

PROPAGACIÓN DE ONDAS
MAGNETOHIDRODINÁMICAS EN TUBOS
DE FLUJO MAGNÉTICO CON *TWIST*

PAULA CAMILA WANDURRAGA SANABRIA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2018

**PROPAGACIÓN DE ONDAS
MAGNETOHIDRODINÁMICAS EN TUBOS
DE FLUJO MAGNÉTICO CON *TWIST***

PAULA CAMILA WANDURRAGA SANABRIA

**TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR EL TÍTULO DE
FÍSICA**

DIRECTOR:

**FABIO DUVAN LORA CLAVIJO
FÍSICO, M.Sc. EN FÍSICA, Ph.D. EN FÍSICA**

CODIRECTORA:

**ANAMARÍA NAVARRO NOGUERA
FÍSICA, M.Sc. EN FÍSICA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2018**

RESUMEN

TÍTULO: PROPAGACIÓN DE ONDAS MAGNETOHIDRODINÁMICAS EN TUBOS DE FLUJO MAGNÉTICO CON *TWIST*. ¹

AUTOR: PAULA CAMILA WANDURRAGA SANABRIA. ²

PALABRAS CLAVE: MAGNETOHIDRODINÁMICA, ATMÓSFERA SOLAR, CALENTAMIENTO CORONAL, *TWIST*.

DESCRIPCIÓN: Las ondas magnetohidrodinámicas (MHD) que se propagan en la atmósfera solar, según observaciones y modelos teóricos, se cree que están relacionadas con una gran cantidad de fenómenos como lo son las eyecciones de masa coronal, el calentamiento coronal, entre otros. Las observaciones han concluido que estas ondas viajan a través de tubos de flujo magnético y que muchos de ellos presentan *twist* en su campo magnético. Por lo tanto, estudiar la propagación de ondas desde la base de la fotosfera a través de estos tubos permite avanzar en el conocimiento de los mecanismos para el transporte de energía y momentum, los cuales pueden explicar algunos de los fenómenos magnéticos de la atmósfera. Con este fin, se resolvieron las ecuaciones de la MHD en el régimen lineal para un fluido compresible, aplicadas a un modelo de Sol en calma con una perturbación en el campo de velocidades. Para esto se escribió un módulo numérico de diferencias finitas, el cual se implementó en el código MAGNUS. Por medio de este se realizaron simulaciones numéricas con diferentes configuraciones iniciales, mediante las que se concluyó que el perfil plasma beta está estrechamente relacionado con la morfología del campo de velocidades y que la inclusión de *twist* en el campo de velocidades únicamente a tiempo inicial, permite generar *twist* en el campo magnético inicialmente uniforme y aumentar su magnitud desde 50G hasta $\sim 0.5\text{kG}$ en 99s. Además el transporte de energía electromagnética a las capas superiores de la atmósfera solar aumenta aproximadamente dos órdenes de magnitud cuando se considera dicho *twist*. Finalmente, se encontró que el máximo de la divergencia del campo magnético para cada simulación se mantiene al orden de 10^{-20}T/m , lo cual garantiza la ausencia de monopolos magnéticos.

¹Trabajo de grado de Pregrado

²Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Fabio Duvan Lora Clavijo, Ph.D.

ABSTRACT

TITLE: MAGNETOHYDRODYNAMICS WAVE PROPAGATION IN MAGNETIC FLUX TUBES WITH TWIST. ¹

AUTHOR: PAULA CAMILA WANDURRAGA SANABRIA. ²

KEY WORDS: MAGNETOHYDRODYNAMICS, SOLAR ATMOSPHERE, CORONAL HEATING, TWIST.

DESCRIPTION: Magnetohydrodynamic (MHD) waves that propagate in the solar atmosphere, according to observations and theoretical models, are believed to be related to a large number of phenomena such as coronal mass ejections, coronal heating, among others. Observations have concluded that these waves travel through magnetic flux tubes and that many of them have twist in their magnetic field. Therefore, studying the propagation of waves from the base of the photosphere through these tubes allows to advance in the knowledge of the mechanisms for the transport of energy and momentum, which can explain some of the magnetic phenomena of the atmosphere. To this aim, the MHD equations were solved in the linear regime for a compressible fluid, applied to a quiet Sun model with a perturbation in the velocity field. In order to solve these equations, a numerical module of finite differences was written and implemented in the MAGNUS code. By using MAGNUS, numerical simulations with different initial configurations were carried out, concluding that the beta plasma profile is closely related to the velocity field morphology and that the inclusion of twist in the velocity field, only at initial time, allows to generate twist in the initially uniform magnetic field and increases its magnitude from 50G to $\sim 0.5\text{kG}$ in 99s. Furthermore, the transport of electromagnetic energy to the upper layers of the solar atmosphere is increased by approximately two orders of magnitude when that twist is considered. Finally, we found that the maximum of the magnetic field divergence for each simulation is remained at the order of 10^{-20} T/m, which guarantees the absence of magnetic monopoles.

¹Bachelor Thesis

²Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Adviser: Fabio Duvan Lora Clavijo, Ph.D.

Índice general

Introducción.	7
1 Introducción	7
2 Aspectos generales del Sol	11
3 Ecuaciones de la Magnetohidrodinámica	14
3.1 Adimensionalización de las ecuaciones de la MHD	16
3.2 Estado inicial y de equilibrio	16
3.2.1 Modelo de Temperatura en la Atmósfera Solar	17
3.2.2 Configuraciones iniciales	20
3.3 Condiciones de frontera	23
3.4 Métodos numéricos	24
4 Resultados	26
4.1 Simulaciones 2D	26
4.2 Simulaciones 3D	29
5 Conclusiones	39
Bibliografía	41
A Diferencias Finitas	47
B Transporte de flujo restringido	51
B.1 Cálculo de la divergencia del campo magnético	56

Índice de figuras

2.1	Modelo de las capas del Sol	11
3.1	Comparación entre los modelos de temperatura de Del Zanna y de Vernazza	17
3.2	Estado de equilibrio de la temperatura, presión y densidad	19
3.3	Valor plasma beta en estado de equilibrio	20
3.4	Campo de velocidades en estado inicial para los modelos 2D	21
3.5	Campos de velocidades en estado inicial para los modelos axial y axial con <i>twist</i> 3D	23
3.6	Campo de velocidades en estado de equilibrio para el modelo con <i>twist</i> 3D	23
4.1	Evolución temporal de los campos de velocidades para las simulaciones 2D	27
4.2	Evolución temporal de los campos magnéticos para las simulaciones 2D	28
4.3	Valores máximos de la divergencia del campo magnético para las simulaciones 2D	29
4.4	Evolución temporal de isocontornos para la densidad para las simulaciones 3D	30
4.5	Evolución temporal de isocontornos para la densidad para las simulaciones 3D	32
4.6	Evolución temporal de los campos de velocidades para las simulaciones 3D	33
4.7	Evolución temporal de los campos de velocidades para las simulaciones 3D	34
4.8	Evolución temporal de los campos magnéticos para las simulaciones 3D	35
4.9	Evolución temporal de los campos magnéticos para las simulaciones 3D	36
4.10	Comparación de la evolución temporal de la densidad volumétrica de energía magnética para las simulaciones 3D	37
4.11	Comparación de la evolución temporal de la magnitud del vector de Poynting para las simulaciones 3D	38
4.12	Valores máximos de la divergencia del campo magnético para las simulaciones 3D	38
A.1	Malla numérica	48
A.2	Moléculas para primera derivada a segundo orden	50
B.1	Elemento de volumen de la intercelda	52
B.2	Cara lateral derecha del elemento de volumen	53
B.3	Caras posterior y superior del elemento de volumen	54
B.4	Flujos en las caras de los cubos de las interceldas	55

Capítulo 1

Introducción

Por su cercanía con la Tierra, los fenómenos que ocurren en el Sol afectan el acontecer diario en este planeta de diferentes maneras, desde cambios en el viento solar que ponen en riesgo la vida de los astronautas (Turner, 2001), hasta la radiación que perjudica a los pasajeros de vuelos comerciales y a los satélites (Horne, 2013), afectando las comunicaciones. Es por esta influencia directa que el estudio de esta estrella tiene gran importancia para la física en la era actual, sobre todo teniendo en cuenta la creciente dependencia de la vida moderna con la tecnología. Por otra parte, al entender algunos de los fenómenos solares se están develando los secretos de las demás estrellas del universo, pues este astro sirve de laboratorio para comprender aspectos como el comportamiento del plasma (Alfvén, 1963) y los procesos de fusión nuclear que se presentan en su núcleo.

Entre las distintas teorías de plasma, la magnetohidrodinámica (MHD) ha probado modelar con gran precisión los fenómenos ondulatorios que exhiben las estructuras magnéticas de la atmósfera solar y los cuales, se cree, dan origen a las eyecciones de masa coronal, fulguraciones, prominencias y además calientan la corona solar (Schmelz, 2015). La teoría de la MHD acopla la dinámica de fluidos y las leyes de Maxwell para describir el comportamiento del plasma, o en general, de fluidos eléctricamente conductores en presencia de campos magnéticos. Su rango de aplicabilidad tiene como criterios que el fluido sea no relativista y que se mueva a bajas frecuencias, teniendo como consecuencia que las corrientes de desplazamiento, la fuerza eléctrica y la densidad de energía eléctrica sean despreciables (Priest, 2014).

Dentro de las estructuras de más interés en la atmósfera, están los tubos de flujo magnético. Las observaciones han mostrado que en la fotosfera existen pequeños tubos de flujo magnético aislados (Solanki, 1997; Zwaan, 1978) con campos magnéticos fuertes, cerca de 2kG, y radios de aproximadamente 100km (Stenflo, 1989, 2017). Sin embargo, en la corona no se presentan estructuras tubulares, ya que se ha observado que esta capa de la atmósfera solar está completamente llena de campo magnético (Roberts, 1997). Debido a su morfología, dichos tubos pueden transportar energía y

momentum hacia las capas más externas de la atmósfera, tal como lo presentan Kuridze and Zaqarashvili (2008) en su artículo acerca de las oscilaciones de 3-minutos, las cuales son dominantes en la capa de la cromosfera y a determinado valor del plasma beta (β) presentan fenómenos de acople, los que permiten que la onda pase a través de la región de transición y transporte energía a la corona. Estos fenómenos de acople han sido observados (Muglach et al., 2005) y estudiados tanto analíticamente (Zaqarashvili and Roberts, 2006) como numéricamente (Rosenthal et al., 2002).

El estudio de la topología de los tubos de flujo magnético ha sido uno de los objetivos de diferentes misiones tanto terrestres como espaciales. Entre las más concluyentes están las observaciones hechas por *Hinode/EIS/XRT* y *STEREO/SECCHI/EUVI* de la radiación ultravioleta extrema y los rayos X emitidos por el Sol, en las que se detectó la presencia de sistemas magnéticos con helicidad, constituidos por múltiples hilos enlazados que se interpretan como tubos de flujo magnético con *twist* (Raouafi, 2009). También están las observaciones del magnetograma *THEMIS*, las cuales fueron utilizadas por Canou (2009) para estudiar la configuración del Sol antes de eventos eruptivos, mostrando la existencia de cuerdas de flujo magnético en la atmósfera solar. Luego de ser aceptada y comprobada observacionalmente la presencia de *twist* en tubos de flujo magnético en la atmósfera solar, Warnecke (2012) utilizó datos de viento solar y simulaciones para calcular dicha helicidad.

El estudio numérico del comportamiento de los tubos de flujo magnético con *twist* inició con Mikic (1990), quien estudió su evolución dinámica y generación mediante vórtices fotosféricos. Luego Emonet (1998) estimó la cantidad mínima de *twist* para que los tubos no colapsaran a vórtices y analizó su evolución teniendo en cuenta efectos de compresibilidad, resistividad óhmica y una atmósfera estratificada adiabáticamente. Por otra parte, Longcope (2000) diseñó un modelo dinámico que conecta un tubo de flujo subfotosférico con *twist* con un campo coronal, mediante el cual estudió la aparición de tubos de flujo en la corona, sus efectos sobre las demás estructuras y las ondas torsionales de Alfvén que surgen. Asimismo Martínez-Sykora (2008) realizó un estudio numérico acerca de la aparición de tubos que nacen en la zona convectiva y mueren en la corona, considerando conducción térmica y transferencia radiativa.

Debido a la complejidad que añade la introducción de la componente de *twist* a las ecuaciones, los desarrollos analíticos son escasos. Entre los más relevantes está el realizado por Bennett (1999), quien investigó acerca de las oscilaciones en un medio incompresible y encontró la relación de dispersión para el caso de *twist* uniforme, concluyendo que para dicha configuración de campo magnético se perciben modos híbridos de oscilación entre internos y superficiales. Posteriormente, Cheremnykh (2017) utilizó la misma relación de dispersión para mostrar que las oscilaciones tipo kink no se afectan por la presencia de *twist* magnético interno en estado de equilibrio y por el contrario, las oscilaciones torsionales sí son sensibles a un determinado perfil radial de *twist*.

El interés por observar los cambios que presenta la inclusión de *twist* en los sistemas modelados, inspiró a estudiar su generación (Hotta, 2012), evolución (Malanushenko, 2011; Reale, 2016) y efectos sobre los modos de oscilación. Terradas (2012) se enfocó en las oscilaciones kink transversales y calculó los modos propios de propagación de las ondas MHD para una configuración de *loop* con *twist*. Giagkiozis (2015) mostró el acople entre el *twist* magnético y las ondas de Alfvén axialmente simétricas y Ebrahimi (2017) analizó la alteración de las ondas kink en anillos coronales considerando *twist* no uniforme. De la misma manera, la cantidad de *twist* en los tubos de flujo se estimó mediante modelos como el hecho por Poisson (2015), el cual concluyó que las cuerdas de flujo subfotosféricas usualmente tienen poca cantidad de *twist*, resultado que concuerda con el encontrado por Zaqarashvili (2014), quien afirma que tubos con gran cantidad de *twist* no son frecuentes debido a la inestabilidad kink.

Recientemente se han realizado simulaciones con sistemas más realistas como el presentado por Iijima (2017), quien propuso un modelo acertado de convección térmica cerca de la superficie solar y obtuvo, mediante la excitación de las ondas MHD, jets cromosféricos con campo magnético con *twist*. Del mismo modo, Sen and Mangalam (2018) planteó un tubo de flujo magnético con *twist* desde la fotosfera hasta la región de transición con atmósfera estratificada, cuyos resultados estiman el radio de un punto magnético brillante y su intensidad de campo magnético de manera consistente con lo observado.

Otros trabajos presentan el efecto de diferentes configuraciones de *twist* en la relación de dispersión, el periodo de oscilación de las ondas y la interacción entre los distintos modos de oscilación, tanto para el caso de tubo incompresible (Erdélyi and Fedun, 2006a,b) como compresible (Erdélyi and Fedun, 2007). Además Sturrock and Hood (2016) muestran cómo la intensidad del campo magnético y la inclusión de *twist* en este, afecta la rotación de las manchas solares, las cuales se cree que tienen estrecha relación con fenómenos como la reconexión magnética y el calentamiento coronal. De igual manera Murawski et al. (2016) describen la respuesta de un tubo de flujo magnético a la inclusión de *twist* en la fotosfera, obteniendo rotación en las líneas de campo magnético y prediciendo la aparición de una inestabilidad tipo Kelvin-Helmholtz entre el tubo y el medio que lo rodea. Esta inestabilidad también ha sido estudiada por Karampelas and Van Doorselaere (2018), ya que dicho proceso intensifica la transferencia de energía y el calentamiento de loops coronales en presencia de mecanismos de disipación como la resistividad.

Además del *twist* en las líneas de campo magnético, con el fin de llevar a cabo simulaciones más realistas, se han desarrollado perfiles de temperatura como el observacional realizado por Vernazza et al. (1981) conocido como el modelo VAL III C o el perfil analítico propuesto por Del Zanna et al. (2005), el cual es una muy buena aproximación del observacional. Estos modelos de temperatura presentan cierta flexibilidad al momento de obtener perfiles de presión y densidad, ya que, aunque se relacionan me-

dianete la ecuación de estado y de equilibrio hidrostático, existe una constante que ajusta dichos perfiles y por tanto, da paso a diferentes modelos ([Kudoh and Shibata, 1999](#)).

Con la anterior motivación, en este trabajo de grado se busca estudiar la propagación de ondas magnetohidrodinámicas en un medio similar al de la atmósfera solar, con el fin de comparar la cantidad de energía transportada a sus capas superiores para diferentes modelos de campos magnéticos y de velocidades con y sin *twist*. El presente trabajo está organizado de la siguiente forma: en el capítulo 2 se describe de manera general la composición del Sol, su estructura y funcionamiento. En el capítulo 3 se modela la atmósfera solar mediante las ecuaciones de la MHD con sus respectivas aproximaciones, luego de esto, se añaden los perfiles de temperatura, densidad y presión iniciales, junto con la configuración del sistema en el estado de equilibrio y las condiciones de frontera empleadas, además de los métodos numéricos, como lo son las diferencias finitas, el método de líneas y el transporte de flujo restringido (ver apéndices A, B). En el capítulo 4 se muestran los resultados obtenidos y finalmente en el capítulo 5 se presentan las conclusiones de las simulaciones realizadas.

Capítulo 2

Aspectos generales del Sol

El Sol es una esfera de plasma, cuya masa está mayormente compuesta por Hidrógeno (73%) y Helio (25%). Además de esto, también contiene Carbono, Nitrógeno, Oxígeno y otros gases en cantidades tan pequeñas que solo logran constituir el 2% de su masa (Payne, 1925). Dichos átomos se mantienen juntos formando la estructura esférica del Sol debido a la atracción gravitacional de los mismos, la que a su vez se compensa con la presión que generan los procesos nucleares que se llevan a cabo en su núcleo.

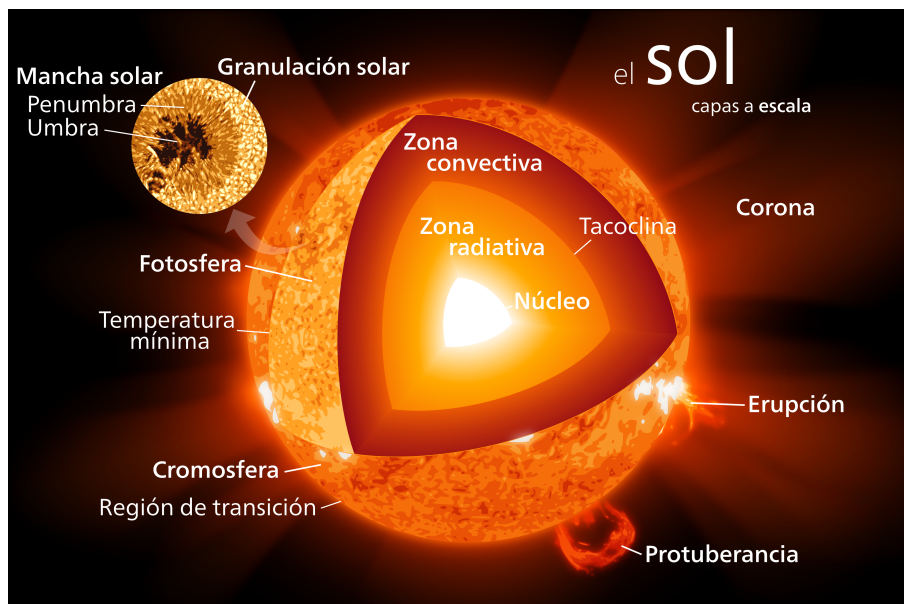


Figura 2.1: Capas internas y externas del Sol a escala, en presencia de algunos de los fenómenos más recurrentes en ellas.

El modelo más aceptado (Ryan and Norton, 2010) indica que el interior del Sol (Hansen et al., 2004) está conformado por un núcleo en el centro, una zona de radiación y una zona de convección (ver figura 2.1). El núcleo contiene la mitad de la masa del Sol en

un radio de 150Mm, lo que equivale a $0,25R_{\odot}$, donde se llevan a cabo diversos procesos de fusión nuclear. El más significativo de estos procesos es la cadena protón-protón, una reacción en la cual, a partir de átomos de Hidrógeno se genera Helio. Otro proceso es el ciclo CNO el cual, mediante el uso de Carbono, Nitrógeno, Oxígeno e Hidrógeno, genera átomos de Helio. Esta última reacción no es tan conocida ya que para estrellas del tamaño del Sol, no es dominante. La energía generada en el núcleo viaja hacia la zona de radiación, la cual contiene materia con una densidad tal que los fotones no pueden viajar libremente por lo que éstos colisionan y son dispersados, aumentando así su longitud de onda desde rayos gamma hasta luz visible cuando alcanza la superficie, demorando su transporte a la parte más exterior de esta zona. El fenómeno mediante el cual la energía atraviesa la zona de radiación en forma de fotones que son continuamente absorbidos y emitidos es llamado difusión de radiación. Por otra parte, en la zona de convección la energía es transportada a la superficie del Sol en forma de calor mediante corrientes convectivas. Además, debido a que la zona de radiación gira como un sólido rígido y la zona de convección presenta rotación diferencial (Spiegel and Zahn, 1992), es decir, rota más rápidamente en regiones ecuatoriales que en los polos, se provoca gran cizalladura entre ambas capas creando una zona de transición para dicha rotación, llamada la tacoclina.

La atmósfera se define como la parte del Sol desde la que los fotones pueden escapar directamente hacia el espacio (Priest, 2014); está compuesta por la fotosfera, la cromosfera y la corona solar (ver figura 2.1), donde cada región se distingue por sus diferentes propiedades físicas (Payne, 1925). La fotosfera consta de gránulos o celdas de convección, se diferencia de las demás capas por ser la zona desde donde la mayor parte de la luz visible es radiada y por la presencia de fenómenos como las manchas solares y las fáculas; su temperatura aproximada en la base es de 6000K y de 4000K en su exterior. En la cromosfera la temperatura disminuye hasta 3800K justo antes de aumentar hasta los 35000K en su parte más externa; en ella se observan fenómenos muy complejos como las protuberancias, las fulguraciones o erupciones, las espículas, las fibrillas, las playas solares, entre otros. La última capa de la atmósfera es la corona solar, la cual es un aura de plasma de baja densidad a una temperatura de tres millones de grados Kelvin con características especiales como la presencia de anillos coronales, cavidades filamentosales, puntos brillantes, fulguraciones, viento solar y la más notable, el calentamiento coronal.

Por otra parte, entre la cromosfera y la corona existe una capa que se conoce como la zona de transición (Mariska, 1986), la cual es una región que no se distingue por su altura ni por un espesor determinado, sino porque, tal como su nombre lo indica, en esta región se llevan a cabo algunos cambios en las características de la atmósfera solar como una variación abrupta en la temperatura, presión y densidad. Debajo de dicha zona domina la presión del fluido y por encima la presión magnética, lo cual está determinado por el valor plasma beta $\beta = P/P_{mag}$, que en la fotosfera y cromosfera corresponde a $\beta > 1$, en la zona de transición a $\beta = 1$ y en la corona a $\beta < 1$. Esto implica que la densidad volumétrica de energía térmica controla el comportamiento del

plasma en la parte interior de la atmósfera, mientras que en la corona solar es la densidad volumétrica de energía magnética la que domina y modifica las estructuras de los diferentes fenómenos solares.

Capítulo 3

Ecuaciones de la Magnetohidrodinámica

La magnetohidrodinámica es un modelo matemático que describe la interacción a bajas frecuencias entre campos magnéticos y fluidos eléctricamente conductores, como el plasma y los metales líquidos. Por su dedicación en el desarrollo de esta nueva rama, le fue otorgado, a Hannes Alfvén el premio Nobel de física en 1970 (Alfvén, 1971). En esta teoría, el fluido puede ser caracterizado por pocos parámetros como la densidad de masa, la velocidad y la presión, y sus propiedades materiales son independientes del tamaño físico de la muestra (Schnack, 2009).

Las ecuaciones de la MHD surgen del acoplamiento entre las ecuaciones hidrodinámicas y las leyes de Maxwell mediante la ley de Ohm bajo la aproximación de bajas frecuencias y velocidades, es decir, para un fluido no relativista. Dichas aproximaciones afectan las ecuaciones ya que permiten desprestigiar las corrientes de desplazamiento, la fuerza eléctrica y la densidad de energía eléctrica (Priest, 2014). Un plasma se define como un estado gaseoso ionizado a altas temperaturas, que presenta globalmente neutralidad de carga ($\rho_q \approx 0$) y localmente interacciones colectivas entre partículas cargadas y ondas (Miyamoto, 2005). Con lo anterior y considerando un plasma no viscoso con pérdidas de energía únicamente debido a la resistividad eléctrica, las ecuaciones que lo describen son

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] + \nabla P - \rho \vec{g} - \vec{J} \times \vec{B} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla P + \gamma P \nabla \cdot \vec{v} = (\gamma - 1) \eta J^2, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \eta \nabla^2 \vec{B}, \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.5)$$

donde ρ denota la densidad de masa, \vec{v} la velocidad, P la presión, \vec{g} la aceleración de

la gravedad, \vec{J} la corriente eléctrica ($\mu_0 \vec{J} = \nabla \times \vec{B}$), \vec{B} el campo magnético, $\gamma = 5/3$ es el coeficiente adiabático de los gases y η la resistividad eléctrica.

Para el estudio de la propagación de ondas, se considera un estado de equilibrio donde las variables están dadas por $\rho = \rho_0(\vec{r})$, $P = P_0(\vec{r})$, $\vec{v} = \vec{v}_0(\vec{r}) = 0$, $\vec{B} = \vec{B}_0(\vec{r})$, de tal forma que las ecuaciones (3.1-3.5) se reducen y el estado de equilibrio queda descrito por la siguiente expresión

$$\nabla P_0 - \rho_0 \vec{g} - \vec{J}_0 \times \vec{B}_0 = 0, \quad (3.6)$$

sujeto a las restricciones dadas por

$$\eta J_0^2 = 0, \quad \eta \nabla^2 \vec{B}_0 = 0. \quad (3.7)$$

Bajo estas condiciones, se perturban las variables en dicho estado de equilibrio de la siguiente forma

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) + \rho_1(\vec{r}, t), \quad (3.8)$$

$$P(\vec{r}, t) = P_0(\vec{r}) + P_1(\vec{r}, t), \quad (3.9)$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_1(\vec{r}, t), \quad (3.10)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r}) + \vec{B}_1(\vec{r}, t), \quad (3.11)$$

donde se denotó por ρ_1 , P_1 , \vec{v}_1 , \vec{B}_1 a las perturbaciones de la densidad, presión, velocidad y campo magnético, respectivamente. Dichas perturbaciones, al ser reemplazadas en las ecuaciones y despreciados los términos no lineales, dan paso a las ecuaciones de la MHD perturbadas y linealizadas

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0, \quad (3.12)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \nabla P_1 - \rho_1 \vec{g} - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla P_0 + \gamma P_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = \frac{\gamma - 1}{\mu_0^2} \eta \left[(\nabla \times \vec{B}_0)^2 + 2 (\nabla \times \vec{B}_0) \cdot (\nabla \times \vec{B}_1) \right], \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) = \eta (\nabla^2 \vec{B}_0 + \nabla^2 \vec{B}_1), \quad (3.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad \wedge \quad \nabla \cdot \vec{B}_1 = 0. \quad (3.16)$$

Cabe aclarar que en el desarrollo anterior la aceleración de la gravedad (\vec{g}) puede estar dada por un campo vectorial no uniforme, permitiendo definir una atmósfera estratificada gravitacionalmente, lo cual es un acercamiento a un modelo más realista. También es importante resaltar que el campo magnético se consideró no uniforme con el propósito de introducir efectos de *twist*. Bajo estas consideraciones, y asumiendo un modelo realista para la temperatura de la atmósfera solar y despreciando los efectos de la resistividad, la resolución del sistema de ecuaciones (3.12-3.16) debe hacerse empleando métodos numéricos. Dado que las ecuaciones son lineales, se realiza la discretización

con diferencias finitas (ver apéndice A), en lugar de métodos más complejos como los volúmenes finitos, los cuales son muy usados para resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales tipo conservativas.

3.1. Adimensionalización de las ecuaciones de la MHD

El uso de métodos numéricos requiere que se lleve a cabo un escalamiento y adimensionalización de las ecuaciones, puesto que algunos valores son extremadamente grandes o pequeños respecto a los demás, lo que puede causar errores numéricos. Dicho proceso se realiza usando valores de adimensionalización denotados por un subíndice a , los que se relacionan mediante

$$t_a = \frac{l_a}{v_a}, \quad v_a = \frac{B_a}{\sqrt{\mu_0 \rho_a}}, \quad (3.17)$$

así, las variables y los operadores físicos, denotados por el subíndice cero, se adimensionalizan por medio de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= t_a \frac{\partial}{\partial t_0}, & \frac{\partial}{\partial x_i} &= l_a \frac{\partial}{\partial x_{i0}}, & l &= \frac{l_0}{l_a}, & v_i &= \frac{v_{x0}}{v_a}, \\ t &= \frac{v_a}{l_a} t_0, & \rho &= \frac{\rho_0}{\rho_a}, & P &= \frac{P_0}{\rho_a v_a^2}, & B_i &= \frac{B_{0i}}{v_a \sqrt{\mu_0 \rho_a}}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde los valores de las variables de adimensionalización se escogieron como $l_a = 1\text{Mm}$, $v_a = 1\text{Mms}^{-1}$ y $\rho_a = 10^7 \text{kgMm}^{-3}$, con los que se obtuvieron los demás valores relacionados por las expresiones (3.17), de tal manera que $t_a = 1\text{s}$, $B_a = 3,5449 \times 10^{-3}\text{T}$. Así, dicho proceso no altera los resultados debido a que solo se utiliza durante las simulaciones y posteriormente se recuperan los valores físicos de las variables.

De esta manera, las ecuaciones de la MHD ideal ($\eta = 0$) adimensionalizadas, en el régimen lineal, para un fluido compresible, lucen iguales que las presentadas en las ecuaciones (3.12-3.16), con la diferencia de que μ_0 no aparece, ya que se cancela con las demás variables de la adimensionalización, esto se prueba utilizando la expresión para la velocidad de Alfvén ($v_a = B_a/\sqrt{\mu_0 \rho_a}$).

3.2. Estado inicial y de equilibrio

Se propone un estado de equilibrio correspondiente a un Sol en calma, es decir, sin tener en cuenta ninguno de sus fenómenos, mediante la inclusión de un perfil aproximado de temperatura con el cual se obtienen los perfiles de densidad y presión, además de un campo magnético ($\vec{B} = 5 \times 10^{-3}\text{T} \hat{e}_z$) y aceleración de la gravedad ($\vec{g} = -274\text{ms}^{-2} \hat{e}_z$) uniformes y axiales. Dicho estado se altera a tiempo inicial por medio de perturbaciones

en las componentes del campo de velocidades, modelados como pulsos gaussianos, que pueden ser causados por modos p (Jain et al., 2011).

3.2.1 Modelo de Temperatura en la Atmósfera Solar El modelo de temperatura de Del Zanna et al. (2005) es un perfil analítico que se ajusta de manera aproximada a la forma del modelo VAL III C (Vernazza et al., 1981), tal como se observa en la figura 3.1, el cual se construyó a partir de datos observacionales de un Sol en calma. Del Zanna propuso la temperatura en equilibrio estratificada a lo largo del eje z , el cual representa la altura en la atmósfera solar empezando desde la fotosfera, de manera que siguiera la forma dada por

$$T_0(z) = \frac{1}{2} (T_{cor} + T_{phot}) + \frac{1}{2} (T_{cor} - T_{phot}) \tanh \left(\frac{z - z_t}{z_w} \right), \quad (3.19)$$

donde $T_{cor} = 1,2 \times 10^6 \text{K}$ es la temperatura en la corona solar y $T_{phot} = 6000 \text{K}$ la temperatura en la fotosfera, las cuales se separan por una región de transición con espesor $z_w = 0,25 \text{Mm}$ y cuya posición se define por $z_t = 2,7 \text{Mm}$.

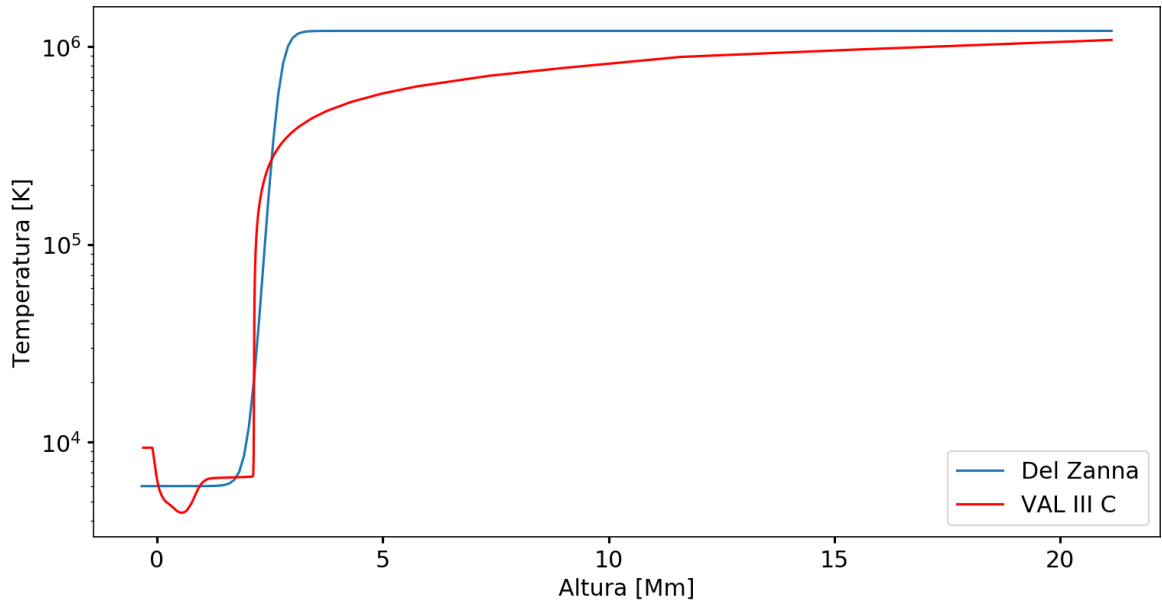


Figura 3.1: Comparación entre el modelo de temperatura de Del Zanna y datos observacionales del modelo VAL III C.

En la gráfica 3.1 se determina la base de la altura, es decir $z = 0 \text{Mm}$, como la superficie solar, es decir la parte más baja de la fotosfera. Según el modelo de las capas de la atmósfera solar de la NASA¹, se estima que la fotosfera tiene un grosor aproximado de $0,4 \text{Mm}$, la cromosfera termina a una altura de $2,1 \text{Mm}$, desde la cual empieza la región

¹Tomado de <https://goo.gl/vUFsCV>

de transición cuyo grosor es muy impredecible, ya que depende de la manifestación de ciertas características, aun así se considera que su espesor promedio es de 0,1Mm y que después de ella se encuentra la corona solar, la cual tiene un límite superior no definido.

Las variables temperatura, presión y densidad en el estado de equilibrio se relacionan por medio de las siguientes expresiones

$$P_0 = \frac{2K_B}{m_p} \rho_0 T_0, \quad \nabla P_0 - \rho_0 \vec{g} - \vec{J}_0 \times \vec{B}_0 = 0, \quad (3.20)$$

siendo estas la ecuación de estado para un gas ideal y la ecuación de equilibrio hidrostático respectivamente, donde K_B es la constante de Boltzmann, m_p la masa del protón y $\vec{J}_0 = \nabla \times \vec{B}_0 / \mu_0$. Considerando que el campo magnético en equilibrio es constante, la densidad de corriente eléctrica en equilibrio es cero ($\vec{J}_0 = 0$) y por tanto, la densidad de fuerza de Lorentz $\vec{f}_{L_0} = \vec{f}_{E_0} + \vec{f}_{M_0} \approx \vec{f}_{M_0} = \vec{J}_0 \times \vec{B}_0 = 0$, indicando así que el campo magnético es libre de fuerza ([Wiegelmann and Sakurai, 2012](#)). Debido a que la aceleración de la gravedad actúa únicamente a lo largo del eje z , de manera que $\vec{g} = -g\hat{e}_z$ y utilizando la ecuación de estado para un gas ideal, el equilibrio hidrostático del sistema queda descrito por

$$\frac{dP_0}{dz} + \frac{m_p g}{2K_B} \frac{P_0}{T_0} = 0, \quad (3.21)$$

ecuación con la cual, se encuentra la expresión de la presión en términos de la temperatura y posteriormente la densidad en términos de presión y temperatura. Recordando que todas estas variables pertenecen al estado de equilibrio

$$P_0(z) = P_0(z_0) \exp \left[-\frac{m_p g}{2K_B} \int_{z_0}^z \frac{dz'}{T_0(z')} \right], \quad (3.22)$$

$$\rho_0(z) = \frac{m_p}{2K_B} \frac{P_0(z)}{T_0(z)}, \quad (3.23)$$

donde z_0 se escoge como $z_0 = 0$ Mm y representa la base de la fotosfera, $P_0(z_0)$ es la presión en z_0 en el estado de equilibrio, la cual se ajusta de tal manera que corresponda a la tomada por [González-Avilés and Guzmán \(2015\)](#) en dicho punto, es decir, $P(z_0) = 24,8$ Pa.

Se debe tener en cuenta que los valores de z_w y z_t no son los mismos del modelo de Del Zanna, ya que el código numérico se limita al régimen lineal y por tanto se escogieron valores apropiados de tal manera que no generaran cambios muy abruptos que pudieran tomarse como discontinuidades e introdujeran errores en los resultados de las simulaciones. Esta misma es la razón por la cual es necesario utilizar un modelo aproximado de temperatura en vez de los datos observacionales del modelo VAL III C.

El modelo presentado en la figura 3.2 es una simplificación de las observaciones para lograr caracterizar la atmósfera solar mediante sus propiedades principales. Aun así, ésta está compuesta de plasma que se comporta de manera poco uniforme, su temperatura y densidad van cambiando continuamente mientras su temperatura varía debido a los diferentes procesos físicos presentes en cada región.

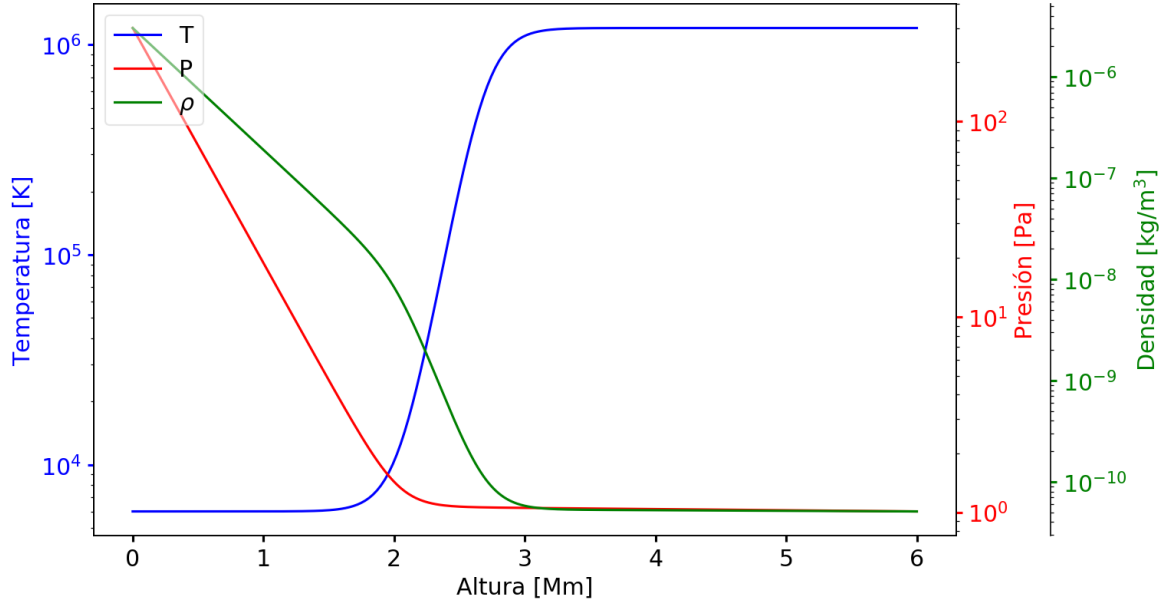


Figura 3.2: Modelo de temperatura de Del Zanna, presión y densidad en estado de equilibrio para la atmósfera solar.

Además de esto, en la figura 3.3 se aprecia el comportamiento del plasma beta en el estado de equilibrio, el cual es un parámetro adimensional que se define como la razón entre la presión del fluido y la presión magnética

$$\beta = \frac{P}{P_{mag}} = \frac{2\mu_0 P}{B^2}, \quad (3.24)$$

siendo equivalente a una relación entre la densidad volumétrica de energía térmica y magnética, y por tanto permite distinguir las zonas en las que cada energía domina y modifica la estructura del fluido.

Se observa en la figura 3.3 que para las capas inferiores de la atmósfera solar (fotosfera y cromosfera), la energía térmica es dominante, es decir $\beta > 1$, luego se encuentra la zona de transición, en la que $\beta \approx 1$ y para la corona solar, donde $\beta < 1$, es la energía magnética la que controla al fluido; estando esto en concordancia con los estudios realizados por Mariska (1986) acerca de la región de transición.

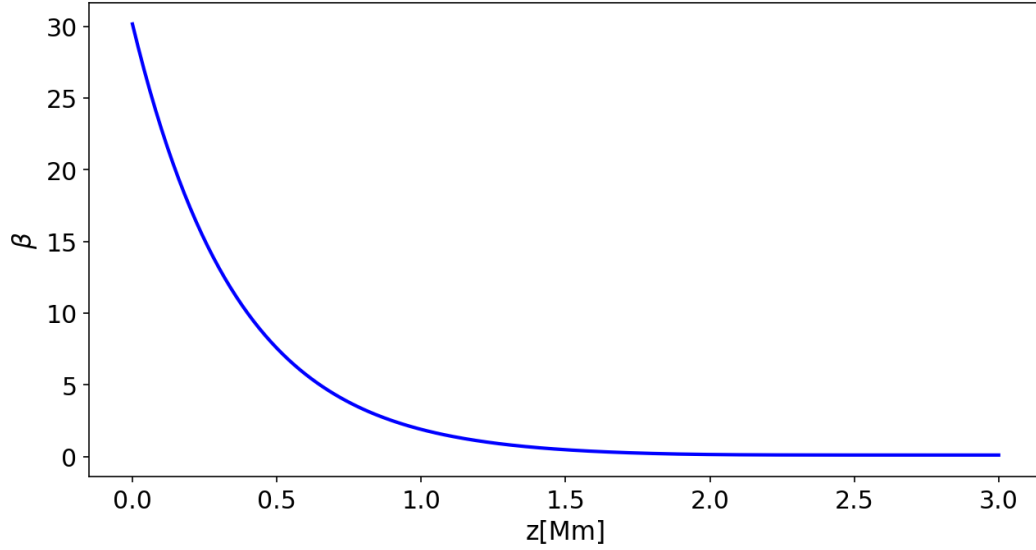


Figura 3.3: Valor plasma beta en el estado de equilibrio en función de la altura.

3.2.2 Configuraciones iniciales Las configuraciones iniciales corresponden a las perturbaciones sobre el estado de equilibrio previamente descrito. A tiempo inicial las perturbaciones para la densidad, presión y componentes del campo magnético son cero, en cambio, para las componentes del campo de velocidades, dichas perturbaciones siguen funciones gaussianas, las cuales deben ser lo suficientemente pequeñas para satisfacer las condiciones del régimen lineal. Con el fin de evitar discontinuidades que el régimen lineal no logre resolver, el ancho de la perturbación debe ser lo suficientemente grande, por lo que se escoge $\sigma = 0.1\text{Mm}$ en todos los casos.

Para las perturbaciones 2D, el dominio numérico correspondiente a x , y , z se escogió como $[-1,1]\text{Mm}$, $[-0.02,0.02]\text{Mm}$, $[0,3]\text{Mm}$ respectivamente, con una malla de 201 puntos en x , 5 puntos en y , 301 puntos en z , la cual tienen una resolución espacial uniforme de 10km en las tres direcciones y una resolución temporal de 0.0025s . Ya que la perturbación inicial se lleva a cabo en el plano xz ($v_{1y} = 0$), la dinámica del problema no se afecta en la dirección y . Por otra parte, para las otras direcciones se propusieron dos configuraciones iniciales, una axial y una no axial (ver figura 3.4), donde las perturbaciones de la velocidad en x , z se modelan por funciones gaussianas centradas en $x = 0\text{Mm}$, $y = 0\text{Mm}$, $z = 0,5\text{Mm}$.

1. **Simulación 2D axial:** para este caso solo la componente z de la velocidad es perturbada con una gaussiana como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
 v_{1x} &= 0, \\
 v_{1z} &= A_z \exp \left\{ -\frac{x^2 + (z - z_0)^2}{\sigma^2} \right\},
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

con una amplitud de $A_z = 3\text{km/s}$ (ver figura 3.4 izquierda).

2. **Simulación 2D no axial:** en este segundo modelo se perturban las componentes x, z del campo de velocidades de la misma forma que para el caso axial, pero con una amplitud menor en la gaussiana de x , es decir

$$\begin{aligned} v_{1x} &= A_x \exp \left\{ -\frac{x^2 + (z - z_0)^2}{\sigma^2} \right\}, \\ v_{1z} &= A_z \exp \left\{ -\frac{x^2 + (z - z_0)^2}{\sigma^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde $A_x = 1\text{km/s}$ y $A_z = 3\text{km/s}$ (ver figura 3.4 derecha).

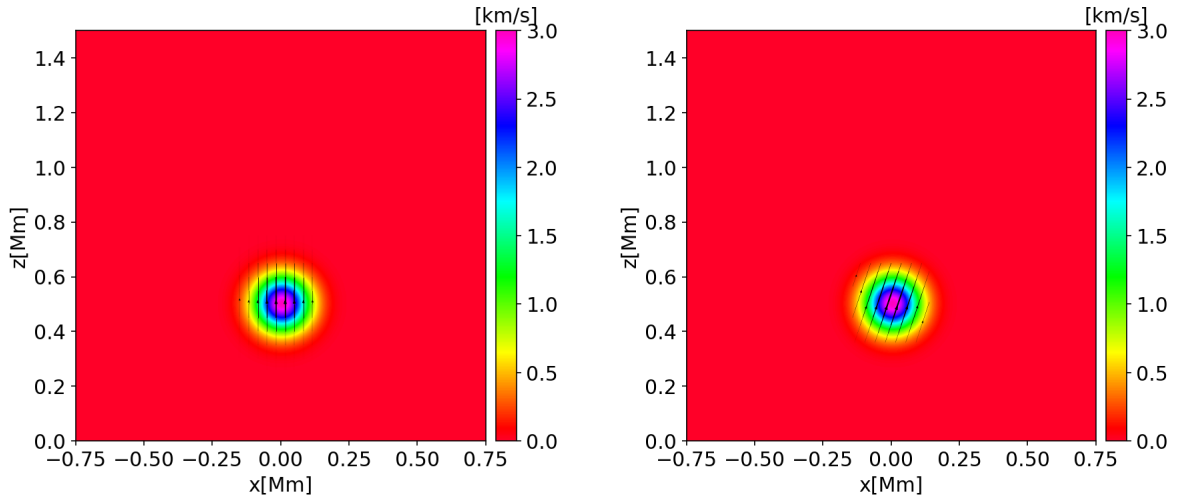


Figura 3.4: Campo de velocidades en el estado inicial para las perturbaciones axial y no axial respectivamente. El fondo corresponde a la magnitud de la velocidad a lo largo de z y las líneas al campo en x, z .

Además, se realizaron simulaciones 3D, cuyo dominio numérico en x, y, z está comprendido entre $[-1,1]\text{Mm}$, $[-1,1]\text{Mm}$, $[0,3]\text{Mm}$ respectivamente, con una malla de 101 puntos en x , 101 puntos en y , 151 puntos en z , la cual tiene una resolución espacial uniforme de 20km en las tres direcciones y una resolución temporal de 0.005s. Éstas simulaciones se hicieron con la finalidad de observar el transporte de energía cuando se incluye *twist* en el campo de velocidades. Para esto se asumieron tres casos (ver figuras 3.5 y 3.6), uno cuya perturbación es a lo largo de z , otro con una perturbación en z y con *twist* en el plano xy y un tercero únicamente con *twist* en el plano xy , cuyas perturbaciones toman la forma de funciones gaussianas centradas en $x = 0\text{Mm}$, $y = 0\text{Mm}$, $z = 0,3\text{Mm}$.

1. **Simulación 3D modelo 1:** caso en el que la única variable perturbada es la

componente z de la velocidad

$$\begin{aligned} v_{1_x} &= 0, \\ v_{1_y} &= 0, \\ v_{1_z} &= A_z \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}{\sigma^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

cuya amplitud corresponde a $A_z = 3\text{km/s}$ (ver figura 3.5 izquierda).

2. **Simulación 3D modelo 2:** con la finalidad de comparar la energía transportada a capas superiores de la atmósfera solar para modelos con y sin *twist*, para el segundo caso se asumieron perturbaciones en las tres componentes de la velocidad (Murawski et al., 2016), de manera que hay perturbación en z y en el plano xy una perturbación tipo *twist*, de la forma

$$\begin{aligned} v_{1_x} &= \frac{A_x}{\sigma} y \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}{\sigma^2} \right\}, \\ v_{1_y} &= \frac{A_y}{\sigma} x \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}{\sigma^2} \right\}, \\ v_{1_z} &= A_z \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}{\sigma^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

cuyas amplitudes equivalen a $A_x = A_y = 100\text{km/s}$, $A_z = 3\text{km/s}$ (ver figura 3.5 derecha).

Teniendo en cuenta que la perturbación en la velocidad a lo largo del eje z para los casos 3D anteriormente mencionados son demasiado pequeñas, se motiva el tercer caso en el que únicamente existe perturbación tipo *twist* (ver figura 3.6):

3. **Simulación 3D modelo 3:** la perturbación se limita a las componentes del plano xy del campo de velocidades, mediante las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} v_{1_x} &= \frac{A_x}{\sigma} y \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}{\sigma^2} \right\}, \\ v_{1_y} &= \frac{A_y}{\sigma} x \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}{\sigma^2} \right\}, \\ v_{1_z} &= 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde ambas amplitudes son $A_x = A_y = 100\text{km/s}$.

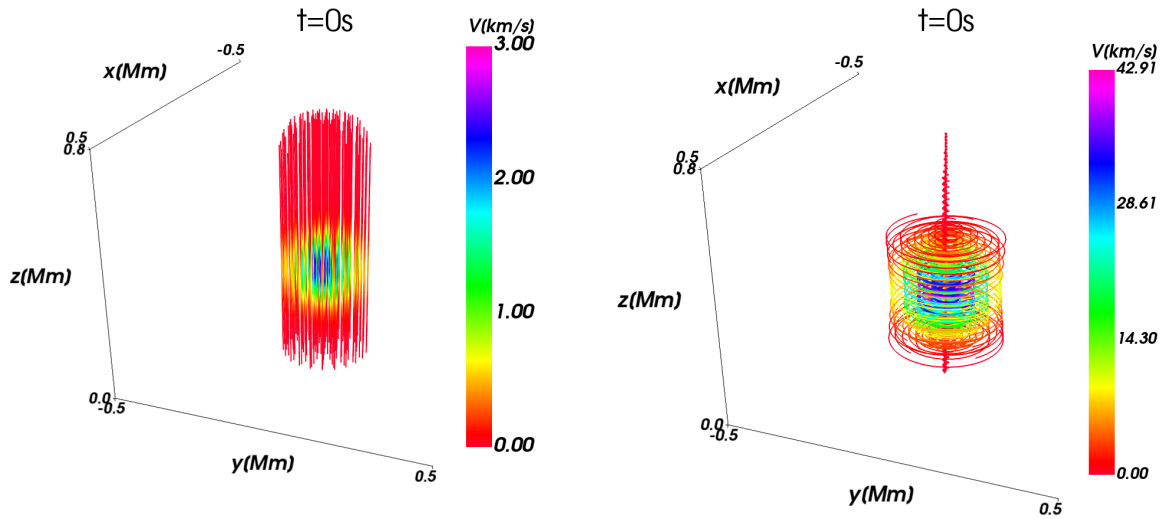


Figura 3.5: Campos de velocidades en el estado inicial, correspondiente a las perturbaciones expresadas en las ecuaciones (3.27) y (3.28).

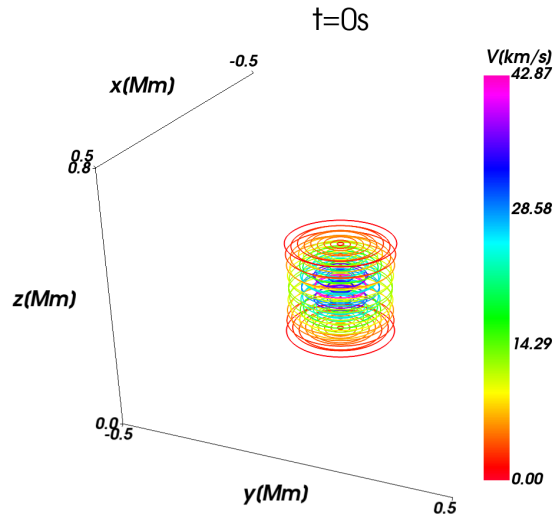


Figura 3.6: Campo de velocidades en el estado inicial, correspondiente únicamente a la perturbación en el plano xy , expresada en las ecuaciones (3.29).

3.3. Condiciones de frontera

Para la parte superior e inferior del dominio numérico se impusieron condiciones de frontera fijas (Murawski et al., 2015a,b), es decir, la evolución temporal de todas las

variables es nula, por tanto se mantienen las condiciones iniciales para dichas fronteras

$$\frac{\partial \alpha(i, j, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \alpha(i, j, N_z)}{\partial t} = 0, \quad (3.30)$$

donde α es una variable arbitraria, i, j recorren todos los puntos de la malla en los ejes x, y respectivamente y N_z es el último punto de la malla en el eje z . Esto es permitido, ya que la parte inferior se encuentra en la fotosfera, región en la que no se presentan cambios abruptos de las variables y en la parte superior se decidió poner frontera fija porque los efectos de la gravedad permitirían que entrara materia al dominio numérico perturbando los resultados.

Por el contrario, en el resto de las caras del dominio numérico se aplicaron condiciones de flujo saliente (Murawski et al., 2013) las cuales, en cada paso de tiempo, toman el valor de las variables en el punto inmediatamente anterior a la frontera en la malla numérica y se lo asignan al de la frontera apropiada

$$\begin{aligned} \alpha(0, j, z) &= \alpha(1, j, z), \\ \alpha(N_x, j, z) &= \alpha(N_x - 1, j, z), \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \alpha(i, 0, z) &= \alpha(i, 1, z), \\ \alpha(i, N_y, z) &= \alpha(i, N_y - 1, z), \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde la variable evaluada en $(0, j, k)$ y en (N_x, j, k) representa dicha variable en los planos yz que delimitan el dominio numérico a lo largo del eje x y la variable evaluada en $(i, 0, z)$ y en (i, N_y, z) representa la variable en las fronteras a lo largo del eje y , es decir planos xz . Este tipo de frontera es permitida ya que no se tienen en cuenta estructuras definidas para la simulación, sino un espacio libre y una posición determinada donde se perturban las componentes de la velocidad, por tanto lo ideal es que la materia, líneas de los campos vectoriales y demás variables puedan salir del dominio numérico.

3.4. Métodos numéricos

El método de líneas es aplicable a problemas de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera, se lleva a cabo mediante la discretización de la parte espacial de las ecuaciones diferenciales parciales, de modo que en cada punto de una malla numérica se pueda evolucionar una ecuación diferencial ordinaria por medio de un método de integración estándar como por ejemplo un Runge-Kutta (Kreiss and Scherer, 1992). Ahora, basado en el hecho de que el sistema está linealizado y con esto las funciones son continuas pues no aparecen discontinuidades ni choques, los operadores diferenciales espaciales serán aproximados por el método de diferencias finitas presentado en el apéndice A. Además de esto, se utiliza un método numérico llamado transporte de flujo restringido (ver apéndice B), para el cual se requiere que inicialmente se satisfaga que

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Dicho método integra en el tiempo la ley de Faraday, con lo que garantiza numéricamente la ausencia de monopolos magnéticos. Con base en los métodos anteriormente nombrados se creó un módulo numérico con diferencias finitas para resolver las ecuaciones de la MHD ideal linealizadas y se implementó en el código MAGNUS (Navarro, 2017). Este módulo se agregó a una subrutina para añadir el método de transporte de flujo restringido, el cual resuelve las componentes del campo magnético.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Simulaciones 2D

Con la finalidad de analizar la morfología de las ondas, en la figura 4.1 se presentan los campos de velocidades y en la figura 4.2, los campos magnéticos, tanto para la simulación axial (superiores) como para la no axial (inferiores), en los tiempos 10s, 30s y 50s de izquierda a derecha. Las figuras corresponden al plano xz en $y = 0$; la coordenada x está definida en el intervalo $[-1, 1]$ Mm y la coordenada z en el intervalo $[0, 2]$ Mm. El fondo corresponde a la componente z del campo respectivo y las líneas representan dicho campo en el plano xz . Los campos de velocidades (figura 4.1) se graficaron en unidades de km/s y los campos magnéticos en G (figura 4.2).

La estructura de los campos de velocidades tanto para el caso axial como para el no axial (ver figura 4.1) en 10s y 30s, presentan una forma de arco de choque debido a que la perturbación está en la región dominada por la energía térmica, es decir, donde $\beta > 1$ (ver figura 3.3). En cambio, la morfología del campo de velocidades en 50s presenta una leve deformación en la parte superior del arco de choque, esto se debe a que para una altura de $z \approx 1.5$ Mm, $\beta < 1$ y por lo tanto la perturbación está en una zona dominada por la energía magnética. Para verificar esta relación entre la forma del campo de velocidades y el valor plasma beta, se realizaron simulaciones con diferentes perfiles del valor β y se concluyó que para perfiles que modelan atmósferas mayormente dominadas por campos magnéticos no se obtiene la forma de arco de choque, sino que se logran estructuras similares a las obtenidas para $t = 50$ s, es decir, el frente de la onda de choque tiene un perfil plano. Esto está en concordancia con los resultados obtenidos por [Murawski et al. \(2013\)](#), donde el perfil de plasma beta tiene un máximo de $\sim 10^5$ en $z = 0$ Mm y realiza la transición aproximadamente en $z = 2$ Mm, obteniendo que la morfología tipo arco de choque se mantenga hasta esta altura y posteriormente se deforme debido a que el plasma es dominado por los campos magnéticos.

En el caso no axial (ver figura 4.1 inferior) la componente z de la velocidad muestra una estructura poco simétrica debido a la forma de la perturbación inicial, pero para tiempos mayores tiende al caso axial (superior), ya que los parámetros del medio, tales como temperatura, densidad y presión están estratificados a lo largo del eje z , de los que depende su evolución; además de que inicialmente el campo magnético es constante a lo largo de z . También se nota que la componente z del campo de velocidades para ambos casos disminuye en los primeros segundos, pero posteriormente aumenta su magnitud; esto se debe a que se impone una perturbación a tiempo inicial en $z = 0,5\text{Mm}$, altura en la que la presión y la densidad del medio toman valores grandes (ver figura 3.2) y la temperatura es baja, lo que dificulta la propagación de la perturbación, a lo que se añade la resistencia que genera la gravedad que actúa en la dirección $-\hat{e}_z$.

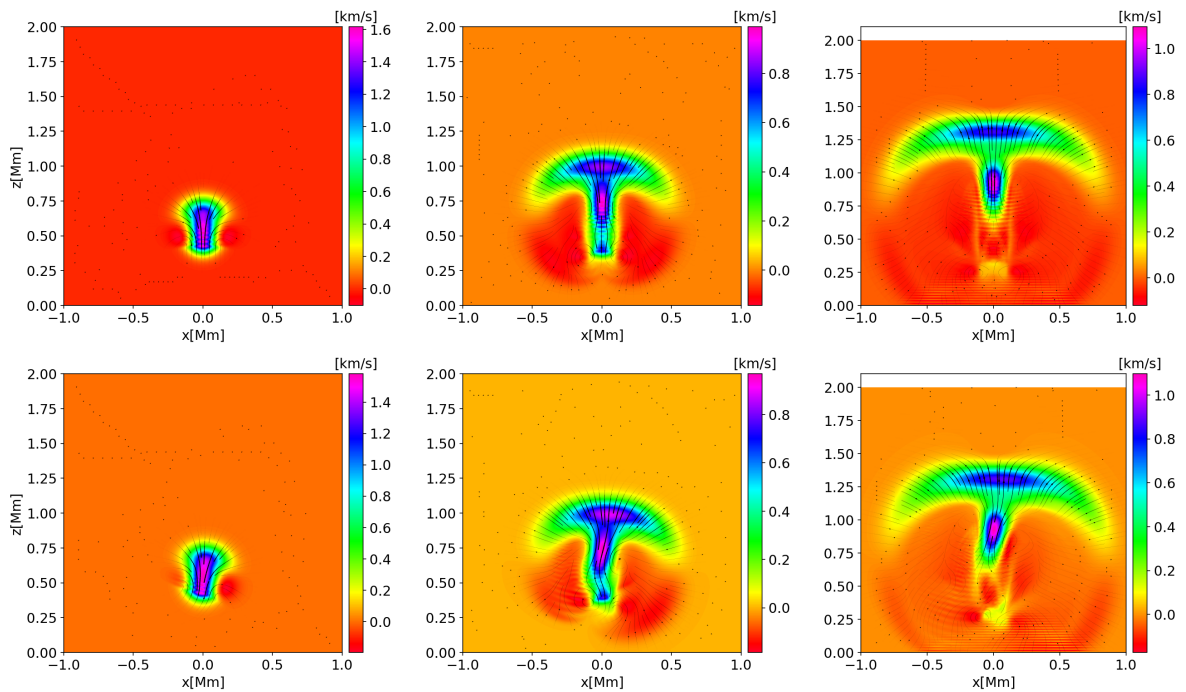


Figura 4.1: Campos de velocidades en 10s, 30s y 50s respectivamente en el plano $y = 0$, cuyo fondo corresponde al campo a lo largo del eje z , tanto para el caso axial (superior) como para el no axial (inferior).

La evolución temporal del campo magnético (ver figura 4.2) muestra que las líneas de campo no presentan deformación apreciable; en cambio la componente z del campo exhibe diferencias entre los modelos axial y no axial en tiempos cercanos al inicial, $t=10\text{s}$. Al igual que para el campo de velocidades, el caso con perturbación no axial tiende a la morfología del modelo de perturbación axial para tiempos posteriores, como se puede apreciar en las gráficas correspondientes al tiempo 50s. Además se observa que la componente z del campo magnético no varía significativamente en su magnitud.

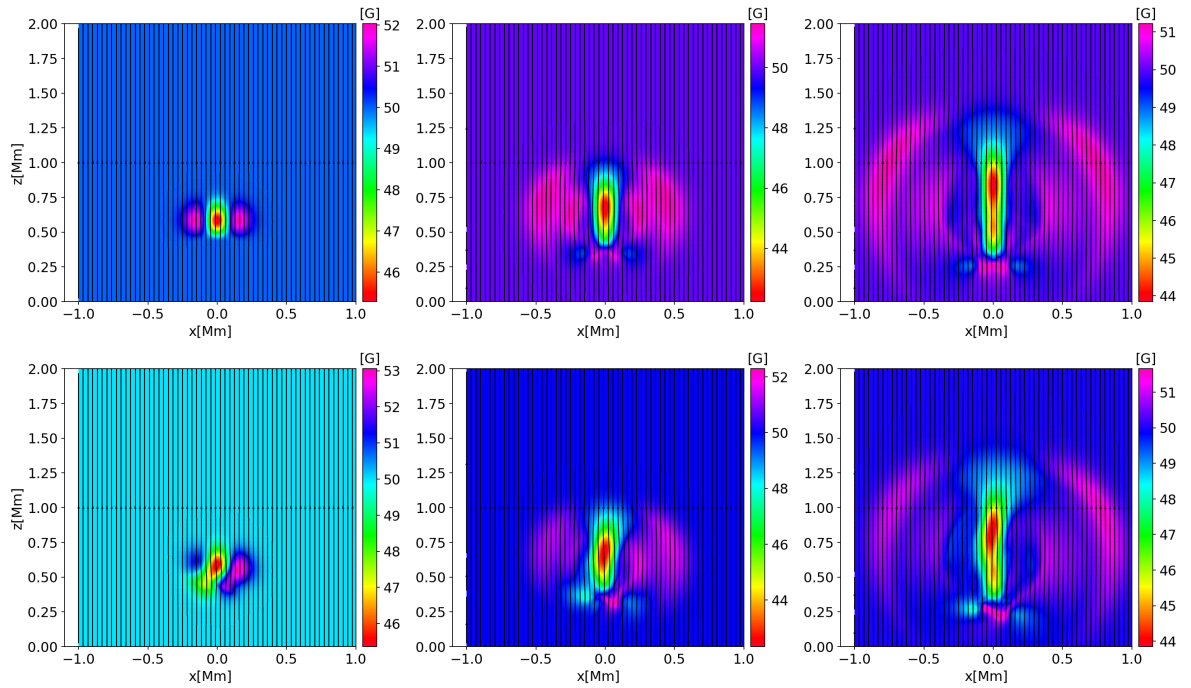


Figura 4.2: Campos magnéticos en 10s, 30s y 50s respectivamente en el plano $y = 0$, cuyo fondo corresponde a la magnitud del campo, tanto para el caso axial (superior) como para el no axial (inferior).

Finalmente, para garantizar la validez de las simulaciones, se calcula el máximo de la divergencia del campo magnético para todo tiempo. En la figura 4.3 se presenta en escala logarítmica dicho valor para todo el dominio en cada paso de tiempo desde $t=0s$ hasta $t=125s$ tanto para el caso axial como para el no axial, denotados por las líneas roja y amarilla respectivamente. En esta figura se muestra su comportamiento para ambos casos, en la que se evidencia que el mayor valor que toma es del orden de $10^{-21}T/m$, lo cual corresponde numéricamente a cero y asegurando así, que los errores numéricos no hacen que se viole la ley de Gauss para el campo magnético.

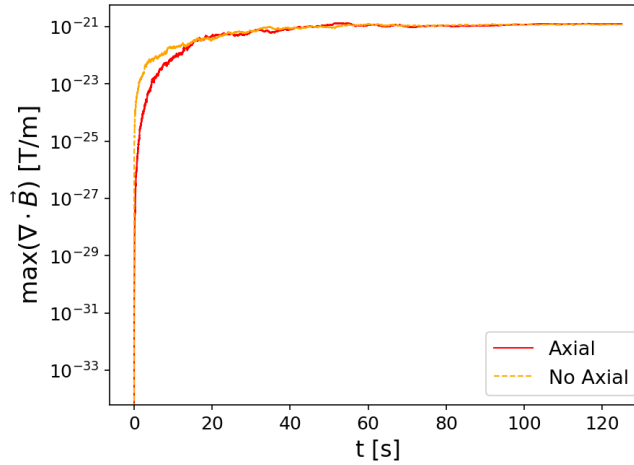


Figura 4.3: Valores máximos de la divergencia del campo magnético en cada paso de tiempo entre 0s y 125s, para las dos simulaciones realizadas para el caso 2D.

Cabe resaltar que los casos 2D corresponden a pruebas numéricas que sirven para verificar la validez de los módulos implementados en el código MAGNUS. A continuación se presentan los resultados de las simulaciones numéricas 3D, con el fin de estudiar los efectos de introducir la componente del *twist* en las perturbaciones iniciales, sobre la morfología del campo magnético y la energía transportada por las ondas MHD.

4.2. Simulaciones 3D

Con la finalidad de analizar los resultados de las simulaciones 3D, en las figuras 4.4 y 4.5 se graficó la evolución temporal de cinco isocontornos de densidad en el dominio $x \in [-0.5, 0.5] \text{Mm}$, $y \in [-0.5, 0.5] \text{Mm}$, $z \in [0, 1.2] \text{Mm}$ para los tiempos 10s, 40s, 69s y 99s de arriba a abajo, para dos perturbaciones: una a lo largo de z con *twist* en el plano xy correspondiente al modelo 2 (izquierda) y la segunda únicamente con *twist* en el plano xy correspondiente al modelo 3 (derecha). La paleta de colores indica el valor de la densidad en unidades de mg/m^3 . Para ambos casos se observa gran semejanza, donde se nota la propagación de la materia a lo largo de z y la generación de dos pulsos debido a la forma del *twist* en los campos de velocidades a tiempo inicial. También se observa que en tiempos cercanos al inicial estos pulsos son pequeños comparados con tiempos posteriores, esto es debido a que las propiedades del medio van cambiando con la altura, como se observa en la figura 3.2, y mientras ésta aumenta, le permite a la materia moverse con mayor facilidad, ya que disminuyen la presión y densidad y aumenta la temperatura. En estas gráficas no se incluyeron las correspondientes al primer modelo con perturbación únicamente en z , ya que para este caso los cambios en la densidad no son visibles. Por esa misma razón, aparentemente no se ven diferencias entre las gráficas correspondientes a las dos simulaciones presentadas en las gráficas 4.4 y 4.5.

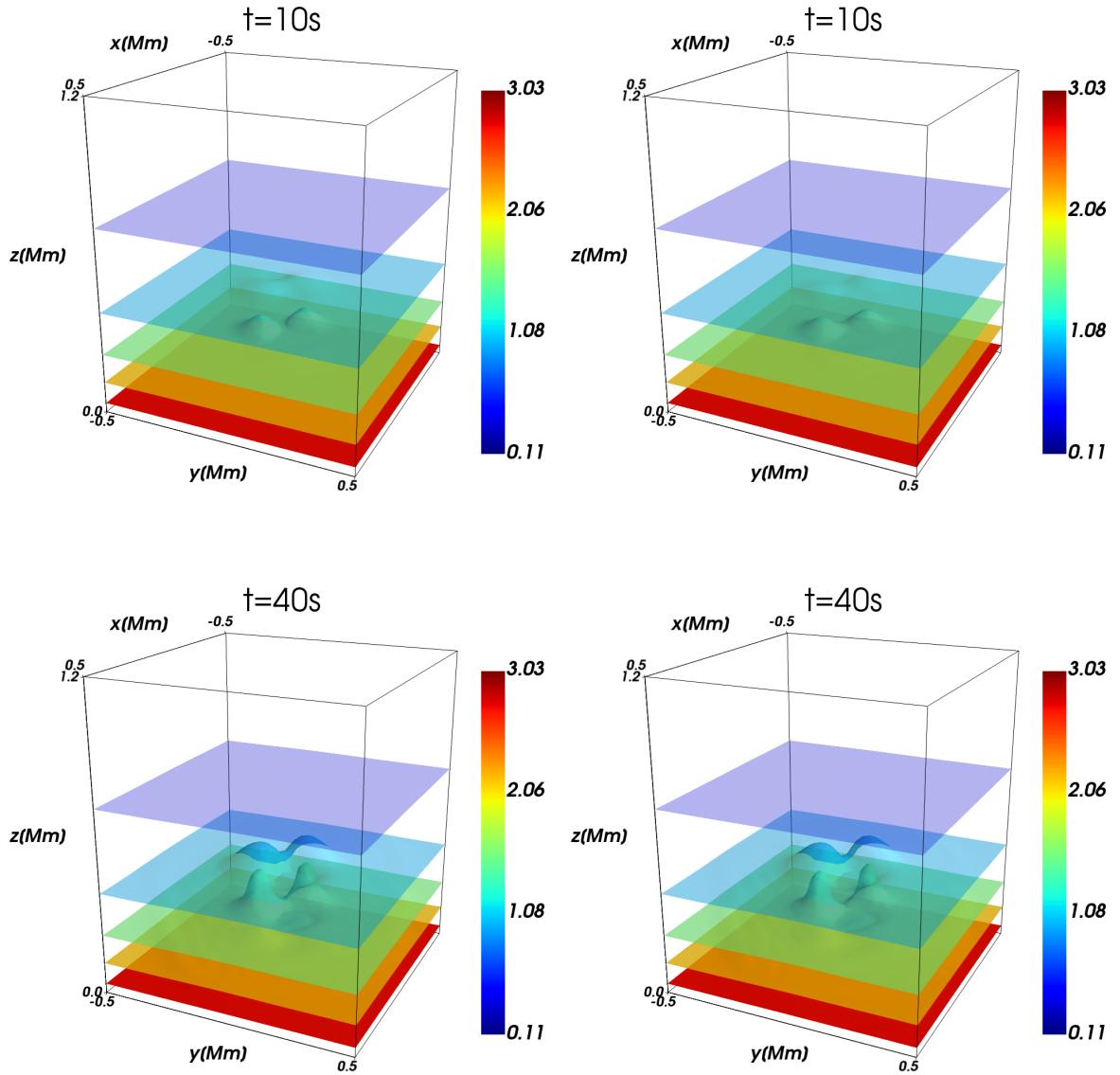


Figura 4.4: Evolución temporal de cinco isocontornos para diferentes valores de densidad correspondientes a las perturbaciones expresadas en las ecuaciones (3.28) y (3.29) para las columnas izquierda y derecha respectivamente, en los tiempos 10s y 40s. La paleta de colores indica la densidad en mg/m^3 .

En la evolución temporal de los campos de velocidades (ver figuras 4.6 y 4.7) y de los campos magnéticos (ver figuras 4.8 y 4.9) se graficaron las líneas de campo presentes en un dominio de $[-0.5,0.5]Mm$ en x , $[-0.5,0.5]Mm$ en y , $[0,1.2]Mm$ en z , en los tiempos 10s, 40s, 69s y 99s de arriba a abajo, para los modelo 2 (izquierda) y 3 (derecha), con el fin de poder visualizar los efectos sobre las líneas de campo. La paleta de colores indica, para las figuras 4.6 y 4.7, la magnitud del campo de velocidades en km/s y para las

figuras 4.8 y 4.9, la magnitud del campo magnético en G. Para la evolución temporal de ambos campos vectoriales se observan similitudes para los dos modelos: se nota que se generan dos ondas, una que se propaga en la dirección $+z$ y la otra en la dirección $-z$. En la evolución temporal de dichas ondas se evidencia que las líneas de campo de velocidades y de campo magnético (ver figuras 4.8 y 4.9) se van enrollando, resultado obtenido por [Murawski et al. \(2016\)](#) en el régimen no lineal para una perturbación tipo *twist* en el campo de velocidades, con mayor amplitud y fija en el tiempo. También se observa que la magnitud del campo de velocidades se comporta de manera similar que para el caso 2D, es decir que para tiempos cercanos al inicial disminuye y posteriormente empieza a aumentar. En cambio, para el campo magnético se aprecia un aumento bastante significativo en su magnitud cuando una perturbación tipo *twist* hace parte de la configuración inicial del sistema, dicho aumento es de aproximadamente un orden de magnitud después de 99s, es decir, el campo magnético aumenta de 50G ($t=0$) hasta $\sim 0.5\text{kG}$ ($t=99\text{s}$), estando en concordancia con el orden de los campos magnéticos reportados por las observaciones ([Stenflo, 2017](#)). Los campos vectoriales para el caso de la perturbación correspondiente al modelo 1, presentan una morfología similar a la del caso 2D axial, donde las líneas de campo no presentan *twist* en el tiempo inicial ni en tiempos posteriores.

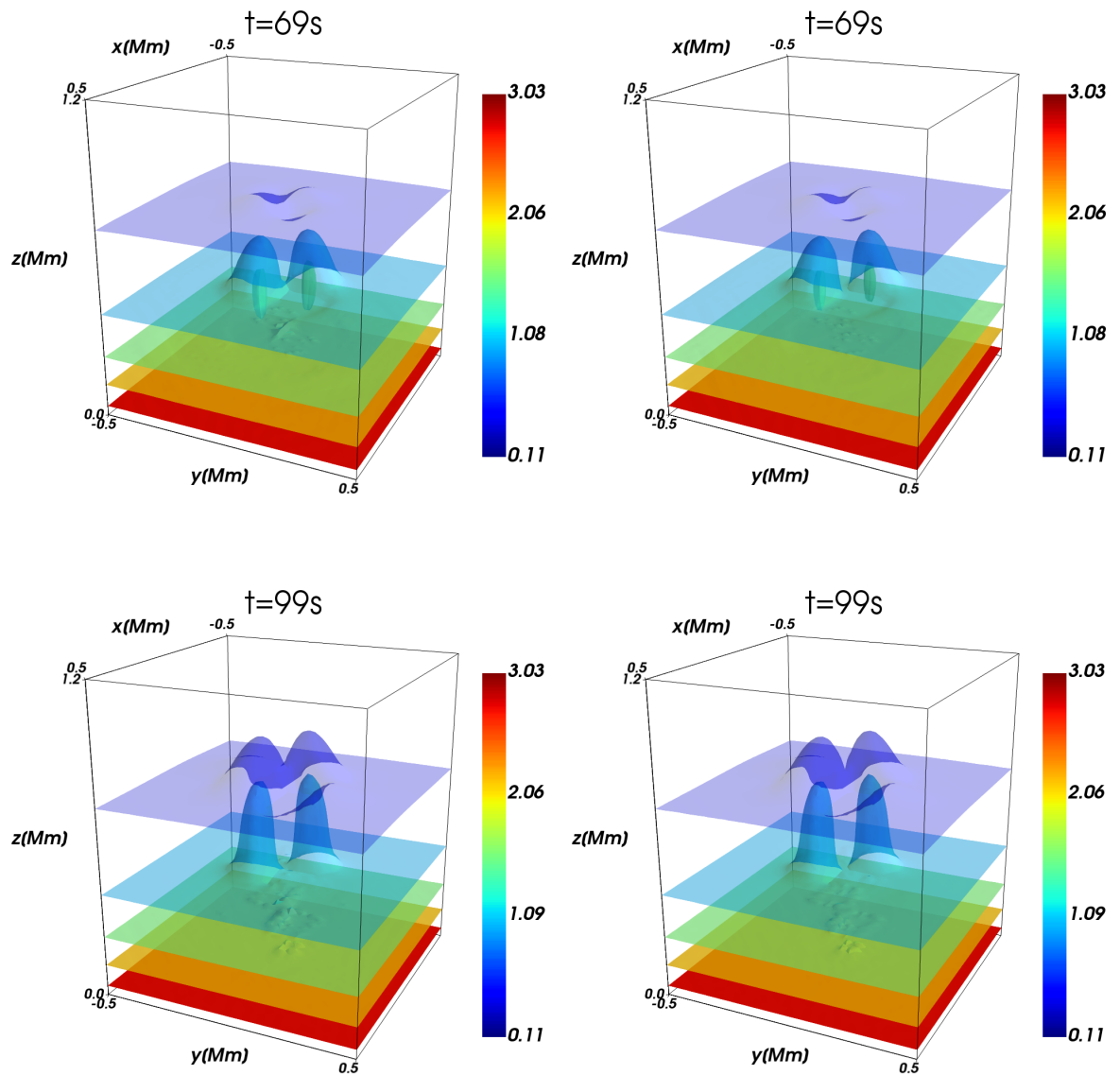


Figura 4.5: Evolución temporal de cinco isocontornos para diferentes valores de densidad correspondientes a las perturbaciones expresadas en las ecuaciones (3.28) y (3.29) para las columnas izquierda y derecha respectivamente, en los tiempos 69s y 99s. La paleta de colores indica la densidad en mg/m^3 .

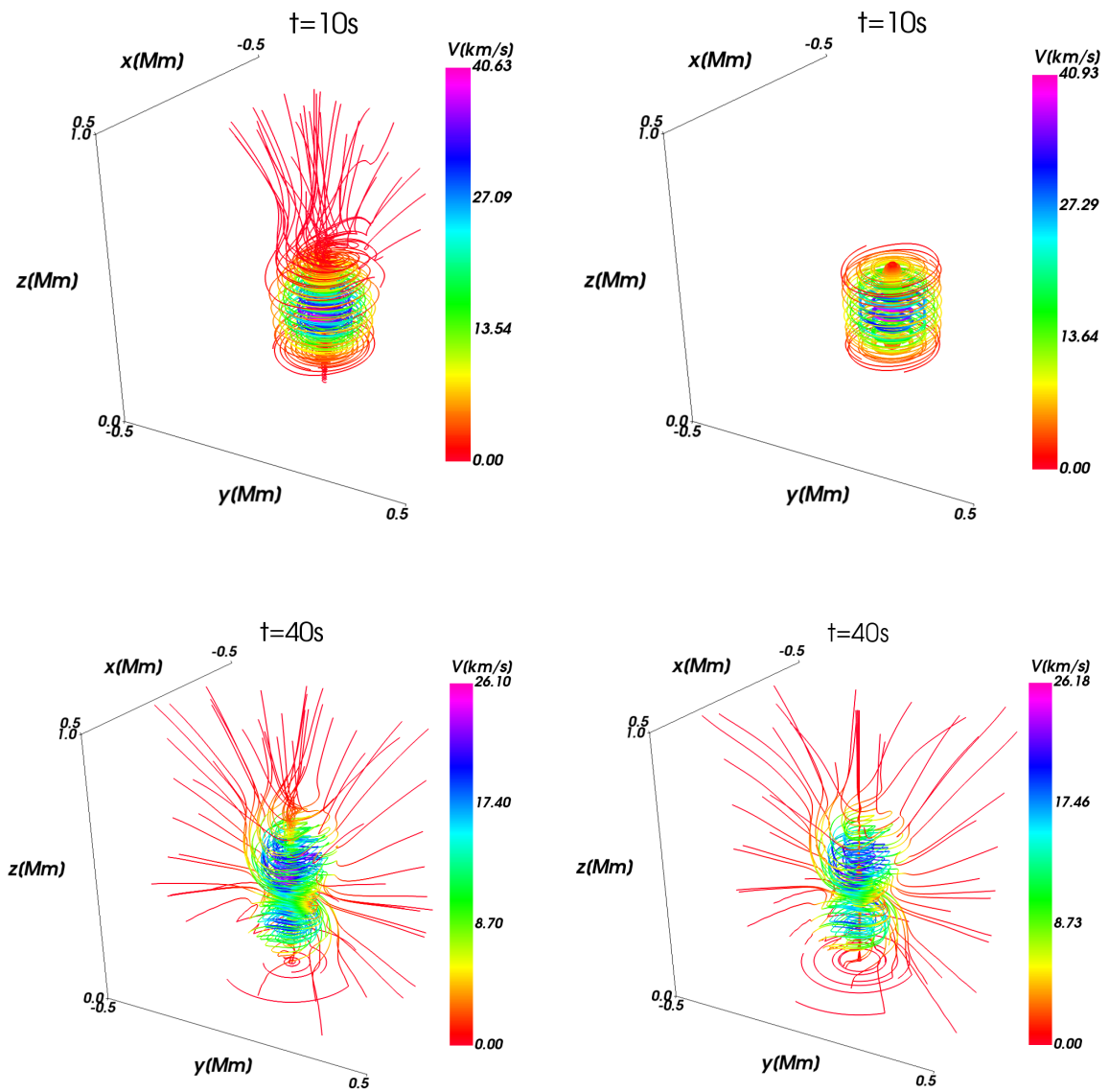


Figura 4.6: Evolución temporal de los campos de velocidades correspondientes a las perturbaciones expresadas en las ecuaciones (3.28) y (3.29) para las columnas izquierda y derecha respectivamente, en los tiempos 10s y 40s.

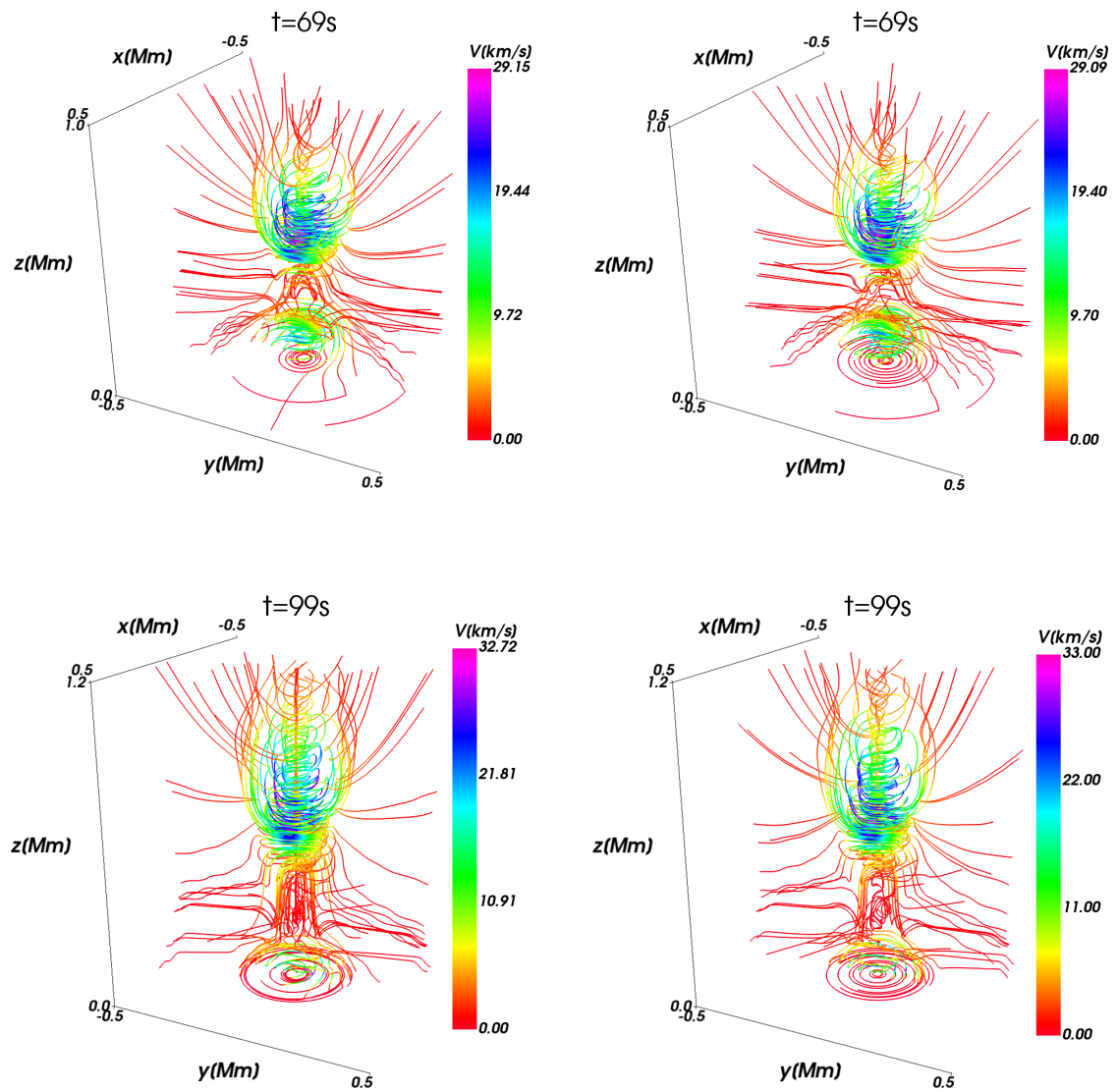


Figura 4.7: Evolución temporal de los campos de velocidades correspondientes a las perturbaciones expresadas en las ecuaciones (3.28) y (3.29) para las columnas izquierda y derecha respectivamente, en los tiempos 69s y 99s.

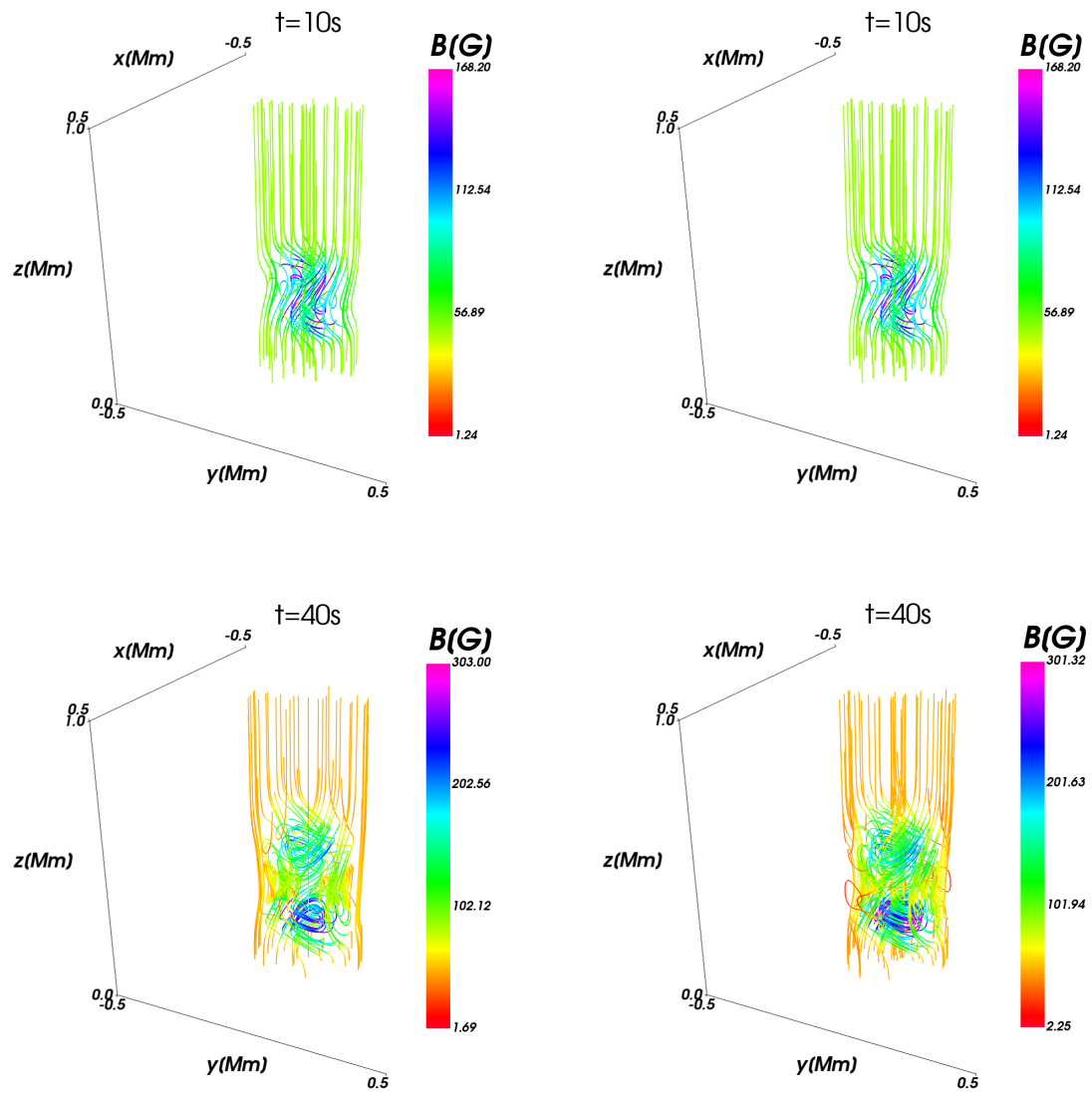


Figura 4.8: Evolución temporal de los campos magnéticos correspondientes a las perturbaciones expresadas en las ecuaciones (3.28) y (3.29) para las columnas izquierda y derecha respectivamente, en los tiempos 10s y 40s.

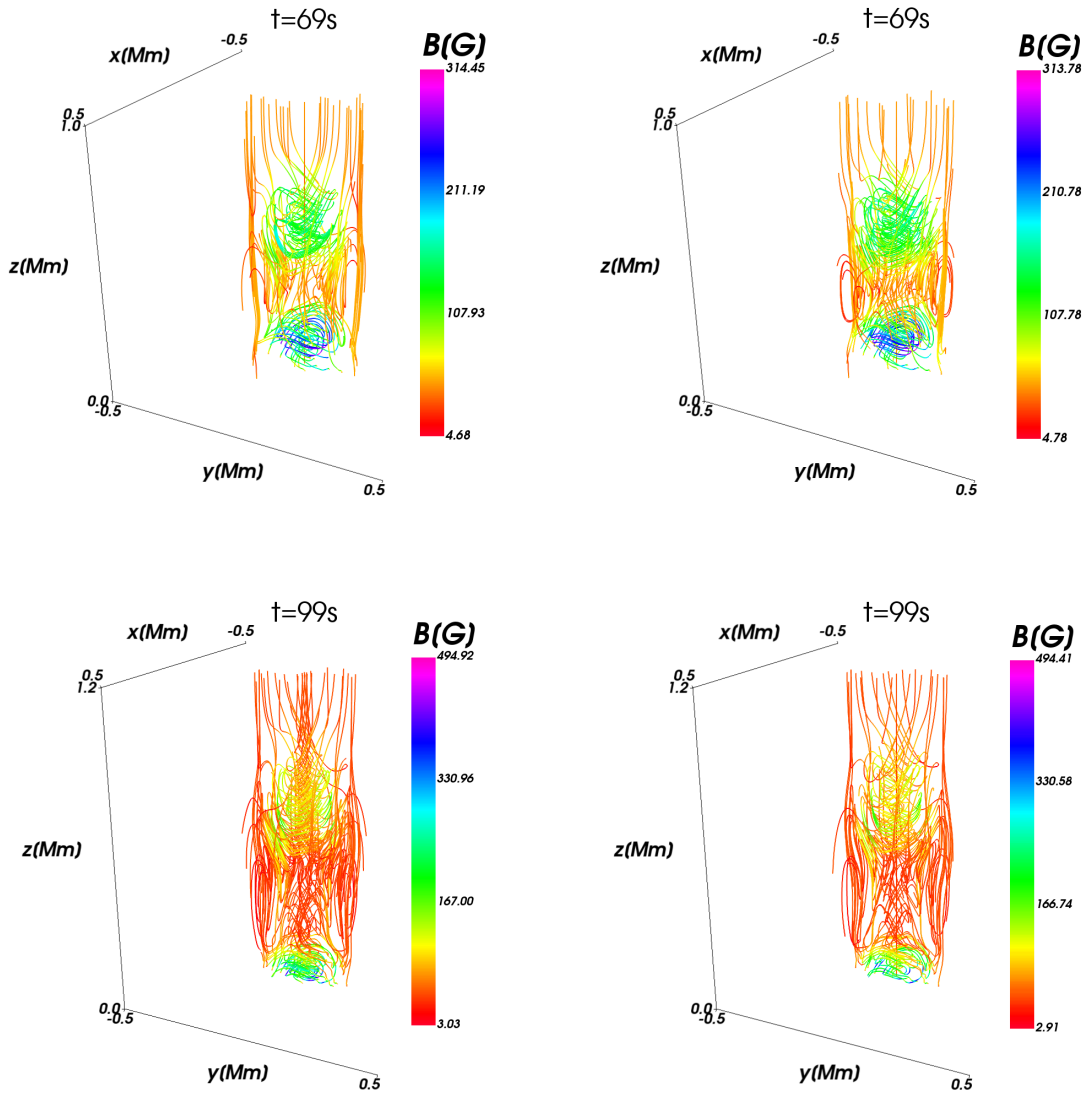


Figura 4.9: Evolución temporal de los campos magnéticos correspondientes a las perturbaciones expresadas en las ecuaciones (3.28) y (3.29) para las columnas izquierda y derecha respectivamente, en los tiempos 69s y 99s.

Una de las posibles causas del calentamiento coronal es la propagación de ondas magnetohidrodinámicas, las cuales se cree que transportan energía de las capas interiores de la atmósfera solar hacia la corona (Klimchuk, 2015). Mediante observaciones se ha concluido que dichas ondas existen y que además los campos magnéticos presentan *twist* (Raouafi, 2009). En la figura 4.10 se compara el transporte de densidad volumétrica de energía magnética ($u_B = B^2/2\mu_0$) a las capas superiores de la atmósfera solar a lo largo de z desde $z = 0\text{Mm}$ hasta $z = 3\text{Mm}$ en $x = 0\text{Mm}$, $y = 0\text{Mm}$, para los tres modelos 3D en los tiempos de 0s, 50s y 99s de izquierda a derecha. A tiempo inicial

la presión magnética es la correspondiente al campo uniforme de 50G para los tres casos; posteriormente, para el modelo 1, se observa una disminución debido a que la magnitud del campo magnético toma valores menores que el campo en equilibrio a lo largo de z , similar al modelo 2D (ver figura 4.2). Por otra parte, para las simulaciones donde se perturbó con *twist* (modelos 2 y 3), la magnitud del campo magnético empieza a crecer de inmediato (ver figuras 4.8 y 4.9), lo cual se evidencia en la densidad de energía magnética. En general, se observa que para el modelo 1, la densidad de energía magnética transportada es menor que para los casos con *twist*.

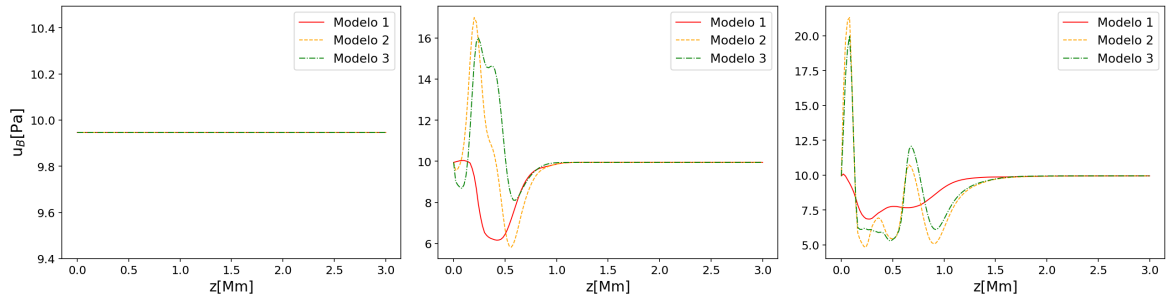


Figura 4.10: Comparación de la evolución temporal de la densidad volumétrica de energía magnética en $x = 0$, $y = 0$, para los tres tipos de perturbación utilizados en los tiempos 0s, 50s y 99s.

Ahora, para comparar la propagación de energía de estas ondas en cada modelo, se analiza el vector de Poynting $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$, cuya magnitud representa el flujo de energía electromagnética por unidad de área y de tiempo. Dicho vector se calcula utilizando la aproximación de la MHD para los campos eléctricos, de tal manera que $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$. La magnitud del vector de Poynting se muestra en escala logarítmica en la figura 4.11, calculada a lo largo de z en el intervalo $[0,3]$ Mm en $x = 0$ Mm, $y = 0$ Mm, para los tres modelos 3D en los tiempos 10s, 50s y 99s de izquierda a derecha. Se evidencia que para los casos en los que las perturbaciones son tipo *twist* (modelos 2 y 3), el flujo de energía electromagnética transportada es aproximadamente dos órdenes de magnitud mayor que en el caso en que solamente se perturba la componente z del campo de velocidades (modelo 1). Esto se debe a que la magnitud del campo magnético aumenta para los modelos con *twist*. Srivastava et al. (2017) analizaron el transporte de energía de la fotosfera a la corona mediante una simulación realizada con el código FLASH (Fryxell et al., 2000), tomando un perfil de temperatura realista (Murawski et al., 2015b), con una perturbación tipo *twist* periódica (cada 50s) en el campo de velocidades, y obtuvieron como resultado que las ondas torsionales tipo Alfvén que se generan, pueden transportar la energía suficiente para calentar la corona solar. De manera similar, en este trabajo se encuentra que con una perturbación tipo *twist* en el campo de velocidades, únicamente a tiempo inicial, se obtiene que la energía electromagnética transportada por las ondas MHD a las capas superiores de la atmósfera solar, es mucho mayor que en el caso sin *twist*.

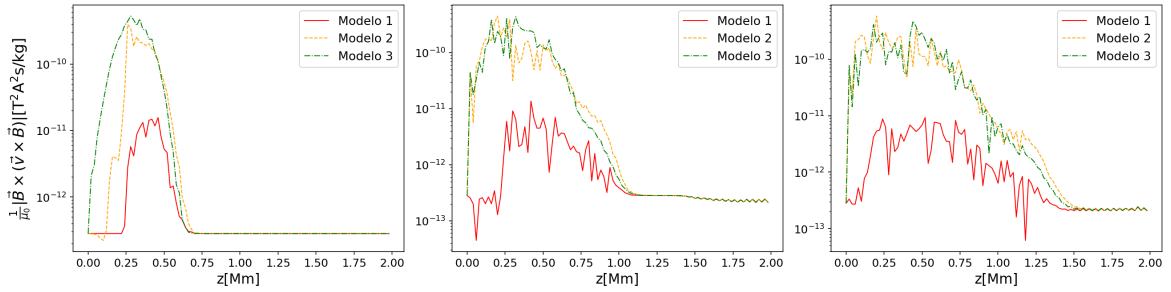


Figura 4.11: Comparación de la evolución temporal de la magnitud del vector de Poynting en $x = 0$, $y = 0$, para los tres tipos de perturbación utilizados en los tiempos 10s, 40s y 64s.

De igual forma al caso 2D, para las simulaciones 3D se realizó el cálculo del máximo de la divergencia del campo magnético para cada paso de tiempo hasta $t=150\text{s}$ para los tres tipos de perturbación, éstos valores están graficados en escala logarítmica en la figura 4.12. Se observa que para el modelo 1 con perturbación únicamente en z , el mayor valor que toma es del orden de 10^{-22}T/m y para las dos simulaciones con *twist* dicho valor es del orden de 10^{-20}T/m , de manera que se garantiza numéricamente la ausencia de monopolos magnéticos en la evolución de las simulaciones.

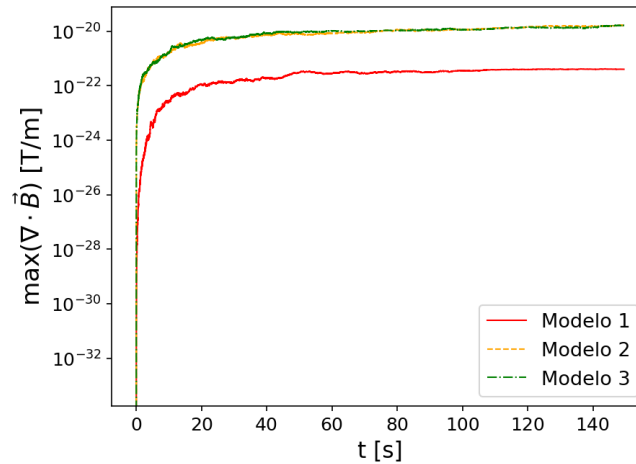


Figura 4.12: Valores máximos de la divergencia del campo magnético en cada paso de tiempo para las tres simulaciones realizadas para el caso 3D.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se realizó la deducción de las ecuaciones de la MHD para el caso de un fluido compresible tomando la aproximación de régimen lineal, las cuales posteriormente se escribieron en diferencias finitas con la finalidad de crear un módulo numérico e implementarlo en el código MAGNUS para resolverlas. Se alteró el estado de equilibrio correspondiente a un Sol en calma, con perfiles realistas de temperatura, densidad y presión, mediante perturbaciones en el campo de velocidades: una perturbación axial y una no axial para simulaciones 2D y una perturbación en z , otra tipo *twist* en el plano xy y una tercera que combina las dos anteriores para simulaciones 3D.

Para las simulaciones 2D se obtuvo que la morfología el campo de velocidades depende del perfil del valor plasma beta, ya que en determinadas zonas donde la energía térmica domina sobre la magnética ($\beta > 1$) se obtiene una forma de arco de choque, pero este se ve deformado cuando la energía magnética es la dominante ($\beta < 1$). Lo cual está en concordancia con la simulación realizada por [Murawski et al. \(2013\)](#), donde el perfil del valor plasma beta es diferente, pero la forma del campo de velocidades es el correspondiente a dicho perfil.

Por otra parte, para el caso 3D se concluyó que una perturbación tipo *twist* en el plano xy para el campo de velocidades genera *twist* en las líneas de campo magnético, aunque inicialmente este sea uniforme, resultado obtenido por [Murawski et al. \(2016\)](#) en el régimen no lineal, para una perturbación en el campo de velocidades tipo *twist* fija en el tiempo. También se observó que el transporte de energía magnética hacia las capas superiores de la atmósfera solar es menor para el modelo 1, donde solo se perturba la componente z del campo de velocidades, comparado con los casos cuyas perturbaciones incluyen *twist*, ya que este tipo de perturbación permite que la magnitud del campo magnético aumente de 50G a $\sim 0.5\text{kG}$ en 99s. Asimismo, la magnitud del vector de Poynting es aproximadamente dos órdenes de magnitud mayor en los casos con *twist*, lo cual indica que el flujo de energía electromagnética a las capas superiores de la atmósfera solar es mayor para estos modelos. En general, se evidenció que los casos

con perturbación tipo twist presentan mayor flujo de energía tanto magnética como electromagnética a las capas superiores de la atmósfera solar.

De igual modo, para la densidad se nota que la propagación de la materia se da en la dirección $+z$ en forma de dos pulsos, y que se realiza con mayor rapidez a medida que va avanzando, esto se debe a que la temperatura aumenta mientras la densidad y la presión disminuyen con la altura, lo que permite al fluido moverse más fácilmente. Además, para garantizar la validez de las simulaciones, se calculó el valor máximo de la divergencia del campo magnético para cada simulación, resultando todas por debajo de 10^{-20}T/m , con lo cual se asegura numéricamente que no se viola la ley de Gauss para los campos magnéticos.

Finalmente, con este trabajo se participó como ponente en los siguientes congresos:

- Congreso Nacional de Física (CNF) 2017 con póster,
- Congreso Colombiano de Astronomía y Astrofísica (COCOA) 2017 con charla,

y se está escribiendo un artículo para ser sometido a una revista internacional.

Bibliografía

- Alfvén, Hannes & Fälthammar, C. G.
1963. *Cosmical Electrodynamics: Fundamental Principles. Fundamental Principles.* Clarendon Press.
- Alfvén, H.
1971. Plasma Physics, Space Research, and the Origin of the Solar System. *Science*, 172:991–994.
- Bennett, K. & Roberts, B. . N. U.
1999. Waves in Twisted Magnetic Flux Tubes. *Sol.Phys.*, 185:41–59.
- Canou, A. & Amari, T. . B. V. . S. B. . A. G. . L. H.
2009. Evidence for a Pre-Eruptive Twisted Flux Rope Using the Themis Vector Magnetograph. *ApJ*, 693:L27–L30.
- Cheremnykh, O. K. & Fedun, V. . K. A. N. . V. G.
2017. Incompressible magnetohydrodynamic modes in the thin magnetically twisted flux tube. *A&A*, 604:A62.
- Courant, R. & Friedrichs, K. . L. H.
1967. On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics. *IBM Journal of Research and Development*, 11:215–234.
- Del Zanna, L., E. Schaekens, and M. Velli
2005. Transverse oscillations in solar coronal loops induced by propagating Alfvénic pulses. *A&A*, 431:1095–1104.
- Ebrahimi, Z. & Karami, K. . S. R.
2017. The Effect of a Twisted Magnetic Field on the Phase Mixing of the Kink Magnetohydrodynamic Waves in Coronal Loops. *ApJ*, 845:86.
- Emonet, T. & Moreno-Insertis, F.
1998. The Physics of Twisted Magnetic Tubes Rising in a Stratified Medium: Two-dimensional Results. *ApJ*, 492:804–821.

- Erdélyi, R. and V. Fedun
2006a. MHD waves in magnetically twisted solar atmospheric flux tubes. In *Solar Activity and its Magnetic Origin*, V. Bothmer and A. A. Hady, eds., volume 233 of *IAU Symposium*, Pp. 134–135.
- Erdélyi, R. and V. Fedun
2006b. Sausage MHD Waves in Incompressible Flux Tubes with Twisted Magnetic Fields. *Sol.Phys.*, 238:41–59.
- Erdélyi, R. and V. Fedun
2007. Linear MHD Sausage Waves in Compressible Magnetically Twisted Flux Tubes. *Sol.Phys.*, 246:101–118.
- Evans, C. R. and J. F. Hawley
1988. Simulation of magnetohydrodynamic flows - A constrained transport method. *ApJ*, 332:659–677.
- Fryxell, B., K. Olson, P. Ricker, F. X. Timmes, M. Zingale, D. Q. Lamb, P. MacNeice, R. Rosner, J. W. Truran, and H. Tufo
2000. FLASH: An Adaptive Mesh Hydrodynamics Code for Modeling Astrophysical Thermonuclear Flashes. *ApJS*, 131:273–334.
- Giagkiozis, I. & Fedun, V. . E. R. . V. G.
2015. Axisymmetric Modes in Magnetic Flux Tubes with Internal and External Magnetic Twist. *ApJ*, 810:53.
- González-Avilés, J. J. and F. S. Guzmán
2015. Estimating the contribution of Alfvén waves to the process of heating the quiet solar corona. *MNRAS*, 451:300–311.
- Guzmán, F.
2010. Solución de la ecuación de onda como un problema de valores iniciales usando diferencias finitas. *Revista mexicana de física E*, 56:51 – 68.
- Hansen, C. J., S. D. Kawaler, and V. Trimble
2004. *Stellar interiors : physical principles, structure, and evolution*.
- Horne, R. B. & Glauert, S. A. . M. N. P. . B. D. . M. V. . H. D. . P. D.
2013. Space weather impacts on satellites and forecasting the Earth’s electron radiation belts with SPACECAST. *Space Weather*, 11:169–186.
- Hotta, H. & Yokoyama, T.
2012. Generation of twist on magnetic flux tubes at the base of the solar convection zone. *A&A*, 548:A74.

- Iijima, H. & Yokoyama, T.
2017. A Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulation of the Formation of Solar Chromospheric Jets with Twisted Magnetic Field Lines. *ApJ*, 848:38.
- Jain, R., A. Gascoyne, and B. W. Hindman
2011. Interaction of p modes with a collection of thin magnetic tubes. *MNRAS*, 415:1276–1279.
- Karampelas, K. and T. Van Doorselaere
2018. Simulations of fully deformed oscillating flux tubes. *A&A*, 610:L9.
- Klimchuk, J. A.
2015. Key aspects of coronal heating. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 373:20140256–20140256.
- Kreiss, H.-O. and G. Scherer
1992. Method of lines for hyperbolic differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29(3):640–646.
- Kudoh, T. and K. Shibata
1999. Alfvén Wave Model of Spicules and Coronal Heating. *ApJ*, 514:493–505.
- Kuridze, D. and T. V. Zaqarashvili
2008. Resonant energy conversion of 3-min intensity oscillations into Alfvén waves in the solar atmosphere. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 70:351–355.
- Longcope, D. W. & Welsch, B. T.
2006. A Model for the Emergence of a Twisted Magnetic Flux Tube. *ApJ*, 545:1089–1100.
- Lora-Clavijo, F. D., A. Cruz-Osorio, and F. S. Guzmán
2015. CAFE: A New Relativistic MHD Code. *ApJS*, 218:24.
- Malanushenko, A. & Yusuf, M. H. . L. D. W.
2011. Direct Measurements of Magnetic Twist in the Solar Corona. *ApJ*, 736:97.
- Mariska, J. T.
1986. The quiet solar transition region. *ARA&A*, 24:23–48.
- Martínez-Sykora, J. & Hansteen, V. . C. M.
2008. Twisted Flux Tube Emergence From the Convection Zone to the Corona. *ApJ*, 679:871–888.
- Mikic, Z. & Schnack, D. D. . v. G.
1990. Dynamical evolution of twisted magnetic flux tubes. I - Equilibrium & linear stability. *ApJ*, 361:690–700.

- Miyamoto, K.
2005. *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*.
- Muglach, K., A. Hofmann, and J. Staude
2005. Dynamics of solar active regions. II. Oscillations observed with MDI and their relation to the magnetic field topology. *A&A*, 437:1055–1060.
- Murawski, K., I. Ballai, A. K. Srivastava, and D. Lee
2013. Three-dimensional numerical simulation of magnetohydrodynamic-gravity waves and vortices in the solar atmosphere. *MNRAS*, 436:1268–1277.
- Murawski, K., P. Chmielewski, T. V. Zaqarashvili, and E. Khomenko
2016. Numerical simulations of magnetic Kelvin-Helmholtz instability at a twisted solar flux tube. *MNRAS*, 459:2566–2572.
- Murawski, K., A. Solov'ev, and J. Kraskiewicz
2015a. A Numerical Model of MHD Waves in a 3D Twisted Solar Flux Tube. *Sol.Phys.*, 290:1909–1922.
- Murawski, K., A. Solov'ev, Z. E. Musielak, A. K. Srivastava, and J. Kraskiewicz
2015b. Torsional Alfvén waves in solar magnetic flux tubes of axial symmetry. *A&A*, 577:A126.
- Navarro, A. & Lora-Clavijo, F. D. . G. G. A.
2017. Magnus: A New Resistive MHD Code with Heat Flow Terms. *ApJ*, 844:57.
- Payne, C. H.
1925. *Stellar Atmospheres; a Contribution to the Observational Study of High Temperature in the Reversing Layers of Stars*. PhD thesis, RADCLIFFE COLLEGE.
- Poisson, M. & Mandrini, C. H. . D. P. . L. M.
2015. Evidence of Twisted Flux-Tube Emergence in Active Regions. *Sol.Phys.*, 290:727–751.
- Priest, E.
2014. *Magnetohydrodynamics of the Sun*.
- Raouafi, N.-E.
2009. Observational Evidence for Coronal Twisted Flux Rope. *ApJ*, 691:L128–L132.
- Reale, F. & Orlando, S. . G. M. . M. A. . P. G. . H. A. W. . P. E. R.
2016. 3D MHD modeling of twisted coronal loops. *ApJ*, 830:21.
- Roberts, B. & Ulmschneider, P.
1997. Dynamics of Flux Tubes in the Solar Atmosphere: Theory. In *European Meeting on Solar Physics*, C. E. . V. L. Simnett, G. M. & Alissandrakis, ed., volume 489 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, P. 75.

- Rosenthal, C. S., T. J. Bogdan, M. Carlsson, S. B. F. Dorch, V. Hansteen, S. W. McIntosh, A. McMurry, Å. Nordlund, and R. F. Stein
2002. Waves in the Magnetized Solar Atmosphere. I. Basic Processes and Internetwork Oscillations. *ApJ*, 564:508–524.
- Ryan, S. G. and A. J. Norton
2010. *Stellar Evolution and Nucleosynthesis*.
- Schmelz, J. T. & Winebarger, A. R.
2015. What can observations tell us about coronal heating? *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 373:20140257–20140257.
- Schnack, D. D.
2009. *Lectures in Magnetohydrodynamics*.
- Sen, S. and A. Mangalam
2018. Model of a fluxtube with a twisted magnetic field in the stratified solar atmosphere. *Advances in Space Research*, 61:617–627.
- Solanki, S. K.
1997. Dynamics of Flux Tubes in the Solar Atmosphere: Observations. In *European Meeting on Solar Physics*, C. E. . V. L. Simnett, G. M. & Alissandrakis, ed., volume 489 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, P. 49.
- Spiegel, E. A. and J.-P. Zahn
1992. The solar tachocline. *A&A*, 265:106–114.
- Srivastava, A. K., J. Shetye, K. Murawski, J. G. Doyle, M. Stangalini, E. Scullion, T. Ray, D. P. Wójcik, and B. N. Dwivedi
2017. High-frequency torsional Alfvén waves as an energy source for coronal heating. *Scientific Reports*, 7:43147.
- Stenflo, J. O.
1989. Small-scale magnetic structures on the sun. *A&A Rev.*, 1:3–48.
- Stenflo, J. O.
2017. History of Solar Magnetic Fields Since George Ellery Hale. *Space Sci. Rev.*, 210:5–35.
- Sturrock, Z. and A. W. Hood
2016. Sunspot rotation. II. Effects of varying the field strength and twist of an emerging flux tube. *A&A*, 593:A63.
- Terradas, J. & Goossens, M.
2012. Transverse kink oscillations in the presence of twist. *A&A*, 548:A112.

Tóth, G.

2000. The $\nabla \cdot \mathbf{B}=0$ Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes. *Journal of Computational Physics*, 161:605–652.

Turner, R.

2001. What we must know about solar particle events to reduce the risk to astronauts. *Washington DC American Geophysical Union Geophysical Monograph Series*, 125:39–44.

Vernazza, J. E., E. H. Avrett, and R. Loeser

1981. Structure of the solar chromosphere. III - Models of the EUV brightness components of the quiet-sun. *ApJS*, 45:635–725.

Warnecke, J. & Brandenburg, A. . M. D. A.

2012. Magnetic twist: a source and property of space weather. *Journal of Space Weather and Space Climate*, 2(27):A11.

Wiegmann, T. and T. Sakurai

2012. Solar Force-free Magnetic Fields. *Living Reviews in Solar Physics*, 9:5.

Zaqarashvili, T. V. and B. Roberts

2006. Two-wave interaction in ideal magnetohydrodynamics. *A&A*, 452:1053–1058.

Zaqarashvili, T. V. & Voros, Z. . N. Y. . B. R.

2014. Twisted Magnetic Flux Tubes in the Solar Wind. *ApJ*, 783:L19.

Zwaan, C.

1978. On the Appearance of Magnetic Flux in the Solar Photosphere. *Sol.Phys.*, 60:213–240.

Capítulo A

Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas permite calcular el valor de las derivadas de las funciones en un punto en términos de las funciones evaluadas en puntos cercanos de un dominio discretizado (Courant, 1967; Guzmán, 2010). Para esto, se definen las variables independientes x y t discretizadas por una malla numérica tal que existen N_x y N_t valores para cada una de estas variables respectivamente, donde N_x y N_t dependen de la resolución de la malla, es decir, de los valores de $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ y $\Delta t = t^{n+1} - t^n$, los que representan la separación entre dos puntos consecutivos. De esta manera, el valor de una función $p(x, t)$ en algún punto (x_i, t^n) de esta malla se denota por $p(x_i, t^n)$ como se muestra en la imagen [A.1](#).

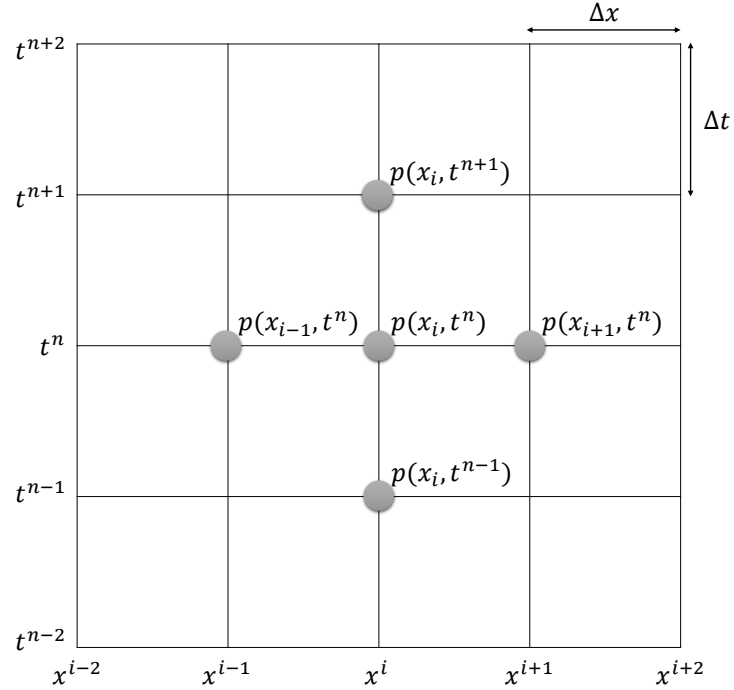


Figura A.1: Malla numérica de resolución Δx , Δt para una función p de variables independientes x , t . Se presenta la función evaluada en diferentes puntos de la malla.

Para obtener las expresiones de las aproximaciones de las derivadas de la función $p(x, t)$ con $t = t^n$ fijo, en determinado punto de la malla (x_i, t^n) , se expande la función en series de Taylor alrededor de puntos cercanos a dicho punto. El orden de truncamiento de la expansión y la cantidad de puntos cercanos alrededor de los que se expanda están estrechamente relacionados con el orden del error de la aproximación.

Dado que la variable t es fija, se denotará $p(x_i, t^n)$ como $p(x_i)$. Expandiendo la función $p(x_i)$ en dicho punto, dos puntos a la izquierda y dos puntos a la derecha y truncando a segundo orden se obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
 p(x_{i-2}) &= p(x_i) - 2\Delta x p'(x_i) + \frac{4\Delta x^2}{2} p''(x_i) + O(\Delta x^3), \\
 p(x_{i-1}) &= p(x_i) - \Delta x p'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} p''(x_i) + O(\Delta x^3), \\
 p(x_i) &= p(x_i), \\
 p(x_{i+1}) &= p(x_i) + \Delta x p'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} p''(x_i) + O(\Delta x^3), \\
 p(x_{i+2}) &= p(x_i) + 2\Delta x p'(x_i) + \frac{4\Delta x^2}{2} p''(x_i) + O(\Delta x^3),
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde la prima representa la derivada parcial respecto a x y $O(\Delta x^3)$ expresa que el error del truncamiento es a tercer orden.

La derivada se escribe mediante una combinación lineal de las aproximaciones de la función de la forma

$$ap(x_{i-2}) + bp(x_{i-1}) + cp(x_i) + dp(x_{i+1}) + ep(x_{i+2}), \quad (\text{A.2})$$

donde se escogen los coeficientes de tal manera que el resultado sea dependiente únicamente de la derivada que se desea aproximar, por ejemplo, si se desea calcular la primera derivada, se escogen las constantes para que el resultado de (A.2) sea dependiente únicamente de primeras derivadas.

Para el caso de la primera derivada aproximada a segundo orden, se puede calcular con los valores de la función en distintos sitios, este conjunto de sitios se representa por una molécula, la cual puede ser balanceada o desbalanceada como se ilustra en la figura A.2 y se utiliza para despejar la primera derivada de la ecuación (A.2).

Para una molécula balanceada, los coeficientes de la combinación son $a = c = e = 0$, $b = -1$, $d = 1$, entonces la derivada se escribe como

$$p'(x_i) = \frac{p(x_{i+1}) - p(x_{i-1}))}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad (\text{A.3})$$

para una molécula desbalanceada hacia la izquierda ($a = 1$, $b = -4$, $c = 3$, $d = e = 0$) o hacia la derecha ($a = b = 0$, $c = -3$, $d = 4$, $e = -1$), las derivadas se expresan como

$$p'(x_i) = \frac{p(x_{i-2}) - 4p(x_{i-1}) + 3p(x_i)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2),$$

$$p'(x_i) = \frac{-p(x_{i+2}) + 4p(x_{i+1}) - 3p(x_i)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2),$$

respectivamente.

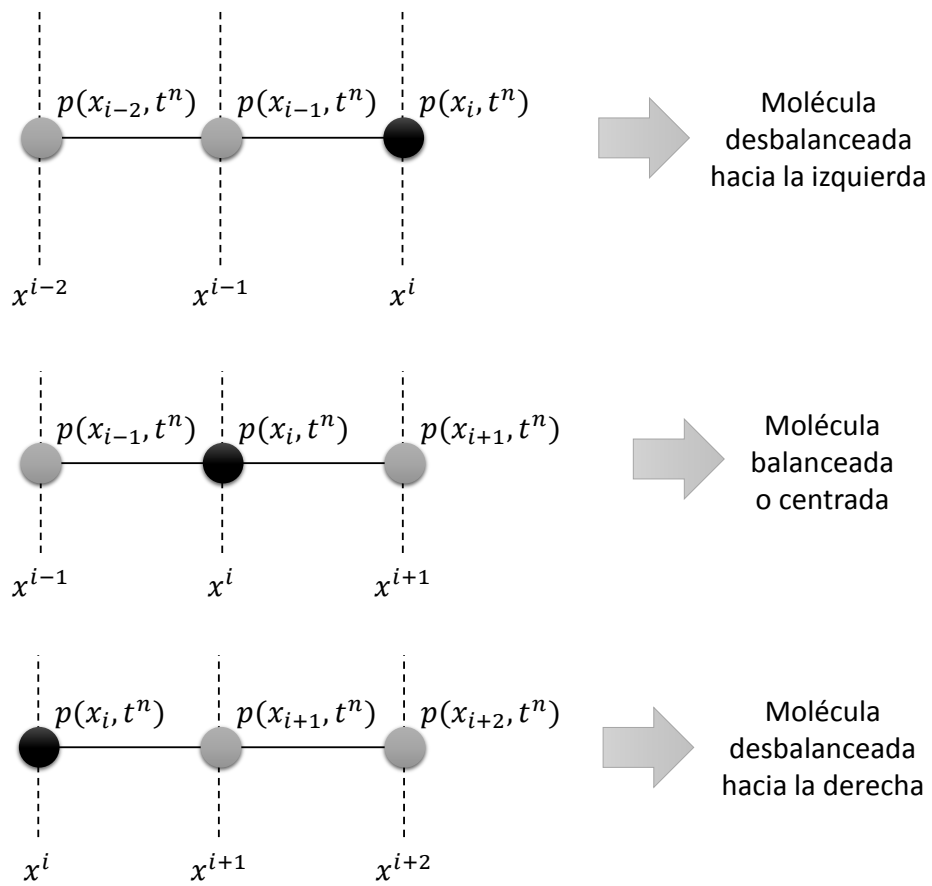


Figura A.2: Tipos de molécula utilizadas para el cálculo de la primera derivada de la función p en el punto (x_i, t^n) con error a segundo orden.

Capítulo B

Transporte de flujo restringido

El método de transporte de flujo restringido (FCT por sus siglas en inglés) se basa en la integración de la ley de Faraday en cada elemento de volumen, con la finalidad de discretizar los campos magnéticos para que al evolucionarlos se satisfaga con errores de precisión numérica la ausencia de monopolos magnéticos (Evans and Hawley, 1988), si en principio $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

Teniendo que en el marco de referencia del fluido, el campo eléctrico es despreciable, es decir, $\vec{E}' \sim 0$ y en el marco de referencia Euleriano $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$, se obtiene la siguiente relación entre campo eléctrico y magnético en el marco de referencia Euleriano

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = -\vec{v}_1 \times \vec{B}_0,$$

ya que debido a la linealidad de las ecuaciones el factor $\vec{v}_1 \times \vec{B}_1$ es despreciable. Se define $\vec{\Omega} = \vec{v}_1 \times \vec{B}_0$ de tal manera que la ley de Faraday en términos de esta nueva variable se escribe como

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \vec{\Omega}, \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{B.2})$$

estando el campo magnético siempre acompañado de la ligadura, la cual garantiza la ausencia de monopolos magnéticos y por tanto se debe cumplir para poder obtener resultados físicos.

Partiendo de dicha ligadura (B.2) e integrándola en un volumen V

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV &= \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A}, \\ &= \int_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{A}_1 + \dots + \int_{A_6} \vec{B} \cdot d\vec{A}_6, \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

siendo cada dA_i el elemento de área de cada una de las caras del cubo infinitesimal dV el cual se ilustra en la figura B.1, se obtiene que la relación entre la ligadura y la ecuación (B.1) se expresa como

$$\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{\Omega} \cdot d\vec{l}. \quad (\text{B.4})$$

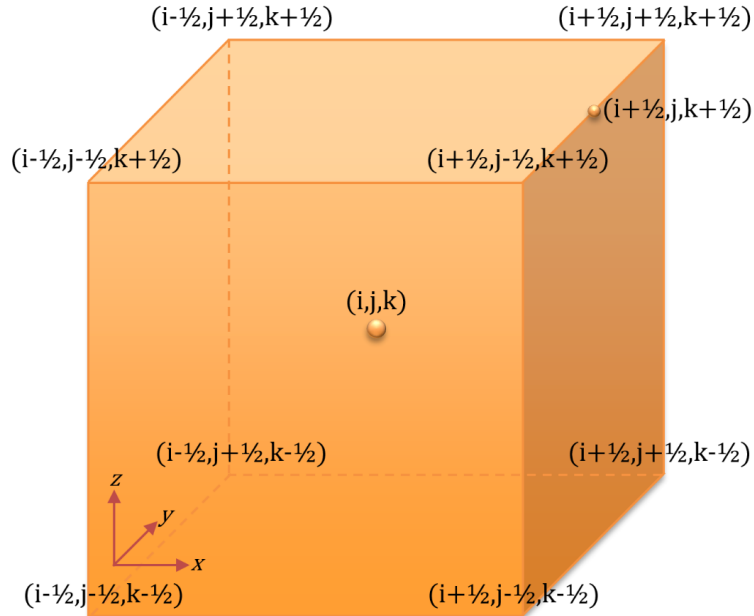


Figura B.1: Elemento de volumen de la intercelda centrado en un punto arbitrario (i, j, k) perteneciente a la malla numérica.

A continuación se realiza un procedimiento con la finalidad de hallar la evolución temporal de cada componente del campo magnético empezando por la componente x , de tal manera que se utiliza la cara lateral derecha denotada como A_1 , la cual se muestra en la figura B.2.

Se desarrolla la integral cerrada de (B.4) en dicha cara, de manera que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{A}_1 &= \oint_{\partial A_1} \vec{\Omega} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y, z_{k-1/2}) \cdot \hat{y} dy + \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z) \cdot \hat{z} dz \\ &\quad - \int_{j-1/2}^{j+1/2} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y, z_{k+1/2}) \cdot \hat{y} dy - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j-1/2}, z) \cdot \hat{z} dz, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

donde los valores de las componentes de $\vec{\Omega}$ en el centro de las aristas del cubo se calculan como los promedios de los valores Ω^i a lo largo de cada arista y de igual manera se define

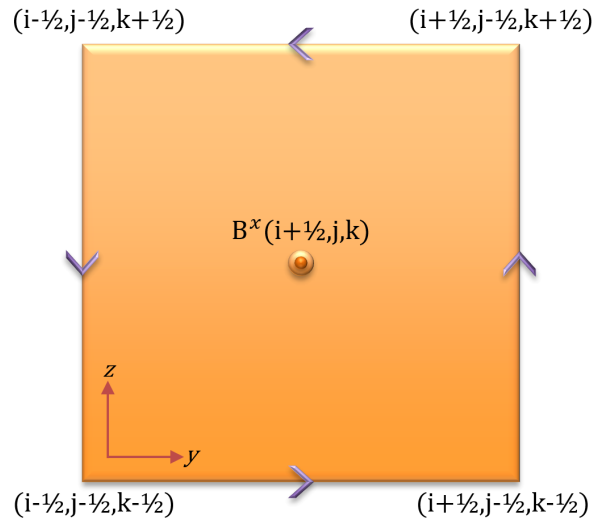


Figura B.2: Cara lateral derecha del elemento de volumen de la figura B.1.

el valor de la componente x del campo magnético (B^x) en el centro del cubo como el promedio del dicha componente del campo en toda la cara A_1 , es decir

$$\Omega^y(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) = \frac{1}{\Delta y} \int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y, z_{k+1/2}) \cdot \hat{y} dy, \quad (\text{B.6})$$

$$\Omega^z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) = \frac{1}{\Delta z} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z) \cdot \hat{z} dz, \quad (\text{B.7})$$

$$B^x(i + \frac{1}{2}, j, k) = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{A}_1, \quad (\text{B.8})$$

sustituyendo las definiciones anteriormente mencionadas (B.6-B.8) en la ecuación (B.5) se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^x(i + \frac{1}{2}, j, k)}{\partial t} = & \frac{1}{\Delta y} [\Omega^z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - \Omega^z(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k)] \\ & - \frac{1}{\Delta z} [\Omega^y(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - \Omega^y(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2})], \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

la cual representa la ecuación de evolución de la componente x del campo magnético en el centro de la cara A_1 .

Se lleva a cabo un desarrollo similar para las otras dos caras (posterior y superior) presentadas en la figura B.3 y se obtienen las ecuaciones de evolución para las componentes y, z del campo magnético en el centro de dichas caras respectivamente

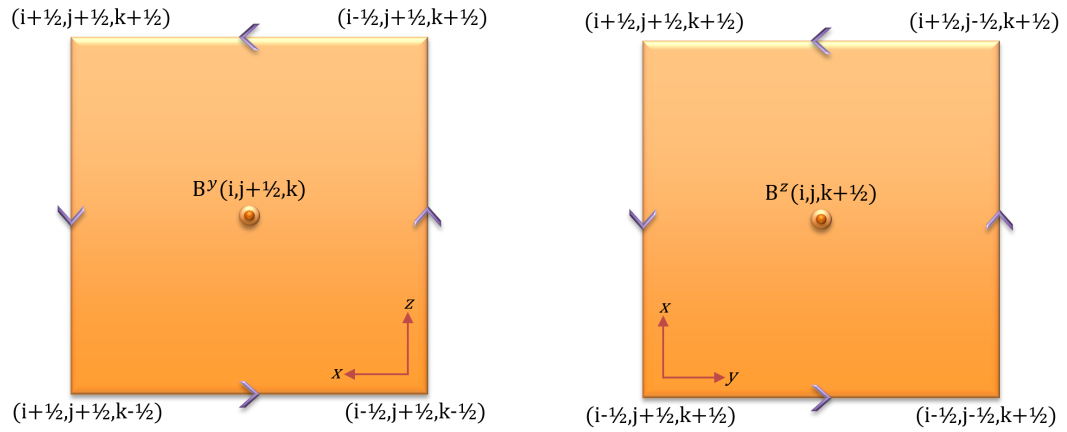


Figura B.3: Caras posterior (izquierda) y superior (derecha) del elemento de volumen de la figura B.1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^y(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta z} [\Omega^x(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - \Omega^x(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})] \\ &\quad - \frac{1}{\Delta x} [\Omega^z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - \Omega^z(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)], \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^z(i, j, k + \frac{1}{2})}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta x} [\Omega^y(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - \Omega^y(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})] \\ &\quad - \frac{1}{\Delta y} [\Omega^x(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - \Omega^x(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})]. \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

Para el cálculo de los valores de las componentes de $\vec{\Omega}$ en las aristas, es necesario acudir a los flujos adyacentes, representados en la figura B.4, los cuales se definen como

$$F^{lm} \equiv v^l B^m - v^m B^l, \quad (\text{B.12})$$

donde F^{lm} es el flujo que apunta en la dirección l para la componente m del campo magnético, de tal manera que se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} \Omega^x &= -F^{zy} = F^{yz}, \\ \Omega^y &= F^{zx} = -F^{xz}, \\ \Omega^z &= -F^{yx} = F^{xy}, \end{aligned}$$

por lo tanto, la n -ésima componente de $\vec{\Omega}$ en la arista se calcula como el promedio de los valores dicha componente de $\vec{\Omega}$ en las caras adyacentes, lo cual en término de los flujos es

$$\begin{aligned} \Omega^x(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{4} [F^{yz}(i, j + \frac{1}{2}, k) + F^{yz}(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) \\ &\quad - F^{zy}(i, j, k + \frac{1}{2}) - F^{zy}(i, j + 1, k + \frac{1}{2})], \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

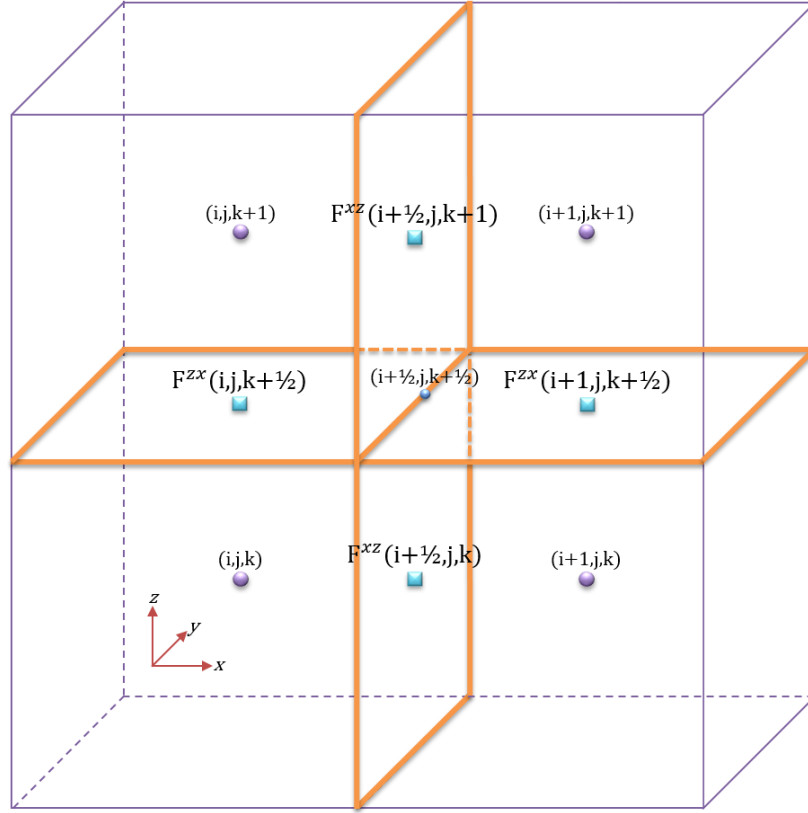


Figura B.4: Flujos en las caras de los cubos de las interceldas, los que son necesarios para calcular $\Omega^y(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})$.

$$\Omega^y(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \left[F^{zx}(i, j, k + \frac{1}{2}) + F^{zx}(i + 1, j, k + \frac{1}{2}) - F^{xz}(i + \frac{1}{2}, j, k) - F^{xz}(i + \frac{1}{2}, j, k + 1) \right], \quad (\text{B.14})$$

$$\Omega^z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) = \frac{1}{4} \left[F^{xy}(i + \frac{1}{2}, j, k) + F^{xy}(i + \frac{1}{2}, j, k + 1) - F^{yx}(i, j + \frac{1}{2}, k) - F^{yx}(i + 1, j + \frac{1}{2}, k) \right], \quad (\text{B.15})$$

los cuales están evaluados en los centros de las caras y por tanto se calculan como el promedio de los puntos adyacentes que pertenecen a la malla

$$\begin{aligned} F^{xy}(i + \frac{1}{2}, j, k) &= \frac{1}{2} [F^{xy}(i, j, k) + F^{xy}(i + 1, j, k)], \\ F^{xz}(i + \frac{1}{2}, j, k) &= \frac{1}{2} [F^{xz}(i, j, k) + F^{xz}(i + 1, j, k)], \\ F^{yx}(i, j + \frac{1}{2}, k) &= \frac{1}{2} [F^{yx}(i, j, k) + F^{yx}(i, j + 1, k)], \\ F^{yz}(i, j + \frac{1}{2}, k) &= \frac{1}{2} [F^{yz}(i, j, k) + F^{yz}(i, j + 1, k)], \\ F^{zx}(i, j, k + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2} [F^{zx}(i, j, k) + F^{zx}(i, j, k + 1)], \\ F^{zy}(i, j, k + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2} [F^{zy}(i, j, k) + F^{zy}(i, j, k + 1)], \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

donde los valores de la parte derecha de las ecuaciones (B.16) se encuentran siguiendo la definición de flujo mostrada en la ecuación (B.12) para cada punto de la malla. De esta manera se completa el método FCT ya que se conocen los flujos, los cuales permiten calcular la evolución de las componentes del campo magnético con las componentes de $\vec{\Omega}$, garantizando de esta manera que la condición de ausencia de monopolos magnéticos se cumpla numéricamente (Lora-Clavijo et al., 2015).

La evolución de los campos magnéticos en las caras del cubo se promedian para obtener dicha evolución en los puntos de la malla y posteriormente mediante un integrador como el RK4 se calculan los campos magnéticos en la malla.

B.1. Cálculo de la divergencia del campo magnético

Para llevar a cabo el cálculo de la divergencia del campo magnético, es necesario hacerlo en los vértices del cubo (Tóth, 2000), es decir en los puntos $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) &= \frac{\partial B^x(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\partial x} + \frac{\partial B^y(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial B^z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

donde cada término se puede escribir como un promedio de las derivadas espaciales del campo en las caras del cubo

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^x(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\partial x} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial B^x(i + \frac{1}{2}, j, k)}{\partial x} + \frac{\partial B^x(i + \frac{1}{2}, j + 1, k)}{\partial x} \right. \\ &\left. + \frac{\partial B^x(i + \frac{1}{2}, j + 1, k + 1)}{\partial x} + \frac{\partial B^x(i + \frac{1}{2}, j, k + 1)}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^y(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\partial y} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial B^y(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\partial y} + \frac{\partial B^y(i, j + \frac{1}{2}, k + 1)}{\partial y} \right. \\ &\left. + \frac{\partial B^y(i + 1, j + \frac{1}{2}, k + 1)}{\partial y} + \frac{\partial B^y(i + 1, j + \frac{1}{2}, k)}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\partial z} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial B^z(i, j, k + \frac{1}{2})}{\partial z} + \frac{\partial B^z(i, j + 1, k + \frac{1}{2})}{\partial z} \right. \\ &\left. + \frac{\partial B^z(i + 1, j + 1, k + \frac{1}{2})}{\partial z} + \frac{\partial B^z(i + 1, j, k + \frac{1}{2})}{\partial z} \right], \end{aligned}$$

donde cada término de dichos promedios se calcula mediante diferencias finitas y finalmente se obtienen las expresiones para cada término de la divergencia en (B.17)

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^x(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\partial x} &= \frac{1}{4\Delta x} [B^x(i + 1, j, k) - B^x(i, j, k) + B^x(i + 1, j + 1, k) \\ &\quad - B^x(i, j + 1, k) + B^x(i + 1, j, k + 1) - B^x(i, j, k + 1) \\ &\quad + B^x(i + 1, j + 1, k + 1) - B^x(i, j + 1, k + 1)], \quad (\text{B.18}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^y(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\partial y} &= \frac{1}{4\Delta y} [B^y(i, j + 1, k) - B^y(i, j, k) + B^y(i + 1, j + 1, k) \\ &\quad - B^y(i + 1, j, k) + B^y(i, j + 1, k + 1) - B^y(i, j, k + 1) \\ &\quad + B^y(i + 1, j + 1, k + 1) - B^y(i + 1, j, k + 1)], \quad (\text{B.19}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\partial z} &= \frac{1}{4\Delta z} [B^z(i, j, k + 1) - B^z(i, j, k) + B^z(i, j + 1, k + 1) \\ &\quad - B^z(i, j + 1, k) + B^z(i + 1, j, k + 1) - B^z(i + 1, j, k) \\ &\quad + B^z(i + 1, j + 1, k + 1) - B^z(i + 1, j + 1, k)]. \quad (\text{B.20}) \end{aligned}$$

Finalmente, con la ecuación (B.17) se calcula el valor de la divergencia para cada vértice dentro de la malla numérica.