ESTUDIO Y DESARROLLO DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL PROBLEMA DE INVENTARIO Y RUTEO (IRP)

ELSA BARRAGÁN PINEDA

LEIDY JOHANA ROMERO CUERVO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS

ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES

BUCARAMANGA

2015

ESTUDIO Y DESARROLLO DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL PROBLEMA DE INVENTARIO Y RUTEO (IRP)

ELSA BARRAGÁN PINEDA
LEIDY JOHANA ROMERO CUERVO

Trabajo de grado para optar el título de Ingeniero Industrial

DIRECTOR
JAVIER ARIAS OSORIO
Ingeniero de Sistemas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES
BUCARAMANGA
2015

AGRADECIMIENTOS

A Dios por darme la sabiduría y acompañarme durante este camino.

A mi Director de proyecto el profesor Javier Arias Osorio, por su apoyo y acompañamiento en el desarrollo de éste.

A mis padres por estar siempre conmigo, en los momentos más difíciles, por su apoyo y por creer en mí.

A mis amigos, mis compañeros de estudio quienes con sus ideas y tiempo compartido me permitieron crecer como persona y profesional.

Leidy Johana Romero Cuervo

A Dios por darme perseverancia y fortaleza en los momentos difíciles.

A mi madre por su amor y apoyo.

A mi hermana Liliana Barragán por su compañía y comprensión.

A Jaime Rueda por su apoyo en el transcurso de mi carrera.

Al profesor Javier Arias Osorio, director del proyecto, por su valiosa ayuda en el desarrollo de éste.

A mis familiares y amigos quienes me apoyaron y confiaron en mí.

Elsa Barragán Pineda

CONTENIDO

Pág.

LISTA DE TABLAS

Pág.

LISTA DE ILUSTRACIONES

Pág.

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO Y DESARROLLO DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL PROBLEMA DE INVENTARIO Y RUTEO (IRP).*

AUTORES: BARRAGÁN PINEDA, Elsa; ROMERO CUERVO, Leidy Johana. **

PALABRAS CLAVES: Problema de ruteo e inventario (IRP), Algoritmo de ahorro Clark and Wright, Algoritmo de mejora 2-OPT, Búsqueda Tabú.

DESCRIPCION:

El problema de ruteo e inventario (IRP), pretende satisfacer la demanda de un grupo de clientes que se encuentran distribuidos geográficamente; para lo cual se utiliza una flota de vehículos que tienen capacidad limitada y que se encuentran en un depósito. El objetivo de este problema está en la unión de dos actividades de la cadena de suministro, como lo son el manejo de inventarios y la distribución física de productos. Se debe reducir los costos de transporte como de mantener inventario en un periodo.

Para el presente proyecto se le dará solución al problema de ruteo e inventario por medio de métodos exactos y aproximados, en donde las heurísticas abordadas son el algoritmo de mejora 2-OPT y el algoritmo de ahorro de Clark and Wright; así como la metaheurística Búsqueda Tabú la cual tomará como semilla la solución encontrada por las heurísticas ya mencionadas.

Para la solución de este modelo se utilizaron herramientas computacionales como lo son: Excel en donde se verifica el modelo, Gams en el que se comprueba solución óptima hallada en el Solver de Excel y posteriormente se modifican parámetros como lo es el número de clientes; y Matlab para la solución de las heurísticas y metaheurísticas ya mencionadas. Con los resultados obtenidos se realiza una comparación entre los métodos de solución en relación con los tiempos de ejecución, número de iteraciones y el costo total por cada instancia estudiada.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ingenierías Fisico Mecánicas, Escuela de estudios Industriales y Empresariales. Director: Javier Arias Osorio

ABSTRACT

TITLE: STUDY AND DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL FOR THE ROUTING AND INVENTORY PROBLEM (IRP).*

AUTHORS: BARRAGÁN PINEDA, Elsa; ROMERO CUERVO, Leidy Johana.**

KEYWORDS: Routing and inventory problem (IRP), algorithm Clark and Wright saving, improvement algorithm 2-OPT, Tabu Search.

DESCRIPTION:

The routing and inventory problem (IRP) pretend to satisfy the demand of a group of customers that are distributed geographically; for which a fleet of vehicles that have limited capacity and are used in a warehouse. The objective of this problem is the union of two activities of the supply chain, such as inventory management and physical distribution of products. Must be reduce the costs of transport and inventory holding in a period.

For this project it will solve the problem of routing and inventory by means of exact method and approximate methods, where the heuristics addressed are the Improvement algorithm 2-OPT and algorithm Clark and Wright saving; and the Tabu Search metaheuristic which take as seed the solution found by the heuristics mentioned above.

For the solution of this model there were use computational tools such as: Excel where the model is validated, Gams is used to prove the optimal solution found in the Excel's Solver and then the parameters are modified such as the number of customers; and Matlab for solving heuristics and metaheuristics mentioned above. With the results obtained is performed a comparison between the methods of solution in relation to execution times, number of iterations and the total cost for each instance studied.

---

* Degree Work

** Faculty of Physical-Mechanical Engineering. School of Industrial and Business Studies. Director: Javier Arias Osorio.

INTRODUCCIÓN

Para las empresas que cuentan con un servicio de entrega al cliente de productos o servicios, principalmente para las primeras, es muy importante contar con una excelente logística de distribución física que garantice el suministro oportuno de lo demandado en el tiempo y lugar requerido por sus clientes; manteniendo a su vez un adecuado nivel de inventarios que le permita optimizar los costos. El Problema de Ruteo de Inventario (IRP) modela una situación que se presenta comúnmente en las empresas e involucra en un modelo a dos de las actividades más importantes de una cadena de suministro: el manejo de inventarios y la distribución física de productos.

En este trabajo se abordará la temática de cómo distribuir un producto al cliente, buscando reducir los costos de mantener inventario de transporte y con esto la satisfacción de los clientes. En la literatura reciente en el campo de la optimización matemática se ha trabajado tanto los problemas de manera independiente como conjunta.

Desde la década de los 60´s se encuentran artículos en donde se abordan temas como el problema del Agente Viajero (TSP), y el problema de Ruteo de Vehículos (VRP) y; en donde se tienen en consideración la minimización de los costos de transporte, y donde considerando el tipo de vehículo que llevará el pedido al cliente; se analiza cuál cliente se atenderá en un tiempo determinado para no incurrir en desabastecimiento, entre otras consideraciones. En resumen, la forma de entregar los productos con el mínimo costo, tiempo o distancia.

También y de manera independiente se han abordado en la literatura de optimización y desde hace ya varias décadas, los temas de inventarios de un solo escalón, multi-escalón y demás, con el fin de minimizar los costos de manejo de inventario.

Desde el punto de vista de la cadena de suministro, también existe una variedad de autores que han trabajado el análisis conjunto de dos o más actividades logísticas considerando los factores que involucran entre uno o varios agentes de la misma. Es en esta categoría donde se ubica el problema de ruteo de inventario que se presenta en este trabajo, haciendo uso de métodos y técnicas de optimización para establecer las características que se han de tener en cuenta en la creación de un modelo matemático que considere la logística de inventarios y la logística de transporte.

Dentro de estos métodos se relacionan los métodos exactos, los cuales parten de una formulación matemática y llegan a una solución óptima, y los métodos aproximados, que se limitan a proporcionar una buena solución, pero que no necesariamente es la óptima; dentro de estos últimos se hablará de las heurísticas propias del problema y las metaheurísticas.

Para abordar el conocimiento y la práctica de los modelos y métodos se hará uso de la programación computacional, mediante la construcción y ejecución de algoritmos en software como MATLAB y GAMS.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Debido a que el Problema de Ruteo e inventario (IRP), estudia el manejo óptimo de inventarios y la distribución de productos a diferentes clientes en un horizonte de planificación determinado, se formulará un modelo matemático para éste, con la experimentación computacional haciendo uso de técnicas exactas y heurísticas propias del mismo; lo cual permitirá la reducción de costos de almacenamiento y distribución tanto para el cliente como para el proveedor.

2. JUSTIFICACIÓN

Desde la concepción del producto hasta la entrega, a lo largo de la cadena de suministro existen distintos agentes generadores de valor y a su vez generadores de costos que se trasladan al cliente. Una de las formas de reducir dichos costos a lo largo de la cadena tiene que ver con el manejo de los niveles de inventario en cada agente así como el proceso de distribución entre ellos. Análisis de estas situaciones de manera individual o de manera integrada son elementos de interés en un estudio como el nuestro.

En los referentes teóricos existen varios estudios en donde se han abordado algunas variaciones con relación al problema de enrutamiento de inventario, el cual busca que los costos tanto de transporte como mantenimiento de inventario se minimicen, logrando satisfacer la demanda de los clientes, sin generar desabastecimientos, pero respetando las limitaciones de capacidad de almacenamiento. Como solución a este problema se pueden encontrar diferentes métodos que se han establecido para que el producto a entregar esté listo así como aumentar el rendimiento de la cadena de suministro.

En este trabajo se pretende revisar algunas de las formulaciones que en la literatura se han visto sobre el problema de optimización en mención, para poder llegar a plantear un modelo con el cual se puedan aplicar diferentes técnicas exactas y heurísticas, para luego ser validados con los resultados obtenidos en la literatura.

3. OBJETIVOS

3.1 Objetivo general

Desarrollar un modelo para la solución del problema de inventario y ruteo, mediante métodos exactos y heurísticos.

3.2 Objetivos específicos

- Realizar una revisión de la literatura sobre el problema mismo y los métodos de solución existentes al problema.
- Analizar las formulaciones revisadas para establecer las características a considerar, en la formulación del modelo.
- Definir un método exacto, un método heurístico y una metaheurística para trabajar el modelo establecido.
- Desarrollar los algoritmos apropiados para evaluar el modelo y las técnicas en las herramientas computacionales planteadas.
- Comparar los resultados obtenidos del modelo con instancias recopiladas en la literatura existente.
- Elaborar un artículo publicable con los resultados del trabajo de investigación

4. ALCANCE

- Formulación del modelo.

Con las características que han sido identificadas en las etapas anteriores, se formulará el modelo matemático que se va a emplear en el trabajo de grado. A partir de la consideración del modelo, se seleccionan las técnicas a utilizar para la experimentación.

- Programación de algoritmos.

Desarrollo de los algoritmos, técnicas que han sido seleccionadas, según las características de cada uno en el lenguaje de programación de EXCEL, GAMS y/o MATLAB.

- Experimentación.

En este apartado se realizará la prueba de los algoritmos con algunas variaciones a las características propias del modelo como es la demanda (estática o dinámica), costos de mantener inventario igual o diferente según el periodo, el horizonte de planificación y el número de clientes.

- Redacción del documento resumen del trabajo.

Creación del artículo en el que se plasme los resultados obtenidos de la experimentación realizada en la programación.

5. MARCO REFERENCIAL

5.1 MARCO CONCEPTUAL

Para esta investigación se han tomado los conceptos de artículos, así como la visita a páginas web y la búsqueda en libros en relación a los temas de ruteo de vehículos y problemas en donde se relacionen la gestión de inventarios. A continuación se muestran los conceptos que son importantes para este trabajo de investigación.

5.1.1 Optimización: Consiste en encontrar una alternativa de decisión con la propiedad de ser mejor que cualquier otra en algún sentido, que las demás posibles. Se busca establecer las decisiones (variables) que afectan al valor del sistema que se desea maximizar y minimizar (función objetivo), y pueden ser independientes o dependientes para así satisfacer sus restricciones.

Los problemas de optimización están compuestos por variables, restricciones y la función objetivo, éstos podrán ser modelados matemáticamente para luego ser resueltos con técnicas propias de la investigación de operaciones cuyo principal objetivo es la aplicación de métodos científicos en la mejora de la efectividad en las operaciones, decisiones y gestión.[1]

El desarrollo de modelos matemáticos puede llegar a representar un problema de la vida real, de un sistema, que permite la comprensión y estudio de su comportamiento. Un modelo debe equilibrar la necesidad de contemplar todos los detalles con la factibilidad de encontrar técnicas de solución adecuadas, ayudando a la toma de decisiones debido a que sus resultados deben ser útiles.

---

[1] RAMOS Andrés; SÁNCHEZ, Pedro y FERRER, José. Modelos Matemáticos de Optimización. Universidad Pontificia Comillas Madrid. Escuela técnica superior de Ingeniería. Departamento de Organización Industrial. [en línea]. (2010). [consultado 5 en. 2015]. Disponible en: <http://www.iit.upcomillas.es/aramos/presentaciones/t_mmo_M.pdf >

5.1.2 Optimización Combinatoria: La optimización combinatoria se refiere a aquellos problemas que se centran en la toma de decisiones. Algunos de los objetivos de este tipo de problemas es la minimización en el uso de recursos empresariales, la ruta más corta en la distribución de productos y/o servicios, el ruteo de vehículos en empresas de transporte, entre otros hacen parte de este tipo de problemas. Su dominio se compone de problemas de optimización donde el conjunto de posibles soluciones es discreto o se puede reducir a un conjunto discreto.

Los problemas de optimización combinatoria buscan encontrar una solución factible, en donde su aproximación al valor óptimo será probablemente suficiente. Este tipo de problemas pueden estar ligados a la asignación de recursos para cumplir su objetivo el cual puede ser sobre un espacio de distribuciones en donde se construye un solo valor, o puede contemplar más de uno.

Los problemas de optimización combinatoria reducen el tamaño del espacio de búsqueda en donde existe infinidad de soluciones, explorándolo, de tal manera que podría lograr la resolución de problemas que según su complejidad no podrían ser resueltos con facilidad.

Este tipo de problemas son resueltos con ayuda de un ordenador y según el nivel de complejidad. Se puede encontrar que hay problemas que no pueden ser resueltos por cualquier tipo de medios mecánicos debido a su complejidad.

Un problema de optimización se define como:

P: MIN (MAX) f(x)
X € S.

Donde X es el espacio de soluciones y $S \subset X$ es la región factible dentro del espacio X. S es el conjunto de soluciones factibles.

Un problema de optimización es de optimización combinatoria, si X y S son combinatorios o discretos, es decir, si son conjuntos de un número finito de elementos o de infinitos elementos numerables. Por tanto, se puede decir que un procedimiento de resolución de problemas de optimización combinatoria trata de encontrar una solución, que optimice (minimizando o maximizando) una función objetivo sobre un espacio combinatorio o discreto.[2]

Una de las características de algunos problemas combinatorios es que pueden tener muchos óptimos globales, mientras que pueden tener más óptimos locales. Entiéndase por óptimo global la combinación que maximiza el valor de la función de ganancia. El proceso de búsqueda de la solución óptima puede consistir de una o más iteraciones, el mejor valor encontrado en cada iteración es conocido como un óptimo local. Esto se puede entender mejor, si se introduce el concepto de vecindad.

Una vecindad N (x, σ) de una solución x es un conjunto de soluciones que pueden ser alcanzadas a partir de x aplicando una operación σ. Tal operación σ puede ser agregando o quitando un elemento de la solución. El intercambio de objetos es otro ejemplo de tal operación, éstos son particularmente comunes en problemas de secuenciación. En la técnica BT (Búsqueda tabú), estas operaciones son llamadas movimientos. Si una solución y es mejor que cualquier otra solución en esta vecindad N (x, σ), entonces y es un óptimo local con respecto a esa vecindad.

En algunos de los casos es posible encontrar un movimiento σ, tal que un óptimo local sea también un óptimo global, por ejemplo, en algunos casos de problemas

[2] Pastor, R. (1999). Metalgoritmo de optimización combinatoria mediante la exploración de grafos. Universidad Politécnica de Catalunya, Catalunya, España. p 15

de secuenciación de máquinas, el intercambio de un par de elementos tiene esta propiedad.

La mayoría de los tratamientos existentes para los problemas de optimización combinatoria, se concentran en métodos exactos, más que en heurísticos. Estos métodos están ligados a la teoría de programación lineal o usan técnicas de enumeración implícita.[3]

La complejidad de estos problemas puede estar relacionada con el número de variables y restricciones que contienen el problema a tratar. Según su complejidad los problemas pueden ser[4][5]:

a) P (Polinomial –time).

La clase P (Polinomial – time) puede tener un tiempo de ejecución polinomio para encontrar la solución al algoritmo del problema en estudio. En este tipo de problema computacional lo importante es el tiempo en el que un ordenador puede darle una solución a éste.

b) NP (Non deterministic Polinomial time).

Los problemas de este tipo siguen un tiempo de proceso exponencial, la solución de este algoritmo puede ser comprobada en un tiempo polinomial, pero esto no garantiza que su solución sea verificada o rechazada.

---

[3] SÁNCHEZ HERRERA, Jorge. Búsqueda tabú para resolver un problema de cambios de escuela en educación básica en México distrito federal. México D.F., 2003, 27-30. Tesis (Maestro en ciencias de la computación). Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en computación.
4 HAMALAINEN, W. Class NP, NP-complete, and NP-hard problems. [en línea] 6 de noviembre de 2006.[consultado 29 nov. 2014]. Disponible en: <http://cs.joensuu.fi/pages/whamalai/daa/npsession.pdf>.
[5] The Classes P and NP. [en línea] [consultado 29 nov. 2014]. Disponible en: <http://www.cs.uky.edu/~lewis/cs-heuristic/text/class/p-np.html>.

c) NP Complete.

La clase de complejidad NP-Completo, es un problema que podrá convertirse en otro problema NP, en donde el tiempo y esfuerzo computacional aumenta exponencialmente. Este tipo de problemas se caracteriza por su complejidad.

Un problema de decisión B es NP-Completo si:

1. B es un problema NP, y
2. Todo problema de NP se puede transformar polinómicamente en B.

d) NP- Hard.

NP-hard (NP-difícil) es un problema que no necesariamente pertenece al conjunto de NP, en un tiempo polinomial razonable puede ser reducido a un problema NP- completo. Se distingue de NP- completo por ser igual o más complejo.

5.1.3 Modelo de Optimización: Un modelo es una representación matemática simplificada de una realidad compleja, siendo una herramienta de ayuda para la toma de decisiones. Es un esquema teórico que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento, este modelo puede ser exhaustivo (casi real), puede ocasionar la carencia de un algoritmo que solucione el problema; y simplista para utilizar un algoritmo disponible, obteniendo soluciones al problema que no existen.[6]

---

[6] RAMOS Andrés; SÁNCHEZ, Pedro y FERRER, José. Modelos Matemáticos de Optimización. Universidad Pontificia Comillas Madrid. Escuela técnica superior de Ingeniería. Departamento de

En un modelo matemático inicialmente se debe identificar el problema, para esto es necesario recolectar información, definir el problema en términos vagos, interpretar y traducir a términos precisos, además que es imprescindible asegurarse de que el modelo representa adecuadamente la realidad que pretende reflejar. Las etapas que componen el desarrollo del modelo son:

- IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

  Recolección y análisis de la información relevante para el problema. Se debe realizar la interpretación de los problemas reales en frases precisas, convertibles en ecuaciones matemáticas.

- ESPECIFICACIÓN MATEMÁTICA Y FORMULACIÓN

  Escritura matemática del problema de optimización, definiendo sus variables, sus ecuaciones, su función objetivo, sus parámetros. Se debe realizar un análisis del tamaño del problema y su tipo (programación lineal, programación entera mixta, programación no lineal).[7]

a. PROGRAMACIÓN LINEAL

El problema básico de Programación Lineal (LP) estudia los problemas de asignación de recursos que son limitados, que a su vez se destinaron a dos o más actividades simultáneas, a fin de optimizar una función determinada.

La palabra programación indica que se planifica con una meta determinada y lineal porque las funciones y relaciones son exclusivamente lineales.

Organización Industrial. [en línea] Septiembre, 2010. [consultado 5 en, 2015]. Disponible en: <http://www.gams.com/docs/contributed/modelado_en_gams.pdf>.

[7] MAESTRE, Maria. Técnicas Clásicas de optimización. [en línea] [consultado 29 nov. 2014]. Disponible en: <http://www.ehu.es/mae/html/prof/Maria_archivos/plnlapuntes.pdf>.

Consiste en minimizar una función objetivo lineal de variables lineales continuas, sujetas a restricciones lineales. Estos modelos de programación Lineal son más fáciles de resolver porque en el espacio de soluciones factibles siempre será posible encontrar la solución en un vértice reduciendo de este modo el espacio de soluciones óptimas a un número finito de las mismas, buscando que éste se ajuste suficientemente a la realidad.

b. PROGRAMACIÓN ENTERA

Modelos de programación que hacen uso de variables enteras las cuales pueden tomar los valores de 0 o 1, que permiten modelar decisiones “sí o no”; además el tiempo de solución es más largo en comparación al modelo de programación lineal.

Un problema de programación entera tiene la función objetivo lineal y restricciones, y requiere que algunos o todos los valores estén restringidos a tener valores enteros. El número de soluciones posibles es finito, en caso de ser el número de variables infinito.

c. PROGRAMACIÓN ENTERA MIXTA

Los problemas de programación entera mixta están conformados por variables de decisión, tanto continua como entera. También se conocen como problemas enteros mixtos lineales, y se denotaran por PM. En particular, un problema mixto 0–1 es aquel que contiene tanto variables continuas como variables binarias.

d. PROGRAMACIÓN NO LINEAL

En programación lineal un supuesto que es utilizado es el que todas sus funciones (objetivo y restricciones) son lineales, aunque este supuesto no se cumpla en algunos problemas y es por esto que es necesario abordarlo desde la Programación No Lineal.

Existen muchos tipos de problemas de PNL, en función de las características de estas funciones, por lo que se emplean varios algoritmos para resolver los distintos tipos. Para ciertos casos donde las funciones tienen formas sencillas, los problemas pueden resolverse de manera relativamente eficiente. En algunos otros casos, incluso la solución de pequeños problemas representa un verdadero reto.

Cuando un problema de PNL tiene sólo una o dos variables, se puede representar en forma gráfica. Si las funciones no son lineales, dibujaremos curvas en lugar de rectas, por lo que función objetivo y región factible dejarán de tener el aspecto que adquieren en la PL. La solución no tiene por qué estar en un vértice de la región factible, ni siquiera tiene porqué encontrarse en la frontera de ésta.[8]

e. PROGRAMACIÓN NO LINEAL ENTERA MIXTA

Este tipo de modelo de programación involucra variables enteras, al igual que variables continuas de decisión. Cuando existen restricciones o el objetivo son no lineales, el problema se denota como un programa de programación no lineal entera mixta o MINLP.

La razón que este tipo de problemas puedan ser no lineales proviene de:

[8] COBOS, Diana (2003). Modelos de Optimización Entera Mixta No Lineal en Sistemas de Transporte de Gas Natural. Trabajo de grado (Maestro en Ingeniería de Sistemas). Universidad Autónoma de Nuevo León. [en línea]. [consultado 30 nov. 2014]. Disponible en: <http://pisis.fime.uanl.mx/ftp/pubs/thesis/msc/2003-diana_cobos/tesis-2003-dcz.pdf>

- Relaciones no lineales en el dominio discreto únicamente.
- Relaciones no lineales en el dominio continuo solamente.
- Relaciones no lineales en la fusión del domino entero-continuo.

- VALIDACIÓN

En este paso se realiza la eliminación de los errores en la codificación, es decir, conseguir que el modelo haga lo que se ha especificado matemáticamente en la etapa anterior mediante su escritura en un lenguaje informático. Se debe comprobar la validez de los simplificaciones realizadas a través de los resultados obtenidos, incluso contrastando éstos con situaciones reales ya transcurridas o comprobar los resultados de tal manera que sean coherentes con respecto a lo que sucedería en la realidad.

- INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Conocer en detalle el comportamiento del modelo haciendo un análisis de sensibilidad en los parámetros de entrada, estudiar diferentes escenarios, detectar soluciones alternativas, pero suficientemente atractivas, comprobar la robustez de la solución óptima.

- IMPLANTACIÓN, DOCUMENTACIÓN Y MANTENIMIENTO

La documentación debe ser clara, precisa y completa.

5.1.4 Métodos Y Técnicas De Optimización: Las técnicas de optimización se enfocan en determinar dichos valores que toman factores que se pueden controlar con el fin de regular el rendimiento del sistema, buscando maximizar las utilidades o minimizar costos. Es por esto que se han estudiado diferentes métodos para desarrollarlos, dividiéndose en dos grupos; en exactos (en un tiempo determinado se encuentra la solución óptima) y aproximados (se encuentra una solución factible, ésta puede ser cercana a la solución óptima).

5.1.4.1 Métodos exactos

Son aquellos que parten de una formulación como modelos de programación lineal (enteros) o similares, y llegan a una solución factible (entera) gracias a algoritmos de acotamiento del conjunto de soluciones factibles.

5.1.4.2 Métodos aproximados

Los métodos aproximados están diseñados para resolver problemas difíciles de optimización combinatoria, los cuáles se limitan a proporcionar una buena solución no necesariamente óptima. Existen dos tipos de métodos heurísticos y metaheurísticos. [9]

- HEURÍSTICAS

Las técnicas heurísticas son algoritmos que encuentran soluciones de buena calidad para problemas combinatorios complejos explotando el conocimiento del dominio de aplicación. Los algoritmos heurísticos son fáciles de implementar y encuentran buenas soluciones con esfuerzos computacionales relativamente

[9] BENAVENTE, et al.(2009) El Problema de Rutas de Vehículos: Extensiones y métodos de Resolución.Departamento de Ingeniería de Sistemas. Universidad de la Frontera.Chile. [en línea] [consultado 29 nov. 2014]. Disponible en: <http://ceur-ws.org/Vol-558/Art_23.pdf>

pequeños; sin embargo, renuncian (desde el punto de vista teórico) a encontrar la solución óptima global de un problema. En problemas de gran tamaño rara vez un algoritmo heurístico encuentra la solución óptima global.

a. Constructivas

Las heurísticas constructivas crean paso a paso una solución al problema. Usualmente son métodos deterministas, por lo general buscan la mejor solución en cada iteración.

b. Inductivas

Estos métodos buscan generalizar de versiones pequeñas o más sencillas a hacer énfasis a todo el problema.

c. Técnicas de relajación

Son métodos asociados a la programación lineal entera. La más conocida es la llamada Relajación Lagrangeana, que consiste en descomponer un modelo lineal entero en un conjunto de restricciones difíciles y otras más fáciles, relajando las primeras, al pasarlas a la función objetivo multiplicándolas por una penalidad, en forma análoga al método de multiplicadores de Lagrange. Esto sirve para obtener cotas al problema original, acelerando el proceso de resolución.

- METAHEURÍSTICAS

Los algoritmos metaheurísticos son algoritmos de propósito general, que no dependen del problema, y que ofrecen buenos resultados pero que normalmente no acaban ofreciendo la solución óptima sino soluciones subóptimas. Se acostumbra a utilizar para aquellos problemas en que no existe un algoritmo o heurística específica que los resuelva, o bien cuando no es práctico implementar dichos métodos.

Entre algunas de las metaheurísticas comúnmente utilizadas en problemas de optimización combinatoria se encuentran[10]:

a. Algoritmos genéticos

Los Algoritmos Genéticos son métodos adaptativos que pueden usarse para resolver problemas de búsqueda y optimización. Los Algoritmos Genéticos son capaces de ir creando soluciones para problemas del mundo real. La evolución de dichas soluciones hacia valores óptimos del problema depende en buena medida de una adecuada codificación de las mismas.

b. Búsqueda en vecindarios variables

Este método comienza con una solución inicial aleatoria del problema, a partir de la que se van explorando, haciendo uso de algún algoritmo de búsqueda local, y la mejoran progresivamente vecindarios más lejanos (y grandes). El procedimiento realiza en cada paso un movimiento de una solución a otra con mejor valor. Este finaliza cuando, para una solución, no existe una solución que la mejore.[11]

---

[10] COELLO COELLO, Carlos A. Introducción a los Algoritmos Genéticos", Soluciones Avanzadas. En: Tecnologías de Información y Estrategias de Negocios. Enero de 1995. Vol 3, No. 17, pp. 5-11.

[11] BENAVENTE, et al.(2009) El Problema de Rutas de Vehículos: Extensiones y métodos de Resolución.Departamento de Ingeniería de Sistemas. Universidad de la Frontera.Chile. [en línea] [consultado 29 nov. 2014]. Disponible en: <http://ceur-ws.org/Vol-558/Art_23.pdf>

c. Recocido simulado

Esta metaheurística incluye un mecanismo para evitar los óptimos locales. Su idea es la de permitir movimientos a soluciones peores que la actual, con la intención de escapar del óptimo local. Es un método de trayectoria.

d. Búsqueda tabú

En esta metaheurística, se busca en la proximidad de la solución actual otra que mejore la evaluación de la función objetivo, almacenando las soluciones anteriores (o alguna característica de éstas), las que son marcadas como tabú. Esto evita que el algoritmo entre en un ciclo, pudiendo escapar del óptimo local.

e. Colonia de hormigas

La metaheurística colonia de hormigas explora distintas direcciones del espacio de soluciones factibles, dejando tras de sí un rastro, que indica a la siguiente hormiga las direcciones más interesantes de ser exploradas, las que toma con una probabilidad proporcional al nivel de la cantidad existente, en un intento de no caer en el óptimo local.

f. Enjambre de partículas

El enjambre de partículas simula la búsqueda realizada por entes colaborativos, considerando las interacciones entre ellos y cómo se orientan hacia una búsqueda eficiente.

5.1.5 Programación Computacional: Existen varios programas computacionales, en los cuales se desarrollan algoritmos, técnicas y teorías necesarias para resolver en un ordenador los modelos matemáticos de problemas que surgen en un sentido global como lo son la economía, física, química, matemáticas, entre otras áreas.

El objetivo de la programación computacional es el de ofrecer una solución práctica y concreta a los problemas, centrándose en disciplinas matemáticas clásicas, además de dar lugar a un análisis numérico.[12]

En la actualidad, se trabaja con programas que permiten la simulación de las situaciones que previamente se han contemplado en el modelo matemático. Se puede encontrar una gran variedad de ordenadores en donde según su sistema operativo permiten la ejecución de programas como MATLAB y GAMS.

5.1.5.1 Matlab

MATLAB es un lenguaje de alto nivel y un entorno interactivo para el cálculo numérico, visualización y programación. Permite analizar datos, desarrollar algoritmos y crear modelos y aplicaciones. El lenguaje, las herramientas y funciones integradas de matemáticas le permite explorar múltiples enfoques y llegar a una solución más rápida que con hojas de cálculo o lenguajes de programación como C/C++ o Java ™.[13]

5.1.5.2 Gams

[12] Matemáticas y sus Fronteras. Matemática computacional: Un nuevo pilar para el desarrollo científico y tecnológico. [en línea] 25 de Junio de 2007. [consultado 1 dic. 2014]. Disponible en: 12 <http://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2007/06/25/68571>.

[13] MATLAB. [en línea] [consultado 1 dic. 2014]. Disponible en: <http://www.mathworks.com/products/matlab/ >.

El General Algebraic Modeling System (GAMS) es un sistema de modelado de alto nivel para la programación matemática y optimización. Se compone de un compilador de lenguaje y un establo de solucionadores de alto rendimiento integrados. GAMS se adapta para aplicaciones complejas, modelado a grandes escalas, y le permite construir modelos de gran tamaño que pueden adaptarse rápidamente a las nuevas situaciones.[14]

5.1.6 Problemas de Ruteo de Vehículos (Vrp)

5.1.6.1 Definición del problema

El ruteo de vehículos (VRP) es un problema de optimización combinatoria complejo, considerado y aun paradigma en la literatura especializada, que surgió desde 1959. En su forma más sencilla, el VRP busca satisfacer a una serie de clientes con demandas conocidas, y establecer aquellas rutas que generen el mínimo costo, y cuenta con dos tipos de decisiones: asignación de clientes a vehículos y establecer la secuencia adecuada de visita a los clientes que debe realizar un vendedor o vehículo (TSP).[15]

Este tipo de situación, es una generalización del problema del agente viajero, el mismo que puede ser explicado de la siguiente manera:

Existe un agente de ventas que debe visitar a sus clientes ubicados en diferentes ciudades y luego volver a su ciudad de partida, y dicha actividad debe ser llevada a cabo con el menor costo posible; el costo de la ruta puede estar dado por la duración total de la misma (en tiempo o distancia). El problema de ruteo de vehículos se

[14] GAMS. [en línea] [consultado 1 dic. 2014]. Disponible en: <http://www.gams.com/ >

[15] A. Oliviera. (2004, Ago.). Heurísticas para Problemas de Ruteo de Vehículos. Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. Montevideo, Uruguay. [en línea] Agosto, 2004. [consultado 15 dic. 2014]. Disponible en: <https://www.fing.edu.uy/inco/pedeciba/bibliote/reptec/TR0408.pdf>

presenta en un grafo con nodos y arcos, los cuales representan la ubicación de los clientes y la red vial por la cual pueden circular los vehículos.

Los problemas de ruteo de vehículos de gran dimensión resultan imposibles de solucionar en tiempo polinomial, por lo que el VRP se denomina Np-hard, donde no es posible alcanzar una solución óptima, y, dependiendo de las características especiales de clientes, locaciones y producto/servicio, requiere la elaboración de una metodología de solución específica con la cual sea posible aproximarse lo mejor posible al óptimo. Las diferentes variaciones y restricciones del problema generan una "familia" de VRP de la que vale la pena mencionar ocho casos típicos, los cuales al compartir características pueden dar lugar a todo un universo de problemas VRP.[16]

5.1.6.2 Variaciones del problema

Algunas de las variaciones de los problemas de ruteo de vehículos que en la literatura se encuentran son:

- CVRP (Capacited VRP)

  Es el VRP más general y consiste en uno o varios vehículos con capacidad limitada y constante encargados de distribuir los productos según la demanda de los clientes y las rutas no son fijadas de antemano. Este problema ha sido resuelto mediante la búsqueda Tabú, algoritmos de colonias de hormigas, Constraint programming y algoritmos híbridos de recocido simulado y algoritmos genéticos.

[16] GONZÁLEZ, Guillermo y GONZÁLEZ, Felipe. (2006). Metaheurísticas Aplicadas al Ruteo de Vehículos. Un caso de estudio. Parte 1: Formulación del problema. Ingeniería e Investigación, 2006, vol. 26, (3). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. [en línea] 26, (3), 150-151. [consultado 10 dic. 2014]. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=64326319>

- MDVRP (Multi-Depot VRP)

VRP con múltiples depósitos es un caso de ruteo de vehículos en el que se le asignan clientes a los depósitos, de la flota de vehículos a cada depósito, cada vehículo origina desde un depósito, un servicio de cliente asignado a ese depósito, y el retorno al mismo.[17]

- PVRP (Period VRP)

Contempla en su planeamiento un horizonte de operación de M días, periodo durante el cual cada cliente debe ser visitado una vez.

- SDVRP (Split Delivery VRP)

VRP de entrega dividida permite que un cliente pueda ser atendido por varios vehículos si el costo total se reduce, lo cual es importante si el tamaño de los pedidos excede la capacidad de un vehículo.

- SVRP (Stochastic VRP)

Se trata de un VRP en que uno o varios componentes son aleatorios; clientes, demandas y tiempos estocásticos son las principales inclusiones en este tipo de problemas.

- VRPPD (VRP Pickup and Delivery)

VRP con entrega y recogida, es aquel en que cabe la posibilidad de que los clientes pueden devolver determinados bienes, por tanto, se debe tener presente que éstos no excedan la capacidad del vehículo. Esta restricción hace más difícil el problema de planificación y puede causar una mala utilización de las capacidades de los vehículos, un aumento de las distancias recorridas o a un mayor número de vehículos.

[17] Rocha, L.; González, C. y Orjuela, J. (2011). Una revisión al estado del arte del problema de ruteo de vehículos: Evolución histórica y métodos de solución. En: Ingeniería, Vol. 16, No. 2, p. 7.

- MFVRP (Mix Fleet VRP)

Es un VRP en el que se suponen vehículos con distintas capacidades o capacidad heterogénea, por lo que es necesario considerar estas capacidades en la ruta que seguirá cada recurso, ya que un camión más grande podrá realizar una ruta más larga o que tenga mayor concentración de demanda.

- VRPTW (VRP with Time Windows)

Los problemas de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo, son aquellos en el que se incluye una restricción adicional en la que se asocia a cada cliente con una ventana de tiempo, este método establece el tiempo de atención. En el instante en el que los vehículos salen del centro de distribución, se da el tiempo de recorrido para cada arco y así mismo un tiempo de servicio adicional para cada consumidor. El servicio de cada consumidor debe empezar dentro de la ventana de tiempo asociada y el vehículo debe parar en el centro de consumo por instantes de tiempo.[18]

Los diferentes problemas VRP, y básicamente los que utilizan múltiples vehículos y/o depósitos , pueden recibir su complejidad acotando el universo de soluciones , disminuyendo el conjunto de clientes a ser visitados por cada vehículo o desde cada depósito, esto es, asignar a cada vehículo/depósito un conjunto de clientes por atender.

5.1.7 Problema de Ruteo e Inventario (IRP)

5.1.7.1 Definición del problema

El Problema de Ruteo e Inventario (IRP) se ocupa de la distribución repetida de uno o varios productos desde la planta de producción hasta n clientes en un horizonte de planificación finito con t periodos. Cada cliente tiene una demanda para cada

[18] GONZÁLEZ, C. y ORJUELA, J. (2011). Una revisión al estado del arte del problema de ruteo de vehículos: Evolución histórica y métodos de solución. En: Ingenieria, Vol. 16, No. 2, p. 35-55.

periodo, además de una capacidad de mantener un nivel mínimo y máximo de inventario. El producto debe ser transportado por vehículos que tengan una restricción de capacidad disponible para la distribución del producto.[19]

El objetivo de este problema es minimizar los costos de transporte durante el período de planificación sin causar desabastecimiento en cualquiera de los clientes, además del costo de mantener inventario tanto en la planta como en el cliente. Se debe responder a tres interrogantes:

- ¿Cuándo servir al cliente?
- ¿Cuánto hay que entregar a un cliente cuando se sirve?
- ¿Qué rutas de entrega se han de utilizar?

El IRP presenta un sistema de inventario en el que el reabastecimiento es manejado por el proveedor. Este problema implica la integración y la coordinación de dos componentes de la cadena de valor de la logística: manejo de inventario y ruteo de vehículos.

El reabastecimiento manejado por el proveedor se refiere a una política en la cual el productor maneja el inventario de sus clientes, conociendo el nivel superior de almacenamiento del cliente puede decidir si enviar solo la demanda del periodo t o enviar una cantidad mayor a los requisitos. El proveedor negocia una política con sus clientes en la cual es la compañía la que está a cargo del manejo de sus inventarios, es decir, los clientes ya no tienen que llamar al proveedor para solicitar un despacho.

[19] CAMPBELL, Ann, CLARK, Lloyd, KLEYWGT, Anton & SAVELSBERGH, Martin. (1997, oct.). The Inventory Routing Problem. Logystics Institute School of Industrial and Systems Engineering. [en línea].[consultado 15 dic. 2014]. Disponible en: <http://www2.isye.gatech.edu/~ms79/publications/irp.pdf>

El proveedor determina quién recibe un despacho cada día y de qué volumen será ese despacho. Para poder solucionar estos problemas en la práctica, es importante que el proveedor tenga acceso a la información exacta y oportuna sobre el estado del inventario de los clientes. Una razón por la cual el reabastecimiento manejado por el proveedor haya estado recibiendo mucha atención es la disponibilidad reciente de tecnología de bajo costo que permite el monitoreo del inventario de los clientes.

En la literatura se han mencionado diferentes conceptos y características que el problema de inventario y ruteo puede contemplar como lo es el tipo de demanda (determinista o estocástica), el horizonte de planeación, las rutas que se van a utilizar para no causar desabastecimiento, entre otros. Es así como diferentes autores han contemplado diferentes opciones para su solución como se muestran en la tabla 1.

El tiempo se refiere al horizonte tenido en cuenta por el modelo de IRP, el cual puede ser tanto un horizonte finito o un período de planificación de horizonte infinito. La demanda de los clientes puede ser ya sea determinista, estocástica o dinámica, y este es uno de los principales criterios que define una gran parte del problema. Además, el número de proveedores y clientes pueden cambiar, por lo tanto la estructura puede ser de uno a uno cuando sólo hay un proveedor que sirve a un cliente, uno-a-muchos en el caso más común con un proveedor y varios clientes, y el menos estudiado caso de muchos a cualquier m con varios proveedores y varios clientes.

Tabla 1. IRP: Diferentes soluciones.

Criterio	Posibles opciones		
Tiempo	Finito	Infinito	
Demanda	Determinística	Estocástica	Dinámica
Estructura	Uno a uno	Uno a muchos	Muchos a muchos
Ruta	Directa	Múltiple	Continuo
Políticas de Inventario	Sin restricciones	Orden a puesta de nivel	
Decisiones de Inventario	Pérdida en ventas	Back-order	Non- negative
Tamaño de flota	Solo uno	Muchos	Sin restricciones

Fuente: Flexibility and Consistency in Inventory-Routing. [20]

Las opciones de envío son directas o múltiples; directas cuando sólo hay un cliente en una ruta, múltiple en el caso en que hay varios clientes servidos por un vehículo en la misma ruta, y continua en los casos en que no hay depósito central.

Las opciones con relación a las políticas de inventarios que se encuentran en la literatura son o políticas sin restricciones o una política fija u orden de puesta a nivel. Éstas determinan cómo se modela la gestión de inventarios. Si se permite que el inventario pueda ser negativo, entonces se ocurre un back-order y la demanda correspondiente se servirá cuando se entreguen los nuevos envíos. Si no hay una copia de la orden, entonces la demanda adicional se considera como pérdida de ventas, y en ambos casos puede haber una sanción por la falta de existencias. En contextos deterministas, también se puede restringir el inventario a ser no negativo. Finalmente, los dos últimos criterios se refieren a la composición y tamaño de la flota. La flota bien puede ser homogénea o heterogénea, y el número de vehículos disponibles puede ser fijado en una, fija en muchos, o sin restricciones. Cada uno de los siguientes documentos mencionados se encuentra dentro de alguna de estas categorías, y se clasificarán en consecuencia.

[20] CALLEGARI, Leandro. Flexibility and Consistency in Inventory-Routing. HEC MONTREAL, 2012. Tesis (Doctor en Administración). UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL. Facultad de Estudios de Posgrado y postdoctorales. [en línea] [consultado 16 dic. 2014]. Disponible en: <http://www.leandro-coelho.com/wp-content/uploads/2012/05/PhD-Thesis-Leandro-C-Coelho.pdf>

5.1.7.2 Variaciones del problema

Algunas variantes que se podrán encontrar son:

- MIRP

En un problema de Ruteo e Inventario con varios vehículos se considera que un proveedor sirve a múltiple clientes dispersos geográficamente que reciben unidades de un solo producto de un depósito, utilizando vehículos en donde su capacidad puede ser homogénea o heterogénea.

- Deterministic IRP

Si las tasas de consumo son conocidas y fijas se habla de un problema determinístico en donde la demanda puede ser igual o variable en un horizonte de planificación t, con esto se podrá determinar a cual cliente servir, la cantidad a entregar y que ruta se debe seguir.

- IRPT (Inventory-Routing Problem with Transshipment)

En este problema se contempla la opción de realizar un transbordo para no incurrir en desabastecimiento, esto será posible si se genera un menor costo.

- SIRP

Una variante importante del IRP es el problema de ruteo e inventario estocástico (SIRP), en el cual la demanda de los clientes es aleatoria, por lo cual es probable incurrir en desabastecimiento.[21]

[21] A. Campbell, L. Clark, A. Kleywgt & M. Savelsbergh. (1997, oct.). The Inventory Routing Problem. Logystics Institute School of Industrial and Systems Engineering. [en línea].[consultado 15 dic. 2014]. Disponible en: <http://www2.isye.gatech.edu/~ms79/publications/irp.pdf>

- ILRP

El problema de inventario en la ubicación de ruta (ILRP) es el problema de decidir la ubicación de los depósitos, teniendo en cuenta que ésta se realiza solo una vez y las rutas de los depósitos a los clientes puede variar según la demanda de cada cliente en un horizonte de planificación finito t.[22]

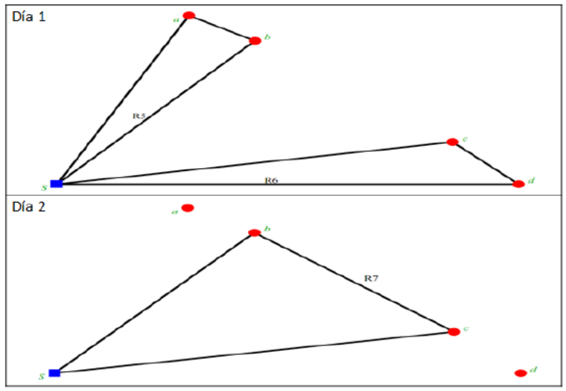
En la ilustración 1 se puede apreciar cómo suelen ser diseñadas las rutas en un modelo de IRP. En el día 1 todos los clientes son visitados estableciéndose dos rutas, mientras que en el día 2, solo algunos de ellos son visitados estableciéndose una única ruta para atenderlos. Este plan de visitas implica que los clientes que no son visitados en el día 2, tienen el suficiente nivel de stock en sus bodegas para cubrir la demanda de ese día.[23]

---

[22] GUERRERO, William. Modèles et méthodes d'optimisation pour le problème de localisation-routage avec contraintes de stockage. Bogotá, 2014, 148 p. Tesis (doctor de troy university of technology). Universidad de los Andes.

[23] Saltos, Ramiro Y Aceves, Ricardo. Aplicacion de la Metaheurística Búsqueda de la Armonía para Resolver el Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios. EN: Revista tecnólogica ESPOL. Vol 25, No. 2; 2012, p. 4-6.

Ilustración 1. Plan de Rutas para IRP.



Fuente: Aplicacion de la Metaheurística Búsqueda de la Armonía para Resolver el Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios.

5.2 MARCO TEÓRICO

Para Shukla, Tiwaric y Ceglarek[24], el Problema de ruteo e inventario (IRP), consiste en que el proveedor deberá monitorear constantemente los niveles de inventario de sus clientes, determinar el tiempo de reabastecimiento y la cantidad que será entregada, así como la asignación de rutas que se deberán recorrer y la flota de vehículos al momento de realizarse la distribución.

Este problema es considerado como un problema NP-Hard debido a la integración de los niveles de inventario y las características de distribución de uno o varios productos en un horizonte de planificación el cual puede contemplar varios periodos.

Cuando el proveedor suministra nuevamente el inventario, la oportunidad de disminuir los costos en la distribución de productos, viene con la libertad de escoger cuáles clientes visitar en un día dado y cuánto producto repartir a los clientes seleccionados. Desde que el proveedor es responsable por el manejo del inventario

[24] SHUKLA, Nagesh; TIWARI, M.K. y CEGLAREK, Darek. Genetic-algorithms-based algorithm portfolio for inventory routing problem with stochastic demand. EN: International Journal of Production Research. Vol. 51, No.1; (2013), p. 118.

de los clientes, el problema para éste es cuán eficientemente integra el manejo del inventario con la distribución del producto.

Según Song y Furman[25], un problema IRP se basa en la distribución de uno o varios producto(s), desde la prestación de un suministro único a un conjunto de clientes usando una flota de vehículos. El producto está disponible a la prestación del suministro y cada cliente tiene su propia capacidad de almacenamiento y demanda. El IRP trata de minimizar el costo total de transporte sobre un horizonte de planeación, mientras garantiza el no desabastecimiento de ningún cliente.

Es así como para Qin, et al.[26], el objetivo contemplado fue la construcción de un programa de entrega para cada minorista que minimice el coste total del sistema, que incluye costo de mantener inventario así como el costo de transporte. Estableció un problema de ruteo e inventario periódico (IRP periódico), en donde una vez determinado el horizonte de tiempo, se calculan las cantidades y las rutas de los vehículos, los clientes se encuentran dispersos geográficamente y tienen una demanda determinada en un horizonte de planificación t. La flota de vehículos tiene capacidad limitada y solo un vehículo atiende al cliente haciendo un viaje por unidad de tiempo. Para su solución se utilizaron técnicas de optimización como las metaheurísticas de búsqueda local y búsqueda tabú.

Las rutas de vehículos y plazos de entrega para las tiendas según Gaur y Fisher[27] permite que los costos variables de transporte se minimicen teniendo en cuenta que la flota debe ser heterogénea, pero sin tener en cuenta las restricciones de tamaño

[25] SONG, Jin-Hwa y FURMAN, Kevin C. A maritime inventory routing problem: Practical approach. EN: Computers & Operations Research. (2010), p. 657

[26] QIN, Lei, et al. A local search method for periodic inventory routing problem. EN: Expert Systems with Applications. Vol. 41, No. 2; (2014), p. 765-778.

[27] GAUR, Vishal y FISHER, Marshall L. A periodic Inventory routing problem at a Supermarket Chain. EN: Operations Research. Vol. 52, No. 6; (2004), p. 813-822.

de ésta. Los clientes (tiendas) se agrupan por regiones, y así asignan los vehículos a una misma ruta todos los días. Solo dos clientes serán atendidos por región y solo se distribuye un producto. La demanda será determinista pero variable en el tiempo, es por esto que el problema de ruteo e inventario es periódico. Los costos de mantenimiento de inventario se ignoran porque el requisito de reposición frecuente mantiene los costos de retención de inventario bajo. El IRP periódico por regiones se solucionó por medio de un conjunto de problemas para encontrar la ruta más corta y como técnica de solución la heurística Randomized Sequential Matching Algorithm (RSMA).

Bard y Nananukul[28] establecieron la importancia de la satisfacción periódica de la demanda para un solo producto a clientes ubicados en distintos lugares, la capacidad de los vehículos es homogénea y a ellos no se les asigna ruta todos los días. Establecen un Problema de enrutamiento, inventario y producción (PIDRP) y la técnica de solución fue un Algoritmo Branch & Price.

De la misma manera, Bard y Nananukul[29] como parte del proceso de solución para el PIDRP, establecieron entre sus decisiones críticas: el número de elementos para la fabricación de cada día, cuándo visitar a cada cliente, cuánto entregar a un cliente durante una visita, y las rutas de entrega para su uso. Además implementaron una metodología híbrida que combina procedimientos exactos y heurísticos dentro del algoritmo Branch and Price, lo cual originó un problema MIP subyacente que fue desarrollado por un algoritmo de búsqueda tabú.

---

[28] BARD, Jonathan F. y NANANUKUL, Narameth. Heuristics for a multiperiod inventory routing problem with production decisions. EN: Computers & Industrial Engineering. Vol. 57, No. 3; (2009), p. 713-723.

[29] BARD, Jonathan F. y NANANUKUL, Narameth. A branch-and-price algorithm for an integrated production and inventory routing problem. EN: Computers & Operation Research. Vol. 37; (2012), p. 2202-2217.

Otra modificación que se encontró en la literatura además de un problema con varios periodos, también se ha abordado para múltiples productos como lo mencionan los autores Al-e-Hashem y Rekik[30] en donde su problema se basa en una empresa que cuenta con una planta de ensamblaje y un conjunto de proveedores que ofrece un producto distinto para ésta con demanda determinista. La empresa alquila los camiones con distinta capacidad. Se debe encontrar la mejor configuración de los tipos de vehículos, rutas, entregas y transbordos en cada período. Permitir que los vehículos almacenen temporalmente productos durante sus viajes en un área de almacenamiento de proveedores situados a lo largo de su itinerario, se conoce como IRP de transbordo habilitado. Problema multi-producto y multi-periodo cuenta con dos opciones: una de transbordo la cual puede hacer posible la reducción de la distancia de viaje y la segunda se consideró la capacidad de los vehículos y sus emisiones de gases.

El IRP con transbordo, con demanda estocástica (SIRP-T) es estudiado por los autores Bertazzi, Bosco y Laganà[31] en donde la capacidad de producción del proveedor es limitada y el producto es enviado hasta los minoristas en un horizonte de planificación t, hay un límite de capacidad para mantener inventarios, y las entregas se realizan mediante la contratación de transporte. Para su solución se desarrolló una metaheurística basada en la integración de algoritmos de despliegue con una solución óptima a un modelo de programación lineal entera mixta.

Es así como Coelho, Cordeau y Laporte[32] trabajaron el problema con relación a transbordo pero adicional a esto, establecieron políticas de reposición para el

---

[30] AL-E-HASHEM, SMJ Mirzapour y REKIK, Yacine. Multi-product multi-period Inventory Routing Problem with a transshipment option: A green approach. EN: International Journal Production Economics. Vol. 157, No. 12; (2014), p. 80-88.
[31] BERTAZZI, Luca; BOSCO, Adamo y LAGANÀ, Demetrio. Managing stochastic demand in an Inventory Routing Problem with transportation procurement. EN: Omega. [en línea]. (2014). Disponible en: < http://dx.doi.org/10.1016/j.omega.2014.09.010i>

[32] COELHO, Leandro C; CORDEAU, Jean-Francois y LAPORTE, Gilbert. The inventory-routing problem with transshipment. EN: Computers & Operations Research. Vol. 39; (2012), p. 2537-2548.

inventario en la ruta, en donde su método de solución fue la heurística adaptativa de búsqueda en el vecindario y un algoritmo de flujo de red.

Con igual capacidad en los vehículos y con demanda estocástica de la estación de servicio, la formulación de IRPF (problema de inventario, ruteo y tamaño de la flota) considerado por Vidović, Ratković y Popovic[33] enmarca que los costos de transporte están relacionados con la distancia recorrida y que es necesario tener en cuenta el costo del tamaño de la flota. Para esto contemplaron metaheurísticas como la búsqueda en el vecindario y búsqueda local para la solución del modelo.

La frecuencia con la que un cliente es atendido se denomina tiempo de ciclo, es así como surge el plan de distribución cíclico de un solo producto como lo mencionan Raa, et al.[34], en donde la demanda de los puntos de ventas está en unidades por hora y la flota de vehículos es homogénea y está disponible para hacer el recorrido, es aquí donde se introdujo el término de vehículo multi-tour que indica que el vehículo puede realizar más de un recorrido pero no visitará a los mismos clientes en un día. Debido a que la demanda es estable el horizonte de planeación es de un año, en donde el ciclo óptimo se repite para cada vehículo, y para su solución se propuso un algoritmo de aproximación que se basa en un proceso de generación de columnas.

Por medio de la asignación y separación de clientes a un número de vehículos, en donde el tamaño de la flota está determinado y su capacidad es homogénea, Raa y Aghezzaf[35] continúan con el estudio de CIRP, en donde considera que el tiempo de

---

[33] VIDOVIĆ, Milorad: RATKOVIĆ, Branislava y POPOVIC, Dražen. Mixed integer and heuristics model for the inventory routing problem in fuel delivery. EN: International Journal Production Economics. Vol. 147, No. 3; (2014), p. 593-604.
[34] RAA, et al. Modeling inventory routing problems in supply chains of high consumption products. EN: European Journal of Operational Research. Vol. 169, No. 3; (2006), p. 1048-1063.

[35] RAA, Birger y AGHEZZAF, El-Houssaine. A practical solution approach for the cyclic inventory routing problem. EN: European Journal of Operational Research. Vol. 192, No. 2; (2009), p. 429-441.

entrega como parte de las restricciones a éste es de 8 horas al día; además se cuenta con un solo depósito y un conjunto de clientes con demanda constante y determinada. Los procedimientos heurísticos utilizados fueron el marco de generación de columnas en donde se contemplaron las heurísticas de inserción, de ahorro y de mejora.

Un problema de inventario y ruteo con movimientos continuos (IRP-CM) fue estudiado por Savelsbergh y Song[36], en el que un único producto debe ser distribuido desde la planta i hasta el cliente j, cada cliente cuenta con capacidad de almacenamiento, el vehículo tiene una capacidad de depósito Q y se encuentra o en la planta o en el lugar del cliente. En este tipo de problemas se deberán diseñar los recorridos de entrega que abarca varios días, y es por eso que se debe recurrir al recurso de ida y vuelta para las rutas establecidas. Es por esto que se hace uso de redes de tiempo expandido o redes de servicios dinámicos para modelar la toma de decisiones operativas en el transporte del producto. La heurística RGH (Randomized Greed Heuristic) y el algoritmo Branch and Cut facilitan la solución de éste.

Por otro lado Zhang, et al.[37] establecen que el cliente tiene una demanda determinista, pero de periodo variable en un horizonte de planificación establecido. El problema está formado por múltiples centros de distribución y un conjunto de clientes. Estos sirven como coordinadores del proceso de reposición y puntos de transbordo. La flota de vehículos es homogénea y solo pueden llevar un producto. El objetivo es determinar los horarios para coordinar las operaciones de localización, asignación, de inventario y enrutamiento del problema (ILRP).

---

[36] SAVELSBERGH, Martin y SONG, Jin-Hwa. An optimization algorithm for the inventory routing problem with continuous moves. EN: Computers & Operations Research. Vol. 35, No. 7; (2008), p. 2266-2282.

[37] ZHANG, Ying, et al. Hybrid metaheuristic solutions to inventory location. EN: Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review. Vol. 70; (2014), p. 305-323.

En el caso considerado por Christiansen, et al.[38]; en un estudio de la industria de Cemento, plantea un problema de enrutamiento de inventario marítimo que enfrenta un importante productor de cemento. La capacidad de la flota de buques es limitada y en los periodos pico de la demanda de productos de cemento en los clientes, excede la capacidad de la flota. Las limitaciones en cuanto a la capacidad de carga de las bodegas del buque, la profundidad de los puertos y el hecho de que diferentes productos de cemento no se pueden mezclar son tomadas en consideración. El método de solución que proponen es una solución heurística y un algoritmo genético.

Para Coelho y Laporte[39], con el fin de ser competitivas, las empresas necesitan aprovechar las interacciones sinérgicas entre diferentes áreas. Las que están relacionadas son: la gestión de la distribución y el manejo de inventario en proceso. El IRP surge cuando las decisiones de ruteo e inventario deben ser hechas simultáneamente, lo cual conlleva a un problema de optimización combinatoria. Específicamente se resuelve el IRP multivehículo con flotas homogéneas y heterogéneas, con opciones de transbordo; éste es un modelo no dirigido por un MIRP heterogéneo.

Un método heurístico es propuesto por Liu y Chen[40] para el enrutamiento de inventario y la problemática de los precios en la cadena de suministro. En el pasado, los precios y decisiones de demanda parecían ignorarse y se asumían conocidas en la mayoría de las investigaciones sobre IRP. La decisión del precio afecta la demanda y entonces las decisiones de inventario y de ruteo deben ser consideradas en el IRP simultáneamente para lograr el objetivo del máximo beneficio en la cadena

[38] CHRISTIANSEN, et al. Maritime inventory routing with multiple products: A case study from the cement industry. EN: European Journal of Operational Research. (2010), p. 86.
[39] COELHO, Leandro C y LAPORTE, Gilbert. The exact solution of several classes of inventory-routing problems. EN: Computers & Operations Research. (2012), p. 558.

[40] LIU, Shu-Chu y CHEN, Jyun-Ruei. A heuristic method for the inventory routing and pricing problem in a supply chain. EN: Expert Systems with applications. (2010), p. 1447.

de suministro. Se habla de un IRPP (IRP and Pricing) y las técnicas de solución que fueron planteadas son métodos heurísticos y búsqueda tabú.

Un modelo con entregas divididas y flotas de vehículos de tamaño restringido, lo tratan Yu, Chen y Chu[41], teniendo en cuenta la complejidad del IRP, y lo difícil desarrollar un algoritmo exacto que pueda resolver problemas de gran escala en un tiempo de cálculo razonable. Como una alternativa un enfoque aproximado que de forma rápida y casi de manera óptima puede resolver el problema es un desarrollo en base a un modelo aproximado del problema y la relajación de Lagrange. En el enfoque el modelo fue resuelto usando el método de relajación Lagrangiana en el que el problema relajado se descompone en un problema de inventario y ruteo que fueron resueltos por un algoritmo de programación lineal y un algoritmo de flujo de costo mínimo, respectivamente, y el problema dual es resuelto usando el método subgradiente sustituto. La solución del modelo obtenido por el método de relajación Lagrangiana es usado para construir una solución casi óptima del IRP mediante la solución de una serie de problemas de asignación. Con esto demostraron que el enfoque de propuesta híbrida puede encontrar una alta calidad de la solución casi óptima para el IRP con un máximo de 200 clientes en un tiempo de cálculo razonable.

En el modelo matemático de IRP con ventanas de tiempo (IRPTW), establecido por Liu y Wei-Ting[42] proponen un método heurístico de dos fases. El primero es encontrar una solución inicial. La segunda fase es mejorar la solución adoptando la búsqueda tabú seleccionando las mejores soluciones del vecindario para obtener la solución óptima. Por otra parte el método propuesto fue comparado con otros 3 métodos heurísticos. Los resultados experimentales indican que el método

---

[41] YU, Yugang; CHEN, Haoxun y CHU Feng, A new model and hybrid approach for large scale inventory routing problems. EN: European journal of operational research. (2007), p. 1022.

[42] LIU, Shu-Chu y WEI-TING, Lee. A heuristic method for the inventory routing problem with time Windows. EN: Expert Systems with applications. (2011), p. 13223.

propuesto es mejor que los otros 3 métodos en términos de costos promedio en la cadena de suministro (costo de transporte, costo de inventario).

Con un horizonte de tiempo finito, las características del problema planteadas por Moin, Salhi y Aziz[43] fueron: multi-periodo, multi-proveedores y multi-productos, en donde una flota de vehículos de capacidad homogénea, alojada en un depósito, transporta productos desde los proveedores para satisfacer la demanda determinada por la planta de montaje en cada periodo. Se propuso un algoritmo genético híbrido basado en la asignación de primera ruta, segunda estrategia y la cual considera al inventario y al costo de transporte. Además de un nuevo conjunto de operadores de cruce y mutación, se introduce dos nuevas representaciones de cromosomas.

Por su parte; Li, Chu y Chen[44] consideraron un IRP de horizonte infinito en un sistema de distribución de 3 niveles con un proveedor, un almacén y varios minoristas dispersos geográficamente. En este problema cada minorista enfrenta una demanda determinista para un solo producto. La demanda de cada minorista se repone ya sea desde el proveedor a través del almacén o directamente desde el proveedor. Se presenta un enfoque de solución de descomposición basada en una política de partición fija donde los comerciantes se dividen en conjuntos discontinuos y colectivamente exhaustivos y cada conjunto de los minoristas se sirve en una ruta separada. Dada una partición fija, el problema original se descompone en 3 sub-problemas. Algoritmos eficientes se desarrollaron para los sub-problemas explorando propiedades importantes de sus soluciones óptimas. Un algoritmo genético para encontrar una partición fija casi óptima para el problema. Se resuelve por Búsqueda Tabú.

---

[43] MOIN, N. H.; SALHI, S. y AZIZ, N.A.B. An efficient hybrid genetic algorithm for the multi-product multi-period inventory routing problem. EN: International Journal Production Economics. (2011), p. 334.

[44] LI, Jianxiang; CHU, Feng y CHEN, Haoxung. A solution approach to the inventory routing problem in a three-level distribution system. EN: European Journal of Operational Research. (2010), p. 736.

6. FORMULACIÓN DEL MODELO

6.1 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO

Teniendo en cuenta la revisión de literatura realizada se establece que el problema que será caso de estudio en este documento tendrá como características:

- Horizonte finito: el tiempo de planeación será tratado como discreto y se denotará como t periodos. La contabilización de los inventarios se realiza al final de cada periodo.
- Se aborda una cadena de suministro de dos eslabones (una planta y muchos clientes).
- Planta (Origen): Debe satisfacer la demanda de diferentes clientes dispersos geográficamente. Se asume que hay existencias suficientes para enviar desde la planta a cada cliente en cada periodo.
- Demanda: Cada cliente tiene asociada una demanda en cada periodo, la cual es conocida, dinámica e independiente; se puede satisfacer con las existencias de inventario en el cliente y la entrega por periodo. No se permite faltantes.
- Inventario: Se considera en el cliente la existencia de inventarios así como en la planta. Lo que se envía al cliente desde la planta, se considera que estuvo almacenado en ésta en el periodo anterior.
- Vehículos: Tienen capacidad finita, la flota es homogénea y todos los vehículos salen del origen y llegan al origen. La demanda de un cliente en un periodo será satisfecha con entregas en periodos anteriores e inventario que tenga el cliente; lo que plantea que en algún periodo un cliente puede no ser visitado.
- Solo se maneja un producto.

6.2 MODELO MATEMÁTICO BÁSICO

Para la formulación del modelo matemático se tomó el modelo expuesto en el artículo escrito por Saltos, R. y Aceves, R. [45] en donde toma como base el Problema de Ruteo de Vehículos Multi-periodo (PVRP) para luego incluir las características propias del problema de Ruteo e Inventario (IRP).

<u>Índices</u>

$i=\{0, 1, 2,\ldots, n\}$	Conjunto de nodos, clientes. El nodo i=0 representa el depósito central.
$t=\{1, 2,\ldots, T\}$	Conjunto finito y discreto de los instantes de tiempo pertenecientes al horizonte de planificación.
$k=\{1, 2,\ldots, m\}$	Conjunto de vehículos disponibles con capacidad de transporte homogénea.

<u>Parámetros</u>

$Dem_{i,t}$	Demanda del cliente i en el periodo t.
CapC	Capacidad de almacenamiento de cada cliente.
$C_{j,i}$	Costo de transporte desde el nodo j al cliente i.
R	Tasa de mantener inventario.
CapV	Capacidad de carga de los vehículos.

<u>Variables de decisión</u>

$Q_{i,k,t}$	Cantidad de producto enviado al cliente i usando el vehículo k en el periodo t.
$INV_{i,t}$	Nivel de inventario almacenado en el cliente i en el tiempo t.
$X_{i,j}^{k.t}$	$\begin{cases} 1, \text{ si el arco (j,i) es usado por el vehículo k en el tiempo t} \\ 0, \text{ si no.} \end{cases}$

---

[45]Saltos, R. y Aceves, R. Aplicacion de la Metaheurística Búsqueda de la Armonía para Resolver el Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios. Universidad Nacional Autonoma de Mexico. [En línea] Diciembre 2012. Pág. 4. [Citado el: Diciembre 16, 2014]. Disponible en:< http://www.rte.espol.edu.ec/index.php/tecnologica/article/viewFile/121/64>

$Y_{i,k,t}$ $\begin{cases} 1\text{, si el cliente i es visitado por el vehículo k en el tiempo t} \\ 0\text{, si no es visitado} \end{cases}$

Función objetivo

$$\text{Min } z=\sum_i \sum_j \sum_k \sum_t C_{i,j} X_{i,j}^{k.t} + \sum_i \sum_t r^* \; INV_{i,t} \qquad (3.1)$$

Sujeto a

$$\sum_k Y_{i,k,t} \leq 1 \qquad \forall i \in V\{0\} \; \forall t \in T \qquad (3.2)$$

$$\sum_k Y_{0,k,t} \leq m \qquad \forall t \in T \qquad (3.3)$$

$$m \geq \max \left[\frac{\sum_i Dem_{i,t}}{CapV} \right] \qquad \forall t \in T \qquad (3.4)$$

$$\sum_j X_{i,j}^{k.t} = Y_{i,k}^{t} \qquad \forall i \in V \;\; \forall t \in T \;\; \forall k \in k \qquad (3.5)$$

$$\sum_{i \neq 0} Q_{i,k}^{t} \leq CapV \qquad \forall t \in T \;\; \forall k \in k \qquad (3.6)$$

$$\sum_k Q_{i,k,t} \leq CapC\text{-}INV_{i,t} \qquad \forall i \in V\{0\} \; \forall t \in T \;\; \forall k \in \qquad (3.7)$$

$$Q_{i,k,t} \leq CapC^* Y_{i,k,t} \qquad \forall i \in V\{0\} \; \forall t \in T \;\; \forall k \in \qquad (3.8)$$

$$\sum_k Q_{i,k,t} + INV_{i,t-1} - INV_{i,t} = \sum_i Dem_{i,t} \qquad \forall i \in V\{0\} \; \forall t \in T \qquad (3.9)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} X_{i,j}^{K.t} \leq |S|-1 \qquad \forall S \subseteq V \; |S| \geq 2 \; \forall k \in K \; \forall t \in T \qquad (3.10)$$

$$Q_{i,k,t} \geq 0 \qquad \forall i \in V\{0\} \quad \forall k \in K \quad \forall t \in T \qquad (3.11)$$

$$m \geq 0 \qquad \forall i \in V\{0\} \quad \forall k \in K \quad \forall t \in T \qquad (3.12)$$

$$INV_{i,t} \geq 0 \qquad \forall i \in V\{0\} \qquad \forall t \in T \qquad (3.13)$$

$$X_{i,j}^{k,t} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j \in V \quad \forall k \in K \quad \forall t \in T \qquad (3.14)$$

La expresión (3.1) busca minimizar los costos de ruteo e inventario (costo de transporte y de mantener inventario); la expresión (3.2) asegura que en cada instante de tiempo un cliente sea visitado máximo una vez; la (3.3) impone que del depósito no salgan más vehículos de los que se tienen disponibles en cada instante de tiempo; la expresión (3.4) halla el número de vehículos que se necesitan en relación con la demanda; la expresión (3.5) es la restricción de grado de los nodos de la red, la expresión (3.6) garantiza que la capacidad de los vehículos no sea excedida, la (3.7) y la (3.8) aseguran que un cliente que no es visitado en un determinado instante de tiempo, no reciba el producto mientras que el que sí es visitado no reciba un inventario superior a su capacidad menos el inventario que ya se poseía, la expresión (3.9) garantiza la continuidad en el flujo de inventario a través del tiempo, la expresión (3.10) es la restricción de eliminación de subtoures. Finalmente las expresiones (3.11) a la (3.14) imponen las condiciones de signo y lógica que deben cumplir las variables de decisión.

Al estudiar el modelo es necesario hacerle algunas modificaciones como las exponen Bertazi, L.; Savelsbergh, M y Speranza, G [46] en su artículo; en la formulación matemática que estos autores realizan se tiene en cuenta un modelo con solo tres índices; las restricciones de ruteo son diferentes dado que cada vehículo que sale del origen debe ser mayor o igual al número de veces en las que un vehículo pueda entrar o salir a un cliente; es así como al modelo se le realizan las siguientes variaciones:

- La variable binaria $Y_{i,k,t}$ que establece que el cliente sea visitado se elimina del modelo, ya que la binaria $X_{j,i,k,t}$ relaciona la condición que el cliente sea visitado y use al arco j,i para la entrega.

[46] Bertazi, L.; Savelsbergh, M y Speranza, G. Inventory Routing. 2008

- Denotar el subíndice i= {0, 1, 2,…, n} para el cliente y depósito (i=0), y nombrar el subíndice j= {0, 1, 2,…, n} para el conjunto de nodos desde donde puede continuar un vehículo la ruta.

- La capacidad del cliente debe estar denotado por el subíndice i, ya que ésta varía dependiendo el cliente. $CapC_i$

- El número de vehículos m deberá ser un parámetro y no una variable de decisión.

- El costo de mantener inventario depende del cliente y del periodo, es así como se denotará $CMI_{i,t}$, se deberán tener en cuenta los costos de mantener en la planta, asumiendo que la suma de las cantidades a despachar son inventario del depósito en un periodo anterior.

- Las restricciones propias del ruteo se modifican de tal manera que se garantice que del origen puedan salir y entrar más de una vez los vehículos garantizando entregas anticipadas a los clientes.

6.3 FORMULACIÓN DEL MODELO

<u>Índices</u>

i= {0, 1, 2,…, n}	Conjunto de clientes a los cuales se visita, 0 denota el depósito.
j= {0, 1, 2,…, n}	Conjunto de nodos desde donde puede continuar un vehículo su ruta.
t= {1, 2,…, T}	Conjunto finito y discreto de los instantes de tiempo pertenecientes al horizonte de planificación considerado.

k= {1, 2,…, m} Conjunto de vehículos utilizados por periodo.

Parámetros

$Dem_{i,t}$	Demanda del cliente i en el periodo t.
m	Número de vehículos disponibles.
$CapC_i$	Capacidad de almacenamiento de cada cliente.
$C_{j,i,k,t}$	Costo de transporte desde el nodo j al cliente i.
$CMI_{i,t}$	Costo de mantener inventario del cliente i en el periodo t.
CapV	Capacidad de carga de los vehículos.

Variables de decisión

$Q_{i,k,t}$	Cantidad de producto enviado al cliente i usando el vehículo k en el periodo t.
$INV_{i,t}$	Nivel de inventario almacenado en el cliente i en el tiempo t.
$X_{j,i,k,t}$	$\begin{cases} 1, \text{ si el arco (j,i) es usado por el vehículo k en el tiempo t} \\ 0, \text{ si no.} \end{cases}$

Función Objetivo

$$\text{Min } z= \sum_j \sum_i C_{j,i,k,t} * \left(\sum_k \sum_t X_{j,i,k,t} \right) + \sum_i \sum_t CMI_{i,t} * INV_{i,t} + \sum_t CMI_{0,t} * \left(\sum_i \sum_k Q_{i,k,t} \right)$$

Sujeto a

$$\sum_{\substack{j=0\\ i\neq j}} X_{j.i,k,t} - \sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}} X_{i,j,k,t} = 0\ ; \quad \forall k, \forall t \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1} X_{0,i,k,t} \geq \sum_{i=1} X_{j,i,k,t}\ ;\ \forall k, \forall j, \forall t \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1} X_{i,0,k,t} \geq \sum_{i=1} X_{i,j,k,t}\ ;\ \forall k, \forall j, \forall t \tag{4.4}$$

$$\sum_{j\in S; i\in S} X_{j,i,k,t} \leq |S|-1\ ;\ \forall S \subseteq V\ |S| \geq 2, \forall k, \forall t \tag{4.5}$$

$$\sum_{i\neq 0} Q_{i,k,t} \leq CapV * \sum_{i=1} X_{0,i,k,t}\ ;\ \forall t, \forall k, \forall j \tag{4.6}$$

$$\sum_{k} Q_{i,k,t} \leq CapC_i - INV_{i,t}\ ;\ \forall i, \forall t, \forall k \tag{4.7}$$

$$Q_{i,k,t} \leq CapC_i * \sum_{j} X_{j,i,k,t}\ ;\ \forall i, \forall t, \forall k \tag{4.8}$$

$$\sum_{k} Q_{i,k,t} + INV_{i,t-1} - INV_{i,t} = Dem_{i,t}\ ;\forall i, \forall t \tag{4.9}$$

$$Q_{i,k,t} \geq 0,\ INV_{i,t} \geq 0,\ X_{j,i,k,t} \in \{0,1\} \tag{4.10}$$

El objetivo del modelo es minimizar los costos de transporte y de mantener inventario tanto en el depósito como en los clientes. La expresión (4.2) garantiza que el vehículo que entre sea el que sale del nodo. La expresión (4.3) garantiza que cada vehículo/ruta salga del origen. La expresión (4.4) garantiza que cada vehículo/ruta entre al origen. La expresión (4.5) elimina los subtoures. La expresión (4.6) no permite que la capacidad del vehículo sea excedida por la cantidad a entregar al cliente por cada periodo. La expresión (4.7) expresa diferencia entre la capacidad del cliente con el inventario almacenado en ese periodo de tiempo, la cual debe ser mayor a la cantidad a despachar. La expresión (4.8) asocia que si son enviadas unidades al cliente, éstas deben llegar por alguna ruta a él. La expresión (4.9) establece que la demanda del periodo debe ser satisfecha por la cantidad entregada en el mismo y el inventario actual, pudiendo dejar inventario para el siguiente periodo. La expresión (4.10) corresponde a las condiciones de no negatividad del modelo.

6.4 VERIFICACIÓN DEL MODELO

Para la verificación del modelo formulado en el numeral 6.3 se tendrá a consideración cuatro clientes (A, B, C y D), cada uno con demanda diferente y se contemplan entregas anticipadas, además de tener una capacidad limitada de almacenamiento.

El depósito cuenta con dos vehículos los cuales tienen capacidad de carga igual u homogénea; además tanto la empresa como los clientes tienen un costo de mantener inventario el cual será cargado al final del periodo. Los datos que se deberán tener en cuenta se muestran en la tabla 2.

Se encuentra como solución que al cliente C, quien es visitado por el vehículo 1 y no tiene demanda para el periodo 1 (véase Tabla 3), se le entregan 1000 unidades, las cuales se mantienen en inventario de tal modo que se satisfaga la demanda para el periodo 2 y 3 sin ocasionar faltantes.

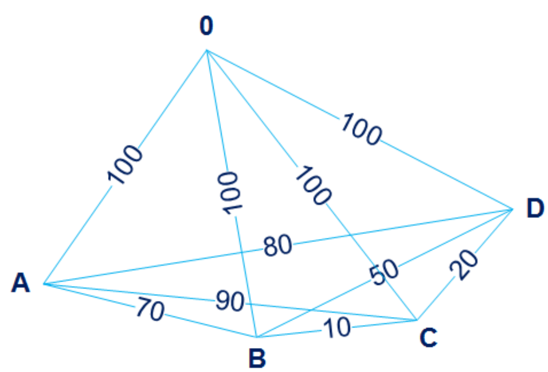
Para el tercer periodo los clientes B, C y D almacenan diferentes cantidades de inventario para satisfacer la demanda del periodo 4. Con un tiempo de solución de 3,77 segundos, 208 variables y 265 restricciones, las rutas que deberán seguir estos vehículos se pueden observar en la ilustración 3.

Tabla 2 Ejemplo problema de ruteo e inventario

Cliente	Capacidad	Demanda			
		1	2	3	4
A	5000	5000	1700	5000	2800
B	3000	3000	2700	2500	2400
C	2000	0	1500	2600	1000
D	4000	1500	2600	3900	1300
Capacidad del vehículo					5000
Costo de mantener inventario en el depósito					10
Costo de mantener inventario en el cliente					0,1

Los costos de transporte son iguales en todos los periodos y para todos los vehículos, y están representados en la ilustración 2.

Ilustración 2 Costo de transporte



Con las características mencionadas, se genera un costo de $397.463, y las cantidades entregadas se muestran en la tabla 3.

Tabla 3 Solución modelo IRP

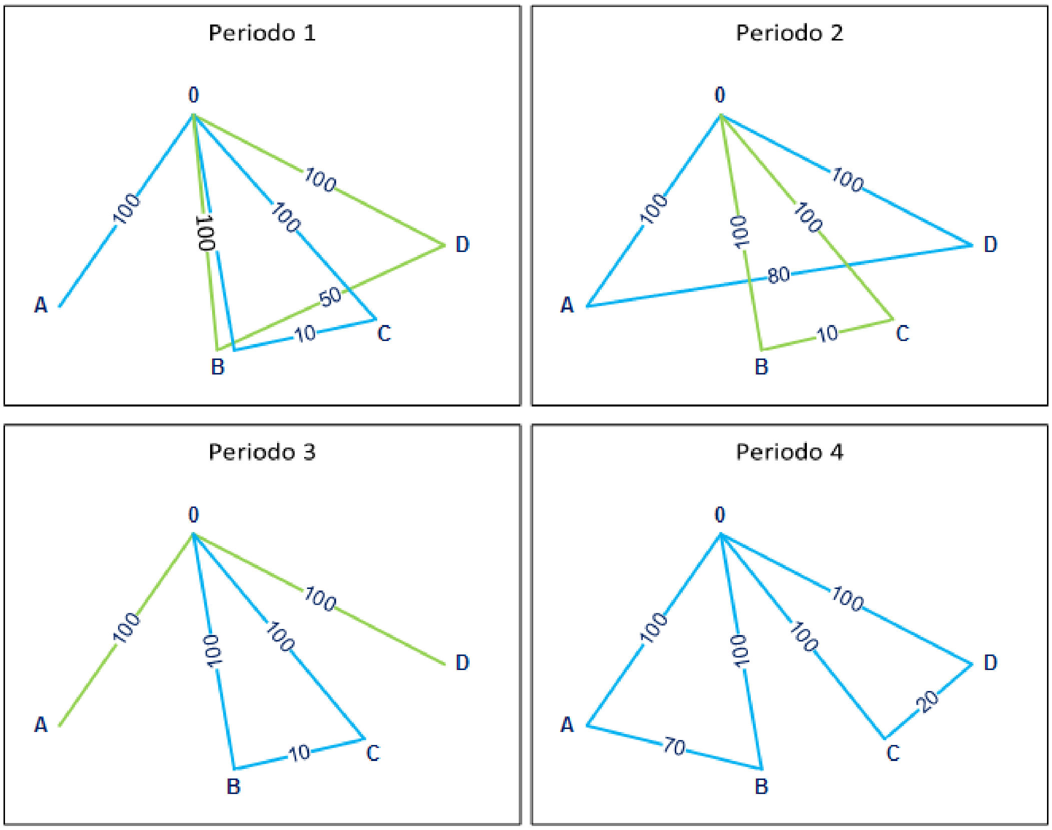
Periodo	Cantidad entregada				Demanda				Inventario			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	5000	3000	1000	1500	5000	3000	0	1500			1000	
2	1700	2700	1250	2600	1700	2700	1500	2600			750	
3	5000	2750	1925	3950	5000	2500	2600	3900		250	75	50
4	2800	2150	925	1250	2800	2400	1000	1300				

Para validar la versatilidad del modelo, se varía la demanda que será determinística para este ejercicio. Los costos de transporte así como los costos de mantener siguen constantes.

Tabla 4 Demandas Determinísticas.

Cliente	Capacidad	Demanda			
		1	2	3	4
A	5000	2300	2300	2300	2300
B	3000	2600	2600	2600	2600
C	2000	1300	1300	1300	1300
D	4000	2050	2050	2050	2050
Capacidad del vehículo					5000
Costo de mantener inventario en el depósito					10
Costo de mantener inventario en el cliente					0,1

Ilustración 3 Rutas para los diferentes periodos.



La solución hallada por el Solver de Excel en 3,23 segundos y un costo total de $ 331.960, las cantidades entregadas y el nivel de inventario se muestran en la tabla 5.

Tabla 5 Solución para 4 clientes con demanda determinística.

Periodo	Cantidad entregada				Demanda				Inventario			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	2300	2600	1300	2050	2300	2600	1300	2050				
2	2300	2600	1300	2050	2300	2600	1300	2050				
3	2300	2600	1300	2050	2300	2600	1300	2050				
4	2300	2600	1300	2050	2300	2600	1300	2050				

Se puede ver en la tabla 5 que cuando la demanda es igual para todos los periodos, no se generan inventarios, es por esto que una de las características del modelo expuesto en el numeral 3.1 es que la demanda debe ser dinámica.

Ahora se dispone a variar los costos de mantener inventario entre los clientes, pero éstos permanecerán constantes en cada periodo. (Ver tabla 6)

Tabla 6 Demanda dinámica y costos de mantener inventario en los clientes diferentes.

Periodo	Cantidad entregada				Demanda				Inventario			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	2700	2200	700	2050	1000	2100	0	2050	1700	100	700	0
2	0	0	1400	3300	1700	0	1500	2600	0	100	600	700
3	5000	2700	2000	3200	5000	2500	2600	3900	0	300	0	0
4	2800	3000	1000	1300	2800	3300	1000	1300	0	0	0	0
Costos de mantener inventario									0,05	0,08	0,15	0,03

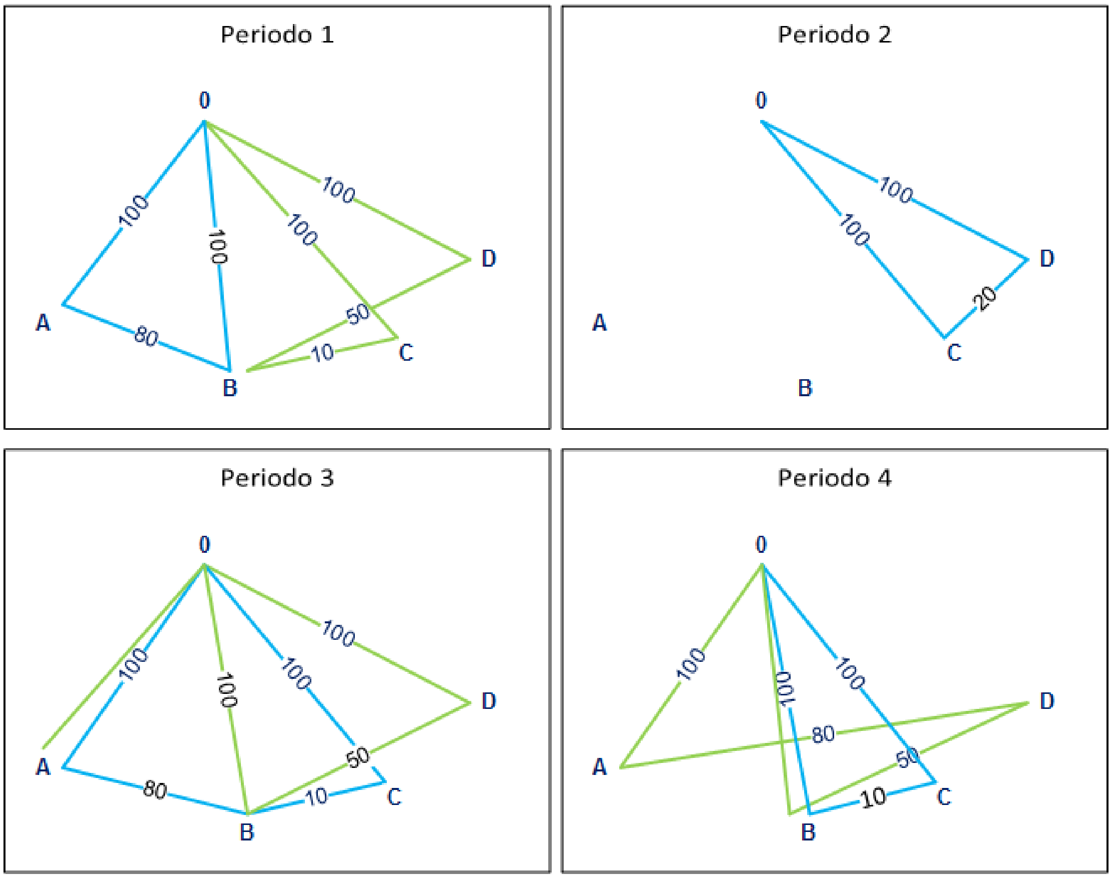
Con costos diferentes de mantener inventario en los clientes, y con demandas bajas para los primeros periodos, se puede observar que se generan niveles de inventarios más altos, en comparación con los obtenidos en la tabla 3.

Una característica del modelo que ha sido formulado, establece la entrega anticipada de la demanda, ésta se cumple con este ejemplo en donde para el periodo 1, el vehículo 1 le entrega al cliente A 2700 unidades, satisfaciendo la demanda para ese periodo y la del siguiente periodo, haciendo que para el periodo 2 éste no sea visitado.

Las rutas que los dos vehículos deben seguir se muestran en la ilustración 4, en donde se puede ver que para el periodo 2 solo realiza la entrega mercancía el vehículo 1 (azul), mientras que en otros periodos salen los dos vehículos.

Se puede observar que para el periodo tres el vehículo 2 (verde) hace dos recorridos, en donde en el primer recorrido se satisface solo la demanda del cliente A y en el segundo recorrido se satisface la demanda de los clientes B y D; es así como en esta ocasión del origen cada vehículo sale por lo menos una vez.

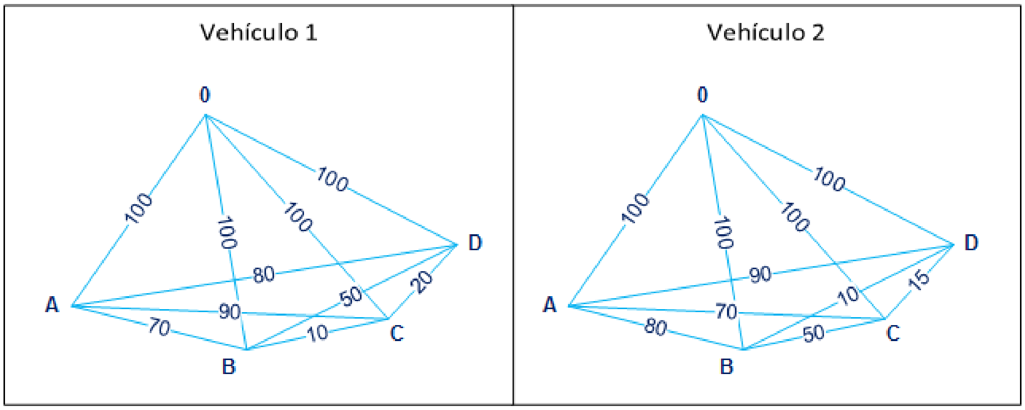
Ilustración 4 Rutas con demandas bajas en los primeros periodos.



El tiempo de solución para este caso es de 4,07 segundos, con 262 restricciones y 208 variables, la solución óptima es de $ 335.861.

Por otro lado, se debe revisar qué pasa cuando los costos de transporte son diferentes para cada vehículo, se deben establecer costos de transportes para cada vehículo como se muestran en la ilustración 5.

Ilustración 5 Costos de transporte para cada vehículo



Con un costo de $ 329.476 y un tiempo de solución de 2,42 segundos las rutas que realizan los vehículos se muestran en la ilustración 6.

Las cantidades que son entregadas a cada cliente en cada periodo se encuentran en la tabla 7, junto con los niveles de inventario, en donde se puede ver que la solución varía en cuanto al nivel de inventario que es almacenado en cada cliente, sin embargo se cumple con la condición que existan entregas anticipadas.

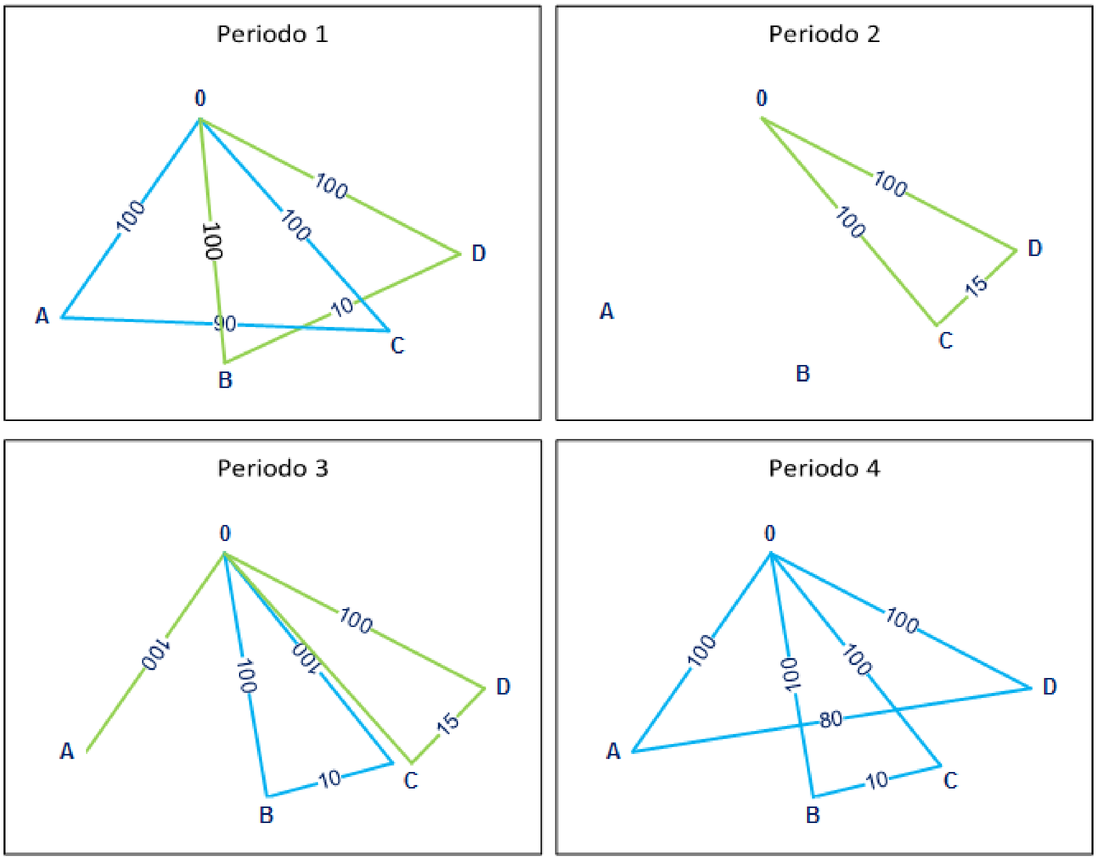
Otro ítem que es importante tener en cuenta es que el costo de transporte sea diferente en cada periodo, en este caso el costo total puede variar debido a esta modificación, pero las rutas y entregas no varían.

Tabla 7 Cantidades entregadas con costos de transporte diferentes.

Periodo	Cantidad entregada				Demanda				Inventario			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	2700	2200	0	2050	1000	2100	0	2050	1700	100	0	0
2	0	0	1500	3300	1700	0	1500	2600	0	100	0	700
3	5000	2700	2000	3200	5000	2500	2000	3900	0	300	0	0
4	2800	3000	1000	1300	2800	3300	1000	1300	0	0	0	0
Costos de mantener inventario									0,05	0,08	0,15	0,03

Cuando el costo de mantener inventario en el cliente es diferente en cada periodo se genera una variación en el costo total.

Ilustración 6 Rutas con costo de transporte diferente entre vehículos.



7. EXPERIMENTACIÓN

7.1 Heurísticas

Serán abordados dos métodos heurísticos; el método de mejora 2-OPT y el algoritmo de ahorro de Clark and Wright. A continuación se explicará cada uno de éstos:

a. MÉTODO DE AHORROS CLARK AND WRIGHT

El procedimiento de esta heurística es simple, dado que por medio de una exploración limitada del espacio de búsqueda, se encuentra una solución que es más o menos aceptada con un tiempo de cálculo moderado.[47]

El algoritmo de ahorros no proporciona una solución óptima al problema; pero a menudo este método rinde una solución relativamente buena, es decir; una solución que se desvía poco de la solución óptima. Las soluciones pueden ser mejoradas usando la heurística 2-opt.[48]

La aplicación de este algoritmo busca minimizar el costo de tal modo que se satisfaga la demanda de cada cliente.[49]

---

[47] Sardova, F. Métodos Exactos y Heurísticos para resolver el Problema del Agente Viajero (TSP) y el Problema de Ruteo de Vehículos (VRP). ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL Guayaquil, Ecuador Octubre 2007. Disponible en: < http://www.icm.espol.edu.ec/jornadas/14/archivos/Diapositivas/SandoyaFernando/conferencia/SandoyaFernando_M%C3%A9todos_exactos_y_heur%C3%ADsticos_para_el%20VRP_jornadas.pdf>

[48] Aquino, J. y Jiménez, R.El método de ahorros fue desarrollado por Clark and Wright en 1963 siendo la heurística más significativa para el VRP. Es la aplicación del sentido común a la hora de construir rutas de transporte. Guayaquil, Ecuador. 2010. Trabajo de Grado (Ingeniero en Logística de Transporte). Escuela Superior Politécnica del Litoral. Instituto de Ciencias Matemáticas. Disponible en: < http://www.cib.espol.edu.ec/Digipath/D_Tesis_PDF/D-91008.pdf>

[49] Barajas, W. Desarrollo de un algoritmo heurístico para establecer las rutas de transporte escolar de la secretaría de educación de Bogotá. Tesis presentada como requisito parcial para obtener el título de: Magíster en Ingeniería de Sistemas y Computación. Universidad Nacional de Colombia.

Si en una solución dos rutas diferentes (0,…, i, 0) y (0, j,…, 0) pueden ser combinadas formando una nueva ruta (0,…, i, j,…, 0) como se muestra en la Ilustración 6, el ahorro (en distancia o costo) obtenido por dicha unión es:

$$S_{j,i} = C_{0,j} + C_{0,i} - C_{j,i}$$

Para la nueva solución los arcos (i, 0) y (0, j) no serían utilizados y se agregaría el arco (i, j). En este algoritmo se parte de una solución inicial y se realizan las uniones que den mayores ahorros siempre y cuando no se violen las restricciones del problema. [50]

Para el algoritmo de Clark y Wright existe una versión paralela en la que se trabaja sobre todas las rutas simultáneamente, y otra secuencial que construye las rutas de a una por vez.[51]

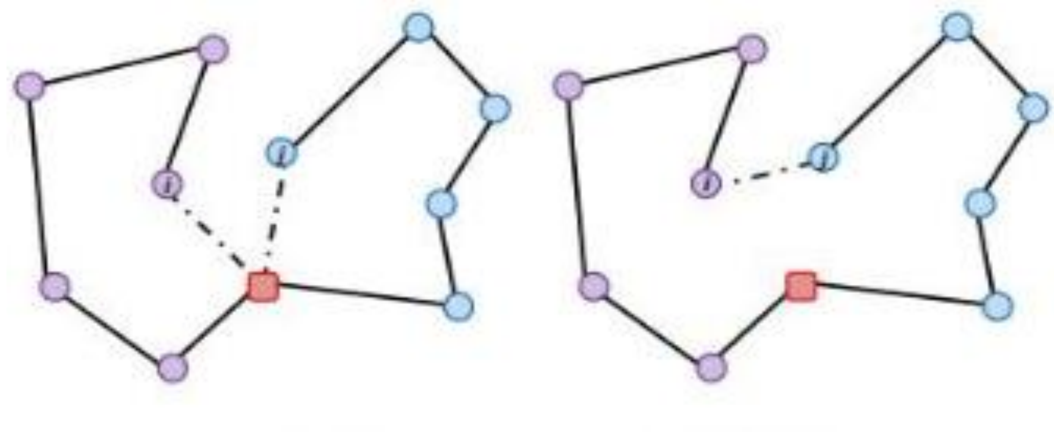
Para el presente trabajo se hará uso del enfoque secuencial dado su filosofía, la cual consiste en la conexión de todos los clientes de dos en dos; posteriormente se clasifican las alternativas de unión por ahorros de manera decrecientes; se toma la alternativa de unión de máximo ahorro y que a la vez sea consistente con el número de vehículos y sus capacidades; se procede iterando hasta que no exista mejora

Facultad de Ingeniería. Bogotá (2009). Disponible en: <http://www.bdigital.unal.edu.co/8520/1/299667.2010.pdf>

[50] Fumero, A. GMOR: Google Maps para la Optimización de Rutas. Universidad de la Laguna. Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática. Junio (2008). San Cristóbal de la Laguna, España. Disponible en: < http://www.goma.ull.es/GMOR/Memoria-GMOR.pdf >

[51] Olivera, A. Heurísticas para Problemas de Ruteo de Vehículos. Montevideo, Uruguay. 2004. Universidad de la República, Facultad de Ingeniería. Instituto de Computación. Disponible en: <https://www.fing.edu.uy/inco/pedeciba/bibliote/reptec/TR0408.pdf>

Ilustración 7 Procedimiento de Clark y Wright.



Fuente: Procedimiento de Clark y Wright.[52]

Los pasos que se realizan hasta encontrar una solución óptima se mencionan a continuación:

Paso 1. Calcular los ahorros $S_{j,i} = C_{0,j} + C_{0,i} - C_{j,i}$ para todos los pares de clientes i y j.

Paso 2. Ordenar los ahorros en orden decreciente.

Paso 3. Tomando el máximo ahorro de la lista ordenada en el paso anterior, realizar los siguientes pasos:

Paso 4. Buscar el primer arco factible según las restricciones impuestas al problema de diseño de rutas (capacidad de los vehículos, número de vehículos), que puede usarse en expandir uno de los extremos de la ruta en construcción.

---

[52] Quintero, T. Algoritmo híbrido basado en un método de aproximaciones sucesivas para el problema de ruteo de Vehículos heterogéneo. San Nicolás de los Garza, Nuevo León, 2012. Trabajo de grado (Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas). Universidad Autónoma de Nuevo León. Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. División de Estudios de Posgrado. Disponible en catalogo bibliográfico de la Universidad de Nuevo León: < http://eprints.uanl.mx/3155/ >

Paso 5. Si la ruta no puede extenderse más, terminarla. Escoger el primer arco factible en la lista ordenada para empezar una ruta nueva.

Paso 6. Repetir los pasos 4 y 5 hasta que no se puedan escoger más arcos.

Es factible que este algoritmo deje clientes sin asignación a una ruta particular o bien produzca rutas circulares, se ha comprobado una ineficacia para algunos casos concretos (por ejemplo, cuando los clientes ocupan posiciones equidistantes en los vértices de una red cuadriculada).

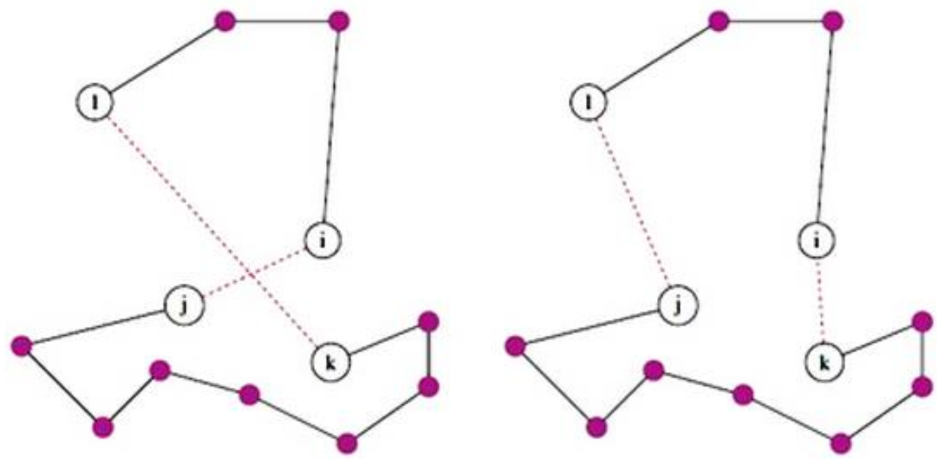
b. MÉTODO DE MEJORA 2-OPT

El método de mejora 2-OPT es un algoritmo que busca encontrar la mejor solución desde una respuesta previa. Si en una ruta existe cruce entre los clientes, se realizan intercambios para eliminar dicho cruce.

El objetivo de este método es disminuir los costos de tal modo que se disminuyan los cruces entre aristas lo que hace que este algoritmo sea más eficaz. Una ruta es mejorada cuando se borran dos aristas y luego se reconectan hasta que ya no exista ninguna mejora adicional.

La adyacencia entre las aristas genera un desenlace de la ruta, siendo aplicable solo a grafos simétricos, por tal razón se debe tener en cuenta que al intercambiarlas no deben ser contiguas.

Ilustración 8 El movimiento 2-Opt.



Fuente: Estudio de heuristicas para el problema del agente viajero asimétrico. [53]

Los pasos para la programación de la heurística de mejora 2-opt son[54]:

Paso 1. A la ruta ya generada por el método exacto se le realiza un intercambio de clientes con el fin de analizar si se puede mejorar el costo, de ser posible la mejora se elige dicha ruta.

Paso 2. Se realiza el mismo esquema para el resto de rutas hasta mejorar cada una de ellas.

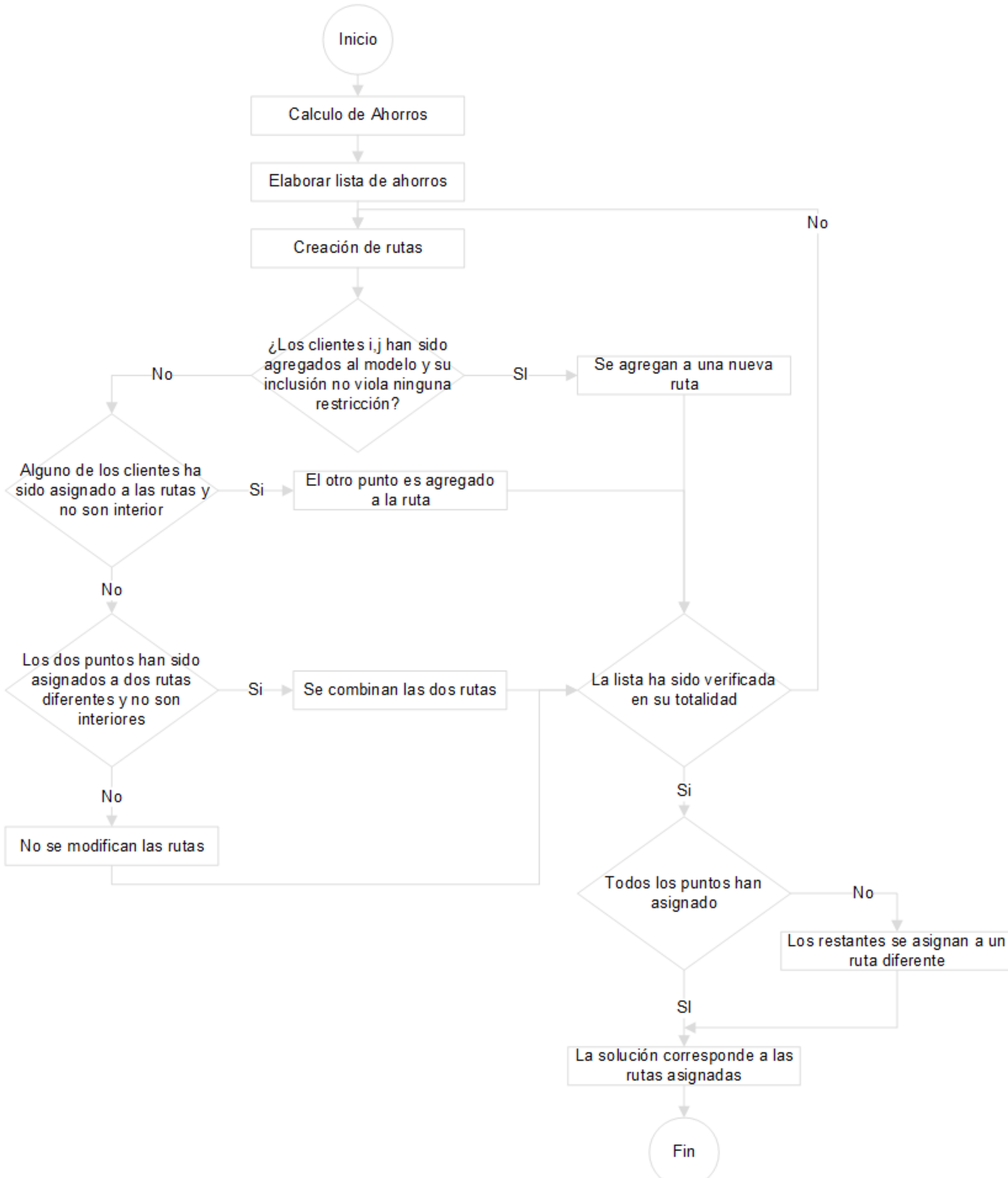
Paso 3. Si se encuentra una mejor solución al aplicar este algoritmo, la ruta ya generada por el método exacto se mantiene.

Paso 4. Se repiten los pasos.

[53] Arellano, N. y García, Irma. Estudio de heuristicas para el problema del agente viajero asimetrico. Facultad de Sistemas. Universidad Autonoma de Coahuila. [En línea] Junio 2012. [Citado el: Diciembre 16, 2014]. Disponible en:< http://www.posgradoeinvestigacion.uadec.mx/CienciaCierta/CC30/3.html>

[54] Cepeda, G. y San Lucas, M (2012). Diseño e implementación de una heurística para el problema de ruteo e inventario vehicular con recolección y entrega. Tesis de grado para la obtención del título en Ingeniería Logística y Transporte. Escuela Superior Politécnica del Litoral. Instituto de ciencias matemáticas. Guayaquil, Ecuador. Recuperado el 30 de mayo de 2015, de http://www.cib.espol.edu.ec/Digipath/D_Tesis_PDF/D-93884.pdf

Ilustración 9. Algoritmo de flujo de Clark and Wright



Fuente: Métodos heurísticos para la solución del problema de ruteo de vehículos con capacidad CVRP. [55]

[55] Contreras, C. y Diaz, M. Métodos heurísticos para la solución del problema de ruteo de vehículos con capacidad CVRP. Bucaramanga, 2010. Trabajo de grado (Ingeniería Industrial). Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales. Disponible en catalogo bibliográfico de la Universidad Industrial de Santander: < http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/ >

El método 2-OPT permite que sea mejorada la solución encontrada por un método exacto o una heurística. Así como la creación de una ruta aleatoria por medio de la permutación de un vector que permita generar las rutas respectivas de acuerdo con la capacidad de los vehículos y la demanda de los distintos clientes. Se debe obtener el valor objetivo de cada ruta de tal modo que se verifique si los intercambios mejoran la solución encontrada en este ejercicio.

7.2 METAHEURÍSTICA

Como método metaheurístico de solución se hará uso de la búsqueda tabú; el cual es un método de búsqueda "inteligente" que se caracteriza por utilizar una estrategia la cual está basada en el uso de estructuras de memoria para escapar de los óptimos locales en los que se puede caer al moverse de una solución a otra en el espacio de soluciones.

Se puede definir como "marcada que constituye un riesgo", donde el riesgo a ser evitado es el de seguir un camino no productivo, incluyendo el de ser conducido a una trampa de la que no se puede salir (óptimo local). [56]

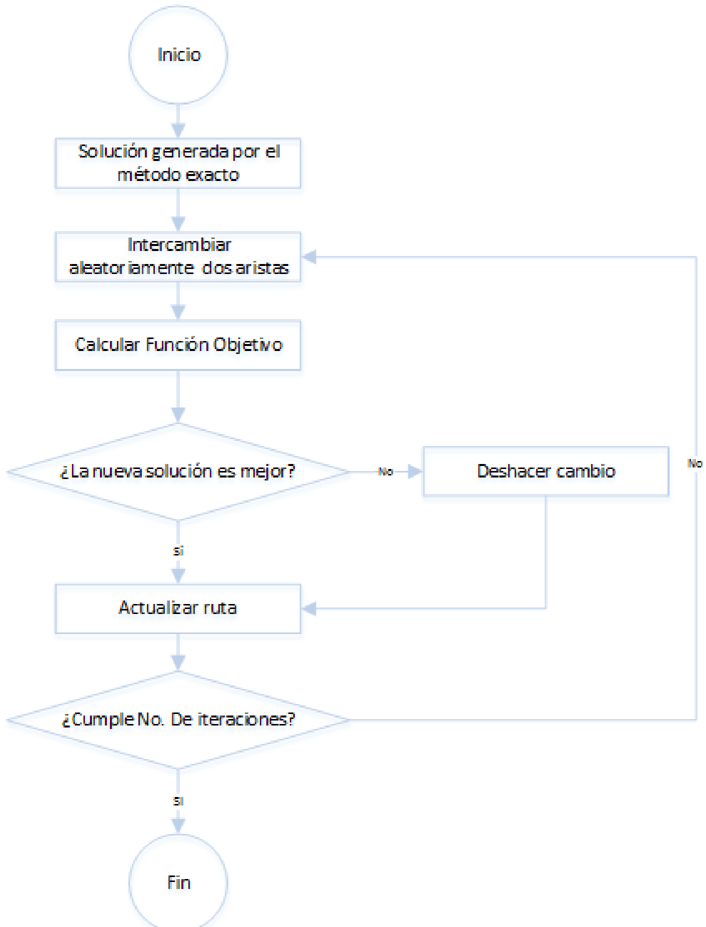
La búsqueda Tabú se caracteriza por:

- El uso de las estructuras de memoria la cual puede ser de corto plazo (memoria reciente) y de largo plazo (memoria de frecuencias).

---

[56] Riojas, A y Álvarez, M. Aplicación de la metaheurística "Búsqueda Tabú al problema de la N-reinas. Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad Nacional mayor de San marcos. Lima Perú. 2005. Disponible en: <http://www.academia.edu/10792819/Aplicaci%C3%B3n_de_la_metaheur%C3%ADstica_B%C3%BAsqueda_tab%C3%BA_al_problema_de_las_N-reinas. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, aplicación de la metaheurística "Búsqueda Tabú" al problema de las N-reinas

Ilustración 10 Diagrama de flujo método 2-OPT.



Fuente: Diagrama de flujo método 2-OPT.[57]

- La lista tabú y los mecanismos de selección del siguiente movimiento. La lista tabú es una lista donde se registran aquellas soluciones o atributos de soluciones que no deben volver a ser elegidas por un tiempo.

- Las estrategias de búsqueda: intensificación y diversificación; los cuales son dos elementos importantes en el proceso. Intensificación la cual consiste en

[57] Guasmayan, F. Solución del problema de Ruteo de Vehículos Dependientes del Tiempo Utilizando un Algoritmo Genético Modificado. Tesis de grado para optar al título de Magíster en Investigación Operativa y Estadística Facultad de Ingeniería Industrial. Universidad Tecnológica de Pereira. Pereira, Risaralda. Febrero de 2014. Disponible en: < http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/11059/4562/1/5196G917.pdf >

modificar las reglas de selección para favorecer la elección de los movimientos combinados y las características de solución; y la de diversificación que trata de ir a las soluciones no visitadas anteriormente y generar nuevas soluciones que difieran de las ya evaluadas.[58]

Al aplicar un método de búsqueda cualquiera se puede presentar dos problemas:

a. El algoritmo puede ciclar, revisitando soluciones ya vistas, por lo que habría que introducir un mecanismo que lo impida.

b. El algoritmo podría iterar indefinidamente, por lo que se establece un criterio de parada.

Esta limitación de los métodos de búsqueda es el punto de inicio de muchas de las técnicas metaheurísticas, entre ellas la búsqueda tabú.

Una diferencia que se puede encontrar en la búsqueda Tabú en relación con las otras metaheurísticas es el uso de memoria en donde puede hacer uso de una memoria de corto o largo plazo, para el estudio de éste se tendrá a consideración solo la memoria de corto plazo y como criterio de parada 1000 iteraciones.

- Memoria a Corto Plazo

Una característica de la metaheurística es la memoria a corto plazo en donde se almacenan los atributos de las soluciones recientemente visitadas, y en donde se busca explorar a fondo la región determinada por el espacio de soluciones.

[58] Glover, F. y Batista, B. Introducción a la Búsqueda Tabú. Universidad de la Laguna. Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática. Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación. San Cristóbal de la Laguna. España. Disponible en: < http://leeds-faculty.colorado.edu/glover/fred%20pubs/329%20-%20Introduccion%20a%20la%20Busqueda%20Tabu%20TS_Spanish%20w%20Belen(11-9-06).pdf>

En la memoria de corto plazo, el vecindario está conformado por[59]:

$$N'(x) = \{N(x) - Lista\ Tab\acute{u}\} \quad ; \quad N'(x) \subset N(x)$$

En donde $N(x)$ es la vecindad (población).

En esencia la memoria de corto plazo utiliza la estructura tabú para penalizar la búsqueda.

Su estructura está basada en una lista tabú, que desde el contexto computacional, es donde se registran aquellas soluciones o atributos de soluciones que no pueden ser elegidas; y los mecanismos de selección del siguiente movimiento.

El objetivo de esta lista es el de prevenir la creación de ciclos o el escapar de óptimos locales, la lista almacena los movimientos realizados al tiempo que se les asigne una prohibición en un número determinado de iteraciones.[60]

Si existiera la posibilidad de encontrar una mejor solución en una prohibición (tabú) y si la solución mejora con relación a la actual, esta metaheurística permite que dicha prohibición no sea tenida en cuenta, y se pueda considerar como solución actual.

Una forma sencilla de construir una lista tabú consiste en que cada vez que se realiza un movimiento, se introduce su inverso (si se pasó de X_0 a X_1, el inverso es

---

59 Riojas, A. Conceptos, algoritmo y aplicación al problema de las N-reinas. Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad Nacional mayor de San marcos. Lima, Perú. 2005. Disponible en: < http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/monografias/basic/riojas_ca/cap3.pdf>

60 Restrepo, G y Moreno, L. Model for academic resorce assignment in educational institutions using the tabu search metaheuristcs. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Minas, Escuela de sistemas. Medellín, Colombia. Noviembre de 2011. Disponible en:< http://www.bdigital.unal.edu.co/25100/1/22350-106831-1-PB.pdf>

X_1 a X_0,) en una lista circular, de forma que los elementos de dicha lista están penalizados durante un cierto tiempo.

Por tanto si un movimiento está en la lista tabú no será aceptado, aunque aparentemente sea mejor solución que la solución actual.

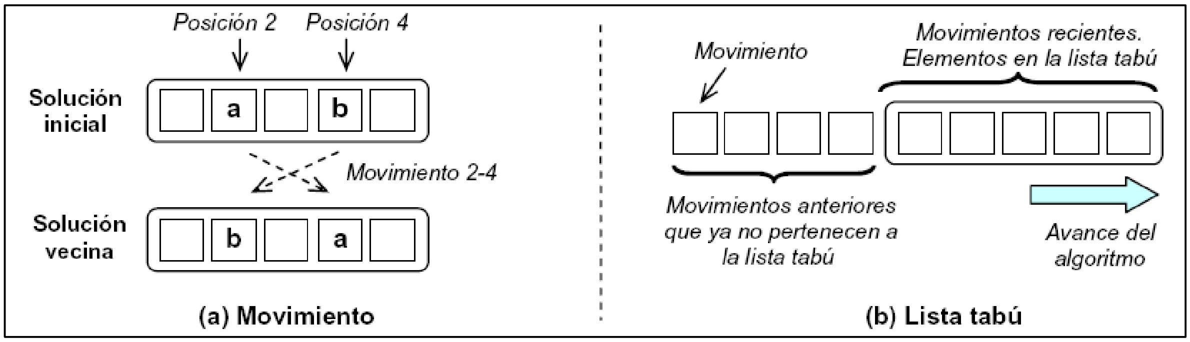
La lista tabú puede contener:

- Soluciones visitadas recientemente.
- Movimientos realizados recientemente.
- Atributos o características que tenían las soluciones visitadas.

El tiempo y el número de iteraciones de un elemento ya sea movimiento o atributo definen el tamaño de la lista tabú. Si un elemento entra a la lista tabú antes que otro puede salir mucho después. Eso está definido por el lugar en el cual se encuentre, es decir si un movimiento tipo 1 tiene asociada una posición de 5 y entra a la lista tabú en la iteración 30, (saldrá en la iteración 35) y si un movimiento tipo 2 tiene asociada una posición de 2 y entra a la lista tabú en la iteración 31, saldrá de la misma en la iteración 33, entró después, pero sale antes.

Por ejemplo si se está construyendo un árbol en un grafo, se parte de un nodo y se van agregando nodos (con su consiguiente arista), luego de algunas iteraciones puede necesitarse retirar una arista (con su correspondiente nodo), se tienen pues dos tipos de movimientos: agregar una arista (tipo 1) y retirar una arista (tipo 2), cuando un par de nodos (x, y) se agregan al árbol, se hace una entrada a la lista tabú que penaliza su salida durante k1 iteraciones, análogamente cuando sale (u, v) se hace una entrada en la lista tabú que penaliza su entrada durante k2 iteraciones, como hay más aristas fuera del árbol que en él, se ve razonable implementar una estructura tabú que mantenga a una arista recientemente retirada con la condición tabú más tiempo (para dar oportunidad a otras aristas) que a una arista recientemente agregada.

Ilustración 11 Estructura básica en la búsqueda tabú.



Fuente: Metaheurísticos: Una alternativa para la solución de problemas combinatorios en administración de operaciones.[61]

- <u>Metodología de la Búsqueda Tabú</u>

Para la solución x se define un entorno o vecindario $N(x)$, como se mencionaba anteriormente, se evalúa y si genera una mejor solución se lleva a la lista, pero en lugar de considerar todo el entorno se busca definir un nuevo entorno $N'(x)$, para aquellas soluciones (no tabú) del entorno de x.

El diagrama que representa el funcionamiento de la metaheurística Búsqueda tabú se encuentra en la ilustración 13.

[61] Vélez, C. y Montoya, J. Metaheurísticos: Una alternativa para la solución de problemas combinatorios en administración de operaciones. Envigado, Colombia 2007. Disponible en: < http://www.scielo.unal.edu.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1794-12372007000200009&lng=es&nrm=iso >

Los pasos que se recomiendan seguir para implementar el algoritmo de Búsqueda Tabú son[62]:

Paso 1. Selección de la solución inicial: debe ser una solución factible. Esta solución quedará guardada en la memoria de largo plazo del algoritmo.

Paso 2. Elección del entorno o vecindario y generación de una nueva solución: la búsqueda Tabú supone que pueden generarse soluciones adyacentes y un entorno de soluciones partiendo de la solución inicial. Se pueden hacer intercambios de aristas o utilizar un sub-viaje inverso, mencionado anteriormente.

Paso 3. Elección del tamaño máximo de la lista tabú.

Nota: Siempre que se agregue uno o más movimientos tabú a una lista llena, se elimina el o los más antiguos de los movimientos de la lista tabú.

Paso 4. Selección de la mejor solución en el entorno estudiado, la cual será guardada en la memoria de largo plazo del algoritmo.

Paso 5. La solución elegida en el paso 4 se toma como el nuevo punto de partida y se repiten los pasos anteriores.

Paso 6. Criterio de parada o regla de detención: El proceso termina después de un número dado de iteraciones consecutivas. El algoritmo compara todas las soluciones guardadas en la memoria a largo plazo y toma como solución

[62] Galvis, J., Jaimes, G. y Quiroga, N. Estudio cuantitativo de tres aplicaciones diferentes del problema de ruteo de vehículos (VRP) en la Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 2011. Trabajo de grado (Ingeniería Industrial). Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales. Disponible en catalogo bibliográfico de la Universidad Industrial de Santander: < http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/

final; la que presente el mejor valor de la función objetivo. (El algoritmo también puede detenerse después de realizar un número de iteraciones sin encontrar una solución igual o mejor a la inicial).

Ilustración 12 Algoritmo Búsqueda Tabú simple.

Generar solución inicial $\mathbf{x_0}$
k := 1.
x= x_0. (x es la solución actual)

MIENTRAS la condición de finalización no se encuentre

HACER:

Identificar *N*(x). (Vecindario de x)

Identificar *T*(x,k). (Lista Tabú)

Identificar A(s,k). (Conjunto de Aspirantes)

Determinar $N^*(x,k) = \{N(x) - T(x,k)\} \cup A(x,k)$. (Vecindario reducido)

Escoger la mejor $x \in N^*(x,k)$

"Guardar" x si mejora la mejor solución conocida $x_k := x$.

Actualizar la lista tabú

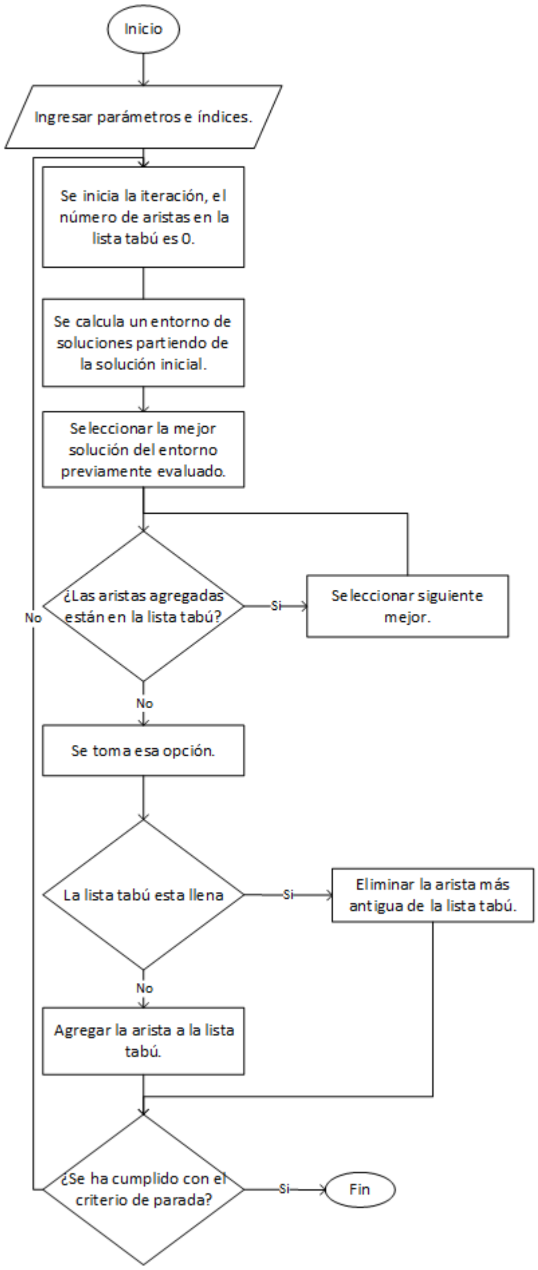
k := k+1.

FIN MIENTRAS

Fuente: Conceptos, algoritmo y aplicación al problema de las N-reinas.[63]

[63] Riojas, A. Conceptos, algoritmo y aplicación al problema de las N-reinas. Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad Nacional mayor de San marcos. Lima, Perú. 2005. Disponible en: < http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/monografias/basic/riojas_ca/cap3.pdf>

Ilustración 13 Diagrama de flujo de la metaheurística Búsqueda Tabú



Fuente: Estudio cuantitativo de tres aplicaciones diferentes del problema de ruteo de vehículos (VRP) en la Universidad Industrial de Santander.[64]

---

[64] Galvis, J., Jaimes, G. y Quiroga, N. Estudio cuantitativo de tres aplicaciones diferentes del problema de ruteo de vehículos (VRP) en la Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 2011. Trabajo de grado (Ingeniería Industrial). Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales. Disponible en catalogo bibliográfico de la Universidad Industrial de Santander: < http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/ >

7.3 INSTANCIAS

En el artículo escrito por Archetti, C. et al.[65] se trabajaron 4 instancias, en donde se tuvieron en cuenta: el horizonte de planeación (períodos); los costos de mantener inventario tanto en el depósito como en los clientes, los cuales varían con relación a un aleatorio contemplado en un intervalo de (0,1- 0,5); los cuales van aumentando para determinar los cambios que va sufriendo el modelo al tener en cuenta costos altos o costos bajos.

El artículo escrito por Saltos, R. y Aceves, R. [66], señala 20 instancias aleatorias, las cuales son: la naturaleza de la demanda, la función de distancias, el número de clientes, capacidad de almacenamiento, capacidad del vehículo, horizonte de planificación, tasa de inventario.

Para el presente trabajo se tendrán en cuenta:

- Número de Clientes.
- Costo de mantener inventario: Tanto en el depósito como en los clientes puede variar.

Se debe aclarar que no se busca comparar; solo se hará uso de estas instancias para el desarrollo de la experimentación, en donde se resaltará la importancia de tener en cuenta los tiempos de programación tanto en Gams como en Matlab para cada una de las instancias; el costo total obtenido, el tiempo de solución y el número de iteraciones.

---

[65] Archetti, C. et al. A Branch-and-Cut Algorithm for a Vendor Managed Inventory Routing Problem. 2007.

[66] Saltos, R. y Aceves, R. Aplicacion de la Metaheurística Búsqueda de la Armonía para Resolver el Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios. EN: Revista tecnólogica ESPOL. Vol 25, No. 2; 2012, p. 4-6.

Para el uso de las heurísticas se tendrá en cuenta las variaciones en los costos de mantener inventario (CMI) debido al programa que se utilizará, por su versatilidad.

Tabla 8 Instancias.

Clientes	CMI	Instancia
4	Bajo	4nCMIb
6	Bajo	6nCMIb
8	Bajo	8nCMIb
10	Bajo	10nCMIb
20	Bajo	20nCMIb
100	Bajo	100nCMIb
4	Alto	4nCMIa
6	Alto	6nCMIa
8	Alto	8nCMIa
10	Alto	10nCMIa
20	Alto	20nCMIa
100	Alto	100nCMIa

7.4 RESULTADOS OBTENIDOS

Para el desarrollo de la experimentación se considera el uso de dos vehículos los cuales tienen que hacer los recorridos necesarios en cada periodo de tal modo que se satisfaga la demanda o si es el caso se hagan entregas anticipadas, además se asumen los costos de transporte iguales para cada vehículo y periodo.

7.4.1 Método Exacto

Para el desarrollo de este capítulo se toma a consideración los datos tenidos en cuenta para la validación del modelo. Es por esta razón que se parte del costo encontrado por el Solver de EXCEL de $ 335.861 como referencia para dar inicio a este capítulo.

Con la información proporcionada en la tabla 7, se obtiene el mismo costo hallado en ésta, pero con entregas, niveles de inventario y rutas diferentes. La solución a éste se muestra a continuación en la tabla 9.

Tabla 9 Solución en gams.

Periodo	Cantidad entregada				Demanda				Inventario			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	1080	2100	700	2050	1000	2100	0	2050	80	0	700	0
2	1620	100	1400	2600	1700	0	1500	2600	0	100	600	0
3	5000	2700	2000	3900	5000	2500	2600	3900	0	300	0	0
4	2800	3000	1000	1300	2800	3300	1000	1300	0	0	0	0
Costos de mantener inventario									0,05	0,08	0,15	0,03

Se puede apreciar en la tabla 9 que los niveles de inventario no son tan altos, en los clientes en donde no hubo demanda alguna, se le entregaron unidades de tal modo que se completara la demanda de los clientes en el periodo siguiente. Con un tiempo de solución de 0,06 segundos y 174 iteraciones se puede comprobar que la solución óptima es la misma. Las rutas que siguieron los vehículos están representadas en la ilustración 14.

En el caso para 6 clientes se pudo comprobar que se generan inventarios como se puede observar en la tabla 10, en donde para el cliente A las cantidades entregadas fueron las demandadas por lo tanto no se generaron inventarios en cada periodo; los clientes que no generaron demandas, pero que igualmente les fue entregado el pedido generaron inventarios pero éstos son bajos; como es el caso del cliente 3 y 6 a los cuales se les visualiza entregas anticipadas en el primer periodo y al cliente 2 en el segundo y tercer periodo. Las rutas que los vehículos siguieron se visualizan en la ilustración 15.

Ilustración 14 Solución proporcionada por Gams.

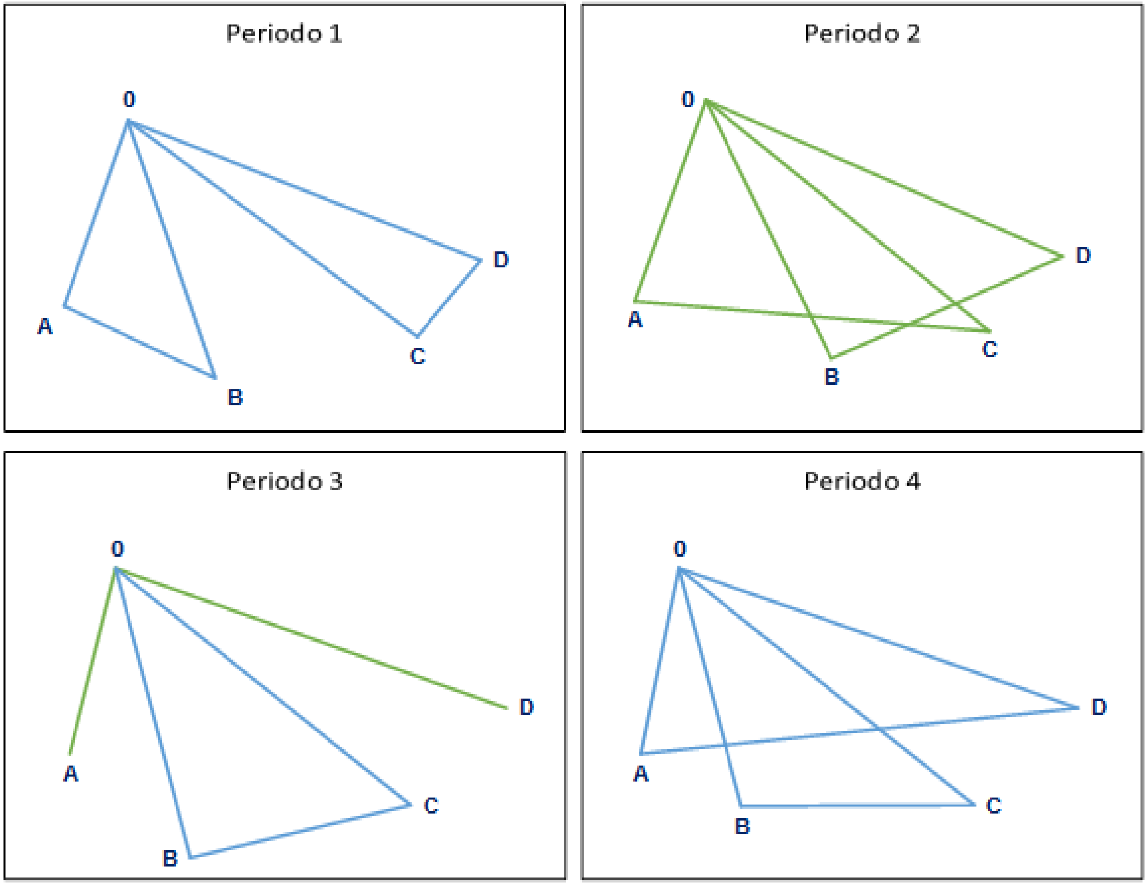
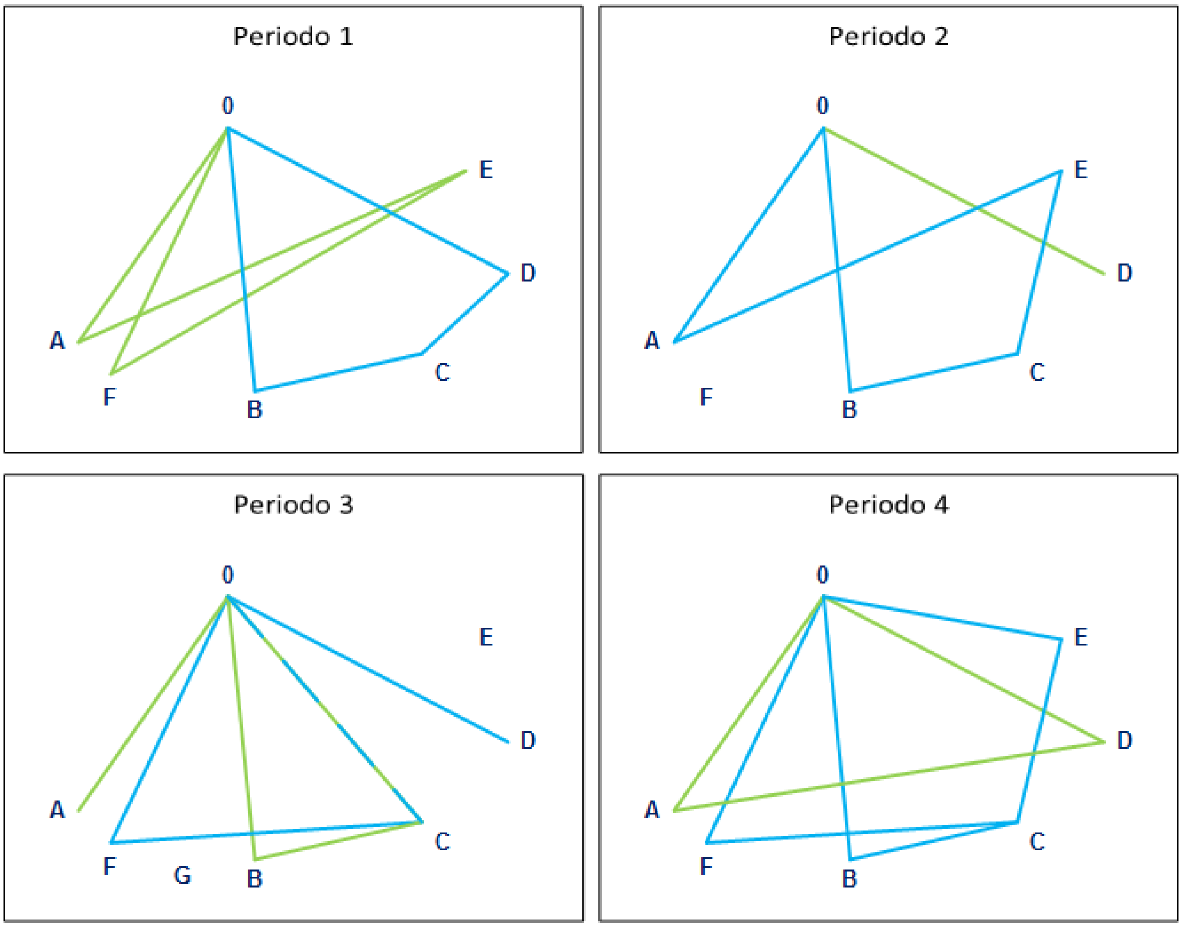


Tabla 10 Cantidades entregadas y niveles de inventario para 6 clientes.

	Cantidad Entregada				Demanda				Inventario			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
A	1000	1700	5000	2800	1000	1700	5000	2800				
B	2100	100	2700	3000	2100	0	2500	3300		100	300	
C	700	1400	2000	1000	0	1500	2600	1000	700	600		
D	2050	2600	3900	1300	2050	2600	3900	1300				
E	500	1200	0	1500	500	1200	0	1500				
F	2500	0	2000	100	1300	1200	2000	100	1200			

Ilustración 15 Solución método exacto (6 clientes).



Ahora se aborda un problema con 8 clientes, en donde se contempla la entrega anticipada para el cliente A de la demanda correspondiente al periodo 2, así como entregas de productos a los clientes B, C, F, G y H en periodos diferentes. Esto se puede corroborar en la tabla 11 en donde se muestran las cantidades entregadas junto a su demanda e inventario.

Tabla 11 Cantidades entregadas y niveles de inventario para 8 clientes.

	Cantidad Entregada				Demanda				Inventario			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
A	2700		5000	2800	1000	1700	5000	2800	1700			
B	2200		2700	3000	2100	0	2500	3300	100	100	300	
C	900	1200	2000	1000	0	1500	2600	1000	900	600		
D	2050	2600	3900	1300	2050	2600	3900	1300				
E	500	1200		1500	500	1200	0	1500				
F	1300	1200	2100		1300	1200	2000	100			100	
G	1000	550		2000	1000	500	0	2050		50	50	
H	1500			1000	1500	600	600	1000		600		

Para el caso de 10 clientes se puede ver en la tabla 12 que no se realiza la entrega anticipada al cliente 1 como se contemplaba en el caso de 8 clientes, para los clientes B y C se generan inventarios, aunque en el tercer cliente se le entrega demanda en el periodo 1 cuando éste no tiene demanda alguna. El cliente F genera entregas anticipadas por lo que se crean inventarios en el periodo 3; igualmente para el cliente G; aunque estos inventarios son muy bajos. Los clientes H, I y J no generan entregan anticipadas; se entrega lo que el cliente demanda; por lo tanto no hay inventario. Las rutas que siguen los vehículos se muestran en la ilustración 16.

Para el caso de 20 clientes la entrega anticipada de la demanda en el periodo 2 para el cliente E, y generación de inventario en algunos clientes, fue la solución encontrada por medio de Gams, por medio del método de Branch and Cut. (Ver tabla 14).

Tabla 12 Cantidades entregadas para 10 clientes.

	Cantidad Entregada				Demanda				Inventario			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
A	1000	1700	5000	2800	1000	1700	5000	2800				
B	2100	100	2700	3000	2100	0	2500	3300		100	300	
C	700	1400	2000	1000	0	1500	2600	1000	700	600		
D	2050	2600	3900	1300	2050	2600	3900	1300				
E	500	1200	0	1500	500	1200	0	1500				
F	1300	1200	2100	0	1300	1200	2000	100			100	
G	1000	550	0	2000	1000	500	0	2050		50	50	
H	1500	600	1000	900	1500	600	1000	900				
I	2200	2000	2500	0	2200	2000	2500	0				
J	100	1200	1500	1200	100	1200	1500	1200				

Para 20 clientes, el tiempo de solución es mayor en comparación a los demás casos mencionados como se puede ver en la tabla 13; así como el número de variables e iteraciones.

Tabla 13 Tiempos de solución método exacto.

Clientes	Tiempo
4	00:06
6	00:08
8	00:12
10	00:17
20	00:58

En la tabla 14 se puede observar las cantidades entregadas, demanda e inventarios almacenados por cada cliente en cada periodo; para 20 clientes con demanda dinámica.

Ilustración 16 Rutas para realizar entregas a 10 clientes.

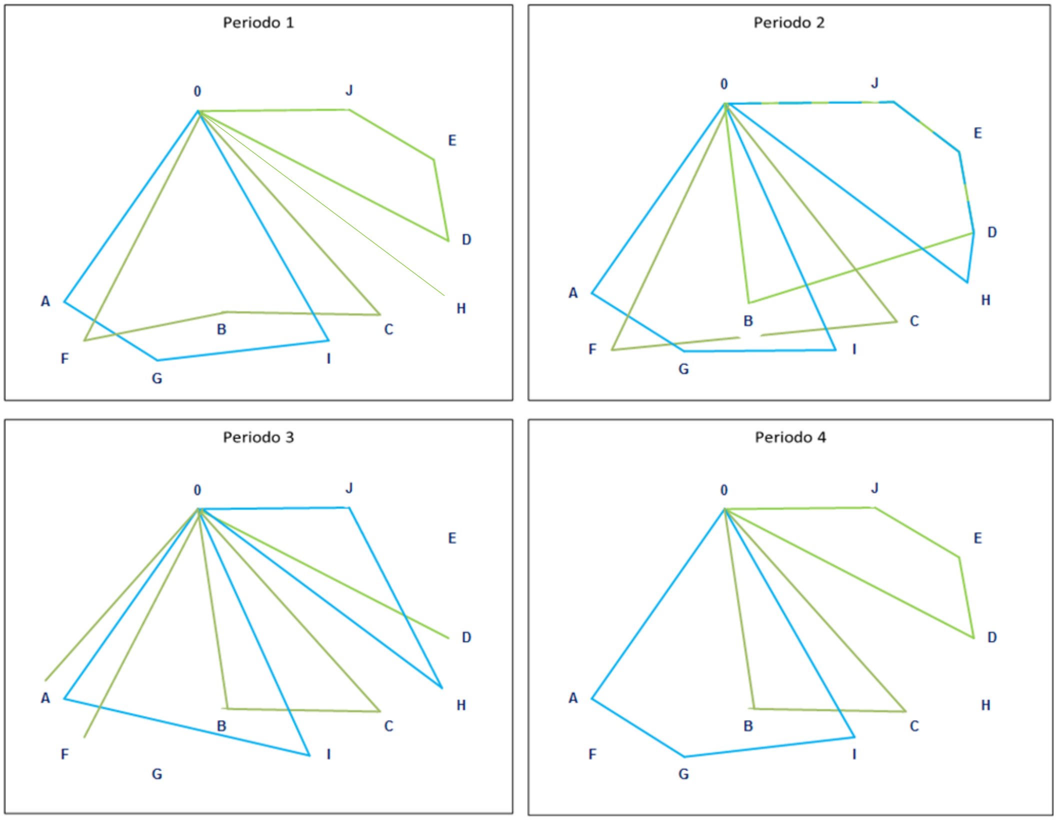


Tabla 14 Cantidades entregadas a 20 clientes.

	Cantidad Entregada				Demanda				Inventario			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
A	1000	1700	5000	2800	1000	1700	5000	2800				
B	2200		2700	3000	2100	0	2500	3300	100	100	300	
C	700	1400	2000	1000	0	1500	2600	1000	700	600		
D	2050	2600	3900	1300	2050	2600	3900	1300				
E	1700			1500	500	1200	0	1500	1200			
F	1300	1200	2000	100	1300	1200	2000	100				
G	1000	550		2000	1000	500	0	2050		50	50	
H	1500	600	600	1000	1500	600	600	1000				
I		250	620		0	250	620	0				
J	1200		1200	1900	1200	0	1200	1900				
K	200	800		1000	200	800	0	1000				
L	1100	900	1600	2000	1100	900	1400	2200			200	
M	450	1540	1800	1600	450	1540	1800	1600				
N	1300		900	1200	1300	0	900	1200				
Ñ		800	210	600	0	800	210	600				
O	580	1200	1400	1300	580	1200	1400	1300				
P	900		100	500	900	0	100	500				
Q	1000	1300	50		1000	1300	50	0				
R	120	1450	2200	2100	120	1450	2200	2100				
S	3000		2100	600	3000	0	2100	600				

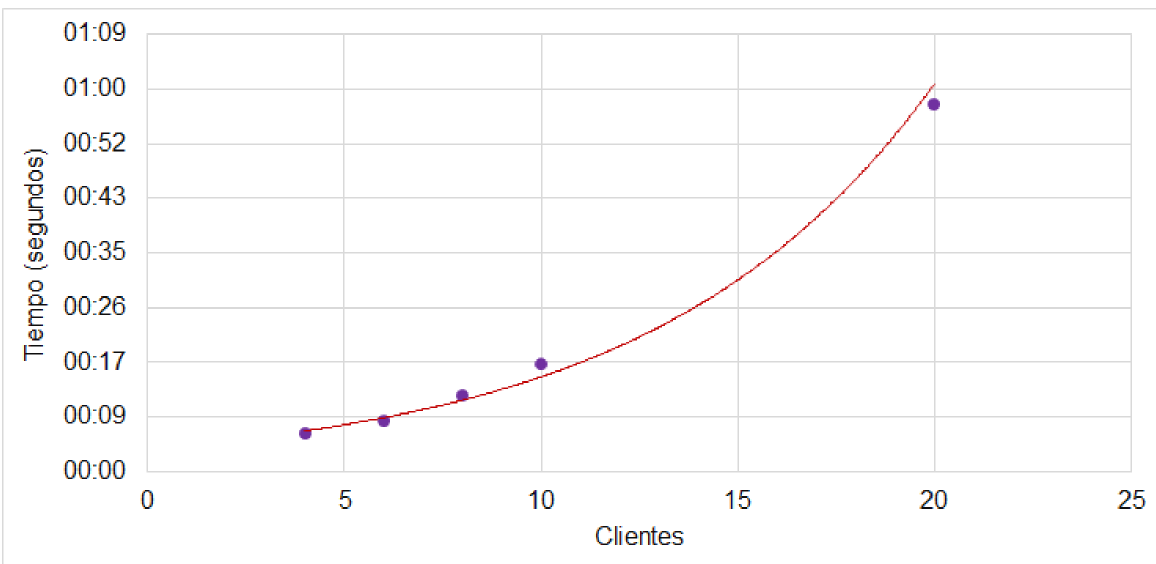
Como se mencionó anteriormente el número de iteraciones y el costo encontrado por Gams se muestra en la tabla 15, en donde se puede ver que a medida que aumente el número de clientes aumentan el costo y el número de iteraciones; así como su tiempo de solución como se ve reflejado en la tabla 13 en donde el tiempo de solución es directamente proporcional al número de clientes.

Tabla 15 Estadísticas del modelo.

	4	6	8	10	20
Iteraciones	174	394	436	769	833
Costo	$ 335.861	$ 415.389	$ 487.100	$ 597.709	$ 915.768

En la siguiente ilustración se puede observar la relación que tiene el número de clientes con el aumento del tiempo de solución en el método exacto.

Ilustración 17 Tiempos de solución método exacto.



7.4.2 Heurísticas

Para dar solución a los métodos heurísticos de desarrollan algoritmos en el programa computacional Matlab, que permite darle solución a los métodos que se trabajarán en esta sección, se compararán los tiempos de solución y las iteraciones con las obtenidas en el método exacto y se harán modificaciones en los costos de mantener inventario para tener en cuenta qué pasa cuando éstos son bajos o altos, se busca con esto estudiar los métodos y comparar sus soluciones.

a. Algoritmo de Ahorro de Clark and Wright

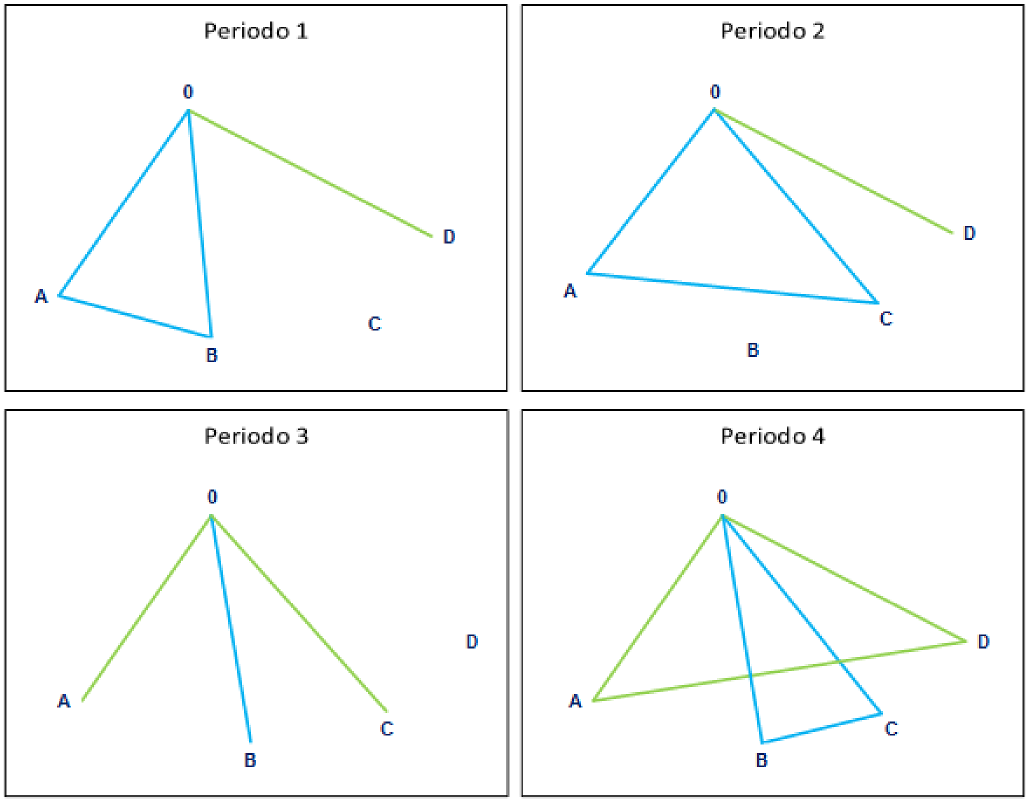
Para la solución del caso de 4 clientes con costo de mantener inventario bajo es diferente, en comparación con la hallada por el método exacto en Gams, el costo total disminuyó un 0.043% al igual que el número de iteraciones el cual pasó de 174 por el método exacto a 24 en la heurística de ahorro. El costo obtenido es de $ 335.717 y con un tiempo de solución de 0.0795076 segundos.

La información suministrada en la tabla 16 refleja que el método considera la entrega anticipada de la demanda del cliente D del periodo 3; así como el 57,69% de la demanda del periodo 2 es entregada en el periodo 1.

Tabla 16 Solución por método Clark y Wright (4 clientes).

	Cantidad Entregada				Inventario				Demanda			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
A	1000	1800	4900	2800		100			1000	1700	5000	2800
B	2100		2500	3300					2100		2500	3300
C		1500	2600	1000						1500	2600	1000
D	3550	5000	0	1300	1500	3900			2050	2600	3900	1300

Ilustración 18 Solución por método Clark y Wright (4 clientes).



Para 6 clientes se obtiene como solución un costo de $ 414.263 con 60 iteraciones; se puede ver que se obtiene una reducción en los costos de 0.271% con relación al costo obtenido por el método exacto.

Tabla 17 Solución método Clark and Wright (6 clientes).

	Cantidad Entregada				Inventario				Demanda			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
A	1000	3300	3400	2800		1600			1000	1700	5000	2800
B	2100		2500	3300					2100			
C		1500	2600	1000						1500	2600	1000
D	4050	4500		1300	2000	3900			2050	2600	3900	1300
E	1700			1500	1200				500	1200		1500
F	1300	1200	2000	100					1300	1200	2000	100

En la tabla 1 se puede observar que en los clientes A, D y E se generan entregas anticipadas, aunque no en todos los periodos, en el caso del cliente D por la cantidad de inventario almacenado en el periodo 2, no es visitado en el periodo siguiente; de igual modo en el cliente E en los periodos 2 y 3 tampoco es visitado.

En el cliente A se hace la entrega del 32% del total demandado para el periodo 3, en el periodo 2. El tiempo de solución es de 0.0822076 segundos, este tiempo de solución aumenta con relación al obtenido en el método exacto. En la ilustración 19 se muestran las rutas que siguen los dos vehículos.

Realizando la experimentación para 8 clientes; se obtiene un costo de $ 486.897 con 112 iteraciones y un tiempo de solución de 0,121813 segundos, se puede visualizar que el costo disminuye al igual que el número de iteraciones, pero el tiempo difiere en 0,001813 en relación al método exacto. Las rutas que se muestran en la ilustración 20 exponen los recorridos que los vehículos deben seguir.

Para el cliente D y E se generan inventarios, aunque estos no sean muy altos, ayudan a suplir la demanda de diferentes periodos, así como para el periodo 2 el cliente D almacenó 3600 unidades de las cuales en el tercer periodo se usaron para completar la demanda de éste. (Ver tabla 18).

Tabla 18 Solución método Clark and Wright (8 clientes).

	Cantidad Entregada				Inventario				Demanda			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
A	1000	1700	5000	2800					1000	1700	5000	2800
B	2100		2500	3300					2100		2500	3300
C		1500	2600	1000						1500	2600	1000
D	3250	5000	300	1300	1200	3600			2050	2600	3900	1300
E	500	1250		1450		50	50		500	1200		1500
F	1300	1200	2000	100					1300	1200	2000	100
G	1000	500		2050					1000	500		2050
H	1500	600	600	1000					1500	600	600	1000

Ilustración 19 Solución método Clark and Wright (6 clientes).

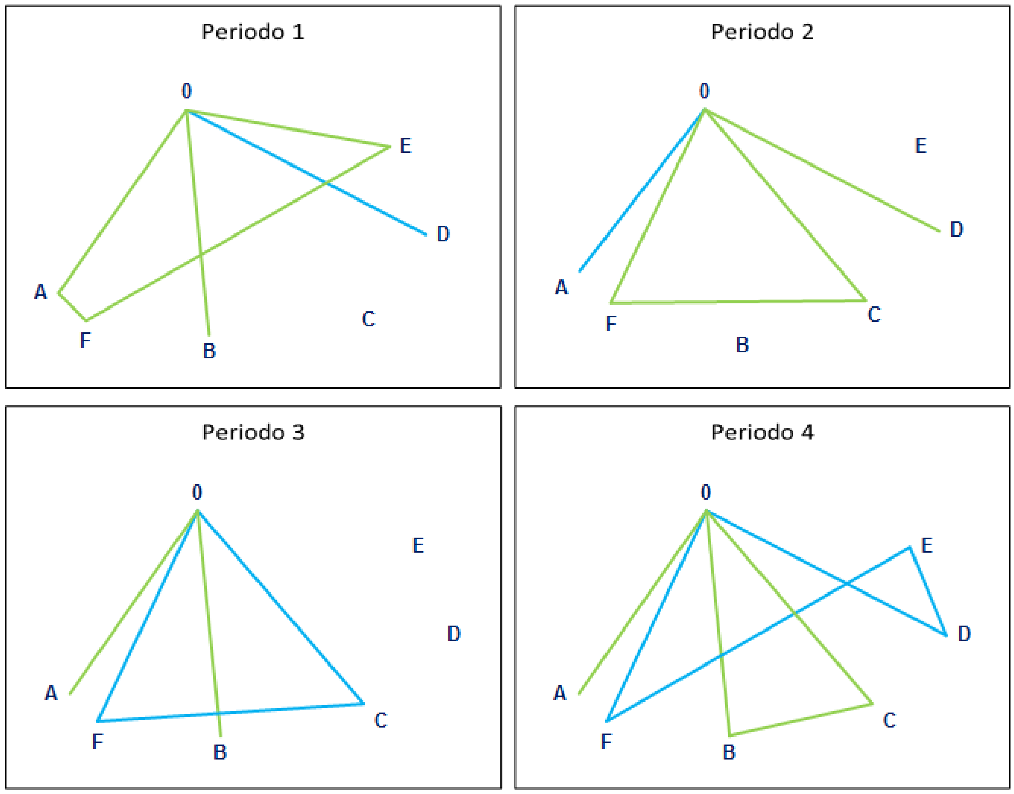
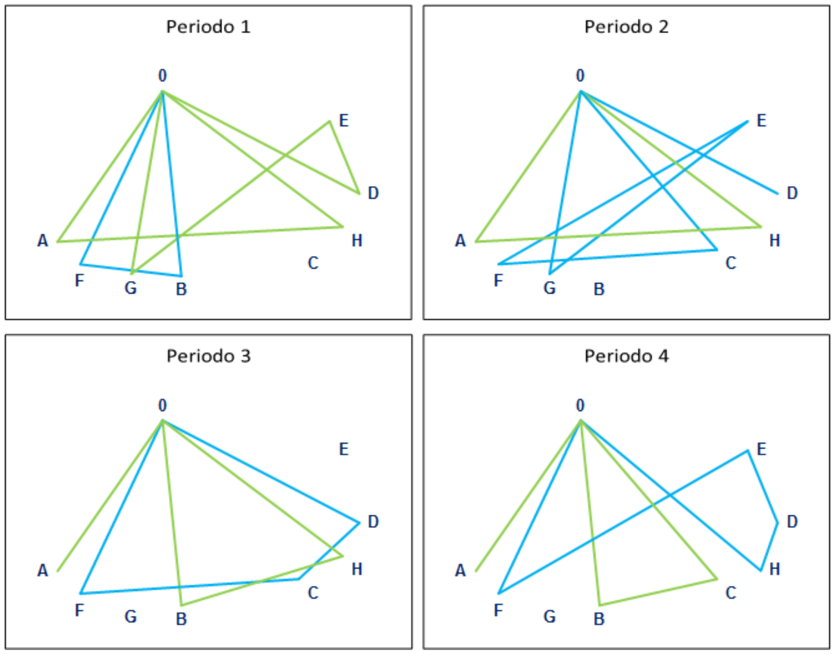


Ilustración 20 Solución método Clark and Wright (8 clientes).



Con 10 clientes se obtiene un costo de $ 538.633 en 0.122614 segundos, y 180 iteraciones. Se puede observar que en comparación a la solución obtenida por medio de Gams, el costo disminuye en un 9.83%.

En la tabla 19 se puede visualizar que en el cliente I se le entrega en el periodo 2 la totalidad de la demanda del periodo 3, al igual que éste los clientes D y E almacenan inventario, pero solo entregan una parte de la demanda del periodo siguiente.

Tabla 19 Solución método Clark and Wright (10 clientes).

	Cantidad Entregada				Inventario				Demanda			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
A	1000	1700	5000	2800		0			1000	1700	5000	2800
B	2100		2500	3300					2100		2500	3300
C		1500	2600	1000						1500	2600	1000
D	3450	5000	100	1300	1400	3800			2050	2600	3900	1300
E	500	2150		550		950	950		500	1200		1500
F	1300	1200	2000	100					1300	1200	2000	100
G	1000	500	0	2050					1000	500		2050
H	1500	600	600	1000					1500	600	600	1000
I	0	870	0	0		620				250	620	
J	1200	0	1200	1900					1200		1200	1900

En el caso de 20 clientes, se obtiene un costo de $ 919.765 con un tiempo de solución de 0,295202 segundos, el costo en comparación al obtenido por el método exacto aumenta, pero el tiempo disminuye al igual que el número de iteraciones (ver tabla 14).

Los clientes I, K, L, Ñ y O contemplan entregas anticipadas de la demanda haciendo posible que en el periodo siguiente no sea visitado.

El cliente O, quien en el periodo 1 demanda 580 unidades, se le entregan 2580 unidades, con las cuales suple su demanda y el restante es almacenado, en el periodo 2, es visitado nuevamente y se le entregan 1200 unidades, y su nivel de inventario no disminuye, es así como para el periodo 3 solo se le entregan 700 unidades y se completa la demanda con 700 unidades que estaban almacenadas en inventario, para el periodo 4 su demanda es satisfecha con inventario.

Esta información se puede corroborar en la tabla 20 en donde se expresan las cantidades entregadas, inventario y demanda para cada cliente y periodo.

Tabla 20 Solución método Clark and Wright (20 clientes).

	Cantidad Entregada				Inventario				Demanda			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
A	1000	1700	5000	2800					1000	1700	5000	2800
B	2100		2500	3300					2100		2500	3300
C		1500	2600	1000						1500	2600	1000
D	2050	2600	3900	1300					2050	2600	3900	1300
E	500	1450		1250		250	250		500	1200		1500
F	1300	1200	2000	100					1300	1200	2000	100
G	1000	500		2050					1000	500		2050
H	1500	600	600	1000					1500	600	600	1000
I		870				620				250	620	
J	1200		1200	1900					1200		1200	1900
K	670	1330			470	1000	1000		200	800		1000
L	1100	2300		2200		1400			1100	900	1400	2200
M	450	1540	1800	1600					450	1540	1800	1600
N	1300		900	1200					1300		900	1200
Ñ	1000	610			1000	810	600			800	210	600
O	2580	1200	700		2000	2000	1300		580	1200	1400	1300
P	900		100	500					900		100	500
Q	1000	1300	50						1000	1300	50	
R	120	3650		2100		2200			120	1450	2200	2100
S	3000	550	1550	600		550			3000		2100	600

Revisando para 100 clientes, su tiempo de solución es de 4,26 segundos encontrando una solución factible, en donde el costo hallado es de $ 5.904.270 con 19.800 iteraciones.

En el periodo 1 se consideran entregas anticipadas en diferentes clientes, generando inventarios que se usaron en el siguiente periodo.

b. Método de mejora 2-OPT

Para el método 2-OPT la mejora que se aplica es en relación a las rutas halladas por el algoritmo de ahorro como solución inicial para que se realicen los cruces necesarios de tal modo que se encuentre una solución factible cerca a la solución óptima. Es así como, para 4 clientes, el método no realiza ningún intercambio, y genera la misma solución aunque con diferente tiempo de solución e iteraciones (0,101262 segundos y 17 iteraciones) al igual que diferente vehículo.

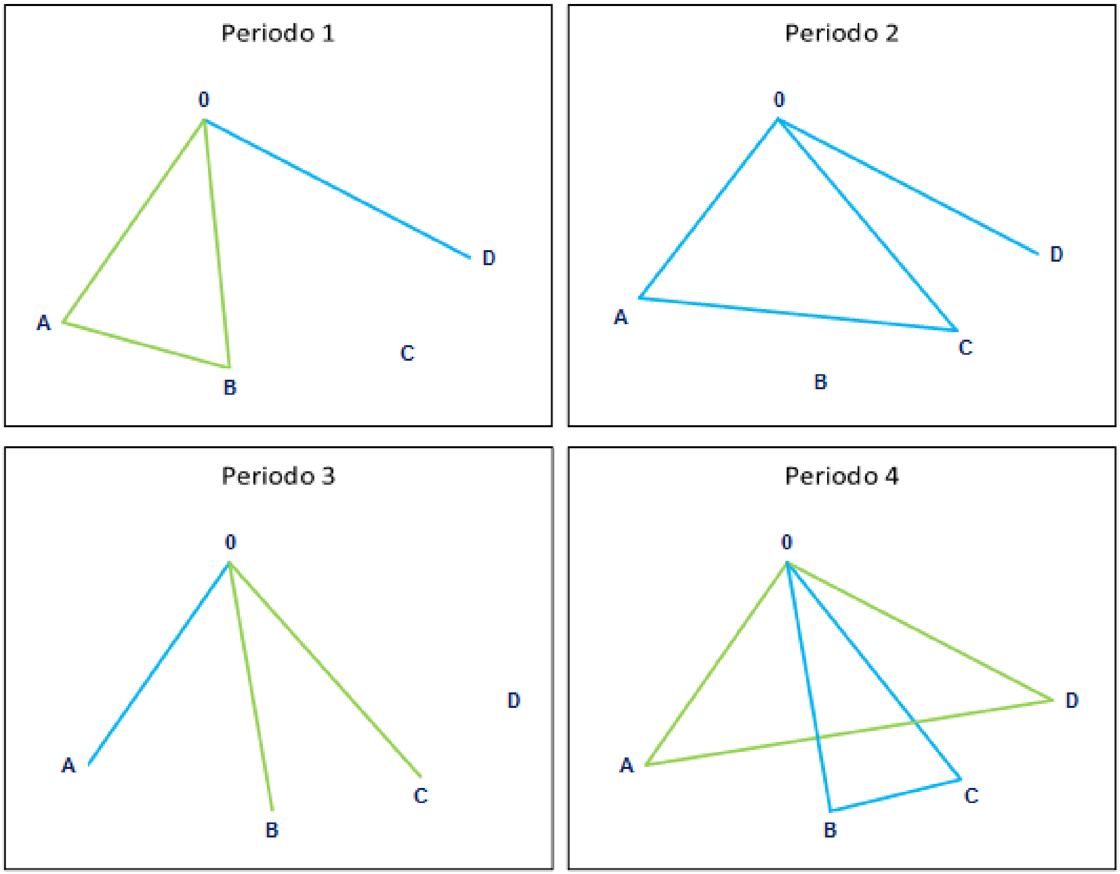
Para el caso de 6 clientes la solución es igual a la encontrada por el algoritmo de ahorro, con un tiempo de 0.0219045 segundos y con 24 iteraciones se obtiene que el costo es igual al obtenido por el algoritmo de ahorro al igual que las rutas, las cuales se muestran en la ilustración 18.

Es así como para 8 clientes no se encuentra una solución diferente a la hallada por el algoritmo de Clark and Wright, con un tiempo de 0.0220139 segundos y 52 iteraciones el costo es de $ 486.897.

Para 100 clientes no es posible encontrar una solución que difiera a la solución encontrada por el algoritmo de ahorro, el método de mejora tarda 0.0538157 segundos y 762 iteraciones.

Con un tiempo de 0,0203643 segundos y 64 iteraciones, y tomando como referencia la solución hallada por el método de ahorro no se genera mejora alguna para 10 clientes; es así como para 20 clientes el costo se mantiene pero el número de iteraciones es de 132 y el tiempo que tarda en buscar una posible mejora es de 0.0371252 segundos.

Ilustración 21 Solución por método 2-OPT (4 clientes).

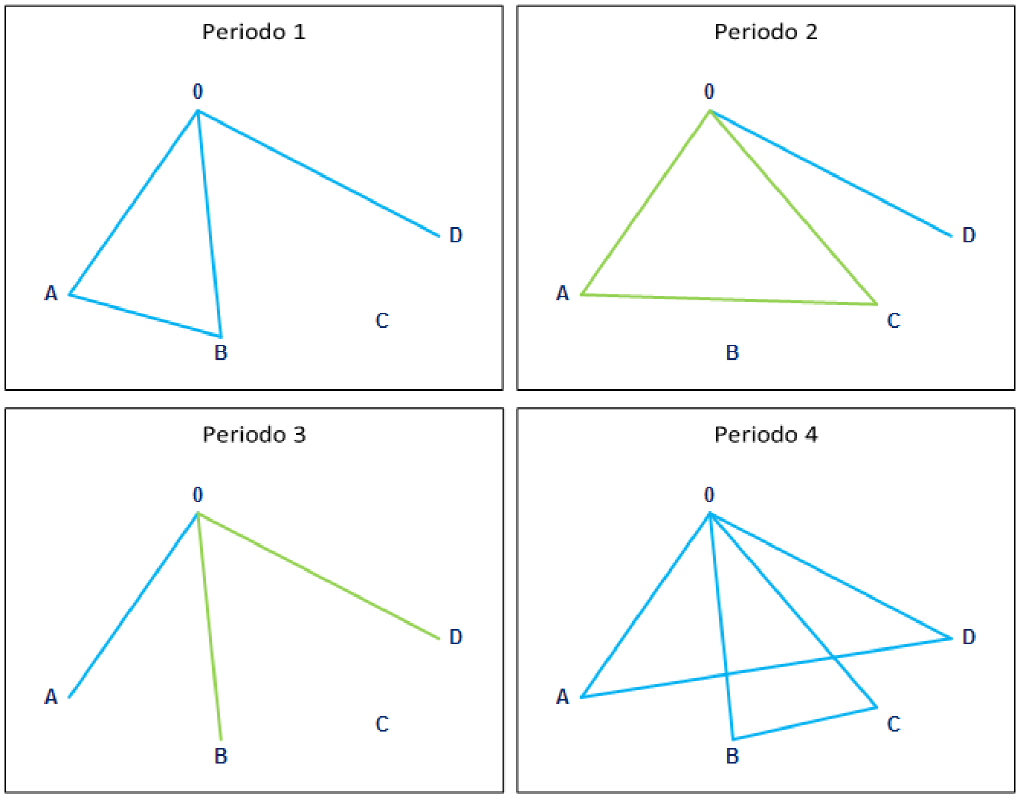


7.4.3 Metaheurística

Para la metaheurística se toma como semilla la solución de las dos heurísticas es así como en este caso se tomará la solución hallada por el algoritmo de Clark and Wright dado que la heurística de mejora 2-OPT no encontró mejora a la solución hallada por este método.

Para iniciar se evaluará la instancia 4nCMIb (cuatro clientes y costo de mantener bajo) en donde se observa que la metaheurística no encuentra una mejor solución al buscar en las posibles soluciones factibles. Con un tiempo de solución de 0.2674 segundos se encuentra el costo es igual al hallado por la heurística de ahorro.

Ilustración 22 Solución búsqueda tabú (4 clientes).



Al mirar la ilustración 17 se puede observar que se obtiene la misma solución a diferencia que no son los mismos vehículos los que hacen el recorrido como sucede en el periodo 2 en donde el vehículo 1 es el que visita al cliente 1 y 3, para este caso es el vehículo dos el que realiza este recorrido. Se asume que los costos de transporte para los dos vehículos son iguales.

En la tabla 21 se muestra información correspondiente a las rutas, tiempos y ahorros si aplica.

En los datos se puede ver que a medida que aumenta el número de clientes aumenta el tiempo de solución de la metaheurística.

Para 100 clientes con costos de mantener inventario bajo su tiempo de computación es de 24.16 segundos, y no se encontró ahorro alguno a la solución encontrada por el algoritmo de ahorro.

7.4.4 Variaciones en parámetros

Para este numeral se hará enfoque en los tiempos de solución, número de iteraciones y las variaciones en el costo total del ejercicio, comparando los resultados cuando los costos de mantener inventario aumentan.

En la tabla 22 se pueden ver los costos, iteraciones y el tiempo de la solución para el método exacto el cual fue programado en Gams y solo trabajado con costos de mantener inventarios bajos.

La solución semilla para la solución de la metaheurística es la solución proporcionada por el algoritmo de Clark and Wright, en la tabla 23 se muestran los resultados obtenidos por medio de Matlab.

Tabla 21 Solución búsqueda tabú.

Instancia	Periodo	Vehículo	Rutas	Tiempo (segundos)	Ahorro
4nCMIb	1	1	0-4-0	0,2786	-
			0-2-1-0		
	2	1	0-4-0		
		2	0-3-1-0		
	3	1	0-1-0		
		2	0-2-0		
			0-4-0		
	4	1	0-3-2-0		
			0-4-1-0		
6nCMIb	1	2	0-2-0	0,422544	-
			0-4-0		
			0-6-5-1-0		
	2	1	0-6-3-0		
		2	0-1-0		
			0-4-0		
	3	1	0-4-0		
		2	0-1-0		
			0-6-3-0		
	4	1	0-6-5-4-0		
			0-3-2-0		
		2	0-1-0		
8nCMIb	1	1	0-7-5-4-0	0,950641	-
			0-8-1-0		
		2	0-6-2-0		
	2	1	0-4-0		
			0-8-1-0		
		2	0-3-6-5-7-0		
	3	1	0-1-0		
			0-8-2-0		
		2	0-6-3-4-0		
	4	1	0-6-5-4-8-0		
			0-3-2-0		
		2	0-8-1-0		

Tabla 21 (Continuación)

Instancia	Periodo	Vehículo	Rutas	Tiempo (segundos)	Ahorro
10nCMIb	1	1	0-7-5-4-0	1,0882	-
			0-6-10-2-0		
		2	0-8-1-0		
	2	1	0-7-9-1-8-0		
		2	0-4-0		
			0-3-6-5-0		
	3	1	0-1-0		
		2	0-8-10-2-0		
			0-6-3-4-0		
	4	1	0-8-10-5-4-0		
			0-6-3-2-0		
			0-7-1-0		
20nCMIb	1	1	0-10-5-4-0	2,06	-
			0-17-1-16-0		
		2	0-20-0		
			0-12-13-11-2-0		
			0-18-8-15-7-0		
			0-6-19-14-0		
	2	1	0-12-0		
			0-5-4-20-0		
			0-15-7-9-1-16-0		
			0-6-3-18-8-0		
		2	0-19-0		
			0-13-11-0		
	3	1	0-1-0		
			0-4-18-8-0		
		2	0-13-2-0		
			0-14-16-6-10-0		
			0-20-17-3-0		
	4	1	0-7-0		
			0-6-3-2-0		
		2	0-10-5-4-0		
			0-19-14-0		
			0-17-1-8-0		
			0-20-13-12-0		

Tabla 22 Método exacto: Iteraciones, tiempo de solución y costo.

	GAMS		
Instancia	Tiempo (seg)	Iteraciones	Costo
4nCMIb	0,06	174	$ 335.861
6nCMIb	0,08	394	$ 415.389
8nCMIb	0,12	436	$ 487.100
10nCMIb	0,17	769	$ 597.709
20nCMIb	0,58	833	$ 915.768

Siguiendo con las instancias establecidas en el numeral 4.3 en la tabla 9 se pudo obtener la siguiente información:

Al realizar variaciones en parámetros como lo es el Costo de Mantener Inventario se puede encontrar que el costo total puede disminuir o aumentar, es así como con los datos que se han usado se contempla en los costos iniciales el aumento de 10 veces su valor para poder visualizar cuáles eran las modificaciones que se generaban.

Los costos totales disminuyeron cuando los costos de mantener inventario eran altos, optando por realizar las rutas que fueran necesarias para entregar las unidades demandadas. En la tabla 23 se pueden encontrar los datos correspondientes a tiempos de solución y los costos por cada instancia evaluada.

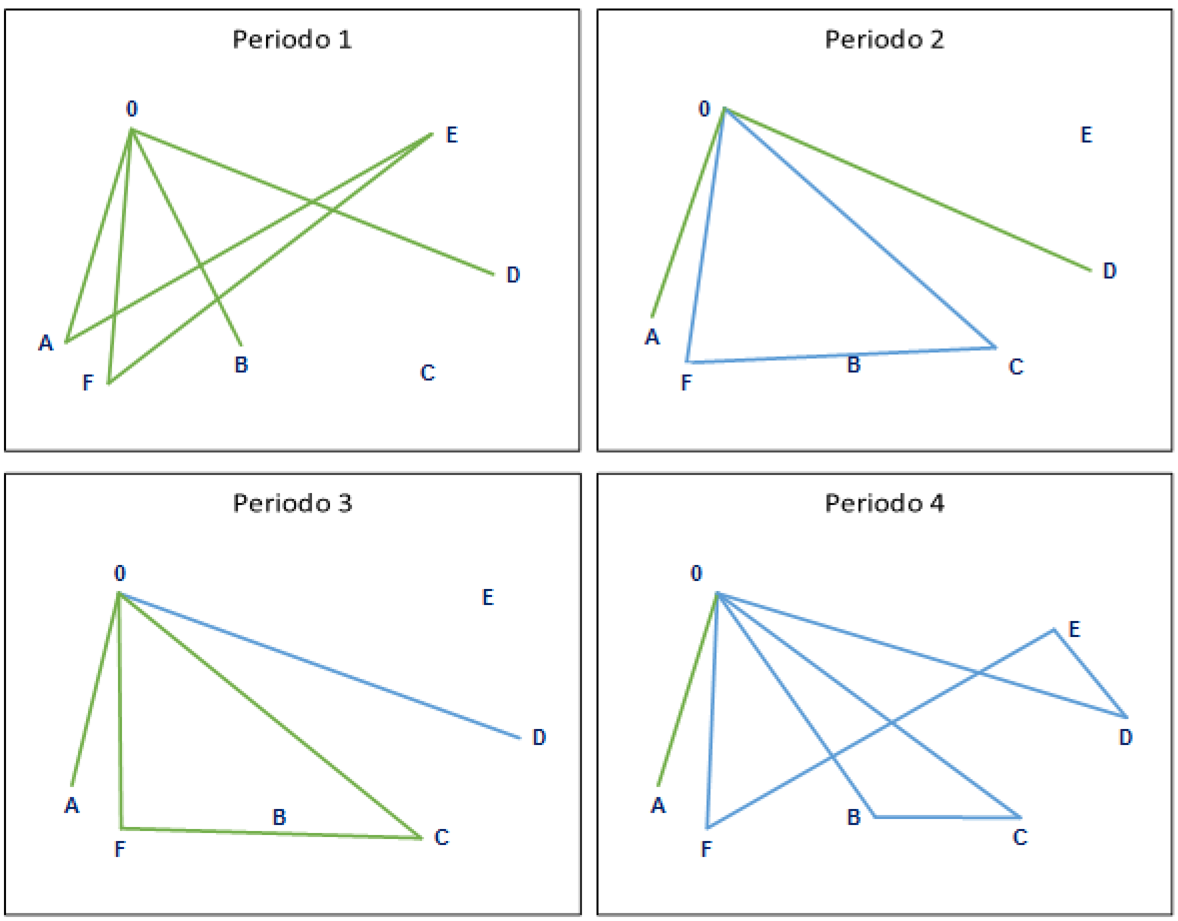
Tabla 23 Tiempos de solución, iteraciones y costo de las heurísticas y metaheurística.

Instancia	Clark and Wright			2-OPT			Búsqueda Tabú		
	Tiempo	Iteraciones	Costo	Tiempo	Iteraciones	Costo	Tiempo	Iteraciones	Costo
4nCMIb	0,0795	$ 24	$ 335.717	0,01076	$ 17	$ 335.717	0,279	$ 1.000	$ 335.717
6nCMIb	0,0822	$ 60	$ 414.263	0,02190	$ 24	$ 414.263	0,423	$ 1.000	$ 414.263
8nCMIb	0,1218	$ 112	$ 486.897	0,02201	$ 52	$ 486.897	0,951	$ 1.000	$ 486.897
10nCMIb	0,1226	$ 180	$ 538.633	0,02036	$ 64	$ 538.633	1,088	$ 1.000	$ 538.633
20nCMIb	0,2885	$ 760	$ 919.765	0,03771	$ 132	$ 919.765	2,060	$ 1.000	$ 919.765
100nCMIb	4,2600	$ 19.800	$ 5.904.270	0,05382	$ 762	$ 5.904.270	24,166	$ 1.000	$ 5.904.270
4nCMIa	0,0608	$ 24	$ 335.375	0,07774	$ 17	$ 335.375	0,267	$ 1.000	$ 335.375
6nCMIa	0,0737	$ 60	$ 414.439	0,01981	$ 24	$ 414.439	0,477	$ 1.000	$ 414.439
8nCMIa	0,0980	$ 112	$ 485.725	0,01916	$ 52	$ 485.725	0,972	$ 1.000	$ 485.725
10nCMIa	0,1171	$ 180	$ 537.849	0,02069	$ 64	$ 537.849	1,110	$ 1.000	$ 537.849
20nCMIa	0,2771	$ 760	$ 916.337	0,02550	$ 132	$ 916.337	2,082	$ 1.000	$ 915.996
100nCMIa	4,3662	$ 19.800	$ 5.877.540	0,06955	$ 762	$ 5.877.540	28,046	$ 1.000	$ 5.877.540

Con la metaheurística se encontró un mejor costo para la instancia 20nCMIa en donde se generó un ahorro de $ 341.

En la ilustración 23 a excepción del periodo 1; se observa que las rutas con respecto al método de Clark and Wright son muy parecidas. En el periodo 2 es la misma ruta pero con diferente vehículo excepto por la ruta que va de la planta al cliente D, la cual la realiza el mismo vehículo. En los periodos 3 y 4 se observa el mismo comportamiento.

Ilustración 23 Solución búsqueda tabú (6 clientes).



Las rutas seguidas en la búsqueda Tabú para 8 clientes son las mismas que para Clark and Wright en los periodos 1, 2 y 3; solo que con diferente vehículo. El periodo

4 utiliza la misma ruta con el vehículo 1, pero es diferente con el vehículo 2. Con estas rutas su solución factible sigue siendo la hallada por el algoritmo de ahorro.

Ilustración 24 Solución búsqueda tabú (8 clientes).

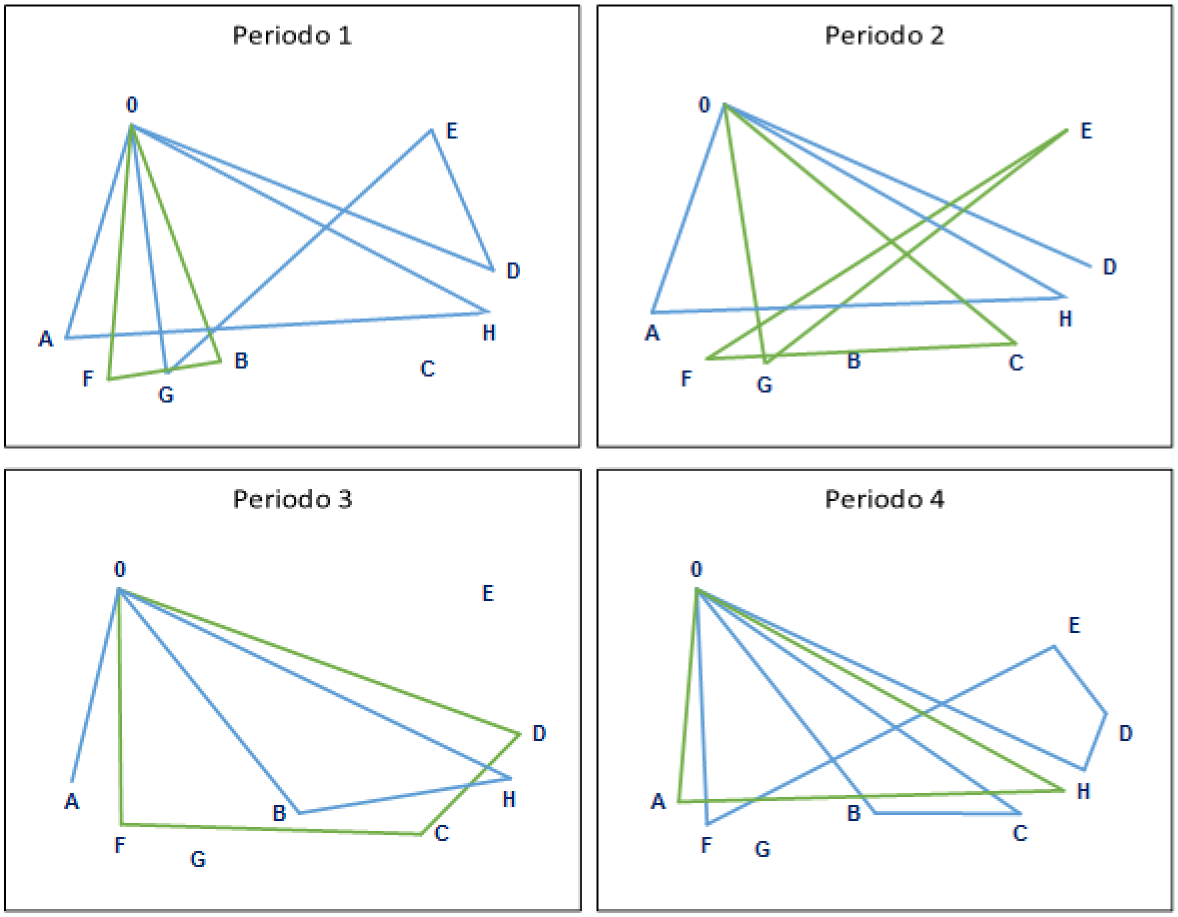


Tabla 24 Solución con mejora para la instancia 20nCMIa.

Instancia	Periodo	Vehículo	Rutas	Tiempo (segundos)	Ahorro
20nCMIa	1	1	0-14-0	2,08218	$341
			0-16-0		
			0-2-19-5-4-0		
			0-17-7-10-11-18-0		
			0-20-13-12-0		
		2	0-1-15-8-6-0		
	2	1	0-11-0		
			0-12-0		
			0-16-0		
			0-18-3-13-0		
		2	0-19-0		
			0-8-5-20-9-1-0		
			0-4-6-7-15-0		
	3	1	0-1-0		
			0-10-6-14-0		
			0-13-3-0		
		2	0-8-20-2-0		
			0-17-18-4-16-0		
	4	1	0-4-6-2-0		
			0-1-5-20-0		
		2	0-17-0		
			0-10-8-19-0		
			0-12-3-14-0		
			0-13-7-0		

8. CONCLUSIONES

- ✓ Con relación a la cadena de suministro se han abordado problemas que han relacionado en diferentes condiciones sus escalones. El problema de Ruteo e Inventario se enfoca en la manera en cómo satisfacer la demanda de los clientes en diferente horizonte de planeación de tal modo que se busque un recorrido que minimice los costos de transporte y además se tenga en cuenta la gestión de inventarios.

- ✓ Los resultados obtenidos en este trabajo de investigación reflejan la relación entre la gestión de inventarios y ruteo de vehículos, y la solución que se le puede dar al problema de Ruteo e Inventario por medio de heurísticas y metaheurísticas propias del problema de ruteo de vehículos.

- ✓ Uno de los métodos utilizados es el algoritmo de Clark and Wright. Este método fue evaluado con diferentes instancias, en donde los costos de mantener inventario cuando estos son altos disminuyen en promedio un 0.37% del total de los costos obtenidos cuando estos son bajos, esto enmarca una diferencia hablando de los costos del modelo y su tiempo de solución. Los costos encontrados con este método se reducen en un 21.37% en promedio en comparación a la solución encontrada por el método exacto dado que no se contemplaron visitas a un mismo cliente más de una vez en un periodo dado.

- ✓ El método de mejora 2- OPT no generó un mejor costo en relación a las soluciones obtenidas por el algoritmo de ahorro de Clark and Wright, sin embargo las iteraciones y el tiempo en ejecución (programa) se reducen en promedio un 16%.

- ✓ La metaheurística búsqueda tabú con memoria de corto plazo de lista tabú de 3 y su criterio de parada de 1000 iteraciones encontró soluciones cercanas a las halladas por el método exacto, tomando como solución semilla las soluciones encontradas por el algoritmo de ahorro.

- ✓ Los resultados obtenidos por las heurísticas difieren en relación a los encontrados por el método exacto, dado que los costos disminuyen significativamente; aunque para el caso de 20 clientes esta mejora se hizo notoria en su tiempo de solución, la cual disminuyó en un 50.3%.

- ✓ La herramienta Matlab es importante para esta investigación dado que permite el desarrollo del problema haciendo factible los cambios en sus parámetros de entrada, así como su desarrollo en un alto número de clientes.

9. RECOMENDACIONES

- ✓ Se recomienda continuar con la investigación, utilizando datos diferentes a los aquí usados (número de clientes a visitar, número de vehículos, número de instancias) e incluso otros métodos heurísticos y metaheurísticos y comparar estos resultados con los obtenidos en el presente trabajo.

- ✓ Se sugiere como nuevo proyecto, el uso del Método de ahorros Clark and Wright, método de mejora 2-OPT y Búsqueda Tabú, en donde los costos sean diferentes en los periodos los cuales se tuvieron en cuenta en la verificación del modelo pero no para su experimentación, ya sean los costos de transporte o los de mantener inventario, de tal modo que se pueda verificar la capacidad de solución de estos métodos, y se logren encontrar diferencias significativas en relación al costo total y el número de iteraciones.

BIBLIOGRAFÍA

AL-E-HASHEM, SMJ Mirzapour y REKIK, Yacine. Multi-product multi-period Inventory Routing Problem with a transshipment option: A green approach. EN: International Journal Production Economics. Vol. 157, No. 12; (2014), p. 80-88.

AQUINO, Johan y JIMÉNEZ, Ronny. El método de ahorros fue desarrollado por Clark and Wright en 1963 siendo la heurística más significativa para el VRP. Es la aplicación del sentido común a la hora de construir rutas de transporte. Trabajo de grado Ingeniero en Logística de Transporte. Guayaquil. 2010. Escuela Superior Politécnica del Litoral. Instituto de Ciencias Matemáticas, 2010.68 p. Disponible en: < http://www.cib.espol.edu.ec/Digipath/D_Tesis_PDF/D-91008.pdf>.

ARCHETTI, C. et al. A Branch-and-Cut Algorithm for a Vendor Managed Inventory Routing Problem. 2007.

ARELLANO, Nancy y GARCÍA, Irma. Estudio de heurísticas para el problema del agente viajero asimétrico. Facultad de Sistemas. Universidad Autónoma de Coahuila. [En línea] Junio 2012. [Citado el: Diciembre 16, 2014]. Disponible en:< http://www.posgradoeinvestigacion.uadec.mx/CienciaCierta/CC30/3.html>.

BARAJAS, Wilson Nicolás. Desarrollo de un algoritmo heurístico para establecer las rutas de transporte escolar de la secretaría de educación de Bogotá. Tesis presentada como requisito parcial para obtener el título de: Magíster en Ingeniería de Sistemas y Computación. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingeniería. Bogotá (2009). Disponible en: http://www.bdigital.unal.edu.co/8520/1/299667.2010.pdf.

BARD, Jonathan F. y NANANUKUL, Narameth. Heuristics for a multiperiod inventory routing problem with production decisions. EN: Computers & Industrial Engineering. Vol. 57, No. 3; (2009), p. 713-723.

-------- . A branch-and-price algorithm for an integrated production and inventory routing problem. EN: Computers & Operation Research. Vol. 37; (2012), p. 2202-2217.

BENAVENTE, et al. El Problema de Rutas de Vehículos: Extensiones y métodos de Resolución. Departamento de Ingeniería de Sistemas. Universidad de la Frontera. Chile. [En línea] (2014). Disponible en: <http://ceur-ws.org/Vol-558/Art_23.pdf>.

BERTAZZI, Luca; BOSCO, Adamo y LAGANÀ, Demetrio. Managing stochastic demand in an Inventory Routing Problem with transportation procurement. EN: Omega. [En línea]. (2014). Disponible en: < http://dx.doi.org/10.1016/j.omega.2014.09.010i>.

--------; SAVELSBERGH, M y SPERANZA, G. Inventory Routing. 2008.

CALLEGARI, Leandro. Flexibility and Consistency in Inventory-Routing. HEC MONTREAL, 2012. Tesis (Doctor en Administración). UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL. Facultad de Estudios de Posgrado y postdoctorales. [En línea] [Consultado 16 dic. 2014]. Disponible en: http://www.leandro-coelho.com/wp-content/uploads/2012/05/PhD-Thesis-Leandro-C-Coelho.pdf.

CAMPBELL, Ann; CLARK, Lloyd; KLEYWEGT Anton & SAVELSBERGH, Martin. (1997, oct.). The Inventory Routing Problem. Logystics Institute School of Industrial and Systems Engineering. [en línea].[consultado 15 dic. 2014]. Disponible en: http://www2.isye.gatech.edu/~ms79/publications/irp.pdf.

CEPEDA, Gisella Mercedes y SAN Lucas, M. Diseño e implementación de una heurística para el problema de ruteo e inventario vehicular con recolección y entrega. Tesis de grado para la obtención del título en Ingeniería Logística y Transporte. Escuela Superior Politécnica del Litoral. Instituto de ciencias matemáticas. Guayaquil, Ecuador. Recuperado el 30 de mayo de 2015, de http://www.cib.espol.edu.ec/Digipath/D_Tesis_PDF/D-93884.pdf.

COBOS, Diana. Modelos de Optimización Entera Mixta No Lineal en Sistemas de Transporte de Gas Natural. Trabajo de grado (Maestro en Ingeniería de Sistemas). Universidad Autónoma de Nuevo León. [En línea]. [Consultado 30 nov. 2014]. Disponible en: http://pisis.fime.uanl.mx/ftp/pubs/thesis/msc/2003-diana_cobos/tesis-2003-dcz.pdf.

COELHO, Leandro C y LAPORTE, Gilbert. The exact solution of several classes of inventory-routing problems. EN: Computers & Operations Research. (2012), p. 558.

COELLO COELLO, Carlos A. Introducción a los Algoritmos Genéticos", Soluciones Avanzadas. En: Tecnologías de Información y Estrategias de Negocios. Enero de 1995. Vol 3, No. 17, pp. 5-11.

--------. CORDEAU, Jean-Francois y LAPORTE, Gilbert. The inventory-routing problem with transshipment. EN: Computers & Operations Research. Vol. 39; (2012), p. 2537-2548.

CONTRERAS, C. y DÍAZ, M. Métodos heurísticos para la solución del problema de ruteo de vehículos con capacidad CVRP. Bucaramanga, 2010. Trabajo de grado (Ingeniería Industrial). Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales. Disponible en catalogo bibliográfico de la Universidad Industrial de Santander: < http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/ >.

CHRISTIANSEN, et al. Maritime inventory routing with multiple products: A case study from the cement industry. EN: European Journal of Operational Research. (2010), p. 86.

FUMERO, A. GMOR: Google Maps para la Optimización de Rutas. Universidad de la Laguna. Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática. Junio (2008). San Cristóbal de la Laguna, España. Disponible en: < http://www.goma.ull.es/GMOR/Memoria-GMOR.pdf >.

GALVIS, J., JAIMES, G. y QUIROGA, N. Estudio cuantitativo de tres aplicaciones diferentes del problema de ruteo de vehículos (VRP) en la Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 2011. Trabajo de grado (Ingeniería Industrial). Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales. Disponible en catalogo bibliográfico de la Universidad Industrial de Santander: < http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/.

GAMS. [En línea] [Consultado 1 dic. 2014]. Disponible en: http://www.gams.com/

GARCÍA José Pedro, Maheut Julien, Modelos y métodos de investigación de operaciones. Procedimientos para pensar. Disponible en: http://personales.upv.es/jpgarcia/LinkedDocuments/modeladomatematico.pdf.

GAUR, Vishal y FISHER, Marshall L. A periodic Inventory routing problem at a Supermarket Chain. EN: Operations Research. Vol. 52, No. 6; (2004), p. 813-822.

GLOVER, F. y BATISTA, B. Introducción a la Búsqueda Tabú. Universidad de la Laguna. Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática. Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación. San Cristóbal de la Laguna. España. Disponible en: < http://leeds-faculty.colorado.edu/glover/fred%20pubs/329%20-%20Introduccion%20a%20la%20Busqueda%20Tabu%20TS_Spanish%20w%20Belen(11-9-06).pdf>

GONZÁLEZ, C. y ORJUELA, J. Una revisión al estado del arte del problema de ruteo de vehículos: Evolución histórica y métodos de solución. En: Ingeniería, Vol. 16, No. 2, p. 35-55.

GONZÁLEZ, Guillermo y GONZÁLEZ, Felipe. Metaheurísticas Aplicadas al Ruteo de Vehículos. Un caso de estudio. Parte 1: Formulación del problema. Ingeniería e Investigación, 2006, vol. 26, (3). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. [En línea] 26, (3), 150-151. [Consultado 10 dic. 2014]. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=64326319.

GUASMAYAN, F. Solución del problema de Ruteo de Vehículos Dependientes del Tiempo Utilizando un Algoritmo Genético Modificado. Tesis de grado para optar al título de Magíster en Investigación Operativa y Estadística Facultad de Ingeniería Industrial. Universidad Tecnológica de Pereira. Pereira, Risaralda. Febrero de 2014. Disponible en: < http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/11059/4562/1/5196G917.pdf >.

GUERRERO, William. Modèles et méthodes d'optimisation pour le problème de localisation-routage avec contraintes de stockage. Bogotá, 2014, 148 p. Trabajo de grado (doctor de troy university of technology). Universidad de los Andes.

LI, Jianxiang; CHU, Feng y CHEN, Haoxung. A solution approach to the inventory routing problem in a three-level distribution system. EN: European Journal of Operational Research. (2010), p. 736.

LIU, Shu-Chu y CHEN, Jyun-Ruei. A heuristic method for the inventory routing and pricing problem in a supply chain. EN: Expert Systems with applications. (2010), p. 1447.

MAESTRE, María. Técnicas Clásicas de optimización. [En línea] [Consultado 29 nov. 2014]. Disponible en: http://www.ehu.es/mae/html/prof/Maria_archivos/plnlapuntes.pdf

MATLAB. [En línea] [Consultado 1 dic. 2014]. Disponible en: http://www.mathworks.com/products/matlab/ .

MOIN, N. H.; SALHI, S. y AZIZ, N.A.B. An efficient hybrid genetic algorithm for the multi-product multi-period inventory routing problem. EN: International Journal Production Economics. (2011), p. 334.

NIÑO, Elías. Optimización Combinatoria: una perspectiva desde la teoría de autómatas, Editorial Académica Española, Publicado en: Enero 22 de 2012, Disponible en: http://www.faae.org.co/formularios/adjuntos_fciencias/512/EliasNinoResumen.pdf.

OLIVERA, Alfredo. (2004, Ago.). Heurísticas para Problemas de Ruteo de Vehículos. Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. Montevideo, Uruguay. [En línea] Agosto, 2004. [Consultado 15 dic. 2014]. Disponible en: https://www.fing.edu.uy/inco/pedeciba/bibliote/reptec/TR0408.pdf.

Pastor, R. Metalgoritmo de optimización combinatoria mediante la exploración de grafos. Universidad Politécnica de Catalunya, Catalunya, España. p 15.

QIN, Lei, et al. A local search method for periodic inventory routing problem. EN: Expert Systems with Applications. Vol. 41, No. 2; (2014), p. 765-778.

QUINTERO, T. Algoritmo híbrido basado en un método de aproximaciones sucesivas para el problema de ruteo de Vehículos heterogéneo. San Nicolás de los Garza, Nuevo León, 2012. Trabajo de grado (Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas). Universidad Autónoma de Nuevo León. Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. División de Estudios de Posgrado. Disponible en catalogo bibliográfico de la Universidad de Nuevo León: < http://eprints.uanl.mx/3155/ >.

RAA, et al. Modeling inventory routing problems in supply chains of high consumption products. EN: European Journal of Operational Research. Vol. 169, No. 3; (2006), p. 1048-1063.

--------. Birger y AGHEZZAF, El-Houssaine. A practical solution approach for the cyclic inventory routing problem. EN: European Journal of Operational Research. Vol. 192, No. 2; (2009), p. 429-441.

RAMOS Andrés; SÁNCHEZ, Pedro y FERRER, José. Modelos Matemáticos de Optimización. Universidad Pontificia Comillas Madrid. Escuela técnica superior de Ingeniería. Departamento de Organización Industrial. [En línea]. (2010). [consultado 5 en. 2015]. Disponible en: http://www.iit.upcomillas.es/aramos/presentaciones/t_mmo_M.pdf

--------. Modelos Matemáticos de Optimización. Universidad Pontificia Comillas Madrid. Escuela técnica superior de Ingeniería. Departamento de Organización

Industrial. [En línea] Septiembre, 2010. [Consultado 5 en, 2015]. Disponible en: http://www.gams.com/docs/contributed/modelado_en_gams.pdf

--------. Modelos matemáticos de optimización, Universidad Pontificia Madrid, 2010. Disponible en http://www.gams.com/docs/contributed/modelado_en_gams.pdf.

RESTREPO, G y MORENO, L. Model for academic resorce assignment in educational institutions using the tabu search metaheuristcs. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Minas, Escuela de sistemas. Medellín, Colombia. Noviembre de 2011. Disponible en:< http://www.bdigital.unal.edu.co/25100/1/22350-106831-1-PB.pdf>.

RIOJAS, A y ÁLVAREZ, M. Aplicación de la metaheurística “Búsqueda Tabú al problema de la N-reinas. Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad Nacional mayor de San marcos. Lima Perú. 2005. Disponible en: http://www.academia.edu/10792819/Aplicaci%C3%B3n_de_la_metaheur%C3%ADstica_B%C3%BAsqueda_tab%C3%BA_al_problema_de_las_N-reinas.
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, aplicación de la metaheurística “Búsqueda Tabú” al problema de las N-reinas.

--------. Conceptos, algoritmo y aplicación al problema de las N-reinas. Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad Nacional mayor de San marcos. Lima, Perú. 2005. Disponible en: < http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/monografias/basic/riojas_ca/cap3.pdf>.

ROCHA, L.; González, C. y Orjuela, J. Una revisión al estado del arte del problema de ruteo de vehículos: Evolución histórica y métodos de solución. En: Ingeniería, Vol. 16, No. 2, p. 7.

SALTOS, R. y ACEVES, R. Aplicación de la Metaheurística Búsqueda de la Armonía para Resolver el Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios. EN: Revista tecnológica ESPOL. Vol. 25, No. 2; 2012, p. 4-6.

SÁNCHEZ, Jorge. Búsqueda tabú para resolver un problema de cambios de escuela en educación básica en México distrito federal. México D.F., 2003, 27-30. Tesis (Maestro en ciencias de la computación). Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en computación.

SANJUR Isaías. La importancia de un buen sistema de transporte. [En línea]Junio 2014. [Consultado 25 dic. 2014]. Disponible en: http://cadenadeabastecimiento.blogspot.com/2008/03/la-importancia-de-un-buen-sistema-de.html.

SARDOVA, F. Métodos Exactos y Heurísticos para resolver el Problema del Agente Viajero (TSP) y el Problema de Ruteo de Vehículos (VRP). ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL Guayaquil, Ecuador Octubre 2007. Disponible en: < http://www.icm.espol.edu.ec/jornadas/14/archivos/Diapositivas/SandoyaFernando/conferencia/SandoyaFernando_M%C3%A9todos_exactos_y_heur%C3%ADsticos_para_el%20VRP_jornadas.pdf>.

SAVELSBERGH, Martin y SONG, Jin-Hwa. An optimization algorithm for the inventory routing problem with continuous moves. EN: Computers & Operations Research. Vol. 35, No. 7; (2008), p. 2266-2282.

SHUKLA, Nagesh; TIWARI, M.K. y CEGLAREK, Darek. Genetic-algorithms-based algorithm portfolio for inventory routing problem with stochastic demand. EN: International Journal of Production Research. Vol. 51, No.1; (2013), p. 118.

SHU-CHU, Liu y WEI-TING, Lee. A heuristic method for the inventory routing problem with time Windows. EN: Expert Systems with applications. (2011), p. 13223.

SONG, Jin-Hwa y FURMAN, Kevin C. A maritime inventory routing problem: Practical approach. EN: Computers & Operations Research. (2010), p. 657.

TARAPUEZ Juan y BARRERA, Gloria. Gams aplicado a las ciencias económicas, Universidad Nacional, Colombia, 2010.

VÉLEZ, C. y MONTOYA, J. Metaheurísticos: Una alternativa para la solución de problemas combinatorios en administración de operaciones. Envigado, Colombia 2007. Disponible en: < http://www.scielo.unal.edu.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1794-12372007000200009&lng=es&nrm=iso >

VIDOVIĆ, Milorad: RATKOVIĆ, Branislava y POPOVIC, Dražen. Mixed integer and heuristics model for the inventory routing problem in fuel delivery. EN: International Journal Production Economics. Vol. 147, No. 3; (2014), p. 593-604.

YU, Yugang; CHEN, Haoxun y CHU Feng, A new model and hybrid approach for large scale inventory routing problems. EN: European journal of operational research. (2007), p. 1022.

ZHANG, Ying, et al. Hybrid metaheuristic solutions to inventory location. EN: Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review. Vol. 70; (2014), p. 305-323.