Aprendizajes de profesores que reflexionan sobre las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas

Jaiver David Rey Gómez

Trabajo de grado para optar al título de

Magíster en Educación Matemática

Directora

Sandra Evely Parada Rico

Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2025

Dedicatoria

A tanta gente comprometida
que dedica su vida a enseñar.
A quienes, desde escuelas e institutos,
cada día dibujan con tesón
la partitura y la geometría del futuro.
-Irene Vallejo

Agradecimientos

A Dios.

A mis padres Javier y Mónica por dedicar sus mejores años a enseñarme los valores de la vida.

A mis hermanos y demás familiares por su apoyo.

A la profesora Sandra Evely a quien tengo como referente profesional, le agradezco infinitamente por sus enseñanzas en los cinco años que llevamos de trabajo conjunto.

A mis demás profesores de Maestría: Solange Roa, Jorge Fiallo, y Edith Johanna Mendoza, por su esmero en mi formación científica y humanista.

Al profesor Vicente Liern, la profesora Olga Blasco, y por demás a la Universidad de Valencia, que me acogieron en su campus para concretar algunas ideas de este trabajo.

A mis compañeras de cohorte: Jenny, Carolina y Maira, por su paciencia y generosidad.

A la Escuela de Matemáticas, en particular a la Señorita Claudia Garavito por estar siempre dispuesta a ayudar.

A mis amigos de siempre, quienes han estado conmigo en las adversidades y en los triunfos.

Tabla de contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Lista de Apéndices

Resumen

Título: Aprendizajes de profesores que reflexionan sobre las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas*

Autor: Jaiver David Rey Gómez**

Palabras clave: conexiones, reflexión, economía y finanzas.

Descripción:

En este documento se reportan los resultados de un estudio que tuvo por objetivo describir aprendizajes construidos por profesores de matemáticas en formación que reflexionan sobre las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas para promover actividad matemática en el aula. Esta investigación se fundamentó teóricamente en el Modelo de Reflexión y Acción (RyA) de Parada (2011) enmarcado en las CoP (Wenger, 1998), en cuyo centro se encuentra la actividad matemática, suscitada por las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas, sobre la cual el profesor adquiere aprendizajes en su pensamiento reflexivo.

El trabajo fue de investigación-acción colaborativa, y se desarrolló en cinco fases metodológicas: i) constitución y caracterización de la CoP; ii) procesos de reflexión; iii) selección de un profesor como caso de estudio; iv) sistematización y análisis de datos; y v) descripción de los aprendizajes construidos de la CoP. Para el reporte de resultados se utilizó como técnica el caso de estudio único (Stake, 1994), con un profesor de matemáticas en formación que participó en la CoP y reflexionó sobre las conexiones entre la función lineal y fenómenos asociados a la oferta y la demanda.

Como resultados, se identificaron algunos aprendizajes especificamente en el pensamiento matemático como: usar la función lineal para modelar fenómenos asociados a la oferta y la demanda; reconocer la relación de proporcionalidad directa en la función lineal; y comprender el significado de la variable (dependencia, variación y funcionalidad) en fenómenos de oferta y demanda.

---

*Trabajo de grado

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Educación Matemática. Directora: Dra. Sandra Evely Parada Rico.

Abstract

Title: Learnings from teachers reflecting on the connections between mathematics, economics, and finance*

Author: Jaiver David Rey Gómez**

Keywords: connections, reflection, economy and finance, CoP.

Description:

In this document reports the results of a study that aimed to describe learnings constructed by mathematics teachers in training who reflect on the connections between the mathematics, the economics and the finance to promote mathematical activity in the classroom. This research was theoretically based on the Reflection and Action Model (R&A) of Parada (2011) framed in the CoPs (Wenger, 1998), in whose center is the mathematical activity, aroused by the connections between the mathematics, the economics and the finance, on which the teacher acquires learning in his reflective thinking.

The work was collaborative action-research, and was developed in five methodological phases: i) constitution and characterization of the CoP; ii) reflection processes; iii) selection of a teacher as a case study; iv) systematization and data analysis; and v) description of the learning constructed from the CoP. The single case study (Stake, 1994) was used as a technique to report the results, being a mathematics teacher in training who participated in the CoP and reflected on the connections between the linear function and phenomena associated with supply and demand.

As results, some learning was identified specifically in mathematical thinking, such as: using the linear function to model phenomena associated with supply and demand; recognizing the relationship of direct proportionality in the linear function; and understanding the meaning of the variable (dependence, variation and functionality) in supply and demand phenomena.

*Bachelor Thesis.

**Science Faculty. Mathematics School. Ms. Mathematics Education. Directora: Dra. Sandra Evely Parada Rico.

Presentación del documento

La presente investigación indagó sobre ¿qué aprendizajes construyen profesores de matemáticas en formación cuando reflexionan sobre las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas para promover actividad matemática en el aula? para responder a esta pregunta, se presenta el trabajo realizado de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se realiza una introducción al fenómeno de estudio y se describe el problema de investigación.

En el capítulo 2 se esbozan los antecedentes de investigación en donde se revisan las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas; se aborda la formación del profesor de matemáticas y se muestran algunas experiencias de investigación en la misma línea de este estudio.

En el capítulo 3 se explicitan los elementos teóricos y conceptuales utilizados para el análisis de datos y el reporte de resultados.

En el capítulo 4 se describen las características del estudio y el proceso metodológico de investigación.

En el capítulo 5 se exponen los resultados producto del proceso de reflexión del caso de estudio, estableciendo tres categorías que obedecen a aprendizajes dentro del pensamiento matemático del profesor en formación.

En el capítulo 6 se realizan las conclusiones, donde se responde la pregunta de investigación, se proponen algunas perspectivas y se esbozan las reflexiones finales del estudio.

1. Introducción y descripción del problema

Un reciente estudio reportado en Bakker et al. (2023) identifica ocho temas que la comunidad de educadores matemáticos debería investigar en la próxima década, entre los que se destacan: *i) el desarrollo profesional docente* y *ii) las relaciones de las matemáticas con otras prácticas*. Este último tema ha sido priorizado por distintas vertientes teóricas que estudian las matemáticas que se desarrollan dentro del contexto individual, social o profesional del sujeto (*v.g.* Freudhental, 1973; D'Ambrosio, 2014; Cantoral et al., 2014).

En concordancia con lo anterior, Kaiser & Sriraman (2006); Niss & Blum (2020), y COMAP & SIAM (2019), entre otros, sostienen que dichas relaciones son parte esencial de las matemáticas mismas y por ello la necesidad de que los sistemas educativos la integren al currículo escolar.

Para el *National Council of Teachers of Mathematics* NCTM (2003), las relaciones de las matemáticas con otras prácticas corresponden al proceso de conexiones, sobre el cual expone que:

> Las experiencias matemáticas en todos los niveles deberían incluir oportunidades de aprender, trabajando en problemas que surjan de contextos no matemáticos. Tales conexiones pueden darse con temas de otras áreas o disciplinas, así como también con la vida diaria de los estudiantes […] Es importante que los estudiantes tengan oportunidad de experimentar las matemáticas en un contexto (p.70).

Al respecto, Hoffman y Even (2023) plantean que deben coexistir conexiones en ambas direcciones: de las matemáticas a otros campos (cuando se utilizan herramientas y técnicas matemáticas para resolver problemas de otros contextos) y de otros campos a las matemáticas (cuando al resolver problemas extramatemáticos se generan nuevas preguntas, técnicas y métodos dentro de las matemáticas mismas). Además, las autoras sostienen que estas conexiones deben ser alimentadas por una contribución mutua.

En su estudio, Hoffman y Even entrevistaron a profesores de matemáticas sobre la forma en que ellos evidencian las conexiones y si podían dar algunos ejemplos respecto a estas. Entre los resultados, encontraron que los profesores son conscientes de que las matemáticas contribuyen a otros campos, y que estas conexiones son útiles para el desarrollo de sus prácticas profesionales, pero no reconocieron que a través de fenómenos de otros campos se puede enriquecer las matemáticas, y en particular, su enseñanza.

Sobre lo anterior, autores como Blum y Niss (1991), Maab y Gurlitt (2011) y Beswic (2012) coinciden con Hoffman y Even en que el uso de fenómenos de otros campos para el desarrollo de las matemáticas y, en particular, de su enseñanza debería incorporarse en la formación de los profesores de matemáticas, pues esto hace parte de la naturaleza del conocimiento matemático, la cual debe ser comprendida por los profesores, para, en términos de Kilpatrick (2008), desarrollar una visión más panorámica de la disciplina.

Para complementar, Malaspina (2023) sostiene que:

> La realidad social, cultural, económica, política, ambiental y tecnológica, y la vida cotidiana como parte de ella, es una rica fuente de problemas matemáticos que requieren ser identificados, no solo para explotarlos tanto didáctica como matemáticamente, sino para aportar a sus soluciones. Es un gran reto para docentes e investigadores seleccionar problemas o situaciones que generen emociones positivas para el aprendizaje y contribuyan a que los estudiantes, con un pensamiento matemático apoyado en la intuición, tengan una mirada crítica y reflexiva de la sociedad en que viven (p.7).

En efecto, la importancia de las conexiones de las matemáticas con otras disciplinas, desde el rol del profesor, ha sido rescatada por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia MEN (1998), donde se reconoce que la actividad matemática escolar puede suscitarse a través de problemas en contextos no matemáticos significativos para el estudiante, y que reconocer estos problemas también hace parte de la práctica del profesor. Sobre esto, postula que:

> El campo disciplinar del maestro de matemáticas, lo podemos identificar con aquel que llamaremos *matemática escolar* […] lo que por el momento entenderemos por matemática escolar es una manera de comprender los conocimientos y saberes matemáticos que circulan en los contextos escolares, en tanto que estos saberes y conocimientos tienen el saber científico como punto de mira, pero en su circular por la escuela no lo hacen necesariamente con el carácter formal y abstracto desde el saber científico, sino que está cargado de significados e intenciones provenientes de contextos sociales y culturales en que está inmerso el contexto escolar (p.45).

Ahora bien, esta investigación se centra en las conexiones con la economía y las finanzas las cuales describen la relación bidireccional como se ha comentado anteriormente, además de que suponen disciplinas importantes en el ámbito sociocultural sobre el cual el profesor, sujeto de estudio de la presente investigación, puede promover actividad matemática.

Las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas han sido rescatadas por diversos autores, en la medida en que: las competencias económicas y financieras del sujeto son movilizadas por la adquisición de conocimientos matemáticos (Mancebón y Pérez, 2014); los fenómenos del contexto de la economía y las finanzas pueden proporcionar una perspectiva más aplicada y reducir el grado de abstracción de los objetos matemáticos (Jiménez y Villaplana, 2014);

y en general la economía y las finanzas son valiosas áreas de aplicación del conocimiento matemático y generan problemas importantes para las matemáticas mismas (Liern, 2012,2013).

Esta investigación, al igual que Hoffman y Even (2023) y Liern (2012, 2013) reconoce la importancia de incluir las conexiones en la formación del profesor en las dos direcciones expuestas, ya que el uso de fenómenos de la economía y las finanzas, aun cuando el propósito es la comprensión de los objetos matemáticos inmersos, también favorece subsecuentemente comportamientos económicos y financieros responsables en los individuos. Esta vía es especialmente necesaria dado que la mayoría de la población colombiana carece de competencias económicas y financieras (Reddy et al., 2013).

En consecuencia de lo descrito y dado el interés por contribuir a la problemática planteada, la presente investigación responde a ¿qué aprendizajes construyen profesores de matemáticas en formación cuando reflexionan sobre las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas para promover actividad matemática en el aula? Por tanto, tiene como objetivo describir aprendizajes construidos por profesores de matemáticas en formación que reflexionan sobre las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas para promover actividad matemática en el aula.

2. Algunos antecedentes

En este capítulo se aborda el fenómeno de estudio, para ello se realizó una revisión bibliográfica orientada por el método propuesto por Sánchez y Molina (2012). De allí, se organizan los antecedentes desde tres ejes.

En primer lugar, se revisan las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas, donde se muestra cómo se han tejido históricamente dichas conexiones, y cómo se han aprovechado para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En segundo lugar, se aborda la formación del profesor de matemáticas haciendo un breve recorrido por investigaciones que tienen como sujeto de estudio al profesor de matemáticas, especialmente en formación. Así mismo, se explica por qué el presente estudio se enfoca en la reflexión del profesor, en este caso, respecto a las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas.

Finalmente, se muestran algunos estudios previos que abordan las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas, haciendo énfasis en resultados que involucran al profesor de matemáticas. Si bien hay una deficiencia de literatura al respecto, se espera esbozar brevemente el panorama de investigación, esperando que el presente estudio favorezca futuras investigaciones en esta línea.

2.1 Conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas

Liern (2012, 2013) sostiene que las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas son tan antiguas como la propia necesidad del hombre de contar. Un breve rastreo histórico da cuenta que dichas conexiones datan de varios siglos antes de Cristo, y pueden evidenciarse en algunos papiros matemáticos. Por ejemplo, en el *Papiro de Moscú*, un documento matemático del antiguo Egipto, se encuentran algunos problemas relacionados con actividades económicas y financieras como el comercio, la repartición de tierra, raciones de alimentos, etc., problemas que para la época eran vitales en la producción y gestión de recursos. Por su parte, en el *Papiro de Rhind*, otro documento matemático de la antigüedad, aparecen problemas comerciales, monetarios y mercantiles cuya solución se hallaba mediante proporciones.

En las *tablillas cuneiformes babilónicas*, que datan de hace 3800 años, se registraron problemas relacionados con fenómenos económicos y financieros: con el comercio, la deuda y los préstamos; donde las técnicas de resolución de ecuaciones fueron fundamentales para solventar los principales problemas económicos y financieros de su cultura. En general, las civilizaciones antiguas reconocieron las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas. Por esto, desarrollaron técnicas para resolver cuestiones relacionadas con estos aspectos. Estos incipientes avances sentaron la base para el intercambio de conceptos y métodos entre las matemáticas y la economía y las finanzas que se dieron en la Época Contemporánea (Liern, 2012).

En la Época Contemporánea destaca el origen histórico del número e, que surge gracias al estudio del interés compuesto por Jakob Bernoulli hacia finales del siglo XVII. Según Boyer (1959), Bernoulli se percató que, si se invierte una cantidad de dinero con un interés del 100 % anual, por mucho que se aumentaran los períodos de capitalización (tiempo que hay entre dos fechas sucesivas en que los intereses son agregados al capital) nunca se superaría el valor de e veces la cantidad de dinero. Lo anterior lo dedujo haciendo el siguiente análisis sobre una cantidad de dinero inicial C.

- Si se capitaliza una vez al año, al final se obtendrá una cantidad igual a $2C$. Esto corresponde a $C \times \left(1 + \frac{1}{1}\right)$.
- Si se capitaliza dos veces en el año, y se considera el interés compuesto, es decir, para el segundo período se debe considerar el capital inicial más los intereses de la primera capitalización, al cabo del primer semestre los intereses son $\frac{1}{2}$ y el nuevo capital es

$\left(1+\frac{1}{2}\right)$. Para el segundo semestre los intereses son $\frac{1}{2}$ del capital anterior, es decir $\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)$, mientras que el capital será el resultado anterior vuelto a capitalizar, es decir $\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\right) + \left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$. Luego la cantidad final que se obtiene es $C\times\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$.

- Así mismo, en tres períodos de capitalización el capital acumulado será de $C\times\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$.
- En general, para n períodos de capitalización con un capital inicial C el capital acumulado será de $C\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
- Así, Bernoulli se percató, al sustituir valores de la fórmula anterior, de que por más períodos de capitalización que se tomaran en un año sobre un capital inicial C, el capital acumulado nunca pasaría de $C\times e$. Y con eso pudo definir $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Bernoulli hace una primera aproximación a e a través de un proceso de límites. De ahí, que esta constante en matemática financiera se pudo definir como el límite de una inversión de una (1) unidad monetaria con una tasa de interés al 100% anual compuesto en forma continua.

Muchos ejemplos de estas conexiones se dieron para la Época Contemporánea. La conclusión es que éstas permitieron avances tanto para las matemáticas como para la economía y las finanzas. Lo anterior, según Liern (2013) originó la economía matemática, la cual se entiende como la aplicación de métodos matemáticos para representar teorías y resolver problemas económicos; y análogamente la matemática financiera, como una rama encargada de resolver situaciones financieras mediante técnicas matemáticas.

La matemática financiera también tiene sus orígenes históricos muchos siglos antes de Cristo. Al respecto Savard y Cavalcante (2021) mencionan que el desarrollo paralelo de las matemáticas y las finanzas puede observarse a través de ejemplos históricos como la invención del dinero para sustituir el sistema de trueque, el cual estableció una medida estándar para el intercambio de bienes y servicios. Sin embargo, la matemática financiera al igual que la economía matemática no adquieren estatus hasta principios del siglo XIX, en donde algunos economistas encuentran las herramientas matemáticas como una forma de abstraer y representar los hechos económicos y financieros. En la actualidad, los instrumentos matemáticos aparecen en el núcleo de todas las ramas de la economía moderna y de las finanzas. El avance conjunto de las conexiones ha sido innegable y cada día es más evidente y fructífero (Liern, 2013).

Ahora bien, respecto al interés de investigación, en el ámbito de la educación matemática, Blum y Niss (1991) concluían que existen suficientes conexiones, con distintos campos, adecuadas para la enseñanza de las matemáticas desde la escuela hasta la universidad. El problema de Bernoulli descrito anteriormente puede ser una forma de introducir el concepto de límite, de infinito o de función exponencial, tópicos relacionados al cálculo universitario. Ejemplos de este nivel escolar se pueden encontrar en el trabajo de Canós et al. (2001), y recientemente en Serrano (2024).

Ahora, en un nivel de primaria y secundaria la literatura reporta algunos trabajos (*v.g.* Liern, 2012, 2013; MEN, 2016; Alfonso, 2024) que dan cuenta de las numerosas conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas, que pueden usar para la enseñanza. En la **Figura 1** y la **Figura 2** se muestran dos ejemplos de ello. El primero sobre la aplicación del Impuesto al Valor Agregado (IVA), el cual puede resolverse mediante porcentajes; y el segundo sobre la inflación el cual podría solucionarse mediante sistemas de ecuaciones lineales.

Con lo antes descrito, es posible identificar conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas que permiten que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas pueda enriquecerse incluyendo fenómenos económicos y financieros.

Figura 1

Situación problema el IVA

En recientes días, el Gobierno Nacional de Colombia en cabeza del presidente firman el Decreto 682 del 2020 donde se reglamenta los días sin IVA a los siguientes productos: vestuario y complementarios, electrodomésticos, elementos deportivos y útiles escolares, sabiendo que, todos los productos tienen un IVA del 19%.

Productos	Valor con IVA
Balón de Futbol	$ 50000
Zapatos	$45000
Olla arrocera INOX	$150000

a) Si deseas comprar los productos que se muestran en la tabla (valor con IVA incluido) y la cajera te diera a elegir: no aplicar el IVA a la totalidad de los productos o no aplicar a cada producto por separado. ¿Qué decisión crees que te beneficiaría más? Justifica tu respuesta.

Nota. Tomado de (Alfonso, 2024)

Figura 2

Situación problema sobre la inflación

En el hogar de Daniela todos han aprendido la importancia de ahorrar, por eso cada miembro de la familia tiene su cuenta de ahorros. Por ejemplo, Daniela y Camila tienen, cada una, una cuenta en la que no pagan cuota de manejo por ser menores de 18 años.

Ellas decidieron ahorrar durante un año hasta alcanzar entre las dos $1.000.000, incluidos los intereses, con la finalidad de comprar un computador, que les será muy útil en la vida universitaria que pronto comenzarán.

Para establecer esta meta tuvieron en cuenta que Camila podría ahorrar un mayor monto que Daniela. En la cuenta de Daniela pagan el 7% y en la de Camila, el 6% de interés anual.

Pasado el año, las dos hermanas compararon los extractos bancarios para ver los intereses que habían generado las cuentas y notaron que el interés obtenido en ambas fue de $62.500.

a) ¿Cómo puedes determinar cuánto ahorró cada una? **Justifica tu respuesta**.

Nota. Tomado de (Alfonso, 2024)

2.2 La formación del profesor de matemáticas

La importancia del profesor en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es un hecho que está, en términos de Schoenfeld (2000), fuera de toda duda razonable. Lo anterior justifica por qué la formación de profesores es una línea en la que se ha centrado la educación matemática en los últimos años (Parada y Fiallo, 2022), y que está, como tema principal de investigación, en la agenda de la comunidad científica para la próxima década (Bakker et al., 2023).

La formación del profesor de matemáticas se puede entender, de acuerdo con Botello (2013) como "un proceso en el cual la persona que quiere ser profesor de matemáticas adquiere ciertos *saberes* tanto matemáticos como didácticos y pedagógicos, los cuales les permitirá tener una efectiva enseñanza de las matemáticas en su práctica" (p.42).

Algunas investigaciones han girado en torno a los conocimientos matemáticos, las concepciones, las actitudes y las creencias de los profesores. La interrelación de estos se puede entender desde la filosofía de Villoro (1996), que, para este caso particular, se explica porque las investigaciones muestran que tanto el saber, como las concepciones, actitudes y creencias[1] sobre la matemática, y su enseñanza, tiene incidencia directa en el aprendizaje de los estudiantes.

Por su parte, Thompson (1992) estudió las relaciones entre los conocimientos, las concepciones y las creencias de los profesores. Otras investigaciones (*v.g.* Fennema y Loef, 1992; Grossman et al., 2005; Llinares y Krainer, 2006; Fuentes, 2020), han estudiado, desde distintos

[1] El filósofo Luis Villoro, en su libro *Creer, Saber, Conocer,* entiende las creencias y las concepciones como producto racional que emerge de un conocimiento, y que con él integra un todo interrelacionado.

modelos teóricos, los conocimientos matemáticos que presentan los profesores en sus distintos escenarios de práctica.

Con esta idea de conocimiento, se pueden ubicar los anteriores trabajos como de corte cognitivo. Al respecto, Llinares (1997) y García y Llinares (1999) sostienen que dichas investigaciones pretenden dar cuenta de los conocimientos de los profesores, y cómo a partir de estos se dota de significado la actividad dentro del aula. La tesis subyacente es que para entender lo que sucede en la clase de matemáticas se debe comprender lo que el profesor conoce.

En lo particular, Hoffman y Even (2023) coinciden en que las concepciones de los profesores sobre la naturaleza de las matemáticas, en cuanto a sus conexiones con otros campos, inciden directamente en sus prácticas: si el profesor no concibe una imagen completa de las matemáticas en todas sus facetas, difícilmente aprovechará la riqueza de situaciones extramatemáticas para la enseñanza. En este sentido, se rescata que favorecer el conocimiento respecto a las conexiones es un eje importante en la formación de profesores.

Un modelo teórico que sigue estas ideas es el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), el cual tiene entre sus categorias la *fenomenología y sus aplicaciones*, que hace énfasis en el conocimiento del profesor sobre los contextos y situaciones (extramatemáticas) que cuando se integran contribuyen a la generación de conocimiento matemático. Todo lo anterior, permite concluir que si se asume la postura cognitiva las conexiones también deben hacer parte del conocimiento del profesor.

En contraparte con los modelos cognitivos, surgen otros modelos que se pueden entender como *modelos de reflexión*. Si bien se parte de los conocimientos del profesor, estos modelos buscan que el profesor al reflexionar sobre ellos los mejore y los potencie para favorecer su práctica. Esta idea ha sustentado diversas investigaciones (*v.g.* Cooney, 2001; Tzur, 2001; Flores, 2007) que han usado el pensamiento reflexivo como dimensión para analizar y caracterizar la práctica docente; y otras que han indagado en qué medida las experiencias de reflexión han impactado en sus conocimientos (matemáticos, pedagógicos, didácticos, etc.) y, por ende, en sus prácticas profesionales.

Por ejemplo, Smith-Senger (1999), Li et al. (2008), Kwon y Orrill (2008), Parada (2009, 2011), Velasco (2022) y Mejía (2022) muestran resultados positivos producto de la reflexión en profesores de matemáticas en servicio. Lo correspondiente hace Pineda (2018) y Echeverría (2022) con profesores de matemáticas en formación. Así, la reflexión por parte de los profesores en formación sobre su práctica (o futura práctica), es de gran importancia, ya que supone un hábito que puede desarrollar para guiar su actuación dentro del aula. Así mismo, es destacable como mediante grupos de trabajo, como una Comunidad de Práctica (CoP), por ejemplo, se favorecen estos procesos (Ponte, 2008).

Schoenfeld y Kilpatrick (2008) sostienen que la reflexión puede ser el principal mecanismo para mejorar la práctica docente; de ahí la necesidad de que dicho proceso sea habituado desde su formación inicial. Con esta idea concuerdan Morales y Font (2017) que además mencionan que la reflexión sobre la práctica es necesaria para comprender la compleja tarea de enseñar matemáticas y fortalecer así su desarrollo profesional. En este sentido, también se hace necesaria la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas en cuanto a sus conexiones, en especial, porque estas pueden favorecer la práctica docente.

Algunos autores han resaltado la importancia de que el profesor reflexione sobre la naturaleza de las matemáticas, en particular, sobre sus conexiones. Blum y Niss (1991) mencionan algunos argumentos que justifican por qué se deben favorecer las conexiones en la enseñanza de las matemáticas, algunos de estos argumentos se relacionan principalmente con el profesor. Entre ellos exponen los siguientes:

- *El argumento formativo:* las conexiones son medios adecuados para desarrollar competencias y actitudes positivas en los estudiantes, para fomentar la exploración, la creatividad y la resolución de problemas.
- *El argumento de la competencia crítica:* se debe preparar a los estudiantes para convivir como ciudadanos íntegros en una sociedad cambiante, en donde se puede evidenciar los usos reales de la matemática para solucionar problemas socialmente significativos. Las conexiones propiciadas en la matemática escolar, puede hacerle frente a lo anterior.
- *El argumento de utilidad:* las conexiones preparan al estudiante para utilizar las matemáticas en la resolución de problemas extramatemáticos relacionados con otras prácticas, dentro de la ciencia o fuera de ella.
- *El argumento de la imagen de las matemáticas:* el profesor debe construir en los estudiantes una imagen rica y completa de las matemáticas en todas sus facetas: como disciplina científica y como actividad social y cultural. Las conexiones constituyen un componente esencial de esta imagen, luego debería ocupar un lugar importante en la matemática escolar.
- *El argumento del fomento del aprendizaje de las matemáticas: las* conexiones son adecuadas para aprender, adquirir y conservar conceptos, nociones, métodos y resultados matemáticos; para que el estudiante piense y aplique técnicas matemáticas dentro y fuera de las matemáticas.

Es importante, de nuevo, favorecer la reflexión constante en los profesores de matemáticas en formación, dado que las conexiones construyen una enseñanza más abierta y exigente para ellos, se necesitan procesos formativos y de reflexión adicionales. Blum y Niss (1991) sostienen que muchos profesores no se sienten capaces de tratar las conexiones, dado que no las conocen o no tienen suficiente tiempo para prepararlas. Sin embargo, los autores proponen que para superar estos obstáculos se debe favorecer una formación inicial y continuada del profesor que integre conocimientos, habilidades, experiencias y en particular, actitudes para hacerle frente a las exigencias en la enseñanza de las matemáticas.

Förster (2011), se cuestionó sobre las creencias de los profesores que dificultan o promueven la integración de las conexiones en su práctica docente, y encontró que los profesores tienen una actitud positiva hacia las conexiones y quieren propiciarlas en el aula, pero ven distintas barreras que obstaculizan este objetivo. Algunas barreras concuerdan con las planteadas por Blum y Niss (1991), pero a estas se añaden que los profesores creen que las conexiones son complejas y por tanto solo son útiles para estudiantes con talento excepcional, o se presupone la dificultad de desarrollar un proceso evaluativo cuando se integran las conexiones a la actividad de enseñanza.

Según Förster (2011) algunos profesores tienen una actitud favorable hacia las conexiones porque creen que la enseñanza de las matemáticas debe preparar al estudiante para enfrentar los problemas de su futuro en los distintos contextos: el pensamiento lógico en matemáticas conduce al pensamiento lógico frente a los problemas de la vida cotidiana, sostiene el autor. Otros profesores consideran que las conexiones pueden motivar al estudiante, especialmente cuando se hacen aplicaciones de la matemática en situaciones sencillas de la realidad. Ellos consideran, por ejemplo, que es motivante para el estudiante resolver problemas propios de otras áreas como las finanzas con el cálculo de intereses, la física, etc.

No obstante, también hay profesores que defienden una postura de las matemáticas libres de contexto, y mencionan que las conexiones que usan solo se dan a través de ejemplos de otros campos para ilustrar contenidos matemáticos (unidireccional). Esta diversidad en los profesores, en cuanto a sus creencias sobre las conexiones, es un aspecto medular de investigación en educación matemática y justifica por qué sobre este aspecto es fundamental propiciar las reflexiones de los profesores en formación. Förster (2011) plantea que “un resultado importante de investigación es que las creencias de los profesores tienen un alto impacto en las creencias de los estudiantes, y los estudiantes de hoy son los profesores del mañana” (p.72). Por ello, la importancia de propiciar espacios de reflexión en profesores.

Beswick (2012) realiza una investigación con dos profesores de matemáticas; uno experimentado y otro nobel; indaga sobre sus creencias respecto a las matemáticas como disciplina científica y a la matemática escolar, y cómo estas creencias se vislumbran en sus prácticas. En particular, el autor cuestiona el conocimiento del profesor sobre la naturaleza de las matemáticas y concluye que es necesario un diálogo entre las matemáticas del matemático, y las matemáticas del profesor. En el estudio de Hoffman y Even (2023) se deduce que los matemáticos sí tienen en cuenta las conexiones (en las dos direcciones descritas), luego acercar al profesor de matemáticas a esa perspectiva posibilita que adquiera una visión más profunda sobre la naturaleza de las matemáticas, en particular sobre sus conexiones, y *a la postre* las integren en sus prácticas.

Kilpatrick (2008) menciona la importancia de que el profesor tenga una visión más panorámica de las matemáticas: el conocimiento del profesor debe estar por encima del de sus alumnos y para ello es necesario que conozca a profundidad el campo disciplinar de las matemáticas: sus elementos, sus conexiones con otros campos y su desarrollo histórico permite que pueda orientar a sus estudiantes. Con estas ideas coincide Malaspina (2023) que resalta la necesidad de que la formación de profesores integre bases adecuadas para trabajar con las conexiones que la autora entiende como “una transición de ida y vuelta entre la realidad y las matemáticas" (p.2). Así, las conexiones son "un campo ideal para formar profesores que tengan la capacidad de inducir a sus estudiantes a observar y aprender disfrutando de la estrecha relación entre las matemáticas y la realidad" (p.2).

Malaspina (2023) da unas sugerencias para avanzar en la formación de profesores que enseñan matemáticas a través de las conexiones y en cuanto a su formación inicial como continuada propone:

> Considerar con énfasis, la creación de problemas, estrechamente relacionados con la resolución de problemas, en todas las sesiones de aprendizaje de matemáticas, de modo que no sea una actividad aislada. Brindar cursos-taller de modelación matemática, teniendo como base las experiencias en creación de problemas, sobre todo por elaboración; y enriquecer la formación matemática y la intuición científica tratando temas y analizando situaciones que contribuyan a tener mayores elementos para identificar y resolver problemas de la realidad, vinculados con las ciencias físicas, biológicas, humanas, sociales, económicas, etc (p.8).

Son de gran importancia las conexiones en la matemática escolar y de que el profesor pueda aprovecharlas para la enseñanza y el aprendizaje. Esta tarea es posible mediante procesos de reflexión, en concordancia con lo propuesto por Parada (2011) y Parada y Fiallo (2022) que afirman que la formación de profesores, más que apuntar a que adquieran una serie de conocimientos, debe desarrollar un pensamiento reflexivo que rescate los conocimientos adquiridos o en adquisición por cada profesor en su formación para resolver problemas cognitivos, didácticos, epistemológicos, sociales, etc. que puedan emerger en su práctica profesional. Para este trabajo en particular, el proceso de reflexión es guiado por una actividad matemática suscitada por las conexiones con el contexto de la economía y las finanzas.

2.3 Conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas: estudios previos

En este apartado se muestran algunas experiencias de investigación cuyos ejes incluyen las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas. Sin embargo, no se encuentra suficiente literatura que haga énfasis en el rol del profesor, por lo tanto se espera que la presente investigación coadyuve en este aspecto.

En la propuesta de Liern (2012) titulada *Matemáticas y economía ventajas de la cooperación* se muestra, a través de ejemplos, que los conocimientos matemáticos pueden aplicarse en distintas situaciones de la economía y las finanzas, pero también se destaca que fenómenos propios de la economía y las finanzas han suscitados importantes avances en las matemáticas. Allí, se analizan los errores matemáticos que se registran al resolver los problemas, los cuales el profesor puede tener en cuenta para motivar las discusiones en clase de matemáticas.

Por su parte, Jimenez y Villaplana (2014) analizan la relación entre la educación financiera y las competencias matemáticas de los estudiantes a partir de un informe de las pruebas PISA. Concluyen que los fenómenos del contexto económico y financiero proporcionan un área de aplicación de las matemáticas, y además son útiles para disminuir el grado de abstracción de los objetos matemáticos.

El trabajo de Mancebón y Pérez (2014) muestra que la conformación de las habilidades financieras de los estudiantes está mediatizada por sus conocimientos matemáticos, lo que infiere la necesidad también de incluir fenómenos económicos y financieros en la enseñanza de las matemáticas pues coadyuvan en su aprendizaje.

Marín (2022) diseña un programa de Educación Económica y Financiera (EEF) para la formación del profesor de matemáticas, de acuerdo a las orientaciones del MEN (2014). La autora, a través de una investigación- acción hace una revisión documental, observaciones y encuestas a profesores, en donde se evidencia desconocimiento de ellos sobre la EEF. Para revertir dicha situación, plantea un programa de formación docente el cual implementa en 13 instituciones públicas y privadas de Colombia. Producto de este programa, los profesores de matemáticas reconocieron que se favoreció su práctica. Los resultados del trabajo de Marín (2022) muestran un camino en la formación de profesores en este aspecto.

En el contexto regional, se destaca la investigación de Alfonso (2024) en el cual se diseñan y valoran una secuencia de talleres para promover la actividad matemática por parte de estudiantes de educación básica secundaria en condiciones de vulnerabilidad, mediante el estudio de fenómenos financieros. Los resultados de esta investigación muestran que los profesores de matemáticas de colegios oficiales en el contexto regional presentan escaso o nulo conocimiento sobre los lineamientos de EEF; y las situaciones que emergen del contexto económico y financiero posibilitan distintos tipos de actividad matemática.

El trabajo de Alfonso (2024) es modular en esta investigación, dado que es el primer trabajo producto de la CoP (que se esbozará más adelante), y además se enfoca en cómo los fenómenos económicos y financieros permiten desarrollar actividad matemática, vía que como se mencionó está menos consolidada en profesores de matemáticas. Así mismo, en el marco de la CoP se ha desarrollado el trabajo de Serrano (2024), también centrado en las conexiones, y se encuentran otros trabajos en proceso que indagan sobre las creencias y las prácticas de los profesores sobre las conexiones con el contexto de la economía y las finanzas.

3. Marco teórico y conceptual

El presente estudio usa como referente teórico y metodológico el Modelo de Reflexión y Acción (RyA) de Parada (2011), el cual se enmarca en la Teoría Social de las Comunidades de Práctica (CoP) de Wenger (1998). Por lo anterior, en primera medida se esbozan los postulados de esta teoría y, seguidamente, se puntualizan los elementos del Modelo RyA adaptados a la investigación.

3.1 Comunidades de Práctica CoP

Para Wenger (1998) una CoP puede constituirse en un espacio en el que un grupo de personas que comparten las mismas prácticas se reúnen para compartir intereses y problemáticas sobre un tema determinado del que esperan construir aprendizajes emergentes de sus acciones e interacciones en un marco de participación, compromiso y responsabilidad.

El autor, postula que las CoP deben cumplir con tres premisas fundamentales: *compromiso mutuo* (el participante no solo tiene un interés individual, sino que quiere compartir y aportar a los demás miembros en función de los propósitos de la comunidad); empresa conjunta (existen metas y necesidades comunes relacionadas con el objetivo de la CoP que contribuirán en la negociación de significados) y *repertorio compartido* (existe un conjunto de rutinas, palabras, instrumentos, maneras de hacer, relatos, gestos, símbolos, géneros, acciones o conceptos que la comunidad ha producido o adoptado en el curso de su existencia y que han pasado a formar parte de su práctica).

Así mismo, según Wenger (1998, 2001) y Parada (2011), dentro de las CoP se posibilitan dinámicas que incluyen la participación, la negociación de significación y la participación. La *participación* en CoP de profesores de matemáticas es posible porque existe entre ellos interés por expresar sus ideas, relacionarse, y comunicarse activamente; esto da lugar a la *negociación de significados*, la cual se traduce en aprendizajes, que se dan cuando cada miembro de la CoP construye interpretaciones de un saber propio permeado por los saberes de los demás. Producto de esta negociación ocurre la *cosificación* en la cual se ponen en práctica aprendizajes construidos en la CoP.

Ahora bien, dado que la CoP que interpreta Parada (2011) es de educadores matemáticos, se utiliza el Modelo RyA el cual permite describir los aprendizajes (a través de significados negociados) que ocurren en el marco de esta comunidad. Por tanto, a continuación, se esbozan los elementos de este modelo y la forma en que se usó para el presente estudio.

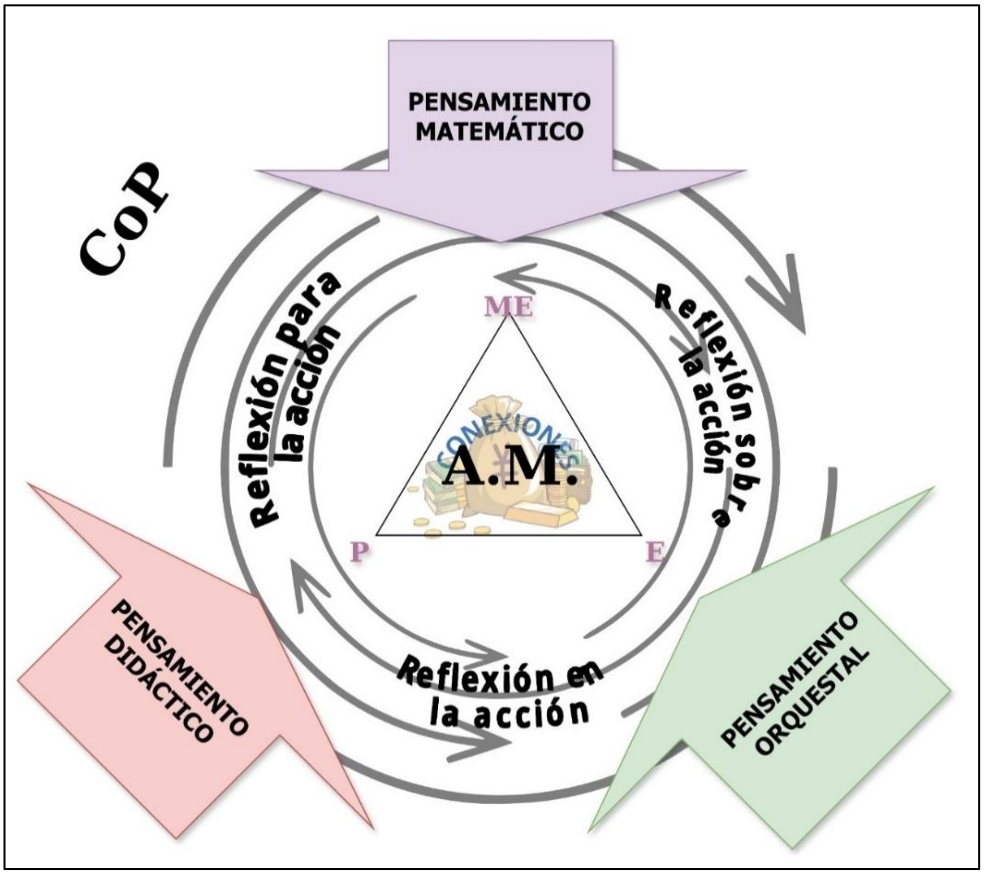
3.2 Elementos que conforman el Modelo RyA

El modelo RyA (Parada, 2011) se sustenta en la *reflexión* como un proceso que le permite al profesor analizar su práctica y la *acción* como la práctica real sobre la cual el profesor debe reflexionar constantemente para transformarla.

En la **Figura 3** se bosqueja el modelo adaptado al presente estudio, el cual se explicará de adentro hacia afuera. En el interior del modelo se observa una espiral en cuyo centro se encuentra el triángulo pedagógico (explicado por Saint-Onge, 1997), en el que interactúan: el profesor (P), el estudiante (E) y la matemática escolar (ME) alrededor de la actividad matemática (AM) .

Figura 3

El modelo RyA



Nota. Adaptado de Parada (2011)

3.2.1 Actividad matemática

En el modelo, la actividad matemática se traduce a *hacer matemáticas,* lo cual puede darse de tres formas: utilizando matemáticas conocidas; construyendo nuevas matemáticas emergentes de la resolución de problemas no rutinarios; y creando nuevos problemas. La autora del modelo retoma las ideas de Chevallard et al. (1997) y Treffers (1987) y sostiene que la actividad matemática se genera gracias a las interacciones dentro del triángulo pedagógico y que también se puede definir como un trabajo del pensamiento, el cual construye conceptos para resolver y plantear problemas, conceptos que se generalizan y unifican paulatinamente en ideas matemáticas que se articulan entre ellas.

En el estudio que aquí se reporta la actividad matemática fue denotada alrededor de las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas (nótese que detrás de A.M aparecen las conexiones con un gráfico que hace alusión a las disciplinas de la economía y las finanzas,(**Figura 3**).

La idea de conexión, como se mencionó, tiene sus raíces en lo planteado por el NCTM (2003) y ha sido estudiada por diversos autores en los últimos años (*v.g.* Evitts, 2004; Businskas, 2008; Dolores y García, 2017, 2018). Este estudio se recoge en la definición planteada por Dolores y García (2017) de conexión como "una relación de un concepto o modelo matemático con un problema en contexto no matemático, o viceversa; incluyendo las relaciones entre contenidos matemáticos con otras disciplinas curriculares y con situaciones de la vida real" (p.61).

Ahora bien, para entender la idea de conexión matemática con la economía y las finanzas es necesario aclarar que, dado el carácter educativo del presente estudio, los fenómenos de la economía y las finanzas se conceptualizan a partir de las directrices del MEN (2014) acotándolos al conjunto de fenómenos básicos y cercanos al estudiante que ocurren dentro de estas disciplinas. Según lo propuesto por el MEN, estos fenómenos se reconocen como ámbitos conceptuales: presupuesto, ahorro, inversión, deudas, tasas de interés, oferta y demanda, etc.

Es importante recalcar que en los trabajos dentro de CoP (como la de este estudio) la actividad matemática no se prevé completamente a *priori*, sino que emerge producto de los procesos de reflexión. Lo anterior se explicitará en el siguiente capítulo.

La actividad matemática sobre el cual reflexiona el profesor se da en tres momentos: antes de la clase (reflexión para la acción); durante la clase (reflexión en la acción); y posterior a la clase (reflexión sobre la acción). A estos momentos, Parada (2011), los denomina procesos de reflexión (que giran en torno a la actividad matemática, **Figura 3**), que se describen a continuación:

3.2.2 Los procesos de reflexión

Parada (2011) expresa que es importante promover en los profesores de matemáticas el proceso reflexivo, ya que permite analizar su práctica y actuación a partir de las dificultades y problemáticas que surgen en la experiencia. La autora del modelo, basada en las ideas de Dewey (1989) y Schön (1992) propone tres momentos de reflexión que se mencionaron previamente.

3.2.2.1 Reflexión para la acción. Es este momento, el profesor planea la actividad matemática: decide los objetos matemáticos a trabajar, los recursos y las formas para acercar dichos objetos a los estudiantes. Según Dewey (1989), en la reflexión para la acción se busca el análisis objetivo y crítico de los profesores sobre sus vivencias, las cuales están vinculadas con la reflexión que conlleva a la acción. En este momento también, el profesor prevé posibles obstáculos de aprendizaje y evalúa alternativas para superarlos. El presente estudio se enfoca en este proceso y de allí emergen los aprendizajes que se reportan en los resultados.

3.2.2.2 Reflexión en la acción. Durante este momento transcurre *in situ* la actividad matemática. Este proceso está integrado por elementos emocionales, creativos, etc.; como por elementos racionales que se interrelacionan para modificar, durante la práctica, la intervención del profesor. En términos de Schön (1983) las situaciones de reflexión en la acción surgen cuando hay situaciones inesperadas en las que el profesor debe poner a prueba sus conocimientos o desconocimientos. La reflexión en la acción del profesor de matemática se desarrolla en la interacción con sus estudiantes, en donde pone a prueba todos los recursos (matemáticos, pedagógicos, didácticos) que planeó para el desarrollo de la actividad matemática.

3.2.2.3 Reflexión sobre la acción. Este momento surge posterior a la actividad matemática suscitada por el profesor, allí se analiza si se lograron los objetivos de aprendizaje. Los elementos principales de este momento de reflexión son la criticidad y la valoración, ya que permite comprender las situaciones problemáticas generadas en la actividad matemática y reestructurar las estrategias de acción. En este momento, el profesor se concientiza de sus actuaciones espontáneas y evalúa si estas promovieron la actividad matemática esperada. La reflexión sobre la acción es un momento retrospectivo en donde el profesor reflexiona sobre su práctica, dialoga con la teoría, y eventualmente sopesa la teoría y la práctica en torno a su quehacer profesional.

El Modelo RyA sugiere que los procesos de reflexión movilizan el pensamiento reflexivo del profesor de matemáticas, mismo que se explica a continuación.

3.2.3 Pensamiento reflexivo del profesor de matemáticas

En el Modelo RyA, la reflexión se entiende de acuerdo con Dewey (1989), el cual afirma que la reflexión es un proceso de resolución de conflictos y dudas, que permite revisar y transformar la actuación. En los profesores de matemáticas, la reflexión empieza cuando en sus prácticas surgen problemas que no pueden resolver de inmediato, y con esto deben analizar su experiencia y eventualmente accionar sobre ella.

Dewey plantea que la reflexión es alimentada por la curiosidad que a la vez se alimenta de la inspiración. Cuando a la reflexión se le integra fuerza intelectual, surge lo que se denomina *pensamiento reflexivo*. El autor sostiene que este pensamiento posee tres características fundamentales:

- *Implica un encadenamiento ordenado de ideas:* ordenación consecuencial en la que cada una de ellas determina la siguiente como su resultado, mientras que cada resultado, a su vez, apunta y remite a las que le precedieron.
- *Tiene una finalidad:* apunta a una conclusión, la cual debe tener una justificación ajena a la cadena de ideas si ha de ser una conclusión válida o sólida.
- *Implica examen, análisis e investigación personal:* impulsa a la investigación para resolver problemas.

Parada (2011) propone que el pensamiento reflexivo del profesor de matemáticas puede abordarse desde tres pensamientos: *pensamiento matemático*, *pensamiento didáctico* y *pensamiento orquestal*.

En efecto, esta investigación da cuenta de que el profesor de matemáticas en formación al reflexionar sobre una actividad matemática suscitada por las conexiones con el contexto de la economía y las finanzas negocia significados, que se traducen en aprendizajes en los tres pensamientos que se describen a continuación (representados por las tres flechas del modelo, **Figura 3**).

3.2.3.1 Pensamiento matemático. Se parte de la idea de que, para enseñar, primero hay que comprender críticamente lo que se enseña (Shulman, 1987). Al respecto, numerosas investigaciones demuestran que un conocimiento amplio, profundo y flexible de los objetos matemáticos en la formación de profesores les permite propiciar un proceso de enseñanza efectivo en el aula. Aquí, se espera que el profesor además de comprender lo que enseña pueda hacerlo de distintas maneras: se debe reconocer la forma en cómo relacionar una idea matemática con otras ideas dentro y fuera de las matemáticas, en el caso de esta investigación reconocer las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas hace parte del pensamiento matemático del profesor.

En efecto, autores como Ball et al. (2001) y Grossman et al. (2005) postulan que el pensamiento matemático debe incluir conocimiento sobre el papel de la matemática en la cultura y en la sociedad. En particular, Grossman et al. (2005) menciona que los profesores necesitan tener una estructura sustantiva de los contenidos matemáticos para que logren hacer conexiones con otras disciplinas y situaciones, para lo cual el profesor requiere saber los significados y justificaciones detrás de los conceptos y procedimientos empleados en cada situación.

Es importante destacar que desde el Modelo RyA se habla de pensamiento matemático y no de conocimiento matemático, ya que no solo se busca que el profesor sea un experto en el área disciplinar, sino que la atención se centra en que le sea posible utilizar sus conocimientos para conducir la actividad matemática de los estudiantes. Como se ha mencionado, no se apunta a acumular conocimientos, sino al desarrollo de estos conocimientos en pro del aprendizaje de los estudiantes. Lo anterior, es posible mediante procesos de reflexión.

El presente estudio se enfoca en el pensamiento matemático, dado que solo se tomaron datos del proceso de reflexión para la acción, en donde el profesor planea actividad matemática y enfrenta sus conocimientos matemáticos, por lo tanto, el análisis dio evidencias de que este proceso generó aprendizajes lo suficientemente plausibles y significativos para reportar, en este pensamiento.

3.2.3.2 Pensamiento didáctico. Según Parada (2011), el pensamiento didáctico del profesor de matemáticas se desarrolla cuando este reflexiona sobre las diferentes maneras de acercar los conocimientos matemáticos a los estudiantes buscando las formas más útiles de representar los objetos matemáticos mediante analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, demostraciones, etc., que permitan hacerlos más compresibles. En consonancia con esta definición, como se ha justificado previamente, la economía y las finanzas pueden propiciar herramientas conceptuales, procedimentales, etc., para desarrollar actividad matemática.

Shulman (1987) sostiene que el pensamiento didáctico se puede entender como una intersección entre los conocimientos pedagógicos y los conocimientos disciplinares. Allí, se resalta la capacidad del profesor para poder transformar el saber sabio en el saber enseñado, a través de la planeación de clase, las adaptaciones de los contenidos matemáticos, las conexiones, etc. También interviene la habilidad del profesor para desarrollar una metodología de trabajo en clase y usar todos los elementos previstos en pro de propiciar la actividad matemática esperada.

3.2.3.3 Pensamiento orquestal. Parada (2011) manifiesta que el pensamiento orquestal del profesor de matemáticas se vislumbra en “la conducción de su clase, y en torno a las maneras como usa los recursos que ha seleccionado, de acuerdo con la actividad matemática que tiene prevista en sus estudiantes” (p.63). En este sentido, para caracterizar el pensamiento orquestal, se requiere ver cómo usan los diferentes recursos con los que cuenta en sus prácticas profesionales.

En esta investigación, el principal recurso de orquestación es el contexto de la economía y las finanzas, el cual presenta unas ventajas didácticas que deben usarse adecuadamente para promover actividad matemática. En este sentido, el pensamiento orquestal se entiende de acuerdo con el uso de la economía y las finanzas, el cual se vislumbra, como se justificó previamente, como un contexto fértil para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El desarrollo del pensamiento orquestal del profesor de matemáticas en formación podrá ser apoyado para que pueda reflexionar sobre cómo, cuándo y dónde usar un determinado recurso dependiendo de los objetivos planteados. No se trata de otorgarle al profesor diversos recursos, sino propiciar que este reflexione sobre su uso. Por lo anterior, respecto a este pensamiento, esta investigación no se centra únicamente en que el profesor acumule una serie de conocimientos económicos y financieros, sino que además reflexione sobre ellos para que valore su uso en las actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En este orden de ideas, atendiendo a la pregunta de investigación, el estudio se centra en describir los aprendizajes específicamente en el *pensamiento matemático*, los cuales se posibilitaron producto de la reflexión sobre una actividad matemática suscitada por las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas, con esto se espera describir aprendizajes construidos por profesores de matemáticas en formación que reflexionan sobre las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas.

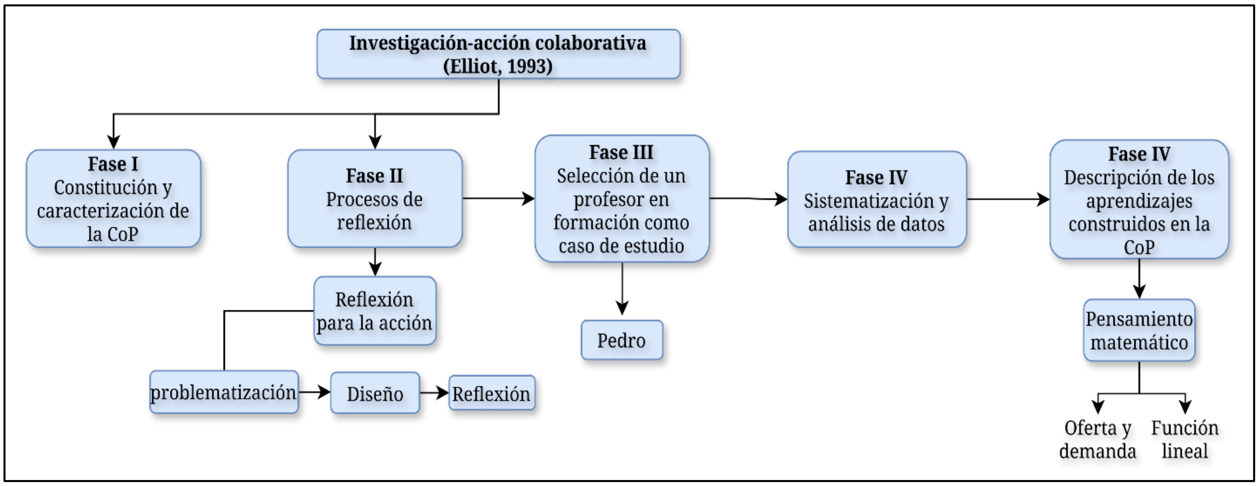
4. Metodología de la investigación

El presente trabajo se puede tipificar como de investigación acción-colaborativa. Según Elliot (1993) esta se relaciona directamente con situaciones que emergen de la actividad de los profesores (en este caso en formación) para interpretar su práctica (o futura práctica). Es colaborativa, dado que el autor y la directora de esta investigación toman el rol de moderadores y participantes de la CoP a lo largo del proceso de constitución y de los procesos de reflexión.

El proceso metodológico se organizó en cinco fases que se sintetizan en la **Figura 4,** y se describen a continuación.

Figura 4

Proceso metodológico de la investigación



4.1 Fase I. Constitución y caracterización de la CoP

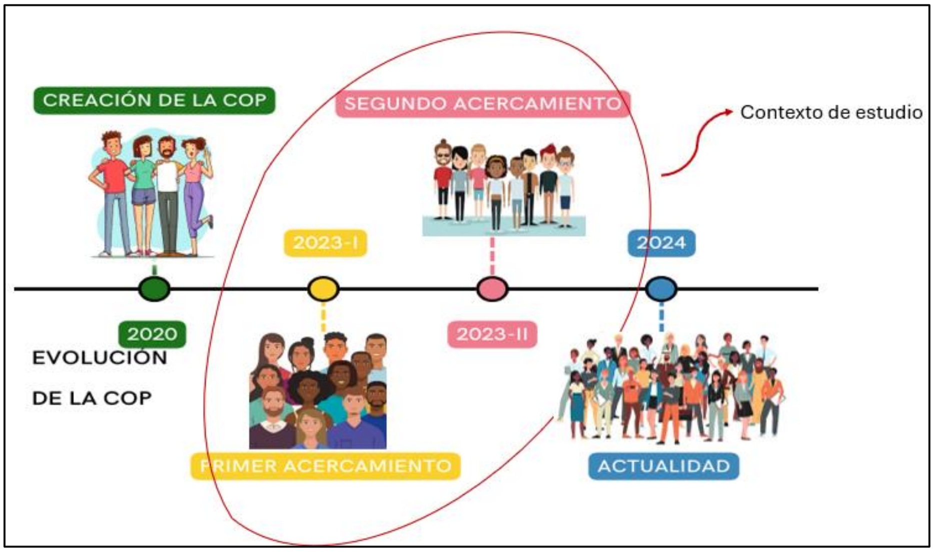
La CoP de la presente investigación ha transitado por distintos momentos en los que han ingresado diferentes actores para enriquecer la empresa conjunta, que se consolidó hacia el año 2020 reuniendo inicialmente a algunos investigadores (educadores matemáticos, matemáticos y economistas) de la Universidad Industrial de Santander y la Universidad de Valencia de España. En el año 2022 se integran participantes de la Universidad Nacional de Colombia y la Universidad de Antioquia.

La consolidación de esta CoP obedece a la preocupación por aprovechar las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas. En tal sentido, allí se empezó a reflexionar sobre estas conexiones y se plantearon caminos para aprovecharlas didácticamente para promover actividad matemática en el aula.

Seguidamente, la CoP acoge transitoriamente a un grupo de profesores de matemáticas en formación, que en ese momento cursaban una asignatura obligatoria del programa de Licenciatura en Matemáticas, denominada Seminario de Práctica, en dos semestres académicos consecutivos (semestre 2023-I y 2023-II), en donde se incluyen reflexiones sobre las conexiones matemáticas con la economía y las finanzas como objeto de problematización sobre el cual deben plantear un proyecto. En este contexto particular, se centra la presente investigación (**Figura 5**) y se describe en la fase ii.

Figura 5

Evolución de la CoP



Dado que algunos profesores de matemáticas en formación siguieron siendo participes de la CoP e incluso han desarrollado su proyecto de grado sobre el tema, la CoP se ha transformado, y ha desarrollado distintos productos de investigación que desde la Teoría de Wenger (1998) evidencian cosificaciones, las cuales permitieron que recibiera reconocimiento institucional de la Universidad Industrial de Santander como un semillero del Grupo de Investigación en Educación Matemática EDUMAT.

Todo lo anterior, permitió constituir una CoP a razón de que se cumplen con las tres premisas fundamentales que propone Wenger (1998), dado que:

i. los participantes están *comprometidos* tanto con la enseñanza de las matemáticas como con la formación en educación económica y financiera, y quieren aportar a estos objetivos desde sus posibilidades profesionales. La diversidad profesional de los miembros de esta CoP posibilita abordar el fenómeno de estudio (conexiones) desde los principales ejes (economía, finanzas, educación matemática), sin pretender reducir el fenómeno. En efecto, se han evidenciado aprendizajes gracias a la interacción entre los miembros del grupo, en el cual hay una participación de todos.

ii. Existe una *empresa conjunta,* que es por una parte favorecer la educación económica y financiera de la sociedad (que, como se ha expuesto a lo largo de este trabajo requiere de habilidades matemáticas), y a su vez, aprovechar los fenómenos de estas disciplinas para promover la actividad matemática en el aula. Esta *empresa conjunta* cobra mayor relevancia en la medida en que, a pesar de tener distintos perfiles profesionales, se persiguen los mismos objetivos.

iii. Se genera un *repertorio compartido* alrededor de: la educación matemática, la economía y las finanzas y las matemáticas mismas. En efecto, la misma CoP ha posibilitado que lo miembros con perfiles profesionales diferentes adquieran bases del argot de otros, todo en aras de comprender y plantear alternativas para los fenómenos que se discuten alrededor de la empresa conjunta.

Las dinámicas de la CoP posibilitaron procesos de reflexión por parte de los profesores de matemáticas en formación sobre las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas. Dichos procesos se esbozan en el siguiente apartado.

4.2 Fase II. Procesos de reflexión

Los procesos de reflexión en el contexto de estudio corresponden a las aproximaciones, en dos semestres consecutivos de intervención, en el un curso de *Seminario de Práctica* el cual tiene por objetivo "ofrecer desde la teoría y la práctica- fundamentos para comprender el proceso de investigación en educación matemática, así como el papel de la teoría en la práctica pedagógica." (Escuela de Matemáticas, 2017, p.413).

En ambas aproximaciones la metodología fue análoga, y participaron en total 14 profesores de matemáticas en formación (7 en cada una). Los profesores en formación fueron estudiando teóricamente las etapas y teorías de la metodología de investigación en educación matemática y paralelamente desarrollaron un proyecto de clase. Las dinámicas en el primer acercamiento (semestre 2023-I) estuvieron encauzadas por el cronograma que se detalla en la **Tabla 1**, siendo este análogo al del segundo acercamiento (2023-II).

Tabla 1

Cronograma del seminario de práctica

Clase	Temas, textos y actividades	Compromiso
1	Presentación del curso Discusión sobre lo que se entiende por Educación Matemática	Lectura Kilpatrick, J. (1998).
	Kilpatrick, J. (1998). La investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En Kilpatrick, J., Gómez, P. Y Rico, L.(Eds.). Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historial. Bogotá: una empresa docente. pp. 2-18	Elaboración de cartelera con mapa conceptual del texto

2	Exposición mapas conceptuales Kilpatrick	Análisis de tesis que ejemplifique los tipos de investigación vista (vídeo), y elección de posible tema para el proyecto del curso.
	Schoenfeld, A. H. (2000). Propósitos y métodos de investigación en educación matemática. Notices of the AMS, Volume 47, Number 6; June/July 2000. [Traducción y comentarios de Juan D. Godino]	
3	Metodología cuantitativa	Lectura y resumen comentado Hoffmann, A., & Even, R. (2023). The mutual contribution between mathematics and other fields: Mathematicians' and teachers' views. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 55, 909-921. https://doi.org/10.1007/s11858023-01496-1
	Metodología cualitativa	
	Socialización de vídeos	
4	Investigación en el aula	Lectura y mapa conceptual Liern, V. (2012). Matemáticas y economía. Ventajas de la cooperación. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, Badajoz
	Diseño de experimento	
	Socialización artículo Hoffmann & Even (2023)	
5	¿Cómo se concibe una idea o tema de investigación? ¿cómo plantear un título de proyecto? ¿cómo se usan los antecedentes de una investigación?	Análisis de talleres de Alfonso (2024)
	¿Cómo plantear una pregunta de investigación?¿Cómo plantear un objetivo de investigación?	
	Discusión de artículo de Liern (2012)	
6	¿Qué es un marco teórico y como se selecciona?	Plantear una idea para el proyecto de clase.
	Exposición de cada estudiante sobre su tema y problema de investigación	
7	¿Qué es un marco conceptual y como se construye?	Lectura sugerida por el expositor para participar en clase. Preparar actividad práctica del proyecto según orientaciones del profesor de acuerdo con cada etapa del proceso.
	¿Qué es un marco referencial, cómo y cuándo se usa?	
	Exposición de cada estudiante sobre su pregunta y objetivo	
8	Citación y referencias bibliográficas- Normas APA	
9	¿Cómo se plantea el proceso metodológico de una investigación?	
	¿Cuáles son los datos de una investigación cualitativa, cómo se recogen y sistematizan?	
	Estructura del proyecto hasta el marco teórico/conceptual o referencial, según se haya decidido	
10	Análisis de datos cuantitativos	
	Análisis de datos cualitativos	
	Exposición de cada estudiante sobre su proceso metodológico y recolección de datos	

11	Asesoría individual- desarrollo metodológico y recolección de datos.
12	
13	Exposición de cada estudiante sobre su recolección de datos.
	Lineamientos para el reporte de investigación y elementos para una sustentación
14	Análisis de datos cuantitativos
	Análisis de datos cualitativos
	Exposición de cada estudiante sobre su proceso metodológico y recolección de datos
15	Exposición de cada estudiante sobre su análisis de datos.
	Presentación de experiencias de investigación del semestre anterior
16	Entrega del reporte de resultados según lineamientos.
17	Minicoloquio-sustentación oral del proyecto de clase

Las dinámicas en ambas aproximaciones posibilitaron reflexionar y problematizar sobre las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas, abordando dichas conexiones como objeto de estudio en la formación integral de los futuros profesores. Para ello, como se puede ver en la **Tabla 1** el programa del curso se organizó mediante: exposiciones sobre investigación en educación matemática, lecturas y actividades de producción de textos, y análisis de talleres específicamente construidos por Alfonso (2024) para el estudio de temas de economía y finanzas.

Los talleres de Alfonso (2024) fueron convenientes dado que suponía un buen punto de partida para que los profesores de matemáticas en formación fueran pensando las ideas de su proyecto de clase. Se contó con un total de ocho talleres (**Tabla 2**), cada uno enmarcado dentro de un eje temático (economía o finanzas) y ámbito conceptual, de acuerdo con las cartillas de orientación para la educación económica y financiera del MEN (2016).

Tabla 2

Talleres para analizar

Taller	Eje temático	Ámbito conceptual	Propósito
1. Cálculo de IVA y descuentos	Finanzas	Conceptos financieros	Identificar los conceptos financieros presentes al realizar pagos (descuentos, IVA) y hacer uso de las propiedades y operaciones de los números racionales.
2. Presupuesto y manejo de datos.		Presupuesto	Entender la importancia de elaborar presupuestos y organizar la información financiera de una situación a través de matrices.
3. Planeando mi futuro financiero (metas de ahorro).		Ahorro e Inversión	Comprender de qué manera una herramienta financiera como un plan de ahorro ayuda a la administración del dinero y al cumplimiento de metas. También podrá aplicar la solución de sistemas de ecuaciones lineales a situaciones relacionadas con el establecimiento de metas de ahorro.
4. Crédito		Manejo de las deudas	Identificar las características de un préstamo utilizando el interés simple, expresado mediante una progresión aritmética. Además, entenderá cómo otorga créditos el sistema financiero y bajo cuáles circunstancias es apropiado que una persona se endeude.
5. Medios de pago		Sistemas financieros	Interpretar información que le permita identificar algunos beneficios de diferentes medios de pago como el efectivo y las tarjetas débito y crédito, realizando operaciones con números racionales.
6. Costo del descuento.	Economía	Conceptos claves de Economía	Identificar el costo de oportunidad de tomar una decisión, considerando las alternativas a las cuales se renuncia haciendo operaciones con números racionales.
7. ¿Cómo me afecta la inflación?		Indicadores económicos	Comprender el fenómeno de la inflación y sus efectos en el presupuesto de las familias, a partir del contexto de situaciones reales y del análisis de diferentes datos, haciendo operaciones con números racionales.
8. Globalización		Desarrollo y políticas económicas	Analizar algunos efectos del fenómeno de la globalización, elaborará conclusiones sobre la forma como estos se reflejan en su contexto próximo y planteará un problema de investigación.

Para el análisis de taller se les sugirió a los profesores en formación responder a las preguntas problematizadoras del taller, identificar el objeto económico y financiero que interviene en la resolución del problema, identificar los objetos matemáticos inmersos, discutir sobre las fortalezas y dificultades al resolver el taller, explicar las fuentes a las que tuvieron que acudir para comprender los fenómenos. Cada profesor analizó un taller y posteriormente se socializaron los análisis en la CoP.

Además, como fuente de datos para responder a la pregunta de investigación se desarrollaron proyectos de clase orientados a la problematización de la enseñanza de las matemáticas haciendo usos de fenomenologías del contexto de la economía y/o de las finanzas, específicamente, el trabajo se enfocó en la *reflexión para la acción* (**p. 31**), en el cual el profesor planea la actividad matemática, decide los objetos matemáticos a trabajar, y los recursos y las formas para acercar dichos objetos a los estudiantes.

El proyecto de clase se desarrolló a lo largo del curso y los profesores en formación podían escoger el tema de su proyecto atendiendo a que abordara un fenómeno básico de la economía y las finanzas y un objeto matemático. Como se observa en la **Tabla 3** se les proporcionó literatura sobre el tema, y desde el inicio del semestre se cargó en la plataforma virtual del curso (Moodle-que hace parte de las herramientas institucionales) una serie de documentos, en particular las directrices del proyecto *Mi plan, mi vida, mi futuro* propuesto por el MEN (2014).

Se presentaron algunos avances correspondientes a cada una de las partes del proceso de investigación los cuales fueron acompañados por la profesora titular del curso y el autor de esta investigación en asesorías individuales (como moderadores de la CoP). Cada avance, como dinámica de participación se socializó en el curso, y se realizaron las retroalimentaciones pertinentes que permitieron la negociación de significados.

Posterior a los avances, cada profesor presentó un artículo final que se constituye en parte de los datos de esta investigación, que en términos de Wenger (1998) se conoce como cosificación. Este fue socializado mediante un minicoloquio en la CoP, en donde los moderadores retroalimentaron las exposiciones y dieron por finalizado el curso.

Al finalizar las aproximaciones se realizó una encuesta que inicialmente tuvo como objetivo valorar la pertinencia del proceso de reflexión sobre las conexiones; pero que también sirvió seleccionar el caso de estudio, y para corroborar, refutar o clarificar algunos significados negociados de este. La encuesta se realizó mediante un cuestionario en formulario de Google. (**Apéndice B**) , que se codifica en la **Tabla 4**.

4.3 Fase III. Selección de un profesor en formación como caso de estudio

Para el reporte de resultados se utiliza como técnica el caso de estudio único (Stake, 1994), siendo este un caso representativo de la CoP entre los profesores de matemáticas en formación. Con el ánimo de que la selección fuera lo más objetiva posible se establecieron unos *criterios a priori* que se resumen en la **Tabla 3**.

Tabla 3

Criterios para la selección del caso de estudio

Criterio		Instrumento	Indicador
1.	Valoración del artículo emergente del proyecto de clase.	Rúbrica de valoración del artículo final -lineamientos	Desempeño sobresaliente
2.	Participación en las dinámicas de la CoP	Evaluación del componente "participación del curso"	Desempeño sobresaliente
3.	Posibles aprendizajes evidenciados	Observación participante por parte de los moderadores de la CoP (en	Sí/No… se prevén algunos aprendizajes que permitan responder a la pregunta de investigación.

		la clase y en las asesorías individuales)	
4.	Disposición para participar en la investigación	Entrevista en las sesiones individuales	Sí/No… tiene disposición para participar como sujeto de estudio en la investigación.

En particular, se seleccionó a Pedro (seudónimo), un profesor de matemáticas en formación que en su proyecto de clase reflexionó sobre las conexiones entre fenómenos asociados a la oferta y demanda y la función lineal. Este profesor participó en la segunda aproximación y cumplió con los cuatro criterios de selección esbozados en la **Tabla 3**, en la medida en que:

1. El artículo, que emergió de su proyecto de clase (el cual fue de diseño curricular), fue sobresaliente, tanto así que la profesora titular del curso (también moderadora de la CoP) destacó que Pedro:
    a) Se empeñó en realizar el proyecto de clase.
    b) Fundamentó muy bien el fenómeno que problematizó a través de una revisión bibliográfica profunda.
    c) Usó un marco teórico que permitió responder a la pregunta de investigación.
    d) Declaró algunas perspectivas de investigación que abren camino para darle continuidad al trabajo realizado.
2. Pedro desde el principio del curso se destacó por su participación en las dinámicas de la CoP, mostró una alta disciplina y compromiso con el curso y siempre se mostró interesado por la investigación que aquí se reporta.
3. Sí se prevén algunos aprendizajes en el pensamiento reflexivo de Pedro que permiten responder a la pregunta de la presente investigación. Los investigadores notaron aprendizajes en el pensamiento reflexivo de este profesor en formación, que él mismo reconoce cuando se le preguntó en la encuesta.

Encuestador	¿Cree que el uso del contexto económico y financiero dio aportes a su conocimiento matemático, didáctico u orquestal?
Pedro	Sí, por el hecho de realizar un taller que muestre una conexión amplia entre las matemáticas y la economía y finanzas me favorece a mí y a los estudiantes en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Resalto la importancia que tiene la contextualización de problemas hacia los estudiantes

4. Posterior a la culminación del curso, Pedro ha seguido siendo miembro de la CoP como integrante del Semillero de investigación. Él siempre manifestó interés por la participación en el presente estudio y por la empresa conjunta, al respecto cuando se le pregunta lo siguiente:

Encuestador	¿Considera pertinente el uso de fenómenos económicos y financieros para enriquecer la actividad matemática en el aula?
Pedro	Claro, ya que de esta manera se permite ver la matemática como una herramienta de modelación, además de mostrar estos fenómenos como algo tangible y de fácil comprensión a los estudiantes, es decir, esto permite que conozcan el entorno que los rodea, pero con una herramienta fundamental como lo es la matemática

Pedro, en el momento de cursar el seminario de práctica, se encontraba en el sexto nivel académico del programa de Licenciatura en Matemáticas, caracterizándose por ser crítico y reflexivo. Él ha tenido un desempeño sobresaliente especialmente en el componente matemático del programa académico, y es reconocido tanto como un *buen matemático.* Así mismo, el hecho de que su proyecto de clase haya sido de diseño curricular permite ver con mayor claridad los significados que fue negociando. Por todo lo antes dicho, se considera un caso de estudio pertinente para el reporte de resultados.

4.4 Fase IV. Sistematización y análisis de datos

Producto de los procesos de reflexión (descritos en la fase ii), toda la información que proporcionaron los profesores en formación estuvo resguardada en el aula virtual del curso (Moodle, que hace parte de las herramientas institucionales), luego fue necesario un primer rastreo de información precisamente para seleccionar adecuadamente el caso de estudio (como se esboza en la fase iii).

Teniendo seleccionado a Pedro como caso de estudio se procedió a la sistematización de la información en búsqueda de datos que respondieran a la pregunta de investigación. Para tal fin, se utilizó el método de análisis propuesto por Schettini y Cortazzo (2015)[2], tomando como base las categorías preestablecidas del Modelo RyA (Pensamiento Matemático, Pensamiento Didáctico y Pensamiento Orquestal).

En este sentido, un segundo rastreo de información consistió en una revisión general de los documentos producto de Pedro (avances del proyecto, taller, artículo, etc), en el cual se resaltaron con colores algunas transcripciones que presentaban un posible dato: se resaltó con amarillo, azul y rojo posibles datos en el pensamiento matemático, didáctico y orquestal, respectivamente.

Posterior a esto, se trabajó individualmente con cada categoría preestablecida del Modelo RyA, extrayendo todos los extractos resaltados con el color correspondiente y profundizando en cada línea para encontrar datos que evidenciaran aprendizajes dentro de cada pensamiento. De lo anterior, se construyeron unos descriptores preliminares de aprendizaje por cada pensamiento, y el trabajo consistió en encontrar evidencias que corroboraran dichos aprendizajes.

No obstante, debido a que el trabajo se enfocó en la *reflexión para la acción*, subsecuentemente la mayoría de los datos para validar los aprendizajes de Pedro apuntaron al pensamiento matemático, que hicieron que estos fueron lo suficientemente plausibles para ser documentados, por tanto, se decidió centrar el reporte de resultados en los aprendizajes en el pensamiento matemático, estableciendo como categorías de resultados los tres aprendizajes en este

[2] Este método se utiliza para el análisis de datos cualitativos en el cual se tienen a priori pseudocategorías que posteriormente se refinan en función de los resultados empíricos y se convierten en las categorías de resultados.

pensamiento; y esbozando los aprendizajes previsibles en el pensamiento didáctico y orquestal como perspectivas de investigación (**pág 84**).

4.5 Fase V. Descripción de los aprendizajes construidos en la CoP

La descripción de aprendizajes construidos por profesores de matemáticas en formación que reflexionan sobre las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas para promover actividad matemática en el aula se realiza a través del caso de estudio que se seleccionó en la fase iii, estableciendo como categorías de resultados los aprendizajes específicos en el pensamiento matemático, por las razones que se esbozaron en el apartado anterior.

Como se mencionó, Pedro desarrolló un proyecto de diseño curricular que le permitió reflexionar sobre las conexiones entre la función lineal (como objeto matemático) y la oferta y demanda (como fenómeno económico). En efecto, en el estudio que hizo este profesor de formación sobre la oferta y la demanda evidenció que este fenómeno da lugar a la función lineal.

Si bien no está al alcance de este trabajo profundizar en términos rigurosos en la idea de oferta y demanda, sí es importante definir algunos conceptos básicos para interpretar los resultados del presente estudio (que se presentan en el siguiente capítulo). En efecto, la oferta y la demanda explica cómo la cantidad de productos que los vendedores están dispuestos a ofrecer (oferta) y la cantidad que los compradores desean adquirir (demanda) dependen del precio del producto. Explícitamente, se pueden entender por las siguientes leyes:

- *Ley de Demanda:* manteniendo todo lo demás constante, si el precio de un bien aumenta, la cantidad demandada de ese bien disminuye. Esto es: cuando un producto es más caro menos personas están dispuestas a comprarlo.

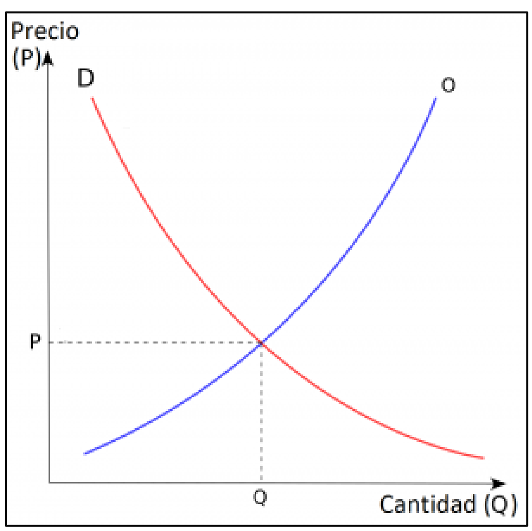
- *Ley de Oferta:* si todo lo demás es constante, si el precio de un bien aumenta, la cantidad ofrecida de ese bien también aumenta. Lo anterior se debe a que cuanto mayor es el precio más rentable es para los productores vender ese bien.

La oferta y la demanda son dos aspectos básicos para el funcionamiento del mercado (Sevilla, 2024). Si no hay oferta los consumidores no pueden comprar, y si no hay demanda los productores no fabricarán lo que no pueden vender. Estas funciones están conectadas a través del precio: un precio más alto reduce la demanda y aumenta la oferta, mientras que un precio más bajo aumenta la demanda y reduce la oferta; todo esto en un libre mercado.

Todo lo anterior se puede ver gráficamente en la **Figura 6** en donde la curva roja hace referencia a la función demanda $D(p)$, y la curva azul a la función oferta $O(p)$. El punto donde se intersecan se llama precio de equilibrio del mercado.

Figura 6

Curvas de oferta y demanda



Nota. Tomado de (Sevilla, 2024)

Ahora bien, es importante acotar todo lo antes dicho al caso en que el comportamiento de la oferta y la demanda es lineal. Es claro que usualmente se habla de *curva* de oferta y demanda, sin embargo, para esta investigación solo se consideró el caso lineal, esto sucede siempre que:

i. Se presuponga la oferta y la demanda en función del precio de manera lineal (ya que el precio suele ser una variable que depende del tiempo) o
ii. El precio también depende de manera lineal del tiempo.

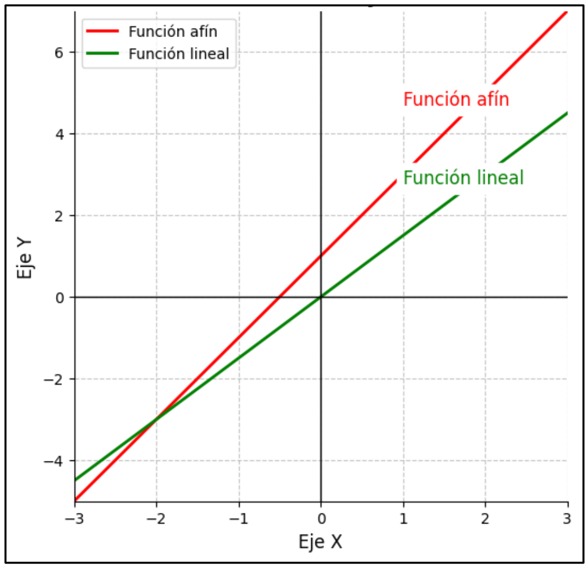
Si el lector desea profundizar en lo anterior, puede consultar el **Apéndice A**. De allí se deduce por qué es posible el caso lineal, como se trabajó en la presente investigación.

Lo anterior, aunque no es usual, hace que la oferta y la demanda haya dado lugar al objeto matemático de función lineal (o función afín)[3]. Sobre este objeto matemático hay numerosos estados del arte e investigaciones (*v.g.* Posada y Villa, 2006; Ibarra y Moreno, 2010; Campeón-Becerra et al.,2018; Barajas et al., 2018; Segura, 2024, etc.) cuyos elementos se consideran para la discusión de resultados (**pág 54**). Por lo pronto, es necesario decir que esta función se puede representar algebraicamente de la forma $f(x) = mx+b$ *donde* m representa la pendiente y $b = 0$; donde hay también una relación de proporcionalidad directa entre x y $f(x)$. Cuando $b \neq 0$, se habla de una función afín (**Figura 7**). Ambas cumplen que la variable dependiente cambia con respecto a la variable independiente de manera constante (es decir, $\frac{df(x)}{dx} = k$).

[3] En general para no profundizar en la diferencia entre función lineal y afín, esto se refiere específicamente a una función polinomial de grado 1.

Figura 7

Función lineal y función afín



Ahora bien, teniendo algunos elementos claros sobre los objetos matemáticos y económicos que abordó Pedro, en la **Tabla 4** se particularizan sus productos (fuentes de datos), que se codifican para el reporte de resultados. Como se mencionó, en el marco de la CoP se llevó el proceso de *reflexión para la acción*, dividido en: problematización, diseño, y reflexión.

Tabla 4

Fuente de datos de Pedro

Reflexión para la Acción	Instrumento/Producto	Código	Descripción
Problematización	Avance 1	A1-# de transcripción	En este avance Pedro problematizó sobre el fenómeno de estudio (función lineal y oferta y demanda) y para ello planteó la pregunta de investigación y el objetivo.
	Avance 2	A2-# de transcripción	En este avance el profesor en formación precisa lo expuesto en el avance anterior, propone un marco teórico, y una metodología que le permite dar paso al diseño del taller

Diseño	Taller (**Apéndice C**)	T-# de transcripción	El taller se logró gracias a la socialización de las ideas de actividades y preguntas, en el curso, donde recibió retroalimentaciones de los orientadores y de los demás profesores en formación.
Reflexión	Artículo	F-# de transcripción	En este documento Pedro reporta los resultados de investigación de su proyecto el cual tuvo como objetivo de investigación diseñar un taller para introducir las nociones de oferta y demanda mediante funciones lineales en estudiantes de Educación Media.
	Entrevista	E- # de transcripción	Se aplicó al finalizar los procesos de reflexión, las preguntas se encuentran en el **Apéndice B**, las cuales Pedro respondió mediante el formulario de Google.

Teniendo en cuenta lo descrito teóricamente sobre el pensamiento matemático, y siguiendo el proceso de análisis esbozado en la fase iv se establecieron unos significados negociados por Pedro, en términos de aprendizajes dentro del pensamiento matemático (**Tabla 5**) que fungen como categorías de resultados.

Tabla 5

Aprendizajes de Pedro (categorías de resultados)

	PENSAMIENTO MATEMÁTICO DEL PROFESOR EN FORMACIÓN
Aprendizajes	Usar la función lineal para modelar fenómenos asociados a la oferta y la demanda.
	Reconocer la relación de proporcionalidad directa en la función lineal, distinguiéndola de la función afín.
	Comprender el significado de la variable en fenómenos de oferta y demanda rescatando la idea de dependencia, variación y funcionalidad.

En efecto, estas categorías resultaron de la triangulación de los datos, la literatura especializada y la propia interpretación del investigador, por lo tanto, en el siguiente capítulo se muestra la discusión respecto a estas, las cuales permiten responder a la pregunta de investigación del presente estudio: *¿Qué aprendizajes construyen profesores de matemáticas en formación cuando reflexionan sobre las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas para promover actividad matemática en el aula?*

5. Resultados: aprendizajes en el Pensamiento Matemático de Pedro

El pensamiento matemático se puede resumir en un conocimiento amplio, profundo y flexible de los objetos matemáticos de estudio, sus conexiones y su papel en la cultura y la sociedad. Producto del análisis de datos del caso de estudio (Pedro), se identificaron tres significados por parte del investigador que fue negociando este profesor en la CoP y que, finalmente, se tradujeron en aprendizajes dentro del pensamiento matemático, a saber:

- Uso de la función lineal para modelar fenómenos asociados a la oferta y la demanda;
- Reconocimiento de la relación de proporcionalidad directa de la función lineal, que la hace distinguir de la función afín; y
- Comprensión del significado de la variable en fenómenos de oferta y demanda rescatando la idea de dependencia, variación y funcionalidad.

Como se mencionó a lo largo de esta investigación, estos aprendizajes fueron movilizados al reflexionar sobre una actividad matemática suscitada por las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas. A continuación, se discute cada uno de estos, en términos de categorías para responder a la pregunta de investigación.

5.1 Función lineal vista en fenómenos de oferta y demanda: acepción desde la modelación

Parte del pensamiento matemático de Pedro se reflejó en la forma de hacer conexiones con fenómenos de otras disciplinas, reconociendo que la función lineal se relaciona con ideas extramatemáticas, como los fenómenos de oferta y demanda. Al parecer, Pedro entendió esta idea rápidamente porque empezó a participar en la CoP expresando su concepción que asumió de Función Lineal, tal como lo exhibe en el *avance 1*, así:

[A1-1] Pedro	Según Uzcátegui (2019) la función es una relación especial e importante que se da entre dos conjuntos. Esta se define como: Una relación R entre dos conjuntos A y B se dice que es una función de A en B si satisface la siguiente condición: Para todo a ∈ A existe un único b ∈ B tal que (a, b) ∈ R (Uzcátegui, 2019, p. 175). Para Zill y Wright (2011) la función entre dos conjuntos es una ley de correspondencia que asocia o asigna miembros o elementos de un conjunto al otro; se define de la siguiente manera: “Una función de un conjunto X en un conjunto Y es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x en X exactamente un elemento y en Y” (Zill y Wright, 2019, p. 2).

Esta definición la particularizó en el *avance 2*, al de función lineal, esta última un poco más flexible pero cargada aún de formalismo matemático.

[A2-1] Pedro	Las funciones lineales en matemáticas son muy importantes para modelar fenómenos de la cotidianidad; estas hacen parte del conjunto de las funciones polinómicas. Una función lineal es una relación de linealidad entre dos variables x e y; representada de la forma $y = ax + b$, donde a y b son constantes; siendo a la pendiente. A esta función se le puede representar gráficamente como una recta.

Es importante destacar que el concepto de función lineal que fue asumiendo Pedro fue direccionado cada vez más a entenderla como una forma de modelar el fenómeno de oferta y demanda. Al respecto, Pedro parecía adoptar una definición orientada a la modelación de la función lineal que se pudo resumir en que:

[A2-2] Pedro	En resumen, las funciones lineales son un instrumento que permite modelar de manera lineal los fenómenos económicos como lo son la oferta y la demanda.

Los anteriores extractos de las evidencias de Pedro ([A1-1] y [A2-1]), nos mostraron un rápido viraje de una conceptualización conjuntista de la función, a una idea dinámica orientada a su uso como modelo de fenómenos de oferta y demanda. Pedro parecía ser consciente de que, aproximándose un contexto específico de la realidad, en este caso el económico, algunas conceptualizaciones del objeto matemático tienen, en términos de Moreno-Armella y Brady (2018), mayor significado.

En efecto, en el *artículo final*, Pedro precisó que:

[F-1] Pedro	Las funciones lineales son una de las herramientas más importantes para modelar fenómenos de la cotidianidad. Manfredi (2008) afirma que en economía las funciones lineales permiten representar los modelos económicos simples, donde solo entran en juego dos variables: tal caso sucede en la representación de la oferta y la demanda.

En [F-1] Pedro mostró que la definición que adoptó del objeto matemático es la más consecuente con el fenómeno de la realidad trabajado, reconociendo así la conexión que existe entre un objeto matemático y una idea de la economía y las finanzas. Lo anterior, permitió concluir que él al adentrarse en un contexto de la realidad y reconocer el uso de la función lineal como modelo de oferta y demanda, logró ampliar la concepción de función lineal a lo largo de su participación en la CoP.

Es posible que las conexiones que estableció Pedro con el contexto de la economía y las finanzas permitieron un conocimiento más amplio y flexible de la función lineal. Lo anterior coincide las ideas de Campeón-Becerra et al. (2018) quienes afirman que trabajar con situaciones relacionadas con el contexto real al realizar modelación permite una mejor comprensión de los objetos matemáticos.

En consonancia con lo anterior, cuando se le preguntó a Pedro en la entrevista sobre si consideraba pertinente el uso de fenómenos económicos y financieros para enriquecer la actividad matemática en el aula, sostuvo que:

[E-1] Pedro	[sí] Claro, ya que de esta manera se permite ver la matemática como una herramienta de modelación, además de mostrar estos fenómenos como algo tangible y de fácil comprensión a los estudiantes, es decir, esto permite que conozcan el entorno que los rodea, pero con una herramienta fundamental como lo es la matemática.

En efecto, lo anterior se pudo corroborar al profundizar en las actividades y las preguntas que propuso Pedro en su diseño sobre el objeto matemático las cuales permiten evidenciar que la comprensión amplia y flexible que tiene de la función lineal es *cosificada* y puesta en marcha cuando selecciona las actividades *a priori* para promover actividad matemática a través de las conexiones con fenómenos de oferta y demanda. Pedro fue cuidadoso en seleccionar actividades que pueden ser significativas para el estudiante, y a lo largo del taller, logró modelar la idea de oferta y demanda.

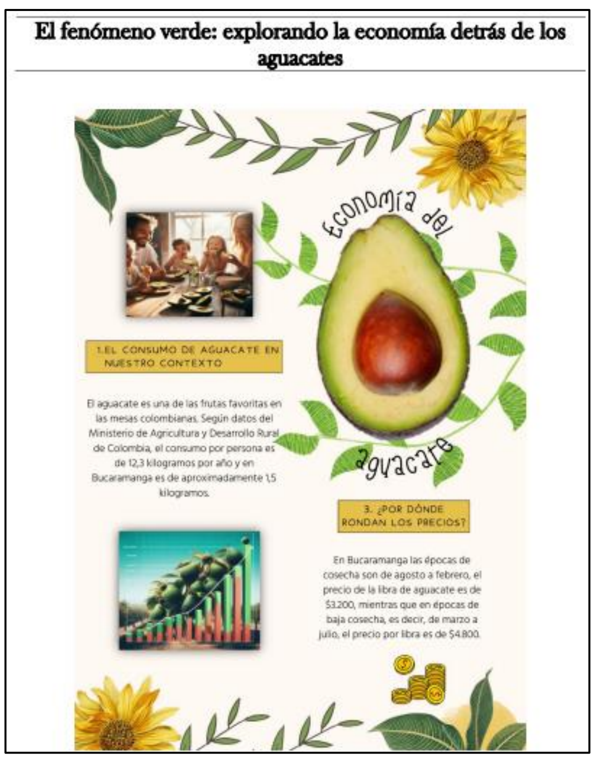
Así mismo, Pedro a través de las actividades que diseñó mostró que la postura que tomó respecto al objeto matemático (a través de la definición que utiliza de función lineal) se evidenció al ser capaz de modelar el fenómeno de oferta y demanda mediante la función lineal (y función afín), consciente de que su conocimiento matemático debe girar en torno a la *matemática escolar* (MEN, 1998), cargada de significados en contextos cercanos al estudiante. Es decir, el profesor en formación no solo amplió su concepción del objeto matemático, sino que lo cosifica en las tareas que propuso.

Lo anterior da muestra de que Pedro parecía ser consciente de que la oferta y la demanda ofrecieron oportunidades para explorar la función lineal y función afín de una forma tangible, ya que estas situaciones, al ser cercanas al estudiante, permitieron enriquecer la actividad matemática que planeó, pues como menciona Alfonso (2024) el tratamiento de las matemáticas en situaciones de la vida real al estudiante posibilita una comunicación clara sobre los objetos matemáticos.

Pedro, a través de la actividad matemática que buscaba promover en los estudiantes, desarrolló una serie de modelos (algebraicos, gráficos, cartesianos, verbales, tabulares, etc.) de la función lineal a través del fenómeno de oferta y demanda. Por ejemplo, en la actividad denominada *el fenómeno verde* (**Figura 8**) a través de una infografía diseñó una situación a través de un *modelo verbal:* el precio del aguacate en función de la cantidad de cosecha.

Figura 8

El fenómeno verde-situación propuesta por Pedro



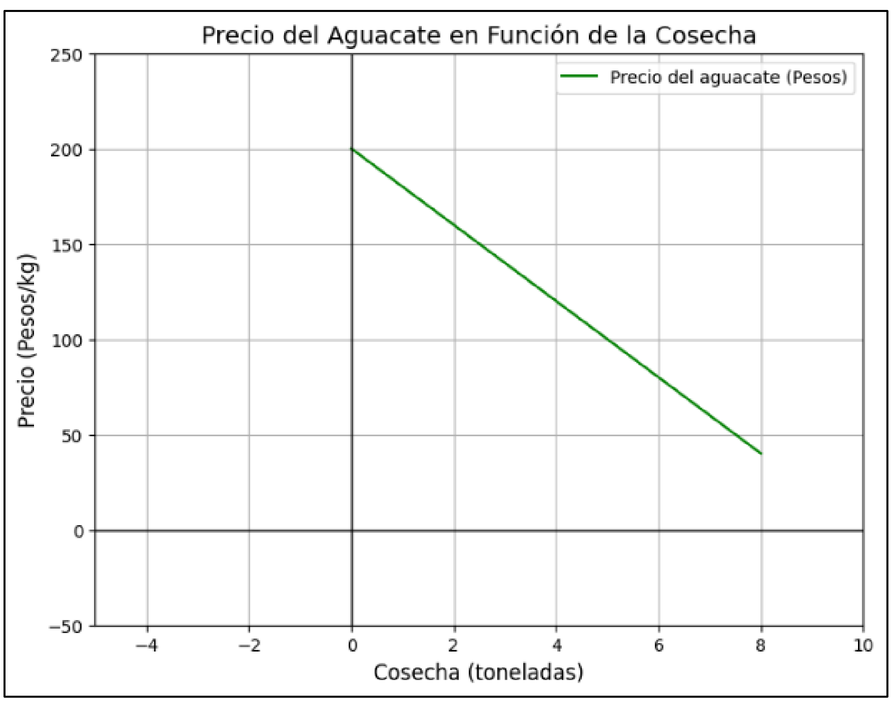
En la situación propuesta en la **Figura 8**, Pedro planteó una serie de preguntas como:

[T-1] Pedro	a) ¿Cuáles son las dos variables que están en juego en las épocas de cosecha en la situación de los aguacates?; b) ¿Por qué cree que el precio del aguacate en época de baja cosecha aumenta? ; c) ¿Por qué cree que el precio del aguacate en época de alta cosecha disminuye?

En estas preguntas, Pedro siguió abordando el fenómeno a través de un modelo verbal. Sin embargo, basado en las preguntas que propuso podrían surgir otras series de modelos para el fenómeno, en especial la actividad matemática podría girar en torno a *modelos gráficos-cartesianos* (**Figura 9**), que ilustren la dependencia de variables o incluso que la función es decreciente, y allí asociarlo con el signo negativo de la pendiente, en caso de que hipotéticamente el estudiante quisiera transitar a un modelo analítico-algebraico.

Figura 9

Posible modelo gráfico de la función lineal



En una segunda actividad que propuso Pedro, denominada *una mirada económica al iPhone 13* (**Figura 10**) la cual presentó como una nota de periódico, mostró las ventas y los precios del iPhone 13 entre el 2021 y 2023.

Figura 10

Una mirada económica al iPhone 13-situación propuesta por Pedro

Edición especial

EL MENSAJERO

Autor: Pablo Rivera
Fecha: 20 de diciembre de 2023

UNA MIRADA ECONÓMICA AL IPHONE 13

HECHEMOS UN VISTAZO
El 12 de octubre de 2021 fue un día muy importante para los usuarios de iPhone en nuestro país, ya que era el lanzamiento de la generación de celulares más avanzada de la empresa Apple. El precio de lanzamiento del iPhone 13 (256 GB) era de $ 4.799.000; vendiéndose 190.000 unidades en ese mismo año, sin embargo, en 2023 su precio es de $4.200.000, y se estima que se han vendido entre 500.000 y 1 millón de unidades.

DATOS IMPORTANTES SOBRE EL IPHONE 13 (2021-2023)
En el año 2022 las ventas de iPhone 13 aumentaron en un 20% respecto al 2021, además el precio de este dispositivo móvil disminuyó en un 4% de 2022 a 2023.
Sin duda alguna iPhone es un celular que revoluciona con su tecnología.

MÁS INFORMACIÓN EN WWW.ELMENSAJERO.COM

Luego de una contextualización sobre las ventas del iPhone 13, utilizando de nuevo un *modelo verbal* como se muestra en la situación de la **Figura 10**, Pedro planteó una serie de preguntas para promover actividad matemática, así:

[T-2] Pedro	a) ¿Cuánto disminuyó el valor del IPhone 13 entre el 2021 y 2023? b) ¿Qué variables están en juego en la situación? c) ¿En el 2021 la gente compró más celulares iPhone 13 qué en el 2023? Explique la razón de por qué ocurre eso. d) ¿Por qué cree que el precio de este dispositivo móvil disminuyó en el periodo de 2021 a 2023? e) Teniendo en cuenta que en la noticia se afirma que en el año 2022 las ventas de iPhone 13 aumentaron en un 20% respecto al 2021, entonces ¿Cuántas unidades de iPhone 13 se vendieron en 2022?

f) Si el precio del dispositivo móvil disminuyó en un 4% de 2022 a 2023, entonces ¿Qué precio tenía el iPhone 13 en el 2022?
g) Si en el 2024 la gente siguiera comprando más iPhone 13 ¿su precio aumentaría o disminuiría? ¿Por qué?

Como se evidencia en las expresiones de Pedro, se siguió priorizando el *modelo verbal* de la situación planteada, y las preguntas iban dirigidas a que el estudiante lo entendiera de la misma manera. Parece que Pedro reconoció que este tipo de modelo promueve el diálogo alrededor del fenómeno económico planteado, y del objeto matemático, llevando al estudiante a la comprensión (esto se puede evidenciar en las preguntas a, b y g). Por su parte, con la pregunta e) parece que Pedro pretendía que los estudiantes usaran un *modelo numérico* de la situación planteada para indagar sobre la variación del precio del celular de un año a otro, en donde hipotéticamente el estudiante se podría plantear un procedimiento como:

$$190000 \text{ unidades vendidas en el 2021}$$

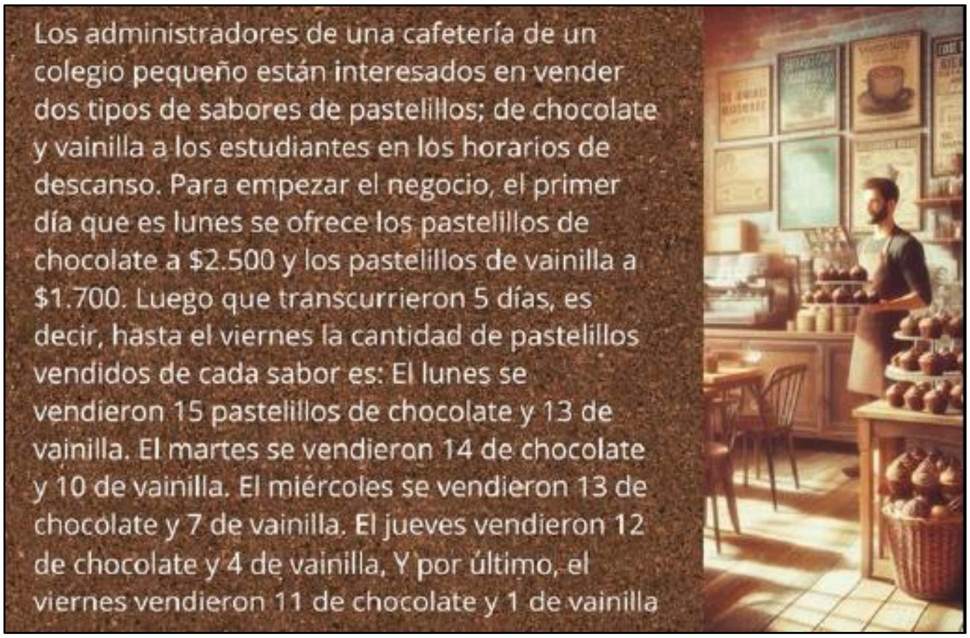
$$190000 + (190000 * 0.2) = 228000 \text{ unidades vendidas en el 2022}$$

Objetivo similar tenía la pregunta f) (de [T-2]) De nuevo Pedro destacó que estas preguntas se pudieran tomar como base para que en la clase se pudieran generar otros modelos y comprender con mayor profundidad el fenómeno. Por ejemplo, un *modelo gráfico-cartesiano* le permitiría al estudiante reconocer con mayor profundidad las características del fenómeno (como las relaciones de dependencia en la función), e incluso un *modelo algebraico* posibilitaría reconocer el comportamiento global de la situación.

En una tercera actividad que propuso, Pedro siguió modelando verbalmente el fenómeno de oferta y demanda (aunque no se trata de una función sino una ecuación, asunto que se abordará más adelante), para ello diseñó una situación que denominó venta dulce (**Figura 11**).

Figura 11

Venta dulce-situación propuesta por Pedro



Sobre la actividad venta dulce (**Figura 11**) Pedro propuso inicialmente las siguientes preguntas:

[T-3] Pedro	a) ¿Cuáles son las variables que actúan en el problema tanto para los pastelillos de chocolate como para los de vainilla? b) ¿Cuál es la variable independiente (VI) y la variable dependiente (VD) respecto a los pastelillos de chocolate? c) ¿Cuál es la variable independiente (VI) y la variable dependiente (VD) respecto a los pastelillos de vainilla?

Las preguntas expuestas en [T-3], le permitirían al estudiante, mediante el modelo verbal que propuso Pedro, comprender con mayor profundidad el fenómeno. Sin embargo, se destacaron las preguntas que planteó seguidamente, en donde promovía diferentes modelos de función lineal.

Por ejemplo, Pedro propuso el siguiente ítem:

[T-4] Pedro	d) Organice los valores de la cantidad de pastelitos de chocolate y vainilla venidos en los 5 días y su respectivo precio en las tablas [coloca unas tablas sin diligenciar, de referencia]

En [T-4], Pedro parecía ser consciente de la conveniencia de un *modelo tabular* para organizar los valores presentes en la situación, y a exhortar a que el estudiante halle los valores desconocidos, valiéndose de que es una función lineal (o como se discutirá más adelante: ecuación lineal), la cual debe cumplir una relación directamente (o inversamente) proporcional entre las variables (o incógnitas). Por ello, a través del uso de tablas, que es un acercamiento al *razonamiento proporcional* (Mochón, 2012), Pedro posibilita ver la relación de proporcionalidad directa. Nótese que si se diligenciaba la tabla que propuso Pedro se obtendría lo siguiente:

Tabla 6

Tabla diligenciada de la situación venta dulce

Pastelillos de chocolate		**Pastelillos de vainilla**	
V.I: unidades vendidas	V.D: precio	V.I: unidades vendidas	V.D.: precio
15	37.500	13	22.100
14	35.000	10	17.000
13	32.500	7	11.900
12	30.000	4	6.800
11	27.500	1	1.700

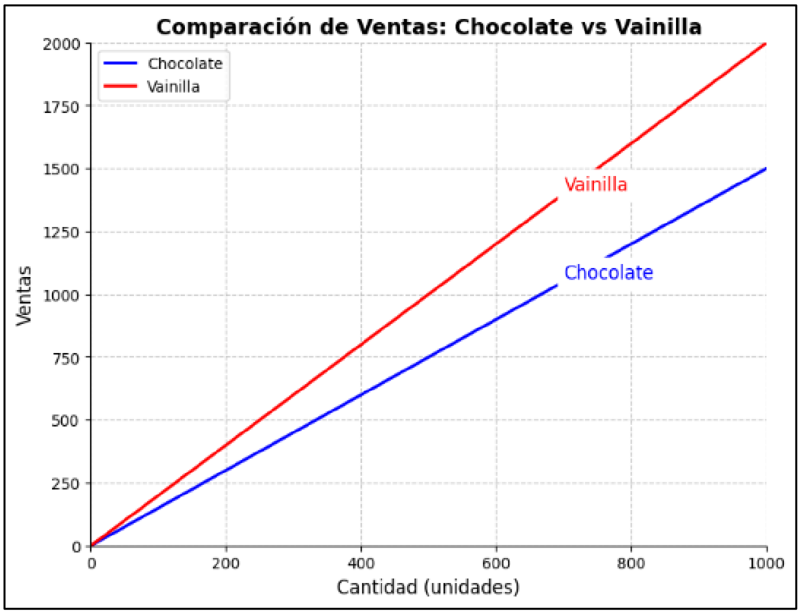
Es importante mencionar que a partir de este modelo tabular Pedro propuso un tránsito hacia un modelo algebraico y seguidamente hacia un modelo gráfico.

[T-5] Pedro	e) Con ayuda de la tabla anterior halle la ecuación lineal que representa el precio de la cantidad de pastelitos de chocolate y vainilla vendidos y además representa esta ecuación en el plano cartesiano.

En [T-5] , Pedro buscaba que el estudiante obtuviera la ecuación lineal a través de la proporción lineal considerando que cada unidad cuesta $\$2500$, luego el precio de x unidades era $2500 \times x$. Así, la función lineal es $\boldsymbol{y = 2500x}$ para los pastelillos de chocolate, y $\boldsymbol{y = 1700x}$ para los de vainilla. Así, graficando estas funciones a escala se obtendría la **Figura 8**.

Figura 12

Gráfica de la situación venta dulce



Es importante destacar que Pedro parece reconocer que los distintos modelos de un fenómeno (verbal, tabular, algebraico o gráfico), deben guardar algunas propiedades invariantes que son características del objeto matemático. Por ejemplo, el uso de tabla es posibilitado por la relación directamente proporcional del fenómeno, lo que a su vez generaba un modelo algebraico de función lineal (de la forma $y = mx$), que en el modelo gráfico se pudo ver como una recta que pasa por origen. Sin embargo, estas propiedades se discutirán en la siguiente subcategoría.

De lo anterior, se concluye que Pedro reconoció y orientó las preguntas mediante modelos verbales de la función lineal, en mayor medida, y de modelos tabulares, algebraicos y gráficos, posibilitando el tránsito entre ellos. La actividad matemática que pretendía promover Pedro a través de las actividades que propuso, permitiría que el estudiante pudiera generar otros modelos que le dieran una compresión profunda del fenómeno y del objeto matemático en particular.

Los modelos que posibilitó Pedro de la función lineal en su diseño se entienden a razón de las representaciones de este objeto matemático que tenía el profesor de matemáticas en formación, lo cual hace parte de su pensamiento matemático, teniendo en cuenta que el conocimiento de las diferentes representaciones del objeto matemático como la adecuada conexión entre ellas son fundamentales en el dominio matemático del profesor y repercuten en la planeación de la actividad matemática (Parada y Pluvinaje, 2014) especialmente en la función lineal (Segura, 2024).

Al respecto, Sierra et al. (1998) proponen las representaciones más comunes de función lineal: descripciones verbales, tabla de valores, gráficas, y expresiones algebraicas. Estas representaciones fueron interiorizadas por Pedro en su pensamiento matemático y las cosificó en las diferentes actividades que planteó. Si bien existían invariantes entre las representaciones, cada una desempeñaba un papel importante dentro del sistema matemático. Al respecto, Godino et al. (2014) postula que:

> La representación gráfica conecta con las potencialidades de la visualización para formar conceptos y se relaciona con la geometría y la topología. La representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. La fórmula conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar y relacionar las otras tres (p.203).

En efecto, Pedro basó todas las situaciones que propuso inicialmente en una representación verbal, en ninguna actividad inició con alguna fórmula u otra representación (**Figura 13**), lo que indica que Pedro reconoció el lenguaje común como parte de su dominio matemático, y comprendió además la forma en cómo el contexto propicia actividad matemática de manera implícita. Así, tal como afirma Godino et al. (2014) por una parte desarrolla el proceso de comunicación, pero aún más importante, la representación verbal suscita las preguntas que a su vez posibilitan otras representaciones y conexiones entre ellas.

Figura 13

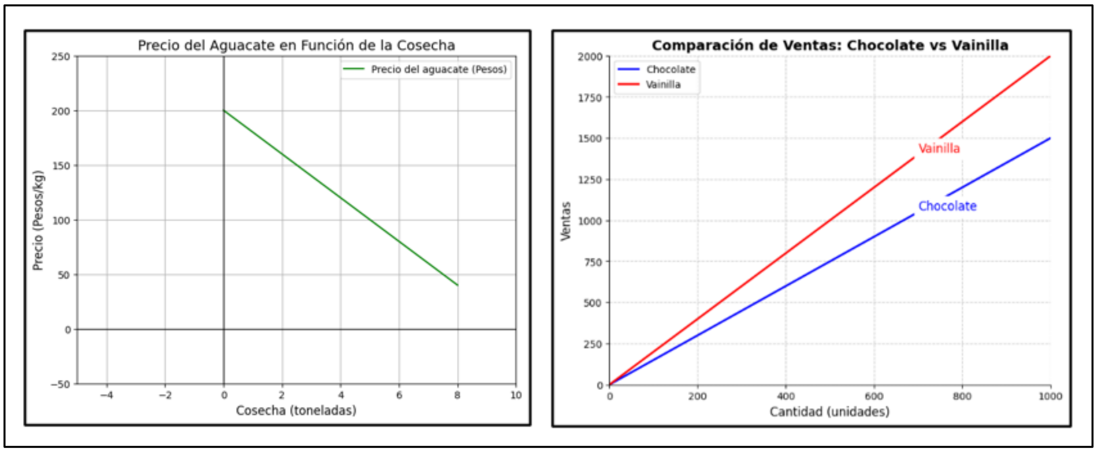
Representaciones verbales de la función lineal-propuestas por Pedro

Parece que Pedro reconocía que la representación verbal promovía el dialogo alrededor del fenómeno económico planteado, y del objeto matemático, llevando al estudiante a la comprensión. Ahora bien, posterior a contextualizar la situación que incluía una función representada verbalmente, Pedro proponía una serie de preguntas mediante otras representaciones (gráfica, tabular y algebraica) que dieron muestra de su dominio sobre estas, tanto así que logró ponerlas en juego en su diseño.

En cuanto a la representación gráfica (cartesiana), Pedro evidenció conocerla y tener buen dominio de esta ya que en varias ocasiones implícitamente dirigió las preguntas para que el estudiante las pudiera responder haciendo uso de este tipo de representaciones (**Figura 14**).

Figura 14

Posibles representaciones gráficas de la función lineal suscitadas por Pedro



Por ejemplo, en la actividad *el fenómeno verde* (**Figura 8**), justo después de contextualizar la situación (funcional) mediante una representación verbal, Pedro propuso preguntas como:

a) ¿Cuáles son las dos variables que están en juego en las épocas de cosecha en la situación de los aguacates?

b) ¿Por qué cree que el precio del aguacate en época de baja cosecha aumenta?

c) ¿Por qué cree que el precio del aguacate en época de alta cosecha disminuye?

Allí, una representación gráfica (**Figura 9**) sería pertinente para ilustrar las preguntas y facilitar las respuestas por parte de los estudiantes. En efecto, sería ideal para hacer hincapié en la forma en cómo dependen las variables (el precio del aguacate de la cantidad de cosecha) (Barría, 2019) asociándolo a los ejes correspondientes. Así mismo, podría ilustrar que la función es decreciente dado que a mayor cosecha el precio es menor. Lo anterior, sin ahondar todavía allí, puede asociarse con el signo negativo de la pendiente en la representación algebraica.

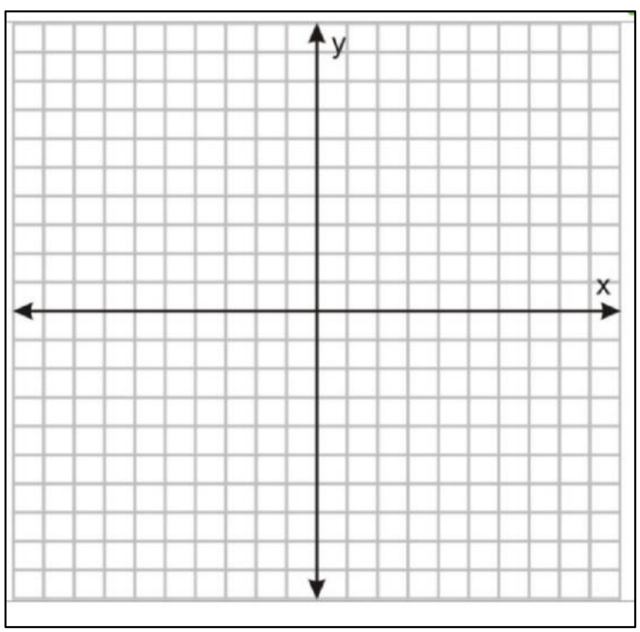
Lo mismo sucede en la situación *una mirada económica al iPhone 13* (**Figura 10**) en donde, aunque Pedro no propuso explícitamente alguna pregunta que lleve a una representación gráfica de la situación, las preguntas que generó sí pueden ilustrarse mejor a través de un gráfico, que permitiría reconocer con mayor profundidad el fenómeno.

Sin embargo, es en la actividad *venta dulce* (**Figura 11**) en donde por primera vez, Pedro explícitamente propuso una actividad en donde pidió que el estudiante representara la función (o como se discutió, ecuación) en el plano cartesiano para lo cual colocó un plano cartesiano de guía, (**Figura 15**), sin embargo, esto lo planeó en el taller transitado de la representación verbal (en donde contextualizó la situación funcional) a una representación tabular en primera medida, para después hallar la representación algebraica y de allí pasar a graficarla en el plano.

[T-6] Pedro	e) Con ayuda de la tabla anterior halle la ecuación lineal que representa el precio de la cantidad de pastelitos de chocolate y vainilla vendidos y además representa esta ecuación en el plano cartesiano.

Figura 15

Plano cartesiano propuesto por Pedro



No es claro desde la investigación si el hecho de centrar el plano justo en el origen de coordenadas tenga algo que ver con su conocimiento sobre el lugar geométrico de la función, en particular en lo que concierne al dominio y al rango, que para la situación planteada fue en ambos casos $\mathbb{R}^+$, luego solo hacía falta el primer cuadrante. También la nominación de los ejes (x - y) parece dar cuenta que Pedro entendió la función lineal en este caso como una ecuación lineal.

Así mismo, parece que Pedro con el plano cartesiano (**Figura 15**) no se percató de la selección de la escala adecuada, ni parece haber identificado la unidad de trazado, que según Rueda (2016) son importantes para la construcción de la representación gráfica.

Por otra parte, parece que Pedro consideró estrictamente necesario que cuando se tiene una representación tabular se debe proponer primero una representación algebraica para así transitar a la representación gráfica. Al respecto se podrían inferir que Pedro no se daba cuenta que a partir de la tabla tenía los puntos suficientes para graficar una recta (esto implica entender una función como lugar geométrico), o que simplemente planeó la actividad matemática de esa manera esperando transitar por todas las representaciones posibles de la relación funcional.

La representación gráfica, como lo afirma Godino et al. (2014), se relaciona con la geometría y además potencia la visualización para formar conceptos. Desde el contexto económico y financiero, esto resulta importante en la medida en que mucha información financiera que les concierne a las personas es expuesta gráficamente, luego también es una competencia que se desarrolla mediante esta representación.

Ahora bien, la representación tabular a pesar de que no se vislumbra tan claramente con las actividades y preguntas que propuso Pedro, sí tuvo un rol importante en la actividad *venta dulce* (**Figura 11**) donde planteó el uso de tablas para organizar los valores presentes en la situación, y hallar los valores desconocidos (que corresponden a incógnitas y no a variables, como se discutió anteriormente):

[T-7] Pedro	d) Organice los valores de la cantidad de pastelitos de chocolate y vainilla venidos en los 5 días y su respectivo precio en las tablas.

Al respecto, Pedro agregó dos tablas (una para los pastelillos de chocolate y otro para los pastelillos de vainilla) para diligenciar como referencia:

Figura 16

Tablas sin diligenciar propuestas por Pedro

Pastelillos de chocolate	
Cantidad de pastelillos vendidos	**Precio de los pastelillos vendidos**

Pastelillos de vainilla	
Cantidad de pastelillos vendidos	**Precio de pastelillos vendidos**
	17.000
1	

Aquí es importante discutir que Pedro propuso la representación tabular en busca de que se reconociera la relación directamente proporcional que había entre la cantidad de pastelillos vendidos y el precio correspondiente, como destaca Ibarra y Moreno (2010), quienes afirman que el uso de la representación tabular es significativa para establecer la correspondencia entre las magnitudes involucradas en una situación de proporcionalidad (como en este caso, dado que la función o ecuación es lineal y no afín).

Se infiere que, con la tabla diligenciada (**Tabla 6**), Pedro esperaba resaltar la constante de proporcionalidad, dividiendo cada magnitud dependiente sobre la independiente, por ejemplo, en el caso de los pastelillos de chocolate, la constante de proporcionalidad se esboza en la **Tabla 7**.

Tabla 7

Constante de proporcionalidad

Pastelillos de chocolate		**Constante de proporcionalidad**
unidades vendidas	precio	Precio / unidades vendidas
15	37.500	2500
14	35.000	2500
13	32.500	2500
12	30.000	2500
11	27.500	2500

De la tabla diligenciada (**Tabla 6**) parece que Pedro buscaba relacionar la constante de proporcionalidad (que hace parte del razonamiento proporcional) con la pendiente de la ecuación lineal $y = 2500x$. Lo anterior hace inferir que Pedro entendió la representación tabular como un acercamiento al razonamiento proporcional, tal y como lo interpreta Mochón (2012), y que a partir de este razonamiento se dio lugar a otras representaciones, en particular planteó dos representaciones más:

[T-8] Pedro	e) Con ayuda de la tabla anterior halle la ecuación lineal que representa el precio de la cantidad de pastelitos de chocolate y vainilla vendidos y además representa esta ecuación en el plano cartesiano.

Las dos representaciones que planteó Pedro pudiesen surgir con el mero uso de la tabla: la representación algebraica, al entender que la constante de proporcionalidad coincide con la pendiente de la recta; y la representación gráfica al graficar un par de coordenadas de la tabla (unidades vendidas, precio) o una sola coordenada y el punto (0,0) y unirlos con una recta.

En lo concerniente a la representación algebraica, parece que Pedro no la abordó con demasía en el diseño. Lo anterior se infiere en la medida en que integrar el contexto económico y financiero, en donde las situaciones al ser cercanas al sujeto, si bien tienen en el fondo pensamiento matemático, no tienen por qué incluir una fórmula matemática para representar la situación.

Sin embargo, en algunas de las tareas que propone una expresión algebraica podría clarificar algunas características de la función lineal: el signo negativo indicaría que la función decrece, el intercepto, como se mencionó, puede tener un significado económico importante, el valor de la pendiente indicaría cuánto cambia la variable dependiente respecto a la independiente, etc. Lo anterior puede ser importante en la medida en que la fórmula potencia la capacidad simbólica (Godino et al., 2014).

Al final del taller, en la actividad *venta dulce,* Pedro explicitó esta representación como ya se mencionó:

[T-9] Pedro	e) Con ayuda de la tabla anterior halle la ecuación lineal que representa el precio de la cantidad de pastelitos de chocolate y vainilla vendidos y además representa esta ecuación en el plano cartesiano.

Es importante mencionar que la representación algebraica la propuso Pedro luego de la representación tabular, en donde se apoyó de la relación de proporcionalidad directa de la función lineal para que eventualmente el estudiante hallara la ecuación. Generalmente el proceso se hace de manera inversa. Lo anterior también da lugar a inferir que la representación algebraica la genera Pedro a partir de la ecuación de la recta, pues con dos coordenadas de la tabla diligenciada ya tenía una única función lineal que correspondía a la situación.

Aunque se justificó que Pedro propuso implícita y explícitamente diversas representaciones en su diseño también es importante acotar el adecuado tránsito que hizo entre ellas (lo que Duval (1999) en su teoría de registros semióticos llamaría tratamiento y conversión).

Se evidenció que el profesor en formación fue capaz de reconocer las invariantes entre representaciones, en particular:

- La variable independiente y la variable dependiente en la representación verbal con el planteamiento de la fórmula en la representación algebraica.
- El intercepto b en la representación algebraica (con el significado económico subyacente) con la coordenada $(0, b)$ en la representación gráfica.
- El decrecimiento de la función en la representación gráfica con el signo menos (-) en la representación algebraica
- Los valores de las columnas en la representación tabular con las coordenadas (ordenada y abscisa) en la representación gráfica.

En síntesis, en esta categoría se muestra cómo Pedro inició su participación en la CoP con una concepción formalista de la función lineal que fue cambiando a medida que reflexionaba sobre las conexiones con la economía y las finanzas, hasta lograr una concepción aplicada del objeto matemático orientado a la modelación, y que finalmente logra cosificarlo en una serie de actividades que dan muestra de que logra planear la actividad matemática con base en el significado de función lineal que negocia en su proceso de reflexión.

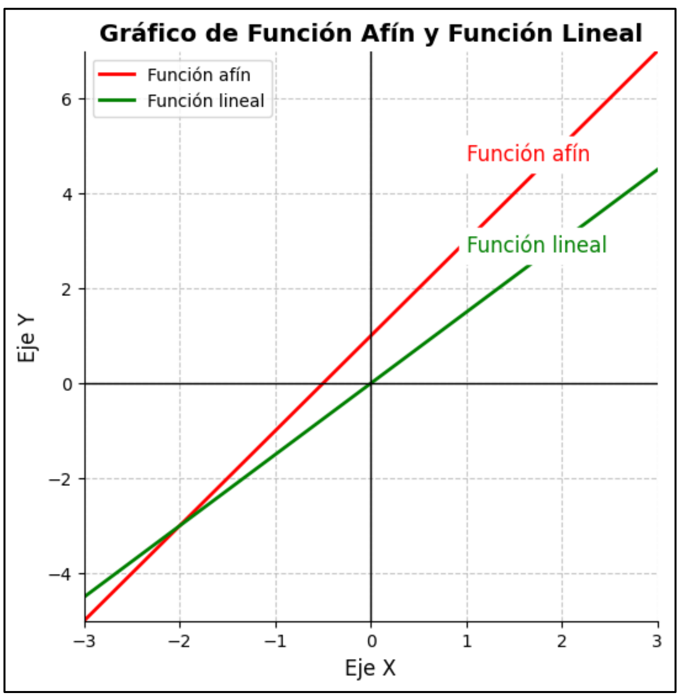
Algo importante de destacar es que *usar la función lineal para modelar fenómenos asociados a la oferta y la demanda* no es solo importante *per se*, pues en este uso que hace Pedro, incluyendo las representaciones que evidenció conocer y usó en el diseño él se dio cuenta de algunas características del objeto matemático que se visualizaron mejor a través del fenómeno de oferta y demanda, y por lo tanto suscitó otros aprendizajes en su pensamiento matemático, los cuales se discutirán en las siguientes categorías.

5.2 La función lineal como relación directamente proporcional

En [A2-1] **(Tabla 4)** Pedro afirmó que una función lineal se podría representar algebraicamente como $y = ax + b$ donde a y b son constantes; siendo a la pendiente (no da más información sobre b) y que gráficamente se podría asociar con una recta. Pedro descuidó la condición matemática ineludible de que el intercepto b debería ser igual a 0. En caso contrario, no se estaría hablando de una función lineal (de la forma $y = ax$, donde a es la pendiente) sino de una función afín (**Figura 17**).

Figura 17

Función lineal vs función afín



Esta imprecisión se corroboró cuando Pedro afirmó que la función lineal corresponde a una *recta*, siendo esta una condición necesaria pero no suficiente para que la función fuera en efecto lineal, pues esta recta debe pasar por el origen $(0{,}0)$. Lo anterior, permite inferir cómo Pedro abordó las conexiones entre la función lineal y el fenómeno de oferta y demanda, explicitándolo como sigue:

[A1-2] Pedro	Estos fenómenos económicos [oferta y demanda] se pueden representar por medio de funciones lineales; donde en el caso de la oferta se relaciona la cantidad ofrecida con un precio determinado, y en la demanda se relaciona la cantidad comprada con su precio determinado. Permitiendo ver que las cantidades ofrecidas y demandadas dependen del precio. En términos de funciones lineales la demanda y la oferta se puede representar como $C_D = ap + b$ y $C_O = cp + d$.

Aquí, se pueden observar varios asuntos matemáticos y extramatemáticos que pueden ayudar a distinguir entre función lineal y función afín. En efecto, la función oferta, que Pedro representó algebraicamente como $C_O = cp + d$ relaciona la cantidad ofrecida de un bien con un precio determinado, reconociendo que los elementos de la función son:

C_o : cantidad ofrecida del bien

c : pendiente de la función

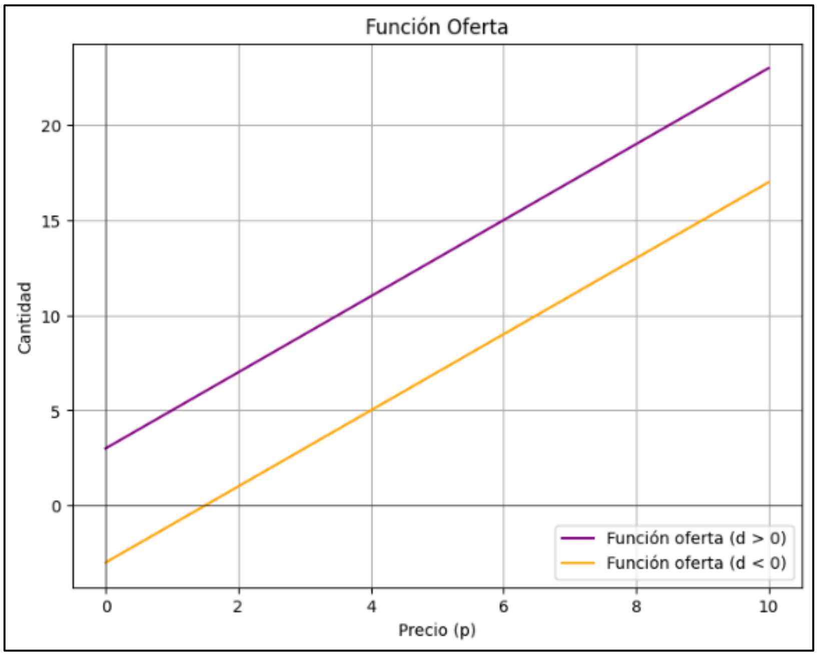
p : precio del bien.

d: cantidad ofrecida cuando el precio es 0.

En términos estrictos, se estaría hablando de una función afín y no lineal, a menos que d fuese 0. Pedro pareciera no profundizar en el significado económico de este parámetro d , que hizo referencia a la cantidad ofrecida cuando incluso el precio fue 0: existe una cantidad mínima que se ofreció en el mercado cuando el intercepto d era positivo; o hay un precio mínimo para que los productores estén dispuestos a ofrecer cualquier cantidad del bien, cuando d es negativo (**Figura 18**).

Figura 18

Función oferta variando d (intercepto)



Sin embargo, se reconoce que, aunque en efecto la función oferta y la función demanda son funciones afines, muchas veces se habla indistintamente de función lineal. El importante significado económico que tiene el intercepto con el $eje\ y$, se cree, puede ser útil para distinguir estos dos tipos de funciones.

En este orden de ideas, Pedro parece no distinguir entre función lineal y función afín, de la cual generalmente no se hace énfasis en trabajos con estudiantes (García et al., 1998; Peralta, 2002; Posada y Villa, 2006, entre otros) y tampoco con profesores (Leiva, 2021). Sobre esto, Muñoz y Sánchez (2011) postulan que la indistinción de los libros de texto sobre la función lineal y afín ha ocasionado confusión y proliferación de concepciones erróneas al respecto, lo que contribuye a la creación de obstáculos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de estos objetos matemáticos que impide una compresión precisa sobre sus características específicas.

Si bien, parece una nimiedad matemática la condición de que una función lineal debe ser algebraicamente de la forma $y = ax$, o ser una recta que pasa por el origen, hay una característica fundamental que entra en juego: la *relación de proporcionalidad directa*, o *linealidad*. Dado que una función lineal $f(x) = mx$ representa una relación de proporcionalidad directa entre x y $f(x)$, por ejemplo, si se considera la función demanda $C_D = ap + b$, esta función representaría una relación de proporcionalidad directa solo si $b = 0$, lo que significa que solo dependería del precio, sin embargo, la demanda incluye otros factores que se sintetizan en el intercepto b (Rodríguez y Fernández, 2011).

Se reconoce que hay un significado económico importante con el intercepto que hace que la función sea afín y no lineal; sin embargo, esto es más visible en un fenómeno asociado a la oferta y la demanda: la función de costos $C(x) = kx + f$. Allí, el intercepto f hace referencia a los costos fijos, los cuales son estrictamente importantes para determinar si un negocio es viable o no.

Así, aunque Pedro parece no percatarse de la diferencia entre función lineal y afín, esto es, de la característica de *proporcionalidad directa* o *linealidad* de la función lineal, se rescata que el fenómeno de oferta y demanda en particular podría aprovecharse para enseñar esta diferencia, que, como se mencionó, muchas veces se descuida en la enseñanza de las matemáticas. Aunque Pedro omite esta propiedad, es importante reconocerla como un aprendizaje que se posibilita en mayor medida cuando se integran fenómenos económicos y financieros.

5.3 La variable vista en fenómenos de oferta y demanda

La idea de variable que fue negociando Pedro resultó importante en la medida en que a través de las conexiones entre la función lineal y el fenómeno de oferta y demanda se rescataron algunas ideas importantes como la dependencia, la variación y la funcionalidad que parecen potenciarse precisamente con este fenómeno económico.

Por ejemplo, con la primera actividad que Pedro propuso en el *taller* denominada *fenómeno verde* (**Figura 8**), Pedro contextualizó diciendo que:

[T-10] Pedro	El aguacate es una de las frutas favoritas de las mesas colombianas. Según datos del Ministerio de Agricultura y Desarrollo Rural de Colombia, el consumo por persona es de 12,3 Kg por año, y en Bucaramanga es de aproximadamente 1,5 Kg. […] ¿Por dónde rondan los precios? En Bucaramanga las épocas de cosecha son de agosto a febrero, el precio de la libra de aguacate es de $3.200, mientras que, en época de bajas cosecha, es decir, de marzo a julio, el precio por libra es de $4.800.

Sobre lo que contextualizó en [T-10], Pedro propuso las siguientes preguntas:

[T-11] Pedro	a) ¿Cuáles son las dos variables que están en juego en las épocas de cosecha en la situación de los aguacates? b) ¿Por qué cree que el precio del aguacate en época de baja cosecha aumenta? c) ¿Por qué cree que el precio del aguacate en época de alta cosecha disminuye?

En las preguntas expuestas en [T-11], especialmente en el literal *b* y *c*, Pedro identificó correctamente la dependencia de variables, dado que el precio del aguacate depende de la cantidad de cosecha, y no en sentido contario (Barría, 2019). Lo anterior sugiere que a través de esta actividad Pedro reconoció la variable dependiente (el precio del aguacate), que depende de la cantidad de cosecha (variable independiente).

La evidencia esbozada en [T-11] da muestra de que la dependencia de variables tiene mayor sentido para Pedro cuando la exploró a través del fenómeno de oferta y demanda: porque realmente este fenómeno tiene una variable independiente (la cantidad de cosecha), y otra que depende de esta (el precio). Esto sugiere que Pedro al diseñar la actividad se dio cuenta que era más significativo proponer una dependencia de variables realista a simplemente decirle al estudiante que y es la variable dependiente y x la independiente, o que y depende de x, sin un referente tangible que lo respalde.

Al respecto, Sánchez (2016) señala que al permitir que los estudiantes trabajen con tareas contextualizadas se facilita la conexión entre los objetos matemáticos y se mejora la comprensión de conceptos como las variables dependientes e independientes en una función. De esta manera, con esta primera actividad, Pedro identificó algunos aspectos inherentes al fenómeno, que a la vez le posibilitarían oportunidades a través de la actividad matemática que promueve para que el estudiante comprenda en mayor medida de la idea de *funcionalidad* (variación de una magnitud con respecto a otra).

Se destaca que Pedro no inició la actividad colocando una representación algebraica de la situación, sino que propuso una situación en donde se rescató lo que algunos autores definen como *pensamiento funcional*. Esto sugiere que Pedro reconoció que la idea de función está ligada al afán humano y a describir situaciones de cambio en el mundo que los rodea (Boyer, 1959).

Epistemológicamente parece un acierto por parte de Pedro haber planeado la actividad matemática con este fenómeno cercano al contexto del estudiante de la forma en que lo hizo, además porque entre otras cosas, tal como afirma Liern (2012) sirvió para reducir el grado de abstracción del objeto matemático. En efecto, en las actividades ulteriores Pedro insistió en esta idea.

En la actividad *una mirada económica al iPhone 13* (**Figura 10**), Pedro propuso, para promover actividad matemática, una serie de preguntas, como:

[T-12] Pedro	a) ¿Cuánto disminuyó el valor del IPhone 13 entre el 2021 y 2023? b) ¿Qué variables están en juego en la situación?

	c) ¿En el 2021 la gente compró más celulares iPhone 13 qué en el 2023? Explique la razón de por qué ocurre eso. d) ¿Por qué cree que el precio de este dispositivo móvil disminuyó en el periodo de 2021 a 2023? e) Teniendo en cuenta que en la noticia se afirma que en el año 2022 las ventas de iPhone 13 aumentaron en un 20% respecto al 2021, entonces ¿Cuántas unidades de iPhone 13 se vendieron en 2022? f) Si el precio del dispositivo móvil disminuyó en un 4% de 2022 a 2023, entonces ¿Qué precio tenía el iPhone 13 en el 2022? g) Si en el 2024 la gente siguiera comprando más iPhone 13 ¿su precio aumentaría o disminuiría? ¿Por qué?

Aquí, se hace especial énfasis en los ítems *b, c, d* y *g*, en donde inicialmente Pedro parece buscar que los estudiantes identifiquen las variables que modelan el fenómeno: el precio de venta y la cantidad de ventas del iPhone 13 (aunque fue ambiguo con la variable *tiempo*), y a su vez se dieran cuenta del comportamiento de las ventas, y la tendencia a que el precio y la cantidad de ventas del dispositivo móvil iría disminuyendo con el transcurso de los años (literal c), lo que de nuevo recae en la idea de funcionalidad.

Sin embargo, es importante resaltar que el fenómeno tal como lo plantea Pedro es matemáticamente ambiguo en el planteamiento. Pedro no es explícito al definir las variables que intervienen en el fenómeno, pues él no consideró el tiempo y pasó por alto el hecho económico de la venta de un celular con obsolescencia programada (Otero, 2023), que hace que el comportamiento del precio a medida que pasan los años, al menos globalmente, no pueda ser lineal. Aunque Pedro hizo un análisis en un lapso corto, este fenómeno no se modeló con una función lineal o afín, en su lugar, fue necesario emplear otros modelos, como los exponenciales, para capturar de manera más precisa el crecimiento o declive en las ventas del celular.

Se destaca que Pedro, con la actividad planteada buscaba que se reconociera una relación funcional en donde tanto la cantidad de unidades vendidas, como el precio, disminuyen con el tiempo. En las preguntas de la situación, Pedro no logra explicitar que se trataba de dos funciones que, para el público al que va dirigido, debía manejar por separado ($precio\ vs\ tiempo$; $unidades\ vendidas\ vs\ tiempo$). Por ejemplo, en la pregunta a) de [T-12] **se** percibe ambigua, pero al parecer Pedro parece sortear este asunto preguntado por separado (literal e) y f) de **[T-12])** haciendo distinción de las funciones.

En efecto, si nos fijamos en el literal e:

> e) Teniendo en cuenta que en la noticia se afirma que en el año 2022 las ventas de iPhone 13 aumentaron en un 20% respecto al 2021, entonces ¿Cuántas unidades de iPhone 13 se vendieron en 2022?

Sobre lo anterior, se puede ver algo interesante que quizá explique por qué Pedro optó por modelar linealmente este fenómeno. Parece ser que, él al usar un lapso tan corto, se fijó en los cambios de año a año (por ejemplo, del 2021 al 2022) discretizando los puntos. Quizá si Pedro hubiera cotejado los valores de la función en tres años consecutivos habría notado que en efecto la función no puede ser lineal o afín (no represente el fenómeno), y se trata más bien de una función logística o exponencial si se mira globalmente.

En efecto, sobre la función *precio vs tiempo*, es importante analizar lo que cuestionó Pedro en el literal f).

> f) Si el precio del dispositivo móvil disminuyó en un 4% de 2022 a 2023, entonces ¿Qué precio tenía el iPhone 13 en el 2022?

En la pregunta f) parece haber un comportamiento lineal, sin embargo, como se dijo, económicamente esto sucede solo por unos años y parece que Pedro era consciente de esto, pues en *g)* solo preguntó por una proyección en el año siguiente (2024), lo que permite inferir que el profesor en formación comprende que no se puede modelar linealmente el fenómeno, pues si se mira globalmente la variación no es constante.

En la actividad *venta dulce* (**Figura 11**), Pedro planteó inicialmente las siguientes preguntas:

[T-13] Pedro	a) ¿Cuáles son las variables que actúan en el problema tanto para los pastelillos de chocolate como para los de vainilla? b) ¿Cuál es la variable independiente (VI) y la variable dependiente (VD) respecto a los pastelillos de chocolate? c) ¿Cuál es la variable independiente (VI) y la variable dependiente (VD) respecto a los pastelillos de vainilla?

En el planteamiento de Pedro se puede observar su interés por promover el reconocimiento de las *variables* del fenómeno, aunque estas resultaran ambiguas. Al respecto, él manifestó sobre esta actividad que:

[F-2] Pedro	[…]se espera que los estudiantes identifiquen las variables que representa la situación como lo es la cantidad de pastelillos vendidos (chocolate y vainilla) y el precio de estos e identificar cuál de ellos es la variable independiente y dependiente de la situación.

Sin embargo, tal como planteó Pedro la situación no se trata de una *función* que integra *variables*, sino de una *ecuación* con *incógnitas*. Pedro consideró que el precio era una variable, aunque este fue fijado al inicio del problema. Si bien, algunos autores consideran la incógnita como un uso de la variable, otros (*v.g.* Wilhelmi, et al., 2014) afirman que son dos objetos matemáticos diferentes y que es necesario clarificar estos conceptos para facilitar una enseñanza más precisa, sobre todo en la introducción al algebra, pues esta confusión ha sido reportada tanto en estudiantes como en profesores en ejercicio y formación.

Desde esta investigación no solo se coincide con la distinción entre *ecuación* y *función* y por ende entre variable e incógnita, sino que se cree que desde el contexto económico y financiero se puede rescatar con mayor profundidad dicha diferencia, pues el fenómeno al ser real, permite reconocer con mayor detalle la idea de *funcionalidad*, es decir, cuando algo en efecto varía (función) o simplemente tiene una magnitud que aunque se desconoce no es variable (ecuación), como en el caso del fenómeno que propuso Pedro.

Con ello, se podría inferir que Pedro usó el concepto de ecuación de manera indistinta al de función, o bien, como una forma de función que, en este caso sí correspondería a una función lineal y no afín como en los casos anteriores. En efecto, consciente o inconscientemente, Pedro propuso en el siguiente ítem del uso de tablas, para la organización de los valores presentes en la situación, y hallar los valores desconocidos (las incógnitas).

[T-14] Pedro	d) Organice los valores de la cantidad de pastelitos de chocolate y vainilla vendidos en los 5 días y su respectivo precio en las tablas.

Aquí de nuevo, aprovechando que es una función lineal (o más bien ecuación lineal), Pedro hizo hincapié en la relación directamente proporcional que hay entre las variables (o incógnitas), y a través del uso de tablas (**Tabla 6**), que es un acercamiento al razonamiento proporcional (Mochón, 2012) el profesor en formación posibilitó ver la linealidad de la función para graficarla (**Figura 12**).

[T-15] Pedro	e) Con ayuda de la tabla anterior halle la ecuación lineal que representa el precio de la cantidad de pastelitos de chocolate y vainilla vendidos y además representa esta ecuación en el plano cartesiano.

Lo anterior da indicios de que Pedro, aunque no parece ser consciente de la distinción de función afín y función lineal, sí reconoció la relación de proporcionalidad directa que hay en esta última; aunque esto también pudo ser producto de considerar indistintamente una función lineal de una ecuación lineal.

Pedro, parece buscar que el estudiante obtenga la ecuación lineal a través de la proporción directa, considerando que cada unidad cuesta $\$2500$, luego el precio de x unidades e $2500 \times x$. Así la función lineal sería $\boldsymbol{y = 2500x}$ para los pastelillos de chocolate, y $\boldsymbol{y = 1700x}$ para los de vainilla

Pedro también pidió que se graficara esta ecuación en el plano cartesiano, que a escala quedaría como la **Figura 12**. Esta última representación del fenómeno resultó importante porque al tratarse de una situación lineal permitió ver que en efecto a ausencia de una magnitud (unidades vendidas), debe haber ausencia de la otra (precio total), y que esto hace parte de las propiedades de linealidad o proporcionalidad directa (o inversa) de la función lineal, que gráficamente se podría ver como una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Con todo el análisis anterior, se muestran los resultados del proceso de reflexión de Pedro, que siendo el caso representativo de los profesores de matemáticas en formación que participaron en la CoP, permite dar respuesta a la pregunta de investigación, lo cual se hace en el siguiente capítulo.

6. Conclusiones

En este capítulo se responde a la pregunta de investigación: ¿qué aprendizajes construyen profesores de matemáticas en formación cuando reflexionan sobre las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas para promover actividad matemática en el aula? a través del caso de estudio, en términos de las tres categorías de resultados desde el pensamiento matemático. Así mismo, se discuten algunos aprendizajes que se alcanzaron a vislumbrar desde el pensamiento didáctico y orquestal, que pueden dar lugar a futuras investigaciones. Finalmente, se esbozan algunas reflexiones finales del estudio.

6.1 Función lineal vista en fenómenos de oferta y demanda: acepción desde la modelación

En esta categoría se destaca que Pedro estableció conexiones entre la función lineal y el fenómeno de oferta y demanda, que le permitieron ampliar su concepción del objeto matemático, pasando del formalismo a la modelación, donde la función lineal tiene mayor significado dada la actividad matemática sobre la cual reflexionó. Además, esta postura que tomó respecto al objeto matemático es capaz de cosificarla en la actividad matemática que planea, en donde se da cuenta que el fenómeno económico de oferta y demanda ofrece oportunidades para explorar la función lineal de manera tangible, lo que le permite diseñar situaciones mediante modelos verbales, gráficos, tabulares y algebraicos de la función lineal.

Así mismo, Pedro al comprender el objeto matemático como un modelo de un fenómeno económico reconoció algunas características que definen la función lineal y que finalmente se tradujeron en otros aprendizajes dentro del pensamiento matemático.

6.2 La función lineal como relación directamente proporcional

Si bien Pedro no fue muy consciente de que una función lineal $f(x) = mx$ representa una relación directamente proporcional entre x y $f(x)$; y que eso la distingue de la función afín (de la forma $f(x) = mx + b$), las actividades que diseñó parecen dar muestra que el intercepto con el $eje\ y$ (b) tiene un importante significado económico que puede servir para diferenciar matemáticamente estos tipos de funciones.

Es importante resaltar que a través del fenómeno de oferta y demanda es posible clarificar la diferencia entre función lineal y función afín, más aún cuando no hay suficiente literatura que aborde este aspecto, y los problemas de enseñanza tradicionales han generado concepciones erróneas al respecto, que según Muñoz y Sánchez (2011) han creado obstáculos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de estos objetos matemáticos.

6.3 La variable vista en fenómenos de oferta y demanda

Pedro, a través de las situaciones y preguntas que planteó reconoció la *dependencia* de variables y la propuso a través del fenómeno de oferta y demanda como un referente tangible. También, comprendió la idea de variación constante de una función lineal (y afín), pero parece no ser consciente de la distinción entre función y ecuación. Sin embargo, el análisis dio muestras de que la oferta y la demanda posibilita la idea de *funcionalidad*, pues al ser un fenómeno real se puede reconocer cuando una magnitud en efecto o varía (variable), o simplemente tiene un valor desconocido (incógnita).

Lo anterior da muestras de que el fenómeno de oferta y demanda puede también ser útil para profundizar en el significado de la variable, e incluso para potenciar el pensamiento variacional, pues la oferta y demanda posibilita con menor grado de abstracción la idea de dependencia, variación y funcionalidad.

Si bien el estudio se centró en los aprendizajes en el pensamiento matemático (en la medida en que estos fueron lo suficientemente plausibles), a continuación, se esbozan algunos vestigios de resultados sobre el pensamiento didáctico y el pensamiento orquestal, con el ánimo de que estos alienten futuras investigaciones al respecto.

6.4 Aprendizajes en el pensamiento didáctico y orquestal

Desde el pensamiento didáctico se resaltó el uso que hizo Pedro de la Teoría en Educación Matemática para desarrollar la actividad matemática que cosificó en el taller. Se destaca que el contexto de estudio fue el curso de seminario de práctica que precisamente tiene por objetivo que el profesor de matemáticas en formación logre usar la teoría para planear la enseñanza de las matemáticas. En particular, Pedro utilizó tanto la Teoría Ampliada de las Conexiones como la literatura referente al desarrollo del pensamiento variacional (las cuales fueron pertinentes dado el fenómeno de estudio que abordó) para el diseño de situaciones de oferta y demanda en aras de favorecer la comprensión de la función lineal. Se considera que valdría la pena indagar más sobre lo anterior, específicamente cuestionando sobre *¿qué aprendizajes en su formación didáctica se posibilitan en profesores al reflexionar sobre las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas?*

En cuanto al pensamiento orquestal, Pedro aprendió a utilizar los fenómenos, situaciones, problemas y preguntas que ofrecen las disciplinas de la economía y las finanzas como recurso para planear actividad matemática en torno a la función lineal. Lo anterior, aproximándose a la idea económica de oferta y demanda, la cual logra integrar de manera adecuada y paulatina a las actividades que propone. Así mismo, se destaca que Pedro usó situaciones económicas mediante contextos cercanos al estudiante (como la cosecha de aguacates, el precio del iPhone, y la venta dulce) orientadas a desarrollar los procesos matemáticos. Es destacable que, sin tener una formación económica y financiera previo a su participación en la CoP, se vislumbran algunos aprendizajes, *a fortiori* se lograría mucho más con una formación en estas disciplinas. En este sentido, sería interesante preguntarse sobre ¿qué formación económica y financiera requieren los profesores de matemáticas para integrar fenómenos de estas disciplinas en sus prácticas?

6.5 Reflexiones finales del estudio

La investigación que aquí se reportó describió los aprendizajes construidos por profesores de matemáticas en formación que reflexionan sobre las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas para promover actividad matemática en el aula. Descripción que se realizó a través de un caso de estudio: un profesor de matemáticas en formación que reflexionó sobre la función lineal y fenómenos asociados a la oferta y la demanda.

En este sentido, el Modelo teórico-metodológico de Reflexión y Acción (RyA) se erigió como herramienta idónea para el análisis de datos en la medida en que se pudo reinterpretar la actividad matemática a través de las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas, y con esta reinterpretación vislumbrar los aprendizajes posibilitados en el pensamiento matemático del profesor de matemáticas en formación a través de la actividad matemática entendida de esta manera.

En efecto, esta herramienta teórica no solo permitió dar cuenta de los aprendizajes emergentes en el profesor de matemáticas en formación, sino que también permitió vislumbrar las ventajas de utilizar fenómenos de la economía y las finanzas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares. Si bien, aunque el reporte de resultados se hizo a través de un caso de estudio, algunas conclusiones son generalizables a la CoP.

Teniendo en cuenta lo anterior, una limitación de la presente investigación fue que, aunque con criterios rigurosos para su selección, solo se pudo reportar los resultados de un profesor de matemáticas en formación de los 14 que participaron en la CoP. Lo anterior se entiende dada la complejidad que conlleva entender a profundidad los significados que negoció este caso de estudio en la CoP, para poder describir aprendizajes. Sin embargo, los datos de los demás profesores pueden ser fructíferos para una futura investigación más amplia.

En efecto, analizar los datos de los demás profesores de formación, con la profundidad que esto requiere, permitiría reconocer qué objetos matemáticos se pueden enseñar y aprender mejor mediante fenómenos de la economía y las finanzas; así como los objetos matemáticos que pudiesen no tener a este contexto como el óptimo. Si bien, el rastreo general de datos dio algunos indicios, debería haber más investigación en este aspecto.

Tener un panorama más claro sobre lo anterior podría dar lugar, ahora sí, a establecer un plan de formación dirigido al profesor de matemáticas para que atienda la formación económica y financiera de los estudiantes, sin perder de vista el enfoque en los objetos matemáticos escolares.

Desde esta investigación se concluye que dicho plan de formación debe iniciar con una alfabetización económica y financiera, porque desde este campo emergen con naturalidad los objetos matemáticos, y no al revés, pues tener un objeto matemático *a priori* y asignarle un objeto del contexto económico y financiero puede tergiversar el fenómeno real. Así, el profesor de matemáticas, teniendo claridad conceptual sobre el asunto tendría más criterios para orientar la actividad matemática haciendo uso, si conviene, del contexto.

En este sentido, se toma la postura de que las ulteriores investigaciones en esta línea deberían apuntar al diseño de un plan de formación al profesorado de matemáticas, pues si bien hay orientaciones nacionales en el tema (*v.g* MEN, 2014, 2018) los profesores aún no se encuentran totalmente capacitados para promover la educación económica y financiera en los estudiantes ni para incluir fenómenos económicos y financieros en la actividad matemática. Lo anterior supondría desaprovechar un contexto que, como se vio, es fértil para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Referencias Bibliográficas

Alfonso, J. (2024). *Actividad Matemática posibilitada mediante el estudio de situaciones económicas y/o financieras en una población vulnerable*.[Tesis de Maestría]. Universidad Industrial de Santander.

Barría, C. (2019). Por qué se ha disparado el precio del aguacate y hasta cuándo seguirá subiendo. *BBC. https://www.bbc.com/mundo/noticias-49209380.*

Ball, D., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richarson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). American Educational Research Association.

Bakker, A., Cai J., y Zenger, L. (2023). Temas futuros de la investigación en educación matemática: una encuesta internacional antes y durante la pandemia. *Educación Matemática, 35*(2), 9-46. https://doi.org/10.24844/EM3502.01

Barajas, C., Fulano, B., Ríos, W., Salazar, L. y Pinzón, A. (2018). Función constante, lineal y afín. En Gómez, P. *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 3* (pp. 131-185).Universidad de los Andes.

Beswick, K. (2012). Teachers' beliefs about school mathematics and mathematicians' mathematics and their relationship to practice. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 127–147.https://doi. org/10.1007/s10649-011-9333-2

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37-68. https://doi.org/10.1007/BF00302716.

Blu radio, (2024). En Santander se cultiva e 21% del aguacate que se exporta en Colombia a 30 destinos en el mundo. *Blu radio. https://www.bluradio.com/regiones/santanderes/en-santander-se-cultiva-el-21-del-aguacate-que-se-exporta-desde-colombia-a-30-destinos-en-el-mundo-rg10*

Botello, I. (2013). *Procesos de seguimiento y acompañamiento académico a estudiantes de cálculo diferencial: un aula experimental para profesores de matemáticas en formación*. [Tesis de Maestría].Universidad Industrial de Santander.

Boyer, C. (1959). *The history of the calculus and its conceptual Development.* Dover publications.

Businskas, A. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* [Tesis doctoral]. Simon Fraser University.

Campeón Becerra, M. C., Aldana Bermúdez, E., y Villa Ochoa, J. A. (2018). Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones. *Sophia*, *14*(2), 115-126.

Canós, M., Ivorra, C., Liern, V. (2001). *Matemáticas para la economía y la empresa*. Editorial Tirant Lo Blanch.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemátic*a, *7*(3), 91-116.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE/Horsori.

COMAP & SIAM. (2019*). Guidelines for assessment and instruction in mathematical modeling education. Consortium for Mathematics and its Applications & Society for Industrial and Applied Mathematics.* https://www.siam.org.

Conde, A., Parada, S. y Fiallo, J. (2017). Reflexiones en comunidad de práctica sobre Triángulos imposibles en clase de matemáticas.*Educação e Pesquisa*, *43*(2), 453-466.

Cooney, T. (2001). *Considering the paradoxes, perils, and purposes of conceptualizing teacher development*. En F. Lin & T. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 9-31). Kluwer Academic.

D'Ambrosio, U. (2014). Las bases conceptuales del Programa Etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 100-107.

Dewey, J (1989). *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*.Paidós.

Dolores, C y García, J. (2017). Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de cálculo en contexto: Un estudio de casos en el nivel superior. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31* (57), 158-180. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Dolores, C & García, J. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. *49* (2), 227-252. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168.

Echeverría, C. (2022). *Enseñanza del cálculo a persona con características diferenciadas: reflexiones de una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación*. [Tesis de Maestría]. Universidad Industrial de Santander.

Elliott, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción.* Morata.

Escuela de Matemáticas. (2017). *Proyecto educativo que soporta la reforma del programa de Licenciatura en Matemáticas*. [Documento inédito]. Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander.

Espinoza, G. (2020). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media sobre el concepto de función.* [Tesis doctoral]. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Evitts, T. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula* [Tesis doctoral]. Pennsylvania State University College of Education.

Fennema, E. & Loef, M. (1992). *Teachers' knowledge and its impact*. En D. Grows (Eds.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 147-164). Macmillan Publishing Company.

Fiallo, J. y Parada, S. (2018). Estudio dinámico del cambio y la variación. Curso de precálculo mediado por GeoGebra. Ed: Ediciones UIS. ISBN impreso: 978-958-8956-43-5. En Colombia. 2018.

Flores, P. (2007). Profesores de Matemáticas Reflexivos: Formación y Cuestiones de Investigación. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 1*(4), pp. 139-159.

Forster, f. (2011). Secondary Teachers' Beliefs About Teaching Applications – Design and Selected Results of a Qualitative Case Study. En G. Kaiser et al. (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*.(pp 65-74). Springer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel Publishing Company.

Fuentes, C. (2020). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas asociado al concepto de proporcionalidad: un estudio de caso a través del modelo MTSK. *Épsilon-Revista de Educación Matemática, 104*, 25-43.

García, M. & Llinares, S. (1999). Procesos interpretativos y conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Reflexiones desde la perspectiva de la enseñanza como diseño. *Quadrante. Revista teórica e de Investigaçao 8*, 61-84.

García, (2018). Según una encuesta, el 80% de los adolescentes prefiere un iPhone a un Android. *La vanguardia. https://www.lavanguardia.com/andro4all/apple/jovenes-prefieren-iphone-android*

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 32*(1), 199-219.

Grossman, P., Wilson, S. y Shulman, L. (2005). Profesores de sustancia: El conocimiento de la materia para la enseñanza. *Profesorado: Revista de Currículo y Formación de Profesorado, 9*(2), 1-24.

Guerrero-Ortiz, C.,& Borromeo, R. (2022). Pre-service teachers' challenges in implementing mathematical modelling: Insights into reality. *PNA, 16*(4), 309-341. https://doi.org/10.30827/pna.v16i4.21329

Hoffmann, A., & Even, R. (2023). The mutual contribution between mathematics and other fields: Mathematicians' and teachers' views. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 55*, 909-921. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01496-1

Jimenez, S. y Vilaplana, C. (2014). Análisis de la relación entre Educación Financiera y Matemáticas a partir del Programa Escuela 2.0. *Informe Español Análisis secundario PISA 2012*, 77-113.

Ibarra, T. y Moreno, V. (2010). *Una aproximación al concepto de función lineal desde la proporcionalidad directa simple en situaciones de variación de la vida cotidiana*. [Tesis de pregrado]. Universidad de Antioquia.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 38*(3), 302–310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Kilpatrick, J. (2008). A higher standpoint. *ICMI Proceedings: Regular Lectures*, 26–43.

Kwon, N., Orril, Ch. (2008).A comparison study of teacher´s reflection. En O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and XXXth Annual Meeting of the North American Chapter of PME, (p.352).*

Liern, V. (2012). *Matemáticas y economía. Ventajas de la cooperación*. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, Badajoz.

Liern, V. (2013). ¿Qué desarrollar en el área de matemáticas en la economía? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas. (62)*, 11-20.

Leiva, N. W. C. (2021). *Análisis y Valoración de un Proceso de Instrucción de la Función Afín Por un Profesor de Secundaria* (Order No. 29292271). Available from ProQuest One Academic. (2724700787). https://www.proquest.com/dissertations-theses/análisis-y-valoración-de-un-proceso-instrucción/docview/2724700787/se-2

Li, Y., Huang, R. & Tang, C. (2008). Elementary teachers' knowledge in mathematics and pedagogy for teaching. En O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and XXXth Annual Meeting of the North American Chapter of PME, (p.287).*

Llinares, S. (1997) Aprendizaje del profesor de Matemáticas y Reforma. [Conferencia]. *Congreso PROFMAT97*. Lisboa, Portugal, 37-43.

Llinares, S. & Krainer, K. (2006). Mathematics (students) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 429-459). Sense Publishers.

Maab, K., & Gurlitt, J. (2011). LEMA – Professional development of teachers in relation to mathematical modelling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 629–369). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_60

Malaspina, U. (2023). *Matemáticas y realidad en la formación de docentes* [Conferencia]. *XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Lima, Perú.

Mancebón, M. y Pérez, D. (2014). Alfabetización financiera, competencias matemáticas y tipo de centro. *Informe español Análisis secundario PISA 2012*, 137-160.

Marín, K. (2020). *Programa de educación económica y financiera para la formación del docente de Matemática de educación básica y media*. [Tesis de pregrado] Universidad del Atlántico.

Mejía, Y. (2022). *Reflexiones de profesores sobre selección, diseño y uso de recursos para promover actividad matemática: una experiencia desde la ruralidad.* [Tesis de Maestría]. Univeridad Industrial de Santander.

MEN (1998). *Lineamientos curriculares del área de Matemáticas*.Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2016). *Cartilla del profesor de educación económica y financiera para el aula*. Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2014). *Mi plan, mi vida y mi futuro. Orientaciones pedagógicas para la educación económica y financiera*. Ministerio de Educación Nacional.

Morales, Y. y Font, V. (2017). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en Educación Matemática durante su periodo de práctica profesional. *Acta Scientiae*, *canoas*, *19* (1), 122-137.

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación matemática*, *24*(1), 133-157.

Moreno-Armella, L., y Brady, C. (2018). Technological supports for mathematical thinking and learning: Co-action and designing to democratize access to powerful ideas. *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education: Tools, Topics and Trends*, 339-350.

Muñoz, M. Á. M., y Sánchez, P. S. (2011) ¿ Toda gráfica de línea recta es función lineal? *I encuentro de investigadores en didáctica y currículo facultad de ciencias de la educación maestría en ciencias de la educación.* (pp. 228-233). Caquetá, Colombia: Universidad de la Amazonía.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. (M. Fernández, traducción). Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (Obra original publicada en el 2000).

Niss, M., & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge.

Otero, E. (2023).¿Cuántos años dura un móvil y de qué depende? *La vanguardia. https://www.lavanguardia.com/andro4all/moviles/cuantos-anos-dura-un-movil-y-de-que-depende*

Parada, S. (2009). *Reflexión sobre la práctica profesional: actividad matemática promovida por el profesor en su salón de clase*. [Tesis de maestría]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional.* [Tesis doctoral].Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Parada, S. y Pluvinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa (RELIME)*. *17* (1),1-31.

Parada, S. y Fiallo, J. (2022). *Comunidades de práctica de profesores de matemáticas que incoporan tecnologías digitales en el aula.* Ediciones UIS.

Peralta, J. (2002). Dificultades para articular los registros gráficos, algebraico y tabular: el caso de la función lineal. *de XII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Hermosillo, Sonora, México*.

Parra, H. y Chiquiza, G. (2022). *Análisis de impacto sobre las pruebas PISA 2024 ante la implementación de un micro currículo de educación financiera en Colombia*. [Tesis doctoral, Universidad EAFIT]. Repositorio EAFIT. https://repository.eafit.edu.co/

Pineda, S. (2018). *Formación inicial de profesores de matemáticas alrededor de la atención a la diversidad*. [Tesis de maestría]. Universidad Industrial de Santander.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y prática de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó.

Posada, B., y Villa, J. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. En Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia y Universidad de Antioquia (Ed.), Módulo2: Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico. o. (pp.127-163).

Prada, R., Hernández, C., y Ramírez, P. (2016). Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de ingeniería. *Revista científica, 25*(2), 188-205.

Reddy, R., Bruhn, M. y Tan, C. (2013). *Capacidades financieras en Colombia: resultados de la encuesta nacional sobre comportamientos, actitudes y conocimientos financieros*. Banco Mundial.

Rodríguez, E. L., y Fernández, C. M. V. (2011). Análisis histórico de la función afín y la ecuación lineal en la economía desde el enfoque ontosemiótico. *Revista Científica Teorías, Enfoques y Aplicaciones en las Ciencias Sociales*, *4*(8), 17-29.

Rueda, N.J. (2016). *Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación.* [Tesis de Maestría]. Universidad Industrial de Santander.

Sánchez, D. M. (2016). *Conceptualización de la función lineal y afín: una experiencia de aula* [Tesis de Maestría]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Sánchez, M. y Molina, J. G. (2012). Un método para realizar una búsqueda bibliográfica en didáctica de las matemáticas. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 29 – 39).Lectorum.

Sánchez, P., Martínez, M.A. y Coronado, A. (2015). Una caracterización de la Competencia Mate mática Representar: el caso de la función lineal. *Amazonia Investiga*, 4(7), 19-28.

Saint-Onge, M. (1997). *Yo explico pero…¿ellos aprenden ?* Ediciones mensajero.

Savard, A., & Cavalcante, A. (2021). Financial Education and Mathematics Education: A Cross-Cutting Analysis of the Epistemological Intersection of Financial Numeracy. En A. Savard & A. Cavalcante (Eds.), *Financial Numeracy in Mathematics Education* (pp. 37–46). Springer International Publishing.

Schettini, P. y Cortazzo, I. (2015). Tareas del proceso de análisis. En *Análisis de datos cualitativos en investigación social*.(pp.64-85). Editorial de la Universidad de la Plata.

Sevilla, A. (2024). *Economipedía.Ley de Oferta y demanda. https://economipedia.com/definiciones/ley-de-oferta-y-demanda.html*

Schoenfeld, A.(2000). Purposes and methods of research in mathematics education. Notices of the AMS, 47(6), 641-649.

Schoenfeld, A. & Kilpatrick, J. (2008). Towards a Theory of Profiency in Teaching Mathematics. En D. Tirosh & T. L. Wood (Eds.), *The Handbook of Mathematics Teacher Education*, Volume 2, Tools and Processes in Mathematics Teacher Education, 321-354.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner*. Temple Smith.

Segura, G. (2024). Conocimiento especializado sobre la función lineal de un profesor de matemáticas en formación. [Tesis de Maestría]. Universidad Industrial de Santander.

Serrano, E. (2024). *Conexiones entre la Matemática y la Economía: análisis del plan de estudios de un programa de Economía*. [Tesis de Licenciatura]. Universidad Industrial de Santander.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22

Smith-Senger, E. (1999). Reflective reform in mathematics: the recursive nature of teacher change. *Educational Studies in Mathematics, 37*(3), 199-221.

Suárez, S.R. y Rojas, S.J. (2013). *Experiencias didácticas con estudiantes de once grado alrededor de sus competencias comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad*. [Tesis de Licenciatura]. Universidad Industrial de Santander.

Stake, R. (Eds.). (1999). Investigación con estudio de casos. Ediciones MORATA.

Thompson, A. (1992). Teacher´s beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D. Grows (Eds.), *International Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). MacMillan Publishing Company.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas project*. Kluwer Academic Publishers.

Tzur, R. (2001). Becoming a mathematics teacher-educator: Conceptualizing the terrain through self-reflective analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*, 259-283.

Velasco, A. (2022). *Profesores de matemáticas en ejercicio que reflexionan sobre la atención a la diversidad en clase de matemáticas.* [Tesis de Maestría]. Universidad Industrial de Santander.

Villoro, L. (1996). *Creer, saber, conocer.* Siglo XXI Editores.

Wenger, E. (1998). Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity. Cambridge University Press.

Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad. Paidós.

Wilhelmi, M., Godino, J.D., y Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesora de secundaria. *Investigación en Educación Matemática XVIII*, 573-582.

Apéndices

Apéndice A. Caso lineal de la oferta y la demanda

Análisis de la oferta, la demanda y los precios como funciones lineales

En nuestro nuestro trabajo se utilizan funciones lineales (o afines) para estimar la oferta y la demanda, pero es importante tener en cuenta que se ha analizado cómo estas magnitudes dependen del pecio, pero no del tiempo. Es decir, se tiene

$$\begin{aligned} S(p) &= s_0 + s_1 p, \quad \text{(oferta)}, \\ D(p) &= d_0 + d_1 p, \quad \text{(demanda)}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde s_0, s_1, d_0, d_1 son constantes. De acuerdo con Canós et al. (2001), en condiciones normales del mercado,

$$s_0, d_1 < 0, \quad \text{y} \quad s_1, d_0 > 0, \tag{2}$$

porque así $S(p)$ describe cómo la oferta aumenta cuando el precio aumenta (*ley de la oferta*), mientras que $D(p)$ refleja cómo la demanda disminuye cuando el precio aumenta (*ley de la demanda*).

Estas son las características habituales de un mercado. Sin embargo, en economía, se dice que un bien es de Veblen (Wood, 1993)[1] si la demanda tiene pendiente positiva, es decir, que al aumentar su precio también aumenta su cantidad demandada, en vez de disminuir como marca la ley de la oferta y la demanda. Esto ocurre cuando un bien es superior o de lujo, ya que al aumentar su precio, la gente lo consume más, debido a que se considera más exclusivo. Ejemplos de esto serían los diamantes, coches de lujo, etc.

Cuando los mercados se dan en condiciones normales, se suele verificar, aunque sea de manera aproximada, la Ley de Walras (Chiang, 1987)[2]. Esta establece una relación del precio, la oferta y la demanda con el tiempo a través de sus variaciones. Podríamos formular esta ley de la forma siguiente:

> *Ley de Walras:* La variación temporal del precio es proporcional a la diferencia entre la demanda y la oferta.

Expresado de forma matemática y para variaciones marginales (Canós et al., 2001),

[1] Wood, J. C. (1993). Thorstein Veblen: Critical Assessments Routledge, Londres.
[2] Chiang, A. (1987): Métodos fundamentales Economía Matemática, Madrid, McGraw-Hill.

esta ley se puede expresar como[3]

$$\frac{dp}{dt} = k(D - S). \tag{3}$$

En realidad, con la ley de Walras se interpretan la oferta y la demanda como funciones compuestas que dependen del tiempo (ver Figura 1).

$$\begin{tikzcd} \text{Oferta} \arrow[r, "S(p)"] \arrow[rr, bend right, "S(p(t))"'] & \text{precio} \arrow[r, "p(t)"] & \text{tiempo} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \text{Demanda} \arrow[r, "D(p)"] \arrow[rr, bend right, "D(p(t))"'] & \text{precio} \arrow[r, "p(t)"] & \text{tiempo} \end{tikzcd}$$

Figura 1: Oferta y demanda en función del tiempo.

Pregunta: ¿Podrían ser lineales las funciones oferta, demanda y precio y verificarse la ley de Walras?

Supongamos que el precio se expresa con la función lineal siguiente:

$$p(t) = p_0 + p_1 t, \tag{4}$$

donde p_0 y p_1 son constantes.

La diferencia entre demanda y oferta es:

$$(D - S) = d_0 - s_0 + (d_1 - s_1)p. \tag{5}$$

Si suponemos que el precio depende del tiempo, la diferencia anterior es

$$(D - S) = d_0 - s_0 + (d_1 - s_1)p(t). \tag{6}$$

Reemplazamos (4) en (6):

$$(D - S) = d_0 - s_0 + (d_1 - s_1)(p_0 + p_1 t). \tag{7}$$

Expandiendo los términos:

$$(D - S) = (d_0 - s_0 + d_1 p_0 - s_1 p_0) + (d_1 - s_1)p_1 t. \tag{8}$$

Si calculamos la derivada de $p(t)$, se tiene $\frac{dp}{dt} = p_1$, por lo tanto, para que se cumpla

[3] Teniendo en cuenta (1) y suponiendo que $d_1 \neq s_1$, la solución general de (3) es

$$p(t) = \frac{1}{d_1 - s_1}(He^{k(d_1 - s_1)t} - d_0 + s_0),$$

siendo H una constante que depende de las condiciones iniciales.

la Ley de Walras, la parte variable debe ser cero. Esto implica:

$$(d_1 - s_1)p_1 t = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 0, \quad \text{o bien} \quad d_1 = s_1. \tag{9}$$

- Si $p_1 = 0$, entonces $p(t) = p_0$, es decir que el precio es constante, con lo cual, tanto la oferta como la demanda serían constantes, $S(p) = s_0$, $D(p) = d_0$, cosa que no tendría sentido en Economía y mucho menos si d_0 fuese negativo.
- Si $d_1 = s_1$, significa que no solo se trata de un bien de Veblen, sino que además los crecimientos en oferta y demanda se producen en la misma proporción, cosa que desde luego no es una situación habitual.

Conclusión: En circunstancias normales del mercado, la linealidad de la oferta, la demanda y el precio (las tres simultáneamente) no son compatibles con la ley de Walras.

Veamos un ejemplo

Suponga que las funciones de Oferta y Demanda

$$S(p) = s_0 + s_1 p$$

$$D(p) = d_0 + d_1 p$$

Son respectivamente:

$$S(p) = -1000 + 2p$$

$$D(p) = 5000 - p$$

Por la Ley de Walrass se tiene que:

$$\frac{dp}{dt} = k(D - S)$$

Si suponemos que el precio inicial es 2500: $p(0) = 2500$

Se tiene como solución:

$$p(t) = \frac{1}{d_1 - s_1}(He^{k(d_1 - s_1)t} - d_0 + s_0)$$

$$k = 0,1$$

Reemplazando:

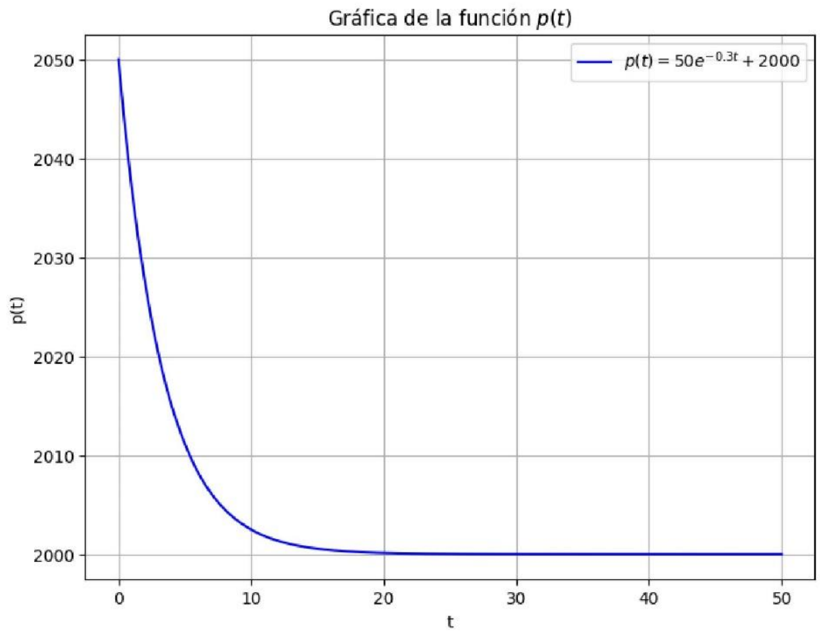
$$p(t) = -\frac{1}{3}(He^{-0,3t} - 6000) \quad \text{como} \quad p(0) = 2500$$

$$H = -1500$$

Luego

$$p(t) = -\frac{1}{3}\left(-1500 * \frac{e^{-0,3t}}{10} - 6000\right)$$

$$\boldsymbol{p(t) = (50e^{-0,3t} + 2000)}$$



La cual, evidentemente, no es lineal.

Apéndice B. Encuesta a profesores de matemáticas en formación

Encuesta a profesores de matemáticas en formación

Nombre: ______________________________

1. ¿Qué reflexiones le surgieron al culminar el curso, en cuanto a la integración del contexto de la Economía y las Finanzas a la Educación Matemática?
2. ¿Considera pertinente el uso de fenómenos económicos y financieros para enriquecer la actividad matemática en el aula?
3. ¿Considera necesario que el profesor en formación se capacite en temas de Economía y Finanzas? ¿Cómo cree que se debería llevar a cabo dicha formación?
4. Según su proceso de aprendizaje, ¿cuál cree que es el aporte de la Economía y las Finanzas en el abordaje de los objetos matemáticos?
5. ¿Considera que es estrictamente necesario tener habilidades, conocimientos, competencias matemáticas para comprender los fenómenos de la Economía y las Finanzas?
6. Esboce sus principales reflexiones del proyecto realizado, en cuanto a su pensamiento matemático.
7. Esboce sus principales reflexiones del proyecto realizado, en cuanto a su pensamiento didáctico.
8. Esboce sus principales reflexiones del proyecto realizado, en cuanto a su pensamiento orquestal.
9. ¿Cree que el uso del contexto económico y financiero dio aportes a su conocimiento matemático, didáctico y/o orquestal? ¿A cuál le dio mayores aportes? Reflexione a profundidad.
10. Nombre algunas ventajas de usar las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas.
11. Mencione algunos obstáculos para usar las conexiones entre la matemática, la economía y las finanzas en su práctica docente.

1

12. Podría nombrar un ejemplo en donde un objeto de la economía y las finanzas ayude a clarificar un objeto matemático.

13. Si tiene alguna inquietud, crítica, sugerencia, aporte o comentario sobre la experiencia realizada en el curso, escríbala en este espacio.

14. Valore de 1 a 5, qué tanto ve las conexiones entre las matemáticas y el contexto de la economía y las finanzas.

1	2	3	4	5

Los resultados de esta encuesta solo serán utilizados para fines investigativos.

Apéndice C. Taller diseñado por Pedro

Universidad Industrial de Santander

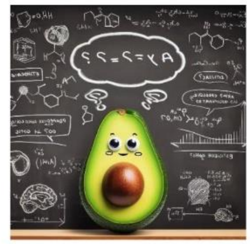
OFERTA Y DEMANDA EN EDUCACIÓN MEDIA

¿Cómo se evidencian las nociones de oferta y demanda usando funciones lineales?

Primer Momento

El fenómeno verde: explorando la economía detrás de los aguacates

A partir de la infografía anterior responda las siguientes preguntas:



a) ¿Cuáles son las dos variables que están en juego en las épocas de cosecha en la situación de los aguacates?

____
____
____

b) ¿Por qué cree que el precio de aguacate en época de baja cosecha aumenta?

____
____
____

c) ¿Por qué cree que el precio del aguacate en época de alta cosecha disminuya?

____
____
____
____

¿Sabías qué?

El precio de los pasajes de avión suele ser más alto en temporada de vacaciones. Esto debido a que las personas viajan más, produciendo así que suba la demanda, lo que ocasiona que el precio de dichos pasajes aumente.

Segundo Momento

Una mirada económica al iPhone 13

Ten en cuenta que....

El consumidor elige comprar el producto que más se ajuste a su presupuesto, y además que satisfaga sus necesidades.

Edición especial

EL MENSAJERO

Autor: Pablo Rivera
Fecha: 20 de diciembre de 2023

UNA MIRADA ECONÓMICA AL IPHONE 13

HECHEMOS UN VISTAZO

El 12 de octubre de 2021 fue un día muy importante para los usuarios de iPhone en nuestro país, ya que era el lanzamiento de la generación de celulares más avanzada de la empresa Apple. El precio de lanzamiento del iPhone 13 (256 GB) era de $ 4.799.000; vendiéndose 190.000 unidades en ese mismo año, sin embargo, en 2023 su precio es de $4.200.000, y se estima que se han vendido entre 500.000 y 1 millón de unidades.

DATOS IMPORTANTES SOBRE EL IPHONE 13 (2021-2023)

En el año 2022 las ventas de iPhone 13 aumentaron en un 20% respecto al 2021, además el precio de este dispositivo móvil disminuyó en un 4% de 2022 a 2023.
Sin duda alguna iPhone es un celular que revoluciona con su tecnología.

MÁS INFORMACIÓN EN WWW.ELMENSAJERO.COM

A partir de lo información anterior dada en el periódico “EL MENSAJERO”, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto disminuyó el valor del IPhone 13 entre el 2021 y 2023?

b) ¿Qué variables están en juego en la situación?

c) ¿En el 2021 la gente compró más celulares iPhone 13 qué en el 2023? Expliqué la razón de por qué ocurre eso.

d) ¿Por qué cree que el precio de este dispositivo móvil disminuyó en el periodo de 2021 a 2023?

Nota: Consulte los datos en la sección de periódico.

e) Teniendo en cuenta que en la noticia se afirma que en el año 2022 las ventas de iPhone 13 aumentaron en un 20% respecto al 2021, entonces ¿Cuántas unidades de iPhone 13 se vendieron en 2022?

f) Si el precio del dispositivo móvil disminuyó en un 4% de 2022 a 2023, entonces ¿Qué precio tenía el iPhone 13 en el 2022?

Prediciendo el fenómeno

g) Si en el 2024 la gente siguiera comprando más iPhone 13 ¿su precio aumentaría o disminuiría? ¿Por qué?

____
____
____
____
____
____

Tercer Momento

Venta dulce

Los administradores de una cafetería de un colegio pequeño están interesados en vender dos tipos de sabores de pastelillos; de chocolate y vainilla a los estudiantes en los horarios de descanso. Para empezar el negocio, el primer día que es lunes se ofrece los pastelillos de chocolate a $2.500 y los pastelillos de vainilla a $1.700. Luego que transcurrieron 5 días, es decir, hasta el viernes la cantidad de pastelillos vendidos de cada sabor es: El lunes se vendieron 15 pastelillos de chocolate y 13 de vainilla. El martes se vendieron 14 de chocolate y 10 de vainilla. El miércoles se vendieron 13 de chocolate y 7 de vainilla. El jueves vendieron 12 de chocolate y 4 de vainilla, Y por último, el viernes vendieron 11 de chocolate y 1 de vainilla

Teniendo en cuenta la información anterior responda:

a) ¿Cuáles son las variables que actúan en el problema tanto para los pastelillos de chocolate como los de vainilla?

____
____
____

b) ¿Cuál es la variable independiente (VI) y la variable dependiente (VD) respecto a los pastelillos de chocolate?

____
____
____

c) ¿Cuál es la variable independiente (VI) y la variable dependiente (VD) respecto a los pastelillos de vainilla?

____
____
____

¿Sabías qué?

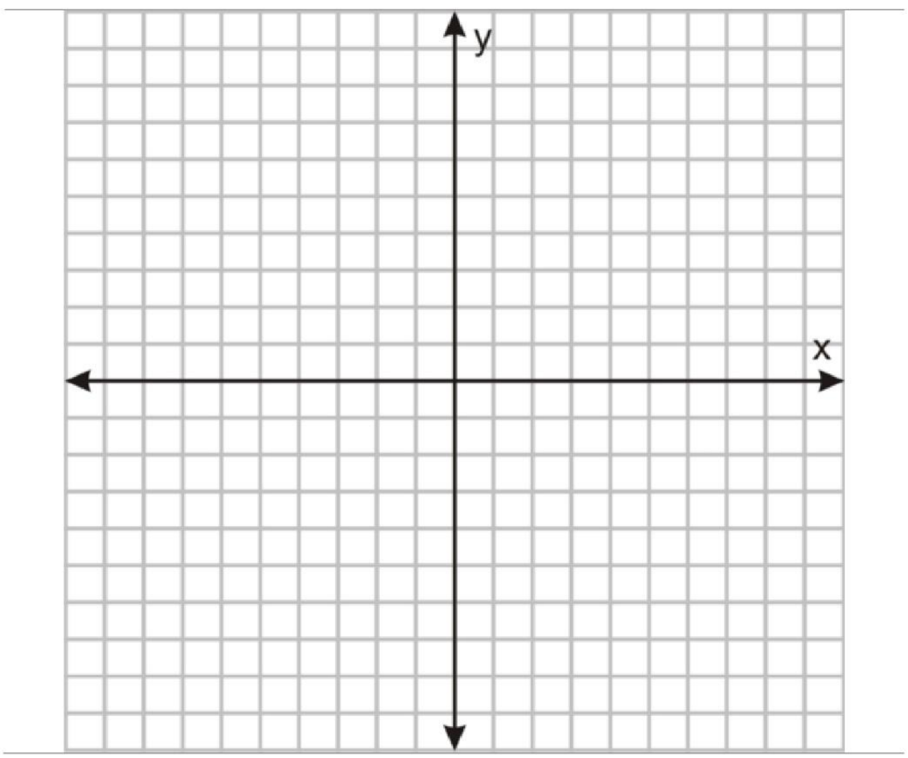
La oferta y la demanda determinan la cantidad y precio de los bienes y servicios, proporcionando las señales para la asignación de los recursos escasos de la economía.

d) Organice los valores de la cantidad de pastelillos de chocolate y vainilla venidos en los 5 días y su respetivo precio en las siguientes tablas

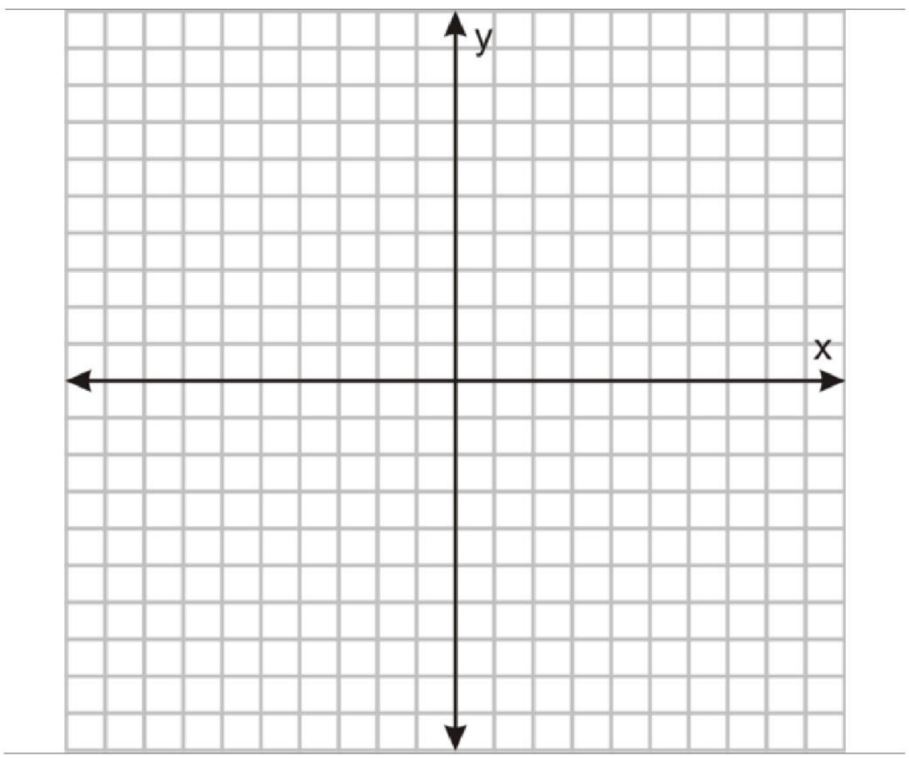
Pastelillos de chocolate	
V.I: _______________	V.D: _______________
14	
	30.000

Pastelillos de vainilla	
V.I: _______________	V.D: _______________
	17.000
1	

e) Con ayuda de la tabla anterior halle la ecuación lineal que representa el precio de la cantidad de pastelillos de **chocolate** vendidos y además represente esta ecuación en el plano cartesiano



f) De la misma manera que el ítem anterior halle la ecuación lineal que representa el precio de la cantidad de pastelillos de **vainilla** vendidos y además represente esta ecuación en el plano cartesiano



g) Al analizar las respectivas graficas de la venta de pastelillos de chocolate y vainilla ¿las ventas disminuyeron o aumentaron en los 5 días de venta? Justifique el por qué

____
____
____

¡OJO!

La oferta es la cantidad de bienes y servicios que los productores están dispuestos a vender a un precio específico.

Ajustando los precios de venta

Los administradores de la cafetería del problema anterior se dieron cuenta por la representación de la gráfica de las ventas de pastelillos que no fueron muy buenas. Por este motivo deciden cambiar el precio de los tipos de pastelillos para ver si aumenta las ventas desde el siguiente lunes. Ahora ofrece los pastelillos de chocolate a $1.700 y de vainilla a $1.300. Al trascurrir los días hasta el viernes se obtuvieron por parte de la cafetería las siguientes ventas: El lunes se vendieron 15 pastelillos de chocolate y 7 de vainilla. El martes se vendieron 20 de chocolate y 20 de vainilla. El miércoles se vendieron 25 de chocolate y 33 de vainilla. El jueves vendieron 30 de chocolate y 46 de vainilla, Y el viernes vendieron 25 de chocolate y 58 de vainilla.

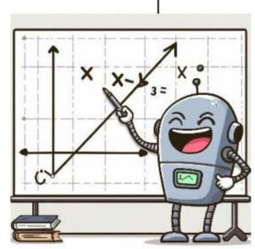
Teniendo en cuenta los nuevos valores de ventas y precios de de pastelillos:

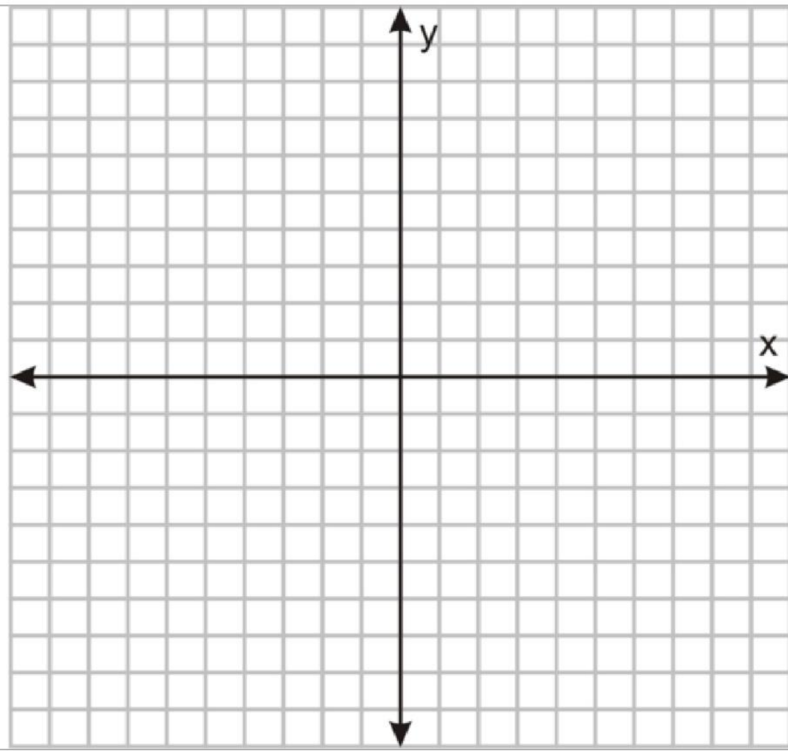
a) Organice los valores de las nuevas ventas y los nuevos precios de los pastelillos de chocolate y vainilla

Pastelillos de chocolate	
Cantidad de pastelillos vendidos	**Precio de los pastelillos vendidos**

Pastelillos de vainilla	
Cantidad de pastelillos vendidos	**Precio de pastelillos vendidos**
	17.000
1	

b) Halle la ecuación lineal que representa el precio de la cantidad de pastelillos de **chocolate** vendidos y además represente esta ecuación en el plano cartesiano





c) Al analizar las respectivas graficas de la venta de pastelillos de chocolate y vainilla ¿las ventas disminuyeron o aumentaron en los 5 días de venta? Justifique el por qué

____

____

____

¡OJO!

La demanda se refiere a la cantidad de un bien o un servicio que un comprador está dispuesto a adquirir a un precio determinado

Cuarto Momento

Expresando lo trabajado

De los problemas anteriores

a) ¿Conoces situaciones del entorno que sean similares a los problemas anteriores? ¿Cuáles?

____
____
____
____
____
____
____
____

b) ¿La oferta (cantidad que se ofrece de algo) y la demanda (cantidad que se compra) se relaciona mutuamente? Si su respuesta es sí ¿Por qué cree que sucede esta relación?

____
____
____
____
____
____
____
____

Universidad Industrial de Santander

Para pensar creativamente, debemos ser capaces de considerar de nuevo lo que normalmente damos por sentado.

George Kneller

¡FIN!