d\tau \\
& \leq C \int_0^t (t-\tau)^{\frac{(-4+\frac{N}{q}+\rho_1+\rho_2)-(-2+\frac{N}{q}+\rho_1)}{2}} \left\| \nabla \cdot (n \nabla c)(\tau) \right\|_{X_q^{-4+\frac{N}{q}+\rho_1+\rho_2}} d\tau \\
& \leq C \int_0^t (t-\tau)^{\frac{(-4+\frac{N}{q}+\rho_1+\rho_2)-(-2+\frac{N}{q}+\rho_1)}{2}} \left\| (n \nabla c)(\tau) \right\|_{X_q^{-3+\frac{N}{q}+\rho_1+\rho_2}} d\tau \\
& \leq C \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_2}{2}} \|n\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} d\tau \\
& \leq C \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|c\|_{\mathcal{X}_2} \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_2}{2}} \tau^{-\frac{\rho_1}{2}} \tau^{-\frac{\rho_2}{2}} d\tau \\
& = C \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|c\|_{\mathcal{X}_2} t^{-1+\frac{\rho_2}{2}-\frac{\rho_1}{2}-\frac{\rho_2}{2}+1} \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_2}{2}} z^{-\frac{\rho_1+\rho_2}{2}} dz \\
& \leq C_2 \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|c\|_{\mathcal{X}_2} t^{-\frac{\rho_1}{2}}. \tag{46}
\end{aligned}$$

Del mismo modo, tenemos

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \nabla \cdot (n \nabla v)(\tau) d\tau \right\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \leq C_3 \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|v\|_{\mathcal{X}_3} t^{-\frac{\rho_1}{2}}. \tag{47}$$

De (46) y (47) obtenemos (44) y (45), respectivamente. \square

Lema 1.28. *Tenemos la estimación*

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u} \nabla c)(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{X}_2} \leq C_4 \|c\|_{\mathcal{X}_2} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4}, \tag{48}$$

para todo $c \in \mathcal{X}_2$ y $\mathbf{u} \in \mathcal{X}_4$.

Demostración. De los Lemas 1.11 y 1.21 tenemos

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u}\nabla c)(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty} \leq C \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u}\nabla c)(\tau) d\tau \right\|_{\dot{B}_{r,1}^{\frac{N}{r}}} \\
& \leq C \int_0^t (t-\tau)^{\frac{(-2+\frac{N}{r}+\rho_2+\rho_3)-(\frac{N}{r})}{2}} \|(\mathbf{u}\nabla c)(\tau)\|_{X_r^{-2+\frac{N}{r}+\rho_2+\rho_3}} \\
& \leq C \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{(\rho_2+\rho_3)}{2}} \|\mathbf{u}\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|c\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} d\tau \\
& \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} \|c\|_{\mathcal{X}_2} \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{(\rho_2+\rho_3)}{2}} \tau^{-\frac{(\rho_2+\rho_3)}{2}} d\tau \\
& = C \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} \|c\|_{\mathcal{X}_2} t^{-1+\frac{(\rho_2+\rho_3)}{2}-\frac{(\rho_2+\rho_3)}{2}+1} \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{(\rho_2+\rho_3)}{2}} z^{-\frac{(\rho_2+\rho_3)}{2}} dz \\
& \leq C_{4,1} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} \|c\|_{\mathcal{X}_2}. \tag{49}
\end{aligned}$$

De manera similar, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u}\nabla c)(\tau) d\tau \right\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} & \leq C \int_0^t (t-\tau)^{\frac{(-2+\frac{N}{r}+\rho_2+\rho_3)-(\frac{N}{r})}{2}} \|(\mathbf{u}\nabla c)(\tau)\|_{X_r^{-2+\frac{N}{r}+\rho_2+\rho_3}} d\tau \\
& \leq C_{4,2} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} \|c\|_{\mathcal{X}_2}, \tag{50}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u}\nabla c)(\tau) d\tau \right\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} & \leq C \int_0^t (t-\tau)^{\frac{(-2+\frac{N}{r}+\rho_2+\rho_3)-(\frac{N}{r}+\rho_2)}{2}} \|(\mathbf{u}\nabla c)(\tau)\|_{X_r^{-2+\frac{N}{r}+\rho_2+\rho_3}} d\tau \\
& \leq C \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} \|\mathbf{u}\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|c\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} d\tau \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} \|c\|_{\mathcal{X}_2} \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} \tau^{-\frac{\rho_2+\rho_3}{2}} d\tau \\
& = C \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} \|c\|_{\mathcal{X}_2} t^{-1+\frac{\rho_3}{2}-\frac{\rho_2+\rho_3}{2}+1} \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} z^{-\frac{\rho_2+\rho_3}{2}} dz \\
& \leq C_{4,3} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} \|c\|_{\mathcal{X}_2} t^{-\frac{\rho_2}{2}}. \tag{51}
\end{aligned}$$

Así, de (49), (50) y (51) obtenemos (48). \square

Lema 1.29. *Tenemos la estimación*

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (nc)(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{X}_2} \leq C_5 \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|c\|_{\mathcal{X}_2}, \quad (52)$$

para todo $n \in \mathcal{X}_1$ y $c \in \mathcal{X}_2$.

Demostración. De los Lemas 1.11 y 1.18 tenemos

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (nc)(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty} &\leq C \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (nc)(\tau) d\tau \right\|_{\dot{B}_{r,1}^{\frac{N}{r}}} \\ &\leq C \int_0^t (t-\tau)^{\frac{(-2+\frac{N}{r}+\rho_1)-(\frac{N}{r})}{2}} \|(nc)(\tau)\|_{X_r^{-2+\frac{N}{r}+\rho_1}} d\tau \\ &\leq C \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_1}{2}} \|n\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} (\|c\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} + \|c\|_{L^\infty}) d\tau \\ &\leq C \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|c\|_{\mathcal{X}_2} \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_1}{2}} \tau^{-\frac{\rho_1}{2}} d\tau \\ &= C \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|c\|_{\mathcal{X}_2} t^{-1+\frac{\rho_1}{2}-\frac{\rho_1}{2}+1} \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_1}{2}} z^{-\frac{\rho_1}{2}} dz \\ &\leq C_{5,1} \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|c\|_{\mathcal{X}_2}. \end{aligned} \quad (53)$$

De manera similar, tenemos

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (nc)(\tau) d\tau \right\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} &\leq C \int_0^t (t-\tau)^{\frac{(-2+\frac{N}{r}+\rho_1)-(\frac{N}{r})}{2}} \|(nc)(\tau)\|_{X_r^{-2+\frac{N}{r}+\rho_1}} d\tau \\ &\leq C_{5,2} \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|c\|_{\mathcal{X}_2} \end{aligned} \quad (54)$$

y

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (nc)(\tau) d\tau \right\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} \leq C \int_0^t (t-\tau)^{\frac{(-2+\frac{N}{r}+\rho_1)-(\frac{N}{r}+\rho_2)}{2}} \|(nc)(\tau)\|_{X_r^{-2+\frac{N}{r}+\rho_1}} d\tau \\
& \leq C \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}} \|n\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} (\|c\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} + \|c\|_{L^\infty}) d\tau \\
& \leq C \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|c\|_{\mathcal{X}_2} \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}} \tau^{-\frac{\rho_1}{2}} d\tau \\
& = C \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|c\|_{\mathcal{X}_2} t^{-1+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}-\frac{\rho_1}{2}+1} \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}} z^{-\frac{\rho_1}{2}} dz \\
& \leq C_{5,3} \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|c\|_{\mathcal{X}_2} t^{-\frac{\rho_2}{2}}.
\end{aligned} \tag{55}$$

De las estimaciones (53), (54) y (55) obtenemos (52). \square

Lema 1.30. *Tenemos la estimación*

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u}\nabla v)(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{X}_3} \leq C_6 \|v\|_{\mathcal{X}_3} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4}, \tag{56}$$

para todo $v \in \mathcal{X}_3$ y $\mathbf{u} \in \mathcal{X}_4$.

Demostración. De los Lemas 1.11 y 1.21 tenemos la estimativa

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u} \nabla v)(\tau) d\tau \right\|_{X_r^{\frac{N}{r} + \rho_2}} \leq C \int_0^t (t-\tau)^{\frac{(-2 + \frac{N}{r} + \rho_2 + \rho_3) - (\frac{N}{r} + \rho_2)}{2}} \|(\mathbf{u} \nabla v)(\tau)\|_{X_r^{-2 + \frac{N}{r} + \rho_2 + \rho_3}} d\tau \\
& \leq C \int_0^t (t-\tau)^{-1 + \frac{\rho_3}{2}} \|\mathbf{u}\|_{X_p^{-1 + \frac{N}{p} + \rho_3}} \|v\|_{X_r^{\frac{N}{r} + \rho_2}} d\tau \\
& \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} \|v\|_{\mathcal{X}_3} \int_0^t (t-\tau)^{-1 + \frac{\rho_3}{2}} \tau^{-\frac{\rho_2 + \rho_3}{2}} d\tau \\
& = C \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} \|v\|_{\mathcal{X}_3} t^{-1 + \frac{\rho_3}{2} - \frac{\rho_3 + \rho_2}{2} + 1} \int_0^1 (1-z)^{-1 + \frac{\rho_3}{2}} z^{-\frac{\rho_3 + \rho_2}{2}} dz \\
& \leq C_6 \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} \|v\|_{\mathcal{X}_3} t^{-\frac{\rho_2}{2}},
\end{aligned}$$

de la cual deducimos (56). □

Lema 1.31. *Tenemos la estimación*

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P}(\mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}})(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{X}_4} \leq C_7 \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{X}_4}, \quad (57)$$

para todo $\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{X}_4$.

Demostración. De los Lemas 1.11 y 1.19 tenemos la estimativa

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P}(\mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}})(\tau) d\tau \right\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \\
& \leq C \int_0^t (t-\tau)^{\frac{(-2+\frac{N}{p}+2\rho_3)-(-1+\frac{N}{p}+\rho_3)}{2}-\frac{1}{2}} \left\| (\mathbf{u} \otimes \tilde{\mathbf{u}})(\tau) \right\|_{X_p^{-2+\frac{N}{p}+2\rho_3}} d\tau \\
& \leq C \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} \left\| \mathbf{u} \right\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \left\| \tilde{\mathbf{u}} \right\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} d\tau \\
& \leq C \|u\|_{\mathcal{X}_4} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{X}_4} \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} \tau^{-\frac{\rho_3}{2}} \tau^{-\frac{\rho_3}{2}} d\tau \\
& = C \|u\|_{\mathcal{X}_4} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{X}_4} t^{-1+\frac{\rho_3}{2}-\rho_3+1} \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} z^{-\rho_3} dz \\
& \leq C_7 \|u\|_{\mathcal{X}_4} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{X}_4} t^{-\frac{\rho_3}{2}},
\end{aligned}$$

la cual implica (57).

1.4. Demostraciones de los resultados principales

En esta sección, presentamos las pruebas de los resultados expuestos en la Sección 1.2. En primer lugar, recordamos un lema abstracto de punto fijo que será útil para nuestros fines (véase Ferreira and Postigo (2019)).

Lema 1.32. *Para $1 \leq i \leq 4$, sea X_i un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{X_i}$. Consideremos el espacio de Banach $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \times \mathcal{X}_4$ con la norma*

$$\|x\|_{\mathcal{X}} = \|x_1\|_{\mathcal{X}_1} + \|x_2\|_{\mathcal{X}_2} + \|x_3\|_{\mathcal{X}_3} + \|x_4\|_{\mathcal{X}_4},$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{X}$. Para $1 \leq i, j, k \leq 4$, suponga que $B_{i,j}^k : \mathcal{X}_i \times \mathcal{X}_j \rightarrow \mathcal{X}_k$ es una

aplicación bilineal continua, es decir, existe una constante $C_{i,j}^k > 0$ tal que

$$\|B_{i,j}^k(x_i, x_j)\|_{\mathcal{X}_k} \leq C_{i,j}^k \|x_i\|_{\mathcal{X}_i} \|x_j\|_{\mathcal{X}_j}, \quad \text{para todo } (x_i, x_j) \in \mathcal{X}_i \times \mathcal{X}_j.$$

Suponga también que $L_3 : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_3$ y $L_4 : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_4$ son aplicaciones lineales continuas tales que $\|L_3\|_{\mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_3} \leq \alpha$ y $\|L_4\|_{\mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_4} \leq \beta$. Defina las constantes K_1 y K_2 como

$$K_1 := 1 + \alpha + \beta \quad y \quad K_2 := (\alpha + \beta) \sum_{i,j=1}^4 C_{i,j}^1 + \sum_{k,i,j=1}^4 C_{i,j}^k$$

y sea $0 < \varepsilon < \frac{1}{4K_1K_2}$ y $\mathcal{B}_\varepsilon = \{x \in \mathcal{X}; \|x\|_{\mathcal{X}} \leq 2K_1\varepsilon\}$. Si $\|y\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon$, entonces existe una única solución $x \in \mathcal{B}_\varepsilon$ para la ecuación $x = y + B(x)$, donde $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $B(x) = (B_1(x), B_2(x), B_3(x), B_4(x))$, y

$$\begin{aligned} B_1(x) &= \sum_{i,j=1}^4 B_{i,j}^1(x_i, x_j), & B_2(x) &= \sum_{i,j=1}^4 B_{i,j}^2(x_i, x_j) \\ B_3(x) &= \sum_{i,j=1}^4 B_{i,j}^3(x_i, x_j) + (L_3 \circ (y_1 + B_1))(x), & B_4(x) &= \sum_{i,j=1}^4 B_{i,j}^4(x_i, x_j) + (L_4 \circ (y_1 + B_1))(x). \end{aligned}$$

Observación 1.33. La demostración del Lema 1.32 se basa en el Teorema del Punto Fijo de Banach (véase Ferreira and Postigo (2019)), por lo tanto, la solución x depende continuamente del dato y , de hecho, la aplicación dato-solución es Lipschitz continua del conjunto $\{y \in \mathcal{X}; \|y\| \leq \varepsilon\}$ en la bola \mathcal{B}_ε . Adicionalmente, se tiene que la solución obtenida mediante el Lema 1.32 es el límite en \mathcal{X} de la sucesión de iterados $x^{(1)} = y$ y $x^{(m+1)} = y + B(x^{(m)})$, $m \geq 1$.

Ahora, para cada cuádrupla de datos inicial $(n_0, c_0, v_0, \mathbf{u}_0)$ y fuerza \mathbf{f} , consideramos el operador $\mathcal{F}(n, c, v, \mathbf{u}) = (\mathcal{N}, \mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{U})$, donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}(t) = e^{t\Delta}n_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(\mathbf{u} \cdot \nabla n)(\tau)d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\nabla \cdot (n\nabla c)(\tau)d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\nabla \cdot (n\nabla v)(\tau)d\tau \\ \quad =: e^{t\Delta}n_0 + B_{4,1}^1(t) + B_{1,2}^1(t) + B_{1,3}^1(t), \\ \mathcal{C}(t) = e^{t\Delta}c_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(\mathbf{u} \cdot \nabla c)(\tau)d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(nc)(\tau)d\tau \\ \quad =: e^{t\Delta}c_0 + B_{4,2}^2(t) + B_{1,2}^2(t), \\ \mathcal{V}(t) = e^{-\gamma t}e^{t\Delta}v_0 - \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}e^{(t-\tau)\Delta}(\mathbf{u} \cdot \nabla v)(\tau)d\tau + \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}e^{(t-\tau)\Delta}n(\tau)d\tau \\ \quad =: e^{-\gamma t}e^{t\Delta}v_0 + B_{4,3}^3(t) + L_3(t), \\ \mathcal{U}(t) = e^{t\Delta}\mathbf{u}_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}(n\mathbf{f})(\tau)d\tau \\ \quad =: e^{t\Delta}\mathbf{u}_0 + B_{4,4}^4(t) + L_4(t). \end{array} \right.$$

Utilizando el Lema 1.32 demostraremos que el operador \mathcal{F} tiene un punto fijo.

Lema 1.34. *Bajo las hipótesis del Teorema 1.14. existen constantes positivas α y β tales que*

$$\|L_3(n)\|_{\mathcal{X}_3} \leq \alpha \|n\|_{\mathcal{X}_1}, \quad (58)$$

$$\|L_4(n)\|_{\mathcal{X}_4} \leq \beta \|n\|_{\mathcal{X}_1}, \quad (59)$$

para todo $n \in \mathcal{X}_1$.

Demostración. Las estimaciones (58) y (59) se siguen directamente de las estimaciones (40) y (41), respectivamente.

Lema 1.35. *Bajo las hipótesis del Teorema 1.14. existen constantes positivas $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$, y C_7 tales que*

$$\|B_{4,1}^1(\mathbf{u}, n)\|_{\mathcal{X}_1} \leq C_1 \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} \|n\|_{\mathcal{X}_1}, \quad (60)$$

$$\|B_{1,2}^1(n, c)\|_{\mathcal{X}_1} \leq C_2 \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|c\|_{\mathcal{X}_2}, \quad (61)$$

$$\|B_{1,3}^1(n, v)\|_{\mathcal{X}_1} \leq C_3 \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|v\|_{\mathcal{X}_3}, \quad (62)$$

$$\|B_{4,2}^2(\mathbf{u}, c)\|_{\mathcal{X}_2} \leq C_4 \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} \|c\|_{\mathcal{X}_2}, \quad (63)$$

$$\|B_{1,2}^2(n, c)\|_{\mathcal{X}_2} \leq C_5 \|n\|_{\mathcal{X}_1} \|c\|_{\mathcal{X}_2}, \quad (64)$$

$$\|B_{4,3}^3(\mathbf{u}, v)\|_{\mathcal{X}_3} \leq C_6 \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} \|v\|_{\mathcal{X}_3}, \quad (65)$$

$$\|B_{4,4}^4(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}})\|_{\mathcal{X}_4} \leq C_7 \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_4} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{X}_4}, \quad (66)$$

para todo $n \in \mathcal{X}_1, c \in \mathcal{X}_2, v \in \mathcal{X}_3$, y $\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{X}_4$.

Demostración. Las estimaciones (60)-(66) se siguen utilizando (42)-(57), respectivamente.

1.4.1. Demostración del Teorema 1.14. Sean $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$, y \mathcal{X}_4 como en (27)-(30), y $y = (e^{t\Delta}n_0, e^{t\Delta}c_0, e^{-\gamma t}e^{t\Delta}v_0, e^{t\Delta}\mathbf{u}_0)$. Para $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \times \mathcal{X}_4$ y $x =$

$(n, c, v, \mathbf{u}) \in \mathcal{X}$, denotamos

$$B_1(x) := B_{4,1}^1(\mathbf{u}, n) + B_{1,2}^1(n, c) + B_{1,3}^1(n, v),$$

$$B_2(x) := B_{4,2}^2(\mathbf{u}, c) + B_{1,2}^2(n, c),$$

$$B_3(x) := B_{4,3}^3(\mathbf{u}, v) + L_3 \circ (e^{t\Delta} n_0 + B_1)(x),$$

$$B_4(x) := B_{4,4}^4(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + L_4 \circ (e^{t\Delta} n_0 + B_1)(x).$$

Del Lema 1.35, los operadores $B_{i,j}^k$ son aplicaciones bilineales continuas. Además, a partir del Lema 1.34 se tiene que L_3 y L_4 son aplicaciones lineales continuas. A continuación, fijamos K_1 y K_2 como

$$K_1 = 1 + \alpha + \beta \text{ y } K_2 = (\alpha + \beta)(C_1 + C_2 + C_3) + \sum_{i=1}^7 C_i,$$

y sea ε tal que $0 < \varepsilon < \frac{1}{4K_1K_2}$. Del Lema 1.23 se tiene que

$$\|y\|_{\mathcal{X}} \leq C_0 \|(n_0, c_0, v_0, \mathbf{u}_0)\|_{\mathcal{I}} \leq \varepsilon,$$

siempre que $\|(n_0, c_0, v_0, \mathbf{u}_0)\|_{\mathcal{I}} \leq \delta = \frac{\varepsilon}{C_0}$. Por último, el Lema 1.32 implica que existe una solución única $(n, c, v, \mathbf{u}) \in \mathcal{X}$ de (24) tal que $\|(n, c, v, \mathbf{u})\|_{\mathcal{X}} \leq 2K_1\varepsilon$. Finalmente, la continuidad de la aplicación dato-solución se sigue de la Observación 1.33. \square

1.4.2. Demostración del Corolario 1.15. Como utilizamos un argumento de punto fijo para demostrar el Teorema 1.14, la solución (n, c, v, \mathbf{u}) es el límite en el espacio

\mathcal{X} de la siguiente sucesión de Picard (véase Observación 1.33):

$$(n^{(1)}, c^{(1)}, v^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}) = (e^{t\Delta}n_0, e^{t\Delta}c_0, e^{-\gamma t}e^{t\Delta}v_0, e^{t\Delta}\mathbf{u}_0)$$

y

$$(n^{(m+1)}, c^{(m+1)}, v^{(m+1)}, \mathbf{u}^{(m+1)}) = \mathcal{F}(n^{(m)}, c^{(m)}, v^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)}), \text{ para } m \in \mathbb{N},$$

esto es,

$$\left\{ \begin{array}{l} n^{(m+1)} = e^{t\Delta}n_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u}^{(m)} \cdot \nabla n^{(m)} + \nabla \cdot (n^{(m)} \nabla c^{(m)} + n^{(m)} \nabla v^{(m)})) (\tau) d\tau, \\ c^{(m+1)} = e^{t\Delta}c_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u}^{(m)} \cdot \nabla c^{(m)} + n^{(m)} c^{(m)}) (\tau) d\tau, \\ v^{(m+1)} = e^{-\gamma t} e^{t\Delta} v_0 - \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (\mathbf{u}^{(m)} \cdot \nabla v^{(m)} - n^{(m)}) (\tau) d\tau, \\ \mathbf{u}^{(m+1)} = e^{t\Delta} \mathbf{u}_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P} (\mathbf{u}^{(m)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(m)}) d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P} (n^{(m)} \mathbf{f}) (\tau) d\tau. \end{array} \right.$$

Por hipótesis, tenemos que $n_0, c_0, v_0, \mathbf{u}_0$, y \mathbf{f} son funciones homogéneas de grado $-2, 0, 0, -1$, y -1 , respectivamente. Un cálculo directo muestra que $(n^{(1)}, c^{(1)}, v^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)})$ es invariante por (25), es decir,

$$\begin{aligned} n^{(1)}(\mathbf{x}, t) &= \lambda^2 n^{(1)}(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t), \quad c^{(1)}(\mathbf{x}, t) = c^{(1)}(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t) \\ v^{(1)}(\mathbf{x}, t) &= v^{(1)}(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t) \quad \text{y} \quad \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \lambda \mathbf{u}^{(1)}(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t). \end{aligned} \tag{67}$$

Por inducción, podemos comprobar que $(n^{(m)}, c^{(m)}, v^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})$ también es invariante por el scaling (25) para todo m . Finalmente, como la solución (n, c, v, \mathbf{u}) es el límite en \mathcal{X} de la sucesión $((n^{(m)}, c^{(m)}, v^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)}))_{m \in \mathbb{N}}$, y la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ es invariante por el scaling, podemos

concluir que ésta es auto-similar. \square

1.4.3. Demostración del Teorema 1.16. Empezamos demostrando que (33) implica (32). Considere (n, c, v, \mathbf{u}) y $(\tilde{n}, \tilde{c}, \tilde{v}, \tilde{\mathbf{u}})$ dos soluciones blandas dadas por el Teorema 1.14 con datos iniciales $(n_0, c_0, v_0, \mathbf{u}_0)$ y $(\tilde{n}_0, \tilde{c}_0, \tilde{v}_0, \tilde{\mathbf{u}}_0)$, respectivamente. Para la diferencia $n - \tilde{n}$ tenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
t^{\frac{\rho_1}{2}} \|n(t) - \tilde{n}(t)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} &\leq t^{\frac{\rho_1}{2}} \|e^{t\Delta}(n_0 - \tilde{n}_0)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \\
&\quad + t^{\frac{\rho_1}{2}} \int_0^t \|e^{(t-\tau)\Delta}(\mathbf{u} \cdot \nabla n - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{n})(\tau)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} d\tau \\
&\quad + t^{\frac{\rho_1}{2}} \int_0^t \|\nabla \cdot e^{(t-\tau)\Delta}(n\nabla c + n\nabla v - \tilde{n}\nabla \tilde{c} - \tilde{n}\nabla \tilde{v})(\tau)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} d\tau \\
&:= t^{\frac{\rho_1}{2}} \|e^{t\Delta}(n_0 - \tilde{n}_0)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} + J_1(t) + J_2(t). \tag{68}
\end{aligned}$$

Para estimar J_1 usamos las mismas ideas utilizadas en la prueba de (42) para obtener

$$\begin{aligned}
J_1(t) &\leq \tilde{C}_1 t^{\frac{\rho_1}{2}} \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} \left(\|(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})(\tau)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|n(\tau)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \right. \\
&\quad \left. + \|\tilde{\mathbf{u}}(\tau)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|(n - \tilde{n})(\tau)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \right) d\tau \\
&\leq \tilde{C}_1 t^{\frac{\rho_1}{2}} \|n\|_{\mathcal{X}_1} \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} \tau^{-\frac{\rho_1}{2}-\frac{\rho_3}{2}} \tau^{\frac{\rho_3}{2}} \|(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})(\tau)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} d\tau \\
&\quad + \tilde{C}_1 t^{\frac{\rho_1}{2}} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{X}_4} \int_0^t (t-\tau)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} \tau^{-\frac{\rho_1}{2}-\frac{\rho_3}{2}} \tau^{\frac{\rho_1}{2}} \|(n - \tilde{n})(\tau)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} d\tau \\
&= \tilde{C}_1 2\varepsilon K_1 \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} z^{-\frac{\rho_1+\rho_3}{2}} \left((tz)^{\frac{\rho_3}{2}} \|(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})(tz)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \right. \\
&\quad \left. + (tz)^{\frac{\rho_1}{2}} \|(n - \tilde{n})(tz)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \right) dz. \tag{69}
\end{aligned}$$

Del mismo modo, utilizando las ideas de la prueba de (44) y (45) obtenemos la estimación

$$\begin{aligned}
J_2(t) &\leq \tilde{C}_2 2\varepsilon K_1 \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_2}{2}} z^{-\frac{\rho_1+\rho_2}{2}} \left((tz)^{\frac{\rho_1}{2}} \|(n - \tilde{n})(tz)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \right. \\
&\quad \left. + (tz)^{\frac{\rho_2}{2}} \|(c - \tilde{c})(tz)\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} \right) dz \\
&\quad + \tilde{C}_3 2\varepsilon K_1 \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_2}{2}} z^{-\frac{\rho_1+\rho_2}{2}} \left((tz)^{\frac{\rho_1}{2}} \|(n - \tilde{n})(tz)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \right. \\
&\quad \left. + (tz)^{\frac{\rho_2}{2}} \|(v - \tilde{v})(tz)\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} \right) dz. \tag{70}
\end{aligned}$$

Ahora estimamos las diferencias $c - \tilde{c}$, $v - \tilde{v}$ y $u - \tilde{u}$ como sigue:

$$\begin{aligned} \|(c - \tilde{c})(t)\|_{L^\infty} &\leq \|e^{t\Delta}(c_0 - \tilde{c}_0)\|_{L^\infty} + \int_0^t \|e^{(t-\tau)\Delta}(\mathbf{u} \cdot \nabla c + nc - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{c} - \tilde{n}\tilde{c})(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \\ &:= \|e^{t\Delta}(c_0 - \tilde{c}_0)\|_{L^\infty} + J_3(t), \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \|(c - \tilde{c})(t)\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} &\leq \|e^{t\Delta}(c_0 - \tilde{c}_0)\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} + \int_0^t \|e^{(t-\tau)\Delta}(\mathbf{u} \cdot \nabla c + nc - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{c} - \tilde{n}\tilde{c})(\tau)\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} d\tau \\ &:= \|e^{t\Delta}(c_0 - \tilde{c}_0)\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} + J_4(t), \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} t^{\frac{\rho_2}{2}} \|(c - \tilde{c})(t)\|_{X_r^{\frac{N}{r} + \rho_2}} &\leq t^{\frac{\rho_2}{2}} \|e^{t\Delta}(c_0 - \tilde{c}_0)\|_{X_r^{\frac{N}{r} + \rho_2}} \\ &\quad + t^{\frac{\rho_2}{2}} \int_0^t \|e^{(t-\tau)\Delta}(\mathbf{u} \cdot \nabla c + nc - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{c} - \tilde{n}\tilde{c})(\tau)\|_{X_r^{\frac{N}{r} + \rho_2}} d\tau \\ &:= t^{\frac{\rho_2}{2}} \|e^{t\Delta}(c_0 - \tilde{c}_0)\|_{X_r^{\frac{N}{r} + \rho_2}} + J_5(t), \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} t^{\frac{\rho_2}{2}} \|(v - \tilde{v})(t)\|_{X_r^{\frac{N}{r} + \rho_2}} &\leq t^{\frac{\rho_2}{2}} \|e^{-\gamma t} e^{t\Delta}(v_0 - \tilde{v}_0)\|_{X_r^{\frac{N}{r} + \rho_2}} \\ &\quad + t^{\frac{\rho_2}{2}} \int_0^t \|e^{-\gamma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta}(\mathbf{u} \cdot \nabla v + n - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{v} - \tilde{n})(\tau)\|_{X_r^{\frac{N}{r} + \rho_2}} d\tau \\ &:= t^{\frac{\rho_2}{2}} \|e^{-\gamma t} e^{t\Delta}(v_0 - \tilde{v}_0)\|_{X_r^{\frac{N}{r} + \rho_2}} + J_6(t), \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned}
t^{\frac{\rho_3}{2}} \|(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})(t)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} &\leq t^{\frac{\rho_3}{2}} \|e^{t\Delta}(\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_0)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \\
&+ t^{\frac{\rho_3}{2}} \int_0^t \|e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}})(\tau)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} d\tau \\
&+ t^{\frac{\rho_3}{2}} \int_0^t \|e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P}(n\mathbf{f} - \tilde{n}\mathbf{f})(\tau)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} d\tau \\
&:= t^{\frac{\rho_3}{2}} \|e^{t\Delta}(\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_0)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} + J_7(t) + J_8(t). \tag{75}
\end{aligned}$$

Utilizando las ideas de la prueba de las estimaciones (48), (52), (56) y (57), para J_3, J_4, J_5, J_6, J_7

y J_8 tenemos

$$\begin{aligned}
J_3(t) &\leq \tilde{C}_{4,1} 2\varepsilon K_1 \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{(\rho_2+\rho_3)}{2}} z^{-\frac{\rho_2+\rho_3}{2}} \left((tz)^{\frac{\rho_3}{2}} \|(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})(tz)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \right. \\
&\quad \left. + (tz)^{\frac{\rho_2}{2}} \|(c - \tilde{c})(tz)\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} \right) dz \\
&+ \tilde{C}_{5,1} 2\varepsilon K_1 \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_1}{2}} z^{-\frac{\rho_1}{2}} \left((tz)^{\frac{\rho_1}{2}} \|(n - \tilde{n})(tz)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \right. \\
&\quad \left. + \|(c - \tilde{c})(tz)\|_{L^\infty} + \|(c - \tilde{c})(tz)\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} \right) dz, \tag{76}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_4(t) &\leq \tilde{C}_{4,2} 2\varepsilon K_1 \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{(\rho_2+\rho_3)}{2}} z^{-\frac{\rho_2+\rho_3}{2}} \left((tz)^{\frac{\rho_3}{2}} \|(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})(tz)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \right. \\
&\quad \left. + (tz)^{\frac{\rho_2}{2}} \|(c - \tilde{c})(tz)\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} \right) dz \\
&+ \tilde{C}_{5,2} 2\varepsilon K_1 \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_1}{2}} z^{-\frac{\rho_1}{2}} \left((tz)^{\frac{\rho_1}{2}} \|(n - \tilde{n})(tz)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \right. \\
&\quad \left. + \|(c - \tilde{c})(tz)\|_{L^\infty} + \|(c - \tilde{c})(tz)\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} \right) dz, \tag{77}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_5(t) &\leq \tilde{C}_{4,3} 2\varepsilon K_1 \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} z^{-\frac{\rho_3+\rho_2}{2}} \left((tz)^{\frac{\rho_3}{2}} \|(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})(tz)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \right. \\
&\quad \left. + (tz)^{\frac{\rho_2}{2}} \|(c - \tilde{c})(tz)\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} \right) dz \\
&\quad + \tilde{C}_{5,3} 2\varepsilon K_1 \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}} z^{-\frac{\rho_1}{2}} \left((tz)^{\frac{\rho_1}{2}} \|(n - \tilde{n})(tz)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \right. \\
&\quad \left. + \|(c - \tilde{c})(tz)\|_{L_\infty} + \|(c - \tilde{c})(tz)\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} \right) dz, \tag{78}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_6(t) &\leq \tilde{C}_6 2\varepsilon K_1 \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} z^{-\frac{\rho_3+\rho_2}{2}} \left((tz)^{\frac{\rho_3}{2}} \|(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})(tz)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \right. \\
&\quad \left. + (tz)^{\frac{\rho_2}{2}} \|(v - \tilde{v})(tz)\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}} \right) dz \\
&\quad + \tilde{\alpha} \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}} z^{-\frac{\rho_1}{2}} (tz)^{\frac{\rho_1}{2}} \|(n - \tilde{n})(tz)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} dz, \tag{79}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_7(t) &\leq \tilde{C}_7 2\varepsilon K_1 \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} z^{-\rho_3} \left((tz)^{\frac{\rho_3}{2}} \|(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})(tz)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \right. \\
&\quad \left. + (tz)^{\frac{\rho_3}{2}} \|(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})(tz)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \right) dz, \tag{80}
\end{aligned}$$

$$J_8(t) \leq \tilde{\beta} \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_1-\rho_3}{2}} z^{-\frac{\rho_1}{2}} (tz)^{\frac{\rho_1}{2}} \|(n - \tilde{n})(tz)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} dz. \tag{81}$$

Ahora, defina

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\rho_1}{2}} \|n(\cdot, t) - \tilde{n}(\cdot, t)\|_{X_q^{-2+\frac{N}{q}+\rho_1}}, & A_2 &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} \|c(\cdot, t) - \tilde{c}(\cdot, t)\|_{L^\infty}, \\
A_3 &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} \|c(\cdot, t) - \tilde{c}(\cdot, t)\|_{X_r^{\frac{N}{r}}}, & A_4 &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\rho_2}{2}} \|c(\cdot, t) - \tilde{c}(\cdot, t)\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}}, \\
A_5 &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\rho_2}{2}} \|v(\cdot, t) - \tilde{v}(\cdot, t)\|_{X_r^{\frac{N}{r}+\rho_2}}, & A_6 &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\rho_3}{2}} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\cdot, t)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}}.
\end{aligned}$$

Dado que $\|(n, c, v, \mathbf{u})\|_{\mathcal{X}}, \|(\tilde{n}, \tilde{c}, \tilde{v}, \tilde{\mathbf{u}})\|_{\mathcal{X}} \leq 2K_1\varepsilon$, tenemos que $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 < \infty$.

Entonces, tomando $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ en (68) y (71)-(75), y usando (69)-(70) y (76)-(81), tenemos que

$$\begin{aligned}
A_1 &\leq 0 + \tilde{C}_1 2\varepsilon K_1 \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_3}{2}} z^{-\frac{\rho_1+\rho_3}{2}} (A_1 + A_6) dz \\
&\quad + \tilde{C}_2 2\varepsilon K_1 \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_2}{2}} z^{-\frac{\rho_1+\rho_2}{2}} (A_1 + A_4) dz \\
&\quad + \tilde{C}_3 2\varepsilon K_1 \int_0^1 (1-z)^{-1+\frac{\rho_2}{2}} z^{-\frac{\rho_1+\rho_2}{2}} (A_1 + A_5) dz \\
&= 2\varepsilon K_1 (C_1 (A_1 + A_6) + C_2 (A_1 + A_4) + C_3 (A_1 + A_5)). \tag{82}
\end{aligned}$$

Del mismo modo, obtenemos

$$\begin{aligned}
A_2 &\leq 0 + C_{4,1} 2\varepsilon K_1 (A_4 + A_6) + C_{5,1} 2\varepsilon K_1 (A_1 + A_2 + A_3) \\
&= 2\varepsilon K_1 (C_{4,1} (A_4 + A_6) + C_{5,1} (A_1 + A_2 + A_3)), \tag{83}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &\leq 0 + C_{4,2}2\varepsilon K_1 (A_4 + A_6) + C_{5,2}2\varepsilon K_1 (A_1 + A_2 + A_3) \\
&= 2\varepsilon K_1 (C_{4,2} (A_4 + A_6) + C_{5,2} (A_1 + A_2 + A_3)), \tag{84}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 &\leq 0 + C_{4,3}2\varepsilon K_1 (A_4 + A_6) + C_{5,3}2\varepsilon K_1 (A_1 + A_2 + A_3) \\
&\leq 2\varepsilon K_1 (C_{4,3} (A_4 + A_6) + C_{5,3} (A_1 + A_2 + A_3)), \tag{85}
\end{aligned}$$

$$A_5 \leq 0 + C_6 2\varepsilon K_1 (A_5 + A_6) + \alpha A_1 = 2\varepsilon K_1 C_6 (A_5 + A_6) + \alpha A_1, \tag{86}$$

$$A_6 \leq 0 + C_7 2\varepsilon K_1 (A_6 + A_6) + \beta A_1 = 2\varepsilon K_1 C_7 (A_6 + A_6) + \beta A_1. \tag{87}$$

Recordando que $C_{4,1} + C_{4,2} + C_{4,3} = C_4$, $C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} = C_5$, $K_1 = 1 + \alpha + \beta$ y $K_2 = (\alpha + \beta) (C_1 + C_2 + C_3) + \sum_{i=1}^7 C_i$ y sumando todos los A_i , llegamos a

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 &\leq 2\varepsilon K_1 (A_1 (C_1 + C_2 + C_3 + C_5) + A_2 C_5 + A_3 C_5 + A_4 (C_2 + C_4) \\
&\quad + A_5 (C_3 + C_6) + A_6 (C_1 + C_4 + C_6 + 2C_7)) + (\alpha + \beta) A_1,
\end{aligned}$$

y volviendo a usar (82) para controlar el término $(\alpha + \beta) A_1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
& A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \\
& \leq 2\varepsilon K_1 (A_1 (C_1 + C_2 + C_3 + C_5 + (\alpha + \beta) (C_1 + C_2 + C_3)) \\
& \quad + A_2 C_5 + A_3 C_5 + A_4 (C_2 + C_4 + (\alpha + \beta) C_2) \\
& \quad + A_5 (C_3 + C_6 + (\alpha + \beta) C_3) + A_6 (C_1 + C_4 + C_6 + 2C_7 + (\alpha + \beta) C_1)) \\
& \leq 2\varepsilon K_1 K_2 (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5).
\end{aligned}$$

Ya que $2\varepsilon K_1 K_2 < 1$, concluimos que $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 0$.

Ahora demostramos que (32) implica (33). Suponga que $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
& \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\rho_1}{2}} \left\| e^{t\Delta} (n_0 - \tilde{n}_0) \right\|_{X_q^{-2 + \frac{N}{q} + \rho_1}} \\
& \leq A_1 + \limsup_{t \rightarrow \infty} (J_1(t) + J_2(t)) \\
& \leq A_1 + 2\varepsilon K_1 (C_1 (A_1 + A_6) + C_2 (A_1 + A_4) + C_3 (A_1 + A_5)) \\
& = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} \|e^{t\Delta} (c_0 - \tilde{c}_0)\|_{L^\infty} &\leq A_2 + \limsup_{t \rightarrow \infty} J_3(t) \\
&\leq A_2 + 2\varepsilon K_1 (C_{4,1} (A_4 + A_6) + C_{5,1} (A_1 + A_2 + A_3)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} \|e^{t\Delta} (c_0 - \tilde{c}_0)\|_{X_r^{\frac{N}{r}}} &\leq A_3 + \limsup_{t \rightarrow \infty} J_4(t) \\
&\leq A_3 + 2\varepsilon K_1 (C_{4,2} (A_4 + A_6) + C_{5,2} (A_1 + A_2 + A_3)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\rho_2}{2}} \|e^{t\Delta} (c_0 - \tilde{c}_0)\|_{X_r^{\frac{N}{r} + \rho_2}} &\leq A_4 + \limsup_{t \rightarrow \infty} J_5(t) \\
&\leq A_4 + 2\varepsilon K_1 (C_{4,3} (A_4 + A_6) + C_{5,3} (A_1 + A_2 + A_3)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\rho_2}{2}} \|e^{-\gamma t} e^{t\Delta} (v_0 - \tilde{v}_0)\|_{X_r^{\frac{N}{r} + \rho_2}} &\leq A_5 + \limsup_{t \rightarrow \infty} J_6(t) \\
&\leq A_5 + 2\varepsilon K_1 C_6 (A_5 + A_6) + \alpha A_1 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\rho_3}{2}} \|e^{t\Delta} (\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_0)\|_{X_p^{-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} &\leq A_6 + \limsup_{t \rightarrow \infty} (J_7(t) + J_8(t)) \\
&\leq 2\varepsilon K_1 C_7 (A_6 + A_6) + \beta A_1 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

con lo cual se concluye la demostración.

□

2. Implementación numérica del MRD en un problema de quimiotaxis doble en fluidos

En este capítulo consideramos la implementación del método de reciprocidad dual a un modelo de quimiotaxis doble en fluidos. En la Sección 2.1 establecemos algunos preliminares sobre el método de reciprocidad dual; en la Sección 2.2 implementaremos el MRD a las ecuaciones de Navier-Stokes; en la Sección 2.3 implementamos el método a un sistema de quimiotaxis-Navier-Stokes; en la Sección 2.4 ampliamos el estudio de la Sección anterior considerando ahora un sistema de quimiotaxis doble en fluidos; y finalmente, en la Sección 3 presentamos algunas conclusiones relacionadas con nuestro estudio e implementación del MRD.

2.1. El Método de Reciprocidad Dual

En esta sección se presentará la formulación del método de reciprocidad dual (MRD). Inicialmente consideramos la ecuación de Poisson dada por:

$$\Delta u = b, \tag{88}$$

en un dominio $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, con frontera Γ suave. Como la frontera Γ de Ω es diferente de vacío, es natural requerir información de u o de alguna de sus derivadas en la frontera Γ . Las condiciones de frontera más comunes son:

1) Condiciones tipo Dirichlet:

$$u = \bar{u} \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (89)$$

2) Condiciones tipo Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \bar{q} \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (90)$$

3) Condiciones Mixtas

$$u = \bar{u} \quad \text{sobre } \Gamma_1, \quad (91)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \bar{q} \quad \text{sobre } \Gamma_2, \quad (92)$$

donde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

En todo lo que sigue consideramos que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. En este caso, para un punto arbitrario $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, la solución fundamental de la ecuación de Laplace, *centrada* en (x_i, y_i) , viene dada por

$$u_i^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln |(x, y) - (x_i, y_i)|. \quad (93)$$

Note que en este caso se tiene que

$$\nabla u_i^* = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|(x, y) - (x_i, y_i)|^2} (x - x_i, y - y_i). \quad (94)$$

Para desarrollar la ecuación de Poisson, comenzamos con de la ecuación (88), multiplicamos por la solución fundamental u_i^* centrada en un punto (x_i, y_i) , integramos sobre el dominio Ω , y finalmente usamos las fórmulas de Green para pasar todas las integrales en el dominio Ω a integrales sobre la frontera Γ . Por ello, en la aplicación del MRD es necesario estimar repetidas veces la integral

$$\int_{\Omega} \Delta u u_i^*, \quad (95)$$

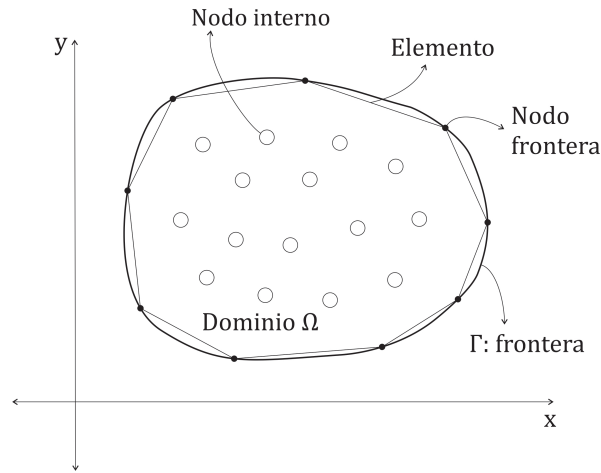
suponiendo que u es una función suficientemente regular. Si se tiene que $(x_i, y_i) \in \bar{\Omega}$, la integral (95) es una integral singular ya que la función u_i^* tiene una singularidad en (x_i, y_i) . Por tanto, usando la fórmula de integración por partes (véase Evans (2010)) dos veces, se tiene que

$$\int_{\Omega} \Delta u u_i^* = -c_i u(x_i, y_i) - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma + \int_{\Gamma} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma, \quad (96)$$

en donde $c_i = 1$ si $(x_i, y_i) \in \bar{\Omega}$ y $c_i = 1/2$ si (x_i, y_i) está en una parte suave de la frontera Γ . Cuando el punto (x_i, y_i) no está en una parte suave de la frontera el correspondiente c_i es determinado de forma indirecta (véase p. 74). No es de interés para el método considerar puntos $(x_i, y_i) \notin \bar{\Omega}$.

2.1.1. Discretización de las integrales. Para poder discretizar completamente el lado derecho de (96) es necesario discretizar las integrales de frontera. Para ello, consideramos N puntos sobre la frontera, llamados nodos, y consideramos como Γ_j el segmento lineal que une cada nodo *consecutivo* con la convención de que el nodo $N + 1$ coincide con el nodo 1 (véase Figura 1). Usando la notación $q_i^* = \nabla u_i^* \eta = \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta}$ y $q = \nabla u \eta = \frac{\partial u}{\partial \eta}$, una

Figura 1. Subdivisión de la frontera Γ en elementos lineales.



aproximación de (96) viene dada por

$$\int_{\Omega} \Delta u u_i^* = -c_i u_i - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u q_i^* d\Gamma + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u_i^* q d\Gamma. \quad (97)$$

Para estimar la integral sobre cada segmento lineal Γ_j , se considera la siguiente parametrización

$$\gamma_j(\xi) = \phi_1(\xi) \text{nodo}_j + \phi_2(\xi) \text{nodo}_{j+1} \quad y \quad \xi \in [-1, 1], \quad (98)$$

donde

$$\phi_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \quad y \quad \phi_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}.$$

Note que

$$\gamma_j'(\xi) = \frac{\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j}{2} \quad y \quad |\gamma_j'(\xi)| = \frac{1}{2} |\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j|. \quad (99)$$

Así,

$$\int_{\Gamma_j} u q_i^* d\Gamma = \int_{-1}^1 u(\gamma_j(\xi)) q_i^*(\gamma_j(\xi)) |\gamma_j'(\xi)| d\xi,$$

y

$$\int_{\Gamma_j} u_i^* q d\Gamma = \int_{-1}^1 u_i^*(\gamma_j(\xi)) q(\gamma_j(\xi)) |\gamma_j'(\xi)| d\xi.$$

Asumiendo ahora un comportamiento lineal de las funciones u y q sobre Γ_j de la forma

$$u(\gamma_j(\xi)) = \phi_1(\xi)u_j + \phi_2(\xi)u_{j+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u_{j+1} \end{bmatrix},$$

(100)

$$q(\gamma_j(\xi)) = \phi_1(\xi)q_j + \phi_2(\xi)q_{j+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ q_{j+1} \end{bmatrix},$$

donde u_j, q_j representan los valores en el nodo j de las funciones u y q , respectivamente, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_j} u q_i^* d\Gamma &= \int_{-1}^1 u(\gamma_j(\xi)) q_i^*(\gamma_j(\xi)) |\gamma_j'(\xi)| d\xi \\
&= \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} q_i^*(\gamma_j(\xi)) |\gamma_j'(\xi)| d\xi \begin{bmatrix} u_j \\ u_{j+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} h_{i,j}^1 & h_{i,j}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u_{j+1} \end{bmatrix}, \tag{101}
\end{aligned}$$

donde, para cada elemento j , tenemos los dos términos

$$h_{i,j}^1 = \int_{-1}^1 \phi_1(\xi) q_i^*(\gamma_j(\xi)) |\gamma_j'(\xi)| d\xi \quad y \quad h_{i,j}^2 = \int_{-1}^1 \phi_2(\xi) q_i^*(\gamma_j(\xi)) |\gamma_j'(\xi)| d\xi, \tag{102}$$

esto es,

$$h_{i,j}^1 = \frac{1}{2} |\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j| \int_{-1}^1 \phi_1 q_i^*(\gamma_j(\xi)) d\xi, \tag{103}$$

$$h_{i,j}^2 = \frac{1}{2} |\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j| \int_{-1}^1 \phi_2 q_i^*(\gamma_j(\xi)) d\xi. \tag{104}$$

Denotando por $p_i = (x_i, y_i)$, y recordando que usamos la notación u_i^* para indicar la solución fundamental centrada en p_i , se tiene que se tiene que

$$q_i^*(\gamma_j(\xi)) = \nabla u_i^*(\gamma_j(\xi)) \eta(\gamma_j(\xi)) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\gamma_j(\xi) - p_i}{|\gamma_j(\xi) - p_i|^2} \eta(\gamma_j(\xi)),$$

así, (103) y (104) se reducen a

$$h_{i,j}^1 = -\frac{1}{8\pi} |\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j| \int_{-1}^1 (1 - \xi) \frac{\gamma_j(\xi) - p_i}{|\gamma_j(\xi) - p_i|^2} \eta(\gamma_j(\xi)) d\xi, \quad (105)$$

$$h_{i,j}^2 = -\frac{1}{8\pi} |\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j| \int_{-1}^1 (1 + \xi) \frac{\gamma_j(\xi) - p_i}{|\gamma_j(\xi) - p_i|^2} \eta(\gamma_j(\xi)) d\xi. \quad (106)$$

Similarmente, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} u_i^* q d\Gamma &= \int_{-1}^1 u_i^*(\gamma_j(\xi)) q(\gamma_j(\xi)) |\gamma_j'(\xi)| d\xi \\ &= \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} u_i^*(\gamma_j(\xi)) |\gamma_j'(\xi)| d\xi \begin{bmatrix} q_j \\ q_{j+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g_{i,j}^1 & g_{i,j}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ q_{j+1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (107)$$

donde

$$g_{i,j}^1 = \int_{-1}^1 \phi_1(\xi) u_i^*(\gamma_j(\xi)) |\gamma_j'(\xi)| d\xi \quad \text{y} \quad g_{i,j}^2 = \int_{-1}^1 \phi_2(\xi) u_i^*(\gamma_j(\xi)) |\gamma_j'(\xi)| d\xi. \quad (108)$$

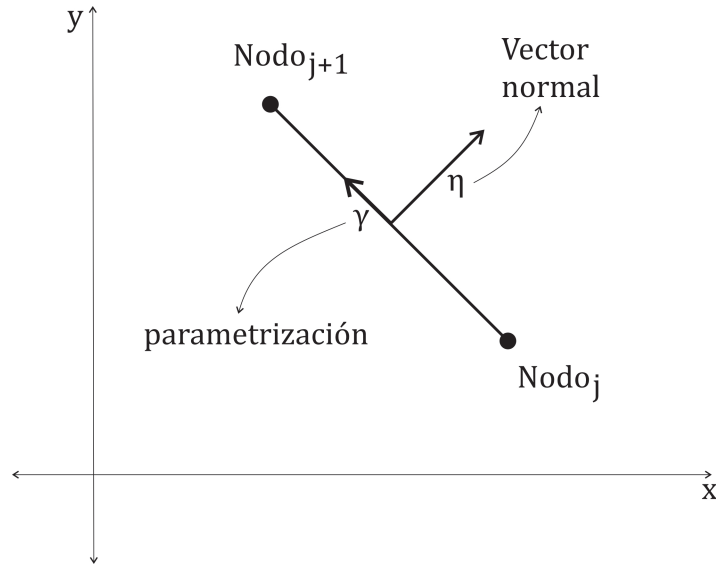
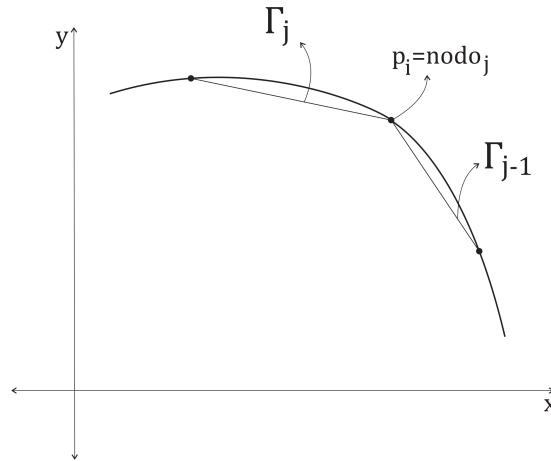
Usando la definición de la solución fundamental u_i^* finalmente obtenemos

$$g_{i,j}^1 = -\frac{1}{8\pi} |nodo_{j+1} - nodo_j| \int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln(|\gamma_j(\xi) - p_i|) d\xi, \quad (109)$$

$$g_{i,j}^2 = -\frac{1}{8\pi} |nodo_{j+1} - nodo_j| \int_{-1}^1 (1 + \xi) \ln(|\gamma_j(\xi) - p_i|) d\xi. \quad (110)$$

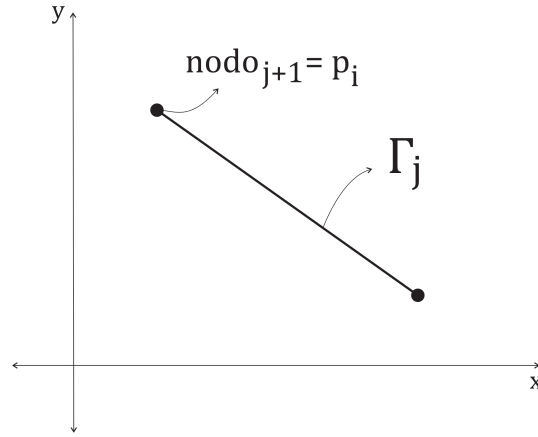
2.1.1.1. Evaluación de integrales. Se aborda ahora el cálculo de las integrales que definen los coeficientes $h_{i,j}^1$, $h_{i,j}^2$, $g_{i,j}^1$ y $g_{i,j}^2$. Note que si p_i no está en el segmento Γ_j , los coeficientes $h_{i,j}^1$, $h_{i,j}^2$, $g_{i,j}^1$ y $g_{i,j}^2$ pueden aproximarse utilizando fórmulas de integración numérica (cuadratura de Gauss, por ejemplo). En el caso en que p_i está sobre Γ_j , las integrales son singulares y se requiere un esquema de integración numérica más preciso o calcular dichas integrales analíticamente. En nuestro caso, las integrales singulares serán calculadas analíticamente, para esto, por ser los puntos de interés, se consideran solo los casos en que $p_i = nodo_j$ y $p_i = nodo_{j+1}$. En estos casos se tiene directamente que $h_{j,j}^1 = h_{j,j}^2 = h_{j+1,j}^1 = h_{j+1,j}^2 = 0$ pues los vectores $\gamma_j(\xi) - p_i$ y $\eta(\gamma_j(\xi))$ resultan ser perpendiculares entre sí. El cálculo para $g_{i,j}^1$ y $g_{i,j}^2$ no es tan directo y necesitamos considerar dos casos:

Caso 1: Cuando la solución fundamental está centrada en $p_i = nodo_{j+1}$. Para este

Figura 2. Esquema geométrico de un elemento Lineal Γ_j .

 Figura 3. Singularidad en el *nodo*_j compartida por los elementos Γ_{j-1} y Γ_j .


caso se tiene que

$$\begin{aligned}
 g_{j+1,j}^1 &= \\
 &= -\frac{|\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j|}{8\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi) \ln \left(\left| \frac{(1-\xi)}{2} \text{nodo}_j + \frac{(1+\xi)}{2} \text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_{j+1} \right| \right) d\xi \\
 &= -\frac{|\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j|}{8\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi) \ln \left(\left| \xi \frac{(\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j)}{2} + \frac{(\text{nodo}_j - \text{nodo}_{j+1})}{2} \right| \right) d\xi \\
 &= -\frac{|\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j|}{8\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi) \ln \left(\left| (\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j) \frac{(1-\xi)}{2} \right| \right) d\xi \\
 &= -\frac{|l|}{8\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi) \ln \left(\left| |l| \frac{(1-\xi)}{2} \right| \right) d\xi,
 \end{aligned}$$

Figura 4. Primer caso de singularidad en el elemento Γ_j .

donde $l = \text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j$. Al desarrollar la última integral se obtiene

$$\int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(|l| \left| \frac{(1 - \xi)}{2} \right| \right) d\xi = 2 \ln(|l|) - 1.$$

De lo anterior concluimos que

$$g_{j+1,j}^1 = -\frac{1}{8\pi} |\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j| (2 \ln(|\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j|) - 1).$$

Un argumento similar lleva a la igualdad

$$g_{j+1,j}^2 = -\frac{1}{8\pi} |\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j| (2 \ln(|\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j|) - 3)$$

Caso 2: La solución fundamental está centrada en $p_i = \text{nodo}_j$.

En este caso se tiene que

$$\begin{aligned}
g_{j,j}^1 &= \\
&= -\frac{|nodo_{j+1} - nodo_j|}{8\pi} \int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(\left| \frac{(1 - \xi)}{2} nodo_j + \frac{(1 + \xi)}{2} nodo_{j+1} - nodo_j \right| \right) d\xi \\
&= -\frac{|nodo_{j+1} - nodo_j|}{8\pi} \int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(\left| \xi \frac{(nodo_{j+1} - nodo_j)}{2} + \frac{(nodo_{j+1} - nodo_j)}{2} \right| \right) d\xi \\
&= -\frac{|nodo_{j+1} - nodo_j|}{8\pi} \int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(\left| (nodo_{j+1} - nodo_j) \frac{(1 + \xi)}{2} \right| \right) d\xi \\
&= -\frac{|l|}{8\pi} \int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(\left| |l| \frac{(1 + \xi)}{2} \right| \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Note que (usando un cambio de variables en las integrales) se tiene que

$$g_{j,j}^1 = g_{j+1,j}^2,$$

así,

$$g_{j,j}^1 = -\frac{1}{8\pi} |nodo_{j+1} - nodo_j| (2 \ln(|nodo_{j+1} - nodo_j|) - 3).$$

Similarmente se deduce que

$$g_{j,j}^2 = g_{j+1,j}^1,$$

lo que implica que

$$g_{j,j}^2 = -\frac{1}{8\pi} |nodo_{j+1} - nodo_j| (2 \ln(|nodo_{j+1} - nodo_j|) - 1).$$

2.1.2. Construcción de las Matrices. Una vez conocidos los coeficientes

$h_{i,j}^1, h_{i,j}^2, g_{i,j}^1$ y $g_{i,j}^2$, sustituyendo las ecuaciones (101) y (107) en la ecuación (97), obtenemos

la aproximación

$$\int_{\Omega} \Delta uu_i^* = -c_i u(x_i, y_i) - \sum_{j=1}^N (h_{i,j}^1 u_{nodo_j} + h_{i,j}^2 u_{nodo_{j+1}}) + \sum_{j=1}^N (g_{i,j}^1 q_{nodo_j} + g_{i,j}^2 q_{nodo_{j+1}}). \quad (111)$$

En lo que sigue se busca escribir el lado derecho de (111) en forma matricial. Para ello, denote

$\vec{u}_{fron} = (u_{nodo_1}, u_{nodo_2}, u_{nodo_3}, \dots, u_{nodo_N})$ y $\vec{q}_{fron} = (q_{nodo_1}, q_{nodo_2}, q_{nodo_3}, \dots, q_{nodo_N})$, entonces

$$\int_{\Omega} \Delta uu_i^* = -c_i u(x_i, y_i) - (H_i^1 \vec{u}_{fron} + H_i^2 \vec{u}_{fron}) + (G_i^1 \vec{q}_{fron} + G_i^2 \vec{q}_{fron}), \quad (112)$$

donde $H_i^1 = (h_{i,1}^1, h_{i,2}^1, \dots, h_{i,N}^1)$, $H_i^2 = (h_{i,N}^2, h_{i,1}^2, \dots, h_{i,N-1}^2)$, $G_i^1 = (g_{i,1}^1, g_{i,2}^1, \dots, g_{i,N}^1)$ y $G_i^2 = (g_{i,N}^2, g_{i,2}^2, \dots, g_{i,N-1}^2)$.

Al tomar los puntos p_i variando sobre todos los nodos en la frontera, se obtiene un sistema matricial de la forma

$$\left(\overrightarrow{\int_{\Omega} \Delta uu^*} \right)_{fron} = -C \vec{u}_{fron} - (H^1 \vec{u}_{fron} + H^2 \vec{u}_{fron}) + (G^1 \vec{q}_{fron} + G^2 \vec{q}_{fron}), \quad (113)$$

donde C es una matriz diagonal cuya diagonal principal es el vector $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)$ y

$$H^1 = \begin{pmatrix} h_{1,1}^1 & h_{1,2}^1 & \cdots & h_{1,N}^1 \\ h_{2,1}^1 & h_{2,2}^1 & \cdots & h_{2,N}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N,1}^1 & h_{N,2}^1 & \cdots & h_{N,N}^1 \end{pmatrix} \quad H^2 = \begin{pmatrix} h_{1,N}^2 & h_{1,1}^2 & \cdots & h_{1,N-1}^2 \\ h_{2,N}^2 & h_{2,1}^2 & \cdots & h_{2,N-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N,N}^2 & h_{N,1}^2 & \cdots & h_{N,N-1}^2 \end{pmatrix}$$

$$G^1 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^1 & g_{1,2}^1 & \cdots & g_{1,N}^1 \\ g_{2,1}^1 & g_{2,2}^1 & \cdots & g_{2,N}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N,1}^1 & g_{N,2}^1 & \cdots & g_{N,N}^1 \end{pmatrix} \quad G^2 = \begin{pmatrix} g_{1,N}^2 & g_{1,1}^2 & \cdots & g_{1,N-1}^2 \\ g_{2,N}^2 & g_{2,1}^2 & \cdots & g_{2,N-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N,N}^2 & g_{N,1}^2 & \cdots & g_{N,N-1}^2 \end{pmatrix}.$$

De lo anterior se obtiene

$$\left(\overrightarrow{\int_{\Omega} \Delta u u^*} \right)_{fron} = -C \vec{u}_{fron} - \bar{H} \vec{u}_{fron} + G \vec{q}_{fron},$$

donde $\bar{H} = H^1 + H^2$ y $G = G^1 + G^2$. Note que las matrices \bar{H} y G dependen de los puntos de frontera escogidos, para enfatizar esto se denota por

$$\left(\overrightarrow{\int_{\Omega} \Delta u u^*} \right)_{fron} = -C \vec{u}_{fron} - \bar{H}_{fron} \vec{u}_{fron} + G_{fron} \vec{q}_{fron}. \quad (114)$$

Si se considera ahora un conjunto de NI puntos interiores y usamos (112) sobre cada uno de dichos puntos, se obtiene el sistema matricial

$$\left(\overrightarrow{\int_{\Omega} \Delta u u^*} \right)_{int} = -\vec{u}_{int} - \bar{H}_{int} \vec{u}_{fron} + G_{int} \vec{q}_{fron}, \quad (115)$$

donde \vec{u}_{int} representa el vector de valores de u en los puntos interiores, $\bar{H}_{int} = H_{int}^1 + H_{int}^2$ y

$G_{int} = G_{int}^1 + G_{int}^2$, con

$$H_{int}^1 = \begin{pmatrix} h_{1,1}^1 & h_{1,2}^1 & \cdots & h_{1,N}^1 \\ h_{2,1}^1 & h_{2,2}^1 & \cdots & h_{2,N}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{NI,1}^1 & h_{NI,2}^1 & \cdots & h_{NI,N}^1 \end{pmatrix} \quad H_{int}^2 = \begin{pmatrix} h_{1,N}^2 & h_{1,1}^2 & \cdots & h_{1,N-1}^2 \\ h_{2,N}^2 & h_{2,1}^2 & \cdots & h_{2,N-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{NI,N}^2 & h_{NI,1}^2 & \cdots & h_{NI,N-1}^2 \end{pmatrix}$$

$$G_{int}^1 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^1 & g_{1,2}^1 & \cdots & g_{1,N}^1 \\ g_{2,1}^1 & g_{2,2}^1 & \cdots & g_{2,N}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{NI,1}^1 & g_{NI,2}^1 & \cdots & g_{NI,N}^1 \end{pmatrix} \quad G_{int}^2 = \begin{pmatrix} g_{1,N}^2 & g_{1,1}^2 & \cdots & g_{1,N-1}^2 \\ g_{2,N}^2 & g_{2,1}^2 & \cdots & g_{2,N-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{NI,N}^2 & g_{NI,1}^2 & \cdots & g_{NI,N-1}^2 \end{pmatrix}.$$

2.1.3. Determinación numérica de coeficientes c_i .

Cuando el punto p_i es considerado sobre la frontera Γ , los coeficientes c_i en (96) dependen del comportamiento

de la frontera. Por ejemplo, cuando p_i está sobre una parte suave de la frontera se tiene que $c_i = 1/2$, en caso contrario se puede mostrar que dichos coeficientes dependen del ángulo formado entre las curvas definidas antes y después del punto p_i . En lo que sigue mostramos una forma indirecta de calcular dichos coeficientes, para esto considere la función $u(x, y) = 1$ en $\bar{\Omega}$, entonces u verifica que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 1 & \text{sobre } \Gamma, \\ q = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (116)$$

Así, de (114) se sigue que

$$\vec{0} = -C\vec{u}_{fron} - \bar{H}_{fron}\vec{u}_{fron} = -C\vec{1} - \bar{H}_{fron}\vec{1}.$$

Esto es,

$$C\vec{1} = -\bar{H}_{fron}\vec{1},$$

donde, recordando, C es una matriz diagonal cuya diagonal principal es el vector formado por los coeficientes c_i . De la anterior ecuación se deduce directamente que

$$c_i = -\sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij} = -\sum_{\substack{j=1 \\ (\text{para } j \neq i)}}^N \bar{H}_{ij},$$

ya que por construcción $\bar{H}_{ii} = 0$.

Una vez se conocen los coeficientes c_i , y por lo tanto la matriz C , la ecuación (114) suele escribirse de forma resumida como

$$\left(\overrightarrow{\int_{\Omega} \Delta u u^*} \right)_{fron} = -H_{fron} \vec{u}_{fron} + G_{fron} \vec{q}_{fron}, \quad (117)$$

donde $H_{fron} = C + \bar{H}_{fron}$.

Finalizado los cálculos de las matrices, ahora se abordan las ideas a desarrollar de los distintos tipos para la función b ; estas secciones se basan en las ideas encontradas en (Partridge et al. (1991)). Las ideas a implementar para diferentes casos de la función b , son los casos $b = 0$ (función nula), $b = b(x, y)$ una función conocida, $b = u$ (la variable u), $b = \partial u / \partial x$, entre otras y combinaciones de estas mismas, las cuales serán explicadas a continuación; la veracidad del método solo se implementará en el Capítulo 3 para las ecuaciones a modelar.

2.1.4. Uso del MRD en la ecuación de Laplace ($\Delta u = 0$). Para ilustrar la utilización del MRD consideramos inicialmente el caso más simple, a saber, la ecuación de Laplace. Considere entonces el problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = \bar{u} & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \partial u / \partial \eta = q & \text{sobre } \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (118)$$

Multiplicando la ecuación de Laplace por la solución fundamental centrada en p_i y utilizando la aproximación para nodos frontera (117), y que $\Delta u = 0$, se obtiene

$$\vec{0} = -H_{fron}\vec{u}_{fron} + G_{fron}\vec{q}_{fron}, \quad (119)$$

por lo tanto, el sistema se reduce a

$$H_{fron}\vec{u}_{fron} = G_{fron}\vec{q}_{fron}. \quad (120)$$

En este punto es necesario implementar las condiciones de frontera. Para ello consideramos tres posibles casos:

Condición tipo Dirichlet (89): En este caso $\Gamma_1 = \Gamma$, y se desconoce el vector \vec{q}_{fron} , el cual se calcula de (120). Para esto se toma $A = G_{fron}$, $\vec{y} = H_{fron}\vec{u}_{fron}$, la incógnita es $\vec{x} = \vec{q}_{fron}$ y se resuelve el sistema $A\vec{x} = \vec{y}$.

Condición tipo Neumann (90): En este caso se tiene que $\Gamma_2 = \Gamma$, y se desconoce el vector \vec{u}_{fron} , el cual se calcula de (120). Para esto tomamos $A = H_{fron}$, $\vec{y} = G_{fron}\vec{q}_{fron}$, la incógnita es $\vec{x} = \vec{u}_{fron}$ y se resuelve el sistema $A\vec{x} = \vec{y}$.

Condiciones Mixtas (91): En este caso se conoce a u sobre la parte Γ_1 de la frontera, y su derivada normal q en la parte restante Γ_2 . Teniendo discretizada la frontera por N nodos, se asume que se conoce a u en k nodos, entonces se conoce su derivada normal en los $N - k$ nodos restantes. Note entonces que en (120) una parte del vector \vec{u}_{fron} es desconocida y una

parte del vector $\vec{q}_{f_{ron}}$ también es desconocida, por lo tanto, es necesario organizar la ecuación para poderla resolver. En este caso la matriz A es dada por

$$A = \begin{pmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,k} & -h_{1,k+1} & \cdots & -h_{1,N} \\ g_{2,1} & \cdots & g_{2,k} & -h_{2,k+1} & \cdots & -h_{2,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N,1} & \cdots & g_{N,k} & -h_{N,k+1} & \cdots & -h_{N,N} \end{pmatrix},$$

el vector de incógnitas es dado por

$$\vec{x} = (q_1, \cdots, q_k, u_{k+1}, \cdots, u_N)^T,$$

y el vector de términos independientes es dado por

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} h_{1,1} & \cdots & h_{1,k} & -g_{1,k+1} & \cdots & -g_{1,N} \\ h_{2,1} & \cdots & h_{2,k} & -g_{2,k+1} & \cdots & -g_{2,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N,1} & \cdots & h_{N,k} & -g_{N,k+1} & \cdots & -g_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ q_{k+1} \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}.$$

Al igual que en los casos anteriores, el objetivo es resolver el sistema

$$A\vec{x} = \vec{y}. \quad (121)$$

Una vez calculados \vec{u}_{f_ron} y \vec{q}_{f_ron} , es posible calcular \vec{u}_{int} utilizando el sistema matricial en los nodos interiores (115), el cual en el caso considerado ($\Delta u = 0$), se reduce a

$$\vec{0} = -\vec{u}_{int} - \bar{H}_{int}\vec{u}_{f_\text{ron}} + G_{int}\vec{q}_{f_\text{ron}}, \quad (122)$$

esto es,

$$\vec{u}_{int} = -\bar{H}_{int}\vec{u}_{f_\text{ron}} + G_{int}\vec{q}_{f_\text{ron}}. \quad (123)$$

2.1.5. Uso del MRD en la ecuación de Poisson ($\Delta u = b(x, y)$). Estudiamos ahora el caso de la ecuación de Poisson, para ello se considera el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u = b & \text{en } \Omega, \\ u = \bar{u} & \text{sobre } \Gamma_1, \\ q = \frac{\partial u}{\partial \eta} & \text{sobre } \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (124)$$

Con el objetivo de aproximar numéricamente la solución de (124), se aplica el mismo procedimiento utilizado en la ecuación (96), para obtener

$$\int_{\Omega} \Delta u u_i^* = -c_i u(x_i, y_i) - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma + \int_{\Gamma} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma = \int_{\Omega} b u_i^* d\Omega. \quad (125)$$

Observe que, aunque se conoce la función b , y en consecuencia la integral en Ω no introduce ninguna nueva incógnita, el problema ha cambiado de carácter, ya que ahora se necesita llevar a cabo una integral de dominio, así como las integrales de frontera.

La idea que diferencia al método de reciprocidad dual de otros métodos de elementos de frontera, es que propone el uso de una serie de soluciones particulares \hat{u}_j para evitar la integración sobre Ω al lado derecho de (125). El número de \hat{u}_j utilizado es igual al número total de nodos en el problema, proponiendo la siguiente aproximación para b :

$$b \simeq \sum_{j=1}^{N+NI} \alpha_j f_j, \quad (126)$$

donde los α_j forman un conjunto de coeficientes inicialmente desconocidos, las f_j son las funciones aproximantes, N representa el número de nodos frontera y NI el número de nodos interiores.

Las funciones aproximantes se escogen y luego se determinan las soluciones particulares \hat{u}_j utilizando la ecuación

$$\Delta \hat{u}_j = f_j. \quad (127)$$

Las funciones f_j son dependientes de la geometría, no se aplicará ninguna restricción a estas funciones y, de hecho, se pueden usar muchos tipos diferentes, cada uno de los cuales resulta en una función diferente \hat{u}_j según se determina a partir de (127). La cuestión de qué tipo de función f_j usar se considerará en detalle más adelante.

Ahora, sustituyendo la ecuación (127) en la ecuación (126) se tiene como resultado la aproximación

$$b = \sum_{j=1}^{N+NI} \alpha_j (\Delta \hat{u}_j). \quad (128)$$

La ecuación anterior puede sustituirse en (125) para obtener la expresión

$$-c_i u(x_i, y_i) - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma + \int_{\Gamma} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+NI} \alpha_j \int_{\Omega} \Delta \hat{u}_j u_i^* d\Omega. \quad (129)$$

Aplicando el mismo procedimiento utilizado en la ecuación de Laplace sobre los nodos frontera (véase ecuación (114)), finalmente se obtiene la fórmula

$$H_{fron} \vec{u}_{fron} - G_{fron} \vec{q}_{fron} = \sum_{j=1}^{N+NI} \left(H_{fron} \vec{u}_{jfron} - G_{fron} \vec{q}_{jfron} \right) \alpha_j. \quad (130)$$

Note que los vectores \vec{u}_{jfron} y \vec{q}_{jfron} son conocidos. Si cada uno de los vectores \vec{u}_{jfron} y \vec{q}_{jfron} se considera una columna de las matrices \hat{U}_{fron} y \hat{Q}_{fron} , respectivamente, entonces la ecuación (130) puede escribirse como:

$$H_{fron} \vec{u}_{fron} - G_{fron} \vec{q}_{fron} = (H_{fron} \hat{U}_{fron} - G_{fron} \hat{Q}_{fron}) \vec{\alpha}, \quad (131)$$

donde el vector $\vec{\alpha}$ es un vector columna de $N + NI$ componentes.

Para estimar el vector $\vec{\alpha}$, note que evaluando (128) en los $N + NI$ puntos considerados, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\vec{b} = F\vec{\alpha},$$

donde la matriz F está conformada por los vectores columna \vec{f}_j , los cuales son conocidos y corresponden con las funciones f_j evaluadas en todos los puntos considerados. De esta forma, se tiene que

$$\vec{\alpha} = F^{-1}\vec{b}.$$

Con todo, sigue que el lado derecho de la ecuación (131) es un vector conocido, y por lo tanto dicha ecuación se reduce a

$$H_{fron}\vec{u}_{fron} - G_{fron}\vec{q}_{fron} = \vec{d}, \quad (132)$$

donde

$$\vec{d} = (H_{fron}\hat{U}_{fron} - G_{fron}\hat{Q}_{fron})\vec{\alpha}. \quad (133)$$

Para determinar los valores desconocidos de \vec{u}_{fron} o \vec{q}_{fron} , lo cual depende de las condiciones de frontera, se procede exactamente igual que en la ecuación de Laplace, cambiando \vec{y} por $\vec{y}_{new} = \vec{y} - \vec{d}$. El sistema (121) se resuelve y se encuentran los valores desconocidos.

Una vez conocidos los valores en la frontera, utilizando la ecuación (129) ahora sobre los

nodos internos y siguiendo la misma idea en la deducción de (115), se tiene:

$$\vec{u}_{int} + \bar{H}_{int}\vec{u}_{fron} - G_{int}\vec{q}_{fron} = \sum_{j=1}^{N+NI} \alpha_j \left(\vec{u}_{jint} + \bar{H}_{int}\vec{u}_{jfron} - G_{int}\vec{q}_{jfron} \right). \quad (134)$$

Despejado \vec{u}_{int} , la fórmula anterior se reduce al sistema matricial

$$\vec{u}_{int} = G_{int}\vec{q}_{fron} - \bar{H}_{int}\vec{u}_{fron} + \vec{d}, \quad (135)$$

con

$$\vec{d} = (\hat{U}_{int} + H_{int}\hat{U}_{fron} - G_{int}\hat{Q}_{fron})\vec{\alpha}, \quad (136)$$

donde \hat{U}_{int} es la matriz cuyos vectores columna están dados por los vectores \vec{u}_{jint} de las funciones \hat{u}_j calculadas en los NI puntos interiores.

2.1.5.1. Funciones aproximantes. Hay propuestas en la literatura diferentes tipos de funciones f a partir de las cuales se definen las funciones $f_j = f(\cdot - p_j)$ usadas en (126). Dichas funciones tienen relacionada una función \hat{u} por medio de la ecuación

$$\Delta\hat{u} = f, \quad (137)$$

a partir de la cual se definen las funciones $\hat{u}_j = \hat{u}(\cdot - p_j)$. Es claro que vale que

$$\Delta\hat{u}_j = f_j. \quad (138)$$

La selección más simple para f que se ha mostrado adecuada para varios problemas de EDP es tomar funciones radiales de la forma

$$f = 1 + r + r^2 + \dots + r^m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (139)$$

donde $r = |x| = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)^{1/2}$. Con el objetivo de determinar la función \hat{u} relacionada con f , suponga que esta debe ser radial de la forma $\hat{u}(x) = v(r)$ y note que para $i = 1, 2, \dots, n$ se tiene

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0), \quad (140)$$

de lo que sigue que

$$u_{x_i x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}$$

y

$$u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right). \quad (141)$$

Sumando para $i = 1, 2, \dots, n$ y ya que $\sum_i^n x_i^2 = r^2$, se obtiene

$$\Delta \hat{u} = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = f. \quad (142)$$

Resolviendo la EDO anterior, se concluye que la función \hat{u} para el caso bidimensional ($n = 2$)

es dada por

$$\hat{u} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} + \dots + \frac{r^{m+2}}{(m+2)^2}, \quad (143)$$

y como antes

$$\hat{q} = (\nabla \cdot \hat{u})\eta. \quad (144)$$

En principio, cualquier combinación de términos puede seleccionarse de (139), aunque la más usada por su simplicidad es $f = 1 + r$ (véase Partridge et al. (1991)). En este caso se tiene:

$$\hat{u} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} \quad \text{y} \quad \hat{q} = \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{3}\right)(x, y)\eta. \quad (145)$$

Otros tipos de funciones radiales han sido propuestos en la literatura (véase Natalini and Popov (2006)), por ejemplo, un tipo de función radial usado más adelante en este trabajo es dado por

$$\tilde{f} = r^2 \ln(r) + ax + by + c,$$

donde las constantes a, b, c son determinadas de acuerdo a la distribución de nodos de frontera e interiores usados.

2.1.6. Ecuación de tipo $\Delta u = b(x, y, u)$. Hasta el momento, el método de reciprocidad dual se desarrolló y aplicó a un problema gobernado por una ecuación de tipo Poisson, en la que el lado derecho es una función conocida que depende de la posición, esto es,

$$\Delta u = b(x, y), \quad (146)$$

para el cual se estableció la expresión matricial (131), para encontrar todos los valores desconocidos en la frontera, y posteriormente, usando (135), determinar los valores desconocidos

en el interior. Como b en la ecuación (146) es una función conocida, el vector $\vec{\alpha}$ puede calcularse a partir de la relación

$$\vec{\alpha} = F^{-1}\vec{b}. \quad (147)$$

En esta sección, el rango de aplicación del método de reciprocidad dual se extenderá a los problemas regidos por ecuaciones de tipo

$$\Delta u = b(x, y, u), \quad (148)$$

donde el término no homogéneo también puede ser una combinación, suma o producto de funciones de u . Para entender el planteamiento del problema tomamos como ejemplo la siguiente ecuación

$$\Delta u = -u. \quad (149)$$

En este caso la función b se define como $-u$, y la ecuación (147) se reduce a

$$\vec{\alpha} = F^{-1}(-\vec{u}). \quad (150)$$

Por lo tanto, la ecuación (131) se convierte en

$$H_{fron}\vec{u}_{fron} - G_{fron}\vec{q}_{fron} = (H_{fron}\hat{U}_{fron} - G_{fron}\hat{Q}_{fron})F^{-1}(-\vec{u}), \quad (151)$$

donde el vector \vec{u} está formado tanto por valores “calculados” en la frontera como en el interior. Note que en la ecuación (151) no es posible encontrar los valores desconocidos en la frontera ya que depende de los valores desconocidos de \vec{u} en el interior. Similarmente, de la ecuación (134) se tiene el sistema

$$\vec{u}_{int} + \bar{H}_{int}\vec{u}_{fron} - G_{int}\vec{q}_{fron} = (\vec{u}_{int} + \bar{H}_{int}\hat{U}_{fron} - G_{int}\hat{Q}_{fron})F^{-1}(-\vec{u}), \quad (152)$$

del cual tampoco se puede determinar \vec{u}_{int} al no tener calculados todos los valores en la frontera.

Para solucionar el problema anterior, se agrupan las dos formulaciones (151) y (152) en una sola formulación matricial.

Note que $\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{u}_{fron} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix}$ y $\vec{q} = \begin{pmatrix} \vec{q}_{fron} \\ \vec{q}_{int} \end{pmatrix}$, y que la ecuación (151) puede escribirse como

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_{fron} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{fron} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_{fron} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{fron} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{q}_{fron} \\ \vec{q}_{int} \end{pmatrix} = \\ & = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_{fron} \\ \hat{U}_{int} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{fron} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_{fron} \\ \hat{U}_{int} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{fron} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Q}_{fron} \\ \hat{Q}_{int} \end{pmatrix} \right] \vec{\alpha}, \end{aligned}$$

y que la ecuación (152) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_{fron} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{H}_{int} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_{fron} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ G_{int} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{q}_{fron} \\ \vec{q}_{int} \end{pmatrix} = \\ & = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_{fron} \\ \hat{U}_{int} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{H}_{int} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_{fron} \\ \hat{U}_{int} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ G_{int} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Q}_{fron} \\ \hat{Q}_{int} \end{pmatrix} \right] \vec{\alpha}, \end{aligned}$$

donde Id es la matriz identidad de $NI \times NI$. Sumando estas formas matriciales, se obtiene

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{pmatrix} H_{fron} & 0 \\ \bar{H}_{int} & Id \end{pmatrix}}_H \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{u}_{fron} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix}}_{\vec{u}} - \underbrace{\begin{pmatrix} G_{fron} & 0 \\ G_{int} & 0 \end{pmatrix}}_G \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{q}_{fron} \\ \vec{q}_{int} \end{pmatrix}}_{\vec{q}} = \\ & = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} H_{fron} & 0 \\ \bar{H}_{int} & Id \end{pmatrix}}_H \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{U}_{fron} \\ \hat{U}_{int} \end{pmatrix}}_{\hat{U}} - \underbrace{\begin{pmatrix} G_{fron} & 0 \\ G_{int} & 0 \end{pmatrix}}_G \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{Q}_{fron} \\ \hat{Q}_{int} \end{pmatrix}}_{\hat{Q}} \right] \vec{\alpha}. \end{aligned}$$

Observe que \vec{q}_{int} y \hat{Q}_{int} están multiplicados por 0, por lo tanto esos datos son irrelevantes a la hora de resolver el sistema, por lo tanto, asumimos que tanto \vec{q}_{int} como \hat{Q}_{int} son iguales a 0. Con todo, el sistema queda reducido de la siguiente forma

$$H\vec{u} - G\vec{q} = [H\hat{U} - G\hat{Q}]F^{-1}\vec{b} = S\vec{b} = S(-\vec{u}), \quad (153)$$

donde

$$S = [H\hat{U} - G\hat{Q}]F^{-1}. \quad (154)$$

Despejando el vector \vec{u} en el lado izquierdo y el vector \vec{q} en el lado derecho, la ecuación resultante es

$$B\vec{u} = G\vec{q}, \quad (155)$$

donde $B = H + S$.

A partir de (155) nos enfrentamos nuevamente al problema de determinar los valores desconocidos de \vec{u} tanto en la frontera como en el interior. Para ello, dada una matriz C , denotamos por $C(N_1 : N_2)$ a la submatriz de C formada por las columnas N_1 hasta la N_2 . Consideramos ahora la formulación para diferentes tipos de condiciones de frontera, en todos los casos se espera resolver un sistema de tipo $A\vec{x} = \vec{y}$.

Condición tipo Dirichlet (89): En este caso se conoce \vec{u}_{fron} sobre Γ , y para encontrar \vec{u}_{int} y \vec{q}_{fron} se despejan las incógnitas para el lado izquierdo y los datos conocidos para el lado derecho, de esta forma se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} -G(1 : N) & B(N + 1 : N + NI) \end{pmatrix},$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{q}_{fron} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix},$$

y

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} -B(1 : N) & G(N + 1 : N + NI) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_{fron} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Condición tipo Neumann (90): En este caso se conoce \vec{q} sobre Γ , por lo que se tiene que $A = B$, $\vec{y} = G\vec{q}$ y $\vec{x} = \vec{u}$.

Condiciones Mixtas (91): En este caso se conoce \vec{u}_{fron} sobre Γ_1 y \vec{q}_{fron} sobre Γ_2 . Las incógnitas son \vec{q}_{fron} sobre Γ_1 , \vec{u}_{fron} sobre Γ_2 y \vec{u}_{int} en Ω . Si k y $N - k$ denotan, respectivamente, la cantidad de nodos conocidos de \vec{u} y \vec{q} sobre Γ , despejando los valores desconocidos para la izquierda y los valores conocidos para la derecha en (155), tenemos

$$A = \begin{pmatrix} -G(1 : N - k) & B(N - k : N + NI) \end{pmatrix},$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{q}_{fron\Gamma_1} \\ \vec{u}_{fron\Gamma_2} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix},$$

y

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} -B(1:k) & \hat{G}(k:N+NI) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_{fron\Gamma_1} \\ \vec{q}_{fron\Gamma_2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones (153) forman la base de la aplicación del método de reciprocidad dual a las ecuaciones del tipo (148). La única diferencia en cada nuevo caso será un nuevo vector b para reemplazar por $-\vec{u}$ en la ecuación (153).

2.1.7. Ecuación de tipo $\Delta u = -\partial u/\partial x$. Las ecuaciones diferenciales que incluyen derivadas espaciales de primer orden de la variable problema son muy comunes en el modelado matemático. Considere, por ejemplo, una ecuación del tipo

$$\Delta u = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (156)$$

de donde se identifica que $\vec{b} = -\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}$. En este caso, sustituyendo en la ecuación (147), se obtiene

$$\vec{\alpha} = -F^{-1} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}, \quad (157)$$

y haciendo la misma construcción de las matrices aumentadas (153), tenemos

$$H\vec{u} - G\vec{q} = -S \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}. \quad (158)$$

Ahora se debe establecer un mecanismo para relacionar los valores nodales de \vec{u} con los valores nodales de su derivada $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}$. En este punto, debe recordarse que la aproximación básica de la técnica del método de reciprocidad dual es la ecuación (126), pero esta aproximación también puede ser usada para u , esto es

$$u \simeq \sum_{j=1}^{N+NI} \beta_j f_j, \quad (159)$$

de la cual, después de evaluar en todos los nodos, se obtiene el sistema

$$\vec{u} = F\vec{\beta}. \quad (160)$$

Por otro lado, de (159), después de derivar y evaluar en todos los nodos, se obtiene el sistema

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{\beta}, \quad (161)$$

donde $\frac{\partial F}{\partial x}$ es la matriz formada por las funciones $\frac{\partial f_j}{\partial x}$ evaluadas en los $N + NI$ nodos considerados. De la ecuación (160) se tiene que $\vec{\beta} = F^{-1}\vec{u}$, entonces, reemplazando en la ecuación (161) se obtiene

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1} \vec{u}. \quad (162)$$

La ecuación (162) plantea la forma básica de aproximar derivadas en el MRD. Sustituyendo ahora en (158) se llega a

$$H\vec{u} - G\vec{q} = -S \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1} \vec{u}. \quad (163)$$

Llamando ahora

$$R = -S \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1}, \quad (164)$$

entonces,

$$(H - R)\vec{u} = G\vec{q}. \quad (165)$$

Como se mencionó anteriormente, los términos en la matriz $\partial F/\partial x$ se obtienen diferenciando las funciones f_j , las cuales están relacionadas con la derivada de la función f utilizada. Lo anterior implica que, en problemas donde b depende de derivadas de la función incógnita, el uso de la función $f(r) = 1 + r$ no es posible pues ésta no es diferenciable. Para solucionar este problema, en estos casos usamos la función $f = r^2 \ln(r) + ax + by + c$.

2.1.8. Ecuación de Difusión. Finalmente, se considera un problema de difusión gobernado por la siguiente ecuación

$$\Delta u = D \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (166)$$

donde u representa una cantidad que se difunde y $1/D$ es el coeficiente de difusión. La definición del problema se completa con la especificación de condiciones de frontera apropiadas y una condición inicial de tipo $u(x, y, t_0) = u_0(x, y)$.

Se observa que la función b en esa ecuación ahora se define como

$$b = D \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (167)$$

En el presente caso, el problema ha cambiado de carácter, ya que ahora necesitamos llevar a cabo una derivada de u con respecto al tiempo t . El método de reciprocidad dual propone la siguiente aproximación

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, y, t) \simeq \sum_{j=1}^{N+L} f_j(x, y) \alpha_j(t) \quad (168)$$

donde las f_j son como antes y los α_j son ahora funciones desconocidas del tiempo. El siguiente paso en la formulación es similar a la ecuación (128)

$$\frac{\vec{\partial} u}{\partial t} = F \vec{\alpha}. \quad (169)$$

Despejando el vector $\vec{\alpha}$ en la ecuación anterior, se tiene que

$$\vec{\alpha} = F^{-1} \frac{\vec{\partial} u}{\partial t}. \quad (170)$$

Sustituyendo lo anterior en (153), se obtiene la siguiente expresión

$$H\vec{u} - G\vec{q} = D(H\hat{U} - G\hat{Q})F^{-1} \frac{\vec{\partial} u}{\partial t}. \quad (171)$$

Definiendo

$$C = -DS = -D(H\hat{U} - G\hat{Q})F^{-1}, \quad (172)$$

entonces,

$$C \frac{\vec{\partial} u}{\partial t} + H\vec{u} = G\vec{q}. \quad (173)$$

El sistema (173) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, por lo tanto, cualquier esquema estándar de solución puede ser utilizado.

Para simplificar, aquí se empleará Diferencias Finitas. Se puede proponer una aproximación lineal para la variación de u y q dentro de cada paso de tiempo, en la forma

$$u = (1 - \theta_u) u^m + \theta_u u^{m+1}, \quad (174)$$

$$q = (1 - \theta_q) q^m + \theta_q q^{m+1}, \quad (175)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (u^{m+1} - u^m), \quad (176)$$

donde θ_u y θ_q son parámetros que posicionan los valores de u y q , respectivamente, entre los niveles de tiempo m y $m + 1$. Sustituyendo estas aproximaciones en (173) y despejando se obtiene:

$$(C + \theta_u \Delta t H) u^{m+1} - \Delta t \theta_q G q^{m+1} = [C - \Delta t (1 - \theta_u) H] u^m + \Delta t (1 - \theta_q) G q^m. \quad (177)$$

El lado derecho de (177) todo es conocido, ya que involucra valores que se han especificado como condiciones iniciales o se han calculado previamente. Al introducir las condiciones de frontera en el tiempo $m + 1$, se puede reorganizar el lado izquierdo de (177) y resolver el sistema de ecuaciones resultante, para cada nivel de tiempo. Otra manera de abordar la aproximación temporal es usar el método de diferencia de tres puntos hacia atrás, para lo

cual es necesario conocer dos pasos previos, en este caso la aproximación es dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta t} (3u^{m+1} - 4u^m + u^{m-1}). \quad (178)$$

Observación 2.1. En el desarrollo de este trabajo se implementará primero diferencias finitas para tener la aproximación del esquema en los primeros dos pasos de tiempo, y posteriormente diferencias de tres puntos hacia atrás.

2.1.9. Cálculo del Laplaciano discreto. En sistemas como el de Keller-Segel

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = D_n \Delta n - \chi \nabla \cdot (n \nabla c), \\ \frac{\partial c}{\partial t} = D_c \Delta c - \gamma n c, \end{cases} \quad (179)$$

el término de difusión cruzada $\nabla \cdot (n \nabla c) = \nabla n \cdot \nabla c + n \Delta c$ debe ser discretizado, y en particular, se debe tener una estrategia para estimar el factor Δc . Entre las posibles opciones está usar diferencias finitas, tal y como es presentado en (Meral (2019)) en el estudio de haptotaxis, pero el uso de diferencias finitas limita el tipo de dominio usado en el problema, así como la distribución de los nodos tanto de frontera como interiores. Una segunda estrategia, siguiendo lo desarrollado para las primeras derivadas en la Subsección 2.1.7, sería usar aproximaciones de la forma $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} F^{-1} \vec{c}$ y $\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} F^{-1} \vec{c}$, pero en este caso se impondría restricciones adicionales a la función aproximante f , ya que debería ser por lo menos dos veces derivable, tipo $f(r) = 1 + r^2$, y experimentos numéricos nos muestran que el sistema se vuelve inestable.

Con el objetivo de mantener la generalidad y aplicabilidad del MRD, en este trabajo

proponemos una nueva estrategia para estimar Δc . De forma general, suponga que

$$\Delta c = g, \quad (180)$$

de lo que el objetivo es: conocido \vec{c} determinar \vec{g} . Para ello, suponiendo que usamos la aproximación $g = \sum_{j=1}^{N+NI} \alpha_j f_j$, y aplicando la ya conocida estrategia del MRD a la ecuación (180), se obtiene que

$$H\vec{c} - G\vec{q}_c = S\vec{g},$$

de lo que sigue que

$$\vec{\Delta c} = \vec{g} = S^{-1}(H\vec{c} - G\vec{q}_c). \quad (181)$$

Observe que el esquema (181), aunque es usado para aproximar $\vec{\Delta c}$ no implica ninguna derivada sobre las funciones aproximantes.

2.2. Ecuaciones de Navier-Stokes

En esta sección usamos las ideas presentadas por Eldho and Young (2004), e implementamos el MRD para aproximar numéricamente las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes en un dominio bidimensional. Recordemos que el sistema de Navier-Stokes es dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (182)$$

Para transformar el sistema en uno formalmente equivalente, defina la vorticidad del

fluido $\bar{\omega}$ como $\bar{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, entonces, tomando el rotacional en la primera ecuación de (182) se obtiene

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\omega} + \bar{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{\omega}. \quad (183)$$

Note que en el caso bidimensional el campo de velocidades puede ser escrito como $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$, de lo que sigue que $\bar{\omega} = \left(0, 0, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)$, con lo que la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\omega} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{\omega}. \quad (184)$$

Note ahora que, usando la condición de incompresibilidad, se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{\omega} &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial y \partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y^2}, -\frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_1}{\partial x \partial y}, 0 \right) \\ &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x \partial x} - \Delta u_1, -\Delta u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial y \partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial x \partial y}, 0 \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - \Delta u_1, -\Delta u_2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right), 0 \right) \\ &= -(\Delta u_1, \Delta u_2, 0). \end{aligned}$$

Para finalizar, usando la vorticidad escalar $\omega := \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$, y reemplazando en las ecuaciones anteriores obtenemos la llamada formulación velocidad-vorticidad para las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega, \quad (185)$$

$$\Delta u_1 = -\frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \Delta u_2 = \frac{\partial \omega}{\partial x}. \quad (186)$$

Considerando inicialmente la ecuación tipo Poisson (186) para la velocidad u_2 , y aplicando el procedimiento desarrollado para la aplicación del MRD, se tiene el esquema

$$Hu_2 - Gq_{u_2} = \left(H\hat{U}_2 - G\hat{Q} \right) F^{-1} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial x}.$$

Aquí, usamos la función radial $f = 1 + r$ para construir la matriz F y además la función $\tilde{f} = r^2 \ln(r) + ax + by + c$, para aproximar la derivada $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial x}$, teniendo así

$$Hu_2 - Gq_{u_2} = S \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \tilde{F}^{-1} \omega, \quad (187)$$

donde $S = \left(H\hat{U}_2 - G\hat{Q} \right) F^{-1}$. De igual forma, para u_1 se tiene el esquema

$$Hu_1 - Gq_{u_1} = -S \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \tilde{F}^{-1} \omega. \quad (188)$$

Por otro lado, conociendo u_1 y u_2 , abordamos el problema de aproximar ω , para ello, de (185) y usando la aproximación del MRD se tiene:

$$H\omega - Gq_\omega = \text{Re} \left[S \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + [u_1]^d \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial x} + [u_2]^d \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial y} \right) \right], \quad (189)$$

donde S es como antes y $[u_1]^d, [u_2]^d$ representan matrices diagonales cuya diagonal principal

son los vectores \vec{u}_1 y \vec{u}_2 , respectivamente. En general, dado un vector \vec{v} denotamos por $[v]^d$ la matriz diagonal cuya diagonal principal es el vector \vec{v} .

Usando la función $\tilde{f} = r^2 \ln(r) + ax + by + c$ para la aproximación de las derivadas espaciales, diferencias finitas para la derivada temporal, y adoptando un esquema implícito, el sistema (189) se reescribe como:

$$H\omega^{m+1} - Gq_\omega^{m+1} = \text{Re} \left[S \left(\frac{\omega^{m+1} - \omega^m}{\Delta t} + [u_1]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \tilde{F}^{-1} \omega^{m+1} + [u_2]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \tilde{F}^{-1} \omega^{m+1} \right) \right],$$

con lo que, después de reagrupar, obtenemos el sistema

$$A\omega^{m+1} - \Delta t Gq_\omega^{m+1} = -\text{Re} S\omega^m \quad (190)$$

donde $A = \left(\Delta t H - \text{Re} S - \Delta t \text{Re} S[u_1]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \tilde{F}^{-1} - \Delta t \text{Re} S[u_2]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \tilde{F}^{-1} \right)$. Conociendo ω en el tiempo inicial y en primer paso de tiempo, podemos usar la aproximación temporal de tres puntos hacia atrás mencionada en la Subsección 2.1.8, en este caso, el sistema obtenido es dado por

$$A\omega^{m+1} - \Delta t Gq_\omega^{m+1} = -4 \text{Re} S\omega^m + \text{Re} S\omega^{m-1}, \quad (191)$$

donde $A = \left(2\Delta t H - 3 \text{Re} S - 2\Delta t \text{Re} S[u_1]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \tilde{F}^{-1} - 2\Delta t \text{Re} S[u_2]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \tilde{F}^{-1} \right)$.

2.2.1. Implementación numérica. Para mostrar la utilidad del MRD aplicado a las ecuaciones de Navier-Stokes, a continuación se hace la implementación sobre un modelo de prueba para las ecuaciones de Navier-Stokes. La prueba conocida como “flujo im-

pulsado en una cavidad cuadrada” consta de suponer un dominio cuadrado $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ en el cual se tiene un fluido inicialmente en reposo, y sobre el cual se impone una velocidad constante en la parte superior de la frontera, como se observa en la Figura 5.

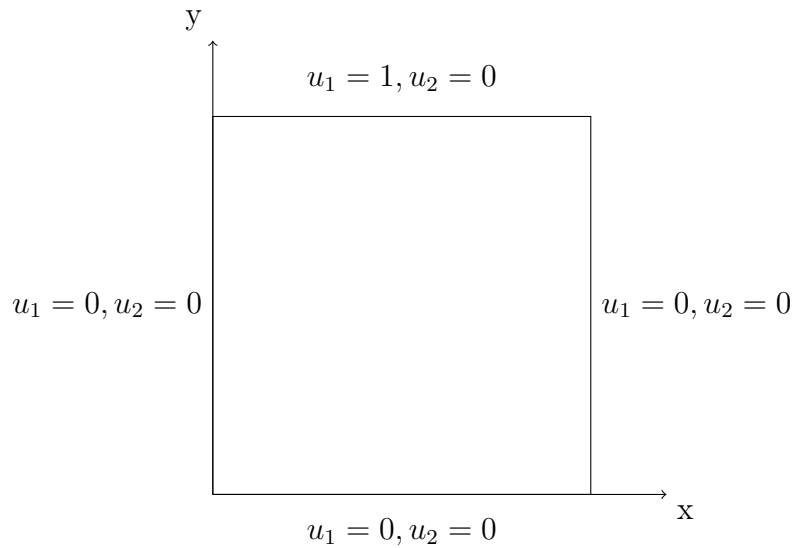


Figura 5. Condiciones de frontera para la prueba del flujo impulsado en una cavidad cuadrada

En esta prueba, se espera que el sistema evolucione hasta llegar a un estado estacionario para finalmente analizar los perfiles de velocidad.

Para realizar la implementación del MRD en este caso seguimos el siguiente procedimiento:

Estimación para ω^1 :

1. Dada la velocidad inicial u_0 , calculamos la vorticidad inicial usando la relación $\omega =$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

2. Las condiciones de frontera para ω son tomadas como los valores en la frontera de la

vorticidad inicial calculados en el paso anterior.

3. Usando (190) con u como la velocidad inicial, resolvemos para determinar ω^1 .
4. Usando (187) y (188) con ω como ω^1 , calculamos los valores de u_2 y u_1 , respectivamente, en el paso del tiempo 1.
5. De los valores obtenidos para u , calculamos ω con la relación $\vec{\omega} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \tilde{F}^{-1} \vec{u}_2 - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \tilde{F}^{-1} \vec{u}_1$, de la cual determinamos las condiciones de frontera que debe estar cumpliendo la vorticidad.
6. Conocidas ahora u en el paso de tiempo 1 y las condiciones de frontera, usamos nuevamente (190) para estimar ω^1 .
7. Repetimos el proceso iterativamente hasta cumplir que la norma de la diferencia de los vectores consecutivos calculados para ω^1 sea menor que 10^{-3}

Estimación para ω^{m+1} con $m \geq 1$:

1. Usando la velocidad en el paso m , calculamos la vorticidad de la relación $\vec{\omega} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \tilde{F}^{-1} \vec{u}_2 - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \tilde{F}^{-1} \vec{u}_1$.
2. Las condiciones de frontera para ω son tomadas como los valores en la frontera la vorticidad calculados en el paso anterior.
3. Teniendo la velocidad en el paso m , y la vorticidad en los pasos m y $m - 1$, usamos (191), con u como la velocidad en el paso m , para determinar ω^{m+1} .

4. Usando (187) y (188) calculamos los valores de u_2 y u_1 , respectivamente, en el paso del tiempo $m + 1$.

El sistema se deja evolucionar hasta que la norma de la diferencia entre vorticidades calculadas en pasos consecutivos de tiempo sean menores que 10^{-5} .

Para la prueba consideramos un paso de tiempo $\Delta t = 10^{-5}$ y mallas de 11×11 , 21×21 , 41×41 , 81×81 . Los campos de velocidades en estado estacionario obtenidos para las mallas de 11×11 y 41×41 son mostrados en las Figuras 6, 8 y 10, para valores de número de Reynolds Re de 10, 100 y 400, respectivamente.

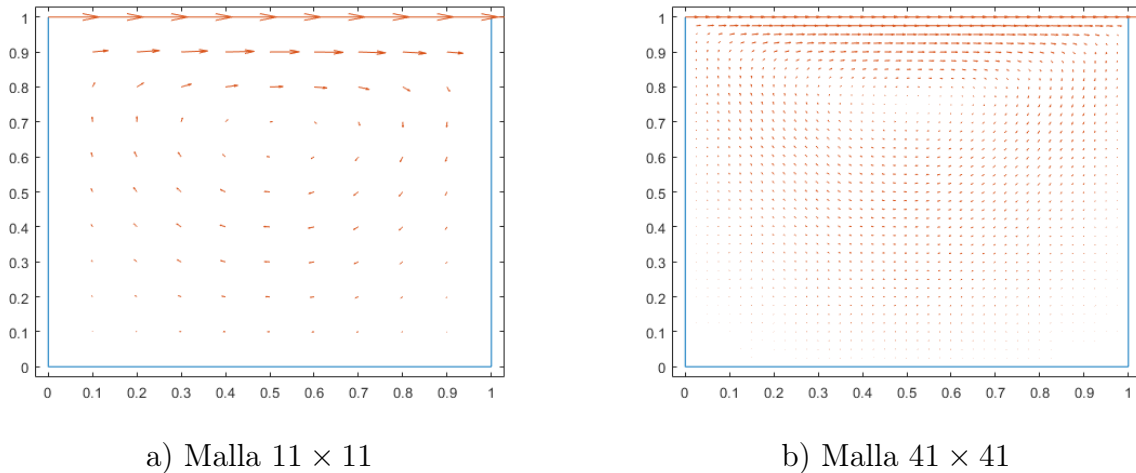


Figura 6. Flujo impulsado en una cavidad cuadrada con $Re = 10$ en diferentes mallados.

Con el objetivo de comparar los resultados obtenidos, en las Figuras 7, 9 y 11 se muestran los perfiles de la velocidad horizontal al desplazarnos sobre la recta $x = 0.5$, y los perfiles de la velocidad vertical al desplazarnos sobre la recta $y = 0.5$, para los números de Reynolds 10, 100 y 400, respectivamente. Resaltamos que los valores obtenidos para $Re = 10$ y

$Re = 100$ coinciden con lo reportado en (Eldho and Young (2004), Choi and Balaras (2009); Ghia et al. (1982); Young et al. (2000); Ghadimi and Dashtimanesh (2011)). Finalmente, el esquema planteado parece ser inestable a medida que el número de Reynolds aumenta, ejemplo de esto es que los valores obtenidos para $Re = 400$ difieren notoriamente de los reportados en (Choi and Balaras (2009); Ghia et al. (1982)).

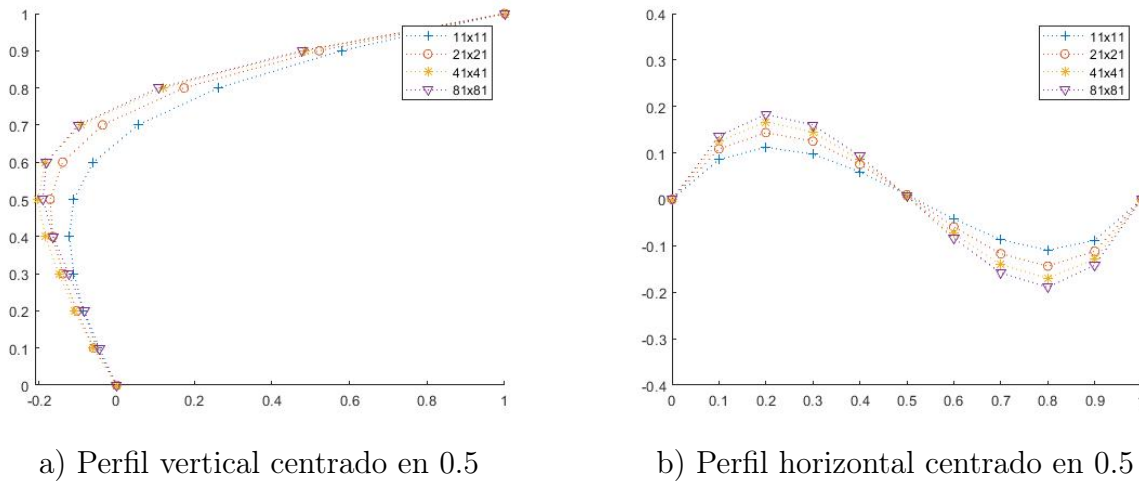
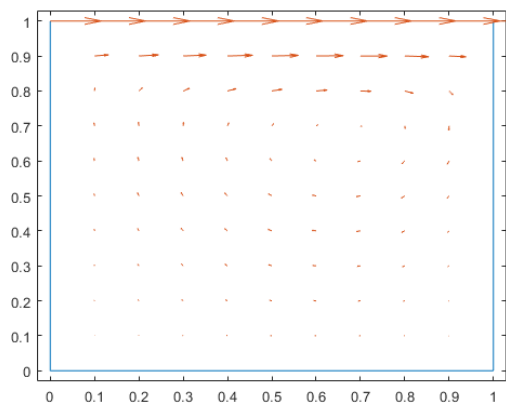
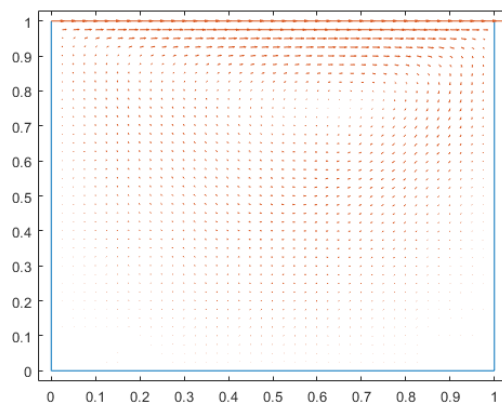


Figura 7. Perfiles horizontales y verticales para sus respectivos mallados en $Re = 10$.

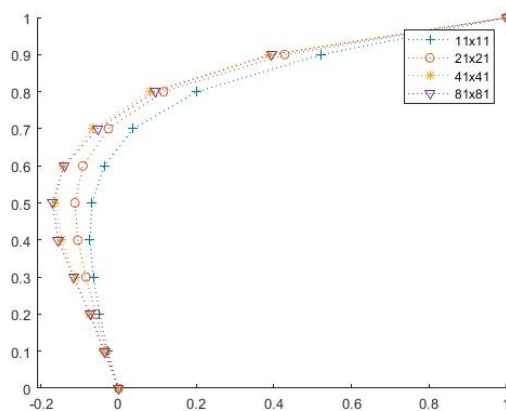


a) Malla 11×11

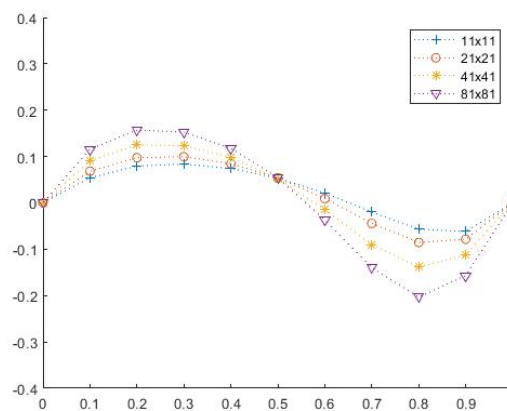


b) Malla 41×41

Figura 8. Flujo impulsado en una cavidad cuadrada con $Re = 100$ en diferentes mallados.



a) Perfil vertical centrado en 0.5



b) Perfil horizontal centrado en 0.5

Figura 9. Perfiles horizontales y verticales para sus respectivos mallados en $Re = 100$.

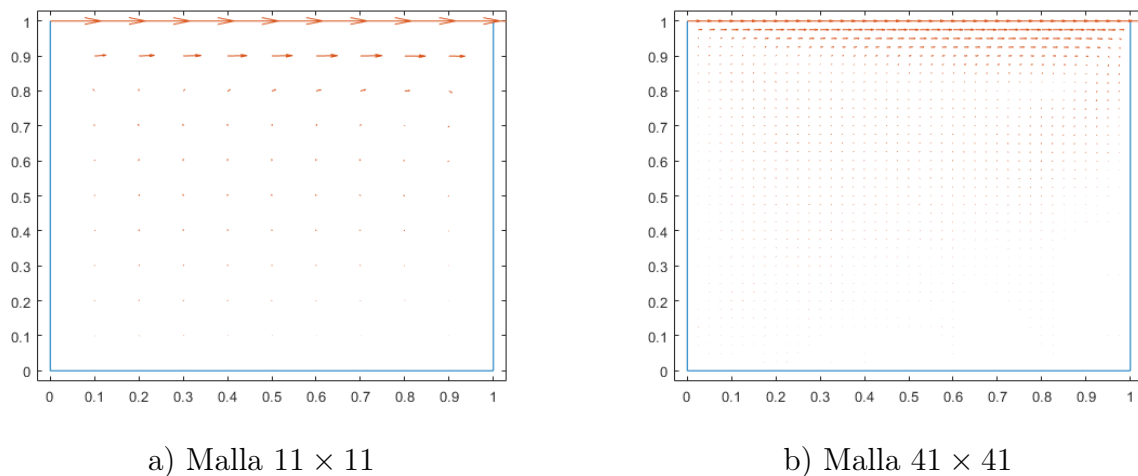


Figura 10. Flujo impulsado en una cavidad cuadrada con $Re = 400$ en diferentes mallados.

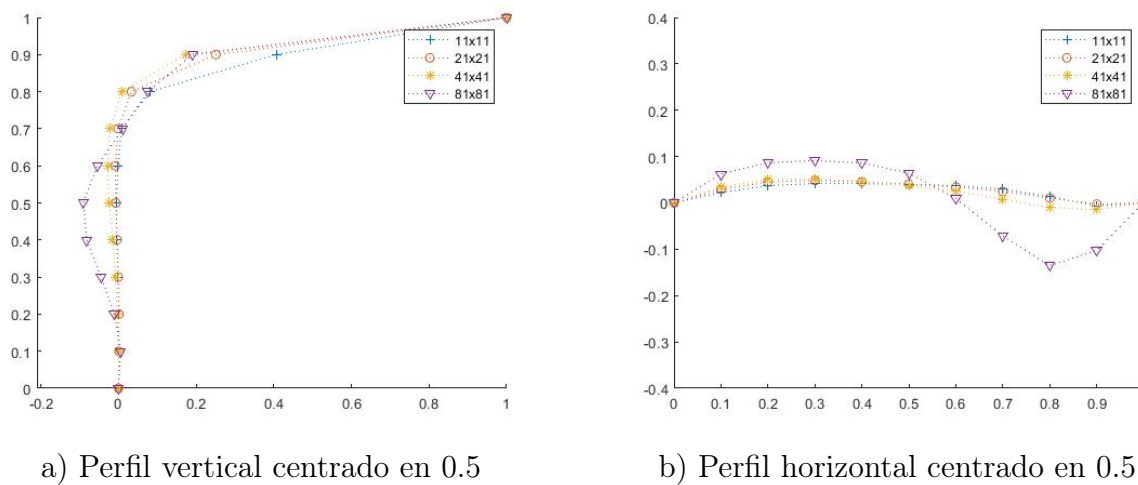


Figura 11. Perfiles horizontales y verticales para sus respectivos mallados en $Re = 400$.

2.3. Modelo de quimiotaxis

En esta sección, se aborda en detalle la implementación del método MRD en un sistema de ecuaciones con un término de difusión cruzada, como es el caso de la quimiotaxis, acopladas a las ecuaciones de Navier-Stokes. Consideramos entonces el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla n = D_n \Delta n - \chi \nabla \cdot (n \nabla c), \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = D_c \Delta c - \gamma n c, \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = D_{\mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} - \nabla \pi + n \nabla \phi, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{array} \right. \quad (192)$$

El sistema (192) fue considerado en Duarte-Rodríguez et al. (2021) y estudiado tanto teórica como numéricamente. La aproximación numérica fue realizada usando un esquema mixto en que se usan elementos finitos para la discretización espacial y diferencias finitas para la aproximación temporal. Dicho trabajo numérico forma una base para comparar y verificar los resultados obtenidos usando el MRD.

En lo que sigue presentamos la discretización del sistema (192).

2.3.0.1. Discretización para n . Al considerar la primera ecuación en (192)

y aplicar la estrategia general del MRD se tiene que

$$\begin{aligned}
 D_n H \vec{n} &= S \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} + S \left([\vec{u}_1]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \tilde{F}^{-1} + [\vec{u}_2]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \tilde{F}^{-1} \right) \vec{n} \\
 &\quad + \chi S \left(\left[\frac{\partial \vec{c}}{\partial x} \right]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \tilde{F}^{-1} + \left[\frac{\partial \vec{c}}{\partial y} \right]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \tilde{F}^{-1} + [\Delta \vec{c}]^d \right) \vec{n} \\
 &= S \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} + C_n \vec{n}.
 \end{aligned} \tag{193}$$

Para el primer paso del tiempo usamos la aproximación temporal $\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = \frac{\vec{n}^1 - \vec{n}^0}{\Delta t}$ para obtener

$$(\Delta t D_n H - S - \Delta t C_n) \vec{n}^1 = -S \vec{n}^0. \tag{194}$$

Y para los siguientes pasos la aproximación temporal es dada por $\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = \frac{3\vec{n}^{m+1} - 4\vec{n}^m + \vec{n}^{m-1}}{2\Delta t}$,

con lo que se llega a

$$(2\Delta t D_n H - 3S - 2\Delta t C_n) \vec{n}^{m+1} = -4S \vec{n}^m + S \vec{n}^{m-1}.$$

En cualquier caso, la ecuación puede ser escrita de la forma

$$A_n \vec{n}^{m+1} = \vec{d}_n^m.$$

Así

$$\vec{n}^{m+1} = A_n^{-1} \cdot \vec{d}_n^m. \quad (195)$$

2.3.0.2. Discretización para c y Δc . Considerando la ecuación para c en (192) y aplicando la estrategia del MRD se obtiene

$$\begin{aligned} D_c H \vec{c} &= S \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + S \left([\vec{u}_1]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \tilde{F}^{-1} + [\vec{u}_2]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \tilde{F}^{-1} + \gamma [\vec{n}]^d \right) \vec{c} \\ &= S \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + C_c \vec{c}. \end{aligned} \quad (196)$$

Así, para el primer paso de tiempo se tiene el sistema

$$(\Delta t D_c H - S - \Delta t C_c) \vec{c}^1 = -S \vec{c}^0, \quad (197)$$

y para los siguientes pasos se tiene

$$(2\Delta t D_c H - 3S - 2\Delta t C_c) \vec{c}^{m+1} = -4S \vec{c}^m + S \vec{c}^{m-1}.$$

En cualquier caso, la ecuación se reescribe de la forma

$$A_c \vec{c}^{m+1} = \vec{d}_c^m,$$

de lo que sigue que

$$\vec{c}^{m+1} = A_c^{-1} \cdot \vec{d}_c^m.$$

Una vez conocido el vector \vec{c} , es necesario aproximar $\Delta\vec{c}$ con el objetivo de usarlo en el cálculo de \vec{n} en (193). En este esquema de aproximación el laplaciano $\Delta\vec{c}$ es calculado usando la relación (181), con lo que, usando las condiciones de frontera para c , se tiene

$$\Delta\vec{c} = S^{-1} \cdot (H\vec{c}). \quad (198)$$

2.3.0.3. Discretización para \mathbf{u} . En el término de flotación será tomada la función ϕ de la forma $\phi(x, y) = -gy$ con lo que $\nabla\phi = -g\hat{\mathbf{j}}$. Con esto la ecuación para \mathbf{u} se reduce a

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla\pi + gn\hat{\mathbf{j}} = D_{\mathbf{u}}\Delta\mathbf{u},$$

y en la formulación velocidad-vorticidad se tiene

$$D_{\mathbf{u}}\Delta\omega = \rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega \right) + g\frac{\partial n}{\partial x},$$

de lo que la discretización resultante al usar el MRD es

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}}H\vec{\omega} - D_{\mathbf{u}}G\vec{q}_{\omega} &= \rho S \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \rho S \left([\vec{u}_1]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \tilde{F}^{-1} + [\vec{u}_2]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \tilde{F}^{-1} \right) \vec{\omega} + gS \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} \\
&= \rho S \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + C_{\omega} \vec{\omega} + gS \frac{\partial \vec{n}}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Procediendo como antes, la aproximación para el primer paso del tiempo es dada por

$$(\Delta t D_{\mathbf{u}}H - \rho S - \Delta t C_{\omega}) \vec{\omega}^1 - \Delta t D_{\mathbf{u}}G\vec{q}_{\omega}^1 = -\rho S \vec{\omega}^0 + \Delta t gS \frac{\partial \vec{n}}{\partial x}, \quad (199)$$

y para los demás pasos es dada por

$$(2\Delta t D_{\mathbf{u}}H - 3\rho S - 2\Delta t C_{\omega}) \vec{\omega}^{m+1} - 2\Delta t D_{\mathbf{u}}G\vec{q}_{\omega}^{m+1} = -4\rho S \vec{\omega}^m + S\rho \vec{\omega}^{m-1} + 2\Delta t gS \frac{\partial \vec{n}}{\partial x}.$$

Al aplicar las condiciones de frontera, se reorganiza el sistema (véase p. 90), obteniendo los valores de $\vec{\omega}$ en todos los nodos desconocidos.

Una vez conocido $\vec{\omega}$, los vectores \vec{u}_1 y \vec{u}_2 son calculados como en la Sección 2.2.

2.3.1. Implementación Numérica. Con el objetivo de validar nuestro esquema planteamos un experimento numérico usando los mismos datos usados en las simulaciones presentadas en Duarte-Rodríguez et al. (2021), a saber, consideramos las condiciones iniciales

$$n_0 = \sum_{i=1}^3 (70 \exp(-8(x - s_i)^2 - 10(y - 1)^2)),$$

$$c_0 = 30 \exp(-5(x - 1)^2 - 5(y - 0.5)^2),$$

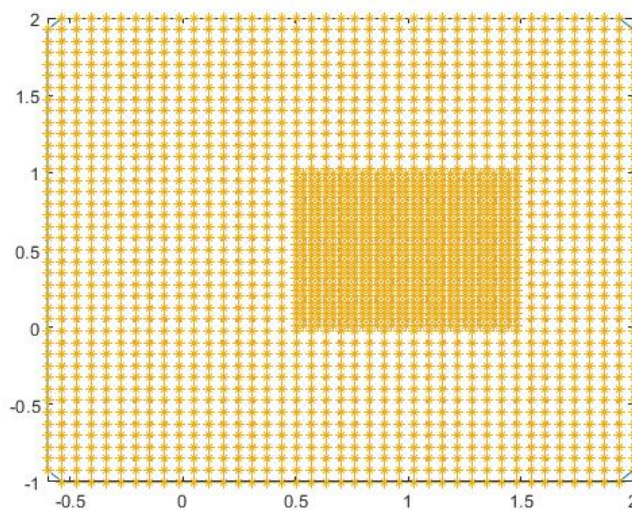
$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{0},$$

donde $s_1 = 0.2$, $s_2 = 0.5$ y $s_3 = 1.2$. Además, consideramos los parámetros $\Delta t = 10^{-5}$, $\chi = 8$, $D_n = 4$, $\gamma = 6$, $D_u = 10$, $D_c = \rho = 1$ y $\phi(x, y) = -1000y$.

Aunque el dominio originalmente considerado en Duarte-Rodríguez et al. (2021) es el rectángulo $\Omega = (0, 2) \times (0, 1)$, en nuestro caso consideramos el dominio $\Omega = (-0.6, 2) \times (-1, 2)$ con el objetivo de que las condiciones de frontera sean verificadas de mejor forma por los datos iniciales considerados. Por otro lado, para lograr un mejor comportamiento de las soluciones aproximadas, el mallado usado no se define de forma regular, a saber, usamos un mallado de 40×40 sobre todo Ω , pero refinado en el sub-rectángulo $[0.5, 1.5] \times [0, 1]$, además los puntos en las esquinas de Ω fueron retirados, como se muestra en la Figura 12.

Para realizar la implementación del MRD en este caso seguimos el siguiente procedimiento:

1. Inicialmente calculamos ω^1 usando el sistema (199) y siguiendo el mismo procedimiento iterativo presentado en la Subsección 2.2.1, tomando n como n_0 . Al final de este proceso también conocemos u_1^1 y u_2^1 .
2. Conocido el dato inicial c_0 calculamos su laplaciano usando la relación (198).
3. Con los datos conocidos o recién calculados, usamos el sistema (194) para calcular n^1 .



a) Malla del problema

Figura 12. Mallado no uniforme del problema.

4. Con los datos conocidos o recién calculados calculamos c^1 resolviendo el sistema (197).
Con el vector recién calculado para c calculamos su laplaciano usando la relación (198).
5. Conocidos ahora todas las incógnitas en el paso de tiempo 1, usamos las fórmulas para los pasos de tiempo mayores o iguales que 2 y resolvemos siguiendo el mismo orden antes planteado.

Los resultados obtenidos del experimento numérico son presentados en las Figuras 13, 14 y 15, para el campo de velocidades, la densidad de células y la concentración de químico, respectivamente. Se observa el comportamiento esperado por el sistema y se obtiene una distribución espacio-temporal similar a la ya obtenida en Duarte-Rodríguez et al. (2021).

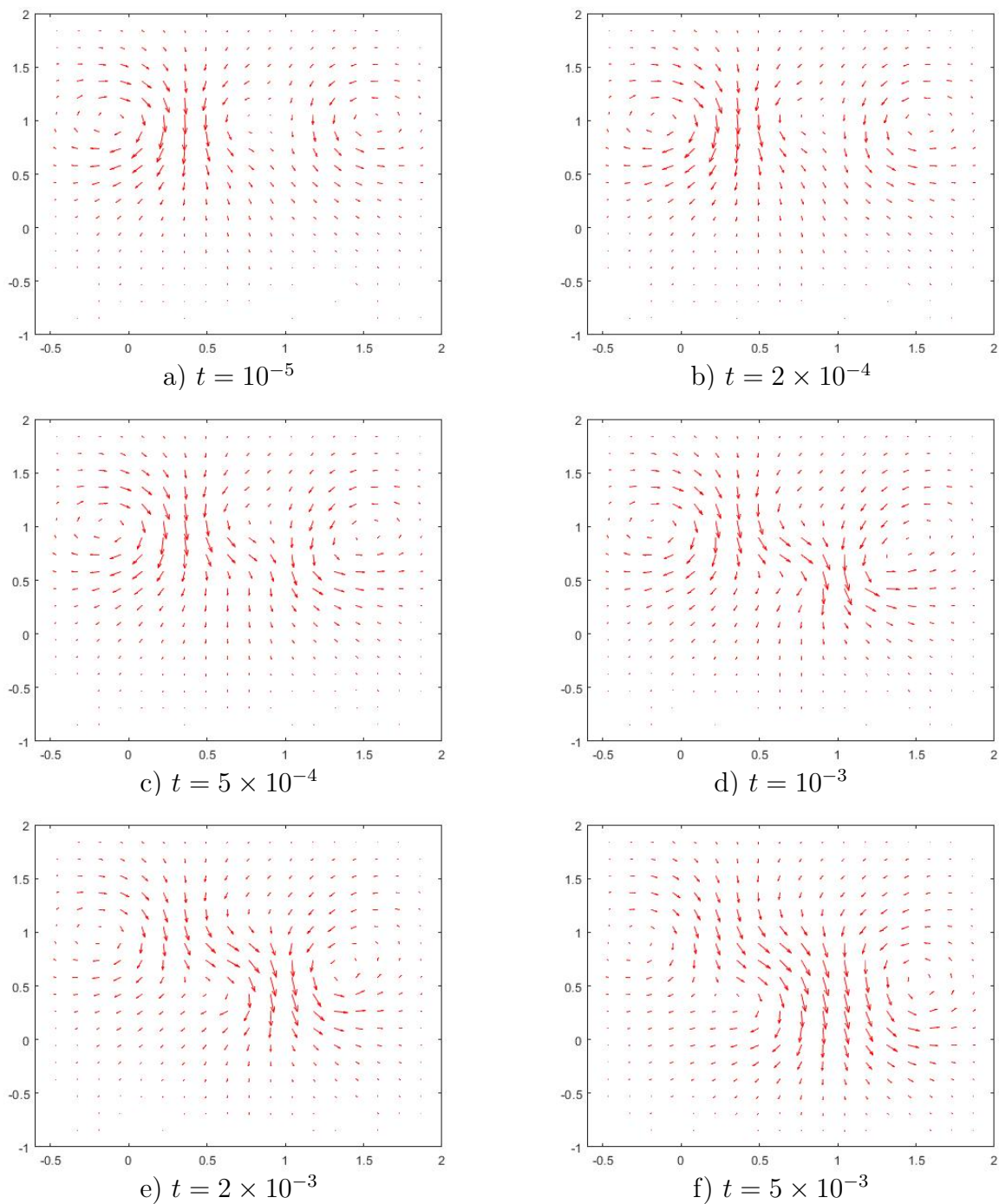


Figura 13. Evolución del campo de velocidades del fluido.

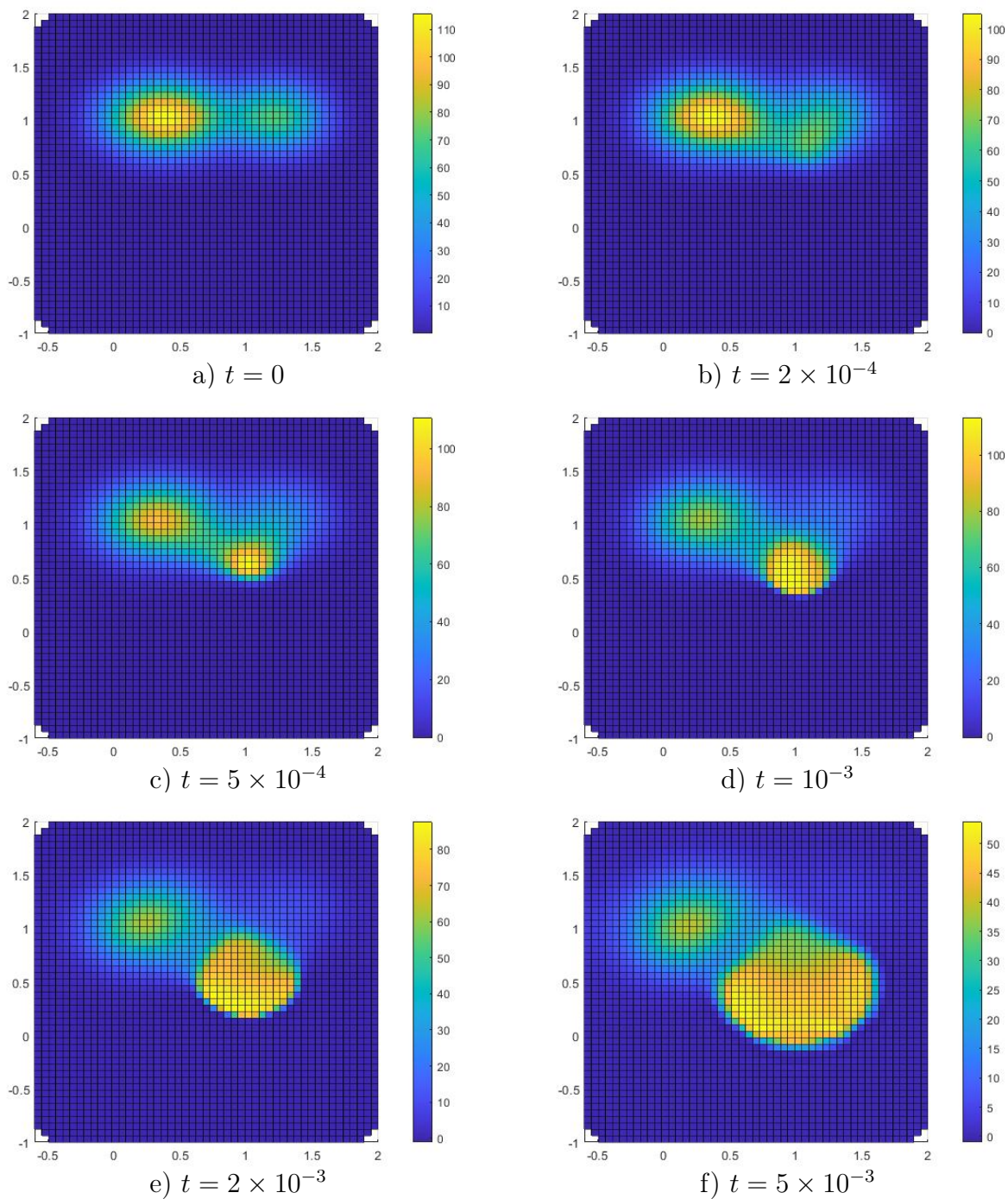


Figura 14. Evolución de la densidad celular.

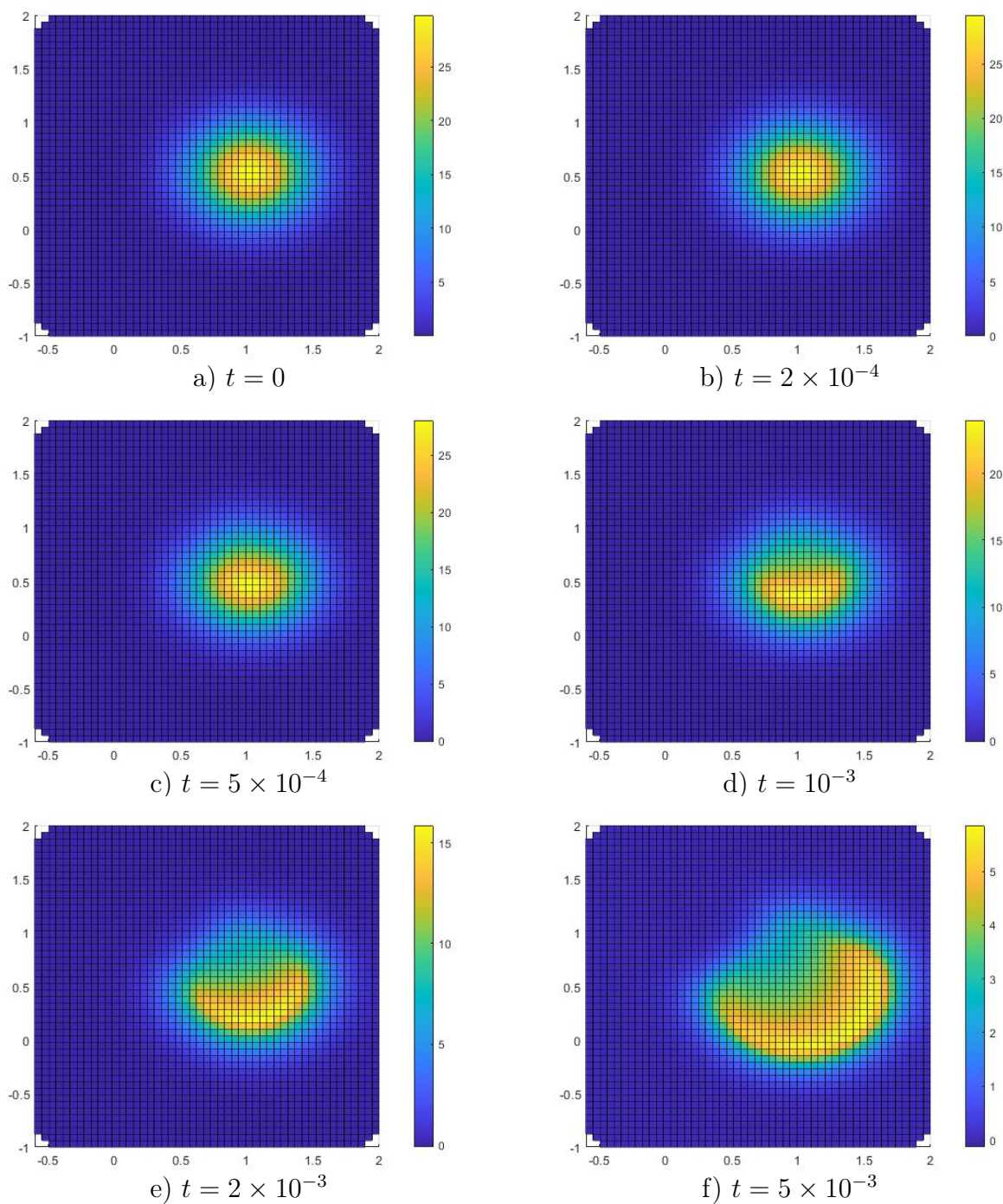


Figura 15. Evolución de la concentración del químico.

2.4. Quimiotaxis doble en fluidos

Finalmente, con el objetivo de generalizar los resultados anteriores, consideramos la aplicación del MRD para un modelo de quimiotaxis doble en fluidos. Más específicamente, consideramos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla n = D_n \Delta n - \chi_c \nabla \cdot (n \nabla c) + \chi_v \nabla \cdot (n \nabla v), \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = D_c \Delta c - \gamma n c, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v = D_v v + \lambda n - \mu v \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = D_u \Delta \mathbf{u} - \nabla \pi + n \nabla \phi, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{array} \right. \quad (200)$$

2.4.0.1. Discretización para n . Al considerar la primera ecuación en (200)

y aplicar la estrategia general del MRD se tiene que

$$\begin{aligned} D_n H \vec{n} &= S \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} + S \left([\vec{u}_1]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \tilde{F}^{-1} + [\vec{u}_2]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \tilde{F}^{-1} \right) \vec{n} \\ &\quad + \chi_c S \left(\left[\frac{\partial \vec{c}}{\partial x} \right]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \tilde{F}^{-1} + \left[\frac{\partial \vec{c}}{\partial y} \right]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \tilde{F}^{-1} + [\Delta \vec{c}]^d \right) \vec{n} \\ &\quad - \chi_v S \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \tilde{F}^{-1} + \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \tilde{F}^{-1} + [\Delta \vec{v}]^d \right) \vec{n} \\ &= S \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} + C_n \vec{n}. \end{aligned} \quad (201)$$

De donde identificamos que la única diferencia con el caso de la sección anterior, es que en esta formulación la matriz C_n ha cambiado para incluir el efecto del químico v . Por lo tanto, las discretizaciones para el primer paso, y para los pasos posteriores son como las presentadas en la sección anterior.

2.4.0.2. Discretización para v y Δv . Considerando la ecuación para v en (200) y aplicando la estrategia del MRD se obtiene

$$\begin{aligned} D_v H \vec{v} &= S \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + S \left([\vec{u}_1]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \tilde{F}^{-1} + [\vec{u}_2]^d \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \tilde{F}^{-1} + \mu Id \right) \vec{v} - \lambda S \vec{n} \\ &= S \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + C_v \vec{v} - \lambda S \vec{n}. \end{aligned} \quad (202)$$

Así, para el primer paso de tiempo se tiene el sistema

$$(\Delta t D_v H - S - \Delta t C_v) \vec{v}^1 = -S \vec{v}^0 - \Delta t \lambda S \vec{n}, \quad (203)$$

y para los siguientes pasos se tiene

$$(2\Delta t D_v H - 3S - 2\Delta t C_v) \vec{v}^{m+1} = -4S \vec{v}^m + S \vec{v}^{m-1} - \Delta t \lambda S \vec{n}.$$

En cualquier caso la ecuación se reescribe de la forma

$$A_v \vec{v}^{m+1} = \vec{d}_{cn}^m,$$

de lo que sigue que

$$\vec{v}^{m+1} = A_v^{-1} \cdot \vec{d}_{cn}^m.$$

Una vez conocido el vector \vec{v} , estimamos $\Delta\vec{v}$ usando la relación (181), con lo que, usando las condiciones de frontera para v , se tiene

$$\Delta\vec{v} = S^{-1} \cdot (H\vec{v}). \quad (204)$$

Las discretizaciones para las variables \mathbf{u} y c siguen siendo las mismas que en la sección anterior, ya que en las ecuaciones para estas variables no aparece explícitamente la relación con el químico adicional v .

2.4.1. Implementación numérica. Planteamos ahora un experimento numérico que le da continuidad a la implementación numérica de la Sección 2.3, por lo que usamos los mismos datos usados anteriormente, junto con los nuevos datos relacionados con la variable v , específicamente tenemos los datos iniciales dados por:

$$n_0 = \sum_{i=1}^3 (70 \exp(-8(x - s_i)^2 - 10(y - 1)^2)),$$

$$c_0 = 30 \exp(-5(x - 1)^2 - 5(y - 0.5)^2),$$

$$v_0 = 20y \exp(-6(x - 0.5)^2 - 5(y)^2),$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{0},$$

donde $s_1 = 0.2$, $s_2 = 0.5$ y $s_3 = 1.2$. Además, consideramos los parámetros $\Delta t = 10^{-5}$, $\chi_c = 8$, $D_n = 4$, $\gamma = 6$, $D_u = 10$, $D_c = \rho = 1$, $D_v = 2$, $\chi_v = 3$, $\lambda = 30$, $\mu = 1$ y $\phi(x, y) = -1000y$.

La malla utilizada para el sistema es la misma usada en la sección anterior, esto es, la presentada en la Figura 12.

El procedimiento es similar al usado en la sección anterior, con el paso adicional de determinar el vector v después de tener calculado el vector n .

Los resultados obtenidos son mostrados en las Figuras 16, 17, 18 y 19 para el campo de velocidades, la densidad celular, la concentración del químico c y la concentración del químico v , respectivamente.

Adicional a lo visto previamente, recordando la primera ecuación de (200) la cual es:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla n = D_n \Delta n - \chi_1 \nabla \cdot (n \nabla c) + \chi_2 \nabla \cdot (n \nabla v)$$

se tiene que es una ecuación conservativa para la densidad celular. Aunque el MRD carece de fundamentos para garantizar la conservación de la masa de la variable n , evidenciamos que con mallados más refinados, como se tiene en la Tabla 1, el porcentaje de pérdida disminuye.

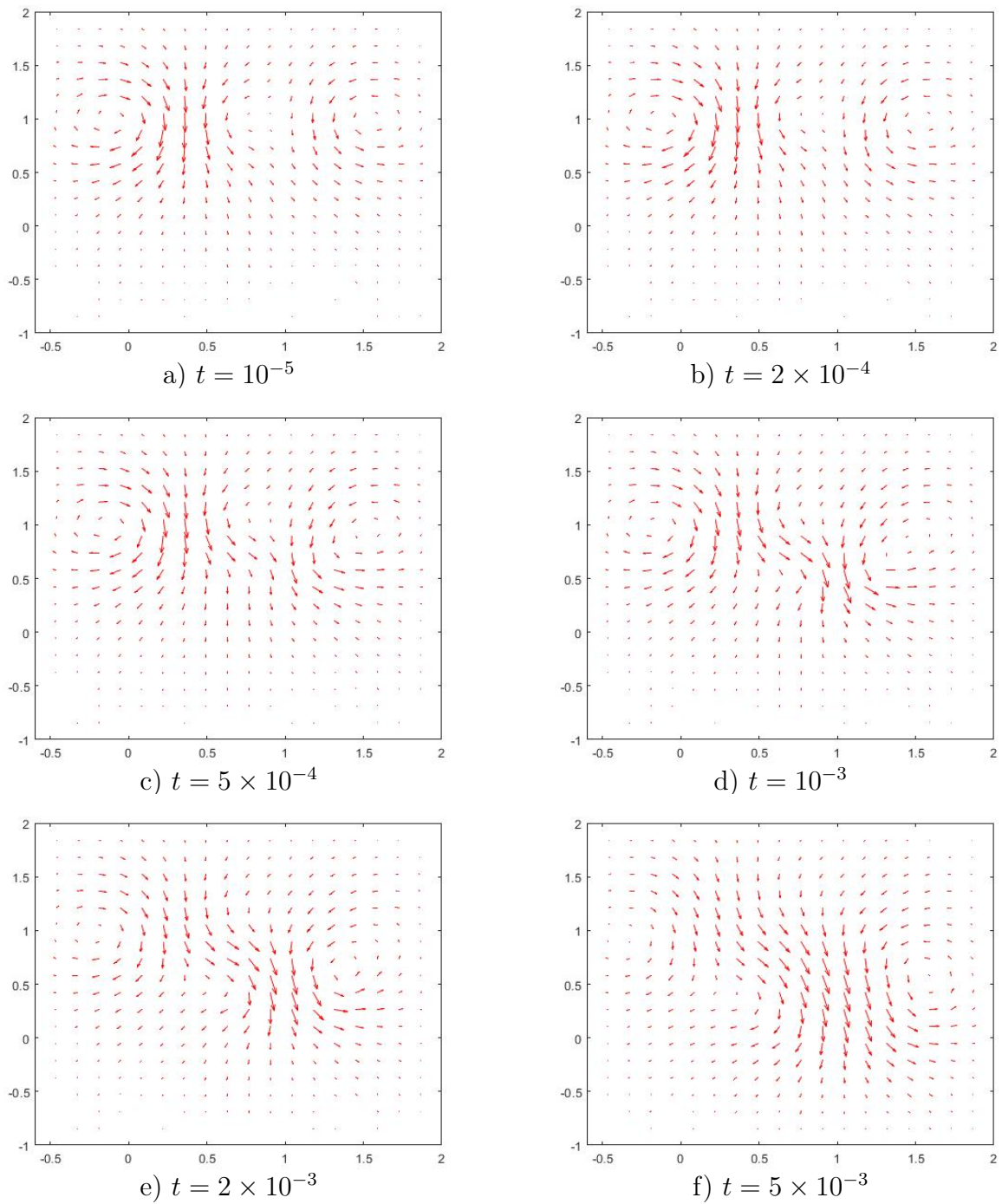


Figura 16. Evolución del campo de velocidades del fluido.

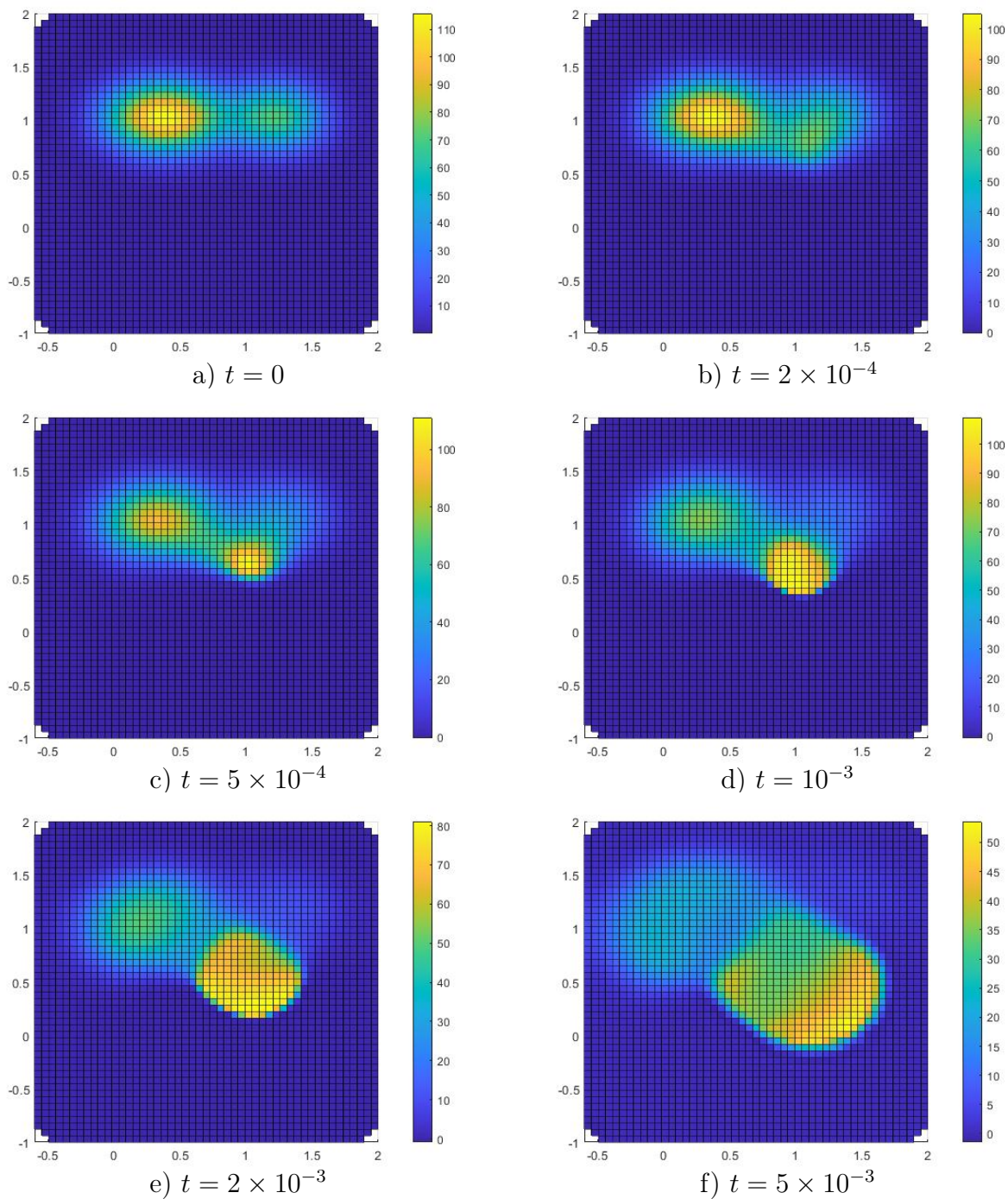


Figura 17. Evolución de la densidad celular.

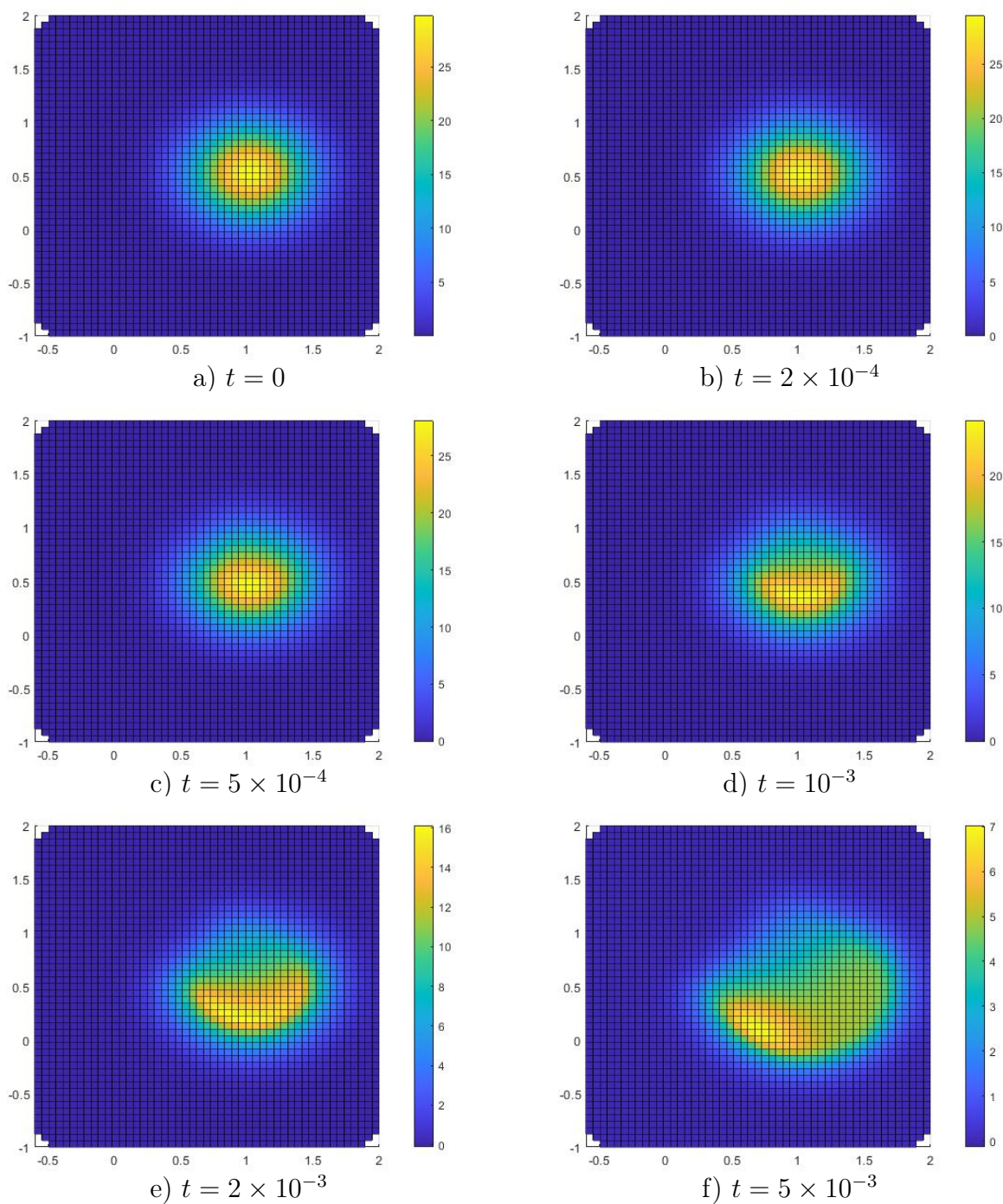


Figura 18. Evolución de la concentración del químico atractor.

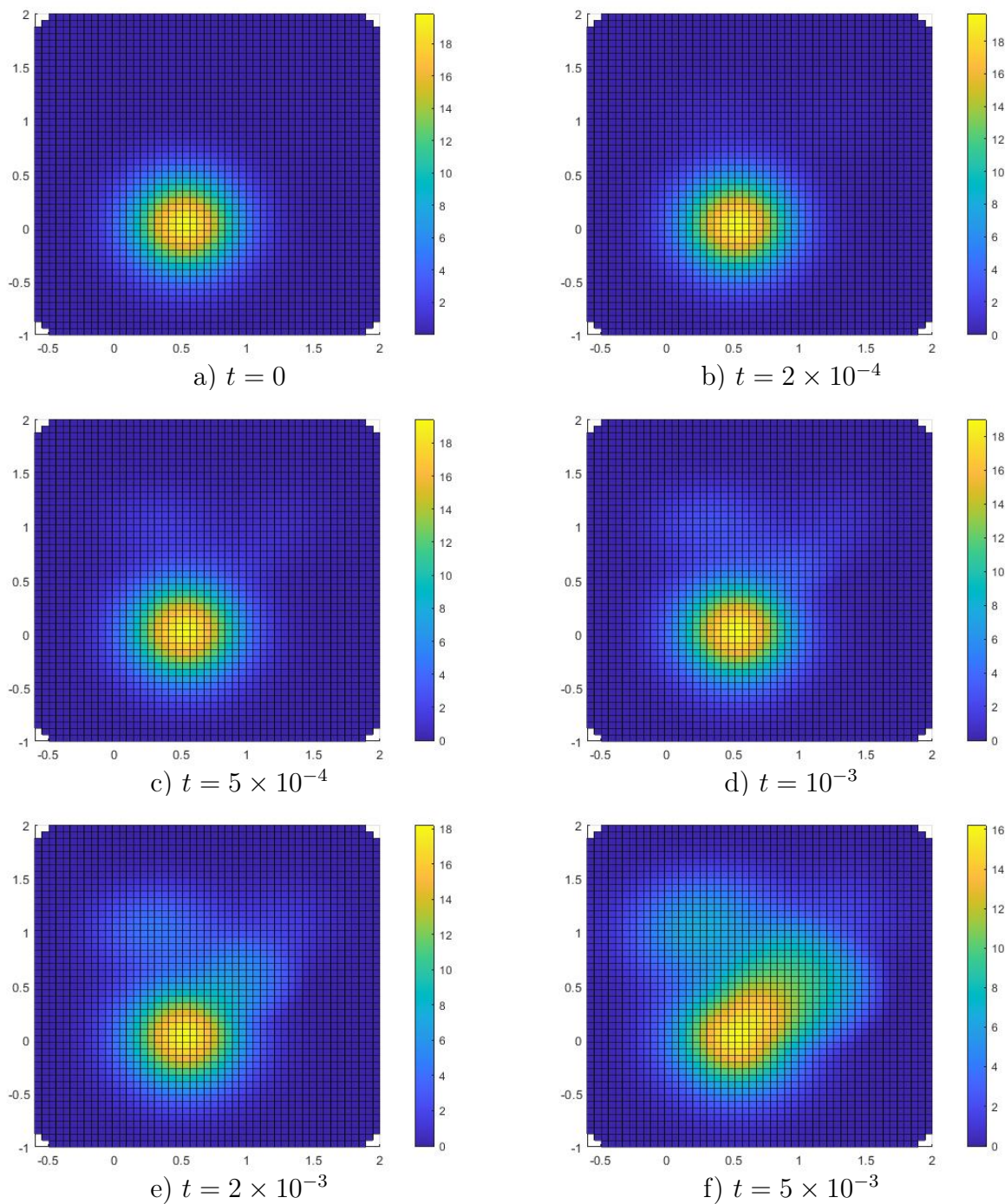


Figura 19. Evolución de la concentración del químico repelente.

$k \times k$	Área=73.7263	% Perdido
10×10	64.5126	12.5 %
20×20	68.8652	6.6 %
30×30	69.2987	6 %
40×40	70.1128	4.9%
50×50	70.7224	4.07 %

Tabla 1

Conservación de la masa para n y sus porcentajes de pérdida para diferentes tipos de mallados uniformes.

3. Conclusiones

- Se realizó un estudio teórico y numérico de un modelo de quimiotaxis-Navier-Stokes considerando dos señales químicas.
- Se probó la existencia y unicidad de solución blanda en espacios críticos de Besov-Herz débiles; además se verificó la auto-similaridad y el comportamiento asintótico de las soluciones.
- Se presentan nuevas estimaciones producto en el contexto de los espacios de Besov-Herz débiles, así como estimativas para los términos lineales y bilineales presentes en las ecuaciones.
- Se implementó el método de reciprocidad dual para las ecuaciones de Navier-Stokes, y quimiotaxis-Navier-Stokes; para la primera se verifica la validez del esquema realizando la llamada prueba del *Flujo impulsado en una cavidad cuadrada* y comparando con resultados reportados en la literatura, para la segunda se comparan los resultados con

los obtenidos en trabajos anteriores usando el método de elementos finitos al usar el mismo conjunto de datos iniciales y parámetros del sistema.

- Numéricamente se pudo observar que el MRD trae complicaciones cuando no se respeta las condiciones de frontera, dado que es netamente un modelo de frontera. Además, evidenciamos que se debe tener cuidado con el tratamiento que se hace en las esquinas al trabajar con dominios no suaves.
- El MRD permite de manera sencilla el uso de mallas no uniformes sin necesidad de adaptaciones a los esquemas ya planteados.

Referencias Bibliográficas

- Azevedo, J., Bezerra, M., Cuevas, C., and Soto, H. (2022). Well-posedness and asymptotic behavior for the fractional Keller–Segel system in critical Besov–Herz-type spaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, page 1–20.
- Bergh, J. and Löfström, J. (1976). *Interpolation Spaces*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- Biler, P. (1998). Local and global solvability of some parabolic systems modelling chemotaxis. *Adv. Math. Sci. Appl*, 8:715–743.
- Blanchet, A., Dolbeault, J., and Perthame, B. (2006). Two-dimensional Keller–Segel model: optimal critical mass and qualitative properties of the solutions. *Electron. J. Differential Equation*, 44:1–32.
- Bony, J.-M. (1981). Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. Sci. École Normale*, 14:209–246.
- Brebbia, C. A. and Wrobel, L. C. (1986). Boundary element techniques. *Journal of Mechanical Working Technology*, 13:110–111.
- Calvez, V. and Corrias, L. (2008). The parabolic-parabolic Keller–Segel model in \mathbb{R}^2 . *Commun. Math. Sci*, 6:417–447.

- Choe, H. J. and Lkhagvasuren, B. (2017). Global existence result for chemotaxis Navier-Stokes equations in the critical Besov spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 446(2):1415–1426.
- Choi, C.-Y. and Balaras, E. (2009). A dual reciprocity boundary element formulation using the fractional step method for the incompressible Navier–Stokes equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(6):741–749.
- Corrias, L. and Perthame, B. (2006). Critical space for the parabolic-parabolic Keller–Segel model in \mathbb{R}^d . *Comptes Rendus Mathématique*, 342(10):745–750.
- Dolbeault, J. and Perthame, B. (2004). Optimal critical mass in the two-dimensional Keller–Segel model in \mathbb{R}^2 . *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 339(9):611–616.
- Duarte-Rodríguez, A., Rodríguez-Bellido, M. Á., Rueda-Gómez, D. A., and Villamizar-Roa, É. J. (2021). Numerical analysis for a chemotaxis-Navier-Stokes system. 55:417.
- Duarte-Rodríguez, A., Ferreira, L. C. F., and Villamizar-Roa, É. J. (2020). Global existence for an attraction–repulsion chemotaxis-fluid system in a framework of Besov–Morrey type. *J. Math. Fluid Mech.*, 22(63).
- Eldho, T. and Young, D. (2004). Two dimensional incompressible viscous flow simulation using velocity-vorticity dual reciprocity boundary element method. *Journal of Mechanics*, 20(3):177–185.
- Evans, L. C. (2010). *Partial Differential Equations*, volume 19. American Mathematical Society Providence, Rhode Island.

- Ferreira, L. C. F. and Postigo, M. (2019). Global well-posedness and asymptotic behavior in Besov-Morrey spaces for chemotaxis-Navier-Stokes fluids. *Journal of Mathematical Physics*, 60.
- Ferreira, L. C. F. and Precioso, J. C. (2011). Existence and asymptotic behaviour for the parabolic-parabolic Keller–Segel system with singular data. *Nonlinearity*, 24(5):1433–1449.
- Ferreira, L. C. F. and Pérez-López, J. E. (2018). Besov-weak-weak-Herz spaces and global solutions for Navier-Stokes equations. *Pacific J Math*, 296:57–77.
- Ghadimi, P. and Dashtimanesh, A. (2011). Solution of 2d Navier–Stokes equation by coupled finite difference-dual reciprocity boundary element method. *Applied Mathematical Modelling*, 35:2110–2121.
- Ghia, U., Ghia, K. N., and Shin, C. T. (1982). High-re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48:387–411.
- Hernández, E. and Yang, D. (1999). Interpolation of Herz spaces and applications. *Math. Nachr.*, 205(1):69–87.
- Jaswon, M. A. (1963). Integral equation methods in potential theory. i. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 275(1360):23–32.

- Kato, T. (1992). Strong solutions of the Navier-Stokes equation in Morrey spaces. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 22(2):127–155.
- Keller, E. F. (1980). Assessing the Keller–Segel model: how has it fared. *In Biological growth and spread, Springer*, 38:379–387.
- Keller, E. F. and Segel, L. A. (1970). Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. *Journal of Theoretical Biology*, 26(3):399–415.
- Keller, E. F. and Segel, L. A. (1971). Model for chemotaxis. *Journal of theoretical biology*, 30(2):225–234.
- Kozono, H., Miura, M., and Sugiyama, Y. (2016). Existence and uniqueness theorem on mild solutions to the Keller–Segel system coupled with the Navier-Stokes fluid. *J. Funct. Anal*, 270(5):1663–1683.
- Kozono, H. and Sugiyama, Y. (2008). The Keller–Segel system of parabolic-parabolic type with initial data in weak $l^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ and its application to self-similar solutions. *Indiana Univ. Math. J.*, 57(4):1467–1500.
- Kozono, H. and Sugiyama, Y. (2009). Global strong solution to the semi-linear keller-segel system of parabolic-parabolic type with small data in scale invariant spaces. *J. Differential Equations*, 247(1):1–32.
- Kozono, H. and Yamazaki, M. (1994). Semilinear heat equations and the Navier–Stokes

equation with distributions in new function spaces as initial data. *Comm. Partial Differential Equations*, 19,(5-6):959–1014.

Lemarié-Rieusset, P. G. (2002). *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, volume 431. CRC Press.

Lorz, A. (2012). A coupled Keller–Segel–stokes model: global existence for small initial data and blow-up delay. *Commun. Math. Sci*, 10(2):555–574.

Meral, G. (2019). Drbem-fdm solution of a chemotaxis–haptotaxis model for cancer invasion. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 354:299–309.

Nagai, T., Senba, T., and Yoshida, K. (1997). Application of the trudingier-moser inequality to a parabolic system of chemotaxis. *Funkcial. Ekvac*, 40:411–433.

Nardini, D. and Brebbia, C. A. (1983). A new approach to free vibration analysis using boundary elements. 7:157–162.

Natalini, B. and Popov, V. (2006). Tests of radial basis functions in the 3d drm-md. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 22(1):13–22.

Partridge, P. W., Brebbia, C., and Wrobel, L. (1991). *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, volume 1. Springer Link.

Sariaydin, A. and Tezer-Sezgin, M. (2012). Drbem solution for unsteady natural convec-

- tion flow in primitive variables with fractional step time advancement. *AIP Conference Proceedings*, 1493(1):871–877.
- Symm, G. T. (1963). Integral equation methods in potential theory. ii. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 275(1360):33–46.
- Tsutsui, Y. (2011). The Navier–Stokes equations and weak Herz spaces. *Adv. Differ. Equ.*, 16 (11-12):1049–1085.
- Tuval, I., Cisneros, L., Dombrowski, C., Wolgemuth, C. W., Kessler, J. O., and Goldstein, R. E. (2005). Bacterial swimming and oxygen transport near contact lines. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 102(7):2277–2282.
- Wakabayashi, F. (2018). The Keller–Segel system of parabolic-parabolic type in morrey space. *J. Differential Equations*, 265(9):4661–4686.
- Young, D. L., Yang, S. K., and Eldho, T. I. (2000). Solution of the Navier–Stokes equations in velocity–vorticity form using a eulerian–lagrangian boundary element method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 34:627–650.
- Zhai, Z. (2010). Global well-posedness for nonlocal fractional Keller–Segel systems in critical Besov spaces. *Nonlinear Anal.*, 72(6):3173–3189.
- Zhang, Q. (2014). Local well-posedness for the chemotaxis-Navier–Stokes equations in Besov spaces. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 17:89–100.

Zhao, J. and Zhou, J. (2018). Temporal decay in negative Besov spaces for the 3d coupled chemotaxis-fluid equations. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 42:160–179.

Anexo

En este anexo presentamos la demostración de todas las estimaciones producto usadas en este trabajo. Todas las estimaciones son establecidas de forma independiente y de la forma más general posible de tal forma que puedan ser usadas para referencias futuras. Aunque la idea general de todas las estimaciones es similar, cada una de ellas tiene detalles particulares que deben ser analizados, por lo que no es posible establecer una sola estimativa producto general. Hacemos énfasis que la imposibilidad de tomar los índices 1 o ∞ en la estimación (19) nos obliga a usar un conjunto de índices auxiliares en las demostraciones de estas estimativas.

Lema 3.1. Sean $N \geq 2$, $1 < q \leq r < \infty$, $\rho_1 \geq 0$ y $\rho_2 \in [0, 1)$ tales que $2 + \frac{N}{r} - \frac{N}{q} - \rho_1 > 0$, y supongamos que $3 - N - (\rho_1 + \rho_2) < 0$ si $r \leq q'$ o $3 - \frac{N}{q} - \frac{N}{r} - (\rho_1 + \rho_2) < 0$ si $q' < r$. Entonces, para $n \in \dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}$ y $c \in \dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}$, tenemos que $n\nabla c \in \dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-3+\frac{N}{q}+\rho_1+\rho_2}$ y tenemos la estimación del producto

$$\|n\nabla c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-3+\frac{N}{q}+\rho_1+\rho_2}} \leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}}. \quad (205)$$

Demostración. De la descomposición de Bony (14), obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta_j(n\nabla c) &= \sum_{|k-j|\leq 4} \Delta_j(S_{k-2}n\Delta_k\nabla c) + \sum_{|k-j|\leq 4} \Delta_j(S_{k-2}\nabla c\Delta_k n) + \sum_{k\geq j-2} \Delta_j(\Delta_k n\tilde{\Delta}_k\nabla c) \\ &= I_1^j + I_2^j + I_3^j. \end{aligned} \quad (206)$$

Con el objetivo de estimar I_1^j , sea q^* tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{q^*} + \frac{1}{\tilde{r}}$, y sea $q < \tilde{q}^* < q^*$ lo suficientemente cerca de q^* tal que $2 - \frac{N}{\tilde{q}^*} - \rho_1 > 0$ (esto es posible ya que $2 - \frac{N}{q^*} - \rho_1 > 0$), entonces, para \tilde{r} tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{q^*} + \frac{1}{\tilde{r}}$, usando la desigualdad de Hölder y el Lema 1.9, tenemos

$$\begin{aligned}
\|I_1^j\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} &\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \|S_{k-2}n\|_{W\dot{K}_{q^*,\infty}^0} \|\Delta_k \nabla c\|_{W\dot{K}_{\tilde{r},\infty}^0} \\
&\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} \|\Delta_m n\|_{W\dot{K}_{q^*,\infty}^0} \right) 2^k \|\Delta_k c\|_{W\dot{K}_{\tilde{r},\infty}^0} \\
&\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(\frac{N}{q} - \frac{N}{q^*})} \|\Delta_m n\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \right) 2^k 2^{k(\frac{N}{\tilde{r}} - \frac{N}{q^*})} \|\Delta_k c\|_{W\dot{K}_{\tilde{r},\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{\tilde{r},\infty,\infty}^{0,\frac{N}{\tilde{r}}+\rho_2}} \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(2-\frac{N}{q^*}-\rho_1)} \right) 2^{k(1-\frac{N}{\tilde{r}}-\rho_2)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{\tilde{r},\infty,\infty}^{0,\frac{N}{\tilde{r}}+\rho_2}} \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{k(2-\frac{N}{q^*}-\rho_1)} 2^{k(1-\frac{N}{\tilde{r}}-\rho_2)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{\tilde{r},\infty,\infty}^{0,\frac{N}{\tilde{r}}+\rho_2}} 2^{j(3-\frac{N}{q}-(\rho_1+\rho_2))}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\|I_1^j\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \leq \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{\tilde{r},\infty,\infty}^{0,\frac{N}{\tilde{r}}+\rho_2}} 2^{-j(-3+\frac{N}{q}+(\rho_1+\rho_2))}. \quad (207)$$

Ahora tomamos en consideración I_2^j . Note que debido a la condición $1 - \rho_2 > 0$ podemos tomar un número real $\tilde{r} \gg 1$ tal que $1 - \rho_2 - \frac{N}{\tilde{r}} > 0$, y sea \tilde{q} tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{q}}$,

entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\|I_2^j\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} &\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \|S_{k-2}\nabla c\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \|\Delta_k n\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \\
&\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} \|\Delta_m \nabla c\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \right) \|\Delta_k n\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \\
&\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(\frac{N}{r}-\frac{N}{r'})} \|\Delta_m \nabla c\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \right) 2^{m(\frac{N}{q}-\frac{N}{q'})} \|\Delta_k n\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \\
&\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(\frac{N}{r}-\frac{N}{r'}+1)} \|\Delta_m c\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \right) 2^{m(\frac{N}{q}-\frac{N}{q'})} \|\Delta_k n\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \\
&\leq C \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(1-\rho_2-\frac{N}{r'})} \right) 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{k(1-\rho_2-\frac{N}{r'})} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} 2^{j(3-\frac{N}{q}-(\rho_1+\rho_2))}.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\|I_2^j\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} 2^{-j(-3+\frac{N}{q}+(\rho_1+\rho_2))}. \quad (208)$$

Finalmente, estimamos I_3^j . En primer lugar, consideremos el caso $r \leq q'$. Note que en las condiciones del lema tenemos $3 - N - (\rho_1 + \rho_2) < 0$, por lo que podemos tomar $\tilde{q}' > q'$

tal que $3 - \frac{N}{q} - \frac{N}{q'} - (\rho_1 + \rho_2) < 0$. Denote por κ el número tal que $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} &\leq C \sum_{k \geq j-2} \left\| \Delta_k n \tilde{\Delta}_k \nabla c \right\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} \leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k n\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \left\| \tilde{\Delta}_k \nabla c \right\|_{W\dot{K}_{q',\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} \left\| \tilde{\Delta}_k \nabla c \right\|_{W\dot{K}_{q',\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} 2^k \left\| \tilde{\Delta}_k c \right\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} 2^k 2^{k\left(\frac{N}{r}-\frac{N}{q'}\right)} \left\| \tilde{\Delta}_k c \right\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(3-\frac{N}{q}-\frac{N}{q'}-(\rho_1+\rho_2))} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} 2^{j(3-\frac{N}{q}-\frac{N}{q'}-(\rho_1+\rho_2))}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} &\leq C 2^{j\left(\frac{N}{\kappa}-\frac{N}{q}\right)} \|I_3^j\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} \\
&\leq C 2^{j\frac{N}{q'}} \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} 2^{j(3-\frac{N}{q}-\frac{N}{q'}-(\rho_1+\rho_2))} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} 2^{-j(-3+\frac{N}{q}+(\rho_1+\rho_2))}.
\end{aligned}$$

En el caso $q' < r$, sea κ tal que $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{WK_{\kappa,\infty}^0} &\leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k n \tilde{\Delta}_k \nabla c\|_{WK_{\kappa,\infty}^0} \leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k n\|_{WK_{q,\infty}^0} \|\tilde{\Delta}_k \nabla c\|_{WK_{r,\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} \|\tilde{\Delta}_k \nabla c\|_{WK_{r,\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} 2^k \|\tilde{\Delta}_k c\|_{WK_{r,\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}WK_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} 2^{(1-\frac{N}{r}-\rho_2)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}WK_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(3-\frac{N}{q}-\frac{N}{r}-(\rho_1+\rho_2))} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}WK_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} 2^{j(3-\frac{N}{q}-\frac{N}{r}-(\rho_1+\rho_2))}
\end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{WK_{q,\infty}^0} &\leq C 2^{j(\frac{N}{k}-\frac{N}{q})} \|I_3^j\|_{WK_{\kappa,\infty}^0} \\
&\leq C 2^{j\frac{N}{r}} \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}WK_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} 2^{j(3-\frac{N}{q}-\frac{N}{r}-(\rho_1+\rho_2))} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}WK_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} 2^{-j(-3+\frac{N}{q}+(\rho_1+\rho_2))}.
\end{aligned}$$

En cualquier caso tenemos que

$$\|I_3^j\|_{WK_{q,\infty}^0} \leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}WK_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} 2^{-j(-3+\frac{N}{q}+(\rho_1+\rho_2))}. \quad (209)$$

Calculando la norma $\|\cdot\|_{WK_{q,\infty}^0}$ en (206) y considerando las estimaciones (207), (208) y (209), obtenemos el resultado. \square

Lema 3.2. Sean $N \geq 2$, $1 < q \leq r < \infty$ y $\rho_1 \in [0, 2)$ tales que $2 - N - \rho_1 < 0$ si $r \leq q'$ o $2 - \frac{N}{q} - \frac{N}{r} - \rho_1 < 0$ si $q' < r$. Entonces, para $n \in \dot{B}WK_{q,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}$ y $c \in \dot{B}WK_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}}$, tenemos que $nc \in \dot{B}WK_{r,\infty}^{0,-2+\frac{N}{r}+\rho_1}$ y

$$\|nc\|_{\dot{B}WK_{r,\infty}^{0,-2+\frac{N}{r}+\rho_1}} \leq C \left(\|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \left(\|c\|_{\dot{B}WK_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}}} + \|c\|_{L^\infty} \right) \right). \quad (210)$$

Demostración. De la descomposición (14), tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_j(nc) &= \sum_{|k-j|\leq 4} \Delta_j(S_{k-2}n\Delta_k c) + \sum_{|k-j|\leq 4} \Delta_j(S_{k-2}c\Delta_k n) + \sum_{k\geq j-2} \Delta_j(\Delta_k n \tilde{\Delta}_k c) \\ &= I_1^j + I_2^j + I_3^j. \end{aligned} \quad (211)$$

Para estimar I_1^j , note que como $2 - \rho_1 > 0$, podemos tomar un número real $\tilde{q} \gg 1$

tal que $2 - \rho_1 - \frac{N}{q} > 0$, y sea \tilde{r} tal que $\frac{1}{r} = \frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{q}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\|I_1^j\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} &\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \|S_{k-2}n\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \|\Delta_k c\|_{W\dot{K}_{\tilde{r},\infty}^0} \\
&\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} \|\Delta_m n\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \right) \|\Delta_k c\|_{W\dot{K}_{\tilde{r},\infty}^0} \\
&\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(\frac{N}{q}-\frac{N}{q})} \|\Delta_m n\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \right) 2^{k(\frac{N}{r}-\frac{N}{\tilde{r}})} \|\Delta_k c\|_{W\dot{K}_{\tilde{r},\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}}} \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(2-\rho_1-\frac{N}{q})} \right) 2^{k(-\frac{N}{\tilde{r}})} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}}} \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{k(2-\rho_1-\frac{N}{q})} 2^{k(-\frac{N}{\tilde{r}})} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}}} 2^{-j(-2+\frac{N}{r}+\rho_1)}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\|I_1^j\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}}} 2^{-j(-2+\frac{N}{r}+\rho_1)}. \quad (212)$$

Para estimar I_2^j , tenemos

$$\begin{aligned}
\|I_2^j\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} &\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \|S_{k-2}c\|_{L^\infty} \|\Delta_k n\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \leq C \|c\|_{L^\infty} \sum_{|k-j|\leq 4} \|\Delta_k n\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \\
&\leq C \|c\|_{L^\infty} \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{k(\frac{N}{q}-\frac{N}{r})} \|\Delta_k n\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{L^\infty} \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{k(2-\frac{N}{r}-\rho_1)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{L^\infty} 2^{j(2-\frac{N}{r}-\rho_1)}. \quad (213)
\end{aligned}$$

Ahora pasamos a I_3^j . En el caso $r \leq q'$ tenemos que $2 - N - \rho_1 < 0$, por lo tanto,

podemos tomar $\tilde{q}' > q'$ tal que $2 - \frac{N}{q} - \frac{N}{\tilde{q}'} - \rho_1 < 0$. Denotemos por κ el número tal que

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}'}, \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} \|I_3^j\|_{WK_{\kappa,\infty}^0} &\leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k n \tilde{\Delta}_k c\|_{WK_{\kappa,\infty}^0} \leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k n\|_{WK_{q,\infty}^0} \|\tilde{\Delta}_k c\|_{WK_{\tilde{q}',\infty}^0} \\ &\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} 2^{k\left(\frac{N}{r}-\frac{N}{\tilde{q}'}\right)} \|\tilde{\Delta}_k c\|_{WK_{r,\infty}^0} \\ &\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}WK_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\frac{N}{\tilde{q}'}-\rho_1)} \\ &\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}WK_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}}} 2^{j(2-\frac{N}{q}-\frac{N}{\tilde{q}'}-\rho_1)}. \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned} \|I_3^j\|_{WK_{r,\infty}^0} &\leq C 2^{j\left(\frac{N}{\kappa}-\frac{N}{r}\right)} \|I_3^j\|_{WK_{\kappa,\infty}^0} \leq C 2^{j\left(\frac{N}{\kappa}-\frac{N}{r}\right)} \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}WK_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}}} 2^{j(2-\frac{N}{\kappa}-\rho_1)} \\ &\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}WK_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}}} 2^{-j(-2+\frac{N}{r}+\rho_1)}. \end{aligned}$$

En el caso $q' < r$, sea κ tal que $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} &\leq C \sum_{k \geq j-2} \left\| \Delta_k n \tilde{\Delta}_k c \right\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} \leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k n\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \left\| \tilde{\Delta}_k c \right\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} 2^{k(-\frac{N}{r})} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\frac{N}{r}-\rho_1)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}}} 2^{j(2-\frac{N}{q}-\frac{N}{r}-\rho_1)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} &\leq C 2^{j(\frac{N}{\kappa}-\frac{N}{r})} \|I_3^j\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} \leq C 2^{j(\frac{N}{\kappa}-\frac{N}{r})} \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}}} 2^{j(2-\frac{N}{\kappa}-\rho_1)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} 2^{-j(-2+\frac{N}{r}+\rho_1)}.
\end{aligned}$$

En cualquier caso obtenemos la estimación

$$\|I_3^j\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} 2^{-j(-2+\frac{N}{r}+\rho_1)}. \quad (214)$$

Calculando la norma $\|\cdot\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0}$ en (211) y considerando las estimaciones (212), (213) y (214), obtenemos el resultado. \square

Lema 3.3. Sean $N \geq 2$, $1 < p < \infty$, $\rho_3 \in [0, 1)$, y supongamos que $2 - N - 2\rho_3 < 0$ si $p \leq 2$ o $1 - \frac{N}{p} - \rho_3 < 0$ si $2 < p$. Entonces, para $u \in \dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}$ y $\tilde{u} \in \dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}$,

tenemos que $u\tilde{u} \in \dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{p}+2\rho_3}$ y

$$\|u\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{p}+2\rho_3}} \leq \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}}. \quad (215)$$

Demostración. De la descomposición (14), obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta_j(u\tilde{u}) &= \sum_{|k-j|\leq 4} \Delta_j(S_{k-2}u\Delta_k\tilde{u}) + \sum_{|k-j|\leq 4} \Delta_j(S_{k-2}\tilde{u}\Delta_k u) + \sum_{k\geq j-2} \Delta_j(\Delta_k u\tilde{\Delta}_k\tilde{u}) \\ &= I_1^j + I_2^j + I_3^j. \end{aligned} \quad (216)$$

Para estimar la parte I_1^j , podemos tomar un número real $\tilde{l} \gg 1$ tal que $1 - \rho_3 - \frac{N}{\tilde{l}} > 0$, así que, para \tilde{p} tal que $\frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1}{\tilde{l}} + \frac{1}{p}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|I_1^j\|_{W\dot{K}_{\tilde{p},\infty}^0} &\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \|S_{k-2}u\|_{W\dot{K}_{\tilde{l},\infty}^0} \|\Delta_k\tilde{u}\|_{W\dot{K}_{\tilde{p},\infty}^0} \\ &\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} \|\Delta_m u\|_{W\dot{K}_{\tilde{l},\infty}^0} \right) \|\Delta_k\tilde{u}\|_{W\dot{K}_{\tilde{p},\infty}^0} \\ &\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(\frac{N}{\tilde{p}} - \frac{N}{\tilde{l}})} \|\Delta_m u\|_{W\dot{K}_{\tilde{p},\infty}^0} \right) 2^{m(\frac{N}{\tilde{p}} - \frac{N}{\tilde{l}})} \|\Delta_k\tilde{u}\|_{W\dot{K}_{\tilde{p},\infty}^0} \\ &\leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(1-\rho_3-\frac{N}{\tilde{l}})} \right) 2^{k(1-\frac{N}{\tilde{p}}-\rho_3)} \\ &\leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{k(1-\rho_3-\frac{N}{\tilde{l}})} 2^{k(1-\frac{N}{\tilde{p}}-\rho_3)} \\ &\leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{j(2-\frac{N}{\tilde{p}}-2\rho_3)}. \end{aligned}$$

Así,

$$\|I_1^j\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \leq \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{-j(-2+\frac{N}{p}+2\rho_3)}. \quad (217)$$

Para la parte I_2^j , procediendo de forma similar obtenemos

$$\|I_2^j\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{j(2-\frac{N}{p}-2\rho_3)}. \quad (218)$$

Ahora pasamos a I_3^j . De nuevo consideramos dos casos. En el caso $p \leq 2$ tomamos $\tilde{p}' > p'$ tal que $2 - \frac{N}{p} - \frac{N}{\tilde{p}'} - 2\rho_3 < 0$, entonces, para κ tal que $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\tilde{p}'}$ tenemos

$$\begin{aligned} \|I_3^j\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} &\leq C \sum_{k \geq j-2} \left\| \Delta_k u \tilde{\Delta}_k \tilde{u} \right\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} \leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k u\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0} \left\| \tilde{\Delta}_k \tilde{u} \right\|_{W\dot{K}_{\tilde{p}',\infty}^0} \\ &\leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(1-\frac{N}{p}-\rho_3)} 2^{k(\frac{N}{p}-\frac{N}{\tilde{p}'})} \left\| \tilde{\Delta}_k \tilde{u} \right\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0} \\ &\leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(1-\frac{N}{p}-\rho_3)} 2^{k(1-\frac{N}{\tilde{p}'}-\rho_3)} \\ &\leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{p}-\frac{N}{\tilde{p}'}-2\rho_3)} \\ &\leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{j(2-\frac{N}{p}-\frac{N}{\tilde{p}'}-2\rho_3)}. \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0} &\leq C2^{j\left(\frac{N}{\kappa}-\frac{N}{p}\right)} \|I_3^j\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} \\
&\leq C2^{j\left(\frac{N}{\kappa}-\frac{N}{p}\right)} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{j\left(2-\frac{N}{\kappa}-2\rho_3\right)} \\
&\leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{-j\left(-2+\frac{N}{p}+2\rho_3\right)}.
\end{aligned}$$

En el caso $2 < p$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{W\dot{K}_{p/2,\infty}^0} &\leq C \sum_{k \geq j-2} \left\| \Delta_k u \tilde{\Delta}_k \tilde{u} \right\|_{W\dot{K}_{p/2,\infty}^0} \leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k u\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0} \|\tilde{\Delta}_k \tilde{u}\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0} \\
&\leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k2\left(1-\frac{N}{p}-\rho_3\right)} \\
&\leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{j\left(2-\frac{2N}{p}-2\rho_3\right)}.
\end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0} &\leq C2^{j\left(\frac{2N}{p}-\frac{N}{p}\right)} \|I_3^j\|_{W\dot{K}_{p/2,\infty}^0} \\
&\leq C2^{j\left(\frac{2N}{p}-\frac{N}{p}\right)} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{j\left(2-\frac{2N}{p}-2\rho_3\right)} \\
&\leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{-j\left(-2+\frac{N}{p}+2\rho_3\right)}.
\end{aligned}$$

En cualquier caso obtenemos la estimación

$$\|I_3^j\|_{\dot{W}\dot{K}_{p,\infty}^0} \leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|\tilde{u}\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{-j(-2+\frac{N}{p}+2\rho_3)}. \quad (219)$$

Calculando la norma $\|\cdot\|_{\dot{W}\dot{K}_{p,\infty}^0}$ en (216) y considerando las estimaciones (217), (218) y (219), obtenemos el resultado. \square

Lema 3.4. Sean $N \geq 2$, $1 < q < \infty$, $1 < p < \infty$, $\rho_1 \in [0, 2)$, $\rho_3 \in (0, 1)$ tales que $2 + \frac{N}{p} - \frac{N}{q} - \rho_1 > 0$ si $q < p$, y suponga que $3 - N - (\rho_1 + \rho_3) < 0$ si $p \leq q'$ o $3 - \frac{N}{q} - \frac{N}{p} - (\rho_1 + \rho_3) < 0$ si $q' < p$. Entonces, para $n \in \dot{B}W\dot{K}_{q,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}$ y $u \in \dot{B}W\dot{K}_{p,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}$, tenemos que $un \in \dot{B}W\dot{K}_{q,\infty}^{0,-3+\frac{N}{q}+\rho_1+\rho_3}$ y

$$\|un\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty}^{0,-3+\frac{N}{q}+\rho_1+\rho_3}} \leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}}. \quad (220)$$

Demostración. De la descomposición (14), obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta_j(nu) &= \sum_{|k-j|\leq 4} \Delta_j(S_{k-2}n\Delta_k u) + \sum_{|k-j|\leq 4} \Delta_j(S_{k-2}n\Delta_k u) + \sum_{k\geq j-2} \Delta_j(\Delta_k n\tilde{\Delta}_k u) \\ &= I_1^j + I_2^j + I_3^j. \end{aligned} \quad (221)$$

Para estimar I_1^j , sea $\tilde{\rho} := \max\{p, q\}$ y q^* tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{q^*} + \frac{1}{\tilde{\rho}}$, y sea \tilde{q}^* lo suficientemente cerca de q^* tal que $q < \tilde{q}^* < q^*$ y tal que $2 - \frac{N}{\tilde{q}^*} - \rho_1 > 0$, entonces, para \tilde{p} tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{\tilde{q}^*} + \frac{1}{\tilde{p}}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|I_1^j\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} &\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \|S_{k-2}n\|_{W\dot{K}_{q^*,\infty}^0} \|\Delta_k u\|_{W\dot{K}_{\tilde{p},\infty}^0} \\
&\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} \|\Delta_m n\|_{W\dot{K}_{q^*,\infty}^0} \right) \|\Delta_k u\|_{W\dot{K}_{\tilde{p},\infty}^0} \\
&\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(\frac{N}{q}-\frac{N}{q^*})} \|\Delta_m n\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \right) 2^{k(\frac{N}{\tilde{p}}-\frac{N}{\tilde{p}})} \|\Delta_k u\|_{W\dot{K}_{\tilde{p},\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{\tilde{p}}+\rho_3}} \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(2-\frac{N}{q^*}-\rho_1)} \right) 2^{k(1-\frac{N}{\tilde{p}}-\rho_3)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{\tilde{p}}+\rho_3}} \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{k(2-\frac{N}{q^*}-\rho_1)} 2^{k(1-\frac{N}{\tilde{p}}-\rho_3)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{\tilde{p}}+\rho_3}} 2^{j(3-\frac{N}{q}-\rho_1-\rho_3)}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\|I_1^j\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{\tilde{p}}+\rho_3}} 2^{-j(-3+\frac{N}{q}+\rho_1+\rho_3)}. \quad (222)$$

Ahora pasamos a estimar I_2^j . Para ello, sea $\tilde{p} \gg 1$ tal que $1 - \rho_3 - \frac{N}{\tilde{p}} > 0$, y sea \tilde{q} tal que $\frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{p}}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|I_2^j\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} &\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \|S_{k-2}u\|_{W\dot{K}_{\tilde{p},\infty}^0} \|\Delta_k n\|_{W\dot{K}_{\tilde{q},\infty}^0} \\
&\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} \|\Delta_m u\|_{W\dot{K}_{\tilde{p},\infty}^0} \right) \|\Delta_k n\|_{W\dot{K}_{\tilde{q},\infty}^0} \\
&\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(\frac{N}{\tilde{p}}-\frac{N}{\tilde{p}})} \|\Delta_m u\|_{W\dot{K}_{\tilde{p},\infty}^0} \right) 2^{m(\frac{N}{\tilde{q}}-\frac{N}{\tilde{q}})} \|\Delta_k n\|_{W\dot{K}_{\tilde{q},\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{\tilde{q}}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{\tilde{p}}+\rho_3}} \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(1-\rho_3-\frac{N}{\tilde{p}})} \right) 2^{k(2-\frac{N}{\tilde{q}}-\rho_1)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{\tilde{q}}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{\tilde{p}}+\rho_3}} \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{k(1-\rho_3-\frac{N}{\tilde{p}})} 2^{k(2-\frac{N}{\tilde{q}}-\rho_1)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{\tilde{q}}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{\tilde{p}}+\rho_3}} 2^j(3-\frac{N}{\tilde{q}}-(\rho_1+\rho_3)).
\end{aligned}$$

La desigualdad anterior se reduce a

$$\|I_2^j\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{\tilde{q}}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{\tilde{p}}+\rho_3}} 2^{-j(-3+\frac{N}{\tilde{q}}+(\rho_1+\rho_3))}. \quad (223)$$

Finalmente, estimamos I_3^j . Primero consideremos que $p \leq q'$. Dado que $3 - N - (\rho_1 + \rho_3) < 0$, podemos tomar $\tilde{q}' > q'$ tal que $3 - \frac{N}{q} - \frac{N}{\tilde{q}'} - (\rho_1 + \rho_3) < 0$. Denote por κ el número tal que $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}'}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} &\leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k n \tilde{\Delta}_k u\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} \leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k n\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} \|\tilde{\Delta}_k u\|_{W\dot{K}_{q',\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} \|\tilde{\Delta}_k u\|_{W\dot{K}_{q',\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} 2^{k\left(\frac{N}{p}-\frac{N}{q'}\right)} \|\tilde{\Delta}_k u\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(3-\frac{N}{q}-\frac{N}{q'}-(\rho_1+\rho_3))} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{j(3-\frac{N}{\kappa}-(\rho_1+\rho_3))}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0} &\leq C 2^{j\left(\frac{N}{\kappa}-\frac{N}{q}\right)} \|I_3^j\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} \\
&\leq C 2^{j\left(\frac{N}{\kappa}-\frac{N}{q}\right)} \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{j(3-\frac{N}{\kappa}-(\rho_1+\rho_3))} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{-j\left(-3+\frac{N}{q}+(\rho_1+\rho_3)\right)}.
\end{aligned}$$

En el caso $q' < p$, sea κ tal que $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{WK_{\kappa,\infty}^0} &\leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k n \tilde{\Delta}_k u\|_{WK_{\kappa,\infty}^0} \leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k n\|_{WK_{q,\infty}^0} \|\tilde{\Delta}_k u\|_{WK_{p,\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} \|\tilde{\Delta}_k u\|_{WK_{p,\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} \|\tilde{\Delta}_k u\|_{WK_{p,\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}WK_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} 2^{(1-\frac{N}{p}-\rho_3)k} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}WK_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(3-\frac{N}{q}-\frac{N}{p}-\rho_1-\rho_3)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}WK_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{j(3-\frac{N}{q}-\frac{N}{p}-\rho_1-\rho_3)}.
\end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{WK_{q,\infty}^0} &\leq C 2^{j(\frac{N}{\kappa}-\frac{N}{q})} \|I_3^j\|_{WK_{\kappa,\infty}^0} \\
&\leq C 2^{j(\frac{N}{p})} \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}WK_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{j(3-\frac{N}{q}-\frac{N}{p}-\rho_1-\rho_3)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}WK_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{j(3-\frac{N}{q}-\rho_1-\rho_3)}.
\end{aligned}$$

En cualquier caso, tenemos que

$$\|I_3^j\|_{WK_{q,\infty}^0} \leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|u\|_{\dot{B}WK_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{-j(-3+\frac{N}{q}+(\rho_1+\rho_3))}. \quad (224)$$

Calculando la norma $\|\cdot\|_{W\dot{K}_{q,\infty}^0}$ en (221) y considerando las estimaciones (222), (223) y (224), obtenemos el resultado. \square

Lema 3.5. Sean $N \geq 2$, $1 < r < \infty$, $1 < p < \infty$ y $\rho_2, \rho_3 \in (0, 1)$ tales que $1 + \frac{N}{p} - \frac{N}{r} - \rho_2 > 0$ si $r < p$, y supongamos que $2 - N - (\rho_2 + \rho_3) < 0$ si $p \leq r'$ o $2 - \frac{N}{p} - \frac{N}{r} - (\rho_2 + \rho_3) < 0$ si $r' < p$. Entonces, para $u \in \dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}$ y $c \in \dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}$, tenemos que $u\nabla c \in \dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{r}+\rho_2+\rho_3}$ y

$$\|u\nabla c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{r}+\rho_2+\rho_3}} \leq C \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}}. \quad (225)$$

Demostración. La descomposición (14), nos da

$$\begin{aligned} \Delta_j(u\nabla c) &= \sum_{|k-j|\leq 4} \Delta_j(S_{k-2}u\Delta_k\nabla c) + \sum_{|k-j|\leq 4} \Delta_j(S_{k-2}\nabla c\Delta_k u) + \sum_{k\geq j-2} \Delta_j(\Delta_k u\tilde{\Delta}_k\nabla c) \\ &= I_1^j + I_2^j + I_3^j. \end{aligned} \quad (226)$$

Para estimar I_1^j , sea $\tilde{p} \gg 1$ tal que $1 - \rho_3 - \frac{N}{\tilde{p}} > 0$, y sea \tilde{r} tal que $\frac{1}{\tilde{r}} = \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{r}}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|I_1^j\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} &\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \|S_{k-2}u\|_{W\dot{K}_{\tilde{p},\infty}^0} \|\Delta_k \nabla c\|_{W\dot{K}_{\tilde{r},\infty}^0} \\
&\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} \|\Delta_m u\|_{W\dot{K}_{\tilde{p},\infty}^0} \right) \|\Delta_k \nabla c\|_{W\dot{K}_{\tilde{r},\infty}^0} \\
&\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(\frac{N}{\tilde{p}} - \frac{N}{\tilde{p}})} \|\Delta_m u\|_{W\dot{K}_{\tilde{p},\infty}^0} \right) 2^k 2^{k(\frac{N}{\tilde{r}} - \frac{N}{\tilde{r}})} \|\Delta_k c\|_{W\dot{K}_{\tilde{r},\infty}^0} \\
&\leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{\tilde{p}}+\rho_3}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{\tilde{r}}+\rho_2}} \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(1-\rho_3-\frac{N}{\tilde{p}})} \right) 2^{k(1-\frac{N}{\tilde{r}}-\rho_2)} \\
&\leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{\tilde{p}}+\rho_3}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{\tilde{r}}+\rho_2}} \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{k(1-\rho_3-\frac{N}{\tilde{p}})} 2^{k(1-\frac{N}{\tilde{r}}-\rho_2)} \\
&\leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{\tilde{p}}+\rho_3}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{\tilde{r}}+\rho_2}} 2^{-j(-2+\frac{N}{\tilde{r}}+(\rho_2+\rho_3))}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\|I_1^j\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{\tilde{p}}+\rho_3}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{\tilde{r}}+\rho_2}} 2^{-j(-2+\frac{N}{\tilde{r}}+(\rho_2+\rho_3))}. \quad (227)$$

Para estimar I_2^j , sea $\tilde{\rho} := \max\{r, p\}$ y r^* tal que $\frac{1}{r} = \frac{1}{r^*} + \frac{1}{\tilde{\rho}}$, y sea \tilde{r}^* lo suficientemente cerca de r^* tal que $r < \tilde{r}^* < r^*$ y tal que $1 - \frac{N}{\tilde{r}^*} - \rho_2 > 0$, entonces, para \tilde{p} tal que $\frac{1}{\tilde{r}} = \frac{1}{\tilde{r}^*} + \frac{1}{\tilde{p}}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|I_2^j\|_{WK_{r,\infty}^0} &\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \|S_{k-2}\nabla c\|_{WK_{r^*,\infty}^0} \|\Delta_k u\|_{WK_{\tilde{p},\infty}^0} \\
&\leq \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} \|\Delta_m \nabla c\|_{WK_{r^*,\infty}^0} \right) \|\Delta_k u\|_{WK_{\tilde{p},\infty}^0} \\
&\leq \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(1+\frac{N}{r}-\frac{N}{r^*})} \|\Delta_m c\|_{WK_{r,\infty}^0} \right) 2^{k(\frac{N}{\tilde{p}}-\frac{N}{\tilde{p}'})} \|\Delta_k u\|_{WK_{\tilde{p},\infty}^0} \\
&\leq C \|c\|_{\dot{B}WK_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \|u\|_{\dot{B}WK_{p,\infty}^{0,-1+\frac{N}{\tilde{p}}+\rho_3}} \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(1-\frac{N}{r^*}-\rho_2)} \right) 2^{k(1-\frac{N}{\tilde{p}}-\rho_3)} \\
&\leq C \|c\|_{\dot{B}WK_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \|u\|_{\dot{B}WK_{p,\infty}^{0,-1+\frac{N}{\tilde{p}}+\rho_3}} \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{k(2-\frac{N}{r}-\rho_2-\rho_3)} \\
&\leq C \|c\|_{\dot{B}WK_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \|u\|_{\dot{B}WK_{p,\infty}^{0,-1+\frac{N}{\tilde{p}}+\rho_3}} 2^j(2-\frac{N}{r}-(\rho_2+\rho_3)). \tag{228}
\end{aligned}$$

Ahora pasamos a I_3^j . En el caso $p \leq r'$, dado que $2 - N - (\rho_2 + \rho_3) < 0$, podemos tomar $\tilde{r}' > r'$ tal que $2 - \frac{N}{r} - \frac{N}{\tilde{r}'} - (\rho_2 + \rho_3) < 0$. Denotemos por κ el número tal que $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\tilde{r}'}$,

entonces

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} &\leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k u \tilde{\Delta}_k \nabla c\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} \leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k u\|_{W\dot{K}_{r',\infty}^0} \|\tilde{\Delta}_k \nabla c\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \\
&\leq C \sum_{k \geq j-2} 2^{k(\frac{N}{p} - \frac{N}{r'})} \|\Delta_k u\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0} 2^k \|\tilde{\Delta}_k \nabla c\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \\
&\leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(1-\frac{N}{r'}-\rho_3)} 2^{k(1-\frac{N}{r}-\rho_2)} \\
&\leq C \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{r}-\frac{N}{r'}-(\rho_3+\rho_2))} \\
&\leq C \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{j(2-\frac{N}{\kappa}-(\rho_2+\rho_3))}.
\end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} &\leq C 2^{j(\frac{N}{\kappa} - \frac{N}{r})} \|I_3^j\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} \\
&\leq C 2^{j(\frac{N}{\kappa} - \frac{N}{r})} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{j(2-\frac{N}{\kappa}-(\rho_2+\rho_3))} \\
&\leq C \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{-j(-2+\frac{N}{r}+(\rho_2+\rho_3))}.
\end{aligned}$$

En el caso $r' < p$, sea κ tal que $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} &\leq C \sum_{k \geq j-2} \left\| \Delta_k u \tilde{\Delta}_k \nabla c \right\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} \leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k u\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0} \left\| \tilde{\Delta}_k \nabla c \right\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \\
&\leq C \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(1-\frac{N}{p}-\rho_3)} 2^{k(1-\frac{N}{r}-\rho_2)} \\
&\leq C \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{p}-\frac{N}{r}-(\rho_2+\rho_3))} \\
&\leq C \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{j(2-\frac{N}{p}-\frac{N}{r}-(\rho_2+\rho_3))}.
\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} &\leq C 2^{j(\frac{N}{\kappa}-\frac{N}{r})} \|I_3^j\|_{W\dot{K}_{\kappa,\infty}^0} \\
&\leq C 2^{j(\frac{N}{\kappa}-\frac{N}{r})} \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{j(2-\frac{N}{p}-\frac{N}{r}-(\rho_2+\rho_3))} \\
&\leq C \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{-j(-2+\frac{N}{r}+(\rho_2+\rho_3))}.
\end{aligned}$$

En cualquier caso obtenemos la estimación

$$\|I_3^j\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0} \leq C \|c\|_{\dot{B}W\dot{K}_{r,\infty}^{0,\frac{N}{r}+\rho_2}} \|u\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty}^{0,-1+\frac{N}{p}+\rho_3}} 2^{-j(-2+\frac{N}{r}+(\rho_2+\rho_3))}. \quad (229)$$

Calculando la norma $\|\cdot\|_{W\dot{K}_{r,\infty}^0}$ en (226) y considerando las estimaciones (227), (228) y (229), obtenemos el resultado. \square

Lema 3.6. Sean $1 < l \leq p$, $1 < p, q < \infty$, $\rho_1 \in [0, 2)$ tales que $1 + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} > 0$, y supongamos

que $3 - N - \rho_1 < 0$ si $l \leq q'$ o $3 - \frac{N}{q} - \frac{N}{l} - \rho_1 < 0$ si $q' < l$. Entonces, para $f \in \dot{B}W\dot{K}_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}$ y $n \in \dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}$, se tiene que $fn \in \dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-3+\frac{N}{p}+\rho_1}$ y

$$\|fn\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,\infty,\infty}^{0,-3+\frac{N}{p}+\rho_1}} \leq \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}}.$$

Demostración. De la descomposición (14), obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta_j(nf) &= \sum_{|k-j|\leq 4} \Delta_j(S_{k-2}n\Delta_k f) + \sum_{|k-j|\leq 4} \Delta_j(S_{k-2}f\Delta_k n) + \sum_{k\geq j-2} \Delta_j(\Delta_k n\tilde{\Delta}_k f) \\ &= I_1^j + I_2^j + I_3^j. \end{aligned} \quad (230)$$

Para estimar I_1^j , sea $\tilde{q} \gg 1$ tal que $2 - \frac{N}{\tilde{q}} - \rho_1 > 0$ y sea \tilde{l} tal que $\frac{1}{p} = \frac{1}{\tilde{q}} + \frac{1}{\tilde{l}}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \|I_1^j\|_{W\dot{K}_{p,\infty}^0} &\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \|S_{k-2}n\|_{W\dot{K}_{\tilde{q},\infty}^0} \|\Delta_k f\|_{W\dot{K}_{\tilde{l},\infty}^0} \leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} \|\Delta_m n\|_{W\dot{K}_{\tilde{q},\infty}^0} \right) \|\Delta_k f\|_{W\dot{K}_{\tilde{l},\infty}^0} \\ &\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(\frac{N}{\tilde{q}} - \frac{N}{\tilde{q}})} \|\Delta_m n\|_{W\dot{K}_{\tilde{q},\infty}^0} \right) 2^{m(\frac{N}{\tilde{l}} - \frac{N}{\tilde{l}})} \|\Delta_k f\|_{W\dot{K}_{\tilde{l},\infty}^0} \\ &\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(2-\frac{N}{\tilde{q}}-\rho_1)} \right) 2^{k(1-\frac{N}{\tilde{l}})} \\ &\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{k(2-\frac{N}{\tilde{q}}-\rho_1)} 2^{k(1-\frac{N}{\tilde{l}})} \\ &\leq C \|n\|_{\dot{B}W\dot{K}_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|f\|_{\dot{B}W\dot{K}_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} 2^{j(3-\frac{N}{p}-\rho_1)}. \end{aligned}$$

Así,

$$\|I_1^j\|_{WK_{p,\infty}^0} \leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|f\|_{\dot{B}WK_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} 2^{j(3-\frac{N}{p}-\rho_1)}. \quad (231)$$

Ahora, para estimar I_2^j , sea $\tilde{\rho} = \max\{p, q\}$ y p^* tal que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p^*} + \frac{1}{\tilde{\rho}}$ y tome \tilde{p}^* lo suficientemente cerca de p^* tal que $p < \tilde{p}^* < p^*$ y tal que $1 - \frac{N}{\tilde{p}^*} > 0$, entonces, para \tilde{q} tal que $\frac{1}{p} = \frac{1}{\tilde{p}^*} + \frac{1}{\tilde{q}}$ tenemos

$$\begin{aligned} \|I_2^j\|_{WK_{p,\infty}^0} &\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \|S_{k-2}f\|_{WK_{p^*,\infty}^0} \|\Delta_k n\|_{WK_{\tilde{q},\infty}^0} \\ &\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} \|\Delta_m f\|_{WK_{\tilde{p}^*,\infty}^0} \right) \|\Delta_k n\|_{WK_{\tilde{q},\infty}^0} \\ &\leq C \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(\frac{N}{l}-\frac{N}{\tilde{p}^*})} \|\Delta_m f\|_{WK_{l,\infty}^0} \right) 2^{m(\frac{N}{\tilde{q}}-\frac{N}{\tilde{q}})} \|\Delta_k n\|_{WK_{\tilde{q},\infty}^0} \\ &\leq C \|f\|_{\dot{B}WK_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \sum_{|k-j|\leq 4} \left(\sum_{m\leq k-2} 2^{m(1-\frac{N}{\tilde{p}^*})} \right) 2^{k(2-\frac{N}{\tilde{q}}-\rho_1)} \\ &\leq C \|f\|_{\dot{B}WK_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{k(1-\frac{N}{\tilde{p}^*})} 2^{k(2-\frac{N}{\tilde{q}}-\rho_1)} \\ &\leq C \|f\|_{\dot{B}WK_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} 2^{j(3-\frac{N}{p}-\rho_1)}. \end{aligned} \quad (232)$$

Finalmente, estimamos I_3^j . Suponga inicialmente que $l \leq q'$ y sea \tilde{r} tal que $1 < \tilde{r} \leq p$ y $3 - \frac{N}{\tilde{r}} - \rho_1 > 0$, y sea \tilde{q} tal que $\frac{1}{\tilde{r}} = \frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{WK_{\tilde{r},\infty}^0} &\leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k n \tilde{\Delta}_k f\|_{WK_{\tilde{r},\infty}^0} \leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k n\|_{WK_{q,\infty}^0} \|\tilde{\Delta}_k f\|_{WK_{q,\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} \|\tilde{\Delta}_k f\|_{WK_{q,\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} 2^{k(\frac{N}{l}-\frac{N}{q})} \|\tilde{\Delta}_k f\|_{WK_{l,\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|f\|_{\dot{B}WK_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} 2^{k(1-\frac{N}{q})} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|f\|_{\dot{B}WK_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} 2^{j(3-\frac{N}{\tilde{r}}-\rho_1)}.
\end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{WK_{p,\infty}^0} &\leq C 2^{j(\frac{N}{\tilde{r}}-\frac{N}{p})} \|I_3^j\|_{WK_{\tilde{r},\infty}^0} \leq C 2^{j(\frac{N}{\tilde{r}}-\frac{N}{p})} \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|f\|_{\dot{B}WK_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} 2^{j(3-\frac{N}{\tilde{r}}-\rho_1)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|f\|_{\dot{B}WK_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} 2^{j(3-\frac{N}{p}-\rho_1)}.
\end{aligned}$$

En el caso $q' < l$, sea κ tal que $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{q} + \frac{1}{l}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{WK_{\kappa,\infty}^0} &\leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k n \tilde{\Delta}_k f\|_{WK_{\kappa,\infty}^0} \leq C \sum_{k \geq j-2} \|\Delta_k n\|_{WK_{q,\infty}^0} \|\tilde{\Delta}_k f\|_{WK_{l,\infty}^0} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|f\|_{\dot{B}WK_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(2-\frac{N}{q}-\rho_1)} 2^{k(1-\frac{N}{l})} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|f\|_{\dot{B}WK_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} \sum_{k \geq j-2} 2^{k(3-\frac{N}{q}-\frac{N}{l}-\rho_1)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|f\|_{\dot{B}WK_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} 2^{j(3-\frac{N}{\kappa}-\rho_1)}.
\end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned}
\|I_3^j\|_{WK_{p,\infty}^0} &\leq C 2^{j(\frac{N}{\kappa}-\frac{N}{p})} \|I_3^j\|_{WK_{\kappa,\infty}^0} \leq C 2^{j(\frac{N}{\kappa}-\frac{N}{p})} \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|f\|_{\dot{B}WK_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} 2^{j(3-\frac{N}{\kappa}-\rho_1)} \\
&\leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|f\|_{\dot{B}WK_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} 2^{j(3-\frac{N}{p}-\rho_1)}.
\end{aligned}$$

En cualquier caso, obtenemos la estimación

$$\|I_3^j\|_{WK_{p,\infty}^0} \leq C \|n\|_{\dot{B}WK_{q,\infty,\infty}^{0,-2+\frac{N}{q}+\rho_1}} \|f\|_{\dot{B}WK_{l,\infty,\infty}^{0,-1+\frac{N}{l}}} 2^{j(3-\frac{N}{p}-\rho_1)}. \quad (233)$$

Calculando la norma $\|\cdot\|_{WK_{p,\infty}^0}$ en (230) y considerando las estimaciones (231), (232) y (233),

obtenemos el resultado. \square