

EFFECTO DE *COUPLE STRESSES* Y ESFUERZOS ASIMÉTRICOS EN EL  
FLUJO DE UN FERROFLUIDO IMPULSADO POR UN CAMPO MAGNÉTICO  
ROTATIVO EN UN CANAL

ANÍBAL ALVIZ MEZA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISCOQUÍMICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA QUÍMICA  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA QUÍMICA  
BUCARAMANGA

2015

EFFECTO DE *COUPLE STRESSES* Y ESFUERZOS ASIMÉTRICOS EN EL  
FLUJO DE UN FERROFLUIDO IMPULSADO POR UN CAMPO MAGNÉTICO  
ROTATIVO EN UN CANAL

ANÍBAL ALVIZ MEZA

Trabajo de grado para optar a título de  
Magister en Ingeniería Química

Director

ARLEX CHAVES GUERRERO Ph.D.

Codirector

CARLOS RINALDI Ph.D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISCOQUÍMICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA QUÍMICA  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA QUÍMICA  
BUCARAMANGA

2015

## TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN .....	15
1 MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE.....	19
1.1. SUPERPARAMAGNETISMO Y ESFUERZOS ASIMÉTRICOS .....	19
1.2. ECUACIONES FERROHIDRODINÁMICAS.....	23
1.3. CONDICIONES DE FRONTERA PARA EL PROBLEMA HIDRODINÁMICO.....	26
1.4. CONDICIÓN DE FRONTERA HIDRODINÁMICA INTERFACIAL.....	27
1.5. ESTADO DEL ARTE.....	30
1.6. MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS.....	35
2. OBJETIVOS.....	39
2.1 GENERAL.....	39
2.2 ESPECÍFICOS.....	39
3. METODOLOGÍA .....	40
4. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA Y VALIDACIÓN DEL CAMPO DE FLUJO DE UN FERROFLUIDO EN UN CANAL .....	41
4.1 DESCRIPCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE FLUJO EN DUCTO Y CANAL ....	42
4.2 EXPRESIÓN PARA EL TORQUE MAGNÉTICO .....	44
4.3 DETERMINACIÓN DEL MODELO HIDRODINÁMICO PARA $\eta' = 0$ .....	47

4.4 SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA $\eta' = 0$ .....	50
4.5 MODELO MATEMÁTICO PARA DUCTO Y CANAL CON $\eta' \neq 0$ .....	54
4.6 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA PARA DUCTO Y CANAL CON $\eta' \neq 0$ .....	55
4.7 ALGORITMO DE SOLUCIÓN PARA DUCTO Y CANAL CON $\eta' \neq 0$ .....	57
4.8 VALIDACIÓN DE DOLUCIONES NUMÉRICAS .....	57
5. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS .....	60
5.1 RESULTADOS PARA CANAL CON $\eta' = 0$ .....	60
5.2 RESULTADOS PARA CANAL CON ( $\eta' \neq 0$ ).....	66
5.3 SOLUCIÓN PARA EL CASO DUCTO .....	70
5.4 COMPARACIÓN DE LOS PERFILES DE VELOCIDAD MÁXIMA.....	75
5.5 COMPARACIÓN DE RESULTADOS PARA DOS FERROFLUIDOS DISTINTOS .....	76
5.5.1 Resultados canal con $\eta' = 0$ .....	77
5.5.2 Resultados canal con $\eta' \neq 0$ .....	78
5.5.3 Resultados Ducto .....	79
6. DESCRIPCIÓN DE LA PARTE EXPERIMENTAL .....	80
6.1 MONTAJE Y CARACTERIZACIÓN DE UN EQUIPO PARA LA GENERACIÓN DE CAMPOS MAGNÉTICOS ROTANDO EN GEOMETRÍA DE CANAL Y DUCTO.....	80
6.2 MONTAJE Y CARACTERIZACIÓN DE UN EQUIPO PARA LA GENERACIÓN DE CAMPOS MAGNÉTICOS ROTANDO EN GEOMETRÍA CILÍNDRICA ...	82
6.3 CONFIGURACIÓN DEL EQUIPO PARA MEDIDAS DE PERFILES DE VELOCIDAD.....	84
6.3.1. ultrasound velocity profile (UVP) method.....	84

6.3.1.1 Material del recipiente usado para los experimentos.....	85
6.3.1.1 Material del recipiente usado para los experimentos.....	85
6.4 MEDICION DEL FLUJO DE FERROFLUIDOS.....	87
6.4.1 Transit Time Wide Beam (TTWB) Method ...	88
6.4.1.1 Montaje de los Sensores [70] .....	90
7. CONCLUSIONES.....	92
8. RECOMENDACIONES.....	94
CITAS BIBLIOGRÁFICAS.....	95
BIBLIOGRAFÍA.....	102

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.</b> Estructura de un ferrofluido [45].	19
<b>Figura 2.</b> Incremento de la viscosidad de un ferrofluido impulsado por un campo magnético estacionario [48].	20
<b>Figura 3.</b> Relajación de nanopartículas magnéticas en relación a su diámetro [43].	22
<b>Figura 4.</b> El volumen de control se caracteriza por tener una superficie de separación o interfase de área $S_i$ que divide el volumen de control en dos sub-regiones ( $a$ y $b$ ) donde uno o ambos pueden ser ferrofluidos. El volumen de control tiene un espesor $2l$ y la interfase está delimitada por el contorno $c$ , cuya orientación está dada por el vector unitario $m$ , que es normal al contorno $c$ y tangente a $S_i$ . Además, $n$ es el vector normal a la superficie, dirigido del fluido $a$ al fluido $b$ . Mientras que $n_a$ y $n_b$ son los respectivos vectores unitarios normales a las superficies $S_a$ y $S_b$ que envuelven el volumen de control [1].	29
<b>Figura 5.</b> a) flujo de ferrofluido en un contenedor cilíndrico; b) flujo generado en el espacio anular entre dos cilindros concéntricos ( <i>spin up flow</i> ) [38].	31
<b>Figura 6.</b> Flujo de un ferrofluido en la dirección opuesta a la dirección del campo magnético. Experimento desarrollado por <i>Brown and Horsnell</i> [61].	32
<b>Figura 7.</b> Malla o grilla de discretización con nodos en los vértices [65].	36
<b>Figura 8.</b> Etapas de la metodología.	40

<b>Figura 9.</b> Contenedor cilíndrico utilizado por Krauß <i>et al.</i> [2,3] para estudiar el flujo de un FF en un canal.....	41
<b>Figura 10.</b> Flujo de un ferrofluido en un ducto de sección transversal cuadrada.....	43
<b>Figura 11.</b> Notación el método Transformadas Finitas de Fourier .....	50
<b>Figura 12.</b> Lectura de la malla de diferencias finitas .....	55
<b>Figura 13.</b> Algoritmo solución ducto y canal con $\eta' \neq 0$ .....	57
<b>Figura 14.</b> Perfiles de velocidad en la interfase ferrofluido-aire de un canal obtenidos con una solución analítica ( $\kappa \rightarrow \infty$ ) y numérica para diferentes valores de $\kappa$ y $H = 0.6\text{mT}$ y $\Omega f = 150\text{Hz}$ .....	59
<b>Figura 15.</b> Comparación de perfiles de velocidad obtenidos numéricamente ( $\kappa \rightarrow \infty$ ) y por solución analítica en un canal tomando $H = 0.6\text{mT}$ y $\Omega f = 150\text{Hz}$ . ..	59
<b>Figura 16.</b> Solución numérica para el flujo de un FF en un canal ( $\eta' \neq 0$ ) a) respecto al eje y para x constante y b) respecto al eje x para y constante. $H = 0.6\text{mT}$ y $\Omega f = 150\text{Hz}$ .....	62
<b>Figura 17.</b> Solución numérica para a) $\omega_x$ y b) $\omega_x$ para un canal con ( $\eta' = 0$ ). $H = 0.6\text{mT}$ , $\Omega f = 150\text{Hz}$ . .....	63
<b>Figura 18.</b> Efecto de la frecuencia sobre el punto de velocidad máxima ( $\delta, \delta/2$ ) en un canal con ( $\eta' = 0$ ). $H = 0.6\text{mT}$ . .....	64

<b>Figura 19.</b> Efecto de la amplitud sobre el punto de velocidad máxima ( $\delta, \delta/2$ ) en un canal con ( $\eta'=0$ ). $\Omega f = 150\text{Hz}$ . .....	65
<b>Figura 20.</b> Efecto de la sección transversal sobre el punto de velocidad máxima en un canal con ( $\eta'=0$ ) en $\delta, \delta/2$ . $H = 0.6\text{mT}$ y $\Omega f = 150\text{Hz}$ . .....	66
<b>Figura 21.</b> Solución numérica para canal con ( $\eta' \neq 0$ ); a) con respecto al eje $y$ y b) con respecto al eje $x$ . $H = 0.6\text{mT}$ y $\Omega_f = 150\text{Hz}$ y $\kappa = 3,3$ . .....	67
<b>Figura 22.</b> Perfiles de velocidad experimentales del flujo de ferrofluido en un contenedor cilíndrico con interface libre [40]. .....	68
<b>Figura 23.</b> Flujo de un ferrofluido entre placas infinitamente largas. Chaves y Rinaldi [1]. .....	69
<b>Figura 24.</b> Solución numérica para $\omega_y$ en un canal con ( $\eta' \neq 0$ ). $H = 0.6\text{mT}$ y $\Omega_f = 150\text{Hz}$ y $\kappa = 3.3$ . .....	69
<b>Figura 25.</b> Solución numérica para $\omega_x$ en un canal con ( $\eta' \neq 0$ ). $H = 0.6\text{mT}$ y $\Omega f = 150\text{Hz}$ y $\kappa = 3,3$ . .....	70
<b>Figura 26.</b> Campo de velocidad obtenido para el flujo de un FF en un ducto con respecto a) al eje $y$ y b) al eje $x$ . $H = 0.6\text{mT}$ y $\Omega f = 150\text{Hz}$ y $\kappa = 3,3$ . .....	71
<b>Figura 27.</b> Solución numérica para $\omega_y$ en un ducto. $H = 0.6\text{mT}$ y $\Omega f = 150\text{Hz}$ y $\kappa = 3,3$ .....	72

<b>Figura 28.</b> Solución numérica para $\omega_x$ en un ducto. $H = 0.6\text{mT}$ y $\Omega_f = 150\text{Hz}$ y $\kappa = 3,3$ .	73
<b>Figura 29.</b> Perfiles de velocidad para un ferrofluido en un ducto a diferentes valores del parámetro de <i>spin viscosity</i> y valores de $H = 0.6\text{mT}$ y $\Omega_f = 150\text{Hz}$ .	74
<b>Figura 30.</b> Velocidad angular ( $\omega_y$ ) para el flujo de un ferrofluido en un ducto con $H = 6\text{mT}$ y $\Omega_f = 150\text{Hz}$ .	75
<b>Figura 31.</b> Comparación de los perfiles de velocidad máximos en un ducto y canal ( $\delta$ ) con y sin <i>spin viscosity</i> . $H = 0.6\text{mT}$ y $\Omega_f = 150\text{Hz}$ .	76
<b>Figura 32.</b> Comparación de los perfiles de velocidad máximo $\delta, \delta/2$ en un canal con $\eta' = 0$ para los ferrofluidos WBF-1 y WBF-2. $H = 0.6\text{mT}$ y $\Omega_f = 150\text{Hz}$ .	78
<b>Figura 33.</b> Comparación de los perfiles de velocidad máximo $\delta, \delta/2$ en un canal con $\eta' \neq 0$ para los ferrofluidos WBF-1 y WBF-2. $H = 0.6\text{mT}$ y $\Omega_f = 150\text{Hz}$ y $\kappa = 3,3$ .	79
<b>Figura 34.</b> Comparación de los perfiles de velocidad máximo $\sim\delta/5, 3\delta/5$ en un ducto con $\eta' \neq 0$ para los ferrofluidos WBF-1 y WBF-2. $H = 0.6\text{mT}$ y $\Omega_f = 150\text{Hz}$ y $\kappa = 3,3$ .	79
<b>Figura 35.</b> (a) Arreglo experimental para la investigación del flujo de un FF. Las flechas indican la dirección del CMR. (b) Esquema para la medición susceptibilidad magnética. Krauß et al. [2,3].	81

**Figura 36.** Arreglo para generar un CMR, consiste en: (1) un generador de canal universal dual usado para generar dos corrientes sinusoidales bajas, las cuales son amplificadas usando (2) un AE *Techron 5050 Linear Amplifier*. Estos son utilizados para excitar el motor de un estator embobinado de dos fases (3). Tres multímetros Fluke 45 (4) son usados para verificar que la corriente de entrada al embobinado del estator está balanceada. El osciloscopio (5) es usado para verificar la señal de entrada del amplificador lineal. Chaves *et al.* [40].....83

**Figura 37.** Ranuras del recipiente que contiene el ultrasonido [40].....86

**Figura 38.** Disposición de ultrasonidos para medición del perfil de velocidad ( $v_{\theta}$ ) un cilindro. Chaves *et al.* [40].....86

**Figura 39.** Posición del ultrasonido para medir el perfil de velocidad  $v_{\theta}$  [40].....87

**Figura 40.** *transit time wide beam (TTWB) method*.....88

**Figura 41.** Montaje de los sensores .....90

## RESUMEN

**TITULO:** EFECTO DE *COUPLE STRESSES* Y ESFUERZOS ANTISIMÉTRICOS EN EL FLUJO DE FERROFLUIDOS IMPULSADOS POR CAMPOS MAGNÉTICOS ROTATIVOS EN UN CANAL \*

**AUTOR:** Ing. ANIBAL ALVIZ MEZA\*\*

**PALABRAS CLAVE:** Ferrofluido, Spin viscosity, Couple stresses, Canal, Ducto, Campo magnético rotativo.

### DESCRIPCIÓN:

Los ferrofluidos son un claro ejemplo de fluidos estructurados; cuyo comportamiento reológico está influenciado por fuerzas de polarización magnética. Adicionalmente, los ferrofluidos se caracterizan por un tensor de esfuerzos asimétrico cuando están bajo la acción de un campo magnético rotativo. Este trabajo ha sido motivado por un estudio anterior desarrollado por Krauß et al. (2006), donde se reportan resultados experimentales para el flujo de un ferrofluido de carácter superficial, impulsado por un campo magnético rotativo uniforme en un canal circular de sección transversal cuadrada. En el presente trabajo se obtiene una solución numérica para el flujo de un ferrofluido en esta geometría particular, considerando el efecto de difusión del momento angular interno; descrito por el tensor de esfuerzos "couple stresses" y cuantificado por el coeficiente fenomenológico "spin viscosity". Se obtuvieron soluciones numéricas tanto para el flujo de un ferrofluido en un ducto como en un canal de sección transversal cuadrada. Las soluciones numéricas mostraron que el flujo de ferrofluidos en un ducto se genera sólo en caso de que exista difusión del momento angular interno (*spin viscosity*). En cuanto a los resultados obtenidos en el canal, inclusive para el caso de "spin viscosity" cero es posible generar flujo de un ferrofluido de carácter superficial; a causa de la discontinuidad del tensor de esfuerzos "couple stresses" y el tensor de esfuerzos antisimétricos a través de la interfase ferrofluido/aire. Por otra parte, se encontró que la magnitud del flujo en canal era mayor cuando el parámetro de flujo "spin viscosity" era tomado como cero; lo cual puede ser explicado por la competencia entre el mecanismo de flujo volumétrico y superficial. Finalmente, para las mismas condiciones de intensidad y frecuencia del campo magnético, la magnitud del flujo en el canal fue un poco mayor que la del ducto.

---

\* Proyecto de Grado

\*\* Facultad de ingenierías fisicoquímicas. Escuela de ingeniería química. Director: Arlex Chaves Guerrero. Codirector: Carlos Rinaldi.

## ABSTRACT

**TITLE:** EFFECT OF COUPLE STRESSES AND ASYMMETRIC EFFORTS IN THE FLOW OF FERROFLUIDS DRIVEN BY ROTATING MAGNETIC FIELDS IN A CHANNEL\*

**AUTHOR:** Ing. ANIBAL ALVIZ MEZA\*\*

**KEY WORDS:** Ferrofluid, Spin viscosity, Couple stresses, Channel, Duct, rotating magnetic field.

### DESCRIPTION:

Ferrofluids are a clear example of structured fluids; whose rheological behavior is influenced by forces of magnetic polarization. Moreover, these fluids are characterized by an antisymmetric stress tensor when they are under the action of a rotating magnetic field. This work has been motivated by the experimental evidence of the surface flow of a ferrofluid driven by a rotating magnetic field in a circular channel of square cross section (Krauß et al., 2006). In this work a numerical solution for this particular geometry is obtained, which considers the effect of diffusion of the internal angular momentum of the ferrofluid particles; which is described by the tensor "couple stresses" and quantified by a phenomenological coefficient "spin viscosity". Numerical solutions for a ferrofluid flow in a duct as a channel of square cross section were obtained. The numerical solutions obtained showed that the ferrofluid flow in a duct is generated only in case that the existence of the internal angular momentum diffusion is assumed ("spin viscosity"). As for the results of the channel, in the event of "spin viscosity" zero, it is possible to generate ferrofluid flow of superficial character because of discontinuity of "couple stresses" and antisymmetric stresses through the ferrofluid-air interface. Moreover, it was found that the channel flow magnitude is greater when the parameter of flow "spin viscosity" was at nonzero: this can be explained because of the combined action between the mechanism of flow volumetric and surface. Finally, for the same conditions of intensity and frequency of the applied magnetic field, the magnitude of the flow in the channel was found to be higher than in the duct.

---

\* Degree Thesis

\*\* Facultad de ingenierías fisicoquímicas. Escuela de ingeniería química. Director: Arlex Chaves Guerrero. Codirector: Carlos Rinaldi.

## INTRODUCCIÓN

Los ferrofluidos (FF) son suspensiones coloidales de nanopartículas magnéticas estabilizadas y suspendidas en un líquido, el cual puede ser agua o un compuesto orgánico.

Las aplicaciones de los ferrofluidos comenzaron a ser desarrolladas aprovechando el control preciso que tienen los campos magnéticos sobre ellos [4,5,6-9], lo que se ve reflejado en diversas aplicaciones, tales como: en amortiguadores para vehículos, en la transferencia de calor en altavoces, en bombas magnetocalóricas, tubos de calor y lubricantes de cojines [10,11], bombas y válvulas microfluidicas [12-14], actuadores y dispositivos microfluidicos [15,16], motores de paso [17], aplicaciones en acelerómetros e inclinómetros [18-20], en procesos de separación [21], como soporte en reacciones catalíticas [22-25], en sellos a pruebas de fuga [26] y en microactuadores hidráulicos y neumáticos [27-29]. Los ferrofluidos también son de interés en una amplia gama de aplicaciones biomédicas tales como: agentes de contraste para imágenes de resonancia magnética, en el suministro y/o direccionamiento magnético de medicinas, en hipertermia como tratamiento del cáncer, en el accionamiento magneto-mecánico de receptores en las células y en biosensores [30-33].

A pesar del creciente número de aplicaciones que involucran ferrofluidos y de haber transcurrido aproximadamente 5 décadas desde que Moskowitz y Rosensweig [34] reportaron por primera vez la generación de flujo de un ferrofluido inducido por un Campo Magnético Rotativo (CMR), aún no existe acuerdo entre la comunidad científica del mecanismo que describe este fenómeno. Se han planteado diversas teorías sobre el mecanismo de flujo de las cuales dos de ellas han permanecido: una basada en esfuerzos volumétricos postulada por Zaitsev y

Shliomis en 1967 [35] y conocida como teoría de Difusión del Momento Angular Interno (DMAI) y otra fundamentada en esfuerzos magnéticos tangenciales actuando sobre la interfase fluido/fluido postulada por Rosensweig *et al.* [36,37], a partir de evidencia experimental.

Los principales análisis teóricos del flujo de ferrofluidos usando la teoría de Difusión del Momento Angular Interno (DMAI), han sido realizados en geometrías de cilindro infinitamente largo [38], en el espacio anular entre cilindros concéntricos infinitamente largos [38], entre placas paralelas infinitamente largas [1] y más recientemente en recipientes esféricos [39]. Las predicciones teóricas de flujo de cada una de estas geometrías ha permitido estudiar el efecto de DMAI sobre el flujo bajo CMR uniformes y no uniformes, del “par de fuerza por unidad de volumen” generado por un campo magnético externo “*body couples densities*”, del efecto combinado de “*body couple densities*”, de densidades de fuerzas magnéticas y del transporte difusivo de momento angular interno; descrito por el tensor de “*Couple Stresses*”. No obstante, todos estos análisis han sido realizados suponiendo que la amplitud del campo magnético es despreciable, que las partículas magnéticas tienen un mecanismo de relajación *browniano* y que la ecuación de magnetización de Shliomis es adecuada para describir la dinámica de magnetización de las partículas a bajas frecuencias de rotación del campo y bajas amplitudes. Los perfiles de velocidad obtenidos analíticamente han sido comparados con resultados experimentales [40] encontrando buen acuerdo en cuanto a las características cualitativas pero no tanto en lo que corresponde a la parte cuantitativa. Razón por la cual, se ha generado controversia en torno a la teoría DMAI como el supuesto mecanismo de generación de flujo.

Por otro lado, la generación de flujo debido a esfuerzos magnéticos tangenciales ha sido estudiada en menor extensión tanto teórica como experimentalmente [2,3,

36,37]. De forma experimental, Rosensweig demostró que la curvatura de la interfase fluido/aire influye en la dirección de rotación del flujo de un FF respecto a la dirección de rotación del CMR [37]. Adicionalmente, Rosensweig planteó un balance de esfuerzos en una interfase fluido/aire en el que se incluyeron esfuerzos magnéticos tangenciales para soportar la conclusión anterior [36]. Finalmente, con dichos análisis Rosensweig concluyó que la teoría de DMAI desarrollada por Zaitsev y Shiliomis [35] no era suficiente para dar explicación al fenómeno de flujo, ya que dicha teoría no contemplaba ni explicaba el comportamiento de los ferrofluidos en la interfase fluido/aire.

Posteriormente, Krauß *et al.* [2,3] construyeron un canal circular de sección transversal cuadrada acondicionado con un equipo que generaba CMR y que permitió estudiar el efecto de la interfase FF/aire sobre el flujo, encontrando que la magnitud del flujo dependía de la intensidad y frecuencia del CMR aplicado. Además, compararon sus resultados con un análisis teórico en el que asumieron que el flujo de un FF es generado por esfuerzos magnéticos tangenciales en la interfase fluido/aire, obteniéndose una aceptable congruencia entre experimento y teoría.

Más adelante, Rinaldi *et al.* [41-44] mostraron que tanto el mecanismo de generación de flujo volumétrico como el superficial pueden coexistir en una misma situación. Tal afirmación fue soportada a través de medidas de perfiles de velocidad al interior de un contenedor cilíndrico, que mostraron que los efectos superficiales dominan cerca de la superficie del FF y los volumétricos en los puntos internos del mismo. Adicionalmente, a partir de los resultados obtenidos se planteó la existencia de “*couple stresses*” en el flujo de ferrofluidos impulsados por CMR; los cuales se interpretan como fuerzas de corto alcance existentes en la matriz del FF (efectos no considerados por el estudio de Krauß *et al.* [2,3]). Otro importante

resultado obtenido por Torres-Díaz *et al.* [43] permitió dar concordancia cuantitativa entre la teoría de la DMAI y los perfiles de velocidad obtenidos experimentalmente para bajas intensidades del CMR aplicado.

Recientemente, Rinaldi y Chaves [1] obtuvieron expresiones para el balance interfacial de momento angular interno y momento lineal, basados en conceptos de mecánica de medios continuos. En dicho análisis se contemplan los efectos combinados de tensión superficial y curvatura de la superficie, gradientes de tensión superficial, saltos en el tensor de esfuerzos asimétricos, de “*couple stresses*”, componente normal de campo magnético; así como efectos de distribuciones de corriente superficiales actuando paralelos a la interfase. De esta forma, se incluyeron los efectos potenciales de difusión de momento angular representados por el tensor de “*couple stresses*”, que no fueron tenidos en cuenta en los estudios anteriores realizados por Rosensweig [36,37] y Krauß [2,3].

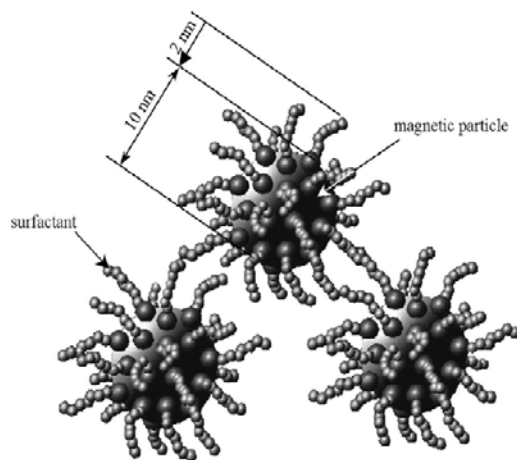
Finalmente, el presente estudio se desarrolló con el objetivo de analizar por primera vez de manera conjunta los mecanismos de generación de flujo superficial y volumétrico, contemplando el efecto del tensor de “*couple stresses*” y tomando como condición de frontera la expresión interfacial obtenida recientemente por Rinaldi y Chaves [1].

# 1. MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE

## 1.1 SUPERPARAMAGNETISMO Y ESFUERZOS ASIMÉTRICOS

Los ferrofluidos están compuestos de pequeñas partículas sólidas (3-15 nm), magnéticas, de un solo dominio, recubiertas de una capa molecular de un dispersante y suspendidas en un líquido orgánico o inorgánico, el cual es elegido de acuerdo a su aplicación [4].

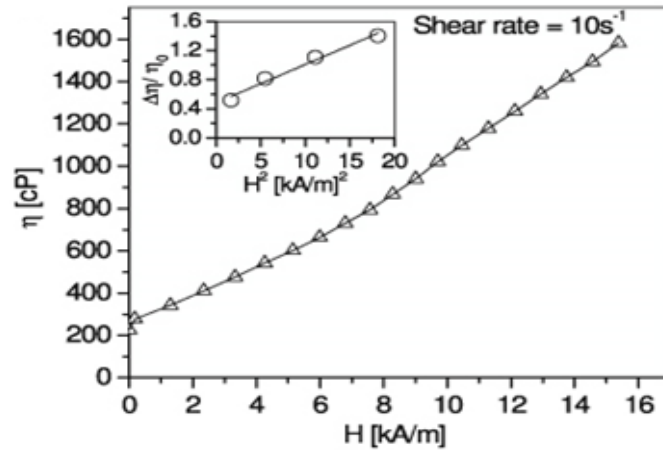
**Figura 1.** Estructura de un ferrofluido.



Fuente: Benson et al., [45].

Los ferrofluidos se diferencian de los fluidos tradicionales en que responden reológicamente a la presencia de un campo magnético externo, rotando o alternando. Como ejemplo de estos comportamientos la literatura reporta el incremento de la viscosidad del ferrofluido en presencia de campos magnéticos estacionarios (Fig. 2), el decrecimiento de la viscosidad frente a CMR o alternando [46, 47] y la generación de flujo como respuesta a la presencia de un campo magnético rotativo, siendo este último el foco de atención del presente estudio.

**Figura 2.** Incremento de la viscosidad de un ferrofluido impulsado por un campo magnético estacionario.



Fuente: Kruti et al., [48].

El flujo de un ferrofluido impulsado por un campo magnético rotativo en un contenedor cilíndrico (*Spin Up Flow*) fue observado por primera vez en 1967 por Moskowitz y Rosensweig [34]. Posteriormente, en 1969 Zaitsev y Shliomis [35] propusieron una teoría para explicar el mecanismo generador de flujo, que asume que el flujo es producido por la difusión del momento angular interno de las nanopartículas hacia la matriz del fluido, creando micro vórtices y en consecuencia el movimiento macroscópico del mismo [49].

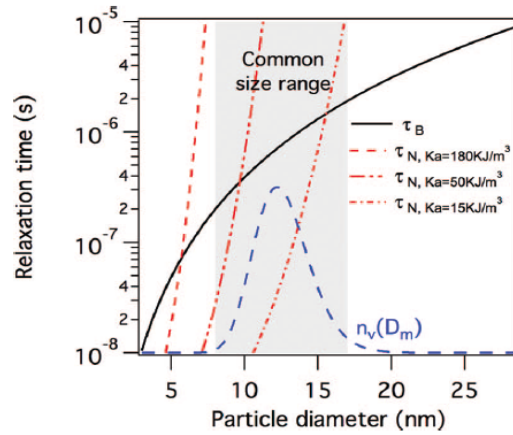
Para entender el fundamento de la teoría de la DMAI, se debe tener en cuenta el carácter superparamagnético de las nanopartículas que conforman el ferrofluido. Este consiste en que su momento magnético ( $\mathbf{m}$ ) tiende a alinearse en la dirección del campo magnético ( $\mathbf{H}$ ) por la acción de un torque magnético de magnitud  $\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}$ , generado por el desplazamiento de  $\mathbf{H}$  de su posición de equilibrio<sup>1</sup>. La alineación de las nanopartículas puede llevarse a cabo por dos mecanismos

<sup>1</sup> Por el contrario, situaciones que involucran campos magnéticos estáticos son analizadas asumiendo que  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{H}$  son paralelos por lo que la densidad de torque magnético es cero.

diferentes: a) El mecanismo de relajación de *Néel*, en el cuál el vector de momento magnético rota dentro de la partícula sin rotación de la misma en el líquido y b) El mecanismo de relajación *browniano*, mediante el cual el vector de momento magnético se reacomoda por rotación de la partícula en el líquido [50-52].

El mecanismo de relajación *browniano* es el que tiene un efecto sobre la hidrodinámica de ferrofluido, y es el mecanismo de relajación dominante en ferrofluidos con partículas magnéticas con diámetros mayores de 10 nm [43] y con altos valores de la constante de anisotropía magnética. Por ejemplo, las partículas magnéticas de ferrita cobalto tienen un valor de la constante de anisotropía magnética de  $180 \text{ kJ/m}^3$  en comparación con  $15 \text{ kJ/m}^3$  de la magnetita, lo que genera que ferrofluidos preparados con este tipo de partículas tengan un mecanismo de relajación predominantemente *browniano*. Esto es mencionado por Torres-Díaz et al. [43], quienes determinaron que partículas magnéticas de magnetita tienen un mecanismo de relajación de *Neel* cuando su diámetro es menor a 12 nm mientras que partículas magnéticas de ferrita cobalto el mecanismo de relajación tipo *Neel* domina para partículas con diámetro menores a 6 nm. Esto es impórtate, si se tiene en cuenta que el diámetro de partículas promedio de un ferrofluido está entre 8 y 17 nm como es mostrado en la Fig. 3.

**Figura 3.** Relajación de nanopartículas magnéticas en relación a su diámetro.



Fuente: Torres *et al.*, [43].

Por lo tanto, partículas magnéticas relajándose a través del mecanismo *browniano* son inducidas a rotar (a una velocidad angular promedio  $\omega$ ) por la acción de un campo magnético rotativo, lo que genera una “fricción” o “esfuerzo” adicional entre estas y el fluido que las contiene y que debe ser tomada en consideración.

La relación entre los campos de velocidad angular promedio de las partículas ( $\omega$ ) y de la velocidad traslacional del ferrofluido ( $\mathbf{v}$ ), fue explicada desde un punto de vista macroscópico por Condiff y Dahler [53], observando que la fricción adicional es generada cuando la velocidad de rotación de la partícula es diferente a la velocidad de rotación local del fluido; la cual es descrita por el vector de vorticidad ( $\frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v}$ ). Por tal razón, la resistencia debe ser una función de  $(\nabla \times \mathbf{v} - 2\omega)$ , que a su vez, es adecuadamente expresada por un tensor de esfuerzos asimétrico. No obstante, como es conocido, la simetría del tensor de esfuerzos es una consecuencia de la conservación del momento angular generado por la ausencia de torques de naturaleza microscópica tales como “*body couples*” y “*couple stresses*”. Desde este punto de vista, un tensor de esfuerzos asimétrico implica la no conservación del momento angular externo y momento angular interno, haciendo necesario la

inclusión de una ecuación de cambio de esta última cantidad que nos permita completar de nuevo un sistema de ecuaciones, por dar cuenta del campo de velocidad angular de las partículas  $\omega$ .

## 1.2 ECUACIONES FERROHIDRODINÁMICAS

La ferrohodinámica es la rama de la mecánica de fluidos que estudia el comportamiento de fluidos que son únicamente afectados por la presencia de campos magnéticos externos [4]. El conjunto de ecuaciones ferrohodinámicas está conformado por las ecuaciones que describen el problema hidrodinámico y las ecuaciones que describen el problema magnético. Dentro del problema hidrodinámico encontramos la ecuación de continuidad (1), la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento lineal (2) y la ecuación de balance de momento angular interno (3). Para el problema magnético encontramos la ecuación de magnetización de Shilomis para bajos campos (4) y las leyes de Maxwell en el límite magneto-cuasiestático (5) y (6).

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} - \bar{\nabla} \bar{p} - 2\zeta \bar{\nabla} \times \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right) + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2)$$

$$\rho I \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} + 4\zeta \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right) + \eta' \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (3)$$

$$\Omega_f \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{M} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} - \frac{1}{\tau} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_{eq}) \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6)$$

En la ecuación (2), el segundo y cuarto término del lado derecho representan la densidad de fuerza magnética (fuerza de cuerpo) que experimenta el ferrofluido debido a un gradiente de campo magnético y la parte asimétrica del tensor de

esfuerzos viscosos resultante de los esfuerzos adicionales entre partícula y fluido. Los coeficientes fenomenológicos que aparecen en la Ecn. (2) son la viscosidad dinámica o absoluta del ferrofluido o viscosidad de cizalla ( $\eta$ ), la viscosidad dilatacional ( $\lambda$ ) y la viscosidad de vórtice ( $\zeta$ ) para la cual *Brenner* [54] obtuvo una expresión válida para ferrofluidos infinitamente diluidos y dada por:

$$\zeta = 1.5\phi_h\eta_0 \quad (7)$$

Donde,  $\eta_0$  es la viscosidad dinámica del líquido en el cual se suspenden las nanopartículas y  $\phi_h$  representa la fracción volumétrica de partículas en el líquido. De la misma forma, en la Ecuación (3), *Condiff y Dahler* [53] definieron los coeficientes fenomenológicos de viscosidad de cizalla de “spin” ( $\eta'$ ), y la viscosidad dilatacional de “spin” ( $\lambda'$ ) llamados así por analogía con los coeficientes del tensor de esfuerzos viscosos para un fluido newtoniano. En esta misma ecuación,  $(\mathbf{M} \times \mathbf{H})$  representa la forma como el fluido recibe momento angular interno desde el campo magnético externo y el segundo término representa la inter-conversión entre momento angular interno y momento lineal como resultado de los esfuerzos asimétricos. El tercer término de la ecuación (3) representa el transporte molecular o por contacto directo de momento angular interno dentro del líquido el cual es cuantificado por  $\eta'$ . Este último término, ha sido despreciado por varios investigadores en diferentes análisis de flujo obteniendo que el flujo es cero a través de la suposición de  $\eta' = 0$ , lo cual ha sido justificado por medio de los análisis de orden de magnitud presentados por *Rosensweig* [4] y *Feng* [55], quienes le dieron un valor de  $10^{-18}\text{kgms}^{-1}$ . No obstante, *Chaves et al.* [40] y *Torres-Díaz y Rinaldi* [43] han obtenido estimados de  $\eta'$  a partir de la comparación de predicciones teóricas de flujo en geometrías cilíndricas y predicciones experimentales de flujo en el límite de cero amplitud del CMR aplicado, los sitúan en el orden de  $10^{-8}\text{kgms}^{-1}$  y  $10^{-10}\text{kgms}^{-1}$  respectivamente. Otras discusiones alrededor del valor de  $\eta'$  reportado por *Chaves et al.* [40] son dadas por *Felderhof* [56] y *Khushrushahi-Zahn* [57].

En relación a la ecuación de Magnetización, el primer término del lado derecho de la Ecn. (4) representa el efecto de la rotación de las partículas sobre el proceso de magnetización del ferrofluido; mientras que el segundo término muestra que la razón de cambio de la magnetización es proporcional a la diferencia entre el vector de magnetización y el valor de magnetización en el equilibrio ( $M_{eq}$ ). La expresión para la magnetización de equilibrio es dada por la ecuación de *Langevin* [4]:

$$\frac{\mathbf{M}_{eq}}{\phi M_d} = L(\alpha) \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} = \left[ \coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right] \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}, \alpha = \frac{\mu_o M_d H V_c}{\kappa_B T} \quad (8)$$

Donde,  $\alpha$  es conocido como el parámetro de *Langevin* y representa la relación entre fuerzas magnéticas y *brownianas* que impiden o favorecen la alineación del momento magnético de las partículas en la dirección del campo.

Respecto a la ecuación de magnetización de Shliomis (Ecn. (4)), ha sido reportado en la literatura que es válida sólo en el caso de bajas amplitudes y bajas frecuencias de rotación del campo magnético aplicado, por lo que se ha sugerido el uso de una ecuación más rigurosa como la obtenida por Marsenyuk, Raikher y Shliomis (MRSh) [58]. No obstante, Peña [59] realizó un análisis de flujo donde compara perfiles de velocidad obtenidos al usar la ecuación de magnetización de Shliomis y la Ecuación de Magnetización MRSh a bajas amplitudes del campo pero a altas frecuencias de rotación. Se encontró que a estas condiciones los perfiles de velocidad son similares en su forma y magnitud. Sin embargo, a altas amplitudes del campo magnético y bajas frecuencias de rotación del campo, la ecuación de Magnetización de Shliomis predice mayores velocidades de flujo que las predichas al usar la ecuación de MRSh; esta última con un buen acuerdo con los datos experimentales reportados por Torres-Díaz y Rinaldi *et al.* [43]. Por

tanto, teniendo en cuenta que este análisis se realiza en el límite de amplitud de bajos campos, se decidió utilizar la Ecuación de Magnetización de Shliomis con el fin de resolver un sistema de ecuaciones ferrohodinámicas de menor dificultad.

Por último, en las ecuaciones (5) y (6)  $\mathbf{B}$  representa la densidad de flujo magnético la cual es definida como:

$$\mathbf{B} = \mu_o (\mathbf{M} + \mathbf{H}) \quad (9)$$

Donde,  $\mu_o$  representa la constante de permeabilidad del espacio libre ( $4\pi \times 10^{-1} H/m^{-1}$ ).

Las condiciones de frontera para la Ecn. (4) son la continuidad de la componente normal de  $\mathbf{B}$  y la discontinuidad de la componente tangencial del campo magnético.

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_a - \mathbf{B}_b) = 0 \quad (10)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b) = \mathbf{K}_s \quad (11)$$

Donde  $\mathbf{K}_s$  es la magnitud de una distribución de corriente en la superficie.

### 1.3 CONDICIONES DE FRONTERA PARA EL PROBLEMA HIDRODINÁMICO

Típicamente, las condiciones de fronteras empleadas para las ecuaciones que describen el problema hidrodinámico (2 y 3) son:

- Para la conservación del momento lineal (2):

Condiciones de no deslizamiento (12) y no penetración (13) en las paredes [39]:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{v} = 0 \quad (13)$$

- Para la conservación del momento angular (3):

Condiciones de no deslizamiento y no penetración en las paredes [39]:

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_s = \frac{\beta}{2} (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (14)$$

Donde,  $\beta$  es el coeficiente de ajuste y  $\boldsymbol{\omega}_s$  representa la velocidad angular en las paredes. Para  $\beta = 0$ , se tiene la condición de no deslizamiento en las paredes  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s = 0$ .

#### 1.4 CONDICIÓN DE FRONTERA HIDRODINÁMICA INTERFACIAL

Motivados por los experimento de Rosensweig *et al.* [37], Krauß *et al.* [2,3] y Chaves *et al.* [8] los cuales demuestran la generación de flujo interfacial de ferrofluido por un campo magnético rotativo; Rosensweig [36] y posteriormente Chaves y Rinaldi [1] desarrollaron balances interfaciales de momento lineal para obtener condiciones de frontera en interfaciales fluido/fluido, donde uno o ambos fluidos son ferrofluidos. La principal diferencia entre los trabajos de Rosensweig y Chaves-Rinaldi es que estos últimos tienen en cuenta la difusión del momento angular (*couple stresses*) para los fluidos a ambos lados de la interfase; razón por la cual fueron usados en este trabajo.

Teniendo en cuenta lo anterior, en las Ecns. (15) y (16) se presentan las componentes tangencial y normal del balance de momento lineal, las cuales aplican a cualquier punto de la interfase:

$$(T_{nn}|_b - T_{nn}|_a) + 2\mathcal{H}\gamma + B_n(H_n|_b - H_n|_a) + \frac{1}{2} \mu_o(H^2|_b - H^2|_a) = 0 \quad (15)$$

$$(T_{nt}|_b - T_{nt}|_a) + \mathbf{t} \cdot \nabla_s \gamma + B_n K_s = 0 \quad (16)$$

Los componentes normal y tangencial del tensor de esfuerzos viscosos  $\mathbf{T}$ , están dados por:

$$T_{nn} = -p + \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial x_n} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (17)$$

$$T_{nt} = \eta \left( \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial x_t} + \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial x_n} \right) + \zeta \mathbf{tn} : \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) \quad (18)$$

En la Ecn. (15)  $\mathcal{H}$  representa la curvatura promedio de la superficie y es dado por la expresión  $\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \nabla_s \cdot \mathbf{n}$ , donde  $\nabla_s$  es el operador gradiente superficial el cual representa el cambio de una propiedad dentro de una interfase [60]. En la Ecn. (18)  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{n}$  son los vectores unitarios que apuntan en dirección perpendicular y normal a la interfase y  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor alternante unidad de orden tres. Los términos que involucran la tensión interfacial de las Ecn. (15) y (16) resultan de tener en cuenta la fuerza de tensión por unidad de longitud que actúa sobre la curva “ $c$ ”; es decir, el contorno formado por la intersección del volumen de control con la interfase en la Figura 4. Esta fuerza por unidad de longitud actúa en la dirección del vector unitario  $\mathbf{m}$  y es generada por la tensión superficial ( $\gamma$ ). De la misma forma los términos que involucran los términos y las variables magnéticas resultan de tener en cuenta la “*surface-excess magnetic force*” generada por el salto en la magnetización a través de la interfase.

La contribución de la Ecn. (16) radica en el hecho de mostrar que saltos en el tensor de esfuerzos asimétricos así como una distribución de corriente superficial pueden generar el flujo de ferrofluidos, además del conocido hecho de que los gradientes de tensión superficial pueden generar el flujo de un fluido debido al efecto conocido como Flujo *Marangoni*.

Por otro lado, el balance interfacial de momento angular interno en sus componentes normal y tangencial son:

$$C_{nn}|_b = C_{nn}|_a \quad (19)$$

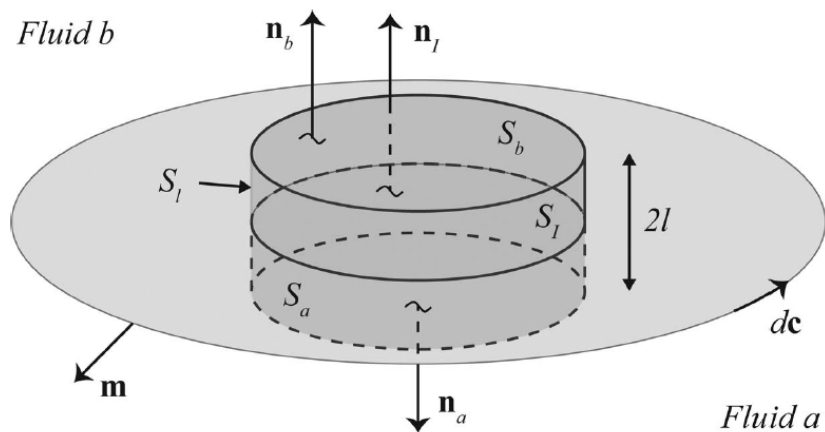
$$C_{nt}|_b = C_{nt}|_a \quad (20)$$

Donde, el tensor de “Couple Stress” es un tensor simétrico similar al tensor de esfuerzos viscosos y es dado por:

$$C = \eta'[\nabla\omega + (\nabla\omega)^t] + \lambda'(\nabla \cdot \omega)I \quad (21)$$

Las Ecns. (19) y (20) muestran que el “couple Stress” es continuo a través de la interfase.

**Figura 4.** El volumen de control se caracteriza por tener una superficie de separación o interfase de área  $S_I$  que divide el volumen de control en dos sub-regiones ( $a$  y  $b$ ) donde uno o ambos pueden ser ferrofluidos. El volumen de control tiene un espesor  $2l$  y la interfase está delimitada por el contorno  $c$ , cuya orientación está dada por el vector unitario  $\mathbf{m}$ , que es normal al contorno  $c$  y tangente a  $S_I$ . Además,  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie, dirigido del fluido  $a$  al fluido  $b$ . Mientras que  $\mathbf{n}_a$  y  $\mathbf{n}_b$  son los respectivos vectores unitarios normales a las superficies  $S_a$  y  $S_b$  que envuelven el volumen de control.



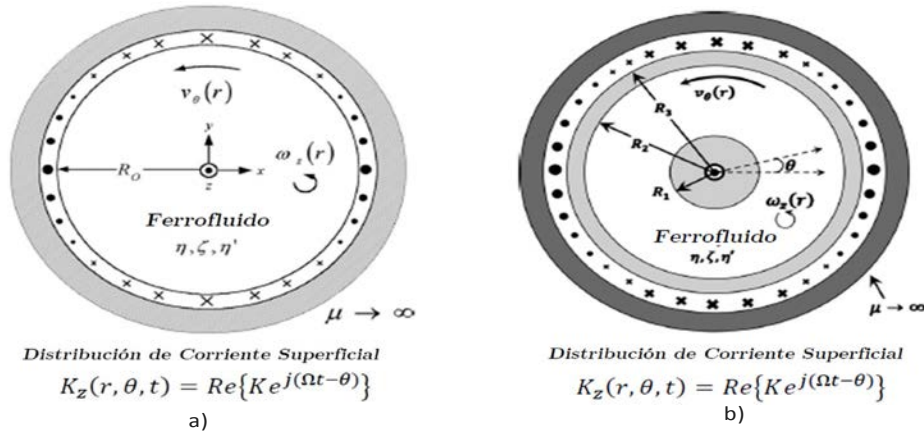
Fuente: Chaves y Rinaldi [1].

## 1.5 ESTADO DEL ARTE

Existe una gran variedad de trabajos realizados en torno al flujo de ferrofluidos generados por campos magnéticos rotativos, todos tratando de una u otra forma en dar explicación al fenómeno de flujo. No obstante, como ya se mencionó, para muchos investigadores aún no es claro el mecanismo generador de flujo. Sin embargo, los crecientes avances en la ciencia de los últimos treinta años han permitido posicionar dichas teorías como las más adecuadas para describir el fenómeno de flujo. Entre alguno de esos avances tenemos: la posibilidad de medir perfiles de velocidad por ultrasonidos, un mejoramiento en las técnicas de síntesis y una mejora en las técnicas de caracterización de ferrofluidos.

Tal y como se mencionó anteriormente, el primer intento por tratar de dar una explicación al fenómeno de flujo de un FF fue llevado a cabo por Moskowitz y Rosensweig en 1967 [34]. Ellos desarrollaron un montaje experimental en un contenedor cilíndrico y lo acondicionaron de manera que generara flujo de un FF impulsado por un campo magnético uniforme rotativo. Este fenómeno es conocido con el nombre de “*spin up flow*”. No obstante, ellos asumieron que el movimiento del fluido se realizaba en la misma dirección de rotación del campo magnético. Es necesario aclarar que en el tiempo que se realizaron estos experimentos, solo se aplicaban técnicas de caracterización de flujo basadas en principios ópticos que no podían ser usadas en ferrofluidos debido a su color oscuro, por lo que todas las observaciones de flujo se realizaban usando partículas como trazadores de flujo en la superficie del fluido (interfase fluido/aire).

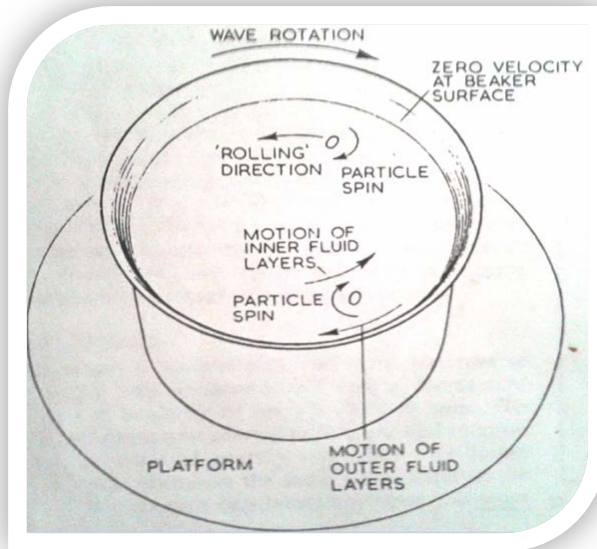
**Figura 5.** a) flujo de ferrofluido en un contenedor cilíndrico; b) flujo generado en el espacio anular entre dos cilindros concéntricos (*spin up flow*).



Fuente: Chaves et al., [38].

Tiempo después, Brown y Horsnell [61] repitieron el experimento observando que el ferrofluido giraba en dirección contraria a la dirección de rotación del campo magnético. Esta observación fue fundamental, ya que se convirtió en un criterio para evaluar las teorías planteadas sobre el mecanismo de generación de flujo. Adicionalmente, Kagan y colaboradores [62], proporcionaron resultados experimentales que apoyaron los hallazgos de Brown y Horsnell, y que mostraban la contra-rotación del campo magnético y el fluido en la superficie a altas intensidades del mismo. Sin embargo, la validez de estos experimentos es dudosa debido a que se usaron suspensiones de partículas magnéticas cuyo tamaño estaban en el orden de micrómetros, lo que implica un comportamiento reológico de fluido magneto-reológico más que de un ferrofluido.

**Figura 6.** Flujo de un ferrofluido en la dirección opuesta a la dirección del campo magnético.



Fuente: Brown y Horsnell [61].

Más adelante, en 1969 Zaitsev y Shliomis [35] trataron el problema teóricamente y plantearon una teoría conocida como la teoría de la difusión del momento angular interno (DMAI). Dicha teoría supone que el momento angular interno del fluido, es generado por torques de origen magnético producidos por un campo magnético rotativo sobre las partículas del ferrofluido. Estos torques magnéticos actúan exactamente sobre el momento dipolar de las nanopartículas y se difunden en la matriz del líquido formando pequeños microvórtices, que finalmente se traducen en el movimiento macroscópico del mismo. Lo anterior quiere decir que el flujo debe estar dirigido en la misma dirección del campo magnético, contrario a lo mostrado por Brown y Horsnell en su experimento. Es importante mencionar que el anterior análisis propuesto por Zaitsev y Shliomis partió de un estudio previo desarrollado por Condiff y Dahler [53], en el que derivaron una teoría equivalente que describía la respuesta hipotética de un fluido dipolar a la presencia de campos eléctricos.

Para ampliar un poco más la controversia con la teoría de la DMAI, Glazov [63] desarrolló un estudio que desvaloraba la teoría de la difusión del momento angular, basándose en los efectos de las no uniformidades espaciales y temporales que pueden surgir cuando existe un campo magnético rotativo. Glazov estimó que los valores obtenidos por la teoría de la DMAI producen un valor de rotación de flujo máximo de " $10^5$ - $10^6$ " veces menor que los valores obtenidos de forma experimental.

En 1990 Rosensweig y colaboradores a través de una serie de experimentos, nuevamente descalificó la teoría de la (DMAI) como el mecanismo generador de flujo [37]. En dicho estudio de Rosensweig se dieron los primeros indicios de que el campo magnético generaba esfuerzos magnéticos en la superficie de un FF, que consecuentemente eran responsables del fenómeno de flujo. Para demostrarlo, usó un ferrofluido en un tubo capilar en presencia de un campo magnético rotativo uniforme, notando que la disposición de la interfase jugaba un rol importante en la dirección del flujo (desechando de esta manera las predicciones supuestas por la teoría de DMAI). De esta manera, si la superficie era convexa el ferrofluido giraba en la misma dirección del campo magnético aplicado, si era cóncava el ferrofluido rotaba en la dirección opuesta a la dirección del campo y finalmente si la superficie era llana afirmó que no existiría flujo [37].

A pesar de toda la evidencia experimental mostrada con anterioridad Rinaldi y colaboradores [41-44] encontraron que la teoría de la DMAI describe correctamente el flujo pero lejos de interfases. Más aun, experimentos desarrollados por Chaves *et al.* [40] usando la técnica de perfiles de velocidad por ultrasonido demostraron que el flujo volumétrico coexistía con el flujo superficial y que este último podría ser suprimido si se eliminaba el efecto de la interfase ferrofluido/aire. Estos experimentos mostraron que se había desvalorizado erróneamente la teoría de la

DMAI, puesto que en realidad dicha teoría si predecía de forma acertada (mas cualitativa que cuantitativamente hasta ese momento) el flujo de un FF en puntos internos del mismo.

Otra prueba de que el flujo de un FF en la superficie era generado por esfuerzos magnéticos atribuidos a los campos magnéticos aplicados, fue mostrada por una serie de experimentos llevados a cabo por Krauß *et al.* [2,3]. Para demostrarlo diseñaron un canal circular de sección transversal cuadrada el cual permitía el contacto entre la superficie del ferrofluido y el aire. Los campos magnéticos fueron dispuestos de tal forma que se generará un campo magnético rotativo aproximadamente uniforme con rotación paralela al eje del ducto (descartando de esta manera los efectos de concavidad o convexidad del FF). Los experimentos demostraron que la magnitud del flujo aumentaba con el aumento de la amplitud del campo magnético aplicado y que la dependencia de la frecuencia del campo aplicado estaba relacionada con la parte imaginaria de la susceptibilidad magnética del FF. Adicionalmente, los cálculos numéricos arrojados indicaron que las mediciones fueron consistentes con los efectos generados por los esfuerzos magnéticos que actuaban en la interfase ferrofluido/aire [2,3].

Los experimentos de Krauß [2,3] y Rosensweig [36,37] motivaron a proponer condiciones de equilibrio interfacial en el flujo de ferrofluidos que pudieran dar alguna explicación al fenómeno de flujo en la superficie. A razón de que los análisis realizados por Krauß y colaboradores [2,3] no tuvieron en cuenta los efectos potenciales de la transferencia de momento angular interno de corto alcance entre partículas (“*couple stresses*”). Dicho efecto se ve representado en las ecuaciones ferrodinámicas por el llamado “*spin viscosity*” ( $\eta'$ ) y por el tensor de “*couple stresses*”.

La posible existencia y potencial importancia de “*couple stresses*” en el flujo de ferrofluidos impulsados por campos magnéticos rotativos ha sido demostrada por Rinaldi y colaboradores [41-44], con una aportación reciente de Torres-Diaz [43] que demuestra concordancia cuantitativa entre la teoría de la DMAI incluyendo el parámetro “*spin viscosity*” y perfiles de velocidad experimentales obtenidos para ferrofluidos a base de ferrita de cobalto con el demostrado mecanismo de relajación *browniano*. Adicionalmente, Peña [59] demostró en un estudio reciente que cuando se usa la ecuación de MRSh [58] para bajas frecuencias y altas intensidades del CMR, se obtienen valores más ajustables para la teoría de la DMAI que los obtenidos por la ecuación de magnetización de Shilomi [64].

Recientemente, Rinaldi y Chaves [1] obtuvieron condiciones de frontera interfaciales a partir de balances superficiales de momento lineal y momento angular interno, los cuales incluyen efectos de “vortex viscosity” ( $\zeta$ ), “spin viscosity” ( $\eta'$ ), y tensión superficial ( $\gamma$ ). En ese trabajo ellos ilustran el uso de estas condiciones de frontera por medio de un análisis que les permitió obtener expresiones analíticas para los perfiles de velocidad angular y lineal de una película de ferrofluido sobre una superficie infinitamente larga en contacto con aire y sometida a un CMR uniforme para los casos de cero ( $\eta'=0$ ) y no cero spin viscosity ( $\eta'\neq 0$ ). Con esta investigación queda abierta la posibilidad de múltiples estudios en los que se considere el flujo de un FF en una interfase fluido/fluido.

## 1.6 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

El método de diferencias finitas, es uno de los métodos más empleados para modelar problemas de flujo. La pregunta que responde a la razón de usar este método para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales, está relacionada con la facilidad del mismo, por lo que no requiere de conocimientos avanzados de

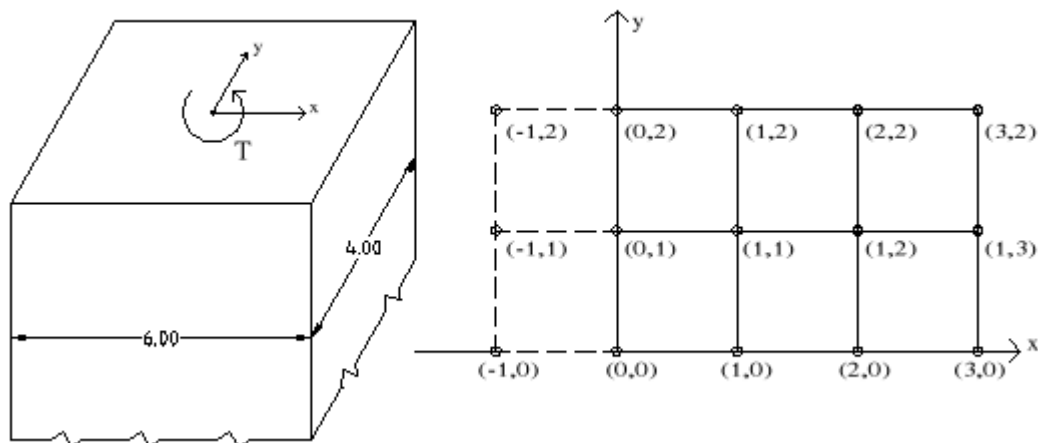
matemáticas para ser utilizado. En este método, como se verá a continuación, cada operación tiene un significado físico.

El método de diferencias finitas consiste en:

- Asignar puntos espaciados de manera apropiada sobre un dominio (nodos) y aplicar las ecuaciones constitutivas correspondientes del fenómeno a cada punto.
- El problema en un dominio continuo se discretiza de tal manera que las variables dependientes existen sólo en puntos discretos.
- Las derivadas se aproximan mediante diferencias, lo que da origen a una representación algebraica de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP).

Uno de los primeros pasos para establecer un esquema de diferencias es el reemplazo del dominio continuo original por una malla o grilla (Fig. 7) de diferencias finitas: Discretización.

**Figura 7.** Malla o grilla de discretización con nodos en los vértices.



Fuente: El rincón del vago [65].

Posteriormente, las derivadas presentes en el sistema de ecuaciones diferenciales son representadas en diferencias. Lo que se logra a partir de la serie de Taylor, como se muestra a continuación:

- Sea  $x$  un punto cercano al punto  $x_i$ , tal que:  $x = x_i - h$ , y sea  $f(x)$  el valor de una función en el punto  $x$ . Entonces,  $f(x)$  se puede aproximar mediante la serie de Taylor alrededor del punto  $x_i$ , de la siguiente manera:

$$f(x_i - h) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{1}{2!} f''(x_i)h^2 - \frac{1}{3!} f'''(x_i)h^3 + \dots \quad (22)$$

- Sea  $x$  un punto cercano al punto  $x_i$ , tal que:  $x = x_i + h$ , y sea  $f(x)$  el valor de una función en el punto  $x$ . Entonces,  $f(x)$  se puede aproximar mediante la serie de Taylor alrededor del punto  $x_i$ , de la siguiente manera:

$$f(x_i + h) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{1}{2!} f''(x_i)h^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_i)h^3 + \dots \quad (23)$$

Manipulando las series anteriores hasta el segundo término se obtienen las siguientes expresiones:

- *Ecuación de diferencias finitas hacia delante.*

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} \quad (24)$$

- *Ecuación de diferencias finitas hacia atrás.*

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} \quad (25)$$

- *Ecuación de diferencias finitas centradas.*

$$f^1(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} \quad (26)$$

Para determinar las expresiones para la segunda derivada se toman las series de Taylor (21 y 22) hasta ese término, obteniendo para las diferencias finitas centrada:

$$f^2(x_i) = \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2} \quad (27)$$

De las expresiones obtenidas anteriormente las diferencias finitas centradas son las que tienen mayor exactitud, por esta razón se trabajó con ellas para la realización del presente estudio.

Finalmente, una vez seleccionadas las expresiones utilizadas para la discretización, la malla, la distribución de los nodos en ella y el tamaño de las particiones, se plantea una estrategia de solución numérica que permita conocer las variables de interés presentes en cada uno de los nodos; lo equivalente a solucionar un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas.

## 2. OBJETIVOS

### 2.1 GENERAL

Estudiar el efecto de “*Couple Stresses*” y esfuerzos asimétricos en la generación de flujo de un ferrofluido impulsado por un campo magnético rotativo en la interfase fluido/aire de un canal.

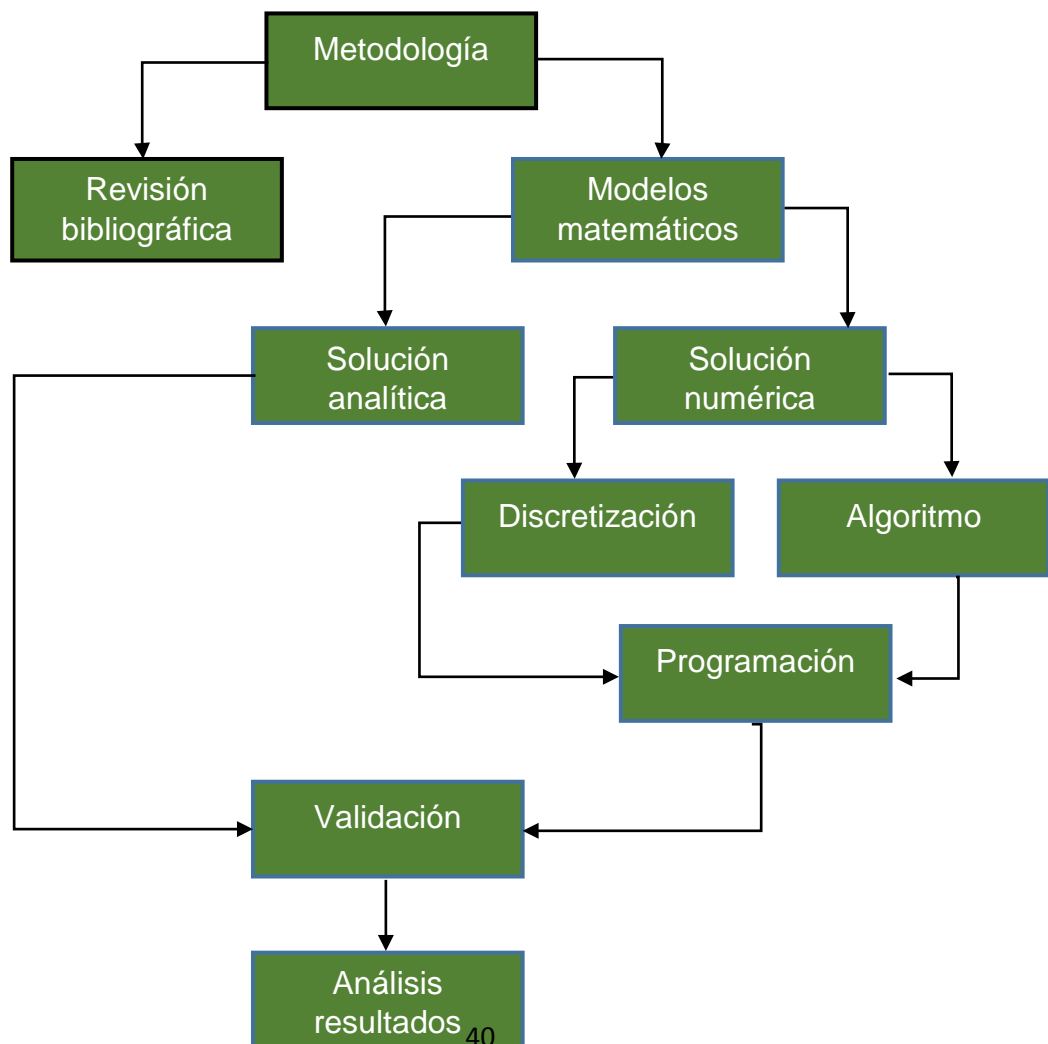
### 2.2 ESPECÍFICOS

- Determinar un modelo matemático para el flujo de un ferrofluido en un canal, que incluya el efecto de salto de esfuerzos asimétricos y “*Couple Stresses*” en la interface fluido/aire.
- Determinar el efecto de salto de esfuerzos asimétricos y “*Couple Stresses*” sobre el flujo de un ferrofluido en un canal ( $\eta' = 0$ ).
- Determinar el efecto combinado de “*Couple Stresses*” ( $\eta' \neq 0$ ) y esfuerzos asimétricos sobre el perfil de velocidad en un canal de sección transversal cuadrada.
- Estudiar las características de flujo de un ferrofluido en un ducto de sección transversal cuadrada.

### 3. METODOLOGÍA

A continuación, se presenta la metodología empleada para desarrollar los objetivos de este estudio. Partiendo de una revisión bibliográfica se determinaron los modelos matemáticos que permiten solucionar cada problema planteado en los objetivos. Con tales modelos se obtuvieron soluciones numéricas que fueron validadas teórica y numéricamente según fuera el caso. Finalmente, se hizo un análisis de resultados.

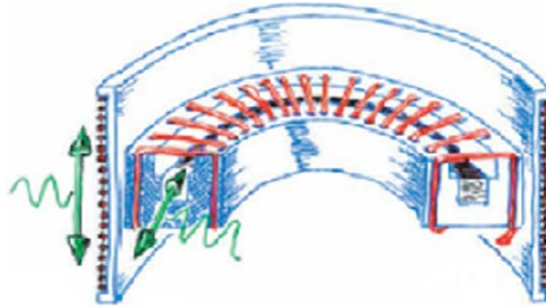
**Figura 8.** Etapas de la metodología.



#### 4. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA Y VALIDACIÓN DEL CAMPO DE FLUJO DE UN FERROFLUIDO EN UN CANAL

En este capítulo se describe en forma detallada, el desarrollo de los modelos matemáticos para los dos problemas de flujo tratados en esta investigación, la implementación numérica y la validación de la solución numérica por comparación con una solución analítica del problema de flujo en el canal con  $\eta' = 0$ . Las consideraciones realizadas en el desarrollo de los modelos matemáticos a resolver fueron motivadas por un trabajo anterior desarrollado por Krauß y colaboradores [2,3], en el cual se obtuvieron datos experimentales y teóricos ( $\eta' = 0$ ) para el flujo de un FF en un canal (Fig. 9). No obstante, los datos experimentales presentados por Krauß fueron para altas amplitudes y frecuencias del CMR, mientras que las soluciones desarrolladas en este trabajo son limitadas a bajas amplitudes del campo magnético aplicado.

**Figura 9.** Contenedor cilíndrico para estudiar el flujo de un FF en un canal.



Fuente: Krauß *et al.* [2,3].

El conjunto de ecuaciones ferrodinámicas (1-6) dispuestas en forma adimensional, con las mismas escalas usadas por Torrez-Díaz [39] para bajas amplitudes del campo magnético aplicado son las siguientes:

$$Re_v \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{D\bar{t}} = \frac{\zeta}{\eta\Omega} \bar{\mathbf{M}} \cdot \nabla\bar{\mathbf{H}} - \nabla\bar{p} + 2\frac{\zeta}{\eta} \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\boldsymbol{\omega}} + \frac{\eta_e}{\eta} \nabla^2 \bar{\mathbf{v}} \quad (28)$$

$$R_{e\omega} \frac{D\bar{\omega}}{D\bar{t}} = \frac{1}{\bar{\Omega}} \bar{\mathbf{M}} \times \bar{\mathbf{H}} + 2\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{v}} - 4\bar{\omega} + \frac{4\eta}{\eta_e \nu^2} \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{\omega}) + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} [\bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{\omega}) + \bar{\nabla}^2 \bar{\omega}] \quad (29)$$

$$\bar{\Omega} \frac{\partial \bar{\mathbf{M}}}{\partial \bar{t}} = \bar{\mathbf{H}} - \bar{\mathbf{M}} \quad (30)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{H}} = 0; \bar{\nabla} \cdot (\chi_i \bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{H}}) = 0 \quad (31)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (32)$$

Con:

$$\bar{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{M}}{\chi_i K}; \bar{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_o H}; \bar{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H}}{H}; \bar{\nabla} = \delta \nabla; \bar{x} = \frac{x}{\delta}; \eta_e = \eta + \zeta; \nu = \left( \frac{4\eta \delta^2 \zeta}{\eta_e \lambda'} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{y} = \frac{y}{\delta}; \bar{\Omega} = \Omega_f \tau; R_{ev} = \frac{\rho \delta^2}{\eta} \left( \frac{\mu_o \chi_i K^2 \bar{\Omega}}{\zeta} \right); R_{e\omega} = \frac{\rho l}{\zeta} \left( \frac{\mu_o \chi_i K^2 \bar{\Omega}}{\zeta} \right); \kappa^2 = \frac{4\eta \delta^2 \zeta}{\eta_e \eta'}$$

$$\bar{t} = \Omega_f t; \bar{p} = \frac{\zeta p}{\mu_o \eta \chi_i H^2 \bar{\Omega}}; \bar{\omega} = \frac{\zeta \omega}{\mu_o \chi_i H^2 \bar{\Omega}}; \bar{\mathbf{v}} = \frac{\zeta \mathbf{v}}{\mu_o \chi_i H^2 \bar{\Omega} \delta}$$

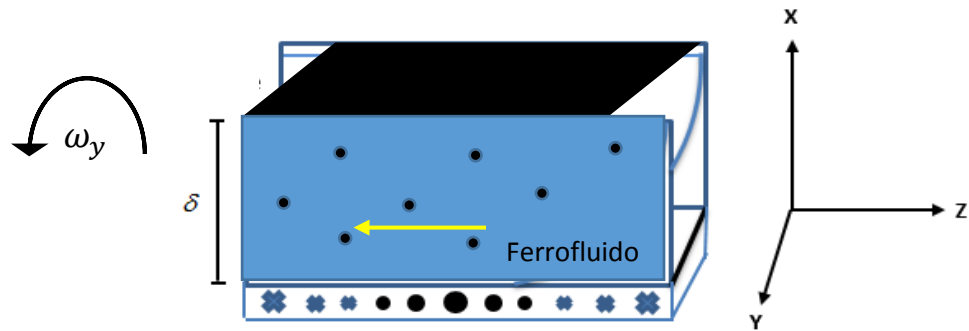
Donde,  $\bar{p}$  representa la presión,  $\eta$  viscosidad del ferrofluido,  $\bar{\Omega}$  hace referencia a la frecuencia de rotación adimensional del campo magnético,  $\eta'$  es el parámetro fenomenológico de “*spin viscosity*”,  $\lambda'$  es el parámetro de flujo “*bulk spin viscosity*”,  $\delta$  es el alto del canal,  $l$  el momento de inercia,  $\rho$  la densidad del ferrofluido,  $R_{ev}$  el número de Reynolds y  $R_{e\omega}$  el número de Reynolds angular.

#### 4.1 DESCRIPCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE FLUJO EN DUCTO Y CANAL

Como se mencionó anteriormente, en el presente trabajo se obtienen las soluciones numéricas del campo de flujo en dos geometrías diferentes: en un canal de sección transversal cuadrada similar al mostrado en la Fig. 9 y construido

por Krauß *et al.* [2,3] y un ducto de sección transversal cuadrada (Fig. 10) similar al usado por Zanh y Greer [66], pero con la diferencia de que para este caso el canal es solamente infinito en la dirección axial y no en la dirección de  $y$ . Adicionalmente, se puede notar que la dirección del campo es en el sentido opuesto a la manecillas del reloj.

**Figura 10.** Flujo de un ferrofluido en un ducto de sección transversal cuadrada.



La diferencia entre ambas geometrías es que en el caso del canal se pueden estudiar los esfuerzos superficiales y volumétricos sobre la generación de flujo, mientras que en el ducto solo se pueden estudiar los esfuerzos volumétricos. Para ambos casos el ferrofluido es sometido a un campo magnético rotando que resulta de imponer un campo magnético en la dirección de  $z$  y un campo de inducción magnética en  $x$ . Ambos son espacialmente uniformes pero dependientes del tiempo y modelados según las siguientes expresiones:

$$\mathbf{H}_z(t) = \Re\{h_z e^{j\Omega_f t}\} \quad (33)$$

$$\mathbf{B}_x(t) = \Re\{b_x e^{j\Omega_f t}\} \quad (34)$$

Donde,  $\Re$  indica la parte real de la expresión entre paréntesis,  $\Omega_f$  la frecuencia de rotación del campo,  $b_x$  y  $h_z$  las componentes complejas de la inducción magnética y campo magnético respectivamente, en las direcciones indicadas.

## 4.2 EXPRESIÓN PARA EL TORQUE MAGNÉTICO

Para determinar la expresión del torque magnético requerida por la ecuación de momento angular interno (29), se siguieron los argumentos planteados por Zahn y Greer [66]. En este sentido ellos muestran que la suposición del campo magnético e inducción magnética de las ecuaciones (33) y (34) satisfacen las leyes de Gauss y de Ampere:

$$\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{H}} = \frac{d\bar{H}_z}{dx} \mathbf{i}_y = 0 \quad H_z = \text{constante} \quad (35)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{B}} = \frac{d\bar{B}_x}{dx} = 0 \quad B_x = \text{constante} \quad (36)$$

Para el caso de una película de fluido infinitamente larga en la dirección  $z$  y  $y$ . Por otro lado, la magnetización del ferrofluido generada por los campos magnéticos impuestos, hace que  $b_x$  y  $h_z$  sean dependientes de  $x$ , lo que permite suponer que:

$$\bar{\mathbf{H}}(\bar{x}, t) = \Re\{ [\bar{h}_x(\bar{x})\mathbf{i}_x + \bar{h}_z\mathbf{i}_z] e^{j\bar{t}} \} \quad (37)$$

$$\bar{\mathbf{B}}(\bar{x}, t) = \Re\{ [\bar{b}_x\mathbf{i}_x + \bar{b}_z(\bar{x})\mathbf{i}_z] e^{j\bar{t}} \} \quad (38)$$

$$\bar{\mathbf{M}}(\bar{x}, t) = \Re\{ [\bar{m}_x(\bar{x})\mathbf{i}_x + \bar{m}_z(\bar{x})\mathbf{i}_z] e^{j\bar{t}} \} \quad (39)$$

Aunque es claro que en los casos estudiados aquí, la distancia del canal en la dirección de  $y$  es finita, también es claro que bajo las condiciones de generación del campo presentadas por Krauß tampoco existe una componente  $y$  del campo magnético de inducción magnética. De esta forma, el problema magnético envuelto en las geometrías desarrolladas son tratadas con las suposiciones ya mencionadas y desarrolladas por Zahn y Greer [66].

El procedimiento para calcular el torque que se detalla a continuación es presentado por Chaves y Rinaldi [1]. Teniendo en cuenta las consideraciones discutidas con anterioridad. Las componentes  $x$  y  $z$  de la ecuación de magnetización son:

$$\bar{\Omega} \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial \bar{t}} = \bar{H}_x - \bar{M}_x \quad (40)$$

$$\bar{\Omega} \frac{\partial \bar{M}_z}{\partial \bar{t}} = \bar{H}_z - \bar{M}_z \quad (41)$$

Usando las Ecns (37) y (39) en Ecns. (40) y (41) se obtienen las componentes complejas de la magnetización:

$$\bar{m}_x(\tilde{x}) = \frac{\bar{h}_x(\tilde{x})}{1 + j\bar{\Omega}_f} \quad (42)$$

$$\bar{m}_z = \frac{\bar{h}_z}{1 + j\bar{\Omega}} \quad (43)$$

La componente  $x$  compleja del campo magnético ( $\bar{h}_x(\tilde{x})$ ) es determinada usando la expresión (42) en la expresión para densidad de flux magnético ( $\bar{\mathbf{B}} = \chi \bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{H}}$ ):

$$\bar{h}_x = \frac{\bar{b}_x(1 + j\bar{\Omega})}{1 + \chi + j\bar{\Omega}} \quad (44)$$

Habiendo determinado los componentes complejos de la magnetización y el campo magnético se procede a determinar la componente  $y$  de la densidad de torque magnético  $\tilde{l}_y = (\bar{\mathbf{M}} \times \bar{\mathbf{H}})_y$ :

$$\tilde{l}_y = -\bar{M}_x \times \bar{H}_z + \bar{M}_z \times \bar{H}_x \quad (45)$$

$$\tilde{l}_y = -\Re\{m_x e^{jt}\}\Re\{h_z e^{jt}\} + \Re\{m_z e^{jt}\}\Re\{h_x e^{jt}\} \quad (46)$$

La ecuación (46) se resuelve teniendo en cuenta que la parte real de la función compleja es determinada como:

$$\Re\{z\} = \frac{1}{2}(z^* + z) \quad (47)$$

Donde, el superíndice asterisco (\*) representa el conjugado del complejo. De esta manera, la expresión final obtenida fue:

$$\tilde{l}_y = \frac{j\bar{\Omega}[(1 + \chi + \bar{\Omega}^2 - j\chi\bar{\Omega})\bar{h}_z\bar{b}_x^* - j(1 + \chi - j\bar{\Omega})(-j + \bar{\Omega})\bar{h}_z^*\bar{b}_x]}{2(\bar{\Omega}^2 + 1)[(\chi + 1)^2 + \bar{\Omega}^2]} \quad (48)$$

Para generar un CMR uniforme  $\bar{h}_z$  y  $\bar{b}_x$  fueron tomadas de forma que satisfagan la relación cinemática:

$$\frac{d\bar{\mathbf{H}}}{dt} = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{H}} \quad (49)$$

Donde  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$  es la velocidad angular adimensional. Las condiciones posibles que satisfacen (49) son ( $\bar{h}_z = -1, \bar{b}_x = j$  ó  $\bar{h}_z = 1, \bar{b}_x = -j$ ). Por lo que finalmente se obtiene que el torque promedio está dado por:

$$\tilde{l}_y = \frac{\bar{\Omega}(\bar{\Omega}^2 + \chi + 1)}{(\bar{\Omega}^2 + 1)[(1 + \chi)^2 + 1]} \quad (50)$$

La cual muestra que el torque es constante e independiente del tiempo.

### 4.3 DETERMINACIÓN DEL MODELO HIDRODINÁMICO PARA $\eta' = 0$

Las ecuaciones ferrohodinámicas (28-32) fueron resueltas asumiendo: estado estable, flujo incompresible, bajos valores del número de Reynolds, amplitud del campo magnético que tiende a cero y despreciando el efecto de la curvatura del canal. La solución bajo las anteriores suposiciones, conduce a un problema de perturbación regular de orden cero ( $\varepsilon \ll 1$ ), con el siguiente parámetro de perturbación propuesto por Chaves *et al.* [40]:

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 \chi_i H^2 \tau}{\zeta} \quad (51)$$

Donde,  $\chi_i$  es la susceptibilidad magnética inicial,  $\tau$  el tiempo de relajación magnética efectivo y  $\zeta$  el parámetro de flujo “*vortex viscosity*”.

Para el problema hidrodinámico se consideró el flujo de un ferrofluido en un ducto o canal infinitamente largo en la dirección  $z$ , lo cual permite suponer un vector de velocidad traslacional como  $\mathbf{v} = v_z(x, y)\mathbf{i}_z$ . El campo de velocidad angular de las partículas se asume tiene la forma funcional  $\boldsymbol{\omega} = \omega_x(x, y)\mathbf{i}_x + \omega_y(x, y)\mathbf{i}_y$ , teniendo en cuenta que el campo magnético gira sobre el eje  $y$  y que existen componentes del vector de vorticidad en la dirección de  $x$  y  $y$  como se ve de la Ecn. 52.

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, [\nabla \times \mathbf{v}]_y = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (52)$$

Adicionalmente, se supone que no hay un gradiente de presión en la dirección de flujo. El hecho que el campo magnético sea uniforme (44) implica que la densidad de fuerza magnética ( $\bar{\mathbf{M}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{H}}$ ) sea cero. Por otro lado, el término  $(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}})$  de la ecuación (29) también es despreciado; a razón de la uniformidad del campo magnético aplicado, la baja intensidad del campo magnético y el valor constante

del torque magnético. Para demostrar esto Torres-Díaz y Rinaldi [39] toman la divergencia de la ecuación de conservación de momento angular interno (29), obteniendo:

$$\text{Re}_\omega \frac{D(\bar{\nabla} \cdot \bar{\omega})}{Dt} = -4(\bar{\nabla} \cdot \bar{\omega}) + \frac{4\eta}{\eta_e \nu^2} \left[ \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\kappa^2} \right] \nabla^2 (\bar{\nabla} \cdot \bar{\omega}) \quad (53)$$

A partir de la cual, concluyen que si un elemento de ferrofluido no tiene divergencia de velocidad angular ( $\bar{\nabla} \cdot \bar{\omega}$ ) para algún tiempo inicial, entonces no podrá adquirir un valor diferente de cero en un tiempo  $t$ . En este caso, se supone que en un instante de tiempo inicial, antes de accionar el campo magnético externo, no existe divergencia de velocidad angular ( $\bar{\nabla} \cdot \bar{\omega}$ ) por lo que es despreciado en el presente estudio.

Teniendo en cuenta todo lo anterior y que  $\eta' \neq 0$  se tiene que  $\kappa \rightarrow \infty$  se obtiene:

$$0 = 2 \frac{\zeta}{\eta} \bar{\nabla} \times \bar{\omega} + \frac{\eta_e}{\eta} \bar{\nabla}^2 \bar{v} \quad (54)$$

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{\mathbf{M}} \times \bar{\mathbf{H}}}{4\bar{\Omega}} + \frac{1}{2} \bar{\nabla} \times \bar{v} \quad (55)$$

Remplazando la Ecn. (55) en Ecn. (54) y teniendo en cuenta que la densidad de torque magnético ( $\bar{\mathbf{M}} \times \bar{\mathbf{H}}$ ) es contante podemos simplificar la Ecn. (54):

$$0 = \frac{\zeta}{\eta} \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{v}) + \frac{\eta_e}{\eta} \bar{\nabla}^2 \bar{v} \quad (56)$$

Si se usa la identidad vectorial  $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{v}) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{v}) - \bar{\nabla}^2 \bar{v}$  y el hecho que el ferrofluido es incompresible se obtiene que:

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}. \quad (57)$$

En conclusión, los campos de velocidad traslacional y angular son descritos por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \bar{y}^2} = 0 \quad \text{y} \quad \bar{\omega}_y = \frac{\tilde{l}_y}{4\bar{\Omega}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}}. \quad (59)$$

Las condiciones de frontera para la Ecn. (59) son las de no deslizamiento en las paredes del contenedor (12).

$$\bar{v}_z(\bar{x}, 0) = \bar{v}_z(0, \bar{y}) = \bar{v}_z(\bar{x}, 1) = 0 \quad (60)$$

La condición de frontera interfacial es obtenida a partir de las Ecns. (17) y (18) tomando  $\mathbf{n} = \mathbf{i}_x$  y  $\mathbf{t} = \mathbf{i}_z$ , y teniendo en cuenta que no existen gradientes superficiales de tensión superficial y ni una distribución de corriente superficial. Por lo tanto:

$$\eta \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} + \zeta \mathbf{i}_x \mathbf{i}_z : \boldsymbol{\varepsilon} \cdot [(\nabla \times \bar{\mathbf{v}})_y - 2\bar{\omega}_y] = 0 \quad (61)$$

Desarrollando el segundo término de la Ecn. (61):

$$\eta \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} + \zeta \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} + 2\zeta \bar{\omega}_y = 0 \quad (62)$$

Introduciendo la expresión para la componente-y de la velocidad angular se obtiene

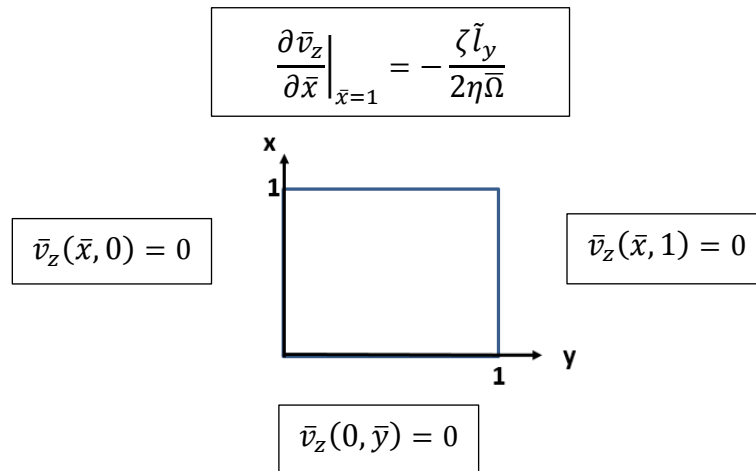
$$\left. \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=1} = -\frac{\zeta \tilde{l}_y}{2\eta \bar{\Omega}} \quad (63)$$

De esta manera, quedo definido el sistema de ecuaciones a resolver para el caso canal con  $\eta'=0$ .

#### 4.4 SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA $\eta' = 0$

A continuación se detalla el desarrollo de la solución analítica de la Ecn. (59) con las condiciones de frontera dadas por las Ecn. (60) y (63) e ilustrada en la Fig. 11. Esta solución es usada para validar la solución numérica para el canal con  $\eta' = 0$ . El método empleado es el de *Transformadas Finitas de Fourier*, el cual es discutido por Deen [67] y que tiene como ventaja respecto al método de separación de variables un procedimiento más estandarizado.

**Figura 11.** Notación para el método Transformadas Finitas de Fourier



En este procedimiento, se asume que la solución puede ser expandida como el producto de la velocidad transformada  $\bar{v}_{z,n}(\bar{y})$  y una función base  $\phi_n(\bar{x})$ , la cual es seleccionada teniendo como criterio que satisfaga con las condiciones de frontera

en una dirección específica. Teniendo en cuenta esto, es asumido que la solución de la ecuación diferencial (59) tiene la forma:

$$\bar{v}_z(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_{z,n}(\bar{y}) \phi_n(\bar{x}) \quad (64)$$

Donde, la función base para  $\phi_n(x)$  es:

$$\phi_n(\bar{x}) = \sqrt{2} \left[ \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] \pi \bar{x} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (65)$$

En este caso el problema se limita a encontrar una ecuación diferencial para la transformada finita de Fourier de la velocidad, que es definida como:

$$\bar{v}_{z,n}(\bar{y}) = \int_0^1 \bar{v}_z(\bar{x}, \bar{y}) \phi_n(\bar{x}) dx \quad (66)$$

Para esto se procede a transformar cada término de la Ecn. (59) de acuerdo a la Ecn. (66):

$$0 = \int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \bar{y}^2} \right] \phi_n(\bar{x}) dx \quad (67)$$

Separando luego en dos integrales:

$$0 = \int_0^1 \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \bar{x}^2} \phi_n(\bar{x}) dx + \frac{d^2}{d\bar{y}^2} \left[ \int_0^1 \bar{v}_z \phi_n(\bar{x}) dx \right] \quad (68)$$

Y reconociendo que el término entre corchetes es la velocidad transformada (Ecn. 66) se obtiene:

$$0 = \int_0^1 \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \bar{x}^2} \phi_n(\bar{x}) dx + \frac{d^2 \bar{v}_{z,n}}{d\bar{y}^2} \quad (69)$$

Usando ahora integración por partes dos veces en el primer término de la Ecn. (69) obtenemos:

$$0 = \phi_n(\bar{x}) \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=0}^{\bar{x}=1} - \frac{d\phi_n}{d\bar{x}} \bar{v}_z \Big|_{\bar{x}=0}^{\bar{x}=1} + \int_0^1 \bar{v}_z \frac{d^2 \phi_n}{d\bar{y}^2} dx + \frac{d^2 \bar{v}_{z,n}}{d\bar{y}^2} \quad (70)$$

Para evaluar el primer término de la Ecn. (70) observe que  $\phi_n(0) = 0$  y  $\phi_n(1) = \sqrt{2} (-1)^n$  de modo que:

$$\phi_n(\bar{x}) \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=0}^{\bar{x}=1} = -(-1)^n \sqrt{2} A \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (71)$$

En la anterior ecuación ha sido definida la constante:

$$A \equiv -\frac{\zeta \tilde{l}_y}{2\eta \tilde{\Omega}} \quad (72)$$

Mientras que el segundo término de la Ecn. (70) es idénticamente cero teniendo en cuenta que  $\bar{v}_z(0, \bar{y}) = 0$  y que la derivada de la función base evaluada en  $\bar{x} = 1$  es cero para cualquier valor de  $n$ .

Por último el tercer término de Ecn. (70) es obtenido derivando dos veces la función base y usando Ecn. (65):

$$\int_0^1 \bar{v}_z \frac{d^2 \phi_n}{d\bar{y}^2} dx = \left(\frac{1}{2} + n\right)^2 \pi^2 \bar{v}_{z,n} \quad (73)$$

Por lo tanto, reemplazando las Ecms. (71) y (73) en la Ecn. (70) se obtiene una ecuación ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes para  $\bar{v}_{z,n}$ :

$$\frac{d^2\bar{v}_{z,n}}{dy^2} - \left(\frac{1}{2} + n\right)^2 \pi^2 \bar{v}_{z,n} = (-1)^n \sqrt{2}A \quad (74)$$

Las condiciones de frontera de la anterior ecuación diferencial, se obtienen aplicando la transformada finita de Fourier a las condiciones de frontera del problema original:

$$C_n(0) = \int_0^1 \theta(\bar{x}, 0) \phi_n(\bar{x}) dx = 0 \quad (75)$$

$$C_n(1) = \int_0^1 \theta(\bar{x}, 1) \phi_n(\bar{x}) dx = 0 \quad (76)$$

La solución de la Ecuación diferencial (74) es:

$$C_n(\bar{y}) = \frac{4(-1)^n \sqrt{2}A \left( -1 + \cosh \left[ \frac{1}{2}(1+2n)\pi\bar{y} \right] - \sinh \left[ \frac{1}{2}(1+2n)\pi\bar{y} \right] \tanh \left[ \frac{1}{4}(1+2n)\pi \right] \right)}{(\pi + 2n\pi)^2} \quad (77)$$

La solución final al reemplazar en (66) las funciones (65) y (77) en términos de  $\bar{v}_z$  es:

$$\bar{v}_z(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{8(-1)^n A \sin \left[ \left( \frac{1}{2} + n \right) \pi \bar{x} \right] \left( -1 + \cosh \left[ \frac{1}{2}(1+2n)\pi\bar{y} \right] \right)}{(\pi + 2n\pi)^2} \right. \\ \left. - \frac{8(-1)^n A \sin \left[ \left( \frac{1}{2} + n \right) \pi \bar{x} \right] \left( \sinh \left[ \frac{1}{2}(1+2n)\pi\bar{y} \right] \tanh \left[ \frac{1}{4}(1+2n)\pi \right] \right)}{(\pi + 2n\pi)^2} \right\} \quad (78)$$

A partir, de la expresión anterior se pudieron validar los resultados numéricos obtenidos.

#### 4.5 MODELO MATEMÁTICO PARA DUCTO Y CANAL CON $\eta' \neq 0$

En la solución del flujo para la geometría de canal se contemplan tanto los efectos volumétricos reflejados en el parámetro “*spin viscosity* ( $\eta'$ )”, como los esfuerzos asimétricos y “*couple stresses*” actuando en la interfase ferrofluido-aire. En cuanto a la geometría de ducto solo se analiza el efecto de los esfuerzos volumétricos descritos por la teoría de la DMAI sobre el flujo de un ferrofluido.

El modelo matemático aplicable a ambas geometrías, se obtiene de las Ecns. (54) y (55), simplificando de acuerdo a las suposiciones hechas para los vectores de velocidad traslacional y angular de las partículas. De esta forma se obtuvieron la componente  $z$  de la ecuación de conservación de momento lineal y las componentes  $x$  y  $y$  de la ecuación de balance de momento angular interno:

$$0 = 2 \frac{\zeta}{\eta} \left[ \frac{\partial \bar{\omega}_y}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{\omega}_x}{\partial \bar{y}} \right] + \frac{\eta_e}{\eta} \left[ \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \bar{y}^2} \right] \quad (79)$$

$$0 = 2 \left[ \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{y}} \right] - 4 \bar{\omega}_x + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial \bar{y}^2} \right] \quad (80)$$

$$0 = \frac{\tilde{l}_y}{\Omega} - 2 \left[ \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} \right] - 4 \bar{\omega}_y + \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{\omega}_y}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}_y}{\partial \bar{y}^2} \right] \quad (81)$$

Las anteriores ecuaciones están sujetas a las siguientes condiciones de frontera:

$$\bar{v}_z(\bar{x}, 0) = \bar{v}_z(0, \bar{y}) = \bar{v}_z(\bar{x}, 1) = \bar{v}_z(1, \bar{y}) = 0 \quad (82)$$

$$\bar{\omega}_x(\bar{x}, 0) = \bar{\omega}_x(0, \bar{y}) = \bar{\omega}_x(\bar{x}, 1) = \bar{\omega}_x(1, \bar{y}) = 0 \quad (83)$$

$$\bar{\omega}_y(\bar{x}, 0) = \bar{\omega}_y(0, \bar{y}) = \bar{\omega}_y(\bar{x}, 1) = \bar{\omega}_y(1, \bar{y}) = 0 \quad (84)$$

La condición de frontera interfacial para la velocidad angular de las partículas es obtenida del balance interfacial de “*couple stresses*” resultando:

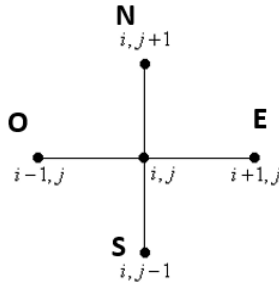
$$\left. \frac{\partial \bar{\omega}_x}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=1} = \left. \frac{\partial \bar{\omega}_y}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=1} = 0 \quad (85)$$

De esta forma, quedó definido el modelo matemático para las geometrías de canal y ducto con  $\eta' \neq 0$ .

#### 4.6 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA PARA DUCTO Y CANAL CON $\eta' \neq 0$

Para dar solución a la ecuación (59) con sus respectivas condiciones de frontera (60) y (63) se plantea el método de solución por diferencias finitas centradas (26) de segundo orden presentado en el capítulo 2, Para ello téngase en cuenta la Fig. 12:

**Figura 12.** Lectura de la malla de diferencias finita



La expresión resultante al discretizar (59) es:

$$a_{p1} \bar{v}_{zp} - a_{n1} \bar{v}_{zn} - a_{s1} \bar{v}_{zs} - a_{e1} \bar{v}_{ze} - a_{w1} \bar{v}_{zw} = 0 \quad (86)$$

Con:

$$a_p = \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right); \quad a_{n1} = a_{s1} = \frac{1}{\Delta x^2}; \quad a_{e1} = a_{w1} = \frac{1}{\Delta y^2}$$

En cuanto a la condición de frontera interfacial (32):

$$\bar{v}_{zp} = \bar{v}_{zs} - \Delta x \frac{\xi \tilde{l}_y}{2\eta\bar{\Omega}} \quad (87)$$

Para dar solución al conjunto de ecuaciones (79-81) contemplando las respectivas condiciones de fronteras (82-84) y (63) para el canal y (82-84) para el ducto se emplearon métodos numéricos de solución. Las ecuaciones resultantes al aplicar el método de diferencias finitas fueron:

$$a_p \bar{v}_{zp} - a_n \bar{v}_{zn} - a_s \bar{v}_{zs} - a_e \bar{v}_{ze} - a_w \bar{v}_{zw} = b \quad (88)$$

$$b_p \bar{\omega}_{xp} - b_n \bar{\omega}_{xn} - b_s \bar{\omega}_{xs} - b_e \bar{\omega}_{xe} - b_w \bar{\omega}_{xw} = b_1 \quad (89)$$

$$b_p \bar{\omega}_{yp} - b_n \bar{\omega}_{yn} - b_s \bar{\omega}_{ys} - b_e \bar{\omega}_{ye} - b_w \bar{\omega}_{yw} = b_2 \quad (90)$$

Con:

$$a_p = \left( \frac{2\eta_e}{\Delta x^2} + \frac{2\eta_e}{\Delta y^2} \right); b_p = \left( 4 + \frac{8\eta}{\eta_e \kappa^2 \Delta x^2} + \frac{8\eta}{\eta_e \kappa^2 \Delta y^2} \right); b_2 = \frac{1}{\Delta y} \bar{v}_{zs} - \frac{1}{\Delta y} \bar{v}_{zn} + \frac{\bar{l}_y}{\bar{\Omega}}$$

$$a_n = a_s = \frac{\eta_e}{\Delta x^2}; a_e = a_w = \frac{\eta_e}{\Delta y^2}; b_n = b_s = \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2 \Delta x^2}; b_e = b_w = \frac{4\eta}{\eta_e \kappa^2 \Delta y^2}$$

$$b = \frac{\zeta}{\Delta x} \bar{\omega}_{yn} - \frac{\zeta}{\Delta x} \bar{\omega}_{ys} - \frac{\zeta}{\Delta y} \bar{\omega}_{xe} + \frac{\zeta}{\Delta y} \bar{\omega}_{xw}; b_1 = \frac{1}{\Delta x} \bar{v}_{ze} - \frac{1}{\Delta x} \bar{v}_{zx}$$

En cuanto a las condiciones de frontera interfaciales (63) y (85) se utilizó la discretización hacia atrás (25):

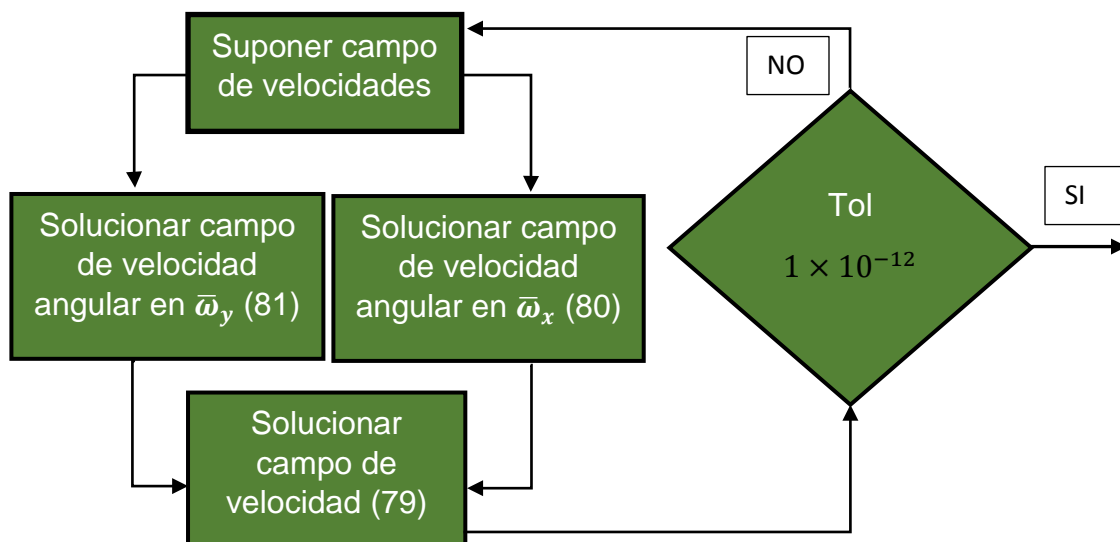
$$\bar{v}_{zp} = \bar{v}_{zs} - \Delta x \frac{\xi \tilde{l}_y}{2\eta\bar{\Omega}} \quad (91)$$

$$\bar{\omega}_{yp} = \bar{\omega}_{xs} \text{ y } \bar{\omega}_{yp} = \bar{\omega}_{ys} \quad (92)$$

#### 4.7 ALGORITMO DE SOLUCIÓN PARA DUCTO Y CANAL CON $\eta' \neq 0$

El sistema de ecuaciones resultante fue resuelto de forma iterativa; suponiendo inicialmente un valor para el campo de velocidades y calculando de esta manera los vectores de momento angular, para luego recalculer el campo de velocidades, hasta alcanzar una tolerancia de  $1 \times 10^{-12}$ . La solución numérica fue realizada en lenguaje de programación C++. Téngase en cuenta para ello la Fig. 13.

Figura 13. Algoritmo solución ducto y canal con  $\eta' \neq 0$



#### 4.8 VALIDACIÓN DE DOLUCIONES NUMÉRICAS

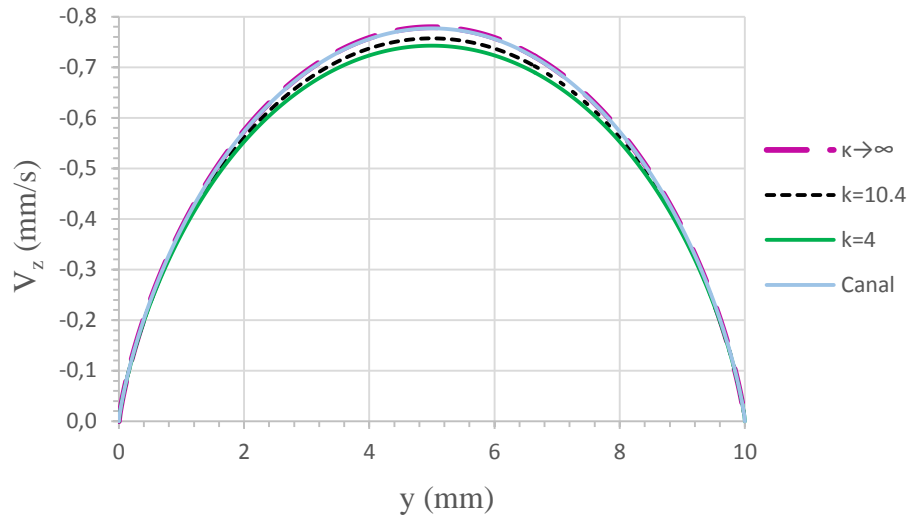
En la actualidad, no existen datos experimentales de perfiles de velocidad en ninguna de las geometrías estudiadas en esta investigación, lo cual no permite realizar una comparación directa con las predicciones teóricas obtenidas aquí. Sin embargo, se puede realizar comparaciones para casos asintóticos, por ejemplo, se espera que los perfiles de velocidad obtenidos con la solución numérica tiendan a los valores de velocidad obtenidos con los solución analítica conforme  $\kappa \rightarrow \infty$

( $\eta' \rightarrow 0$ ). Esta comparación es realizada en la Fig. 14, donde se grafican las soluciones numéricas para tres valores diferentes de  $\kappa$  incluyendo un valor alto y la solución analítica obtenida usando el método de transformadas finitas de Fourier. De esta figura es clara la tendencia antes mencionada lo que da confianza sobre la solución numérica.

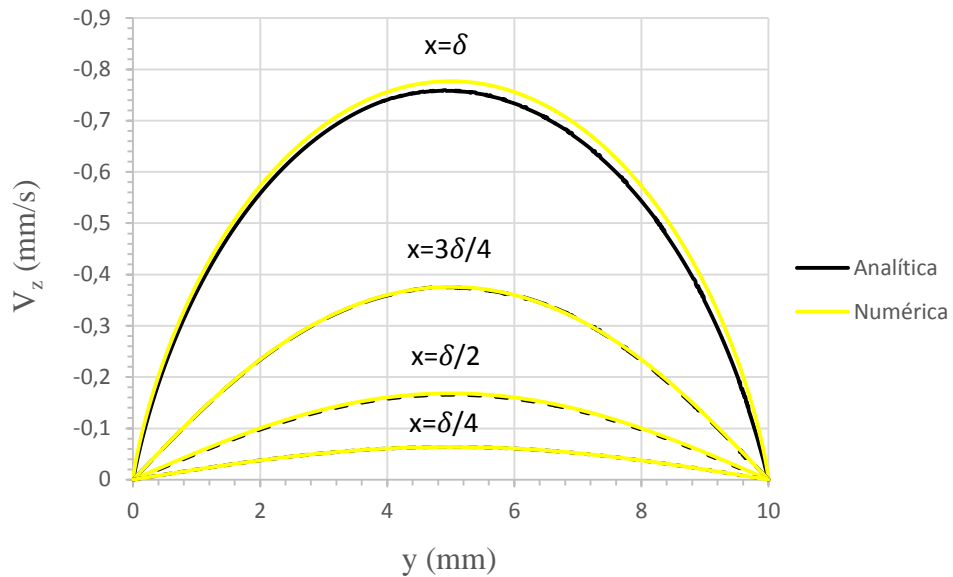
Adicionalmente, se realizó una comparación de los resultados de perfiles de velocidad entre las solución analítica y numérica con  $\kappa \rightarrow \infty$  para la geometría de canal para diferentes alturas del canal; con el objetivo de determinar el acuerdo entre las mismas.

Los resultados de esta comparación son mostrados en la Fig. 15. En este caso se encontró la diferencia entre las magnitudes de velocidad tomadas en el centro del canal ( $y=5\text{mm}$ ) y diferentes alturas del mismo, varía desde un 2.5% en la superficie ( $x = \delta$ ) hasta un valor de 0.07% a una altura de  $(\delta/4)$ . Para tal caso la solución numérica fue desarrollada para mil particiones equidistantes en la malla (Fig. 7), tanto en la dirección de  $x$  como en  $y$ . En conclusión, estas comparaciones nos permiten ver un buen acuerdo entre solución analítica y numérica permitiendo validar el modelo matemático y la implementación numérica.

**Figura 14.** Perfiles de velocidad en la interfase ferrofluido-aire de un canal obtenidos con una solución analítica ( $\kappa \rightarrow \infty$ ) y numérica para diferentes valores de  $\kappa$  y  $H = 0.6\text{mT}$  y  $\Omega_f = 150\text{Hz}$ .



**Figura 15.** Comparación de perfiles de velocidad obtenidos numéricamente ( $\kappa \rightarrow \infty$ ) y por solución analítica en un canal tomando  $H = 0.6\text{mT}$  y  $\Omega_f = 150\text{Hz}$ .



## 5. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Ya verificado el comportamiento de la solución numérica implementada, en este capítulo se muestran los resultados de las predicciones de flujo para ambas geometrías que incluyen el análisis del efecto de  $\kappa$ , de la intensidad ( $\mathbf{H}$ ) y frecuencia de rotación del campo magnético  $\Omega_f$  y de la sección transversal del canal y el ducto. Asimismo se realiza una comparación del efecto de ambos fenómenos: superficiales y volumétricos sobre el flujo.

La solución numérica de cada uno de los problemas fue obtenida tomando las propiedades de un ferrofluido de ferrita de cobalto en agua (WBF-1) reportado por Torres-Díaz y Rinaldi [43] y mostradas en la tabla 1.

**Tabla 1:** Propiedades de ferrofluido a base de ferrita de cobalto en agua

	$\eta'$ (kg m/s)	$\eta$ (mPa s)	$\eta_0$ (mPa s)	$\phi$	$\chi$	$\tau$ (s)	$D_p$ (mm)
WBF-1	$3.65 \times 10^{-8}$	1.03	1.02	0.213	0.106	$1.67 \times 10^{-5}$	14.3

Fuente: Torres-Díaz y Rinaldi [43].

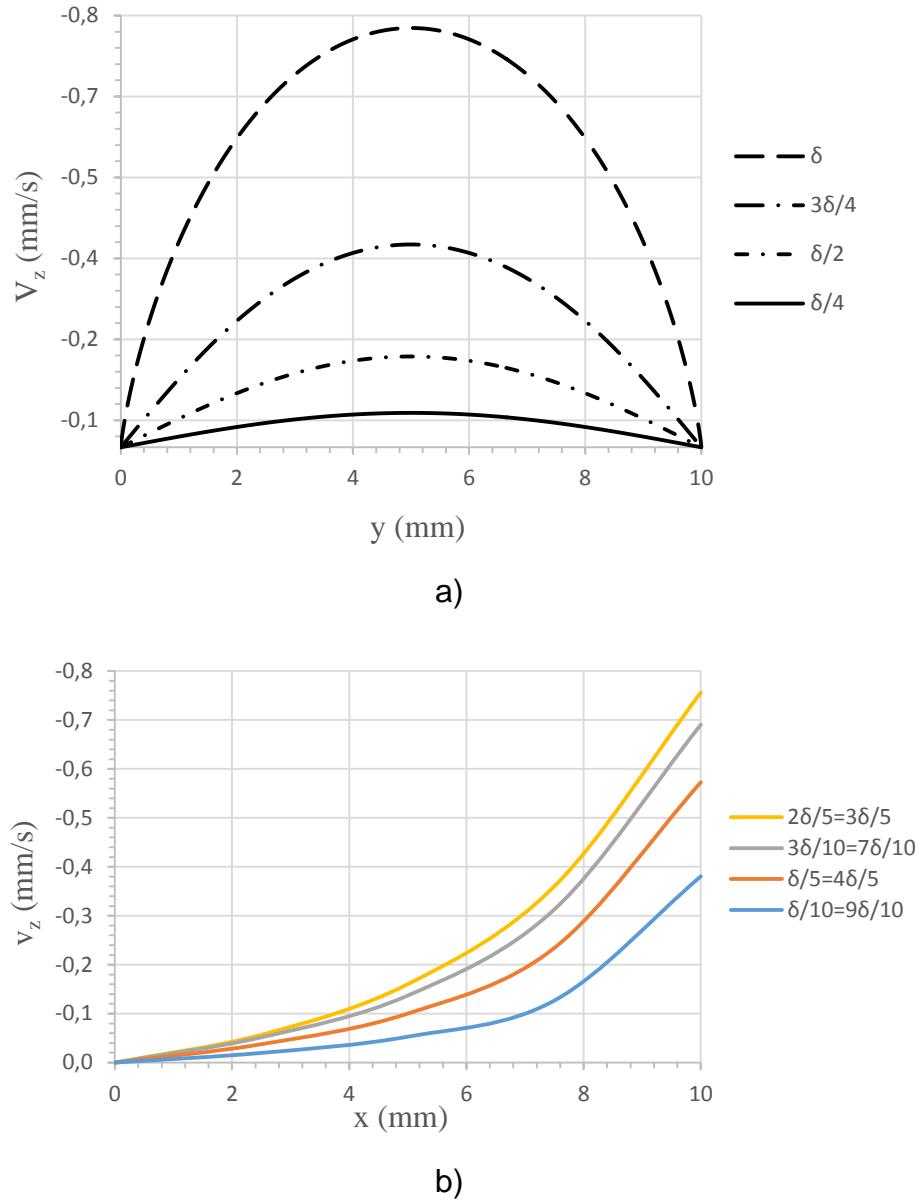
### 5.1 RESULTADOS PARA CANAL CON $\eta' = 0$

Perfiles de velocidad calculados usando las propiedades del ferrofluido WBF-1 a una intensidad del campo magnético de 0.6mT y una frecuencia de rotación de 150Hz son presentados en la Fig. 16. Estos perfiles fueron obtenidos tomando el valor del parámetro de “spin viscosity” igual a cero, por lo que el flujo predicho es

enteramente generado por el salto en esfuerzos asimétricos y del tensor de “couple stresses” en la interface ferrofluido aire. Es de resaltar en este caso que la dirección del flujo del FF coincide con la dirección de rotación del campo magnético. Esto se ve representado en los valores negativos obtenidos para el campo de velocidades (Fig. 15), para lo cual es importante recordar que en la Fig. 10 el eje de coordenadas es positivo en dirección contraria a la dirección de flujo.

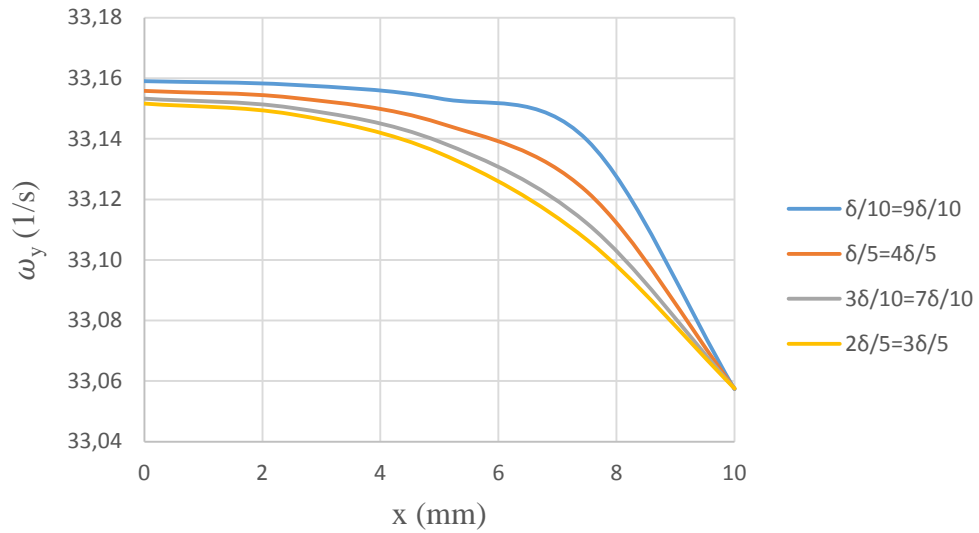
El valor máximo de flujo (0.78 mm/s) fue obtenido en la superficie del FF, en el punto  $(\delta/2, \delta)$ , tal y como fue reportado por Krauß *et al.* [2,3] para una solución similar, donde el flujo del ferrofluido también era en la misma dirección del CMR aplicado. Es claro también de la Fig. 16a, que en una situación donde la razón de ancho a alto del canal tienda a cero, se podría esperar que lejos de la interface ferrofluido-aire el flujo cesara para el caso de  $\eta' = 0$ . Por otro lado, de la Fig. 16b se observa que el efecto de las paredes laterales del canal para este caso es disminuir la magnitud del flujo.

**Figura 16.** Solución numérica para el flujo de un FF en un canal ( $\eta \neq 0$ ) a) respecto al eje  $y$  para  $x$  constante y b) respecto al eje  $x$  para  $y$  constante.  $H = 0.6\text{mT}$  y  $\Omega_f = 150\text{Hz}$ .

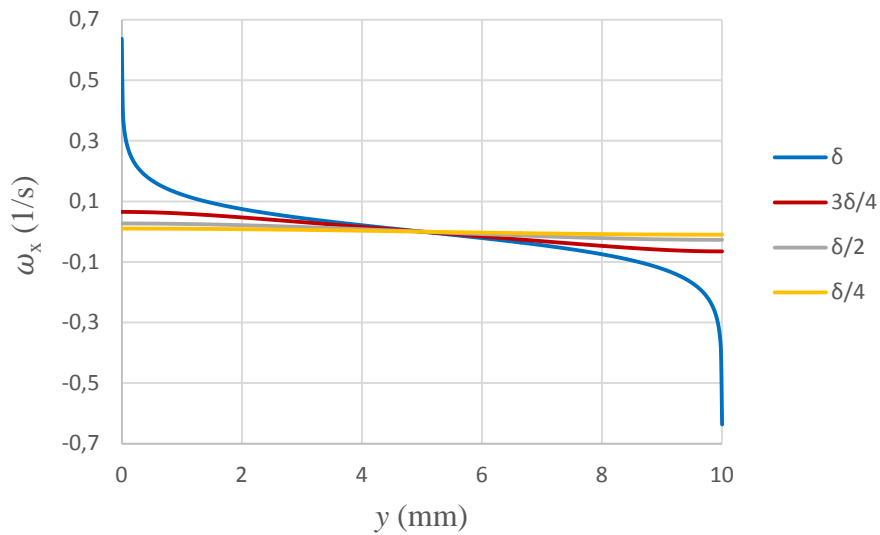


De la misma forma, se obtuvieron numéricamente los perfiles de las componentes  $x$  y  $y$  de la velocidad angular de las partículas los cuales son mostrados en las Fig. 17.

**Figura 17.** Solución numérica para a)  $\omega_x$  y b)  $\omega_y$  para un canal con  $(\eta'=0)$ .  $H = 0.6\text{mT}$ ,  $\Omega_f = 150\text{Hz}$ .



a)

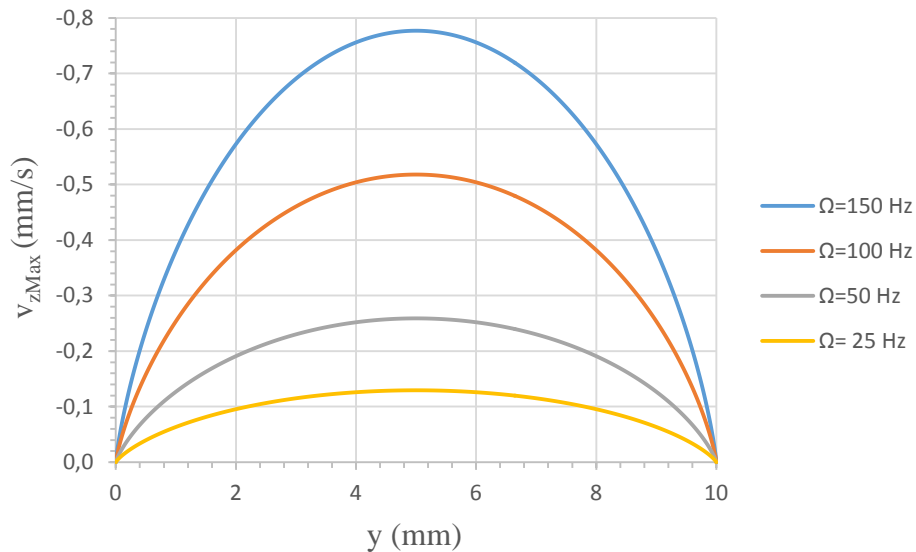


b)

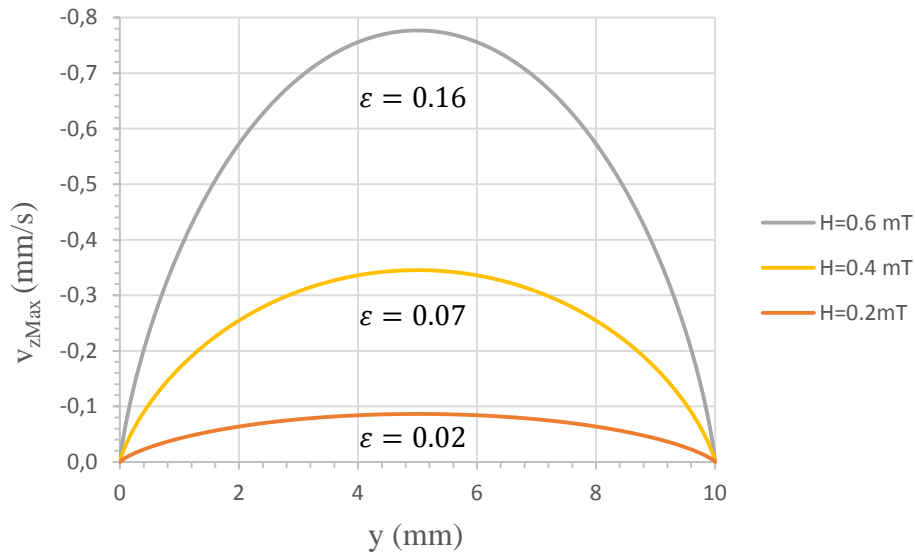
Los resultados numéricos obtenidos para el vector de velocidad angular mostraron que  $\omega_x$  es despreciable en comparación al valor del  $\omega_y$ . Esto es debido al hecho que  $\omega_y$  es inducido por la componente-y del torque magnético (Campo impuesto), mientras que  $\omega_x$  es generado por la vorticidad del fluido. No obstante, se debe tener en cuenta que en este análisis ( $\eta' = 0$ ) la velocidad traslacional del fluido no es influida por el campo de velocidad angular de las partículas. Sin embargo, la Fig. 17 también muestra que las condiciones de frontera de no movimiento angular del FF en las paredes del contenedor no se cumplen. Los resultados indican que la interacción del FF con las paredes del contenedor no solo es diferente de cero, sino que también puede variar con la altura del canal.

Por otro lado, las Figs. 18 y 19 muestran una dependencia lineal del flujo con la frecuencia de rotación del campo y cuadrática con la amplitud del campo magnético. Esto es el comportamiento esperado si se tienen en cuenta las escalas de la velocidad lineal usadas en las ecuaciones ferrohodinámicas (Ecns. (28)-(32)).

**Figura 18.** Efecto de la frecuencia sobre el punto de velocidad máxima ( $\delta, \delta/2$ ) en un canal con ( $\eta' = 0$ ).  $H = 0.6mT$ .

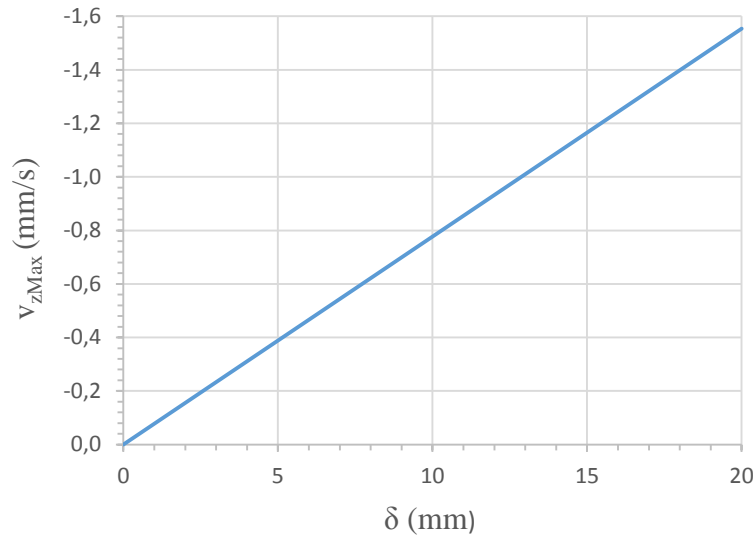


**Figura 19.** Efecto de la amplitud sobre el punto de velocidad máxima ( $\delta, \delta/2$ ) en un canal con ( $\eta'=0$ ).  $\Omega_f = 150Hz$ .



En este caso resultaría interesante hacer un análisis del efecto del ancho ( $y$ ) y alto ( $x$ ) del canal sobre la magnitud del flujo. Se podría esperar que cuando el ancho del canal es mucho mayor que el alto ( $x/y \ll 1$ ), la solución tienda al caso de una película de fluido entre placas infinitamente largas presentada por Chaves y Rinaldi [1], mientras que para el caso en el que la altura mayor que el ancho ( $x/y \gg 1$ ) el flujo se detenga lejos de la interfase ferrofluido-aire. No obstante en este caso, y debido a la escala de la velocidad traslacional, la velocidad máxima de flujo tiende a aumentar en una relación lineal con el valor de  $\delta$ , para el caso de un valor de uno de la relación de ancho/alto del canal como se muestra en la Fig. 20.

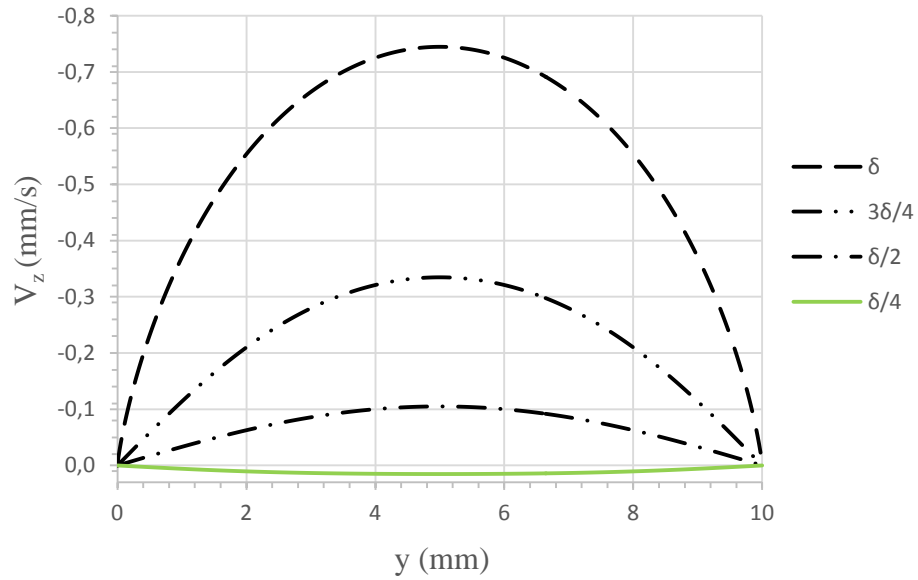
**Figura 20.** Efecto de la sección transversal sobre el punto de velocidad máxima en un canal con ( $\eta'=0$ ) en  $(\delta, \delta/2)$ .  $H = 0.6\text{mT}$  y  $\Omega_f = 150\text{Hz}$ .



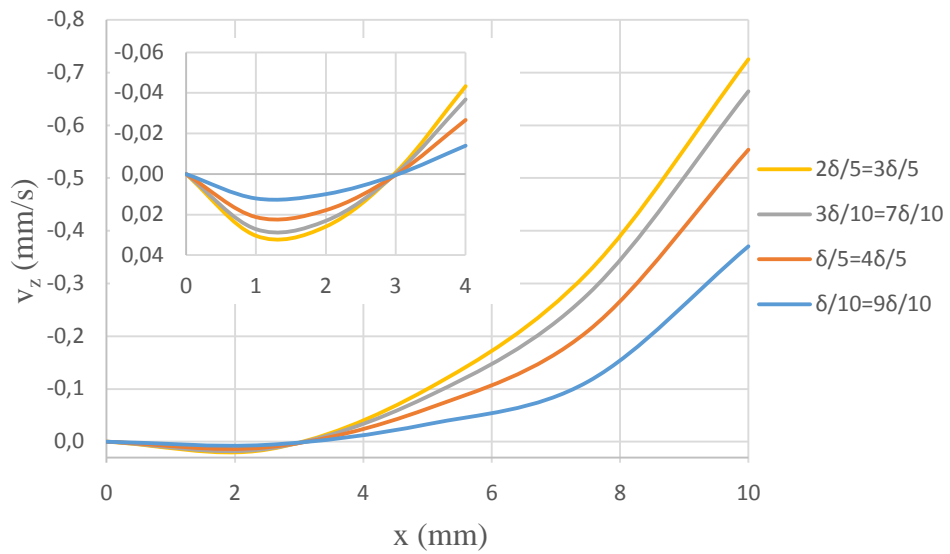
## 5.2 RESULTADOS PARA CANAL CON ( $\eta' \neq 0$ )

A diferencia de los resultados de perfiles de velocidad traslacional obtenidos para el caso de spin viscosity igual a cero, en este caso la teoría de DMAI usada predice la existencia de contraflujo, aunque de pequeña magnitud como se observa en la Fig. 21. En la parte superior del canal se encontró que el flujo es en la misma dirección de rotación del campo magnético mientras que en la región más cercana a la superficie ubicada en  $(x=0)$  el flujo es en sentido opuesto a la dirección de rotación del campo. Además, la magnitud del flujo obtenida en la superficie fue mayor que la obtenida en puntos internos del FF, lo que ratifica el dominio del mecanismo superficial sobre el mecanismo volumétrico para la razón de ancho a alto de uno estudiada aquí. Esta afirmación también puede ser fundamentada comparando los respectivos perfiles de velocidad para el caso de cero y no cero “spin viscosity”, donde se observa que la magnitud del flujo superficial es aproximadamente el mismo.

**Figura 21.** Solución numérica para canal con ( $\eta' \neq 0$ ); a) con respecto al eje  $y$  y b) con respecto al eje  $x$ .  $H = 0.6\text{mT}$  y  $\Omega_f = 150\text{Hz}$  y  $\kappa = 3.3$ .



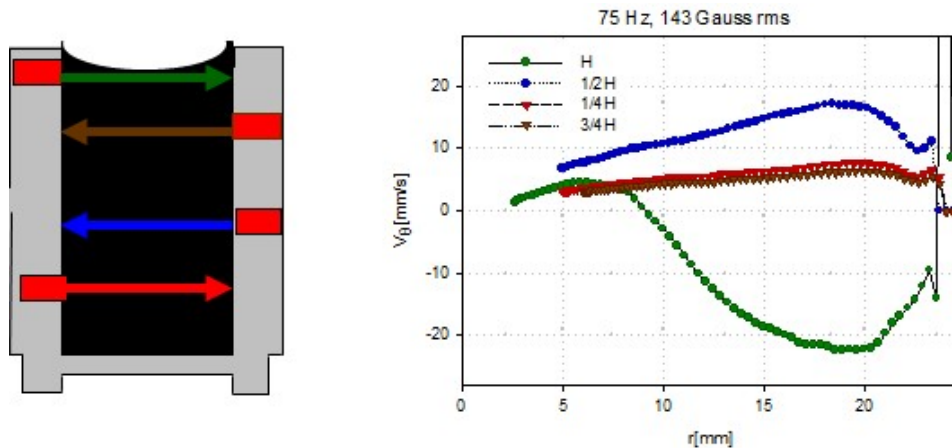
a)



b)

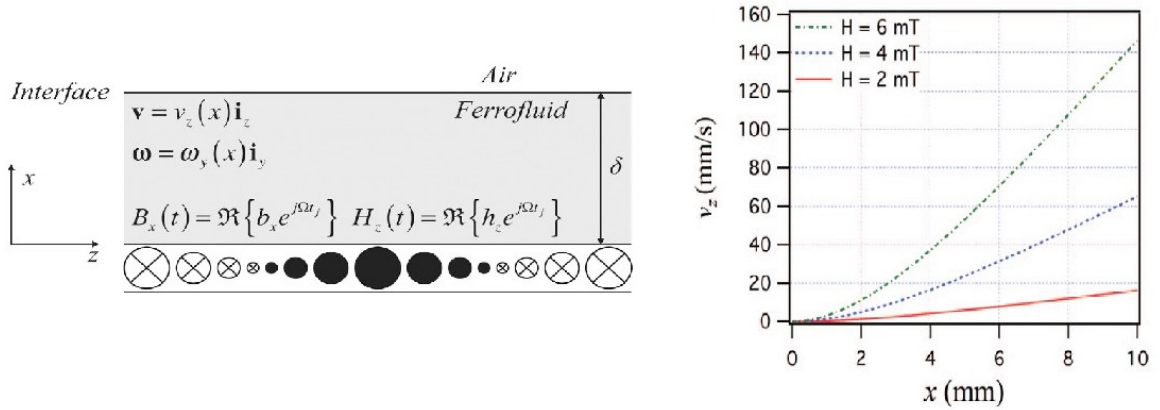
Este comportamiento, fue reportado experimentalmente por Chaves *et al.* [40], quienes realizaron medidas de perfiles de velocidad en un contenedor cilíndrico para un ferrofluido sometido a la acción de un CMR uniforme y mostrado en la Fig. 22 y donde se observa que el flujo superficial es contrario a la dirección del campo y va disminuyendo conforme se aleja de la superficie hasta cambiar de dirección de flujo, a una altura en la cual los esfuerzos volumétricos empiezan a dominar. Por lo anterior es factible que la predicción de contraflujo observada en la Fig. 21 pudiera ser válida. Otra comparación que se puede realizar de los perfiles de velocidad obtenidos para este caso (Fig. 21) es con los perfiles de velocidad obtenidos por Chaves y Rinaldi para una película de ferrofluido sobre un placa infinitamente larga incluyendo el efecto de “couple stresses” donde no se predice contra flujo, Fig. 23. Esto permite, explicar el fenómeno de contraflujo observado en el canal como una consecuencia de la componente-x del momento angular interno generado por la vorticidad del fluido debido a las paredes laterales del canal.

**Figura 22.** Perfiles de velocidad experimentales del flujo de ferrofluido en un contenedor cilíndrico con interface libre.



Fuente: Chaves et al., [40].

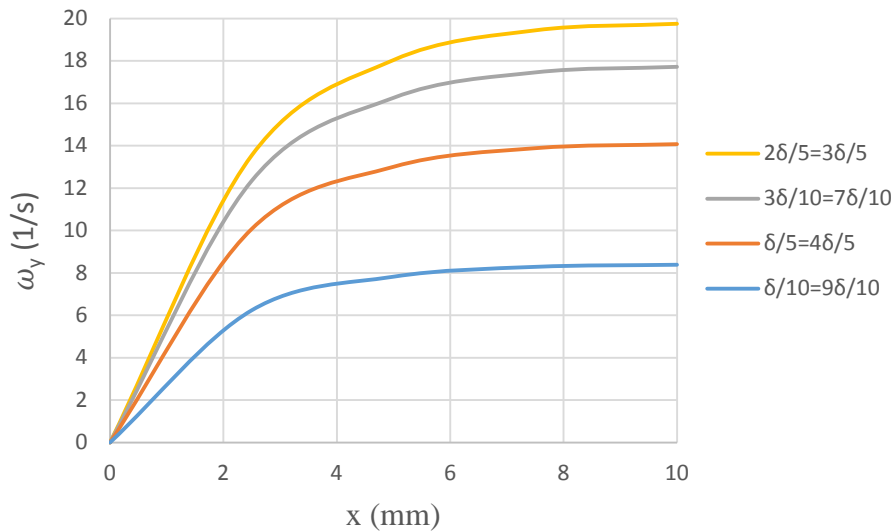
**Figura 23.** Flujo de un ferrofluido entre placas infinitamente largas.



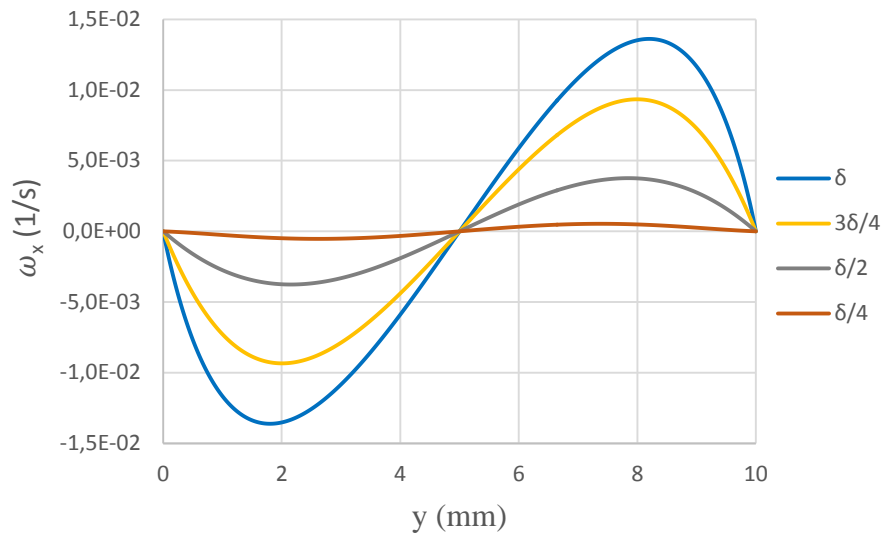
Fuente: Chaves y Rinaldi [1].

Los perfiles calculados para la velocidad angular mostraron un comportamiento similar al del caso de canal ( $\eta' = 0$ ); en cuanto a forma y magnitudes de velocidad angular para  $\omega_y$  y  $\omega_x$  como se puede observar de las Figs. 24 y 25.

**Figura 24.** Solución numérica para  $\omega_y$  en un canal con ( $\eta' \neq 0$ ).  $H = 0.6\text{mT}$  y  $\Omega_f = 150\text{Hz}$  y  $\kappa = 3,3$ .



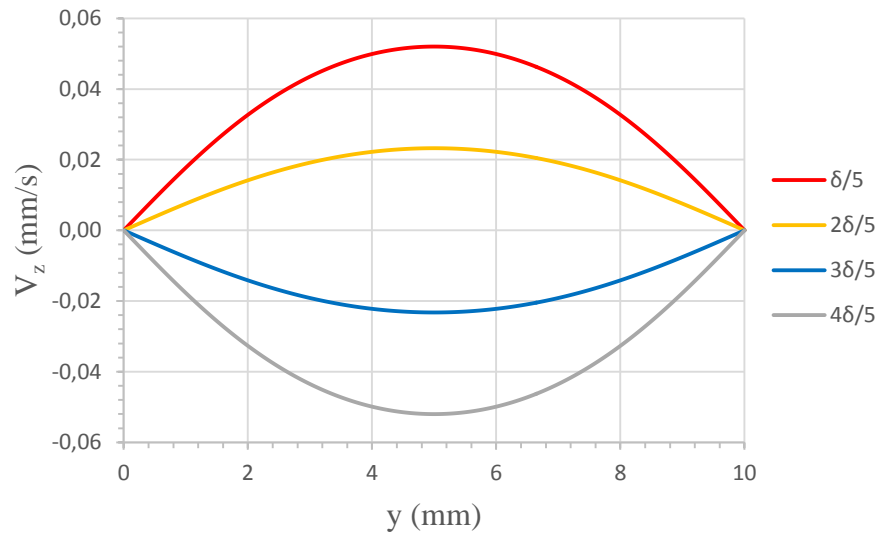
**Figura 25.** Solución numérica para  $\omega_x$  en un canal con ( $\eta' \neq 0$ ).  $H = 0.6\text{mT}$  y  $\Omega_f = 150\text{Hz}$  y  $\kappa = 3,3$ .



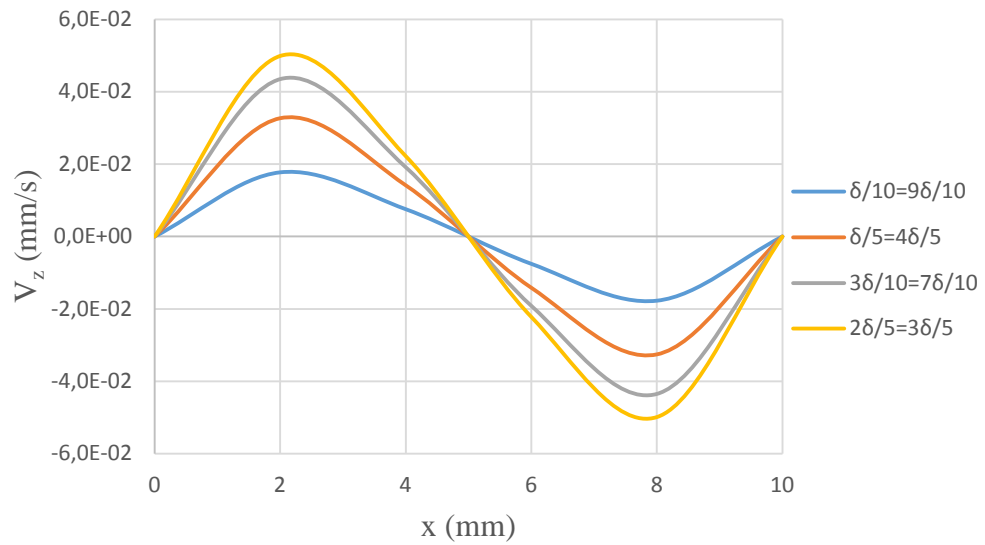
### 5.3 SOLUCIÓN PARA EL CASO DUCTO

Esta solución solo contempla los esfuerzos volumétricos en la generación de flujo. Los resultados obtenidos mostraron un comportamiento simétrico para el campo de velocidad lineal; a partir del cual se pudo apreciar que en la parte superior del ducto ( $x > \delta/2$ ) el flujo es en la misma dirección de rotación del campo magnético y en la parte inferior ( $x < \delta/2$ ) en dirección opuesta (Fig. 26).

**Figura 26.** Campo de velocidad obtenido para el flujo de un FF en un ducto con respecto a) al eje  $y$  y b) al eje  $x$ .  $H = 0.6\text{mT}$  y  $\Omega_f = 150\text{Hz}$  y  $\kappa = 3.3$ .



a)

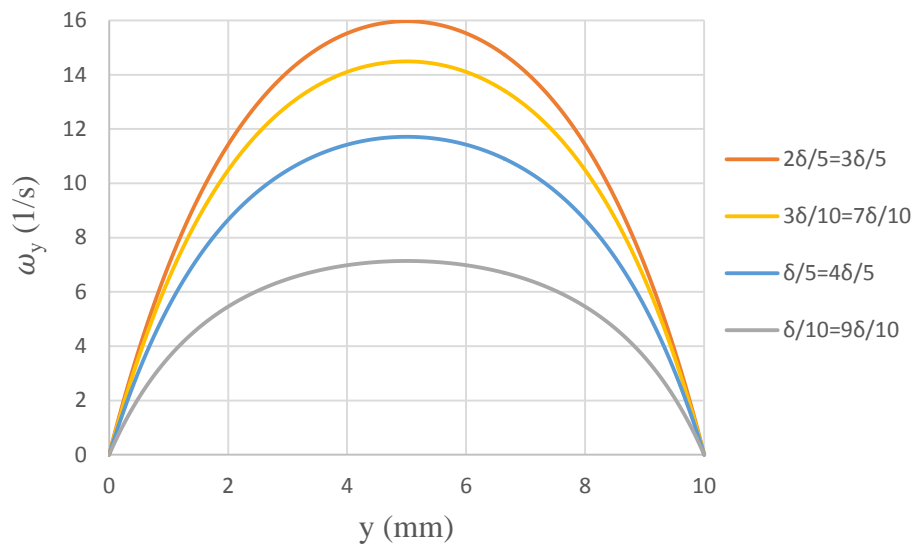


b)

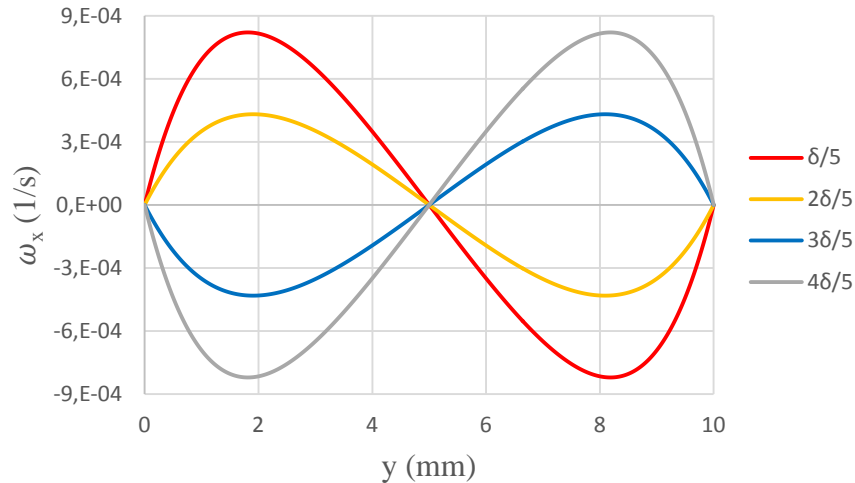
La velocidad máxima encontrada para este caso fue un poco superior a 0.05 mm/s, mucho menor a la encontrada para los dos casos anteriores de flujo en un canal; lo que indica que aunque es posible generar flujo de un FF mediante esfuerzos volumétricos, el flujo obtenido a partir de esfuerzos superficiales es más representativo.

Los resultados obtenidos por el vector de velocidad angular en este caso son:

**Figura 27.** Solución numérica para  $\omega_y$  en un ducto.  $H = 0.6\text{mT}$  y  $\Omega_f = 150\text{Hz}$  y  $\kappa = 3.3$ .



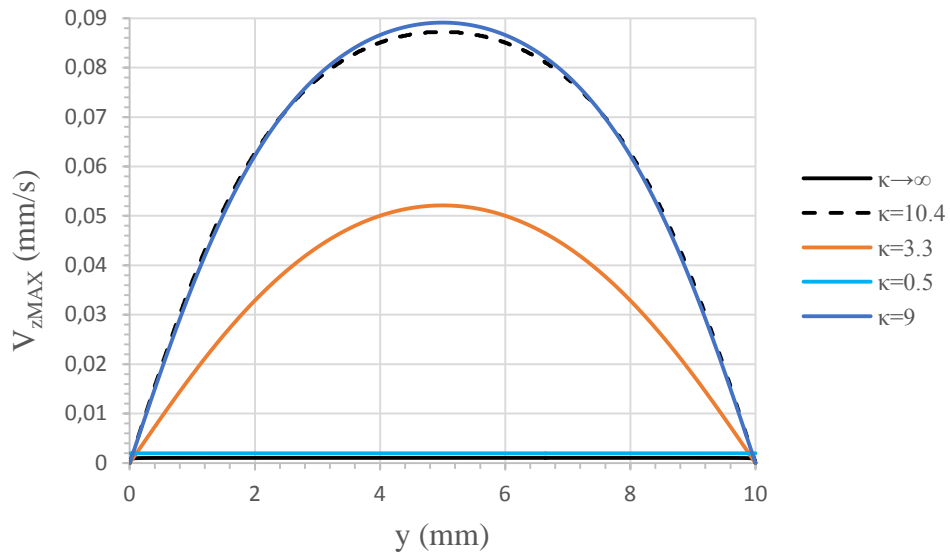
**Figura 28.** Solución numérica para  $\omega_x$  en un ducto.  $H = 0.6\text{mT}$  y  $\Omega_f = 150\text{Hz}$  y  $\kappa = 3.3$ .



Al igual que en las soluciones obtenidas para el canal, el vector de velocidad angular muestra valores más representativos en  $\omega_y$ . sin embargo, sus magnitudes son menores a las encontradas en el canal, posiblemente porque en este caso la velocidad angular de las partículas está obligada a cumplir la condición de no deslizamiento en la pared que en el caso del canal era libre.

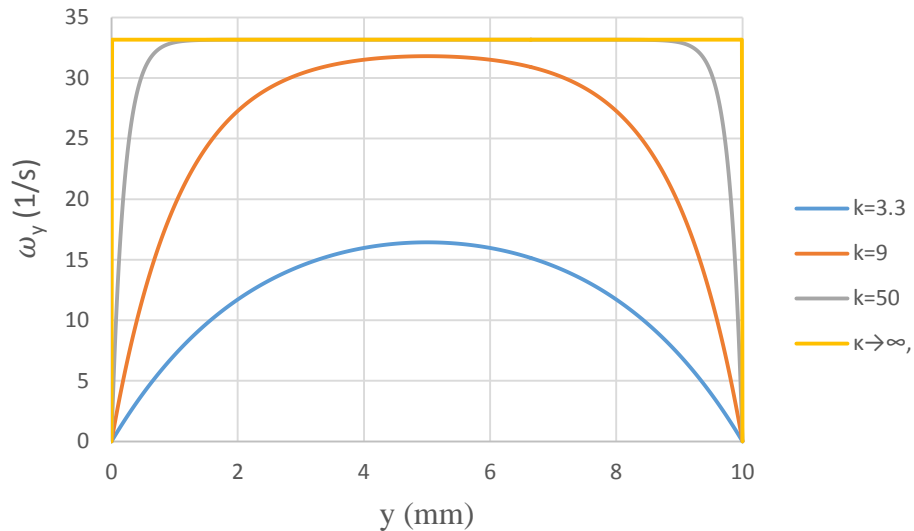
En la Fig 29, se muestra el efecto del parámetro ( $\eta'$ ) sobre los perfiles de velocidad para el flujo de un ferrofluido en un ducto. Para este caso, al igual que en el caso canal ( $\eta' \neq 0$ ), se encontró un valor crítico para  $\kappa = 9$  en el cual se obtiene un valor de flujo máximo en el ducto. No obstante, de forma general se observó que a medida que el parámetro  $\eta' \rightarrow 0$  el flujo se hace más pequeño hasta desvanecer. En otras palabras, la teoría no predice flujo cuando la difusión del momento angular interno es despreciable.

**Figura 29.** Perfiles de velocidad para un ferrofluido en un ducto a diferentes valores del parámetro de *spin viscosity* y valores de  $H = 0.6\text{mT}$  y  $\Omega_f = 150\text{Hz}$ .



Cuando  $\kappa$  aumenta el parámetro  $\eta'$  disminuye, lo que físicamente representa una menor fricción entre las partículas magnéticas y el fluido que las contiene, disminuyendo la difusión de momento angular interno y por consiguiente la velocidad del fluido, pero haciendo mayor la velocidad angular de estas. Adicionalmente, como se muestra en la Fig. 30, al igual que en un estudio anterior presentado por Chaves y Rinaldi [1], se observa claramente que cuando  $\kappa \rightarrow \infty$ , la velocidad angular del fluido tiende a un valor constante, cesando la transferencia de momento angular interno y por lo tanto el flujo del ferrofluido.

**Figura 30.** Velocidad angular ( $\omega_y$ ) para el flujo de un ferrofluido en un ducto.  $H = 0.6\text{mT}$  y  $\Omega_f = 150\text{Hz}$ .

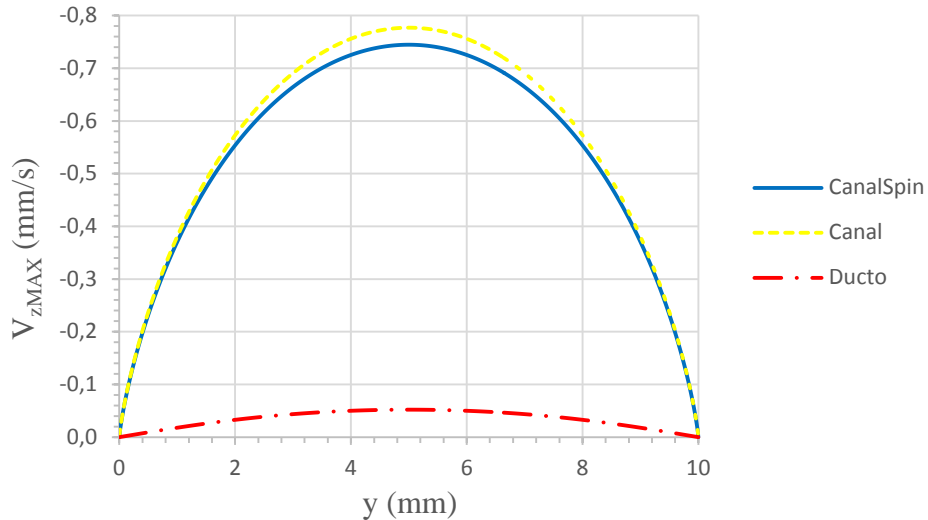


#### 5.4 COMPARACIÓN DE LOS PERFILES DE VELOCIDAD MÁXIMA

En este punto se hizo una comparación entre los perfiles máximos de velocidad obtenidos para cada uno de los tres problemas anteriores. A partir, de los cuales se pudo notar que el flujo de carácter superficial es más representativo que el de carácter volumétrico; cuyo efecto es más bien competitivo cuando trabajan de manera combinada (Fig. 31).

Un estudio desarrollado por Chaves *et al.* [40] en una geometría cilíndrica mostró resultados similares para perfiles de velocidad experimentales a diferentes alturas de un cilindro, que iban desde puntos cercanos a la interfase (ferrofluido-aire) hasta puntos en la parte media del mismo, observándose que el flujo interfacial era aproximadamente del doble en magnitud que el flujo medido en la mitad, lo que concuerda con las predicciones de este análisis.

**Figura 31.** Comparación de los perfiles de velocidad máximos en un ducto y canal ( $\delta$ ) con y sin *spin viscosity*.  $H = 0.6\text{mT}$  y  $\Omega_f = 150\text{Hz}$ .



## 5.5 COMPARACIÓN DE RESULTADOS PARA DOS FERROFLUIDOS DISTINTOS

Teniendo en cuenta un estudio anterior realizado por Torres-Díaz y Rinaldi [43] en el que se sintetizaron varios ferrofluidos con el objetivo de estudiar la incidencia del mecanismo de relajación *Browniano* de las nanopartículas, su concentración, diámetro y viscosidad del líquido portador sobre la generación de flujo impulsado por un CMR uniforme en un cilindro y en el espacio anular de dos cilindros concéntricos. Todos los ferrofluidos presentados en el estudio de Torrez-Diaz fueron de ferrita de cobalto soportados en agua y otros en glicerol o mezclas agua-glicerol. No obstante, solo aquellos en los que la concentración de las nanopartículas y la viscosidad del líquido portador fueron pequeñas, se obtuvo un mejor acuerdo con la teoría de la DMAI tanto cualitativamente como cuantitativamente para bajas intensidades del campo magnético aplicado. Esos dos ferrofluidos fueron WBF-1 (usado para los resultados anteriores) y WBF-2, cuyas propiedades se presentan en la tabla 2.

**Tabla 2:** Propiedades de ferrofluido a base de ferrita de cobalto en agua.

	$\eta$ (mPa s)	$\eta_0$ (mPa s)	$\phi$	$x$	$\tau$ (s)	$D_p$ (mm)
<i>WBF-1</i>	1.03	1.02	0.213	0.106	$1.67 \times 10^{-5}$	14.3
<i>WBF-2</i>	1.06	1.02	0.361	0.267	$4.25 \times 10^{-5}$	17.2

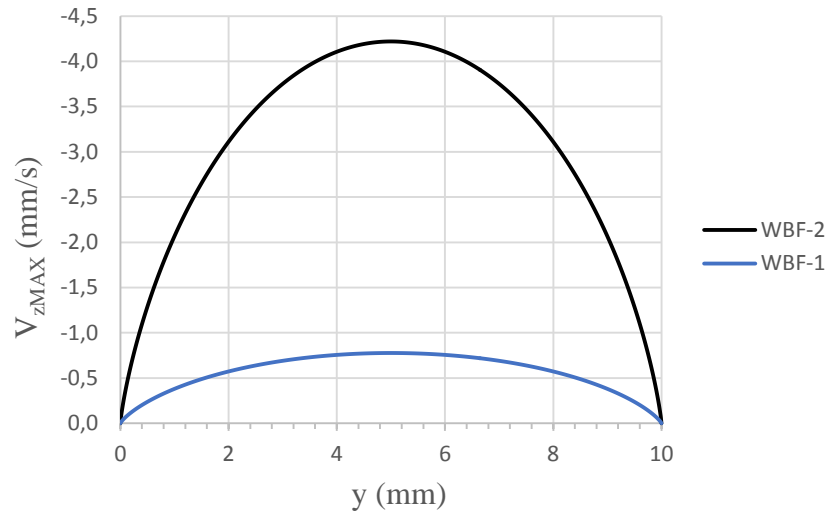
Fuente: Torres-Díaz y Rinaldi [43].

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para el flujo del *WBF-2* y se comparan con los obtenidos para el *WBF-1* en las secciones anteriores.

### 5.5.1 Resultados canal con $\eta' = 0$

De la Fig. 32 se puede ver que el comportamiento cualitativo de ambos ferrofluidos es similar, pero cuantitativamente la magnitud de flujo del *WBF-2* fue mucho mayor a las del *WBF-1*, esto puede ser explicado teniendo en cuenta que la concentración de las nanopartículas ( $\phi$ ) del *WBF-2* es mayor a la del *WBF-1*, por lo que hay más cantidad de partículas interactuando entre si y respondiendo a la presencia del CMR aplicado.

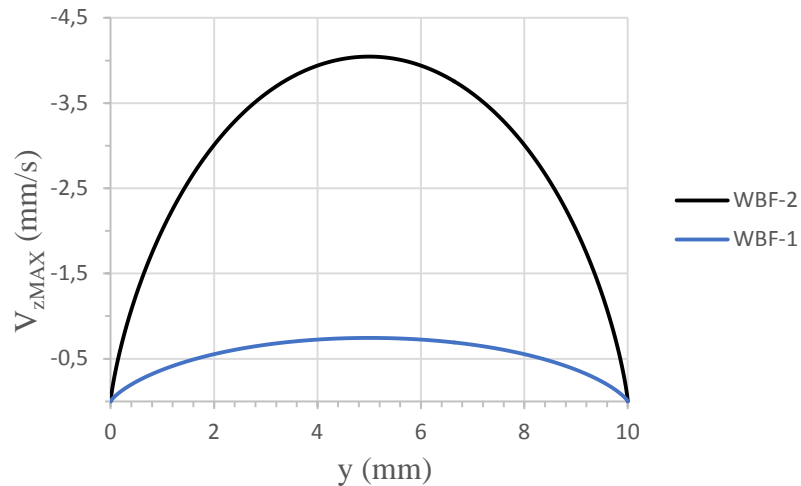
**Figura 32.** Comparación de los perfiles de velocidad máximo ( $\delta, \delta/2$ ) en un canal con  $\eta' = 0$  para los ferrofluidos WBF-1 y WBF-2.  $H = 0.6\text{mT}$  y  $\Omega_f = 150\text{Hz}$ .



### 5.5.2 Resultados canal con $\eta' \neq 0$

Al igual que en el caso anterior, en la Fig. 33 se ve que ambos ferrofluidos tienen el mismo comportamiento cualitativo pero diferente comportamiento cuantitativo. Se puede ver que tanto el mecanismo volumétrico como el superficial tienen una respuesta más favorable a la generación de flujo en presencia de un CMR para WBF-2.

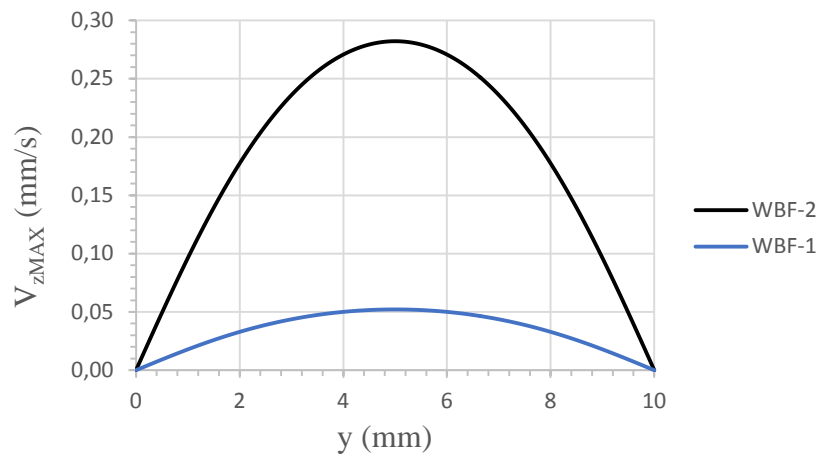
**Figura 33.** Comparación de los perfiles de velocidad máximo ( $\delta, \delta/2$ ) en un canal con  $\eta \neq 0$  para los ferrofluidos WBF-1 y WBF-2.  $H = 0.6\text{mT}$  y  $\Omega_f = 150\text{Hz}$  y  $\kappa = 3,3$ .



### 5.5.3 Resultados ducto

Estos resultados confirman los resultados obtenidos para el canal. Las magnitudes obtenidas para el flujo de WBF-2 son un poco más de cinco veces mayores que las obtenidas para el WBF-1.

**Figura 34.** Comparación de los perfiles de velocidad máximo  $\sim(\delta/5, 3\delta/5)$  en un ducto con  $\eta \neq 0$  para los ferrofluidos WBF-1 y WBF-2.  $H = 0.6\text{mT}$  y  $\Omega_f = 150\text{Hz}$  y  $\kappa = 3,3$ .



## 6. DESCRIPCIÓN DE LA PARTE EXPERIMENTAL

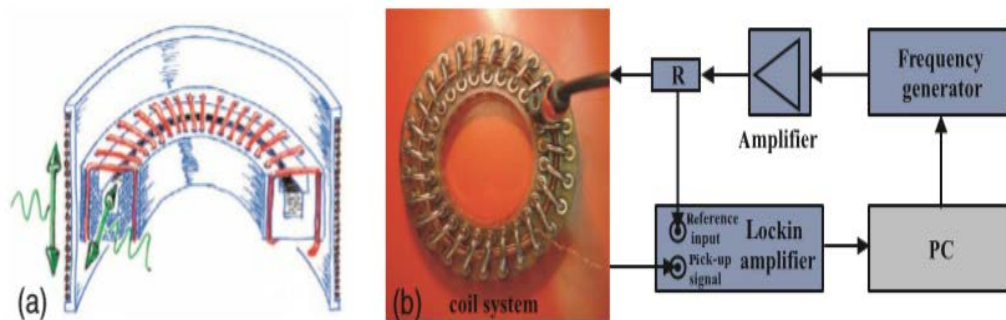
Como se ha mencionado anteriormente, en la actualidad no hay experimentos del campo de flujo para un ferrofluido en ductos que permitan verificar las predicciones teóricas de manera cuantitativa. Por otro lado, para el caso del canal, Krauß *et al.* [2,3] obtuvieron medidas de la magnitud de flujo a partir de observaciones en la superficie del fluido, no obstante estas no permiten evaluar las características del flujo al interior del fluido. Por tal razón, en esta sección se presenta una primera aproximación del diseño experimental que se requiere para la evaluación experimental de los mencionados flujos y que están basados en los trabajos de Krauß y Chaves *et al.* [40].

### 6.1 MONTAJE Y CARACTERIZACIÓN DE UN EQUIPO PARA LA GENERACIÓN DE CAMPOS MAGNÉTICOS ROTANDO EN GEOMETRÍA DE CANAL Y DUCTO

En esta caso, se utilizarán varios recipiente similares al usado por Krauß *et al.* [2,3], es decir un canal circular de sección transversal cuadrada y un ducto con sección transversal cuadrada. Esta especial construcción permite la implementación del campo magnético rotando, usando dos embobinados: Uno enrollado alrededor del canal de forma que genere un campo magnético en la dirección del ángulo acimutal y el otro enrollado sobre la pared lateral exterior del canal que genera una componente vertical del campo magnético, los cuales serían excitados con dos corrientes sinusoidales desfasadas  $90^\circ$ . El campo magnético debe ser caracterizado usando el magnetómetro de tres ejes. El contenedor diseñado para esta experimentación debe tener una sección transversal mínima de 127 mm x 127mm esto con el fin de poder usar las técnicas de perfiles de velocidad por ultrasonido y un medidor de flujo basado en la técnica “*Transit Time*

*Wide Beam*”. La ventaja de ambas técnicas es que no requieren de contacto directo sobre el fluido (no intrusiva), es aplicable a una amplia variedad de fluidos incluyendo fluidos oscuros como los ferrofluidos, en los cuales las técnicas ópticas no son aplicables. El diseño del canal es mostrado en la Fig. 35 tomada de Krauß *et al.* [2,3].

**Figura 35.** (a) Arreglo experimental para la investigación del flujo de un FF. Las flechas indican la dirección del CMR. (b) Esquema para la medición susceptibilidad magnética.



Fuente: Krauß *et al.* [2,3].

En ese sentido, se plantea la construcción de un piloto a escala de laboratorio para estudiar el flujo de un ferrofluido generado en un canal circular de sección transversal cuadrada, similar al construido por Krauß. Se plantea realizar medidas de perfiles de velocidad tanto en puntos interiores del fluido (usando la técnica de perfiles de velocidad por ultrasonido (UVP) como en su superficie, las cuales serán comparadas con los resultados presentados en este trabajo.

## 6.2 MONTAJE Y CARACTERIZACIÓN DE UN EQUIPO PARA LA GENERACIÓN DE CAMPOS MAGNÉTICOS ROTANDO EN GEOMETRÍA CILÍNDRICA

No existe un equipo comercialmente disponible que genere campos magnéticos rotativos que satisfaga las necesidades del proyecto. Por lo tanto, este equipo se debe configurar de acuerdo a otro equipo usado por Chaves *et al.* [40] en sus experimentos; que consta de los siguientes componentes: i) Un generador universal de señales; ii) un osciloscopio; iii) dos amplificadores lineales de corriente; iv) tres multímetros; v) el canal con dos embobinados o un estator de motor eléctrico de dos polos trifásico.

El campo magnético rotando en geometría cilíndrica es obtenido excitando los embobinados de un motor trifásico usando tres corrientes balanceadas cada una con una diferencia de fase de  $120^\circ$  entre ellas [40]. El balanceo de las corrientes se logra, tomando una fase a tierra, excitando las otras dos fases con voltajes sinusoidales desfasados en  $60^\circ$  y dejando el punto neutral flotante, esta diferencia de fase y las características de las señales que provee el generador de señales es corroborada con el osciloscopio. El balanceo de las corrientes se logra con el amplificador de corriente y se corrobora a través de los multímetros que miden la corriente de cada uno de los embobinados. El resultado de las corrientes trifásicas balanceadas en el estator es un campo magnético rotando en la dirección de las manecillas del reloj o en la dirección contraria a las manecillas del reloj. La frecuencia y dirección de rotación del campo se pueden controlar desde el generador de señales y la magnitud del campo magnético controlando la corriente con los amplificadores lineales de corriente. En la Fig. 36, se da una ilustración del equipo generador de CMR en un recipiente cilíndrico.

**Figura 36.** Arreglo para generar un CMR, consiste en: (1) un generador de canal universal dual usado para generar dos corrientes sinusoidales bajas, las cuales son amplificadas usando (2) un AE *Techron 5050 Linear Amplifier*. Estos son utilizados para excitar el motor de un estator embobinado de dos fases (3). Tres multímetros Fluke 45 (4) son usados para verificar que la corriente de entrada al embobinado del estator está balanceada. El osciloscopio (5) es usado para verificar la señal de entrada del amplificador lineal.



Fuente: Chaves et al. [40].

Para completar esta actividad, se debe caracterizar el campo magnético; esto se logra usando un magnetómetro de tres ejes que mide la magnitud del campo magnético. La caracterización consiste entonces en determinar curvas de intensidad de campo magnético contra valor de corriente seleccionado de los amplificadores de corriente para un valor de frecuencia en particular.

### **6.3 CONFIGURACIÓN DEL EQUIPO PARA MEDIDAS DE PERFILES DE VELOCIDAD**

En este punto se debe realizar un diseño experimental que permita caracterizar el flujo a diferentes valores de la frecuencia y amplitud del campo magnético. Adicionalmente, se probarán al menos dos tipos de ferrofluidos similares a WBF-1 y WBF-2, a fin de determinar la influencia de las propiedades físicas sobre el flujo. Esos experimentos serán realizados en la geometría del canal y cilíndrica.

#### **6.3.1. ultrasound velocity profile (UVP) method**

Estas pruebas son fundamentales para la caracterización del flujo. Para este se usará la técnica de perfiles de velocidad por ultrasonido (UVP). Este método ha sido desarrollado recientemente para la adquisición de campos de velocidad instantáneos, en aplicaciones médicas como por ejemplo medidas de flujo de sangre y más recientemente al estudio del flujo de metales líquidos y ahora es ampliamente usado en medidas de mecánica de fluidos. Las principales ventajas del método han sido resumidas por Takeda [67, 68], siendo la más relevante a nuestro trabajo la posibilidad de obtener información espacio-temporal del campo de flujo y el hecho que puede ser aplicado a líquidos oscuros como es el caso de los ferrofluidos.

Como se mencionó en este trabajo se plantea medir perfiles de velocidad usando un equipo UVP, el cual usa pulsos de ultrasonido emitidos periódicamente por un transductor y enviados a través del fluido. Los ecos generados por partículas agregadas al fluido son recibidos por el mismo transductor. El equipo mide la componente del vector de velocidad paralela a la dirección de propagación del rayo de ultrasonido. La posición de la partícula es determinada por la diferencia de

tiempo entre el pulso emitido y el eco recibido, mientras que la velocidad es obtenida por el cambio en la frecuencia Doppler [69].

Como desventajas del método está la imposibilidad de obtener medidas de velocidad para longitudes en el rango de 5 a 8 mm medidos desde la superficie del transductor e imprecisiones en la medida de velocidad en paredes lejanas.

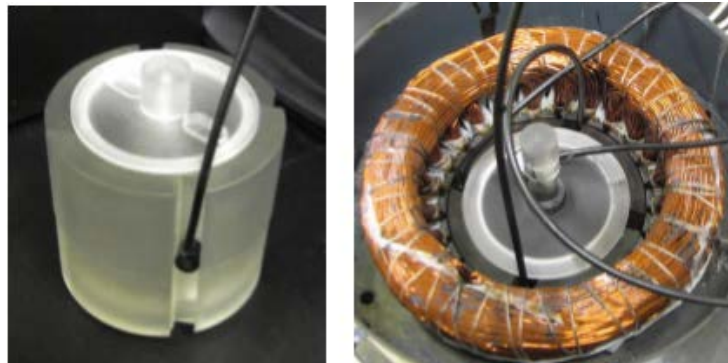
#### **6.3.1.1 Material del recipiente usado para los experimentos**

Como material para el canal y el recipiente cilíndrico, se podría usar policarbonato ya que su impedancia acústica ( $z = \text{densidad} \cdot \text{velocidad del fluido en el material}$ ) es similar a la del ferrofluido. Esto evita reflexiones de energía acústica en la interface pared fluido que generan saturación del transductor y pérdida en resolución.

#### **6.3.1.2 Posición del transductor de ultrasonido**

Esta técnica tiene otra ventaja y es que permite colocar el transductor sobre la superficie externa del contenedor evitando interferencias sobre el campo de flujo. Por tal razón tanto el cilindro como el canal deben ser provistos de ranuras que puedan albergar el transductor de ultrasonido. Cabe resaltar que los transductores son en forma cilíndrica con diámetro y altura de 5 mm lo que hace fácil su ubicación. La Fig. 37 muestra el diseño para el caso de la geometría cilíndrica del recipiente con las ranuras y un transductor de ultrasonido. Cabe resaltar que se debe agregar un gel especial entre la superficie del transductor y el recipiente que mejora el envío y recepción de ecos al transductor.

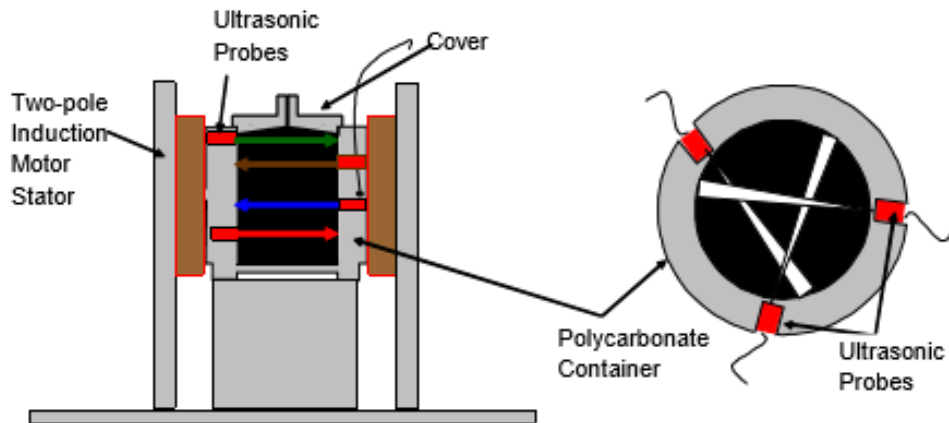
**Figura 37.** Ranuras del recipiente que contiene el ultrasonido.



Fuente: Chaves et al. [40].

En el caso del canal, el diseño debe incluir ranuras similares a la del contenedor cilíndrico de la Fig. 37, a fin de poder instalar los transductores de ultrasonido. Estas ranuras serán construidas sobre la superficie interior del canal circular y deben tener un ángulo respecto a la dirección radial a fin de poder medir de los perfiles de velocidad teniendo en cuenta que no hay componente de velocidad radial.

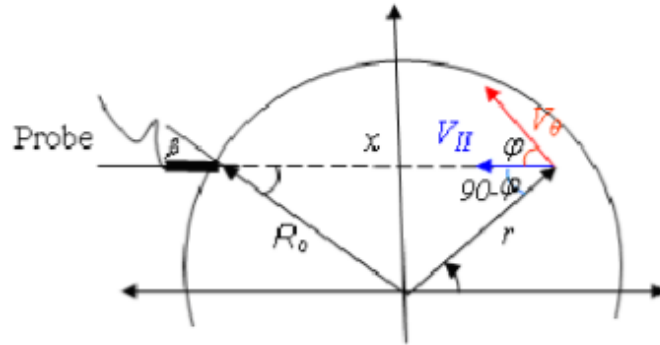
**Figura 38.** Disposición de ultrasonidos para medición del perfil de velocidad ( $v_\theta$ ) un cilindro.



Fuente: Chaves *et al.* [40].

La expresión (93) permite obtener el perfil de velocidad  $v_\theta$ , que para nuestro análisis al despreciar efectos de borde se convierte en  $v_z$  (Fig. 39).

**Figura 39.** Posición del ultrasonido para medir el perfil de velocidad  $v_\theta$ .



Fuente: Chaves *et al.* [40].

$$v_\theta = v_{II} \frac{\sqrt{R_0^2 + x_p^2 - 2R_0x_p \cos\beta}}{R_0 \sin\beta} \quad (93)$$

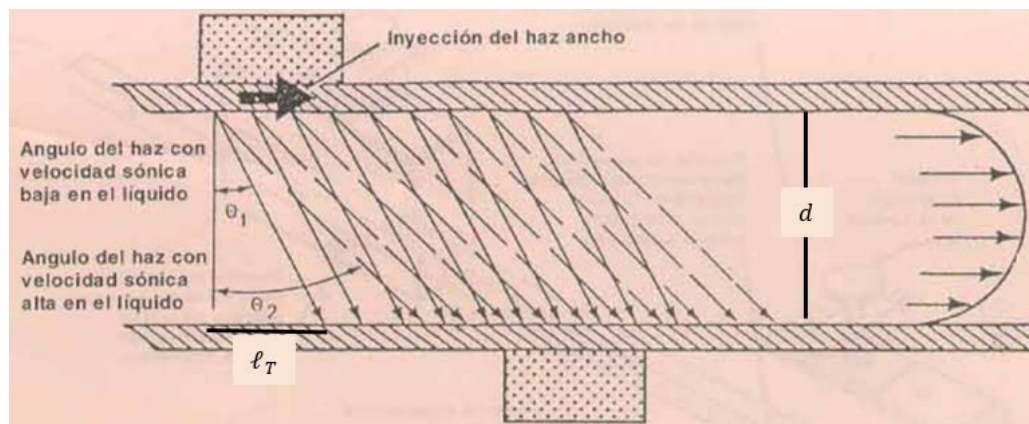
#### 6.4 MEDICION DEL FLUJO DE FERROFLUIDOS

En este punto se pretende medir el flujo volumétrico de ferrofluido y la velocidad máxima en la superficie como función de la amplitud y frecuencia de rotación del campo magnético a fin de establecer medidas para comparar con las predicciones teóricas obtenidas en el capítulo anterior para los casos de canal. Adicionalmente, a partir de esas mediciones experimentales en la interfase ferrofluido-aire, se pueden estimar valores para el parámetro “*spin viscosity*” y “*vortex viscosity*” ( $\zeta$ ) al comparar con la expresión teórica de flujo obtenida por Chaves y Rinaldi [1] para el flujo de un ferrofluido entre dos placas infinitamente largas.

#### 6.4.1 Transit Time Wide Beam (TTWB) Method [70]

El tiempo de tránsito de haz ancho o TTWD (Transit Time Wide Beam), su funcionamiento puede apreciarse en la Fig. 40. Las posibilidades que ofrece este método permiten: instalación no intrusiva, funcionamiento bidireccional, tamaño muy reducido y un montaje extremadamente simple, lo que lo convierte en un método ideal para una gran cantidad de aplicaciones, tanto en ambientes extremadamente higiénicos (alimentación y farmacia) como muy corrosivos (química y marina).

**Figura 40.** *transit time wide beam (TTWB) method.*



Fuente: Alcober [70].

El punto esencial de la misma reside en que los transceptores anclados externamente al tubo inducen una propagación sónica natural en la dirección del eje principal del tubo. No se trata de un haz estrecho que penetra en líquido, sino que es radiado de forma continua por el tubo, alejándose del transductor emisor. Este haz ancho siempre alcanzará el transductor receptor, independientemente del ángulo de refracción del haz. Dicho de otro modo, el tubo entra en resonancia y el área más cercana al sensor se comporta como una membrana más eficiente y de mayor tamaño que la del propio sensor.

El conjunto de ecuaciones de definen el fenómeno son:

$$\sin \theta = \frac{v_s \sin 90^\circ}{v_{p_s}} = \frac{v_s}{v_{p_s}} \quad (94)$$

$$T_N = T_P + T_L + \frac{\ell_T - d \tan \theta}{v_{p_s}} + \frac{d}{v_s \cos \theta} \quad (95)$$

$$T_L = T_N - T_P = \left[ T_N - \frac{\ell_P}{v_{p_s}} \right] \quad (96)$$

$$\Delta T = \frac{2v_F \sin 90^\circ}{v_s} \times \frac{d}{v_s \cos \theta} = \frac{2v_F \sin 90^\circ}{v_s} T_L \quad (97)$$

Donde,  $v_{p_s}$  es la velocidad sónica de propagación en la pared del tubo en modo inclinado,  $v_s$  la velocidad sónica de propagación del sonido del transductor,  $\Delta T$  la diferencia entre los tiempos de transito de aguas arriba y abajo,  $T_L$  el tiempo de transito de haz sónico a través del líquido,  $v_F$  la velocidad del líquido,  $T_N$  el tiempo total de transmisión de haz a través del tubo y el líquido,  $T_P$  el tiempo del haz en el tubo y  $\ell_P$  la longitud de trayecto sónico del tubo.

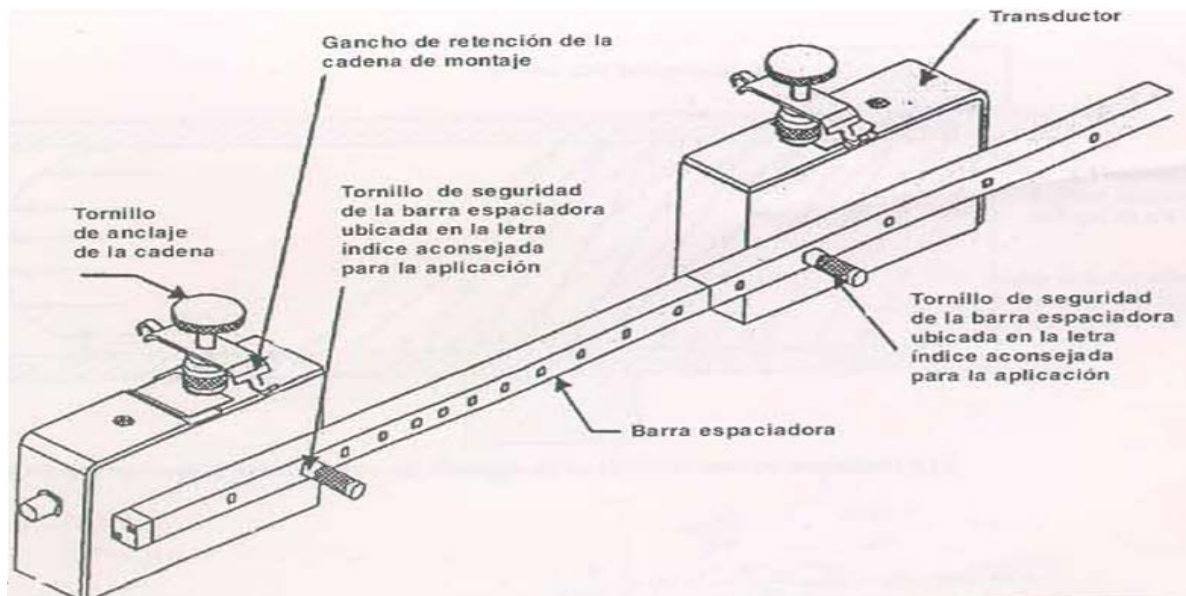
Otra ventaja interesante es que, tal como se muestra en las ecuaciones de la figura, el factor de calibración del sistema es independiente de la velocidad sónica en el líquido ( $v_s$ ) y del ángulo de refracción del haz  $\theta$ .

Además, como el transductor se utiliza casi exclusivamente para inducir una señal con una velocidad de propagación del tubo extremadamente estable ( $v_{p_s}$ ), cambios en la variación de la velocidad sónica del transductor con la temperatura, por ejemplo, dejan de ser un factor determinante en la precisión y estabilidad del instrumento de medida.

#### 6.4.1.1 Montaje de los Sensores [70]

Un caudalímetro básico **TTWB** consta de una pareja de transceptores y un sofisticado y compacto instrumento electrónico de medida (portátil o fijo). Los sensores se montan externamente a la tubería por la que pasa el líquido que se desea medir. Los sensores se acoplan mediante una cadena de sujeción y un ingenioso espaciador (entre ambos transductores).

**Figura 41.** Montaje de los sensores



Fuente: Alcober [70].

La operación de montaje se realiza sin necesidad de efectuar cortes o inserciones en la línea. La propia unidad electrónica recomienda la mejor opción de montaje en función de las características del sistema o de la aplicación. Existen distintos tipos de sensores, cada uno de ellos cubriendo un rango de diámetros de tubería

bastante amplio (por ejempló, de 6" a 20"), pues la frecuencia y potencia requerida varían sensiblemente en función del tamaño del tubo.

Los sensores pueden ser montados en modo de haz reflejado (ambos están en un mismo lado de la pared del tubo) o en modo directos (montados en puntos opuestos). El primer método constituye la forma de montaje preferida, pues la magnitud del tiempo de tránsito es el doble que en el modo directo y por lo tanto, la medida es en principio más precisa. No obstante, el modo directo presenta ventajas cuando la señal recibida es de baja potencia, ya sea porque no se dispone de los sensores adecuados o existe una presencia importante de sólidos en suspensión en el medio. Otras ocasiones en que puede interesar la utilización del modo directo es en aquellos lugares donde el espacio está muy reducido, como en este caso. Por otra parte y como ya se mencionó con anterioridad la sección transversal del cilindro contenedor debe ser tal que permita la ubicación de los dos sensores y que tenga una sección transversal de al menos 127mm. Teniendo en cuenta que la distancia entre las paredes del canal y las paredes del contenedor no sean mayor a 25mm.

## 7. CONCLUSIONES

- Los resultados de simulación del flujo en el canal muestran que cuando el efecto de “*Couple Stresses*” no se tiene en cuenta en puntos interiores del ferrofluido, el flujo es generado por el salto en el tensor de “*Couple Stresses*” a través de la interfase ferrofluido-aire. Adicionalmente, la magnitud del flujo tiende a decrecer de forma tal que se podría esperar que de ser este el único efecto de generación de flujo, este cesaría para puntos interiores del fluido alejados lo suficiente de la interfase.
- Los resultados muestran que cuando se tiene en cuenta el efecto de “*Couple Stresses*”, es decir situaciones donde tanto efectos volumétricos como superficiales pudieran darse, se presentaría un contraflujo pequeño cerca de la superficie inferior del canal. Este hecho podría ser usado como una prueba de la existencia de efectos volumétricos; en caso de ser posible la determinación de perfiles de velocidad. Esto ratificaría la existencia de los dos mecanismos de generación de flujo en la geometría del canal.
- De los perfiles de velocidad traslacional obtenidos es claro que la magnitud del flujo en la interfase fluido-aire y sus cercanías es mayor al flujo generado por esfuerzos volumétricos. Esto está de acuerdo a observaciones experimentales de perfiles de velocidad en geometrías cilíndricas. No obstante, esta es la primera solución para el campo de flujo de ferrofluido con una interfase ferrofluido-aire y que tiene en cuenta la difusión del momento angular interno, que pudiera ser verificable experimentalmente.

- A partir de un análisis del efecto del parámetro *spin viscosity*, se encontró que existe un valor crítico tanto en el canal como en el ducto que hace que el flujo sea mínimo y máximo respectivamente.
- Se verifica que para el caso del ducto la única forma de generar flujo es por esfuerzos volumétricos.
- Existe un efecto competitivo entre el mecanismo de flujo superficial y el volumétrico generado por los efectos de “*couple stresses*”.
- La velocidad angular del ferrofluido en las paredes del canal puede ser diferente de cero y adicionalmente variar con la altura del contenedor.

## 8. RECOMENDACIONES

- Hacer una solución numérica del conjunto de ecuaciones ferrohodinámicas (1-6) para un problema similar al resuelto en este trabajo pero aplicable a altos campos magnéticos con el objetivo de poder hacer una comparación con los resultados experimentales reportados por Krauß *et al.* [2,3].
- Existe un gran reto en la necesidad de realizar análisis teóricos o estimados experimentales del coeficiente fenomenológico de “*bulk spin viscosity*” ( $\lambda'$ ) por lo que se recomienda avanzar también en esta dirección.
- Se recomienda la implementación de un equipo para la obtención de datos experimentales de perfiles de velocidad y medidas de flujo de ferrofluido impulsados por campos magnéticos rotando en las geometrías estudiadas en esta investigación. Para ello se deben tener en cuenta las recomendaciones y métodos planteados para la parte experimental en este estudio.
- Estudiar el comportamiento de un ferrofluido en las paredes del contenedor en el que están soportados.

## CITAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Rinaldi, C. and Chaves, A., “Interfacial Balance Conditions in Ferrohydrodynamics and in Structured Continua,” *Physic of fluids*, pp. 1-24, 2014.
- [2] Krauß, R., Reimann, B., Richter, R. and Rehberg, I., “Fluid pumped by magnetic stress,” *Applied Physics Letters*, Vol. 86, No. 024102, pp. 024102 (1-3), 2005.
- [3] Krauß, R., Liu, M., Reimann, B., and Richter, R., “Pumping fluid by magnetic surface stress,” *New Journal of Physics*, Vol. 8, No. 18, pp. 1-11, 2006.
- [4] Rosensweig, R. E., *Ferrohydrodynamics*. Dover Publications, Inc., New York, 1997.
- [5] Odenbach, S., *Condens Matter. J. Phys.*, 16, R1135–R1150, 2004.
- [6] Rosensweig, R. E., *Annual review of fluid mechanics*, 19, 437–461, 1987.
- [7] Rinaldi, C., Cader, T., Franklin, T. and Zahn, M., *Dekker Encyclopedia of Nanoscience and Nanotechnology – Six Volume Set*, CRC Press, Ch. 123, 2004.
- [8] Calero, V., Rinaldi C. and Zahn, M., *Encyclopedia of Sensors*. American Scientific Publishers, 2006.
- [9] Bayat, B., Nethé, A., Guldbakke, J., Hesselbach, J., Naletova, V., Stahlmann, H. D., Uhlmann, E. and Zimmermann, K., *Colloidal Magnetic Fluids. Basics, Development and Application of Ferrofluids*. Springer Berlin Heidelberg, vol. 763, No. 30, 2009.
- [10] Kumar, D., Sinha, P. and Chandra, P., *International Journal of Engineering Science*, Vol. 30, pp. 645–656, 1992.

- [11] Kumar, D., Chandra, P. and Sinha, P., International Journal of Engineering Science, Vol. 31, pp. 593–604, 1993.
- [12] Hatch, A., Kamholz, A. E., Holman, G., Yager, P. and Bohringer, K. F., Journal Of Microelectromechanical Systems, Vol. 10, pp. 215–221, 2001.
- [13] Love, L. J., Jansen, J. F., McKnight, T. E., Roh, Y., Phelps, T. J., Yeary, L. W. and Cunningham, G. T., IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, Vol. 10, pp. 68–76, 2005.
- [14] Denies, J., Ahmed, H. B. and Dehez, B., Advanced Electromechanical Motion Systems & Electric Drives Joint Symposium, 2009.
- [15] Nethe, A., Schoppe, T. and Stahlmann, H. D., Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 201, pp. 423–426, 1999.
- [16] Oh, D. W., Jin, J. S., Choi, J. H., Kim, H. Y. and Lee, J. S., Journal of Micromechanics and Microengineering, Vol. 17, pp. 2077–2083, 2007.
- [17] Engelmann, S., Nethe, A., Scholz, T. and Stahlmann, H., Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 276, pp. 2345–2347, 2004.
- [18] Fischer, B., Mao, L., Gungormus, M., Tamerler, C., Sarikaya, M. and Koser, H., “Nano/Micro Engineered and Molecular Systems,” NEMS. 3rd IEEE International Conference, 2008.
- [19] Ando, B., Ascia, A., Baglio, S. and Pitrone, N., Sensors. IEEE, pp. 1179–1182, 2008.
- [20] Bellamkonda, R., John, T., Mathew, B., DeCoster, M., Hegab, H. and Davis, D., Journal of Micromechanics and Microengineering, Vol. 20, 025012, 2010.
- [21] Murariu, V. and Sergeant, P. J., Physical Separation in Science and Engineering, pp. 1–13, 2007.
- [22] Lai, D. M., Deng, L., Li, J., Liao, B., Guo, Q. X. and Fu, X., ChemSusChem,

Vol. 4, pp. 55–58, 2011.

- [23] Pourjavadi, A., Hosseini, S. H., Doulabi, M., Fakoorpoor, M. and Seidi, F., ACS Catal, Vol. 2, pp. 1259–1266, 2012.
- [24] Zhang, Q., Su, H., Luo, J. and Wei, Y., Green Chem, Vol. 14, pp. 201, 2012.
- [25] Kaboudin, B. Mostafalu, R. and Yokomatsu, T., Green Chem, Vol. 15, 2266, 1993.
- [26] Raj, K., Moskowitz, B. and Casciari, R., Journal of Magnetism and Magnetic Materials, pp.180, 1996.
- [27] De Volder, M. and Reynaerts, D., Sensors and Actuators. Physical, Vol. 152, pp. 234–240, 2009.
- [28] Ravaud, R., Pinho, M., Lemarquand, G., Dauchez, N., Genevaux, J. M., Lemarquand, V. and Brouard, B., IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 45, pp. 4388–4390, 2009.
- [29] Ravaud, R., Lemarquand, G. and Lemarquand, V., Tribology International, Vol. 43, pp. 76–82, 2010
- [30] Gleich, B. and Weizenecker, J., Nature Lett, Vol. 435, pp. 1214–1217, 2005.
- [31] Kim, D. K. and Dobson, J., The Royal Society of Chemistry, Vol. 19, pp. 6294–6307, 2009.
- [32] Dobson, J., Nature Materials, Vol. 11, pp. 1006–1008, 2012.
- [33] Kose, A. R. and Koser, H., Lab Chip, Vol. 12, pp. 190–196, 2012.
- [34] Moskowitz, R. and Rosensweig, R., “Nonmechanical torque driven flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic field,” Applied Physics Letters, Vol. 11, No. 10, pp. 301-303, 1967.
- [35] Zaitsev, V. M. and Shliomis, Mark, I., “Entrainment of ferromagnetic suspension by a rotating field,” Journal of Applied Mechanics and Technical

Physics, Vol. 10, pp. 696-700, 1969.

- [36] Rosensweig, R., "Stress boundary condition in ferrohydrodynamics," *Industrial and Engineering Chemistry Research*, Vol. 46, No. 19, pp. 6113–6117, 2007.
- [37] Rosensweig, R., Popplewell, J. and Johnston, "Magnetic fluid motion in rotating field," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 85, pp. 171-180, 1990.
- [38] Chaves, A., Gutman, F. and Rinaldi, C., "Torque and bulk flow of a ferrofluid in an annular gap subjected to a rotating magnetic field," *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 129, pp. 412–422, 2007.
- [39] Torres-Diaz, I. and Rinaldi, C., "Ferrofluid flow in a spherical cavity under an imposed uniform rotating magnetic field: Spherical spin-up flow," *Physics of Fluids*, Vol. 24, No. 8, 2011.
- [40] Chaves, A., Zahn, M. and Rinaldi, C., "Spin-up flow of ferrofluids: Asymptotic theory and experimental measurements," *Physics of Fluids*, Vol. 20, No. 5, pp. 053-102, 2008.
- [41] Chaves, A., Rinaldi, C., Elborai, S., He, X., and Zahn, M., "Bulk flow in ferrofluids in a uniform rotating magnetic field," *Physical Review Letters*, Vol. 96, No. 19, pp.194-501, 2006.
- [42] Chaves, A., Torres, I., and Rinaldi, C., "Flow of ferrofluid in an annular gap in a rotating magnetic field," *Physics of Fluids*, Vol. 22, No. 09, pp. 09, 2010.
- [43] Torres-Diaz, I., Cortes, A., Cedeno-Mattei, Y., Perales-Perez, O., and Rinaldi, C., "Spin-Up of a ferrofluid with Brownian Magnetic Relaxation," *Physics of Fluids*, Vol. xx, pp. xx, 2013.
- [44] Torres-Diaz, I. and Rinaldi, C., "Ferrofluid flow in the annular gap of a multipole rotating magnetic field," *Physics of Fluids*, Vol. 23, No. 082001, pp.

1-11, 2011.

- [45] Benson, P. M., Lavallée Y., Heap, M.J., Flaws, A., Hess, K.U. and Dingwell, D.B., "Laboratory simulations of tensile fracture via cyclical magma pressurization," *Earth Planet Sci. Lett.* In Press, 2012.
- [46] Shliomis, M. I. and Morozov, K. I., "Negative viscosity of ferrofluids under alternating magnetic field," *Physics of Fluids*, Vol. 6, No. 8, pp. 2855-2861, 1994.
- [47] Rinaldi, C., Chaves, A., Elborai, S., He, X., and Zahn, M., "Magnetic fluid rheology and flows," *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, Vol. 10, pp. 141-157, 2005.
- [48] Kruti S., Upadhyay R.V. and Aswal A., "Influence of large size magnetic particles on the magneto-viscous properties of ferrofluid," *Smart Mater. Struct*, Vol. 21, No. 7, 2005.
- [49] Dahler, J. S. and Scriven, L. E., "Angular momentum of continua," *Nature*, Vol. 192, No. 4797, pp. 36–37, 1961.
- [50] Rinaldi, C., "Effect of the particle size distribution on Brownian and Néel relaxations times of ferrofluids," *Personal Communication*, 2005.
- [51] Rosenthal, A. D., Rinaldi, C., Franklin, T. and Zahn, M., "Torque measurements in spin-up flow of ferrofluids," *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 126, pp. 198–205, 2004.
- [52] Lehlooh, A. F., Mahmood, S. H., and Williams, J. M., "On the particle size dependence of the magnetic anisotropy energy constant," *Physica B*, Vol. 321, No. 1-4, pp. 159–162, 2002.
- [53] Condiff, D. W. and Dahler, J. S., "Fluid mechanical aspects of antisymmetric stress," *Physics of Fluids*, Vol. 7, No. 6, pp. 842-854, 1964.

- [54] Brenner, H., "Rheology of two-phase systems," Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 2, pp. 137-176, 1970.
- [55] Feng, S., Graham, A.L., Abbott, J.R. & Brenner, H., "Antisymmetric stresses in suspensions: vortex viscosity and energy dissipation," J. Fluid Mech 563, pp. 97-122, 2006.
- [56] Felderhof, B. U., "Entrainment by a rotating magnetic field of a ferrofluid contained in a sphere," Phys. Rev. E 84, 046313, 2011.
- [57] Khushrushahi, S., Zahn M., "Ultrasound velocimetry of ferrofluid spin-up flow measurements using a spherical coil assembly to impose a uniform rotating magnetic field," Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 323 Vol.10, pp. 1302-1308, 2011.
- [58] Lehlooh, A. F., Mahmood, S. H., and Williams, J. M., "On the particle size dependence of the magnetic anisotropy energy constant," Physica B, Vol. 321, No. 1-4, pp. 159-162, 2002.
- [59] Peña, V., Chaves, A. and Fuentes, D., "Solución numérica para el flujo de ferrofluido inducido por un campo magnético rotativo para altas amplitudes del campo," 2014.
- [60] Brand, L., Vector and Tensor Analysis. Wiley, New York, 1947.
- [61] Brown, R. and Horsnell, T., "The wrong way round," Electrical Review, Vol. 183, pp. 235-236, 1969.
- [62] Kagan, I., Rykov, V.G. and Yantovskii, E.I., "Flow of a dielectric ferromagnetic suspension in a rotating magnetic field," Magnetohydrodynamics, Vol. 9, No. 2, pp. 258-261, 1973.
- [63] Glazov, O.A, Magnitnaya Gidrodinamika, Transl. English as Magnetohydrodynamics, Vol. 3, No. 125, 1973.

- [64] Shliomis, M. I., "Concerning one gyromagnetic effect in a liquid paramagnet," *Sov. Phys. JETP*, Vol. 39, No. 4, pp. 701-704, 1964.
- [65] El Rincon del vago. Método de diferencias finitas [en línea]. < <http://html.rincondelvago.com/metodo-de-diferencias-finitas.html>> [citado 16 de diciembre de 2014].
- [66] Zahn, M. and Greer, D. R., "Ferrohydrodynamic pumping in spatially sinusoidally time-varying magnetic fields," *Journal of Magnetic Materials*, Vol. 149, pp. 165-173, 1995.
- [67] Takeda, Y., "Velocity profile measurement by ultrasonic Doppler method," *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 10, pp. 444-453, 1995.
- [68] Takeda, Y., "Ultrasonic Doppler method for velocity profile measurement in fluid dynamics and fluid engineering," *Experiments in Fluids*, vol. 26, pp. 177-178, 2001.
- [69] Willemetz, J. C., *DOP2000 User's manual*, ed. Lausanne, 2001.
- [70] Alcober, X., *Medida de Caudal no Intrusiva por Ultrasonido* [en línea]. < [http://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCQQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.iberfluid.com%2Fconsierge%2Fdocs%2F355\\_articles\\_586\\_MedidaCaudal.pdf&ei=Ug6TVPOMAOapNrrag3A&usg=AFQjCNEb2uJ2-R2Yk2uUjf5ojmjtzF2Kw&bvm=bv.82001339,d.eXY](http://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCQQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.iberfluid.com%2Fconsierge%2Fdocs%2F355_articles_586_MedidaCaudal.pdf&ei=Ug6TVPOMAOapNrrag3A&usg=AFQjCNEb2uJ2-R2Yk2uUjf5ojmjtzF2Kw&bvm=bv.82001339,d.eXY)> [citado 18 de diciembre de 2014].

## BIBLIOGRAFÍA

Alcober, X., Medida de Caudal no Intrusiva por Ultrasonido [en línea]. <[http://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0C CQQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.iberfluid.com%2Fconsierge%2Fdocs%2F355\\_articles\\_586\\_MedidaCaudal.pdf&ei=Ug6TVPOMAoapNrrag3A&usg=AFQjCNEb2uJ2-R2Yk2uUjf5ojmjtZF2Kw&bvm=bv.82001339,d.eXY](http://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0C CQQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.iberfluid.com%2Fconsierge%2Fdocs%2F355_articles_586_MedidaCaudal.pdf&ei=Ug6TVPOMAoapNrrag3A&usg=AFQjCNEb2uJ2-R2Yk2uUjf5ojmjtZF2Kw&bvm=bv.82001339,d.eXY)> [citado 18 de diciembre de 2014].

Ando, B., Ascia, A., Baglio, S. and Pitrone, N., *Sensors*. IEEE, pp. 1179–1182, 2008.

Bayat, B., Nethe, A., Guldbakke, J., Hesselbach, J., Naletova, V., Stahlmann, H. D., Uhlmann, E. and Zimmermann, K., *Colloidal Magnetic Fluids. Basics, Development and Application of Ferrofluids*. Springer Berlin Heidelberg, vol. 763, No. 30, 2009.

Bellamkonda, R., John, T., Mathew, B., DeCoster, M., Hegab, H. and Davis, D., *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 20, 025012, 2010.

Benson, P. M., Lavallée Y., Heap, M.J., Flaws, A., Hess, K.U. and Dingwell, D.B., "Laboratory simulations of tensile fracture via cyclical magma pressurization," *Earth Planet Sci. Lett.* In Press, 2012.

Brand, L., *Vector and Tensor Analysis*. Wiley, New York, 1947.

Brenner, H., "Rheology of two-phase systems," *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 2, pp. 137176, 1970.

Brown, R. and Horsnell, T., "The wrong way round," *Electrical Review*, Vol. 183, pp. 235-236, 1969.

Calero, V., Rinaldi C. and Zahn, M., *Encyclopedia of Sensors*. American Scientific Publishers, 2006.

Chaves, A., Gutman, F. and Rinaldi, C., "Torque and bulk flow of ferrofluid in an annular gap subjected to a rotating magnetic field," *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 129, pp. 412–422, 2007.

Chaves, A., Rinaldi, C., Elborai, S., He, X., and Zahn, M., "Bulk flow in ferrofluids in a uniform rotating magnetic field," *Physical Review Letters*, Vol. 96, No. 19, pp.194-501, 2006.

Chaves, A., Torres, I., and Rinaldi, C., "Flow of ferrofluid in an annular gap in a rotating magnetic field," *Physics of Fluids*, Vol. 22, No. 09, pp. 09, 2010.

Chaves, A., Zahn, M. and Rinaldi, C., "Spin-up flow of ferrofluids: Asymptotic theory and experimental measurements. *Physics of Fluids*, Vol. 20, No. 5, pp. 053-102, 2008.

Condiff, D. W. and Dahler, J. S., "Fluid mechanical aspects of antisymmetric stress," *Physics of Fluids*, Vol. 7, No. 6, pp. 842-854, 1964.

Dahler, J. S. and Scriven, L. E., "Angular momentum of continua. *Nature*, Vol. 192, No. 4797, pp. 36–37, 1961.

De Volder, M. and Reynaerts, D., *Sensors and Actuators. Physical*, Vol. 152, pp. 234–240, 2009.

Denies, J., Ahmed, H. B. and Dehez, B., Advanced Electromechanical Motion Systems & Electric Drives Joint Symposium, 2009.

Dobson, J., Nature Materials, Vol. 11, pp. 1006–1008, 2012.

El Rincon del vago. Método de diferencias finitas [en línea]. <<http://html.rincondelvago.com/metodo-de-diferencias-finitas.html>> [citado 16 de diciembre de 2014].

Engelmann, S., Nethe, A., Scholz, T. and Stahlmann, H., Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 276, pp. 2345–2347, 2004.

Felderhof, B. U., “Entrainment by a rotating magnetic field of a Ferrofluido contained in a sphere,” Phys. Rev. E 84, 046313, 2011.

Feng, S., Graham, A.L., Abbott, J.R. & Brenner, H., “Antisymmetric stresses in suspensions: vortex viscosity and energy dissipation,” J. Fluid Mech 563, pp. 97-122, 2006.

Fischer, B., Mao, L., Gungormus, M., Tamerler, C., Sarikaya, M. and Koser, H., “Nano/Micro Engineered and Molecular Systems,” NEMS. 3rd IEEE International Conference, 2008.

Glazov, O.A., Magnetohydrodynamics. Magnitnaya Gidrodinamika, 3Plenum, New York, p. 125, 1973.

Gleich, B. and Weizenecker, J., Nature Lett., Vol. 435, pp. 1214–1217, 2005.

Hatch, A., Kamholz, A. E., Holman, G., Yager, P. and Bohringer, K. F., Journal Of Microelectromechanical Systems, Vol. 10, pp. 215–221, 2001.

Kaboudin, B. Mostafalu, R. and Yokomatsu, T., *Green Chem*, Vol. 15, 2266, 2013.

Kagan, I., Rykov, V.G. and Yantovskii, E.I., "Flow of a dielectric ferromagnetic suspension in a rotating magnetic field," *Magneto hydrodynamics*, Vol. 9, No. 2, pp. 258-261, 1973.

Khushrushahi, S., Zahn M., "Ultrasound velocimetry of ferrofluid spin-up flow measurements using a spherical coil assembly to impose a uniform rotating magnetic field," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 323 (10), pp. 1302-1308, 2011.

Kim, D. K. and Dobson, J., (2009). *The Royal Society of Chemistry*, Vol. 19, pp. 6294–6307, 2009.

Kose, A. R. and Koser, H., *Lab Chip*, Vol. 12, pp. 190–196, 2012.

Krauß, R., Liu, M., Reimann, B., and Richter, R., "Pumping fluid by magnetic surface stress," *New Journal of Physics*, Vol. 8, No. 18, pp. 1-11, 2006.

Krauß, R., Reimann, B., Richter, R. and Rehberg, I., "Fluid pumped by magnetic stress," *Applied Physics Letters*, Vol. 86, No. 024102, pp. 024102 (1-3), 2005.

Kruti S., Upadhyay R.V. and Aswal A., "Influence of large size magnetic particles on the magneto-viscous properties of ferrofluid," *Smart Mater. Struct*, Vol. 21, No. 7, 2005.

Kumar, D., Chandra, P. and Sinha, P., *International Journal of Engineering Science*, Vol. 31, pp. 593–604, 1993.

Kumar, D., Sinha, P. and Chandra, P., International Journal of Engineering Science, Vol. 30, pp. 645–656, 1962.

Lai, D. M., Deng, L., Li, J., Liao, B., Guo, Q. X. and Fu, X., ChemSusChem, Vol. 4, pp. 55–58, 2011.

Lehlooh, A. F., Mahmood, S. H., and Williams, J. M., “On the particle size dependence of the magnetic anisotropy energy constant,” Physica B, Vol. 321, No. 1-4, pp. 159–162, 2002.

Love, L. J., Jansen, J. F., McKnight, T. E., Roh, Y., Phelps, T. J., Yeary, L. W. and Cunningham, G. T., IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, Vol. 10, pp. 68–76, 2005.

Mahmood, S. H., Lehlooh, A. F. and Williams, J. M., “On the particle size dependence of the magnetic anisotropy energy constant,” Physica B, Vol. 321, No. 1-4, pp. 159162, 2002.

Moskowitz, R. and Rosensweig, R., “Nonmechanical torque driven flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic field,” Applied Physics Letters, Vol. 11, No. 10, pp. 301-303, 1967.

Murariu, V. and Sergeant, P. J., “Physical Separation in Science and Engineering,” pp. 1–13, 2007.

Nethe, A., Schoppe, T. and Stahlmann, H. D., Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 201, pp. 423–426, 1969.

Odenbach, S., Condens Matter. J. Phys., 16, R1135–R1150, 2004.

Oh, D. W., Jin, J. S., Choi, J. H., Kim, H. Y. and Lee, J. S., *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 17, pp. 2077–2083, 2007.

Peña, V., Chaves, A. and Fuentes, D., “Solución numérica para el flujo de ferrofluido inducido por un campo magnético rotativo para altas amplitudes del campo,” 2014.

Pourjavadi, A., Hosseini, S. H., Doulabi, M., Fakoorpoor, M. and Seidi, F., *ACS Catal*, Vol. 2, pp. 1259–1266, 2012.

Raj, K., Moskowitz, B. and Casciari, R., *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 149, pp.174-180, 1996.

Ravaud, R., Lemarquand, G. and Lemarquand, V., *Tribology International*, Vol. 43, pp. 76–82, 2010.

Ravaud, R., Pinho, M., Lemarquand, G., Dauchez, N., Genevaux, J. M., Lemarquand, V. and Brouard, B., *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 45, pp. 4388–4390, 2009.

Rinaldi, C., “Effect of the particle size distribution on Brownian and Néel relaxations times of ferrofluids,” *Personal Communication*, 2005.

Rinaldi, C., Cader, T., Franklin, T. and Zahn, M., *Dekker Encyclopedia of Nanoscience and Nanotechnology – Six Volume Set*, CRC Press, Ch. 123, 2004.

Rinaldi, C. and Chaves, A., “Interfacial Balance Conditions in Ferrohydrodynamics and in Structured Continua” *Physic of fluids*, pp. 1-24, 2014.

Rinaldi, C., Chaves, A., Elborai, S., He, X., and Zahn, M., "Magnetic fluid rheology and flows," *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, Vol. 10, pp. 141-157, 2005.

Rosensweig, R. E., *Annual review of fluid mechanics*, Vol. 19, pp. 437–461, 1987.

Rosensweig, R. E., *Ferrohydrodynamics*. Dover Publications, Inc., New York, 1987.

Rosensweig, R., "Stress boundary condition in ferrohydrodynamics," *Industrial and Engineering Chemistry Research*, Vol. 46, No. 19, pp. 6113–6117, 2007.

Rosensweig, R., Popplewell, J. and Johnston, R., "Magnetic fluid motion in rotating field," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 85, pp. 171-180, 1990.

Rosenthal, A. D., Rinaldi, C., Franklin, T. and Zahn, M., "Torque measurements in spin-up flow of ferrofluids," *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 126, pp. 198–205, 2004.

Shliomis, M. I., "Concerning one gyromagnetic effect in a liquid paramagnet," *Sov. Phys. JETP*, Vol. 39, No. 4, pp. 701-704, 1974.

Shliomis, M. I. and Morozov, K. I., "Negative viscosity of ferrofluids under alternating magnetic field," *Physics of Fluids*, Vol. 6, No. 8, pp. 2855-2861, 1994.

Torres-Diaz, I. and Rinaldi, C., "Ferrofluid flow in a spherical cavity under an imposed uniform rotating magnetic field: Spherical spin-up flow," *Physics of Fluids*, Vol. 24, No. 8, 2011.

Torres-Diaz, I. and Rinaldi, C., "Ferrofluid flow in the annular gap of a multipole rotating magnetic field," *Physics of Fluids*, Vol. 23, No. 082001, pp. 1-11, 2011.

Torres-Diaz, I., Cortes, A., Cedeno-Mattei, Y., Perales-Perez, O., and Rinaldi, C., "Spin-Up of a ferrofluid with Bronian Magnetic Relaxation," *Physics of Fluids*, 2013.

Takeda, Y., "Ultrasonic Doppler method for velocity profile measurement in fluid dynamics and fluid engineering," *Experiments in Fluids*, vol. 26, pp. 177-178, 2001.

Takeda, Y., "Velocity profile measurement by ultrasonic Doppler method," *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 10, pp. 444-453, 1995.

Willemetz, J. C., *DOP2000 User's manual*, ed. Lausanne, 2001

Zahn, M. and Greer, D. R., "Ferrohydrodynamic pumping in spatially sinusoidally time-varying magnetic fields," *Journal of Magnetic Materials*, Vol. 149, pp. 165-173, 1995.

Zaitsev, V. M. and Shliomis, Mark, I., "Entrainment of ferromagnetic suspension by a rotating field," *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 10, pp. 696-700, 1969.

Zhang, Q., Su, H., Luo, J. and Wei, Y., *Green Chem*, Vol. 14, pp. 201, 2012.