# PENSAMIENTO VARIACIONAL: DE LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA SIMPLE A LA NOCIÓN DE FUNCIÓN LINEAL DE LA FORMA f(x) = kx


JOSÉ JULIÁN CARREÑO ZAMBRANO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA


2007

**PENSAMIENTO VARIACIONAL: DE LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA SIMPLE A LA NOCIÓN DE FUNCIÓN LINEAL DE LA FORMA $f(x) = kx$**

**JOSÉ JULIÁN CARREÑO ZAMBRANO**

**Trabajo de Grado para optar al título de**
**Especialista en Educación Matemática**

**DIRECTORA:**
**Ph. D.  DIANA JARAMILLO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**
**ESCUELA DE MATEMÁTICAS**
**ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**
**BUCARAMANGA**
**2007**

*A mis padres David y Emérita*
*quienes son un apoyo constante*
*e incondicional en mi vida.*

## AGRADECIMIENTOS

A Dios,
quien es mi protector y maestro.
A  Marcela, Felipe, Ruby, David y Sebastián,
quienes contribuyeron a que este trabajo
se hiciera realidad.
A Diana Jaramillo, mi directora de tesis,
Por su orientación y asesoría.
A la UIS ,
alma mater que me formó.
A la escuela de matemáticas,
por su contribución en mi crecimiento profesional.
Al Instituto Real de Bucaramanga,
especialmente a su directora Nelly Arguello.
A los profesores de la escuela de matemáticas,
por su aporte en mi camino como docente.
A mis hermanos,
Olga, Carlos, Oscar, y Leonardo,
por su apoyo y motivación.

## TABLA DE CONTENIDO

# RESUMEN

**1. TITULO:** PENSAMIENTO VARIACIONAL: DE LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA SIMPLE A LA NOCIÓN DE FUNCIÓN LINEAL DE LA FORMA f(x) = kx*.

**2. AUTOR:** JOSÉ JULIÁN CARREÑO ZAMBRANO**

**3. PALABRAS CLAVES:**

Proporcionalidad
Función lineal
Pensamiento variacional
Razonamiento proporcional
Estructura multiplicativa

**4. DESCRIPCIÓN O CONTENIDO:** La proporcionalidad directa simple ha sido uno de los conceptos que se estudian por primera vez en la educación básica primaria, en algunas ocasiones en los últimos grados de este ciclo educativo, cuarto o quinto primaria. Desde aquí el estudiante simplemente comienza a tener contacto con términos como razón, proporción, proporcionalidad, pero de una forma muy mecánica y repetitiva.

Bajo una investigación de aula y un abordaje de tipo fenomenológico-hermenéutico se planteó la pregunta, ¿cómo la proporcionalidad directa simple ayuda en la construcción de la idea intuitiva de función lineal de la forma f(x)=kx? De esta forma en el presente trabajo se exploró acerca de la utilización de la proporcionalidad directa simple como un camino hacia la construcción de la idea intuitiva de función lineal de la forma f(x)=kx en estudiantes de séptimo grado.

La estructura multiplicativa, el razonamiento proporcional y la caracterización de la función lineal de la forma f(x) = kx, son categorías analizadas en el desarrollo de mi investigación. Estos elementos antes mencionados conforman la base fundamental de la relación existente entre proporcionalidad directa simple e idea intuitiva de función lineal de la forma f(x) = kx.


* Trabajo de grado
** Facultad de Ciencias. Especialización en Educación Matemática. JARAMILLO, Diana

## ABSTRATC


1. **TITLE:** VARIATIONAL THOUGHT OF THE DIRECT SIMPLE PROPORTIONALITY TO THE NOTION OF LINEAR FUNCTION OF THE FORM f(x) = kx[*]

2. **AUTHOR**: JOSÉ JULIÁN CARREÑO ZAMBRANO[**]

3. **KEY WORDS:**
   Proportionality
   Linear Function
   Variational Thought
   Proportional Reasoning
   Multiplicative Structure

4. **DESCRIPTION OR CONTENT:** The direct simple proportionality has been one of the first concept studied by the first time in the last years of the primary school (fourth and fifth grade). At this time the students, only begin to have a contact with vocabulary about proportion, proportionality in a mechanical and repetitive way.

   On a research in the classroom and under the approach of fenomenological-hermeneutical I ask a question: ¿how the direct simple proporcionality helps in the intuitive idea of the linear function of f(x)=kx? In this way, in the work I explored about the uses of direct simple proporcionality like. A route of the construction in seventh grade student of the linear function, in the form f(x)=kx.

   The multiplicative structure, the proportional reasoning and the characterization of linear function of the form f(x) = kx are categories analysed in the development of my investigation.
   This subjects mentioned before are the fundamentals basis from the relation between direct simple proportionality and the intuitive idea of linear function of the form f(x)=kx.


---

[*] Grade work
[**] Ability of Sciences. Specialization in Mathematical Education. JARAMILLO, Diana

# PRESENTACIÓN

La proporcionalidad directa simple es uno de los conceptos que se estudian por primera vez en el grado quinto de básica primaria; Aquí el estudiante simplemente comienza a tener contacto con términos como: Razón, proporción y proporcionalidad, pero de una forma muy mecánica y repetitiva.

Es así, como surge una de las primeras dificultades para que estudiantes de séptimo grado, al ser confrontados con el tema de la proporcionalidad directa simple, realicen una serie de razonamientos proporcionales muy precarios y no con la suficiencia que esta temática debe tener en el comienzo de la educación básica secundaria.

De igual forma, estas dificultades detectadas en estudiantes de séptimo, son también el producto de las metodologías y actividades de clase estipuladas por los maestros al momento de trabajar con temáticas de proporcionalidad; en este caso proporcionalidad directa simple, en el sentido que siempre se han presentado estos conceptos como algo estático y nunca de una forma dinámica.

Es por esto que en mi trabajo investigativo planteé la pregunta, **¿Cómo la proporcionalidad directa simple ayuda a la construcción de la idea intuitiva de función lineal de la forma f(x)=kx?** Y para responder a esta pregunta trace el objetivo: **Analizar la proporcionalidad directa simple como alternativa hacia la construcción de la idea intuitiva de función lineal de la forma f(x)=kx en estudiantes de séptimo grado.**

La investigación se desarrolla como una experiencia de aula bajo un abordaje de tipo fenomenológico-hermenéutico, y analizada desde una perspectiva cualitativa.

La investigación se desarrolló en el Instituto Real de Bucaramanga, institución de carácter privado, con estudiantes de séptimo grado, sus edades oscilan entre los 12 y 14 años. Participaron 15 estudiantes, seis hombres, nueve mujeres y Para el análisis de la experiencia fueron seleccionados cinco estudiantes, cuyos nombres reales son: FELIPE, DAVID, SEBASTIÁN, MARCELA y RUBY. La institución, los padres de familia y los alumnos partícipes de la investigación autorizaron la publicación de sus nombres, escritos, fotografías y demás por medio de una carta que fue firmada por las personas en cuestión.

La información de la investigación fue recopilada por medio de diversas técnicas y fuentes tales como, escritos de los estudiantes, diálogos, fotografías, entrevistas semiestructuradas, filmaciones, solución de las guías de trabajo, actividades lúdicas, diario de campo, grabaciones, observación directa por parte del investigador. Estas técnicas permitieron la recopilación de material que fue puesto en análisis para la realización de mi proyecto de investigación.

A continuación realizaré una breve descripción de cada uno de los estudiantes que participaron en el proyecto de investigación:

**FELIPE**

Felipe, un niño de 12 años de edad, extrovertido, dinámico, con un gran amor y aptitud para las matemáticas, es el alumno más antiguo de la institución, pues ha cursado allí desde prejardín. Se destacó en las olimpiadas matemáticas del colegio siendo campeón en el 2005 y cuarto lugar en el 2006. Fue personero de la institución. Uno de los mas entusiastas y motivadores de cada una de las actividades que se realizaron dentro del proyecto de investigación.

**SEBASTIÁN**


Sebastián, un niño de 12 años de edad, introvertido, callado, temperamental, con gran dominio de las matemáticas. Un estudiante que tan solo llevaba un año en la institución. Participó siempre de manera muy activa en las actividades del proyecto de investigación, como dato curioso, siempre generó polémica o discusión por las respuestas que daban sus compañeros en el desarrollo de las diversas actividades que se realizaron. Presentó aportes valiosos para el proyecto de investigación.

**DAVID**

David, un estudiante de 14 años de edad, totalmente extrovertido y amante de la diversión. Presentó dificultades en el área de matemáticas, sin embargo, en las actividades de investigación se mostró siempre muy receptivo, haciendo buenos aportes al proyecto.

**RUBY**

Ruby, una estudiante de 14 años de edad, siempre me expresó que en su anterior colegio tuvo dificultad con las matemáticas. Era una niña extrovertida y de temperamento fuerte. Mostró dificultades para el desarrollo de las actividades del proyecto de investigación.

**MARCELA**

Marcela, una niña de 13 años de edad. Siempre se mostró muy activa en el proceso de investigación. Su participación en el proyecto dejó grandes aportes para el trabajo de análisis de investigación. Es una chica extrovertida y poco amante de las matemáticas, aunque su rendimiento en esta asignatura es normal.

El relato de este proyecto de investigación lo hago en tres capítulos, los cuales presento de una forma breve a continuación:

En el primer capítulo, **“La Experiencia”**, muestro una recopilación de cada uno de los aspectos relevantes de mi proyecto de investigación, el cual desarrollé en fases las cuales paso a describir.

- **Fase 1: Diagnóstico**

  En esta fase se detectaron las falencias y aciertos que poseían los estudiantes acerca del concepto de proporcionalidad directa simple, resultados que sirvieron para el diseño de actividades.

- **Fase 2: Las Actividades**

  De acuerdo al análisis realizado en el diagnóstico, se adaptaron diez actividades que se utilizaron como herramienta para la recopilación de la información del proyecto de investigación.

- **Fase 3: La Socialización**

  En esta fase contaré como se realizaron las actividades de socialización y refuerzo de las dificultades encontradas, pues consideré prudente desarrollar alternativas de mejoramiento para los estudiantes en ese momento.

En el segundo capítulo, **“Categorías Emergentes”**, realizo una exposición de la triangulación presentada entre las voces de los estudiantes, las voces de las diversas teorías e investigaciones que tienen que ver con el desarrollo de la investigación y por último mi voz como investigador. En este sentido presento de igual forma los argumentos que fueron relevantes en mi proceso de investigación, con miras a la respuesta de la pregunta de investigación y, el logro del objetivo planteado. En este sentido surgen unas categorías como:

- **Estructura multiplicativa:** Esta categoría de análisis incluye y muestra la estrecha e intima relación entre la multiplicación y la proporcionalidad directa simple, toda vez que la primera es un caso particular de la segunda, en este sentido razonar proporcionalmente en términos de multiplicación es una  estrategia  válida en la proporcionalidad directa simple, como elemento primario o básico del razonamiento proporcional.

- **Razonamiento proporcional:** Es la categoría en la cual se presentan diversos tipos de razonamientos que los estudiantes utilizan en el momento de resolver situaciones matemáticas por medio de proporcionalidad directa simple, allí se pueden encontrar una serie de argumentos presentados por ellos y el análisis que se realiza a los mismos en torno a la situación particular del grupo de investigación.

- **Caracterización del modelo lineal de la forma f(x)=kx:** En esta categoría de la investigación se realiza una serie de clasificación de algunas características básicas que los estudiantes de séptimo grado de una manera muy intuitiva realizan o no, acerca del modelo lineal que se esta incorporando, y también la relación que ellos encuentran por medio de dichas características entre la proporcionalidad directa simple y la idea intuitiva de función lineal de la forma f(x)=kx.

## LA EXPERIENCIA

La proporcionalidad directa simple se ha visto en nuestro medio educativo siempre como un proceso de aprendizaje estático, es decir, que no experimenta ninguna variación o cambio como tal, limitada a la siguiente definición: “es una igualdad entre dos razones”. De esto se desprende que los estudiantes de séptimo grado asuman este concepto, simplemente, afirmando o definiendo que la proporcionalidad directa simple es sencillamente, “la igualdad entre dos razones”. Entonces es aquí donde se encuentra un proceso estático, contrario al modelo que se debe plantear en esta serie de temáticas tales como la razón, la proporción y la proporcionalidad. Para el caso particular me estaré refiriendo a la proporcionalidad directa simple.

En mi experiencia como docente de matemáticas en los niveles de primaria y bachillerato, he notado la falencia que presentan los estudiantes en el momento de realizar un razonamiento proporcional. Pienso, que este desacierto ocurre también por la forma como los maestros presentan estas temáticas a los estudiantes; En algunas ocasiones, siguiendo la teoría de un libro, tal y como este la expone, sin realizar un seguimiento y crítica, sin observar si esta es la forma adecuada que se puede adaptar a un grupo de estudiantes. Otras veces el tema es visto simplemente en las unidades finales del año y, es mirado de una forma muy rápida, donde no se permite ninguna clase de análisis por parte de los estudiantes, en este y muchos otros factores. Los estudiantes no realizan una maduración o formación en algo muy importante como es el razonamiento proporcional, básico para encontrar mas adelante en el análisis del modelo funcional y de función lineal una estructura que tiene un comportamiento similar a la proporcionalidad directa simple.

Es por ello, y en este sentido, que en mi proyecto de investigación plantee la siguiente pregunta, ¿Cómo la proporcionalidad directa simple ayuda a la construcción de la idea intuitiva de función lineal de la forma f(x)=kx?, en busca de la respuesta a mi pregunta de investigación comencé a trazar los caminos que me condujeron a responder dicho interrogante.

La mirada del pensamiento variacional planteado por el MEN en los lineamientos curriculares, permite buscar en el proyecto de investigación que el niño de grado séptimo vea el concepto matemático, proporcionalidad directa simple y la idea intuitiva de función lineal de la forma f(x)=kx, a la luz de tres procesos importantes como son el análisis, la organización y la modelación matemática.
Bajo esta mirada los lineamientos curriculares del área de matemáticas afirman:

> proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas. (MEN, 1998, p.72)

El camino de la proporcionalidad, para este caso, proporcionalidad directa simple, nos da una alternativa importante al conectar dicha proporcionalidad con la noción de función lineal de la forma f(x)=kx, pues en este sentido se pretende que el estudiante utilice características como observación, registro y utilización del lenguaje matemático. Así como lo plantean los lineamientos curriculares del área de matemáticas cuando hace referencia a los núcleos conceptuales del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, enuncia entre ellos que “los modelos matemáticos de tipo de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo la proporcionalidad cobra especial significado”. (MEN, 1998, p.72)

Analizar la proporcionalidad directa simple con la noción del concepto de función lineal de la forma f(x)=kx por medio de una estructura multiplicativa, es válido en el estudiante de séptimo grado. En este nivel, él no debe mirar el concepto de proporcionalidad como una simple igualdad entre dos razones, por el contrario debe establecer relaciones de covariación que estos conceptos matemáticos encierran.

De esta forma, existen entonces dos conceptos importantes en este trabajo como son: La variación proporcional y el razonamiento multiplicativo. Estos están plasmados en los lineamientos curriculares, “Los contextos de **variación proporcional** integran el estudio y comprensión de variables intensivas con dimensión, así como también ayudan al estudiante a comprender el **razonamiento multiplicativo**” (MEN, 1998, p.74).

La función, para nuestro caso la función lineal de la forma f(x)=kx, guarda modelos de variación como la proporcionalidad, es por eso que estableceremos un camino entre la proporcionalidad directa simple y la función lineal de la forma f(x)=kx, tal como lo exponen los lineamientos curriculares:

> Los contextos donde aparece la **noción de función** establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge **la función** como herramienta necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio. Los modelos mas simples de función (**lineal**, afín, cuadrática, exponencial…) encapsulan modelos de variación como la **proporcionalidad**. (MEN, 1998, p.74)

El análisis de la proporcionalidad directa simple será mi punto de partida para de esta forma recorrer un camino que me conduzca hacia la idea intuitiva de función lineal de la forma f(x)=kx. Los estándares curriculares del Ministerio de Educación Nacional para el grado séptimo en cuanto al pensamiento variacional contemplan textualmente, “Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de **proporcionalidad directa** y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos”.(MEN, 2003, p.36).

El pensamiento variacional se ocupa del análisis de sistemas que relacionan sus variables internas, esto genera una covariación que será punto importante para nuestro estudio, en el sentido en que abordaré el pensamiento variacional, bajo la mirada de la proporcionalidad directa simple y la función lineal de la forma f(x)=kx.
Una primera visión teórica que justifica el proyecto de investigación la plantea el Dr. Carlos Eduardo Vasco quien manifiesta acerca del pensamiento variacional:

> El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covarien en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o de distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.(Vasco, 2002, p.3)

La idea intuitiva de función lineal aparecerá en mi trabajo como una forma de modelación matemática, aspecto fundamental en el pensamiento variacional. Tal como lo define Vasco, (2002), el propósito rector del pensamiento variacional es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad.

Una primera visión acerca del desarrollo del pensamiento variacional la plantea Vasco (2002), quien expone que la proporcionalidad es un proceso de variación, "Con el pensamiento proporcional tradicional, con tal que no se defina una proporción como la igualdad de dos razones, pues eso es estático y se refiere a la representación de la proporción no a la variación entre magnitudes que se identifican como proporcionales." (Vasco, 2002, p.4)
Una segunda visión la plantea Obando (2005), quien hace referencia al desarrollo del pensamiento proporcional y en este sentido enfatiza en un aspecto como la covariación que experimenta la proporcionalidad como una manera de encontrar el pensamiento variacional que encierra esta temática

> hay una línea de continuidad desde la multiplicación hasta la proporcionalidad, la cual pasa por el desarrollo del pensamiento proporcional, que puede caracterizarse como una forma de razonamiento matemático que involucra el sentido de covariación y comparaciones

> múltiples y la habilidad para almacenar y procesar mentalmente distintos tipos de información. (Obando, 2005, p.89).

De acuerdo a los primeros conceptos e ideas expuestas anteriormente me propuse recorrer este camino enmarcado dentro de mi proyecto de investigación donde el objetivo es, analizar la proporcionalidad directa simple como alternativa hacia la construcción de la idea intuitiva de función lineal de la forma f(x)=kx en estudiantes de séptimo grado.

Para iniciar el recorrido de mi experiencia, comienzo con la revisión bibliográfica de trabajos relacionados con el tema, que pudieran aportar de una u otra manera en el proceso de investigación.

Entre ellos, Obando, (2005) en su texto: **Proporcionalidad directa. Del pensamiento numérico al variacional.** Analiza la multiplicación y la proporcionalidad desde una perspectiva que muestra como ambos ejes temáticos guardan una estrecha relación de continuidad, de tal forma que el aprendizaje de la multiplicación, es en sí mismo, el inicio del aprendizaje de la proporcionalidad.

Esta continuidad se da en la medida que tanto los problemas de proporcionalidad sean entendidos como problemas que implican el análisis de situaciones de covariación, y en particular, las situaciones de multiplicación se corresponden en situaciones de covariaciones lineales perfectas, los cuales conducen a la proporcionalidad directa.

Posada et al., (2005), en su trabajo: **El concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.** Plantean y analizan el concepto de función como uno de los de mayor importancia por sus múltiples aportes para modelar situaciones de las ciencias y de la misma matemática. La función tiene factores implícitos como la variación y el cambio y que puede ser pensado como modelo matemático de cierto tipo de fenómenos determinados por la correlación de magnitudes.

El trabajo centra el concepto de función desde una perspectiva variacional acorde con lo propuesto en los lineamientos y estándares curriculares colombianos.

Se indaga por el papel que juega el proceso de modelación matemática como herramienta didáctica de aproximación al concepto de función lineal.

Guacaneme (2001), en su tesis: **Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas.** El texto recoge suficientes planteamientos que han sido el resultado del desarrollo del mismo en lo concerniente a la presentación formal y escolar (en los textos) de la proporción y la proporcionalidad.

García y Serrano (1999), en su texto: **La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva social y cultural.** El aporte tiene como fundamento la investigación que se ha realizado sobre la proporcionalidad como función lineal. Propone cambios en los modelos pedagógicos en el sentido de cualificar los grupos de profesores de matemáticas interesados en su profesionalización como educador matemático.

Fiol y Fortuny, (1990) en su libro: **Proporcionalidad directa, la forma y el número.** Su propuesta muestra que el concepto de proporcionalidad que parte de la visualización del espacio real o de conceptos cotidianos como cambios de monedas, cambios de escalas, cuantificación de mezclas, determinación de índices, etc., debe expresarse: primero cualitativamente, mas adelante cuantitativamente. Esta expresión pasa por un vehículo que es, en primer lugar en el lenguaje cotidiano para incidir mas adelante en el lenguaje gráfico.
La noción de proporcionalidad demanda una teoría matemática que empieza hablando de magnitudes y proporcionalidad de magnitudes. La formalización continúa estudiando la función lineal, una importante herramienta de síntesis.

Los anteriores trabajos de investigación delimitaron y fundamentaron aun más los aspectos que tenía trazados para iniciar el recorrido del camino para encontrar la respuesta a la pregunta y objetivo de mi investigación.

La investigación se desarrolló a través de las siguientes fases:

- **Fase 1: Elaboración del diagnóstico sobre proporcionalidad directa simple.**

En el diagnóstico incorporé y tuve en cuenta una serie de aspectos que caracterizaban la población de estudio como: La ubicación, estrato socioeconómico y los presaberes de los estudiantes que participaron de la investigación.

Para este proceso se adaptaron algunas actividades planteadas por (Fiol y Fortuny, 1990, pp. 181-183) quienes presentan una serie de problemas y situaciones por medio de los cuales se puede evaluar algunos aspectos acerca de la proporcionalidad. Estas actividades fueron adaptadas en la experiencia dentro de una actividad lúdica y dinámica llamada “la ruta matemática”. En esta actividad los estudiantes por medio de un dado realizaban el recorrido y de acuerdo a la casilla en la cual caían resolvían el problema. Este razonamiento de resolución del problema se realizaba sin ninguna presión de si estaba mal o bien, sino siempre como él pensara, con total libertad en sus argumentos y justificaciones.

Junto a esta actividad se desarrolló otra, en la cual los estudiantes de manera individual preparaban una receta de su postre preferido. Esta actividad fue socializada y pretendía mirar algunos presaberes que los estudiantes tenían acerca de la proporcionalidad en una actividad de la vida cotidiana, como es la preparación de postres.

Es importante aclarar que para la autorización del proyecto de investigación y, respetando la ética y moral de las personas y estamentos involucrados en este proceso, se dio a conocer tanto a la institución, padres de familia y alumnos mi proyecto de investigación.

Se firmó una carta de autorización por las partes implicadas, en la cual se autorizaba la publicación y divulgación de los diversos datos de investigación. La carta como la que muestro a continuación, fue repartida y firmada por los quince estudiantes implicados en la investigación, mas sus padres, directora, e investigador.

# Instituto Real de Bucaramanga

Cra 2w N 64 -34 Barrio Mutis- Bucaramanga (S)
Tel.- -6449180-6414509 fax 6440230


*Bucaramanga, octubre 19 de 2006*

Señores padres de familia.
GERARDO ARTEAGA Y MARIA MERCEDES RODRIGUEZ
E.S.M.

Reciban un cordial saludo:

En la clase de matemáticas se está desarrollando el proyecto de investigación denominado "Pensamiento variacional: de la proporcionalidad directa simple a la noción de función lineal de la forma f(x)=kx" dicho proyecto fue conocido por ustedes y la institución en jornadas establecidas previamente.

Queremos, formalmente, solicitar su autorización para que RUBY DAIHANNA ARTEAGA RODRIGUEZ, forme parte de nuestro grupo de investigación, como sujeto de la misma, e igualmente presentar a su hijo en la publicación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de su hijo, en forma de grabación, fotos, videos, guías de clase, entre otras.

Agradecemos su atención y colaboración.

Lic. NELLY ARGUELLO
DIRECTORA

Lic. JOSE JULIAN CARREÑO
ESTUDIANTE INVESTIGADOR

Autorizamos la participación de nuestro hijo RUBY DAIHANNA ARTEAGA RODRIGUEZ, en la investigación "Pensamiento variacional: de la proporcionalidad directa simple a la noción de función lineal de la forma f(x)=kx".

Gerardo Arteaga
Firma del Padre

MC Rodriguez
Firma de la Madre

- **Fase 2: Diseño y aplicación de las actividades.**

Las actividades estuvieron encaminadas a superar las falencias y fortalecer los saberes encontrados en el diagnóstico.

Las actividades aquí planteadas también son adaptadas y modificadas en algunos casos de Fiol y Fortuny, (1990, pp. 138-143). En estas se propone explorar la proporcionalidad directa simple y su relación como el modelo lineal, por medio del trabajo con material concreto. En este caso diez rectángulos de formas y medidas diferentes designados con las letras A a la J.

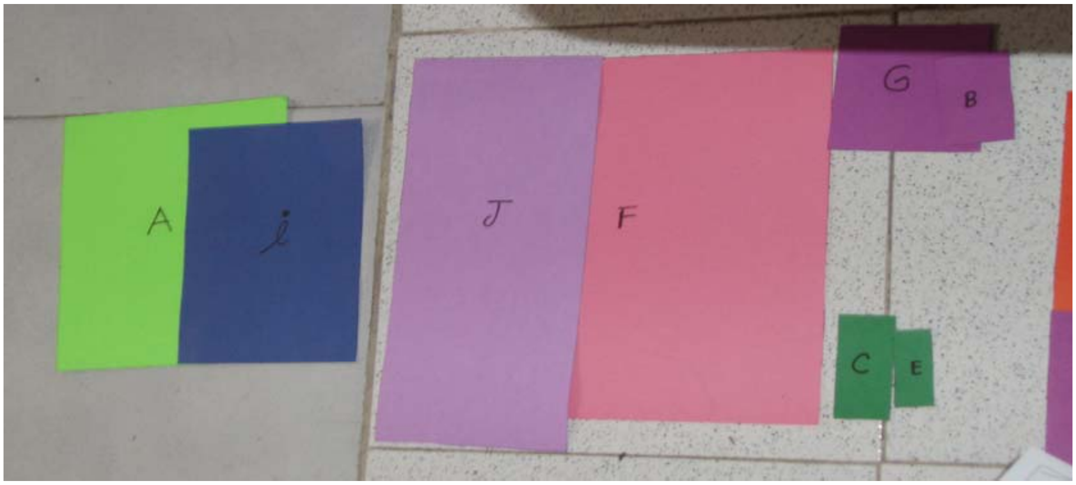
Los rectángulos utilizados para las actividades de investigación tiene las siguientes dimensiones:

| RECTÁNGULO | LARGO (cm ) | ANCHO (cm ) |
|---|---|---|
| A | 20 | 16 |
| B | 6 | 4 |
| C | 7 | 3 |
| D | 20 | 8 |
| E | 5 | 2 |
| F | 25,5 | 24 |
| G | 8,5 | 8 |
| H | 10 | 8 |
| I | 18 | 12 |
| J | 28 | 12 |

Su aparejamiento entonces con estas medidas es:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | I | C | E | G |
| H | B | J | D | F |

Estos son algunos de los rectángulos utilizados.




- **Fase 3: La socialización**

En cada una de las actividades realizadas se hizo una plenaria de socialización en donde los estudiantes expresaban sus diversos argumentos con respecto a la temática que se estaba trabajando en el momento.

En esta socialización pude ver que los errores más frecuentes presentados por los estudiantes está: la poca precisión en la medición de las dimensiones de los rectángulos lo que ocasiono un mal aparejamiento de los mismos.

De igual forma se encuentra dificultad de redacción a la hora de explicar los métodos utilizados para realizar el desarrollo de las actividades.

La utilización de la adición y sustracción como elementos generalizados para hallar proporcionalidad.

Confusión entre características de los rectángulos como forma y tamaño.

Encontrar rectángulos pertenecientes a la familia según dimensiones de largo y ancho de uno dado inicialmente no fue tarea fácil para estos estudiantes.

Aplicación de forma mecánica del algoritmo de regla de tres simple.

Poca claridad en el sentido en que cuando se corta una familia de rectángulos semejantes por su diagonal se obtiene una familia ahora de triángulos semejantes.

Las dificultades mencionadas anteriormente se evidenciaron y tuvieron un tratamiento especial en el sentido en que con cada una de las actividades de socialización se permitió que los estudiantes por medio de otros ejercicios, contraejemplos, trabajos grupales, manipulación de material, construcciones, discusiones, encontraran el razonamiento errado acerca de la temática que se estaba estudiando.

Cabe aclarar que en el desarrollo de las actividades y la respectiva socialización los estudiantes encontraron razonamientos y justificaciones acertadas para las características en estudio como: la proporcionalidad directa simple, el pensamiento variacional, el razonamiento proporcional, y la caracterización del modelo lineal de la forma $f(x)=kx$, de una forma intuitiva.

Las actividades fueron las siguientes:

**Actividad 1**

**INSTITUTO REAL DE BUCARAMANGA**

**2006 AÑO DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS**
**ENFRENTAR UN PROBLEMA ES... ENCONTRAR UN MUNDO DE SOLUCIONES (MEN)**

AREA: MATEMÁTICAS GUÍA N° 1
GRADO: SÉPTIMO FECHA: OCTUBRE 23 /06
NOMBRE_______________________________
DOCENTE: LIC. JULIÁN CARREÑO.

**OBJETIVO**

- **Explorar mediante la manipulación de rectángulos diversas estrategias de aparejamiento.**

MATERIAL

Diez rectángulos de formas y medidas diferentes, designados con las letras: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J.

**Trabajo a realizar**

Agrupa los rectángulos de dos en dos de manera que tengan diferente medida pero la misma forma, es decir, apareja los rectángulos semejantes.
Una manera de hacerlos es sostener un rectángulo "grande" con la mano izquierda y el brazo extendido y colocar delante de este uno "pequeño" con la mano derecha, intentando que un rectángulo tape al otro.
Cuando los tengas todos aparejados completa el siguiente cuadro.

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

Semejante a

Encima de la mesa, colocando un rectángulo sobre su pareja, intenta encontrar nuevos métodos para aparejarlos.

Descubrimientos:

La primera actividad permitió una familiarización por parte de los estudiantes con el material de trabajo (los rectángulos) en la medida en que empezaba una expectativa acerca del camino a recorrer, todos comenzaron a manipular el material de acuerdo a las indicaciones que se daban en la guía y compartiendo la experiencia en el diálogo con sus compañeros.

La mayoría de los estudiantes hicieron el aparejamiento correctamente. Aquí pude apreciar que los chicos construían otros métodos de aparejamiento como poner uno en el suelo y cubrirlo con la sombra de otro, la existencia de una preclasificación de acuerdo a la forma y el tamaño, algunos comprobaron cuantas veces el rectángulo pequeño cabía en el grande y ellos mismos se dieron cuenta que esta era una característica que no es generalizable, otros de forma muy natural tomaron la regla y empezaron a realizar mediciones esporádicas de los rectángulos para encontrar alguna característica que permitiera su aparejamiento.

Evidencie que en la justificación los estudiantes poseían dificultad para expresar de manera escrita sus argumentos de aparejamiento.

**(Fotografía, Actividad 1, Octubre 23 de 2006)**

## Actividad 2

# INSTITUTO REAL DE BUCARAMANGA

2006 AÑO DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS
ENFRENTAR UN PROBLEMA ES... ENCONTRAR UN MUNDO DE SOLUCIONES (MEN)

AREA: MATEMÁTICAS GUÍA N° 2
GRADO: SÉPTIMO FECHA: OCTUBRE 23 /06
NOMBRE___________________________________________
DOCENTE: LIC. JULIÁN CARREÑO.

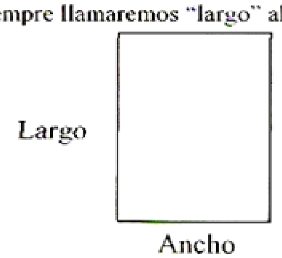
**OBJETIVO**

- **Encontrar las dimensiones de cada pareja de rectángulos semejantes.**

**MATERIAL**
Los diez rectángulos de la actividad 1

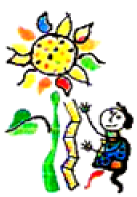
**Trabajo a realizar:**
Mide en centímetros los lados de cada rectángulo y para cada pareja de rectángulos semejantes completa las siguientes tablas:

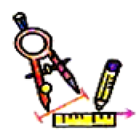
Nota: convencionalmente, siempre llamaremos "largo" al lado de mayor de mayor longitud y "ancho" al lado más corto.




| | A | H |
|---|---|---|
| LARGO | 20 cm | cm |
| ANCHO | 16 cm | cm |

| | G | |
|---|---|---|
| LARGO | | |
| ANCHO | 8 cm | |





| | | |
|---|---|---|
| LARGO | | |
| ANCHO | | |

| | | |
|---|---|---|
| LARGO | | |
| ANCHO | | |

| | | |
|---|---|---|
| LARGO | | |
| ANCHO | | |

Descubrimientos:

Después de encontrar una familiarización con el material de trabajo y haber hecho ya su propio aparejamiento, en esta segunda actividad se tenía que descubrir que a partir de cada pareja de rectángulos semejantes, se obtenía una proporción numérica comparando sus dimensiones. De igual forma había que completar los métodos geométricos ahora con recursos aritméticos. Fue nuevamente una actividad que permitió el diálogo constante de todo el grupo de investigación al compartir sus diversos razonamientos en torno a la actividad propuesta.

En la socialización de esta actividad pude observar algunas relaciones establecidas por los estudiantes en su aparejamiento tales como: las dimensiones de un rectángulo son el doble o el triple del otro, de igual manera vuelven a insistir en una asociación de acuerdo a la forma parecida de los rectángulos.

**(Fotografía, Actividad 2, Octubre 24 de 2006)**

## Actividad 3

# INSTITUTO REAL DE BUCARAMANGA

2006 AÑO DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

ENFRENTAR UN PROBLEMA ES... ENCONTRAR UN MUNDO DE SOLUCIONES (MEN)

AREA: MATEMÁTICAS GUIA N° 3

GRADO: SÉPTIMO FECHA: OCTUBRE /06

NOMBRE____________________________________

DOCENTE: LIC. JULIAN CARREÑO.

**OBJETIVO**

- Amplia una familia de rectángulos, partiendo de unos ya establecidos.

**MARTERIAL**

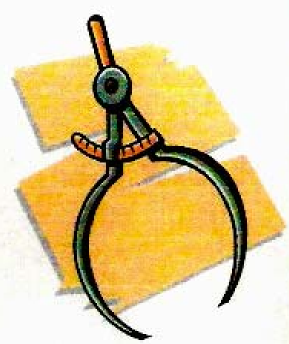
Los rectángulos C e I de las actividades anteriores.

**Trabajo a realizar:**

Aprovechando los descubrimientos de las actividades anteriores, amplía la familia de los rectángulos C e I con dos miembros más.

Explica los métodos que has utilizado.

**EXPLICACIÓN:**



4. Dibuja sobre los ejes de coordenadas un rectángulo que no sea semejante a los anteriores. ¿Qué sucede con éste?

Descubrimientos:

En la actividad número tres básicamente se pretendía mirar que para construir una familia de rectángulos semejantes se podía utilizar una serie de fracciones equivalentes. Entonces la tarea estuvo enmarcada en la forma de encontrar rectángulos semejantes a los ya dados. A diferencia de los rectángulos estipulados en la actividad planteada por Fiol y Fortuny (1990), en esta ocasión escogí dos rectángulos no semejantes.

Una característica observada en la socialización de esta guía fue que los estudiantes para crear familias de cada uno de los rectángulos dados, aplicaban nuevamente la característica de que el nuevo rectángulo es el doble, la mitad o el triple que el primer rectángulo y de esta manera creaban la familia para el rectángulo dado.

La mayoría de los estudiantes encontraron dificultad por la expresión, “encontrar la familia para el rectángulo”, muchos la relacionaron con mamá, papá e hijos. Esta dificultad fue aclarada en la socialización por medio de otros ejemplos.

**(Fotografía, Actividad 3, Octubre 25 de 2006)**

**Actividad 4**

# INSTITUTO REAL DE BUCARAMANGA

**2006 AÑO DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS**

**ENFRENTAR UN PROBLEMA ES… ENCONTRAR UN MUNDO DE SOLUCIONES (MEN)**

**AREA: MATEMÁTICAS GUIA N° 4**
**GRADO: SÉPTIMO FECHA: OCTUBRE /06**
**NOMBRE________________________________**
**DOCENTE: LIC. JULIAN CARREÑO.**

**OBJETIVO**

- Ordenar los rectángulos de mayor a menor y dibujarlos en el plano de una manera especial.

MATERIAL
Los rectángulos que tú mismo has construido en el ejercicio anterior. Hoja de papel milimetrado con unos ejes de coordenadas.

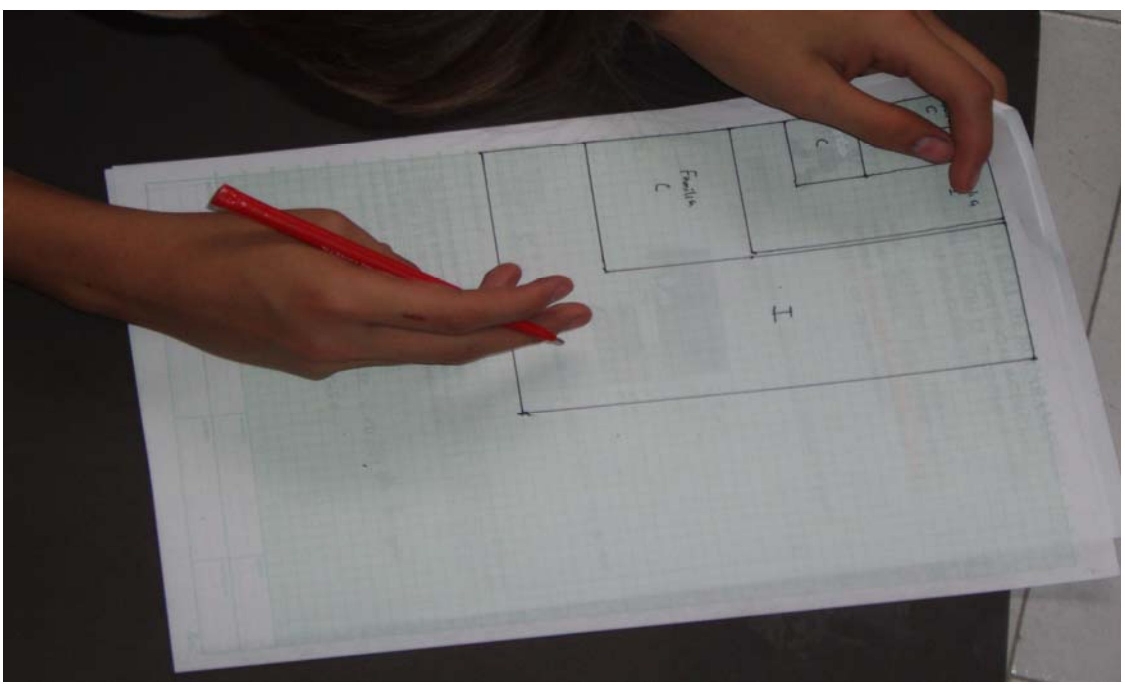
Trabajo a realizar:

1. Coge todos los rectángulos y ordénalos de menor a mayor.
2. Sobre el papel milimetrado coloca el rectángulo más pequeño de manera que la anchura se apoye sobre el eje horizontal x y la altura sobre el eje vertical y. a continuación, resigue los otros dos lados de manera que el rectángulo quede dibujado en el papel. Seguidamente, haz lo mismo con los otros rectángulos.
3. Observa los vértices. ¿Qué ha sucedido?

Mi objetivo como investigador en esta actividad era que los estudiantes encontraran la relación que existía entre los vértices de cada rectángulo agrupado de la forma indicada y la primera idea intuitiva de que formaba una línea recta, la unión de dichos vértices. Esta fue una de las actividades que permitió más discusión en torno al análisis de los vértices de los rectángulos dibujados en el plano cartesiano.

Existió bastante confusión en el sentido en que los rectángulos escogidos no eran semejantes, esto generó que al construir las familias y dibujarlas en el papel milimetrado, en primera instancia no se encontrara ninguna relación entre los vértices de esos rectángulos.

Cuando ya realizamos la socialización de la actividad se encontró que algunos alumnos como SEBASTIÁN y FELIPE convencieron al resto del grupo, que los vértices de una misma familia al ser unidos formaban una línea recta. El argumento sólido para ellos fue que como eran de la misma familia entonces eran parecidos, asociando nuevamente el término de familia como “padres e hijos”.



**(Fotografía, Actividad 4, Octubre 26 de 2006)**

## Actividad 5

# INSTITUTO REAL DE BUCARAMANGA

**2006 AÑO DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS**

**ENFRENTAR UN PROBLEMA ES... ENCONTRAR UN MUNDO DE SOLUCIONES (MEN)**

**AREA: MATEMÁTICAS GUIA N° 5**
**GRADO: SÉPTIMO FECHA: OCTUBRE /06**
**NOMBRE**______________________________
**DOCENTE: LIC. JULIAN CARREÑO.**

**OBJETIVO**

- Amplia una familia de rectángulos por medio de la proporcionalidad.

MATERIAL

Los rectángulos de la actividad 4, cartulina, regla y tijeras.

Trabajo a realizar:
1. Mide en centímetros el ancho y el largo de todos los rectángulos, ordenados del más pequeño al más grande.
Completa la siguiente tabla:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LARGO | | | | | | | | | | |
| ANCHO | | | | | | | | | | |

2. Dibuja y recorta dos rectángulos de la misma familia que los anteriores, es decir, que sean semejantes. El primero ha de medir 10 cm de ancho y el segundo 21 cm de largo.
Completa la siguiente expresión:

$$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}=\frac{12}{8}=\frac{\_\_}{10}=\frac{18}{12}=\frac{21}{\_\_}=\frac{24}{16}=\frac{\_\_}{100}$$

3. Explica todos los métodos que conozcas para resolver la pregunta 2.
Explicación:

En la actividad número 5 ya existía total confianza entre el grupo de compañeros para controvertir y al mismo tiempo compartir resultados obtenidos. Lo primordial en esta actividad era darse cuenta que toda serie de fracciones equivalentes se puede representar mediante puntos del plano alineados y utilizar simultáneamente el recurso gráfico y el aritmético para determinar relaciones de dependencia entre dos variables.

La mayoría de los estudiantes acudieron a la guía anterior apara encontrar de una manera rápida la medida que se les pedía.

Algunos chicos utilizaron el método de multiplicar en cruz. Otos estudiantes observaban la característica de las expresiones presentadas y completaban las proporciones asociando los numeradores con los múltiplos de tres y los denominadores con los múltiplos de dos.

Algunos observaban en la expresión del punto dos de la guía una relación aditiva, al manifestar que el numerador crece sumándole tres y el denominador crece sumándole dos cada vez. Se encontró dificultad entonces para la expresión x /100, algunos la resolvieron en la socialización tomando como referencia 15/10.

**(Fotografía, Actividad 5, Octubre 27 de 2006)**

## Actividad 6

# INSTITUTO REAL DE BUCARAMANGA

2006 AÑO DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

ENFRENTAR UN PROBLEMA ES... ENCONTRAR UN MUNDO DE SOLUCIONES (MEN)

AREA: MATEMÁTICAS GUIA N° 6

GRADO: SÉPTIMO FECHA: OCTUBRE /06

NOMBRE______________________________

DOCENTE: LIC. JULIAN CARREÑO.

**OBJETIVO**

- Crea colecciones de triángulos a través de los rectángulos dados.

**MATERIAL**

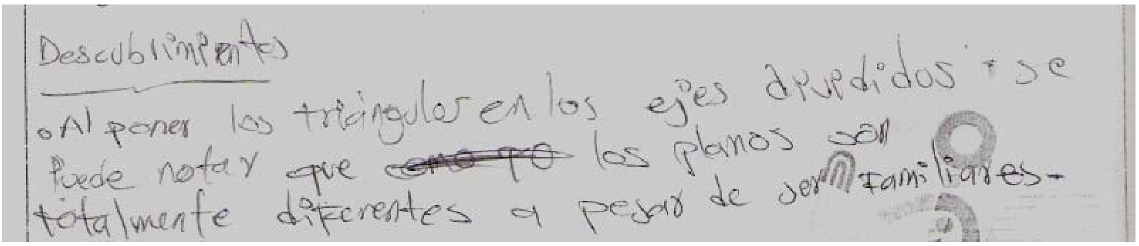
Los rectángulos de la actividad 5, regla y tijeras.

**Trabajo a realizar:**

1. Recorta todos los rectángulos por la diagonal. Te quedarán dos colecciones de triángulos iguales.
2. Toma una de las colecciones y tal como hiciste en la actividad 4 dibuja sobre unos ejes de coordenadas todos los triángulos, de manera que la base (antes ancho del rectángulo) coincida con el eje horizontal x.
3. Pega cada uno de los triángulos sobre el contorno correspondiente, de manera que uno no tape totalmente al otro.
4. Pega la otra colección de triángulos haciendo una composición a tu gusto.

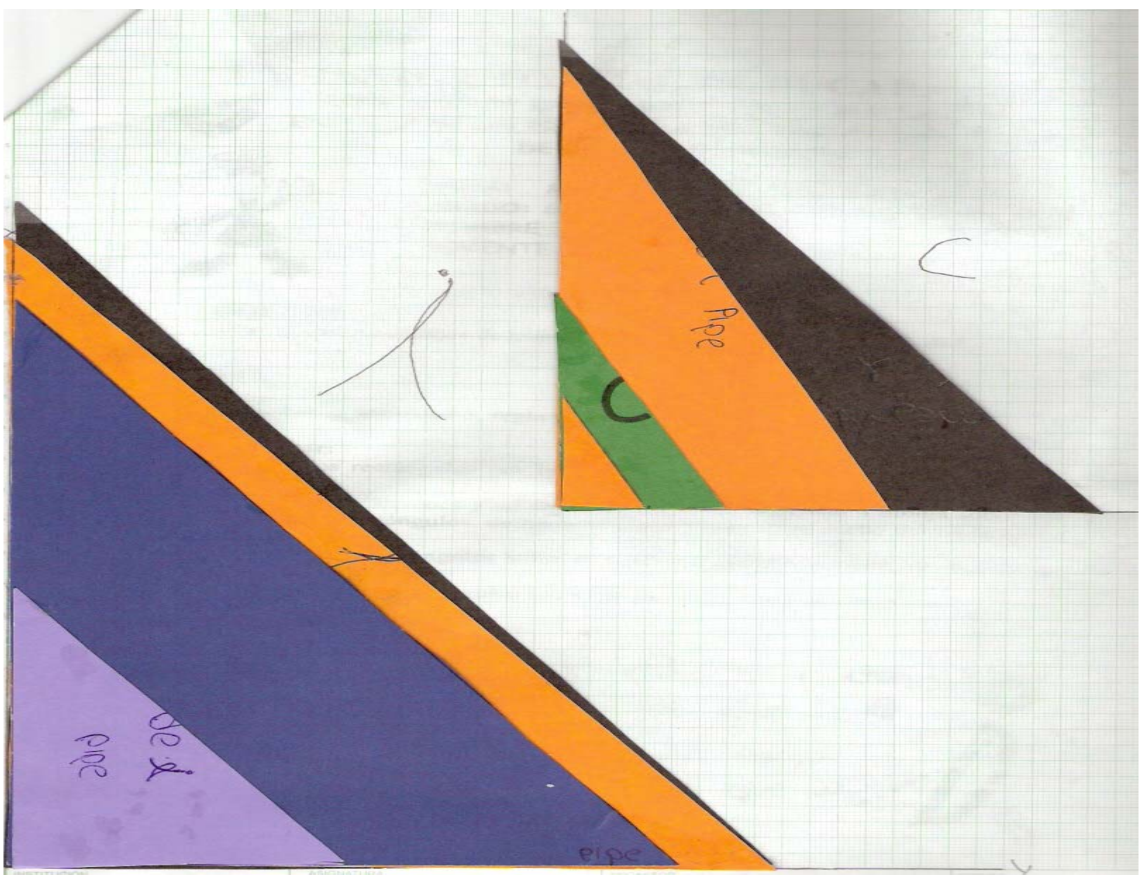
En la actividad número 6 el objetivo principal era darse cuenta que a partir de una familia de rectángulos semejantes, se encontraba una familia de triángulos semejantes. Precisamente se obtenía al recortar el rectángulo por su diagonal. Está fue la actividad que presentó mas dificultad de análisis por parte de los estudiantes.

Algunas respuestas que muestran la poca claridad y relación con lo planteado.


Descublimientos
• Al poner los triángulos en los ejes dividos se
puede notar que ~~como~~ los planos son familiares
totalmente diferentes a pesar de ser

**(SEBASTIÁN, Guía 6, Octubre 30 de 2006)**

Felipe en la forma en que son agrupados sus triángulos asume que hay una proporcionalidad inversa, pero sin tener claridad sobre la misma.



No se observo nada extraño pudimos ver una figura algo raro lo que nos mostraro una proporcionalidad Inversa. por la linea (Recta) diagonal que se muestra

**(FELIPE, Guía 6, Octubre 30 de 2006)**

PEGUE LOS TRIÁNGULOS POR FRECUENCIA OSEA DE MAYOR A MENOR.

**(MARCELA, Guía 6, Octubre 30 de 2006)**

En ninguno de los casos se logró el objetivo propuesto y solo en la aclaración del profesor en la socialización de la actividad, se observó la característica de los triángulos en el sentido en que se generaba una familia de triángulos semejantes. Para ver dicha característica se trabajó nuevamente con otro grupo de rectángulos.

**(Fotografía, Actividad 6, Octubre 30 de 2006)**

## Actividad 7

# INSTITUTO REAL DE BUCARAMANGA

**2006 AÑO DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS**

**ENFRENTAR UN PROBLEMA ES... ENCONTRAR UN MUNDO DE SOLUCIONES (MEN)**

**AREA: MATEMÁTICAS GUIA N° 7**
**GRADO: SÉPTIMO FECHA: OCTUBRE /06**
**NOMBRE________________________________________**
**DOCENTE: LIC. JULIAN CARREÑO.**

**OBJETIVO**

- **Encontrar las proporciones establecidas en cada pareja de rectángulos.**

1. Partiendo del rectángulo I que como ya sabes mide 18 cm de largo y 12 de ancho, haz los ejercicios siguientes:

a) Dibuja y recorta un rectángulo M, semejante a I, que tenga 6 cm de ancho. A continuación, completa la tabla y las siguientes expresiones:

| | I | M |
|---|---|---|
| LARGO | 18 cm | |
| ANCHO | 12 cm | 6 cm |

$$\frac{18}{12} = \frac{\ }{6}$$

b) dibuja y recorta un rectángulo N, semejante a I, que tenga 3 cm de largo.

| | I | N |
|---|---|---|
| LARGO | 18 cm | |
| ANCHO | 12 cm | 3 cm |

$$\frac{18}{12} = \frac{3}{\ }$$

2. Dibuja y recorta un rectángulo K de 10 cm de largo y 8 cm de ancho.
a) Dibuja y recorta un rectángulo L, semejante a K, de 5 cm de largo.
b) Dibuja y recorta un rectángulo Q, semejante a K, de 24 cm de ancho.

Completa:

| | L | K |
|---|---|---|
| LARGO | 5 cm | 10 cm |
| ANCHO | | 8 cm |

$$\frac{5}{\ } = \frac{10}{8}$$

| | Q | K |
|---|---|---|
| LARGO | | 10 cm |
| ANCHO | 24 cm | 8 cm |

$$\frac{\ }{24} = \frac{10}{8}$$

Esta actividad número 7 permitió encontrar en los estudiantes participantes de la investigación la utilización de la regla de tres para encontrar las proporciones que determinaban la proporcionalidad directa simple entre familias de rectángulos.

En el desarrollo de la guía evidencie por parte de los estudiantes un manejo práctico pero a la vez muy algorítmico y mecánico de la regla de tres simple. La aplicaban pero en la socialización al ser cuestionados o pedir justificaciones de la regla de tres, simplemente se limitaban a entregar respuestas tales como: “es mas rápido”, “es mas fácil hacerlo así”, “así lo aprendí el año pasado”, dichas respuestas me entregaban argumentos para manifestar que no existe la interiorización de la aplicabilidad que tiene la regla de tres simple.

**(Fotografía, Actividad 7, Noviembre 1 de 2006)**

## Actividad 8

# INSTITUTO REAL DE BUCARAMANGA

2006 AÑO DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

ENFRENTAR UN PROBLEMA ES... ENCONTRAR UN MUNDO DE SOLUCIONES (MEN)

AREA: MATEMÁTICAS GUIA N° 8

GRADO: SÉPTIMO FECHA: OCTUBRE /06

NOMBRE_______________________________________________

DOCENTE: LIC. JULIAN CARREÑO.

**OBJETIVO**

- **Manipular material concreto para crear figuras geométricas proporcionales.**

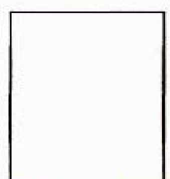
**MATERIAL**

Unos 60 palillos y una hoja de papel milimetrado.

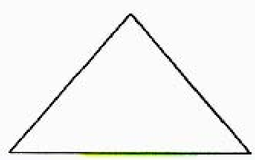
**Trabajo a realizar:**

1. a) Construye un cuadrado que tenga un palillo por lado. ¿Cuántos palillos has utilizado?
b) Construye otro cuadrado que tenga dos palillos por lado. ¿Cuántos palillos has utilizado?
c) Haz lo mismo con tres y cuatro palillos por lado.
d) Con los datos que tienes completa la tabla correspondiente.

2. Ahora haz exactamente lo mismo, pero en vez de construir rectángulos construye triángulos equiláteros.



| LARGO | PERÍMETRO |
|---|---|
| | |
| | |
| | |



| LARGO | PERÍMETRO |
|---|---|
| | |
| | |
| | |

3. Sobre unos mismos ejes de coordenadas, dibuja las dos gráficas que relacionan el lado con el perímetro, en el cuadrado y el triángulo equilátero.
Sobre el eje horizontal, coloca los lados y sobre el eje vertical los perímetros.
Nota: para que te quepa debes tomar por cada palillo el valor de 1 cm.

En la actividad número 8, el cambio de material de trabajo fue muy positivo y acertado para el momento de las actividades de investigación, pues de cierta manera refrescó las actividades que se venían realizando y permitió un nuevo análisis de las mismas cuando se trabajó con los palillos y se dejó de un lado los rectángulos y triángulos de cartulina.

Los estudiantes completaron la tabla sin ninguna dificultad, la variación estuvo en que algunos utilizaron como unidad de medida un palillo, otros utilizaron como unidad de medida la longitud en centímetros de un palillo.

Algunos alumnos observaron que los cuadrados y triángulos que estaban construyendo eran semejantes.

La realización de la gráfica en el eje de coordenadas en papel milimetrado les entregó una evidencia clara para ellos como fue la relación entre proporcionalidad directa simple y modelo lineal, esto lo aprecie en las argumentaciones entregadas por los estudiantes en la socialización de la actividad.

**(Fotografía, Actividad 8, Noviembre 2 de 2006)**

## Actividad 9

# INSTITUTO REAL DE BUCARAMANGA

2006 AÑO DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

ENFRENTAR UN PREOBLEMA ES... ENCONTRAR UN MUNDO DE SOLUCIONES (MEN)

AREA: MATEMÁTICAS GUIA N° 9

GRADO: SÉPTIMO FECHA: OCTUBRE /06

NOMBRE______________________________

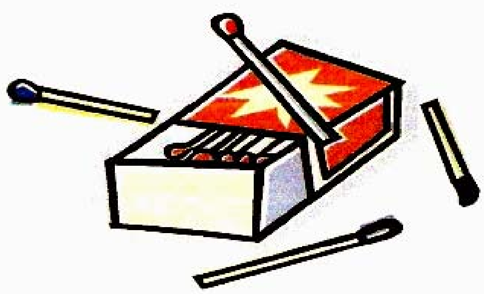
DOCENTE: LIC. JULIAN CARREÑO.

**OBJETIVO**

- Crear familias de rectángulos por medio de material concreto.

**MATERIAL**

Unos 60 palillos y una hoja de papel milimetrado.



**Trabajo a realizar:**

1. construye un rectángulo de 2x5 palillos. Sin desmontarlo construye otro añadiendo un palillo al largo y otro al ancho.
El nuevo rectángulo, ¿es semejante al primero? ¿Por qué?
Dibuja esta situación en una hoja milimetrada.

2. Volviendo a partir del rectángulo de 2x5 palillos, añade un solo palillo al ancho.
¿Cuántos palillos has de añadir al largo para que el nuevo rectángulo sea semejante al primero? (si lo crees conveniente rompe un palillo)

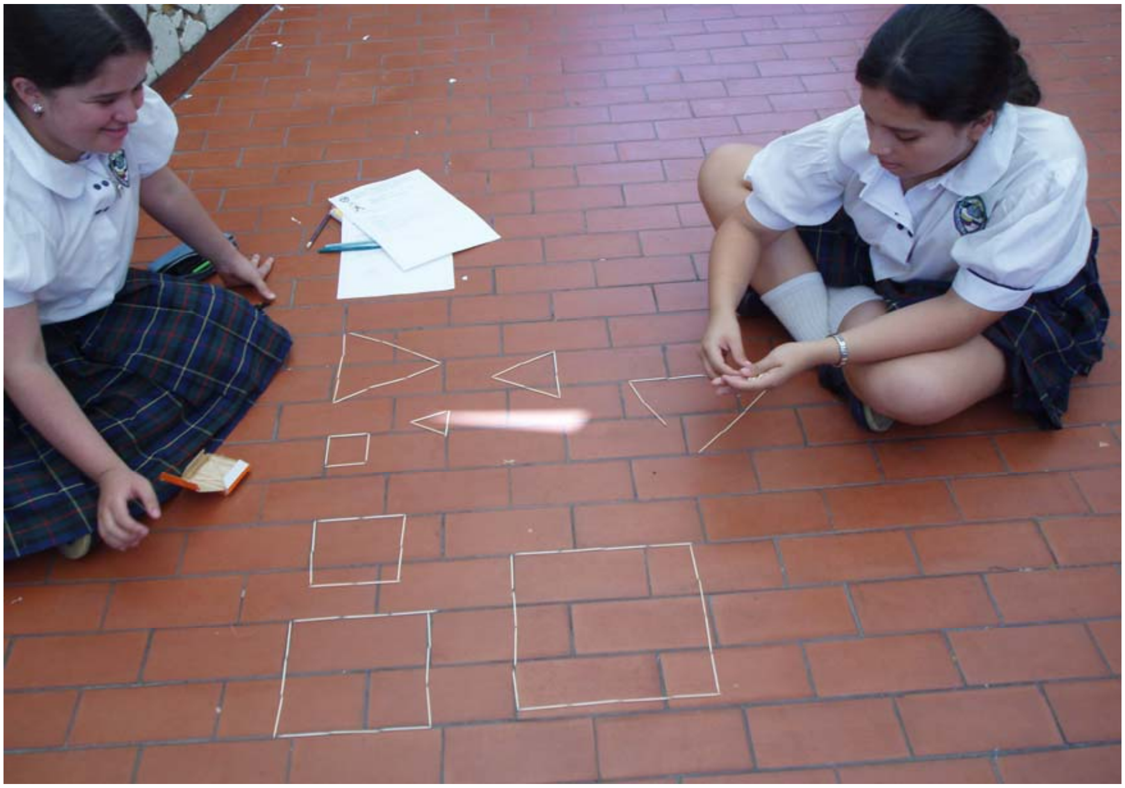
3. Si añades un solo palillo al largo del rectángulo de 2x5. ¿Cuántos palillos has de añadir al ancho para que también sea semejante?
Dibuja sobre el papel milimetrado las situaciones presentadas en estos dos ejercicios.

Descubrimientos:
¿Podrías haber resuelto el resultado sin hacer el gráfico?

La actividad número 9 siguió la línea de continuidad con respecto a la actividad número 8, en el sentido en que se continúo trabajando con los palillos y ahora el trabajo fundamental era crear nuevamente rectángulos semejantes y asociar este mismo con el modelo lineal que se estaba estudiando.

En esta guía se evidenció en los estudiantes la asociación que realizan con la suma como operación para encontrar proporcionalidad en el sentido en que, estos chicos afirmaban que si se le suma dos palillos al largo de un rectángulo necesariamente le debo sumar dos palillos al ancho del rectángulo y de esta forma obteníamos un nuevo rectángulo semejante al dado en primera instancia.

En la socialización de esta actividad, se aclaro, por medio de nuevas construcciones de rectángulos semejantes que se realizaron con los palillos. Ahora los estudiantes comprobaban por medios aritméticos como la regla de tres simple si las magnitudes de las dimensiones eran proporcionales. De esta forma se aclaró esta generalización errada que estaban empleando los estudiantes.



**(Fotografía, Actividad 9, Noviembre 3 de 2006)**

## Actividad 10

Cabe aclarar que esta actividad fue realizada por el investigador a manera de evaluación y este fenómeno físico no obedece a un modelo lineal, se realizó para verificar hasta que punto el estudiante había captado la relación entre proporcionalidad directa simple y modelo lineal de la forma f(x)=kx.

**INSTITUTO REAL DE BUCARAMANGA**

**2006 AÑO DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS**

**ENFRENTAR UN PROBLEMA ES... ENCONTRAR UN MUNDO DE SOLUCIONES (MEN)**

AREA: MATEMÁTICAS GUIA N° 10
GRADO: SÉPTIMO FECHA: OCTUBRE /06
NOMBRE________________________________
DOCENTE: LIC. JULIAN CARREÑO.

**OBJETIVO**

- Manipular objetos que realizan movimientos **uniformes.**

**MATERIAL**

Una esfera y un plano inclinado de 3 metros de longitud.

La situación es la siguiente. Se deja rodar la esfera por la superficie del plano inclinado, a partir de la parte superior del plano.
Los estudiantes tomaran los tiempos y distancias recorridas para intervalos de tiempo distintos.
Los datos los colocaran en la siguiente tabla.

| Tiempo en segundos | Distancia recorrida en cm |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

Posteriormente responderán algunas preguntas de análisis como.
*¿Qué puede decir con respecto, al desplazamiento de la esfera y los tiempos correspondientes?
*elabore una gráfica de distancia recorrida (d) en cm/seg y tiempo (t) en segundos.
*¿Qué gráfica obtuvo?
*¿Que relación establece entre las magnitudes, distancia recorrida por la esfera y el tiempo?
*halle la constante de proporcionalidad y explique por que
*que significa para esta situación esa constante de proporcionalidad.
*¿Qué unidades tiene el valor de la constante?
*¿Qué distancia habrá recorrido la esfera después de 30, 35, 40, 50, 100 segundos respectivamente?

Las respuestas dadas por los estudiantes dejaron apreciar al investigador que sí se había captado la relación de este modelo lineal con la proporcionalidad directa simple. En páginas más adelante se apreciará el análisis de esta actividad.

## CATEGORÍAS EMERGENTES

La información recopilada en el proceso de investigación fue sometida a una clasificación dentro de los parámetros del objetivo y pregunta del proyecto planteado. Después de un proceso de selección y análisis emergieron las categorías que presento a continuación.

### 1. ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

La multiplicación con números naturales es una operación matemática que se presenta en los primeros años de escolaridad.
Desde allí se comienza a vislumbrar el concepto o manejo de la estructura multiplicativa con la incorporación de las tablas de multiplicar, cuando los niños empiezan de cierta forma a introducir de una manera implícita la multiplicación como un proceso funcional, es decir que existen dos espacios de medida en el cual la variación de uno genera cambio en el otro, por medio de las tablas de multiplicar. Aquí comienza una de las primeras dificultades para el niño en su etapa escolar, en el sentido que las tablas de multiplicar se convierten en un "dolor de cabeza" para ellos, utilizando la estrategia de un aprendizaje memorístico más que significativo acerca de lo que realmente se está haciendo como operación funcional en el momento en que se están operando con estos números naturales. De esta forma, es la estructura multiplicativa la que me brinda esa capacidad de empezar a asignar las bases de la proporcionalidad, por que es a través de un razonamiento multiplicativo que puedo trabajar una proporcionalidad, en este caso, directa.

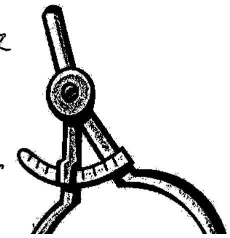
Un aspecto importante en la multiplicación es que como operación funcional, no involucra tres términos como agentes interventores de esta operación matemática, sino que son cuatro como lo manifiesta OBANDO, VANEGAS Y VÁSQUEZ, en el sentido en que la multiplicación es una es una relación cuaternaria, "contrario a como se presenta en el sistema educativo, la relación multiplicativa fundamental no es una relación ternaria, sino cuaternaria."(Obando, Vanegas & Vásquez, 2006, p.121).

Otras veces la multiplicación es presentada a aquellos niños como una suma sucesiva de sumandos iguales, mirada que no permite relacionar la multiplicación con el concepto de proporcionalidad, pues en este sentido le estamos dando una idea al estudiante, que de cierta forma, la proporcionalidad se mantiene en una operación de adición y no de multiplicación y esto no siempre se tiene en las diversas situaciones que relacionan proporcionalidad con multiplicación, "El modelo de la suma repetida de un sumando es importante para producir un modelo inicial de significación a la multiplicación, pero es insuficiente para dar cuenta de la complejidad subyacente a las estructuras multiplicativas" (Obando, et al.,2006, p.121). Es por este motivo que encontramos nuestros estudiantes de séptimo grado resolviendo problemas o situaciones de proporcionalidad a través de la suma y convencidos que si operan con la suma en ciertas situaciones esta proporcionalidad se va a seguir manteniendo, pero no recurren a la estructura multiplicativa que esconde de cierta forma o de manera muy directa la proporcionalidad, pues es en la estructura multiplicativa como tal, que encontramos esa base para razonar proporcionalmente en dichas situaciones.

En el trabajo de campo pude observar de manera reiterada el razonamiento por medio de la adición y no la multiplicación. En la guía número 3 los estudiantes tenían que encontrar dos rectángulos que fueran semejantes a los rectángulos C e I, es decir ampliar la familia de rectángulos, se encontraron respuestas y procedimientos tales como:

**EXPLICACIÓN:**

. yo la suma la misma cantidad a cada lado y meda de la familia pero siempre hay q' sumarle ~~la~~ la misma cantidad.



Descubrimiento.

- Descubri q' si se la suma a un rectangulo en cada lado lo misma medida ~~la~~ a q' dar de la misma familia

(JESÚS DAVID, Guía 3, Octubre 25 de 2006)

**"Yo le sume la misma cantidad, por ejemplo al largo y al ancho le sume la misma cantidad, pero siempre hay que sumarle lo mismo para que de osea de la misma familia, el mismo rectángulo pero con medidas diferentes"**

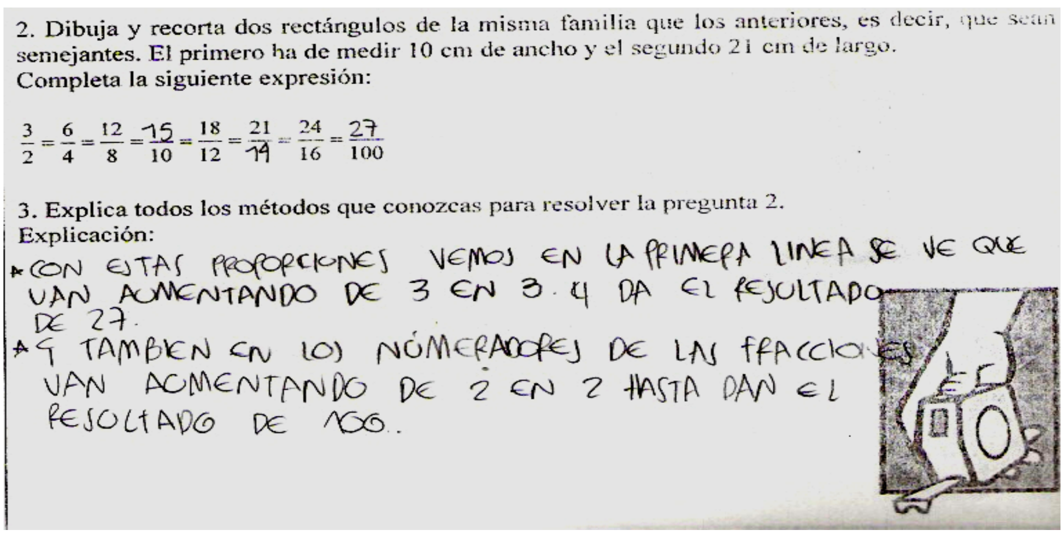
**(JESÚS DAVID, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

**"En las medidas, por decir si son 20 de largo por ahí le aumento otros dos o tres mas y si son 10 de ancho, le aumento otros dos o tres para que no se desarme.**
**Por decir mide 3 le sumo otros 3 cm y acá le sumo por decir otros dos que quedan 3 cm acá y 6 al largo y 3 de ancho"**

**(RUBY, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

En las respuestas de JESÚS DAVID y RUBY podemos ver claramente que ellos basan su razonamiento proporcional en una estructura aditiva y no lo hacen a través de una estructura multiplicativa, lo que empieza a marcar una dificultad en el sentido de entender el camino de la proporcionalidad directa simple.

En la guía número 5 el trabajo a realizar consistía básicamente en medir los rectángulos de la guía 4, ordenarlos de pequeño a grande y completar expresiones de proporcionalidad. En esta guía nuevamente podemos apreciar la falencia en cuanto a la estructura multiplicativa para encontrar expresiones de proporcionalidad.



2. Dibuja y recorta dos rectángulos de la misma familia que los anteriores, es decir, que sean semejantes. El primero ha de medir 10 cm de ancho y el segundo 21 cm de largo.
Completa la siguiente expresión:

$$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}=\frac{12}{8}=\frac{15}{10}=\frac{18}{12}=\frac{21}{14}=\frac{24}{16}=\frac{27}{100}$$

3. Explica todos los métodos que conozcas para resolver la pregunta 2.
Explicación:
*CON ESTAS PROPORCIONES VEMOS EN LA PRIMERA LINEA SE VE QUE VAN AOMENTANDO DE 3 EN 3. Y DA EL RESULTADO DE 27.
*Y TAMBIEN EN LOS NÚMERADORES DE LAS FRACCIONES VAN AOMENTANDO DE 2 EN 2 HASTA DAN EL RESOLTADO DE 100.

**(MARCELA, Guía 5, Octubre 27 de 2006)**

**“Haber acá en este caso yo cogí, cada número, cada fracción o cada proporción, uno ve, se da cuenta pues, van aumentando de 3 en 3, ese fue el criterio que yo utilicé que van aumentando de 3 en 3.”**

**(MARCELA, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{15}{10} = \frac{18}{12} = \frac{21}{14} = \frac{24}{16} = \frac{336}{100}$

3. Explica todos los métodos que conozcas para resolver la pregunta 2.
Explicación:

· el primer rectangulo le puse 15cm de largo
x q´ en la tabla iba de 3 en 3
· En el segundo 14cm anchó x q´
en la tabla iba de 2 en 2.
· medida 336 x 21x 16 = 336 y 14´x 24 = 336.

(JEUS DAVID, Guía 5, Noviembre 3 de 2006)

**Trabajo a realizar:**

1. construye un rectángulo de 2x5 palillos. Sin desmontarlo construye otro añadiendo un palillo al largo y otro al ancho.
El nuevo rectángulo, ¿es semejante al primero? ¿Por qué? Si por que se le sumaron
Dibuja esta situación en una hoja milimetrada. lo mismo al largo y ancho

2. Volviendo a partir del rectángulo de 2x5 palillos, añade un solo palillo al ancho.
¿Cuántos palillos has de añadir al largo para que el nuevo rectángulo sea semejante al primero?
(si lo crees conveniente rompe un palillo) Uno

3. Si añades un solo palillo al largo del rectángulo de 2x5. ¿Cuántos palillos has de añadir al ancho para que también sea semejante? Uno

(FELIPE, Guía 9, Noviembre 3 de 2006)

·El rectángulo AA. se repite constantemente
porque nos dicen que a 2x5 le sumemos ~~1~~
de ancho y para que sean semejantes se le suma
otro a lo ancho.

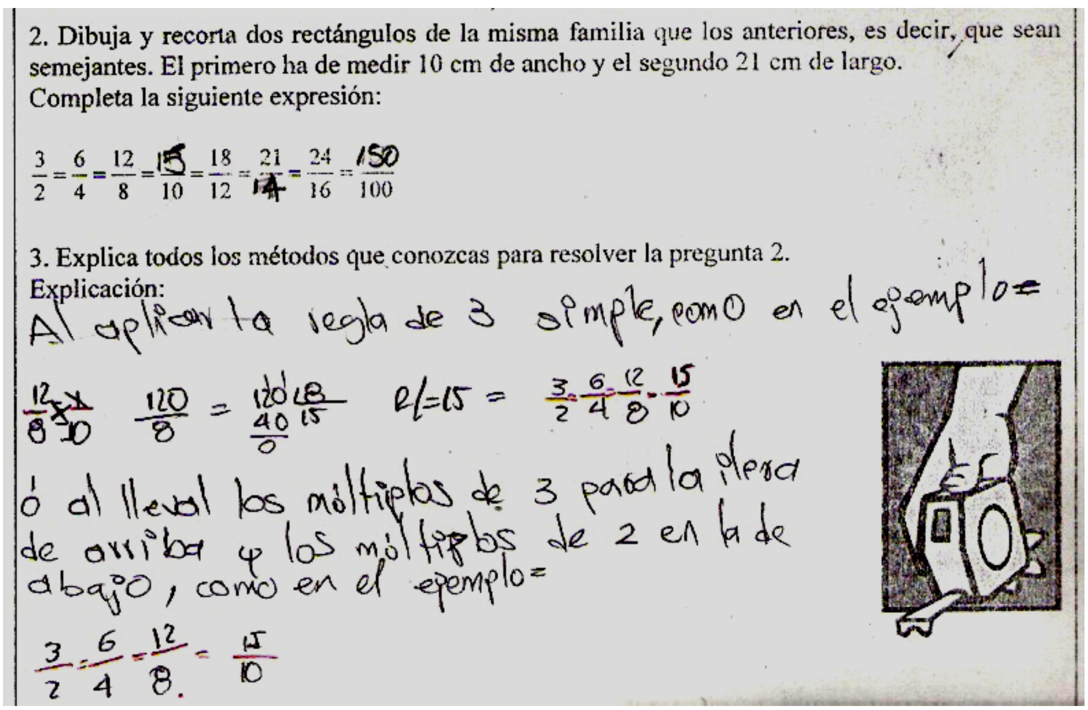
(SEBASTIAN, Guía 9, Noviembre 3 de 2006)

**“Osea es que el rectángulo AA, yo lo enumeré así, para darle un nombre, para no tenerlo simplemente rectángulo. Es que yo digo que nunca vamos avanzar por que nos dicen que le sumemos uno a lo ancho pero para sumarle uno a lo largo, entonces yo le sumaría uno a lo largo para que sean semejantes con el primero.”**

**(SEBASTIÁN, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

Este razonamiento que dan los estudiantes es netamente aditivo lo cual como expresé anteriormente no muestra una estructura multiplicativa consolidada.

Otras veces los estudiantes de una manera por así llamarla dejan ver algo de análisis en torno a lo que es la estructura multiplicativa cuando con expresiones como “el doble, la mitad” o “múltiplos de” enlazan un razonamiento donde de cierta forma se esta tratando la estructura multiplicativa.



2. Dibuja y recorta dos rectángulos de la misma familia que los anteriores, es decir, que sean semejantes. El primero ha de medir 10 cm de ancho y el segundo 21 cm de largo.

Completa la siguiente expresión:

$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{15}{10} = \frac{18}{12} = \frac{21}{14} = \frac{24}{16} = \frac{150}{100}$

3. Explica todos los métodos que conozcas para resolver la pregunta 2.

Explicación: Al aplicar la regla de 3 simple, como en el ejemplo=

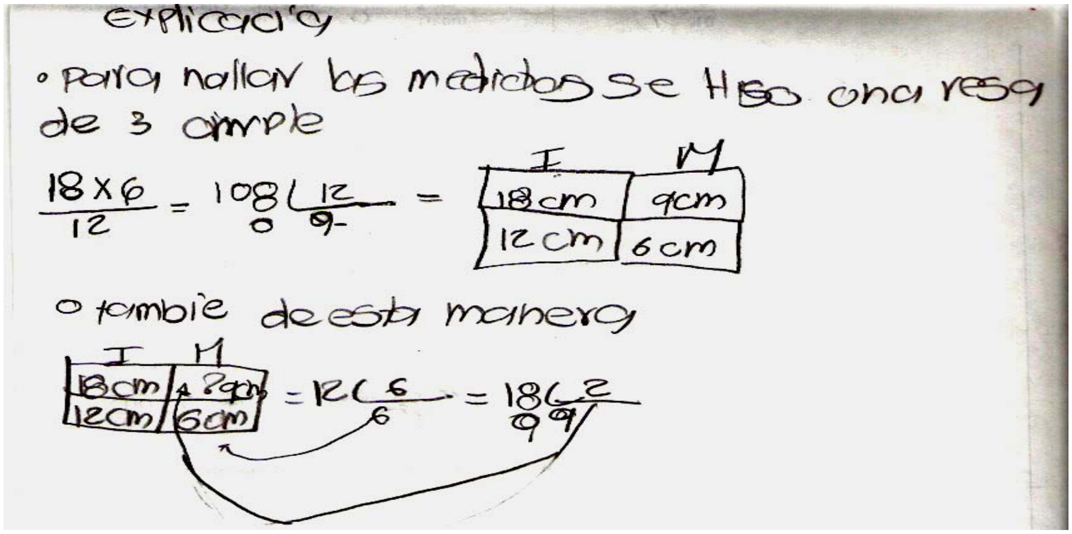
$\frac{12}{8} \frac{x}{10}$ $\frac{120}{8} =$ 120 | 8, 40 15, 0 $\quad$ el=15 = $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{15}{10}$

ó al llevar los múltiplos de 3 para la pieza de arriba y los múltiplos de 2 en la de abajo, como en el ejemplo=

$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{15}{10}$

**(SEBASTIÁN, Guía 5, Octubre 27 de 2006)**

Los siguientes dos testimonios son razonamientos y procedimientos en el desarrollo de la guía número 7, el trabajo a realizar era dibujar y recortar rectángulos semejantes de acuerdo a unas medidas dadas inicialmente, así como completar unas proporciones.




**(RUBY, Guía 7, Noviembre 1 de 2006)**

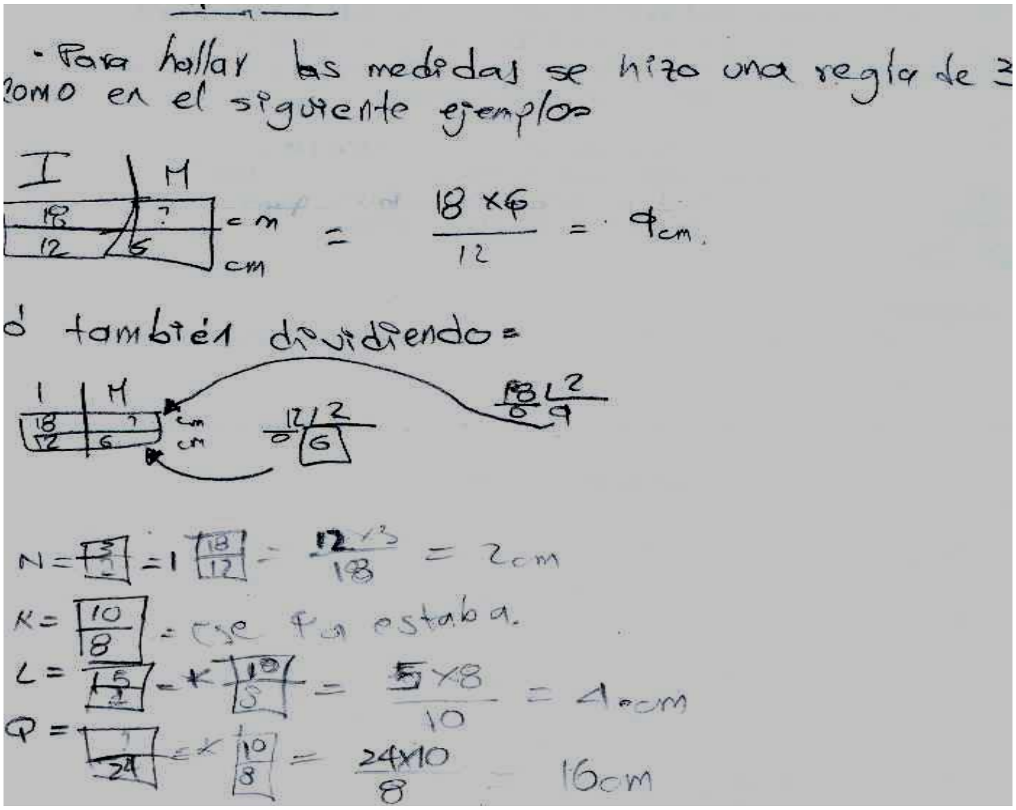
Aunque en este caso observo que esta estructura multiplicativa no está clara cuando en la entrevista RUBY afirma:

> **"Por que acá esto lo multiplicamos y lo dividimos en 2 y luego lo que nos daba así quedaba en la casilla 9, acá 18, 9+9 da 18 iba aumentando 9 cm cada figura.**
>
> **Acá da lo mismo 12 y 6+6=12, aumentaban de a 6 y así fue todo, en algunos, espero veo, casi en todos seguía aumentando las medidas que se necesitaba"**

**(RUBY, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

Es una estructura multiplicativa no muy clara en el sentido en que deja ver en su ampliación de la información en la entrevista y socialización que está realizando un razonamiento basado en la suma y no en términos de la multiplicación.

La solución entregada por Sebastián quizás deja ver en este momento un razonamiento algo mas cerca a lo que es la multiplicación o la estructura multiplicativa, tan ausente en los episodios vistos. Esto se realizó en la guía 7:



**(SEBASTIÁN, Guía 7, Noviembre 1 de 2006)**

Cuando razonamos en términos de algo como una regla de tres estamos de cierto modo utilizando una estructura multiplicativa y es lo que para esta situación empleó Sebastián como un criterio válido para encontrar proporcionalidad entre aquellas familias de proporciones.

He encontrado entonces en este primer acercamiento hacia las exposiciones y justificaciones hechas por los estudiantes que muchos de ellos siguen basando su razonamiento por medio de una estructura aditiva y no multiplicativa.

Es así como se empieza a notar la estrecha e intima relación que existe entre la multiplicación y la proporcionalidad directa simple, toda vez que la primera es un caso particular de la segunda y esto hace entonces que al separar alguno de estos dos procesos en razonamientos distintos no se realice un buen procedimiento en la solución de situaciones que involucran este tipo de análisis, es entonces donde los estudiantes no logran abstraer y determinar que la multiplicación, y no la suma, se convierte en esa forma de razonar acertadamente la proporcionalidad directa simple y que es el camino que los conducirá hacia la optimización de un razonamiento proporcional, en el sentido de pensar la proporcionalidad directa simple sin desligarla de la estructura multiplicativa, en este sentido Posada, et al., (2006), manifiestan:

> ...tanto la multiplicación como la proporcionalidad directa no son ejes conceptuales diferentes, sino que por el contrario, todas las situaciones típicas de multiplicación son en si mismas situaciones de proporcionalidad directa. Dicho de otra manera la multiplicación y proporcionalidad directa son parte de un mismo eje conceptual, y si se quiere, se podría decir que las situaciones mas simples de proporcionalidad directa son las que actualmente identificamos como situaciones típicas de multiplicación y/o división. (Posada, et al., 2006, p.78)

Es de esta forma que se puede observar como la multiplicación es punto de partida para generar una proporcionalidad directa simple, es la génesis o el inicio de la proporcionalidad directa simple y como principio, cobra especial relevancia en este estudio como una categoría especial, al otorgarle el valor o el sitial en la medida en que la multiplicación y la misma estructura multiplicativa están marcando un camino importante para el surgimiento de una proporcionalidad basada en la multiplicación y no en la suma como eje conceptual importante para nuestro estudio de la proporcionalidad y para nuestro caso la proporcionalidad directa simple.

Tal como lo plantea Obando et al.,(2006), la multiplicación implica la posibilidad de operar de manera simultánea con dos o más clases, a diferencia de los procesos aditivos, en donde se considera los efectos de una sola clase. En este sentido desde el punto de vista cognitivo de la multiplicación este es un recurso que permite un razonamiento lógico cuando se habla de un análisis numérico.

Entonces, ¿por qué estoy hablando de multiplicación? Indudablemente que encuentro una unión constante entre proporcionalidad directa simple y multiplicación. Es en este “matrimonio”, que empieza a tener un fundamento matemático cuando hablo de la unión entre multiplicación y proporcionalidad directa simple por medio de una correlación lineal, pero no es cualquier correlación lineal, es una en especial que caracteriza a la relación entre estos ejes conceptuales, es decir, multiplicación y proporcionalidad directa simple, la línea recta f(x)=kx, a la cual le daré profundidad un poco más adelante en otra de las categorías del análisis. Es esta correlación la que desde el punto de vista matemático me muestra esa relación que existe entre multiplicación y proporcionalidad y que nuevamente le entrega cierto grado de importancia a la multiplicación como ese comienzo o nacimiento de la proporcionalidad, es decir, no separar estos conceptos pues veo en cada ocasión la relación entre la multiplicación y la proporcionalidad directa simple, es en ese sentido que pienso, que se le debe dar una fuerza a la estructura multiplicativa desde los primeros años de escolaridad, pero en el contexto de estructura como tal, como se dijo anteriormente, que muestre de cierta forma el nacimiento de la proporcionalidad como un sistema dinámico y no como una estructura que aparece invariante y que no muestra la interacción entre elementos que intervienen en la misma. Todo lo contrario debe mirarse la importancia de la estructura multiplicativa en estos procesos proporcionales, en los primeros grados de escolaridad para generar un primer razonamiento algebraico básico que mas adelante en el caso de los alumnos de séptimo grado, comiencen a vislumbrar la correlación existente entre esa multiplicación y proporcionalidad directa, así lo plantea Obando, et al., (2006):

> El caso más simple de situación multiplicativa, como se indicó antes, se puede representar por una relación cuaternaria como la siguiente:
>
> | E1 | | E2 |
> |---|---|---|
> | 1 | ---> | f (1) |
> | n | ---> | f(n) |
>
> Así, si se pregunta por el valor de f(n), entonces el problema remite a la multiplicación, a lo cual se puede llegar por la vía del análisis de la correlación entre los espacios de medidas:
>
> | E1 | | E2 |
> |---|---|---|
> | 1 | ---> | f (1) |
> | 2 | ---> | 2 f(1) |

3 ---> 3 f(1)

.

.

.

n ---> n f(1)

> Así, la multiplicación por n es el resultado de analizar como la variación en uno de los espacios, determina los valores posibles en el otro espacio (en cierta forma, las tablas de multiplicar tienen su origen en una mirada de la multiplicación como un problema de variación conjunta de dos espacios de mediada). Este tipo de análisis es llamado análisis escalar, en tanto que se ponen en relación las variables en uno de los espacios de medida con respecto a las variaciones en el otro. O dicho de otra forma, cambios en un espacio de medida, generan cambios simétricos en el otro espacio de medida.(Obando, et al., 2006, pp.124,125)

Esta idea anterior nos muestra como se da el isomorfismo de medidas entre dos espacios que en este caso están relacionados por medio de la multiplicación, es esta la fuerza del fundamento que como docentes debemos darle a la multiplicación y la proporcionalidad directa simple, desde el punto de vista matemático, buscando que nosotros los docentes mostremos en los alumnos de séptimo grado, dos espacios de medidas que relacionados de una u otra forma, en nuestro caso de multiplicación, la alteración de un espacio de medida afecta o repercute en el otro. Tal y como lo afirma Obando, et al.,(2006), nunca separemos la estructura multiplicativa de la proporcionalidad directa simple, pues le estamos quitando la fuerza a la relación explícita y directa que encontramos entre multiplicación y proporcionalidad directa simple.

Las ideas expuestas anteriormente indican que dicha estructura multiplicativa y la misma proporcionalidad directa simple implican que el estudiante por medio de una clara manipulación y resolución de situaciones matemáticas determine y construya su propio concepto, teniendo en cuenta los presaberes que él posee, fruto de sus experiencias pasadas y relacione estos con los nuevos que está adquiriendo, en este caso particular la estructura multiplicativa y la proporcionalidad directa simple no son ajenos a este tipo de didáctica en la cual se fortalecen los conceptos basados en el constructo que hace el estudiante; este factor se notó como preponderante en mi trabajo de investigación cuando desde las actividades de diagnóstico como en las actividades del proyecto como tal, adquirió mas significado para el estudiante el constructo que él realizaba acerca de la multiplicación y su relación con la proporcionalidad directa simple; en muchos aspectos se notó la falencia que el estudiante muestra al momento de razonar proporcionalmente mediante estructuras aditivas y no multiplicativas, a pesar de que se construye el concepto como tal, no existe una idea muy clara de la importancia que tiene la estructura multiplicativa para razonar acertadamente la proporcionalidad directa simple, tal como lo plantea García y Serrano,(1999), al citar a Vergnaud:

> Este aporte es profundamente desarrollado por Vergnaud (1983, 1984) quien propone el constructo, campo conceptual, como un conjunto de problemas y situaciones para el tratamiento de conceptos, procedimientos y representaciones diferentes pero estrechamente relacionados. Del anterior constructo, Vergnaud realiza el análisis de la estructura multiplicativa como un campo conceptual el cual esta conformado por la presencia de la multiplicación y la división; funciones lineales, bilineales y n-lineales; análisis dimensional; aplicaciones lineales y combinaciones lineales de magnitudes.(García y Serrano, 1999, pp. 17,18)

Es la consolidación de la estructura multiplicativa que esta ampliamente soportada por la operación de la multiplicación que, como tal, genera la proporcionalidad directa simple. Quizás el punto a resaltar en esta teorización acerca de la relación entre estructura multiplicativa y construcción del concepto de una forma mas didáctica y menos conceptual, es la que cobra relevancia ya que la manipulación, observación y registro por parte del estudiante lo ubican en un aspecto altamente fundamental para que él mismo empiece a generar sus propias conclusiones, precisamente por medio de esa resolución de situaciones matemáticas alrededor de la proporcionalidad directa simple, que para él tiene mas sentido en el aprendizaje, pues esta forma permite romper con el esquema de enseñanza donde se prioriza al estudiante, que aprenda una serie de conceptos pero muchas veces de forma memorística, sin ningún tipo de análisis o de relación entre las ideas que en cada momento está asimilando el estudiante, en ese proceso de repetición sin sentido.

Por referirnos al tema de las tablas de multiplicar que como ya lo expresé estas se asumen como un proceso mecánico, y en ocasiones sin ningún significado para el estudiante, y como un algoritmo de repeticiones tediosas.

Quiero resaltar en el desarrollo de este trabajo la importancia del manejo de las estructuras multiplicativas que posibiliten la construcción de la proporcionalidad directa simple, evitando razonamientos errados por parte de los estudiantes quienes no relacionan la proporcionalidad con conceptos de multiplicación y división, siendo estos aprendidos desde los primeros años de escolaridad.

En las clases observé que los estudiantes resolvían las situaciones de proporcionalidad haciendo uso de la adición y la sustracción, sin buscar otras alternativas mas precisas.

Es por esto que al encontrar las dificultades expliqué a los estudiantes a través de contraejemplos y colocando los mismos rectángulos que los chicos realizaban con los palillos, analizábamos los vértices para ver si se formaba línea recta. En los que ellos hicieron inicialmente no se formaba línea recta, en los que realice utilizando el doble y el triple de un rectángulo, efectivamente se observó en el análisis de estos vértices que formaban línea recta, esto siguiendo la continuidad de asociar proporcionalidad directa simple con el modelo lineal de la forma $f(x)= kx$.

Después de realizar varios ejercicios en las últimas guías se aclaró este razonamiento errado de los estudiantes.

## 2. RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

Uno de los procesos generales planteados en los lineamientos curriculares del área de matemáticas es precisamente el razonamiento, el cual se define como "la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión." (MEN, 1998, p.77)

Si se extiende esta definición hacia el razonamiento en las matemáticas encontramos que este es un proceso vital en el momento en que tenemos un contacto directo con la matemática, no importa el nivel en el cual estemos haciendo un estudio de ella, el razonamiento en matemáticas me permitirá seguir una serie de expresiones por medio de experiencias, contactos, experimentaciones, ensayos, charlas, diálogos entre pares para encontrar de cierto modo puntos de análisis que permiten una mayor profundización o avance en el proceso en el cual se esta tratando, tal como lo plantea el MEN a través de los lineamientos curriculares:

> Razonar en matemáticas tiene que ver con:
>
> - Dar cuenta de cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
> - Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
> - Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
> - Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
> - Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.
>
> (MEN, 1998, pp. 77,78)

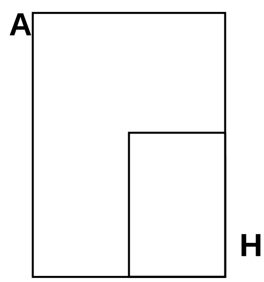
Para reunir y aplicar toda esa serie de aspectos citados anteriormente, requiere que nosotros los docentes propiciemos los espacios necesarios para que se genere ese ambiente en el cual el estudiante pueda hacer un razonamiento a la luz de los procesos que él está viviendo en el momento de la experiencia, y que el maestro como guía en esta expedición permita escuchar su alumno y compartir con él la forma, razón y justificación de cada uno de los razonamientos o procedimientos que el educando esta plasmando en una hoja, un papel, una guía o en la charla informal con sus compañeros de clase o maestro.

Estableciendo una relación entre el razonamiento matemático como un proceso, y extender su aplicación al razonamiento proporcional encontramos que este permite que los estudiantes formen en cierto sentido una conexión con las estructuras que han trabajado en su educación básica primaria y que en los primeros años de educación básica secundaria comienzan a formalizar, en este caso, el razonamiento proporcional le esta brindando una alternativa para que por medio de variadas situaciones el estudiante exprese sus análisis en torno a lo que él esta viviendo en su proceso educativo.

Tal como lo plantea Posada et al., (2006), citando a Piaget plantean el razonamiento proporcional como una covariación en el sentido en que hay variables que cambian en la medida en que otras lo hacen, "Desde una perspectiva Piagetiana, el razonamiento proporcional es indicador de las operaciones formales del pensamiento e implica el tratamiento consistente de relaciones de covariación entre variables" (Posada, et al., 2006, p.79). Es precisamente el razonamiento proporcional en sí, el que permite observar desde esta perspectiva, que la proporcionalidad sea vista como un modelo matemático dinámico y no como un modelo estático, simplemente visto como "la igualdad entre dos proporciones", todo lo contrario, esta mirada nos muestra que la proporcionalidad en si misma es un modelo versátil, que enlaza ciertas variables que están en permanente cambio, pero que precisamente y como lo anotábamos anteriormente la variación en una permite o genera necesariamente un cambio en la otra, en este proceso dinamizador de la proporcionalidad encontramos la razón de ser de este razonamiento proporcional.

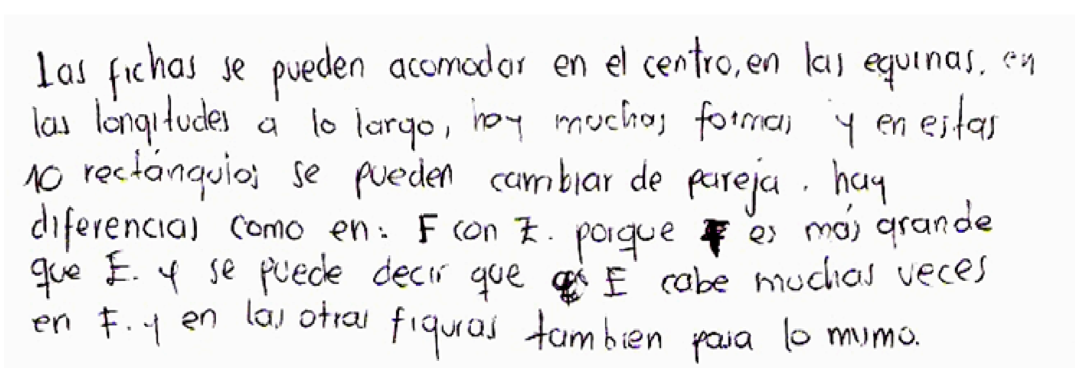
Existen dos operaciones matemáticas importantes en las cuales se mueve una parte del razonamiento proporcional y son la multiplicación y la división estas soportan la base en la resolución de problemas de proporcionalidad directa simple, que es nuestro caso de estudio.
En la multiplicación y la división se encuentran precisamente varios razonamientos que son usados por los estudiantes en el momento de razonar proporcionalmente. Veamos algunos de ellos.

> **"En el caso de A con H, porque H a lo ancho ocupa la mitad de A, osea dos aches caben a lo ancho en A, vea** (el estudiante trabaja con los rectángulos así)




> **coge mas o menos por acá, acá si ve"**

**(FELIPE, Diálogo, Octubre 24 de 2006)**


Las fichas se pueden acomodar en el centro, en las equinas. en las longitudes a lo largo, hay muchas formas y en estas 10 rectángulos se pueden cambiar de pareja. hay diferencias como en: F con Z. porque F es mas grande que E. y se puede decir que E cabe muchas veces en F. y en las otras figuras tambien para lo mismo.

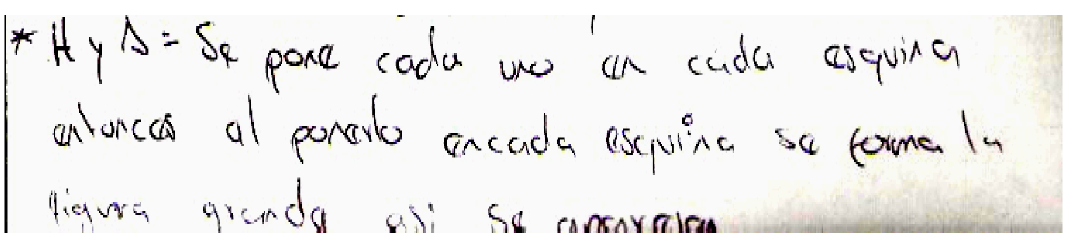
**(MARCELA, Guía 1, Octubre 23 de 2006)**

**“La medida de E es como un cuadrado de F, yo hice esta forma no, estaba el cuadrado E, entonces prácticamente pues dividí ese cuadro F en cuatro partes, la parte, osea una parte de ellas es la medida de E, osea todas las partes son iguales, pero es la medida de E.”** Y mas adelante expresa: **“Bueno, en A y H como podemos observar en la figura hay 20 cm y en H 10 cm, osea que de 20 cm H es la mitad de A, y en el ancho lo mismo, la mitad de 16 es 8 cm, osea, la mitad del ancho de A, es la mitad del ancho de H, osea, la mitad de 16 es 8.”**

**(MARCELA, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

las expresiones de FELIPE y MARCELA dejan observar que parte de su razonamiento proporcional lo realizan con argumentos como “el doble”, “la mitad”, los cuales permiten ver que están pensando en dos operaciones como multiplicación y división, como una herramienta para encontrar la semejanza entre los rectángulos.

Otros estudiantes como el caso de DAVID, utilizan un método por así llamarlo geométrico, donde se hace especial énfasis en la forma de los rectángulos pero sin dejar de lado de una manera implícita la multiplicación y división para encontrar las parejas de rectángulos semejantes.


* H y A = Se pone cada uno en cada esquina
entonces al ponerlo encada esquina se forma la
figura granda asi se

**(DAVID, Guía 1, Octubre 23 de 2006)**

ante la pregunta realizada a DAVID, acerca de el por qué había aparejado el rectángulo A con el rectángulo H él afirmó:

**“Por que era un rectángulo que osea uno ponía, en un lado ponía la figura y en el otro entonces daba, no era una figura, osea daba en la**

**mitad precisa y entonces al ponerlo cuatro veces entonces dio la figura grande."** Hablaba DAVID de los rectángulos A y H, mas adelante continúa diciendo: **"Por que por ejemplo, en el H y el A se puede aparejar poniendo el rectángulo mas pequeño en el grande, pero hay otros que no, por que no apareja, osea el rectángulo la medida no da, osea por la forma"**

**(DAVID, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

SEBASTIÁN, recurre al doble y la mitad siguiendo la constante de los demás estudiantes y marcando especial énfasis en las medidas de los rectángulos.

**"Bueno entre A y el H, entonces es el doble en las dos medidas, entonces notablemente el A es el doble de la H, pero por ser el doble de los dos extremos va a ser muy semejante el A al H."**

**(SEBASTIÁN, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

Es pertinente observar que para RUBY, la medida juega cierto grado de seguridad que al ser combinada con una expresión como "el doble" le esta entregando una fortaleza de argumentación basada en la multiplicación.

**"Si por que mire la mitad de 20 es 10 y uno de esos media 10 y la mitad de 16 es 8."** Y mas adelante continua diciendo: **"que ellos se llevan nada mas, por decir en el largo de las dos nada mas se llevan de a 10 puntos, de a 10 centímetros y en el largo, en el ancho de las dos figuras que apareje nada mas se llevan de a 8."**

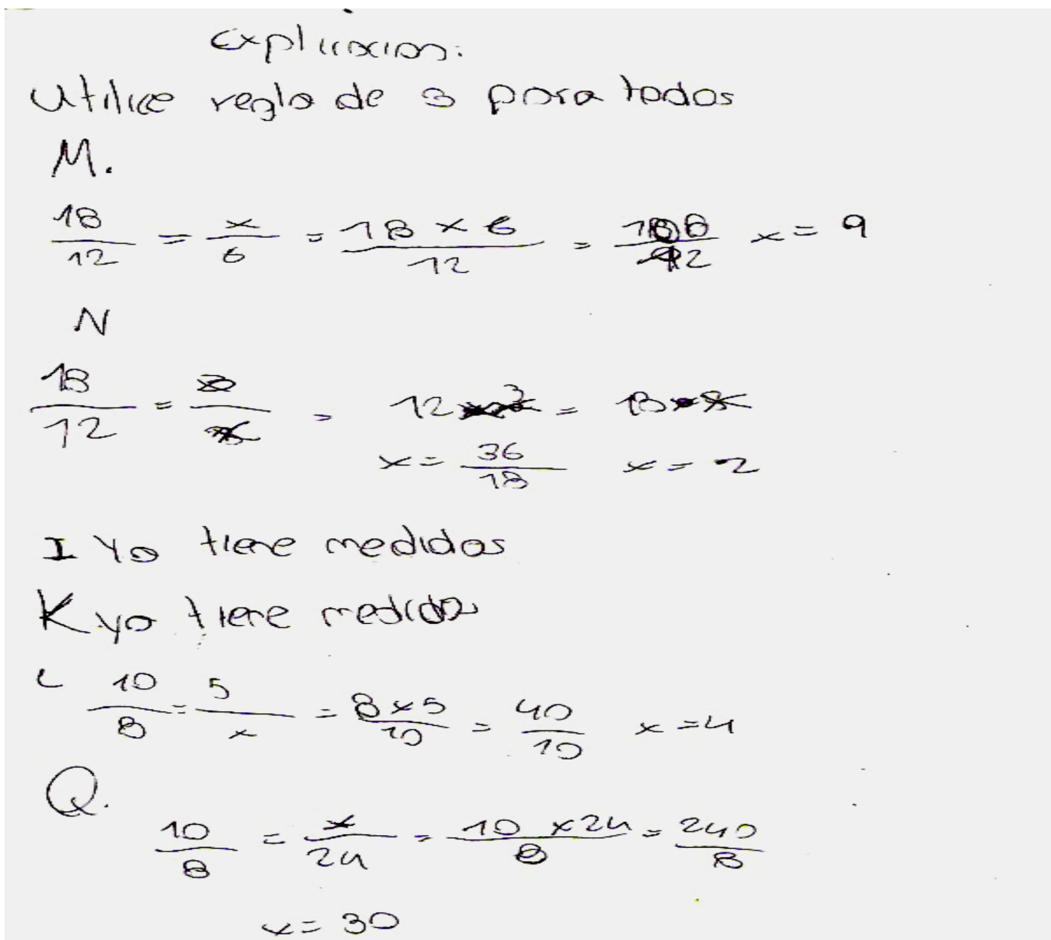
**(RUBY, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

Se comienza entonces a ver que el razonamiento proporcional es totalmente dinámico, en ese sentido pienso que la falla de nosotros como maestros, según mi criterio personal, ha sido mirar la proporcionalidad directa simple como un proceso estático y este muestra todo lo contrario; es un proceso dinámico, de variables que interactúan y que tienen su soporte en la estructura multiplicativa. Ver la proporcionalidad desde esa óptica es entonces cuando permitimos generar un espacio en el que nuestros estudiantes expresen ampliamente la relación que encuentran entre esas variables que no son de una sola clase para muchos casos; con respecto a este aspecto, Posada, et al. (2006), conceptúan, " A manera de síntesis se puede entonces plantear que en el análisis de un fenómeno o situación que implique razonamiento proporcional, se deben considerar los efectos de la ocurrencia simultanea de dos o más características, a diferencia de los procesos aditivos, en los que se consideran los efectos de una sola clase a la vez" (Posada, et al., 2006, p.81)

Entonces en líneas generales se ve que el razonamiento proporcional permite estudiar y analizar la proporcionalidad directa simple como un proceso dinámico o de covariación, en este sentido entonces se permite llegar como al final de un proceso en el cual se esta pensando de forma aritmética, esto teniendo en cuenta que el estudiante estudia la aritmética desde la primaria hasta grado séptimo, pero aquí por medio del razonamiento proporcional se permite que el estudiante adquiera cierta madurez para comenzar a pensar un poco en términos de buscar el paso de la aritmética hacia el álgebra, ya como un análisis funcional y no visto tanto como un proceso aritmético. En el razonamiento proporcional se brindan elementos de análisis para madurar en el sentido de ir un poco más allá, hasta llegar a mirar la proporcionalidad como un espacio mas funcional, y ya no como un simple proceso de igualdad entre proporciones, pues esta mirada se queda muy corta para lo que se puede estudiar a través de la proporcionalidad, para nuestro caso la proporcionalidad directa simple.

Se requiere entonces dar otra mirada a un tipo de razonamiento proporcional dados por los estudiantes cuando se necesitan encontrar proporciones y proporcionalidad, estoy hablando entonces de la "regla de tres simple", la cual es usada por muchos estudiantes cuando enfrentan este tipo de situaciones. Un modelo muy válido en el sentido en que el estudiante vea este procedimiento como un recurso dinámico y no como una simple operación mecánica que me arroja un resultado que estoy buscando, pero sin establecer ninguna relación entre esas variables que están interactuando, simplemente lo hace porque es mas fácil conseguir ese número que está buscando y en ese sentido los estudiantes de mí análisis de investigación se han quedado muy cortos para dejar ver la regla de tres simple como un proceso dinámico. Veamos algunas opiniones de nuestros estudiantes sobre el particular:

> **"Pues, que son semejantes, entonces acá hago una regla de tres, este por este y lo divido en este y ya."**
>
> **(FELIPE, Diálogo, Octubre 27 de 2006)**


Explicacion:
Utilice regla de 3 para todos
M.
$\frac{18}{12} = \frac{x}{6} = \frac{18 \times 6}{12} = \frac{108}{12} \quad x = 9$
N
$\frac{18}{12} = \frac{3}{x} = 12 \times 3 = 18 \times x$
$x = \frac{36}{18} \quad x = 2$
I Ya tiene medidas
K ya tiene medidas
L $\frac{10}{8} = \frac{5}{x} = \frac{8 \times 5}{10} = \frac{40}{10} \quad x = 4$
Q.
$\frac{10}{8} = \frac{x}{24} = \frac{10 \times 24}{8} = \frac{240}{8}$
$x = 30$

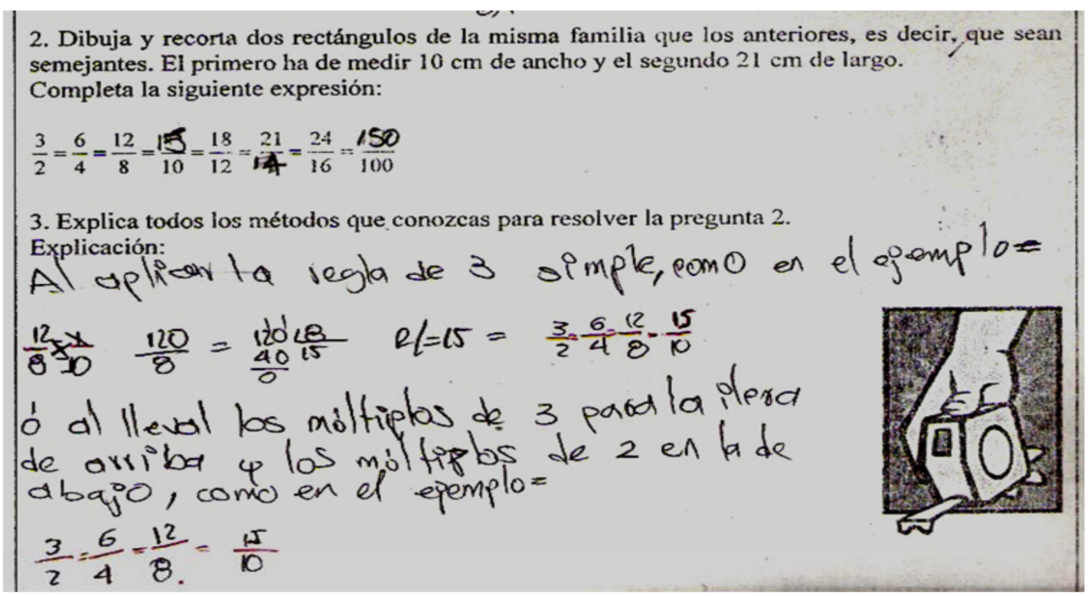
**(FELIPE, Guía 7, Noviembre 1 de 2006)**

**“Pues, por que ahí solo nos faltaba por encontrar un valor, y era como lo mas fácil para utilizarlo, lo mas sencillo, lo mas sencillo que me pareció para utilizarlo y me daba bien el resultado.”**

**(FELIPE, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

los argumentos presentados por FELIPE, me permiten ratificarme en manifestar que él está utilizando este procedimiento solo de una forma algorítmica más no como un proceso de análisis en el cual permita observar que los términos involucrados en la variación son de relación cuaternaria y no ternaria, simplemente aparecen para él solo tres términos, sin tener en cuenta la magnitud por la cual se está preguntando y que también hace parte de esa relación.

SEBASTIÁN en cambio entrega argumentaciones en las cuales permite apreciar que la regla de tres simple directa, es una herramienta que garantiza de cierto modo la proporcionalidad entre los rectángulos y en ese sentido usa dicha regla para encontrar las dimensiones de los rectángulos semejantes.



2. Dibuja y recorta dos rectángulos de la misma familia que los anteriores, es decir, que sean semejantes. El primero ha de medir 10 cm de ancho y el segundo 21 cm de largo.
Completa la siguiente expresión:

$$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}=\frac{12}{8}=\frac{15}{10}=\frac{18}{12}=\frac{21}{14}=\frac{24}{16}=\frac{150}{100}$$

3. Explica todos los métodos que conozcas para resolver la pregunta 2.
Explicación:
Al aplicar la regla de 3 simple, como en el ejemplo =

$\frac{12}{8}\times\frac{x}{10}$ $\frac{120}{8}$ = 120 ÷ 8 = 15, 40, 0; el = 15 = $\frac{3}{2}=\frac{6}{4}=\frac{12}{8}=\frac{15}{10}$

ó al llevar los múltiplos de 3 para la fila de arriba y los múltiplos de 2 en la de abajo, como en el ejemplo =

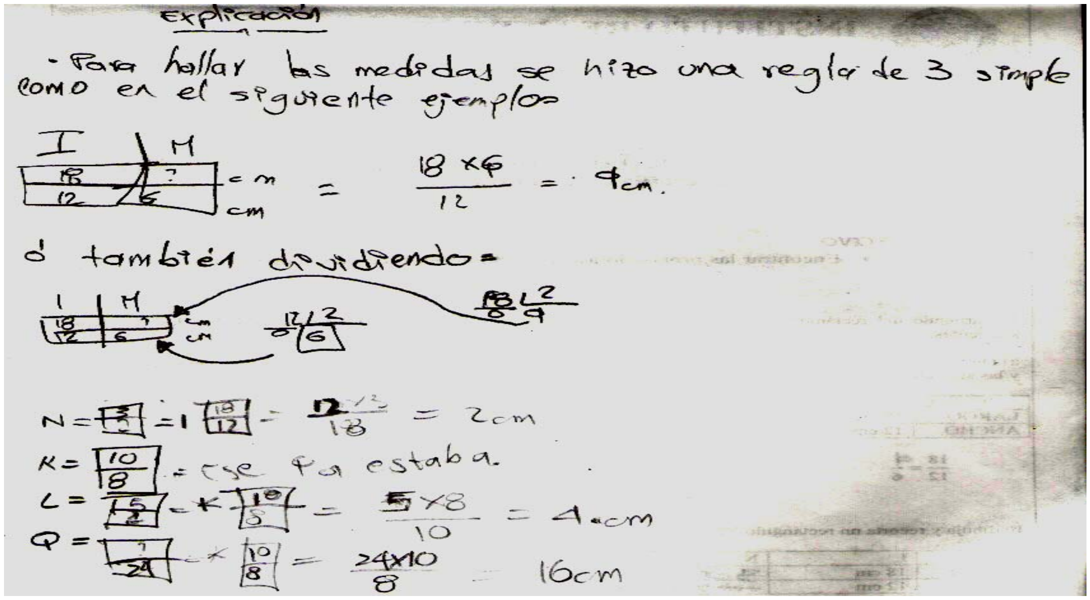
$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}=\frac{12}{8}=\frac{15}{10}$

**(SEBASTIÁN, Guía 5, Octubre 27 de 2006)**

**“Por que me di cuenta de que 12x10 da 120 dividido en 8 da 15, entonces intente hacerlo con los demás, me di cuenta que salieron**

**proporcionales, entonces seguí utilizando la regla de tres para los demás ejercicios de ahí en adelante.”**

**(SEBASTIÁN,  Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**



Explicación

· Para hallar las medidas se hizo una regla de 3 simple como en el siguiente ejemplo=

| I | M | |
|---|---|---|
| 18 | ? | = m |
| 12 | 6 | cm |

$= \frac{18 \times 6}{12} = 9cm.$

ó también dividiendo=

| I | M | |
|---|---|---|
| 18 | ? | cm |
| 12 | 6 | cm |

12/2 = 6

18/2 = 9

N = 3 = 1 18/12 = 12 / 18 = 2cm

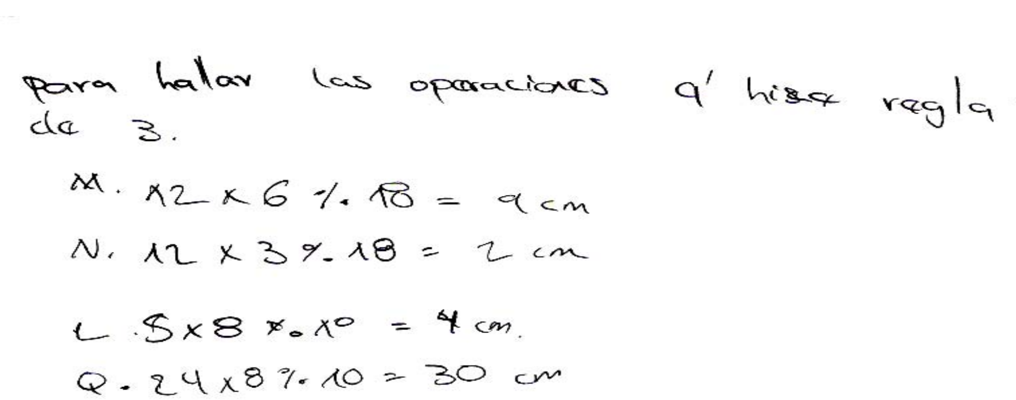
K = 10/8 = ese ya estaba.

L = 5 = K 10/8 = 5×8/10 = 4 cm

Q = ? = K 10/8 = 24×10/8 16cm

**(SEBASTIÁN, Guía 7, Noviembre 1 de 2006)**

El argumento de DAVID es muy claro para determinar en él un proceso puramente mecánico y repetitivo, que no soporta ni da espacio a lugar para el análisis de lo que es una regla de tres simple directa.



para halar las operaciones q' hise regla de 3.

M. 12 x 6 %. 18 = 9 cm

N. 12 x 3 %. 18 = 2 cm

L. 5 x 8 %. 10 = 4 cm.

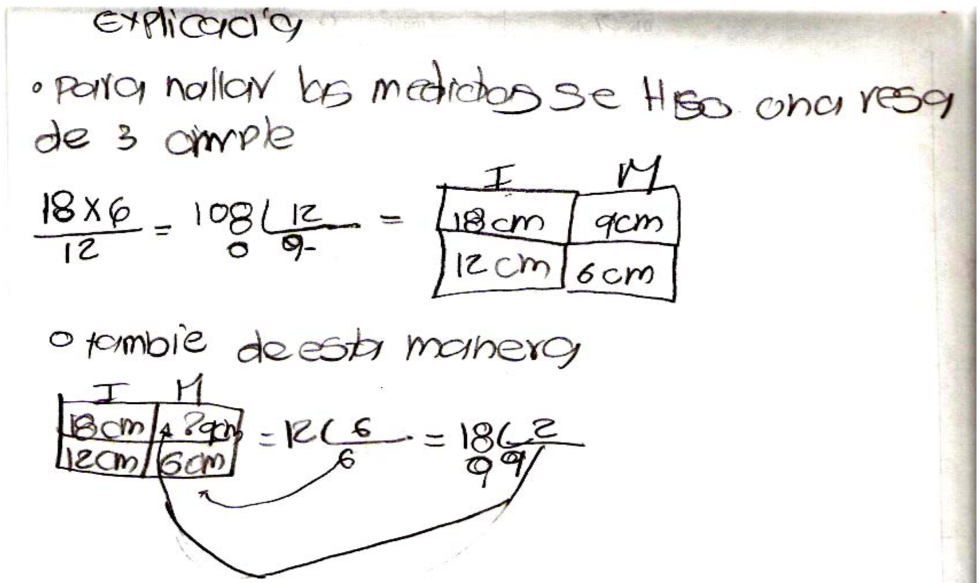
Q. 24 x 8 %. 10 = 30 cm

**(DAVID, Guía 7, Noviembre 1 de 2006)**

**“Utilice Regla de tres por que, osea, me pareció que así daba y era más fácil. Encontraba el resultado mas rápido.”**

**(DAVID, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

RUBY, presenta la misma línea de procedimiento que sus compañeros anteriores, su respuesta no soporta ningún análisis al respecto de la aplicación de la regla de tres simple, para el caso en particular.



**(RUBY, Guía 7, Noviembre 1 de 2006)**

Esta simple estructura no permite que se desarrolle un razonamiento proporcional, sino por el contrario genera un proceso de mecanización de ciertos pasos en los cuales estamos entrando en un asunto reiterativo y netamente algorítmico, entendamos que en este sentido no estamos dando a la proporcionalidad directa simple un proceso dinámico, detrás de la regla de tres simple directa existen otros elementos importantes que el estudiante debe observar, pero una vez que adquiere una mayor madurez en cuanto a su razonar proporcionalmente, es en ese momento en donde se debe introducir esta regla de tres simple, como un proceso de covariación, de mirar hechos en los cuales una variable que es alterada o modificada esta afectando de manera directa la otra, en este mismo sentido Fiol y Fortuny, (1990), expresan:

> ... o sea no sólo aplicar el algoritmo en expresiones numéricas, ecuaciones o problemas tipo, sino también saber identificar los problemas de proporcionalidad, ponderar cuando es adecuado o no utilizar el algoritmo, comprender el tipo de relación que se establece entre

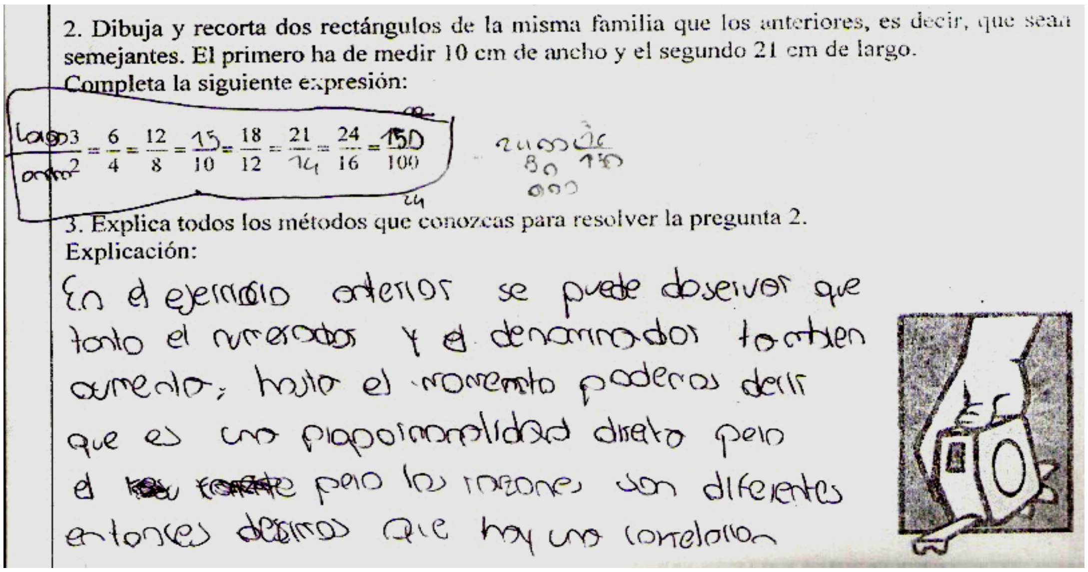
> las variables, por ejemplo si una crece aditivamente, que le debe pasar a la otra para que la razón entre las dos no varíe, etc., en el fondo comprender qué se está haciendo al aplicar el algoritmo.(Fiol y Fortuny, 1990, p. 112)

Considero que si los maestros de matemáticas pretendemos lograr una cierta madurez en el manejo de estructuras algebraicas no podemos quedarnos en ejercicios de regla de tres simple, que limita a la proporcionalidad directa simple a un tratamiento aritmético, es uno de los propósitos de este trabajo, que al razonar proporcionalmente el estudiante encuentre la relación que hay entre la proporcionalidad directa simple y la función lineal de la forma f(x)=kx. Esto se logra en la medida en que estemos interactuando por medio de un proceso netamente dinámico y no estático para entrar ya en un modelo funcional y no quedarnos simplemente en lo aritmético, en este sentido Posada et al., (2006), manifiestan "el estudio de los problemas de proporcionalidad simple directa a partir de la función lineal que la modela, y de sus propiedades, es generalmente pasado por alto en la escuela y se simplifica su tratamiento a través del uso de la regla de tres simple directa" (Posada, et al., 2006, p. 109)

En mi experiencia al haber detectado la falencia en la argumentación de los estudiantes ante la utilización de regla de tres simple, tuve la necesidad de socializar e insistir en que en primera instancia en la regla de tres están interviniendo cuatro elementos y no tres. En segundo lugar que dicha regla presenta dos espacios de medida que son transformados por medio de operaciones como la multiplicación y división de números naturales y que de esta forma los cambios que se generen en un espacio de medida van a repercutir en el otro espacio de medida, es decir, hice especial énfasis en la covariación que presentan las magnitudes en la aplicación de una regla de tres simple.

Se podría decir que el hecho de recurrir a la regla de tres no es un procedimiento errado, pero si nos limita a un modelo estático, es quizá en eso en lo que quiero insistir en mirar la proporcionalidad directa simple como un modelo dinámico de covariación de variables que interactúan entre sí, y que la variación entre una de ellas afecta la otra.

Otra mirada del razonamiento proporcional que se puede encontrar en los análisis hechos por los estudiantes, es en el sentido que aparecen los conceptos de correlación directa en donde el estudiante expresa una serie de justificaciones para hablar de correlación, que no son muy claras.



2. Dibuja y recorta dos rectángulos de la misma familia que los anteriores, es decir, que sean semejantes. El primero ha de medir 10 cm de ancho y el segundo 21 cm de largo.
Completa la siguiente expresión:

largo / ancho $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{15}{10} = \frac{18}{12} = \frac{21}{14} = \frac{24}{16} = \frac{150}{100}$

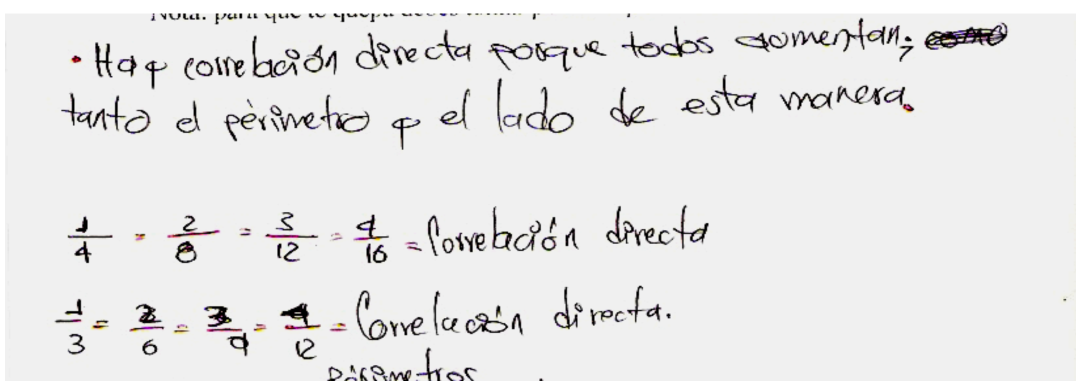
3. Explica todos los métodos que conozcas para resolver la pregunta 2.
Explicación:

En el ejercicio anterior se puede observar que tanto el numerador y el denominador también aumentan; hasta el momento podemos decir que es una proporcionalidad directa pero el ~~[illegible]~~ pero las razones son diferentes entonces decimos que hay una correlación

**(FELIPE, Guía 5, Octubre 27 de 2006)**

**“Por que las divisiones entre el largo y el ancho de cada rectángulo son diferentes, dan resultado diferente entre C e I, entonces yo diría que mas sería, correlación directa.”**

**(FELIPE, Diálogo, Octubre 27 de 2006)**



• Hay correlación directa porque todos aumentan; tanto el perímetro y el lado de esta manera.

$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16}$ = Correlación directa

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$ = Correlación directa.

**(SEBASTIÁN, Guía 8, Noviembre 2 de 2006)**

> **“Que todos van aumentando, osea en la de los triángulos todos aumentaban, los palillos osea la medida iba aumentando.”** Y más adelante afirma: **“La de los palillos, osea que si teníamos 5 palillos era, 5x2, eran 5 y 2 iban a seguir aumentando por que nos pedían que aumentáramos, que saber cuanto teníamos que dar para la otra medida para saber si iban a seguir siendo familiares. Entonces ahí me di cuenta que iban a seguir siendo correlación directa por que iban aumentando los dos.”**
>
> **(SEBASTIÁN, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

Los anteriores testimonios muestran una idea intuitiva por parte de los estudiantes FELIPE y SEBASTIÁN quienes encuentran una relación entre la variación de las magnitudes de largo y ancho y digo intuitiva por que la idea de correlación directa no es tan clara o formal, cabe aclarar que este concepto de correlación directa ya ha sido trabajado con los estudiantes en grado sexto.

De cierto modo los estudiantes dejan ver que para que exista proporcionalidad directa debe haber otra serie de condiciones o circunstancias que permitan ver de forma clara que es un proceso de proporcionalidad directa simple, tal como lo plantean Posada et al., (2006):

> Que la correlación sea positiva se expresa en términos de que variaciones en una de las variables, genera variaciones en el mismo sentido en la otra variable. Pero este único criterio no es suficiente para caracterizar cuando una situación es de proporcionalidad directa, y esta es tal vez una de las principales fuentes de dificultad para el tratamiento de este tipo de situaciones en la escuela: la mayoría de los alumnos aplican la regla de tres a toda situación que implique covariación entre variables, aun incluso en los casos en los que esta nos e puede aplicar. (Posada, et al., 2006, p.106)

Se vuelve a determinar en cierto sentido que la proporcionalidad directa simple no se puede dejar simplemente como una regla de tres, y que el hecho de existir una correlación directa esto no implica que se tenga proporcionalidad directa simple, pues se necesitan de otros factores que delimiten este concepto desde los parámetros que se han esbozado hasta el momento y que seguiremos mostrando en el camino de encontrar esa relación existente de manera directa entre proporcionalidad directa simple y modelo lineal, como el proceso propuesto de pasar de cierto modo de un pensamiento aritmético a un pensamiento ya más de tipo algebraico.

Inhelder y Piaget (1955) quienes son citados por Fiol y Fortuny, (1990), manifiestan, “desde el punto de vista psicológico, comprender la proporción empieza siempre por el descubrimiento de una compensación, pero en cambio parece que comprender una compensación multiplicativa no tiene por qué pasar por la comprensión inicial de la proporción” (Fiol y Fortuny, 1990, p.109). Esta idea de compensación que encierra la proporción tal como lo plantean los anteriores autores es muy válida a la hora de razonar proporcionalmente, exige al estudiante a encontrar un cierto equilibrio, una cierta justicia. Por momentos cuando hablamos de compensación en el sentido de la proporción y para mirarlo como algo muy gráfico se podría traer a colación algo así como una balanza que esta permitiendo cierto equilibrio, cierta uniformidad que nos esta dando la proporcionalidad, que dicha compensación se mantenga para poder lograr una estructura proporcional que brinde características de uniformidad a lo largo de toda su distribución. Hacia allá quizá es uno de los aspectos que le debemos brindar a los estudiantes como otro punto de razonamiento proporcional importante, ya que para ellos se escapan muchos aspectos que se obvian y que son fundamentales para encontrar el poder que guarda la proporcionalidad. Ahora esta compensación para el caso de la proporcionalidad directa simple pasa por ser una compensación multiplicativa que se expande bajo la operación matemática de la multiplicación, esta a su vez se encarga de una cierta magnitud dada, encontrando una multiplicación que genera la familia, la cual a su vez permite crear la proporcionalidad entre magnitudes.

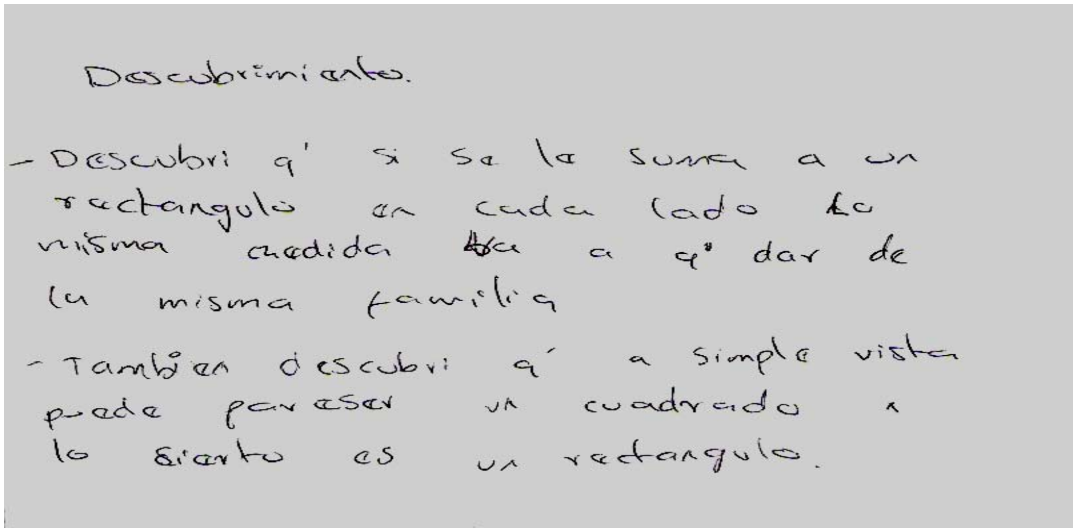
Ahora si vamos a dar una mirada de razonamiento proporcional en el sentido de, cómo el estudiante debe comprender la proporcionalidad, al respecto García y Serrano, (1999) manifiestan, “ El grado de comprensión de la proporcionalidad supone establecer en que medida el estudiante ha integrado las representaciones, les ha dado sentido y en que grado ha conectado las representaciones” (García y Serrano, 1999, p.30), esto de hecho plantea que para razonar proporcionalmente el estudiante primero realiza una construcción mental de lo que él esta enfrentando en el momento, basado en dicha construcción mental genera una conexión de conceptos que puede ligar a veces de una forma correcta, otras tantas incorrectas, para la resolución de una situación de tipo proporcional. Las representaciones pasan pues a jugar un factor determinante en la comprensión de la proporcionalidad, sean cual sean estas representaciones, el estudiante de hecho las utiliza como un recurso que le permite un razonamiento proporcional.

Se empieza entonces a marcar un recorrido de razonamiento proporcional en el cual el estudiante basa su razonamiento en lo que es multiplicación y construcción progresiva, en la comparación que se realiza de cada una de las razones que se están estudiando y que se utilizan como base para determinar la familia de proporciones que surgen de esa primera razón. Ahora que he llegado a hablar de razones, que es un término que toca de cierta manera la construcción de la proporcionalidad, tenemos que retomar las expresiones de Tourniaire y Pulos, (1985), los cuales manifiestan:

> Independientemente del método utilizado en el cálculo de proporciones, se pueden comparar dos clases de razones. Si se comparan razones de cantidades de la misma naturaleza se diría que se utilizan razones extensivas, o un método escalar. Si las cantidades son de diferente naturaleza, las razones son intensivas y el método es funcional... Parece que la elección de una estrategia escalar o funcional está influenciada por el campo semántico del problema (Karplus et al., 1983). Algunos contextos inducen estrategias escalares, mientras que otros sugieren relaciones funcionales. (Tourniaire y Pulos, 1985, p.5)

Se marcan entonces dos procedimientos que involucran las razones extensivas que son de la misma clase y requieren un razonamiento proporcional no muy elaborado por parte del estudiante, es decir, este tipo de razones se estudian básicamente en la educación primaria, cuando el estudiante empieza a ganar cierta familiaridad con las proporciones, pues esta habla de razones de la misma clase lo cual no entrega mayor dificultad para su análisis; la dificultad se empieza a notar en el razonamiento que plantea el estudiante cuando se retoman razones llamadas intensivas pues estamos realizando una comparación de dos cosas o elementos de diferente naturaleza y que también obedecen a un razonamiento proporcional, entonces acá el análisis ya no es básico, es decir escalar, sino que el análisis ya pasa a ser de tipo funcional y se encuentra que el estudiante ya debe tener un dominio y madurez mayor con el tema de las razones y la proporcionalidad, para que éste encuentre un razonamiento proporcional exitoso dentro de la situación o el contexto en el cuál esta plasmando su razonamiento. El problema que quiero denotar es que el estudiante de mi investigación no identifica o no razona claramente acerca de si sus razones serán extensivas o serán intensivas, no se pregunta por cosas como, ¿qué estoy comparando?, que vendría siendo una pregunta interesante para el estudiante en su razonamiento; debe saber identificar cuando tiene razones de una misma naturaleza o clase y cuando son de diferente naturaleza, solamente opta por tomar simplemente el camino que para él es mas fácil o sencillo en la solución del problema planteado, sin tener definitivamente en cuenta otros factores que se encierran allí en la proporcionalidad directa simple.

Ahora cuando hablo de razonamiento proporcional quiero detenerme un poco más en la estrategia de solución para encontrar proporcionalidad directa simple y es la estrategia aditiva, y no multiplicativa, ya en páginas anteriores manifesté un poco de este razonamiento, pero es tan frecuente en mi investigación que deseo darle un poco mas de abordaje al mismo. Muchos investigadores en el tema de las razones, proporciones y proporcionalidad han también señalado este tipo de error frecuente en el razonamiento proporcional del estudiante, se basa en la estrategia aditiva o de diferencia, y el estudiante esta plenamente seguro que allí va a encontrar siempre una proporción que a su vez le genera una proporcionalidad. Veamos en mi trabajo de investigación algunos de estos procedimientos.



Descubrimiento.

- Descubri q' si se la suma a un rectangulo en cada lado la misma medida ~~va~~ a q' dar de la misma familia
- Tambien descubri q' a simple vista puede parecer un cuadrado y lo cierto es un rectangulo.

**(DAVID, Guía 3, Octubre 25 de 2006)**

**“Osea yo le sume la cantidad, por ejemplo al largo y al ancho le sume la misma cantidad, pero siempre hay que sumarle lo mismo para que de osea de la misma familia, el mismo rectángulo pero con diferentes medidas.”**

**(DAVID, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

**“Para ampliar una familia de rectángulos aumento cada vez mas la misma cantidad de centímetros. En las medidas, por decir si son 20 de largo por ahí le aumento otros dos o tres mas y si son 10 de ancho, le aumento otros dos o tres para que no se desarme.”**

**(RUBY, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

**“Pues lo que yo vi, fue bueno la ficha pequeña, que es la principal acá en este caso, es la C, y la I, que sacamos familias. Entonces la C yo fui aumentando mas centímetros para que fuera mas grande que la C,**

**osea los familiares de la C, fueran mas grandes que la C, y en el mismo caso de la I, fue disminuyendo aumentando disminuyendo, pues yo hice lo siguiente, cogí pues el cuadrado como en la clase recortamos unos cuadrados pues le reste menos centímetros mas que el grande y ya.”**

**(MARCELA, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

Observé que éste tipo de razonamiento esta muy arraigado en la estructura mental del estudiante, y aunque se cree que en esta etapa escolar (séptimo grado) ya se comienza a formar un pensamiento más maduro en torno a la proporcionalidad, esto no es así, pues es muy frecuente detectar este tipo de fallas que fueron observadas a lo largo del proceso de investigación, tal como lo expresan Tourniaire y Pulos, (1985), “Otra estrategia errónea frecuentemente usada es la diferencia constante o estrategia aditiva. En esa estrategia, las relaciones dentro de las razones se cuantifican sustrayendo un término de otro y luego la diferencia es aplicada a la segunda razón.” (Tourniaire y Pulos, 1985, p. 5).

Ahora en este sentido se puede detectar otra falla en el razonamiento proporcional del estudiante y es el hecho de identificar claramente cuando se está trabajando con razones enteras y cuando lo hace con razones no enteras, en este aspecto el estudiante no identifica la forma de variación, este cambio que produce la proporcionalidad directa simple, es igual tanto para una como para la otra, no distingue ni encuentra diferencia, es por eso que en un proceso en el cual tiene razones enteras el razonamiento aditivito le va a funcionar quizá no de la forma mas rápida, mientras que en el procedimiento con razones no enteras este recurso aditivo muchas veces no le va a funcionar igual. Entonces se observa que el estudiante no identifica o no tiene claro el uso que le debe dar a una u otra estructura dentro de un razonamiento proporcional acertado. Es como una especie de razonamiento proporcional muy particular del estudiante en esta etapa de su vida escolar, estamos hablando de grado séptimo, y de estudiantes entre los doce y catorce años, tal como lo manifiestan Tourniaire y Pulos, (1985), citando a Piaget

“De acuerdo con Piaget, el razonamiento proporcional de los adolescentes se desarrolla desde una estrategia compensatoria global, a menudo de naturaleza aditiva pasando por una estrategia proporcional organizada sin generalización para todos los casos, hasta acabar en la formulación de una ley general.” (Tourniaire y Pulos, 1985, p. 7).

Entonces no existe un claro y acertado razonamiento proporcional de algunos adolescentes, producto tal vez de esas falencias que se han venido desarrollando desde el principio mismo del análisis de las estructuras aditivas, multiplicativas y más adelante funcionales.

Es importante resaltar que el razonamiento proporcional no se adquiere de una vez todo, esto como lo he expresado es un proceso que paso a paso en la vida escolar del estudiante se va introduciendo, formando y revalidando en la medida en que este tipo de razonamiento se consolide pero con un seguimiento y apertura dialógica del estudiante con su maestro en cada una de las etapas de la evolución y desarrollo de dicho razonamiento. La falla se encuentra entonces cuando como maestros creemos que el razonamiento proporcional es adquirido por el estudiante con el hecho de ver contenidos tales como razones, proporciones, proporcionalidad y de esta forma estamos cayendo en un frecuente error de tradicionalismo dentro de la madurez del estudiante en el razonamiento proporcional.

Cuando queremos que el estudiante se comience a relacionar con unos primeros procedimientos de análisis en la proporcionalidad directa simple, es importante que se le brinde la posibilidad que maneje material concreto, con el sentido de permitir que éste, a través de su manipulación del mismo genere sus propias estrategias de solución, al tener que plasmar en sus escritos, seria sentir la proporcionalidad para llegar a ella quizá con mejor razonamiento proporcional.

Mis estudiantes al manipular material generaron estrategias de razonamiento tales como:

**“Por eso vea, vea F y G misma forma, diferente medida.”**
**“Por que la forma aparenta la F y la G.”**
**“Pues que son iguales, si no que una es mas grande que la otra.”**
**“Hay que mejor colocar todas las figuras así a lo largo e ir sacando como parejitas, como las que mas se parezcan.”**
**“Es que todas son rectángulos, usted tiene ahí que ver que se parezcan, no importa el tamaño.”**

**(FELIPE, Diálogo, Octubre 23 de 2006)**

**“Osea la unidad mas grande entre mas lejos este se va a ver mas parecido.”**
**“por que, osea las medidas son diferentes, entonces, la mas grande uno la aleja a una distancia bien grande y entonces se nota la diferencia, osea ya se va a ver igual al otro.”**

**(DAVID, Diálogo, Octubre 23 de 2006)**

Quiero registrar una discusión bien particular que se presentó entre varios estudiantes en el desarrollo de la guía número uno, para manifestar una vez más la importancia de la manipulación de material concreto en el momento de realizar un razonamiento proporcional.

**PROFESOR: “¿Cuál es su discusión? Osea, ¿qué es lo que usted esta diciendo Johan?”**
**JOHAN: “Que ahí todos son rectángulos, a simple vista usted puede ver que este parece un cuadrado, pero si usted coge una regla y la empieza a medir le da un rectángulo, las medidas de un rectángulo.”**
**FELIPE: “Por lo mismo y tanto usted no puede venir a colocar esta con esta.”**
**SEBASTIÁN: “Por el grosor y por la altura.”**
**JOHAN: “Es que no tienen que ser iguales.”**
**SEBASTIÁN: “Es que nunca van a ser iguales.”**

**FELIPE: “Parecidas que esta.”**

**SEBASTIÁN: “Parecidas tanto en grosor como en altura.”**

**FELIPE: “No, el grosor no tanto, las medidas no importa, nada mas que se parezcan en la forma.”**

**PROFESOR: “Esa es una forma y, ¿cuál sería otra forma, sin alejarlos?”**

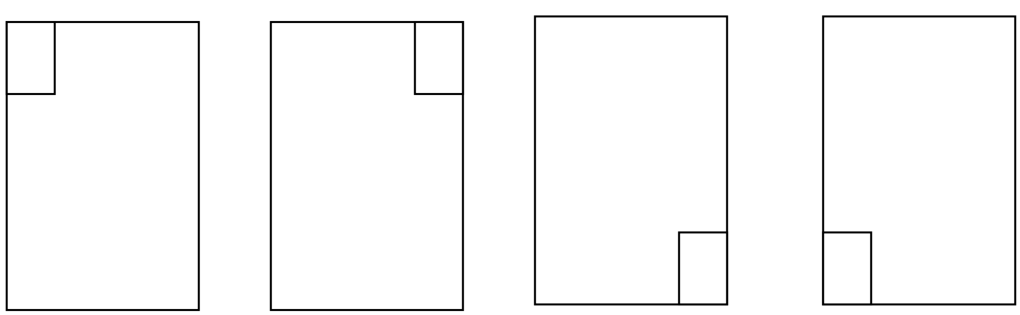
**SEBASTIÁN: “Pues ponerlos uno al lado al lado del otro, observar la figura.”**

**FELIPE: “Los pone en línea y usted va viendo cuales se parecen y cuales no se parecen. Usted coge rectángulo por rectángulo y lo va comparando.”**

**(Diálogo, Octubre 23 de 2006)**

Otras veces el mismo material permite apreciar razonamientos no tan acertados acerca de la proporcionalidad, este es el caso de RUBY, quien utilizó un método de aparejamiento de los rectángulos, el cuál consistía en comparar los ángulos internos de un rectángulo mas pequeño con uno mas grande.

**“Mire usted lo pone acá, cierto y como el ángulo es recto, uno ve la forma del ángulo y si lo pone en todos lados va a seguir igual.”**(Visto gráficamente)



**“Por medio de los ángulos, no ve que cada ángulo tiene 90 grados, la otra figura va a ser igual, usted la pasa a todos los ángulos, a todas las esquinas va a ser lo mismo.”** Y más adelante continúa diciendo: **“Lo**

**ponemos acá y vemos la figura, esa no, es mas ancha y ésta es mas ancha y mas cortica como esta, esta si se cumple por que la figura es mas larga y a la vez mas cortica.”**

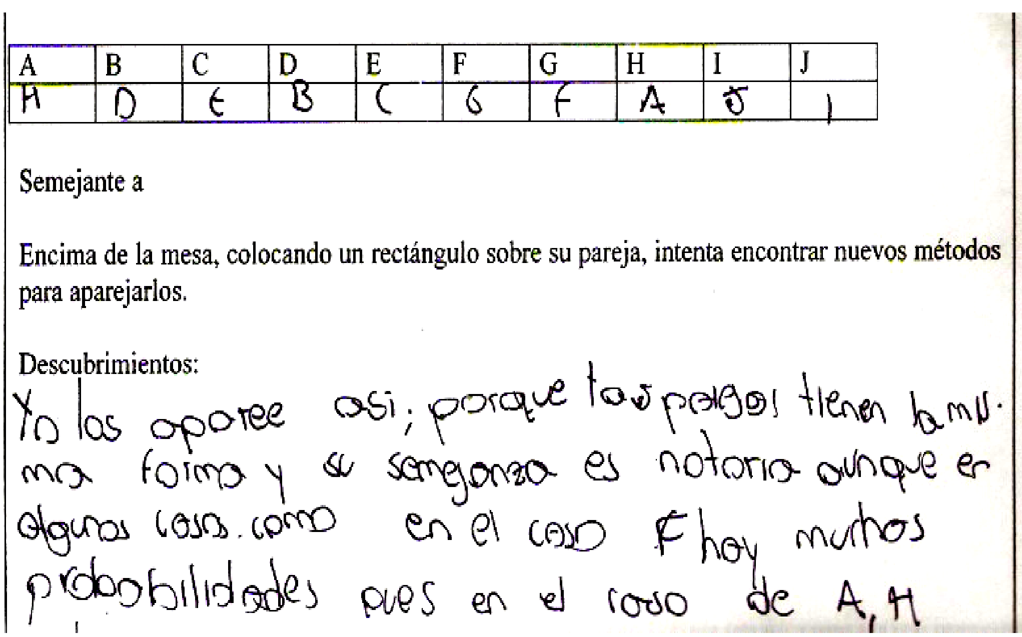
**(RUBY, Diálogo. Octubre 23 de 2006)**

Manipulando el material, se permiten observaciones y nuevos métodos de aparejamiento como el de SEBASTIÁN.

**“Osea lo que estamos intentando es hacer lo mismo de alejar una figura de otra para ver si son semejantes pero con la sombra, entonces de tal manera de que lo tape, que quede igual.”**

**(SEBASTIÁN, Diálogo, Octubre 23 de 2006)**

Ahora observemos algunos razonamientos hechos por ciertos estudiantes en el desarrollo de las primeras guías y con la ayuda de manipulación del material didáctico (rectángulos).



| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| H | D | E | B | C | G | F | A | J | I |

Semejante a

Encima de la mesa, colocando un rectángulo sobre su pareja, intenta encontrar nuevos métodos para aparejarlos.

Descubrimientos:

Yo las aparee asi; porque las parejas tienen la mis-
ma forma y su semejanza es notoria aunque en
algunos casos como en el caso F hay muchas
probabilidades pues en el caso de A, H

**(FELIPE, Guía 1, Octubre 23 de 2006)**

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| H | H | E | J | C | G | E | Δ | B | D |

Semejante a

Encima de la mesa, colocando un rectángulo sobre su pareja, intenta encontrar nuevos **métodos** para aparejarlos.

*Una de las semejanzas q' al tener una figura grande y

Descubrimientos: pequ'ña se pueda rotar q' al poner la figura grande se alega a una distancia considerada se beran iguales. E y C.

* H y Δ = Se pone cada uno en cada esquina entonces al ponerlo en cada esquina se forma la figura grande asi se compararon

**(DAVID, Guía 1, Octubre 23 de 2006)**

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| H | I | O | B | D | G | F | A | B | E |

**Semejante a**

**Encima de la mesa, colocando un rectángulo sobre su pareja, intenta encontrar nuevos métodos para aparejarlos.** J, C = D, E nostro miramos los angulos y la comparacion.

**Descubrimientos:**

D, C = son iguales porque tiene la misma formo y distintos tamaños.

J, C = son iguales porque tiene la misma por que la figura es igual y su tamaño es

Desarrollo RUBY

• por medio de los angulo y la comparacio y la otro por medio de alejar.

colocar la figura de la otra para docervar sus longitud.

• A-J los comparo a lo lejo y ello tiene la misma forma pero no tamaño y medidas.

• D. J lo compare en forma de lejo y el bos tiene la misma forma pero no tamaño ni altura.

**(RUBY, Guía 1, Octubre 23 de 2006)**

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | G | E | J | C | A | B | I | H | D |

Semejante a

Encima de la mesa, colocando un rectángulo sobre su pareja, intenta encontrar nuevos métodos para aparejarlos.

Descubrimientos:

D,E= Su apareamiento es notable ya que la forma rectangular de la E es la misma que la de la D.
G,J= Su semejanza es grandiosa ya que la altura de la J no afecta su apareamiento.

Nuevos Métodos=

•Colocar una figura al lado de la otra para así observar su grosor, su altura y su semejanza con la otra;

• Colocar una figura más pequeña a una altura correcta de tal manera que una luz vertical le haga sombra para tapar a la figura más grande.

**(SEBASTIÁN, Guía 1, Octubre 23 de 2006)**

- Podemos notar q' aunq' la figura sean iguales no es necesario q' el tamaño sea igual. + en la mayoría son diferentes.

- todos no [illegible] igual las medida.

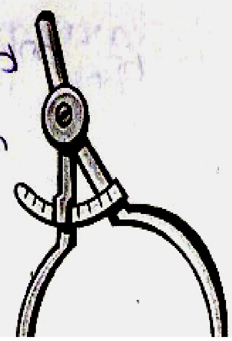
**(DAVID, Guía 2, Octubre 23 de 2006)**

1 uno demis discubrimiento feque
en algomas base se poede medir po
comtimetos como es 5,5cm.

2 las parejas fuero de distintas
formo, y tamaños

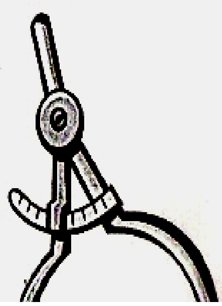
**(RUBY, Guía 2, Octubre 23 de 2006)**

En primer lugar yo hice los rectangulos
de acuedo a su forma saque la mitad
del largo y ancho y las hacia y en
otra doblaba el el largo del centro
y largo



**(FELIPE, Guía 3, Octubre 25 de 2006)**

. yo le sume la misma cantidad
a cada ~~lado~~ y medo de
la familia pero siempre
hay a' sumarle la misma canti-
dad.



**(DAVID, Guía 3, Octubre 25 de 2006)**

Analicis de Grafica

Se puede notar q' los cuadros dan más
a riba x q' tienen cuatro lados. y
el triangulo q' da mas bajo q' el cuadro
x q' tienen 3 lados pero de lado si son
iguales La diferencia es notoria más
con eos 4 cm.

**(DAVID, Guía 8, Noviembre 2 de 2006)**

Es indudable que esta familiaridad permite un primer paso de especulación en su razonamiento, toda vez que lo obliga a volver a mirar o replantear muchos aspectos que quizás con el papel y lápiz solamente lo pudiese haber visto o hubiese obviado estos aspectos dentro de su análisis o razonamiento proporcional, en este sentido Tourniaire y Pulos, (1985), expresan “El uso de materiales manipulativos parece que influye fuertemente en el éxito con problemas de proporciones, por lo menos para algunas personas. Vergnaud (1979, 1980) ha señalado la importancia de proporcionar representaciones simbólicas para la formulación de problemas y para las respuestas de los sujetos.” (Tourniaire y Pulos, 1985, p.9). De esta forma observamos que los materiales manipulativos ofrecen una alternativa para la ayuda del análisis de la proporcionalidad, no estoy señalando que estos materiales sean definitivos en la comprensión de la proporcionalidad directa simple, sino que estoy señalando que son un instrumento válido en el momento de ofrecer otras herramientas en el razonamiento proporcional.

En este sentido hay que decir que este razonamiento proporcional varia en cada uno de los estudiantes en algunos es más sofisticado o elaborado que en otros, puede pasar por los conocimientos, la profundidad, es decir el razonamiento matemático como tal que ha sido, por así mirarlo, un proceso de evolución distinto para cada uno, desde la misma vivencia y formación que cada estudiante haya tenido en torno a las matemáticas, y si se quiere ser más especifico alrededor de la proporcionalidad directa simple, estas estructuras que cada vez van conectando y elaborando un concepto más formal, van cambiando de acuerdo a cada estudiante, es aquí entonces donde se da un poco más de importancia al proceso, por así llamarlo, “personalizado” en cuanto al razonamiento proporcional, pues cuando se prepara la clase de proporcionalidad directa simple, y una clase en general, siempre estamos de cierta manera estandarizando el pensamiento de los estudiantes sin permitir las diferencias de razonamientos que son las que en últimas nos van a marcar el camino a seguir en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, estos factores son olvidados en las clases tradicionales, pero hoy en mi investigación destaco que en el razonamiento proporcional debe existir esa dinámica en la cual el estudiante se exprese libremente y sin temores y sobre todo denotando las diferencias que se marcan en el momento de razonar proporcionalmente.

Un momento, no he tocado otro asunto muy relevante en el razonamiento proporcional como lo es el contexto del problema de la situación que se está abordando por parte del estudiante, en la medida en que dicha situación esté al alcance y el contexto adecuado para él, su análisis y razonamiento de la misma va a ser un poco más efectivo y tendrá un mayor significado para él, ante esta característica del razonamiento proporcional, los educadores cometen ciertas ligerezas al colocar situaciones que se encuentran fuera de todo contexto para el estudiante, que están muy distantes de la situación y el medio que rodea a determinado joven, sea cual sea su situación, desconociendo este factor. Encontramos entonces nuevamente un proceso errado en el razonamiento proporcional del estudiante, que sigue siendo un camino para consolidar en mi caso de investigación de la proporcionalidad directa simple, que no olvidemos el contexto y la significación de las situaciones que para el estudiante son más importantes de lo que nos imaginamos.

Ahora ya situados en el contexto y las distintas formas como el estudiante aborda los problemas de proporcionalidad directa simple, manifesté que el constructo del conocimiento en torno a dicho tema por cada uno de ellos estaba muy ligado a los presaberes y la forma particular de razonar; es esta forma la que permite entonces que en el aula de clase se genere una especie de discusión en torno a cuales son los diversos puntos de vista para desarrollar un problema de proporcionalidad. Este diálogo con ciertas justificaciones válidas o no, permiten el crecimiento personal y grupal cuando se trata de generar precisamente esta discusión en torno a conceptos que si previamente los estudiantes poseen de alguna forma correcta o incorrecta los van a tener que validar con respecto a lo que su otro par piensa y siente en determinado momento de solución. No desconozco ese diálogo que debe permitir dentro de las aulas de clase, por que es este el que va admitir que todos crezcan, ojo no solo el estudiante, los maestros crecen y ampliamente en la medida en que participen de ese diálogo generado en clase y que a mí como maestro me permite realizar ciertos análisis que de una u otra forma me encaminaran hacia una construcción de dinámica de clase más activa, menos tradicional y con la participación de todos los protagonistas que intervienen en este proceso de enseñanza y aprendizaje.

Se debe pensar entonces que el razonamiento proporcional no es algo que se logre de una forma aislada ni solitaria, es un proceso que envuelve diversos aspectos en la resolución de un problema que involucra para este caso la proporcionalidad directa simple, son muchas las circunstancias que se ponen en juego en el momento de comenzar a realizar un proceso de maduración en el razonamiento proporcional de los estudiantes de séptimo grado, en el sentido en que como maestro no puede limitarse simplemente a decir o emitir un juicio bueno o malo, desconociendo todo el proceso de razonamiento que el estudiante ha tenido que realizar para llegar a emitir una conclusión o justificación sobre la situación matemática que se ha planteado inicialmente, sería un exabrupto poder desconocer el proceso en el enriquecedor diálogo de justificación del cómo y por qué se llego a determinada conclusión.

Es entonces muy difícil con el razonamiento proporcional establecer una cierta secuencia de pensamiento por que este tipo de razonamiento no sigue un camino propio, sino que va construyendo su camino en la medida en que el estudiante afronta con sus aciertos y errores la capacidad para razonar proporcionalmente y comprender más a fondo las verdaderas características que encierra la proporcionalidad directa simple. Son muchos los caminos que se trazan en este estudio, máxime cuando la proporcionalidad directa simple tiene muchas opciones de abordajes en diversos contextos ya sea de la ciencias, la geometría, la aritmética, el cálculo, en si son diversas alternativas para comenzar e incentivar un razonamiento proporcional con sentido para el estudiante.

Cabe aclarar que este razonamiento proporcional no debe comenzar en x o y grado de educación, debe permanecer siempre que se aborden temáticas que tengan cierta relación, en mi investigación muchas de las fallas encontradas obedecen como lo dijimos en páginas anteriores a aspectos de poco y escaso razonamiento proporcional, estudiantes que son muy dirigidos y mecánicos para encontrar ciertas respuestas a problemas planteados y que desconocen en muchas ocasiones caminos correctos y enriquecedores en la resolución de situaciones matemáticas.

## 3. CARACTERIZACIÓN DEL MODELO LINEAL f(x)=kx

He hablado hasta el momento de proporcionalidad directa simple y la forma como se aborda y analiza este concepto en diversas situaciones, en esta categoría quiero mostrar la relación directa que existe entre la proporcionalidad directa simple y la función lineal de la forma f(x)=kx.

Mi propósito es encontrar la relación antes mencionada, pero el acercamiento que se realiza con el estudiante de séptimo grado es llegar a una forma muy intuitiva por medio de ese contacto del concepto de proporcionalidad directa simple, que ya para él es un poco más natural que el concepto de función lineal de la forma f(x)=kx.

Es por esto que no debo perder de vista que tal como lo plantea el MEN en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas encuentro esa relación entre proporcionalidad directa simple y función lineal de la forma f(x)=kx, por medio del pensamiento variacional que será el eje central dentro de la construcción de modelo lineal que guarda en sí mismo una estructura de variación y cambio.

> proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas. (MEN, 1998, p.72)

Es bajo esta mirada que abordaré el pensamiento variacional y como un caso particular de éste, la modelación matemática, la función lineal y su relación que mantiene con la proporcionalidad directa simple.

Muchos de ustedes se deben estar preguntando por que establecer esa relación entre la proporcionalidad directa simple y la función lineal, tal como lo plantea el MEN la función conecta esos patrones de variación que encontramos precisamente en esos conceptos aquí citados.

> Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesario para "enlazar" patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio. Los modelos mas simples de función (lineal, afín, cuadrática, exponencial...) encapsulan modelos de variación como la proporcionalidad. (MEN, 1998, p.74)

Entonces la proporcionalidad directa simple, como lo hemos podido leer en las páginas anteriores, muestran que existe en este concepto un cambio que está totalmente relacionado con modelos de funciones que para nuestro caso el modelo de interés será la función lineal de la forma $f(x)=kx$.

Ahora para caracterizar la función lineal lo haré de una forma muy intuitiva, sobre algunos aspectos que son claves en el momento de tener un modelo lineal. ¿Por qué lo vamos a hacer de forma intuitiva?, pues la justificación es que en esta etapa de vida escolar el estudiante de séptimo grado no ha tenido ningún contacto con el modelo lineal, hablamos en el sentido puramente algebraico, es decir algo como llegar a formular una expresión, de una forma directa, tal como, $f(x)=kx$, esto no lo hace el estudiante en este nivel, pero una alternativa es como lo hice, por medio de la proporcionalidad directa simple el estudiante llegue a relacionar esta proporcionalidad con el modelo lineal de la forma $f(x)=kx$.

Dejando entonces claro que este acercamiento al modelo lineal será de forma intuitiva entonces observé y analice algunas características de la función lineal $f(x)=kx$, tales como: la constante de proporcionalidad (k), gráfica cartesiana reducida al primer cuadrante, función creciente y monótona, el punto de origen (0,0), pendiente o razón. Las características enunciadas son analizadas de acuerdo al razonamiento realizado por los estudiantes partícipes de mi investigación.

- **La Constante de Proporcionalidad (k)**

La constante de proporcionalidad (k), es un elemento importante en la caracterización de un modelo lineal, pues es ella la que garantiza que se genere, por así llamarlo, una familia de proporciones que a su vez conforman la proporcionalidad directa simple, y entonces esto permite que analizado desde una óptica muy funcional se produzca un modelo lineal. Es entonces dicha constante de proporcionalidad la que nos interesa en esta primera característica del modelo lineal.

Centrándonos en términos de la matemática formal, la constante de proporcionalidad tal como lo plantean Fiol y Fortuny, (1990), se define como:

> Sean M y N dos magnitudes proporcionales continuas, sea f la correspondencia entre sendas cantidades e y u dos unidades respectivas de M y N.
>
> $$F:\ M \longrightarrow N$$
>
> $$e \longrightarrow u$$
>
> Podemos escribir f(e) = k* u
>
> Diremos entonces que k es la constante de proporcionalidad respecto de las unidades e y u. (Fiol y Fortuny, 1990, p. 33)

De esta forma se puede observar una definición de una manera muy general y primaria acerca de la constante de proporcionalidad, y en ella se puede encontrar algunos aspectos que quiero resaltar un poco en este modelo funcional, como lo es las magnitudes, pero no es cualquier magnitud, sino magnitudes proporcionales continuas y la existencia de la correspondencia f, son esos los aspectos rescatables en esta definición para la constante de proporcionalidad, que ya empieza a entregar los primeros visos de lo que es un modelo lineal, y lo que en cuanto a la variación él mismo guarda en sí como modelo funcional.

Otra visón ya en términos un poco menos formales la entrega Obando et al., (2006), los cuales manifiestan:

> La otra posibilidad de solución es a través del planteamiento de una relación entre los dos espacios de medida, es decir, reconocer que la multiplicación de n por f(1), produce el valor de f(n). En este caso, se debe tener cuidado con el análisis dimensional de las cantidades, pues este planteamiento es posible gracias al reconocimiento de la igualdad f(1) / 1 = f(n) / n , lo cual es equivalente a que nf(1) = f(n) (se reconoce a f(1) como el valor de la constante de proporcionalidad). (Obando et al., 2006, p.125)

Ese primer valor f(1) es el encargado, ya en un modelo funcional, de generar los demás elementos que se dan en los espacios de medida, en otras palabras ese primer valor se convierte en la constante de proporcionalidad. Pero veamos como los estudiantes de mi investigación de manera intuitiva, muestran rasgos de lo que para ellos, con términos y expresiones no tan formales, es la constante de proporcionalidad.

> **“Por que son múltiplos de tres, por que mire 3x2=6, 3x4=12, y 3x5=15, y acá son 2x2=4, 4x2=8 y 2x5=10.”**
>
> **(RUBY, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

quiero resaltar algo en esa respuesta anterior de RUBY, en el sentido en que para realizar ese análisis tuvo en cuenta el número racional 3/2, es decir el primer elemento que generaba la proporcionalidad, en otras palabras la constante de proporcionalidad. Después continúa diciendo:

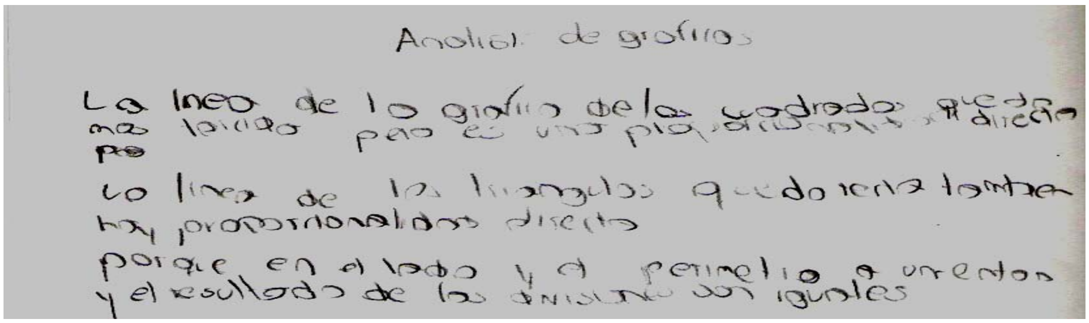
> **“Por los múltiplos, que son los primeros múltiplos que va a tener esta fila. Son múltiplos de 3 por que 18, 3x6=18, 7x3=21, 8x3=24.”**Y mas adelante sigue diciendo: **“Va aumentando por sus mismos múltiplos. Si por que mire esta es una fracción equivalente, todos fueron sus múltiplos de 3 y esta otra fracción equivalente por que todos fueron**

**múltiplos de 2. 4, 8, 10, 12, 14, 16, todos tienen sus múltiplos. Osea que son fracciones equivalentes."**

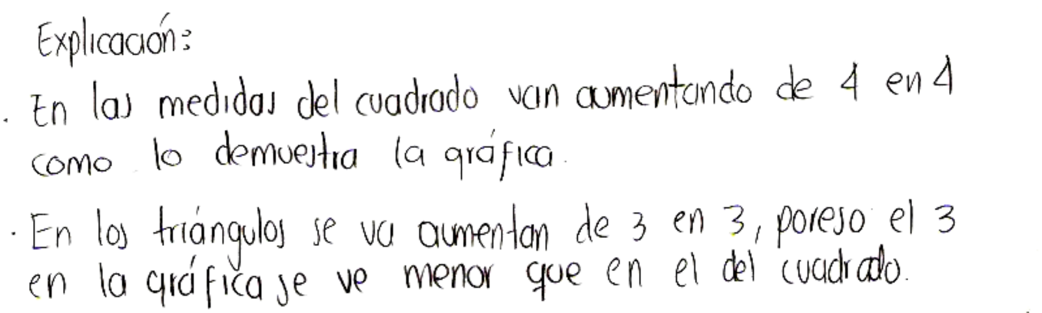
**(RUBY, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

**"O al llevar los múltiplos de 3 para la hilera de arriba y los múltiplos de 2 en la de abajo, como en el ejemplo es 3/2."**

**(SEBASTIÁN, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**


Analisis de graficos
La linea de la grafica de los cuadrados queda mas larga pero es una proporcionalidad directa
po
La linea de los triangulos queda menos tambien hay proporcionalidad directa
porque en el lado y el perimetro aumentan y el resultado de las divisiones son iguales

**(FELIPE, Guía 8, Noviembre 2 de 2006)**


Explicación:
. En las medidas del cuadrado van aumentando de 4 en 4 como lo demuestra la gráfica.
. En los triángulos se va aumentan de 3 en 3, poreso el 3 en la gráfica se ve menor que en el del cuadrado.

**(MARCELA, Guía 8, Noviembre 2 de 2006)**

**"Haber, acá en este caso fue pues yo cogí, cada número, cada fracción o cada proporción, osea uno ve, se da cuenta pues, van aumentando de 3 en 3 ese fue el criterio que yo utilice que van aumentando de 3 en 3.**

**Osea con esas proporciones vemos que en la primera línea se ve que van aumentando de 3 en 3 y da el resultado 27 y también en los numeradores de la fracción van aumentando de 2 en 2 va a dar el resultado 100."** Y mas adelante continúa diciendo: **"Pues la verdad, pues**

**si, cogí, pues yo cogí cada palillo si, entonces yo cogí la regla pues la medí, entonces según lo que me dio el palillo yo puse aquí osea en cada uno lo que da, lo que es cada palillo, osea la medida de cada palillo yo la fui aumentando de 7 en 7, osea si es un cuadrado 7x4 da 28, osea que yo cogí cada palillito, lo medí y lo multipliqué el resultado de ese palillo por los lados del cuadrado.”**

**(MARCELA, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

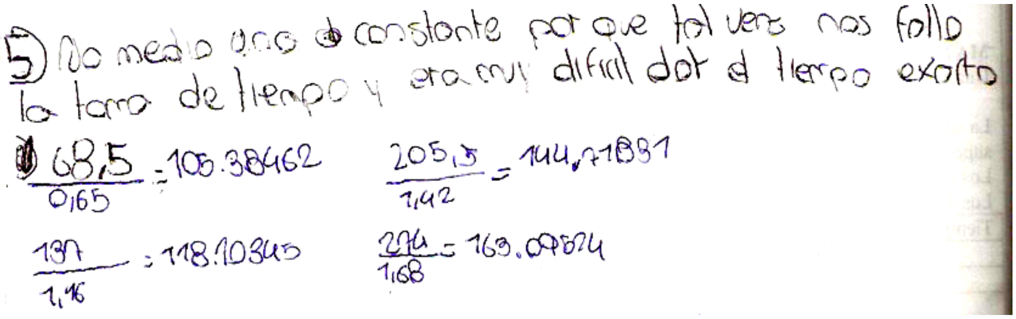

. Porque cada uno aumenta de a cuatro por eso obiona línea Recta.

**(RUBY, Guía 8, Noviembre 2 de 2006)**

**“Por que van aumentando mire, 12 viene acá, viene su número principal es el 3 por que viene 12, 18, 24, 36, 72 y 96, van aumentando de a 3, por eso cada espacio deje de a 3, van aumentando de a 3, por eso dio línea recta.”**

**(RUBY, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

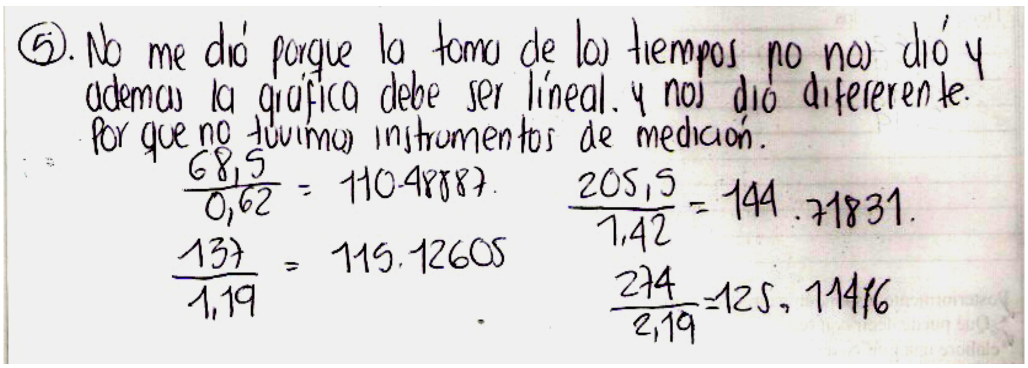
en la guía número 10, la situación de movimiento que se planteó tenía como finalidad que los estudiantes llegaran a la conclusión que esta situación de la física era un modelo no lineal, pues allí se comparaban el tiempo contra desplazamiento de una esfera que rodaba por un plano inclinado, en este razonamiento pude apreciar la asociación que los estudiantes hacen de constante de proporcionalidad con modelo lineal, al manifestar  que este era un modelo no lineal, pues no existía constante de proporcionalidad.


5) No medio una constante por que tal vez nos fallo la toma de tiempo y era muy dificil dar el tiempo exacto

$\frac{68,5}{0,65} = 105.38462$ $\frac{205,5}{1,42} = 144,71831$

$\frac{137}{1,16} = 118.10345$ $\frac{274}{1,68} = 163.09524$

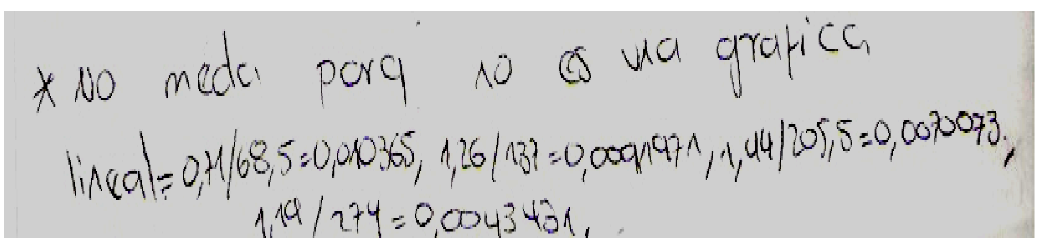
**(FELIPE, Guía 10, Noviembre 7 de 2006)**


5. No me dió porque la toma de los tiempos no nos dió y además la gráfica debe ser lineal. y nos dió difererente. Por que no tuvimos instrumentos de medición.

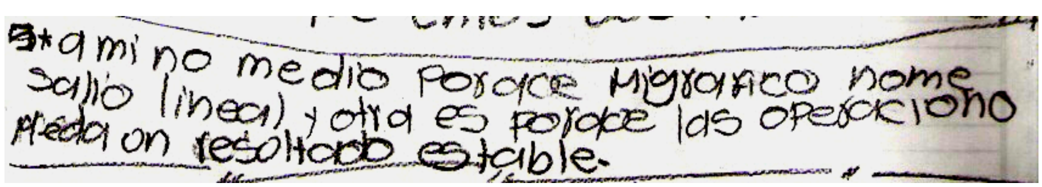
$\frac{68,5}{0,62} = 110.48387.$ $\frac{205,5}{1,42} = 144.71831.$

$\frac{137}{1,19} = 115.12605$ $\frac{274}{2,19} = 125,11416$

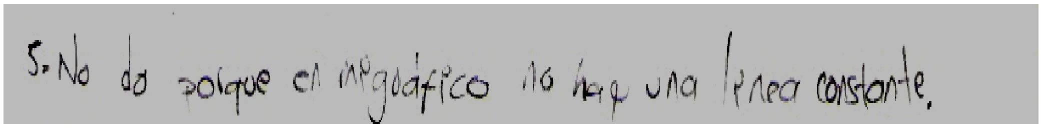
**(MARCELA, Guía 10, Noviembre 7 de 2006)**


* No medio porq no es una grafica lineal = 0,71/68,5 = 0,010365, 1,26/137 = 0,0091971, 1,44/205,5 = 0,0070073, 1,19/274 = 0,0043431,

**(DAVID, Guía 10, Noviembre 7 de 2006)**


5* a mi no medio porque Migrafico nome salió lineal) y otra es porque las operaciones no Mredaron resoltado estable.

**(RUBY, Guía 10, Noviembre 7 de 2006)**


5. No da porque en mi gráfico no hay una línea constante.

**(SEBASTIÁN, Guía 10, Noviembre 7 de 2006)**

En varias de estas ocasiones se puede ver las diversas interpretaciones que los estudiantes, de una forma muy intuitiva, dan al concepto de constante de proporcionalidad. Dicha constante pasando quizá al plano geométrico permite la visualización y construcción del modelo lineal en el plano cartesiano, y a la vez entra en relación directa con la razón, pues, es considerada esta constante también en términos de una razón entre espacios de medida que se están relacionando, en este sentido Guacaneme, (2001), señala, “la existencia y estudio de la constante de proporcionalidad entre las magnitudes y entre las medidas de las cantidades de magnitudes proporcionales, es fundamental e imprescindible para representar gráficamente la correspondencia funcional entre las magnitudes” (Guacaneme, 2001, p.121).
Es precisamente esta afirmación la que me encamina a manifestar que en cierta medida la comprensión, de una forma acertada, de la constante de proporcionalidad que en algunos casos es clara, en otros no, para los estudiantes al momento de una representación gráfica del modelo lineal, que para nuestro caso es el modelo de la forma f(x)=kx, y es en esa construcción o representación grafica donde el estudiante reafirma y palpa la aparición o permanencia de la constante de proporcionalidad entre esos dos espacios de medidas ya sea de magnitudes iguales o diferentes.

Encuentro de otra forma esa directa relación que existe entre la constante de proporcionalidad y razón, especialmente cuando estamos hablando de magnitudes homogéneas, en este sentido Fiol y Fortuny, (1990), concluyen, “la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes, es la razón de sus cantidades y es igual a la de sus medidas tomadas con la misma unidad” (Fiol y Fortuny, 1990, p.36). Es de esta manera como la constante de proporcionalidad se convierte de cierta manera en la aparición de la proporcionalidad directa simple y a su vez la generación de una función lineal, que para nuestro caso de tipo f(x)=kx.

- **RAZÓN O PENDIENTE DE LA RECTA f(x) =kx**

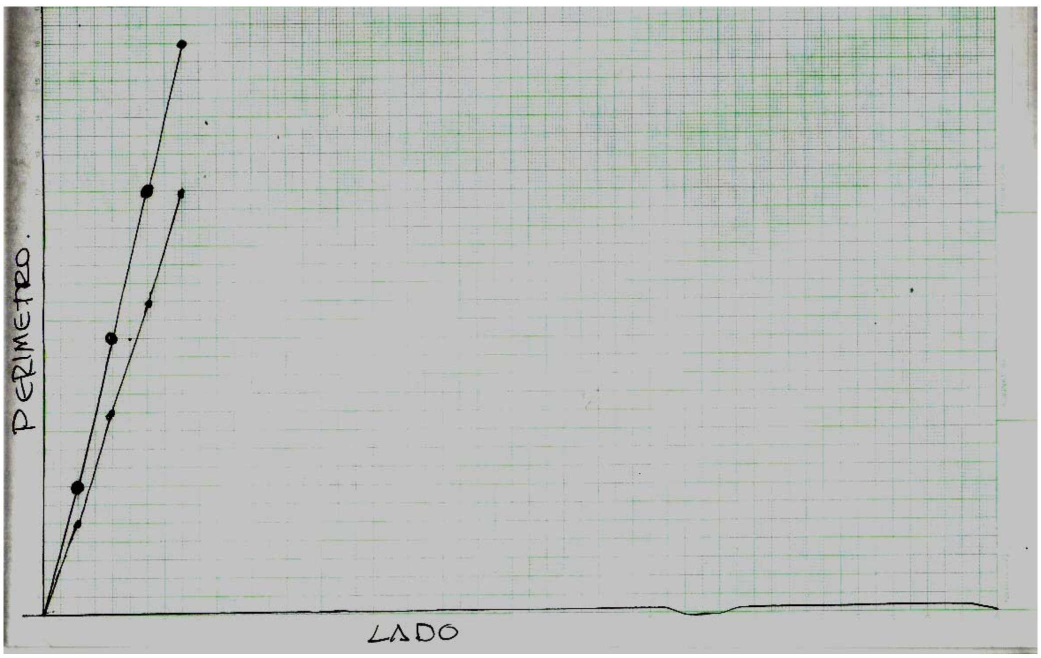
Como en páginas anteriores hable de razones constantes, es decir iguales, esto nos permite de cierta manera como lo plantean Posada et al., (2006), en el sentido en que, para pendientes o razones constantes la gráfica que está determinada por esta característica es indudablemente que una gráfica lineal, entonces sí existe la pendiente constante, es decir, que se encuentra una variación igual entre las dos variables que interviene en este proceso de transformación entre dos espacios.
En términos para el grado de escolaridad de los estudiantes analizados, quizás no manejan el termino de pendiente como tal, pues no tiene un estudio acerca del modelo lineal, pero si hacen un acercamiento muy válido hacia este concepto y la forma como se puede asociar esta pendiente en la proporcionalidad directa simple, es por la vía de la razón entre las magnitudes que están involucradas en cualquier situación de proporcionalidad. De una manera muy formal Fiol y Fortuny, (1990), definen la razón entre magnitudes como:

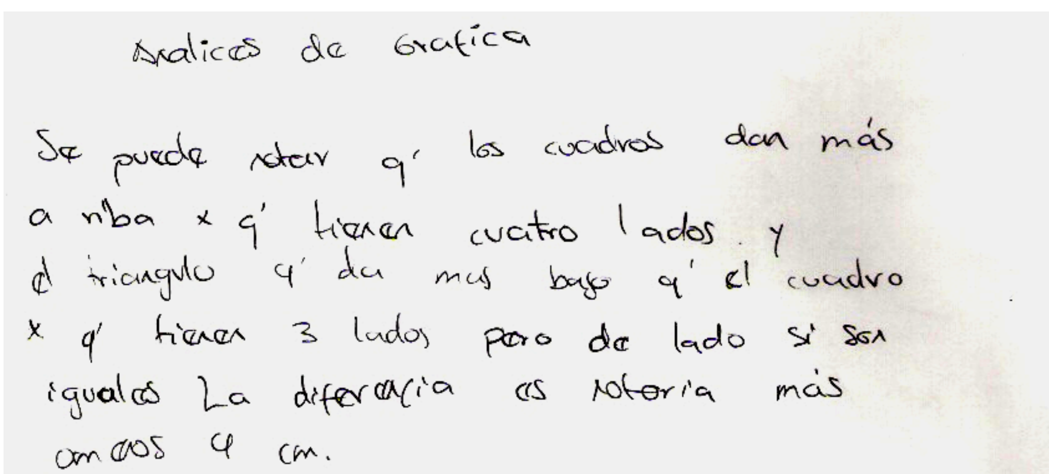
> Dadas dos cantidades a, b, la razón entre ambas se puede definir sin hacer referencia directa a la medida.
> Basta para ello considerar la cortadura (P1, P2) sobre los números racionales positivos:
>
> $$P1= \{m / n ; m, n \ \ N / na < mb\}$$
> $$P2 = \{ m / n ; m, n \ \ N / na > mb\}$$
>
> Entonces el número real r que define será la razón entre dichas cantidades a y b. Indicaremos simbólicamente que
>
> $$a/b = r$$

> Toda razón entre cantidades determina una proporcionalidad entre las cantidades de la misma magnitud. (Fiol y Fortuny, 1990, p. 36)

Entonces de acuerdo al anterior planteamiento la pendiente o razón entre magnitudes por el hecho de ser netamente constante en cuanto a su variación vuelve y muestra la directa relación con la constante de proporcionalidad.

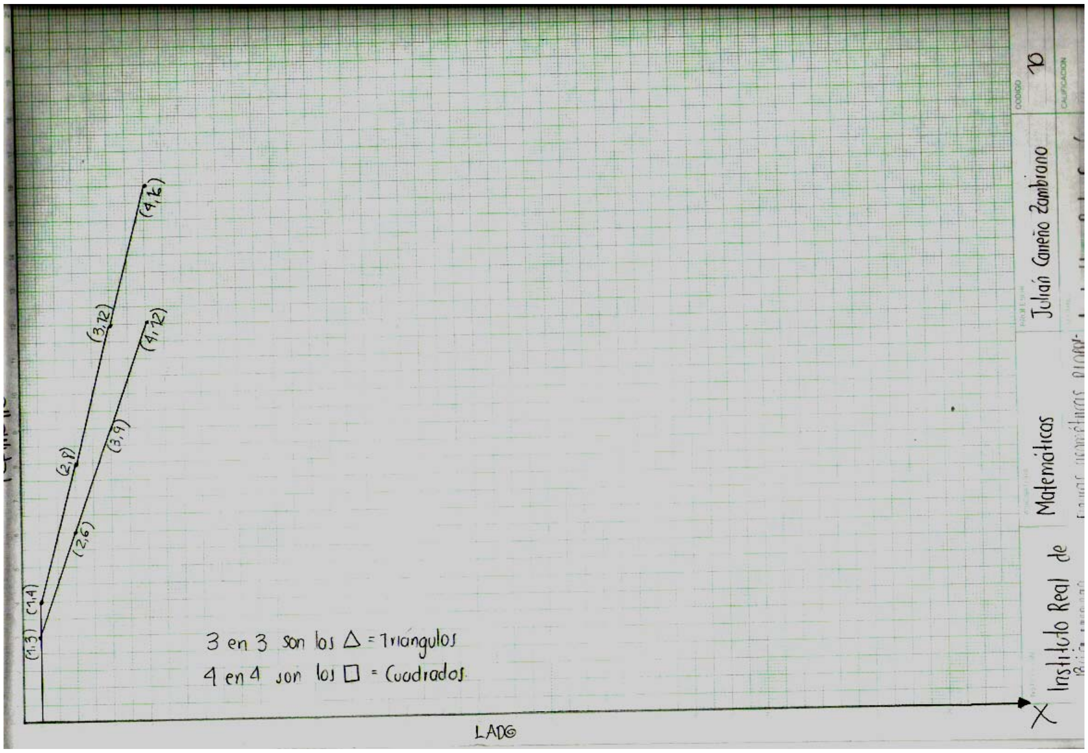
Sin embargo en los datos recopilados, las entrevistas y observaciones hechas a los estudiantes estos no dan mucha importancia al concepto de pendiente o inclinación de la recta, veamos algunos de sus argumentos.

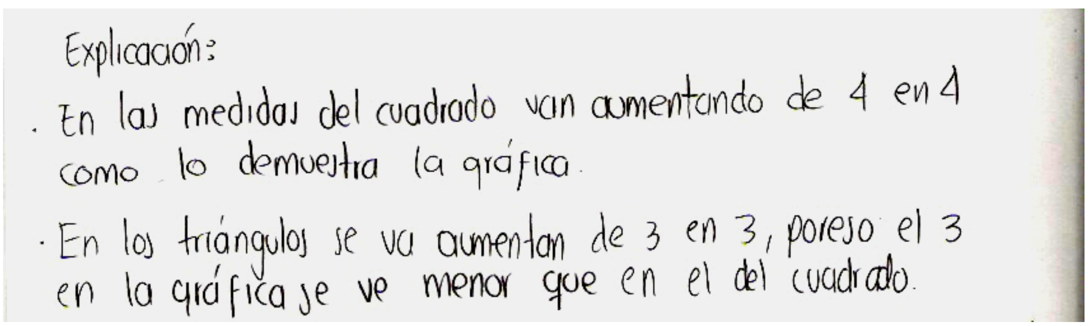




Analices de Grafica

Se puede notar q' los cuadros dan más a riba x q' tienen cuatro lados. y el triangulo q' da mas bajo q' el cuadro x q' tienen 3 lados pero de lado si son iguales La diferencia es notoria más en unos 4 cm.

**(DAVID, Guía 8, Noviembre 2 de 2006)**




**(MARCELA, Guía 8, Noviembre 2 de 2006)**

> **“En la gráfica, primero se hizo, la del triángulo, en el triángulo se ve pues que es menor y en el cuadrado es mayor, entonces en la situación del cuadrado va aumentando de 4 en 4, así, en la figura triangular va aumentando de 3 en 3, en la primera me dio (2, 6).”**

**(MARCELA, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

Como podemos apreciar en la investigación que el concepto de pendiente o razón no es conocido para el estudiante de séptimo grado, solo se acerca a dicho concepto de una forma muy intuitiva y escasa, lógico no tiene una formación ni siquiera primaria en este concepto de pendiente.

Esta pendiente de la cual estoy hablando también tiene en su interior un significado de la variación y cambio que precisamente le imprime la proporcionalidad directa simple y el mismo modelo lineal, en el sentido en que ese cambio que presenta en cuanto a su pendiente o razón es constante, en términos un poco mas de cálculo diremos que precisamente lo que caracteriza al modelo lineal es precisamente esa razón de cambio constante, es aquí donde encontramos otro aspecto importante que nos vuelve a recordar que la proporcionalidad directa simple y la función lineal de la forma f(x)=kx tienen en su interior una relación directa, y que muestran sin ninguna duda un proceso totalmente dinámico, que nosotros como maestros le quitamos cuando presentamos simplemente la proporción como la igualdad entre dos razones, en este sentido encontramos razonamientos por parte de nuestros estudiantes como los anteriores, donde las “inclinaciones” de las gráficas no dicen casi nada para ellos, en sí ese proceso dinámico no muestra mucho, es precisamente por la formación que los estudiantes mismos han recibido acerca de estos conceptos como procesos estáticos quitándole toda la fuerza a lo variacional y dinámico.

Tal como lo plantean Posada et al., (2006), acerca de el cambio que experimenta cada una de las variables que intervienen en un proceso funcional, “si la atención se centra no en las variables sino en los cambios de ellas, obtenemos que todas las funciones de grado uno cumplen con la propiedad que ... esto quiere decir que todas las funciones polinómicas de grado uno tienen como razón de cambio una constante” (Posada et al., 2006, p.135), esa razón de cambio constante particulariza o dicho de otra forma es la que garantiza la existencia de ese modelo lineal que estamos analizando. Es precisamente este el planteamiento que realizan, Posada et al., (2006), en cuanto a esa razón de cambio constante desde esa mirada variacional que guarda la proporcionalidad y su relación con el modelo lineal:

> ... no es atrevido pensar que la función lineal tiene como elemento que le da identidad, a la razón de cambio constante de primer orden, esto significa, que si la atención no se centra en las variables sino en la variación, es dicha constante la que define la función lineal salvo un punto que la particularice. (Posada et al., 2006, p.139)

Es un planteamiento en el cual estoy totalmente de acuerdo, pues es en sí esa variación o razón de cambio es constante, es decir, si miramos el cambio proporcional en las magnitudes este determina siempre una constante en cualesquiera dos puntos o magnitudes en los que se le mire, es aquí donde esta la importancia de la pendiente o razón de cambio, en el sentido en que no se debe permitir que el estudiante la observe simplemente como la inclinación de la gráfica y ya, sino que le entreguemos otras herramientas para que él pueda extender un poco más su análisis hacia características de este concepto que ya hemos expresado.

- **UN PUNTO ESPECIAL DE LA FUNCIÓN f(x)= kx, EL ORIGEN (0,0)**

He dedicado este espacio a este punto en especial, pues llama la atención en mi investigación que algunos estudiantes se tornan indiferentes al momento de incluirlo en el modelo lineal, quizá no dice nada o no significa nada para ellos, en otras ocasiones este punto si interviene, en fin es un punto especial de la función lineal de la forma f(x)=kx, el cual es el origen de esta recta por lo menos cuando ésta es reducida al primer cuadrante que es el caso de estudio en esta investigación.
Con respecto al punto (0,0) Fiol y Fortuny, (1990), expresan:

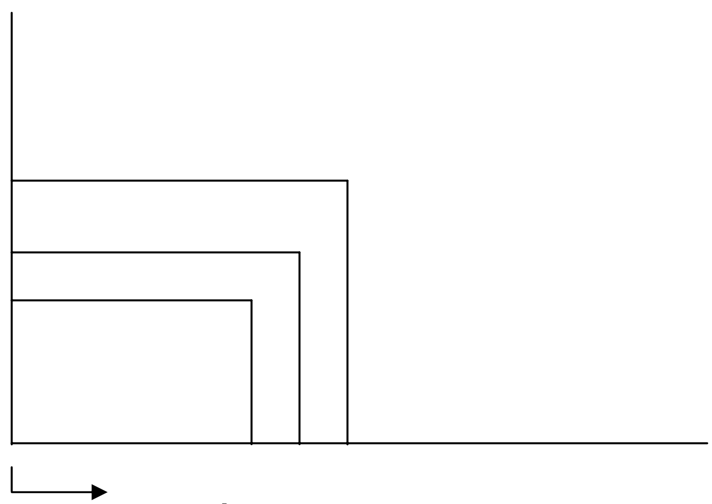
> En efecto al elegir dos medidas en las magnitudes proporcionales la expresión de proporcionalidad es del tipo y = kx siendo k la constante de proporcionalidad. Entonces la tabla de valores de las funciones y = kx dan pares de números (x, y) de los que obtenemos puntos de las gráficas de estas funciones en un sistema de coordenadas cartesianas.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | r1 | r2 | r3 | | rn | … |
| Y | r’1 | r’2 | r’3 | | r’n | … |

> Como el par de valores (0,0) aparece en todas ellas, las gráficas siempre pasan por el origen de coordenadas. (Fiol y Fortuny, 1990, p. 84)

Es importante aclarar que en esta caso en particular la función lineal de la forma f(x)=kx va a estar restringida al primer cuadrante del plano cartesiano, de todas maneras esto no indica que en este modelo lineal no se tenga en cuenta al punto (0,0), es mas, en nuestro modelo este se convierte precisamente en el origen de esta recta y en ese orden de ideas será importante ver lo que para los estudiantes de mi investigación significa ese punto en cuestión, el origen (0,0).

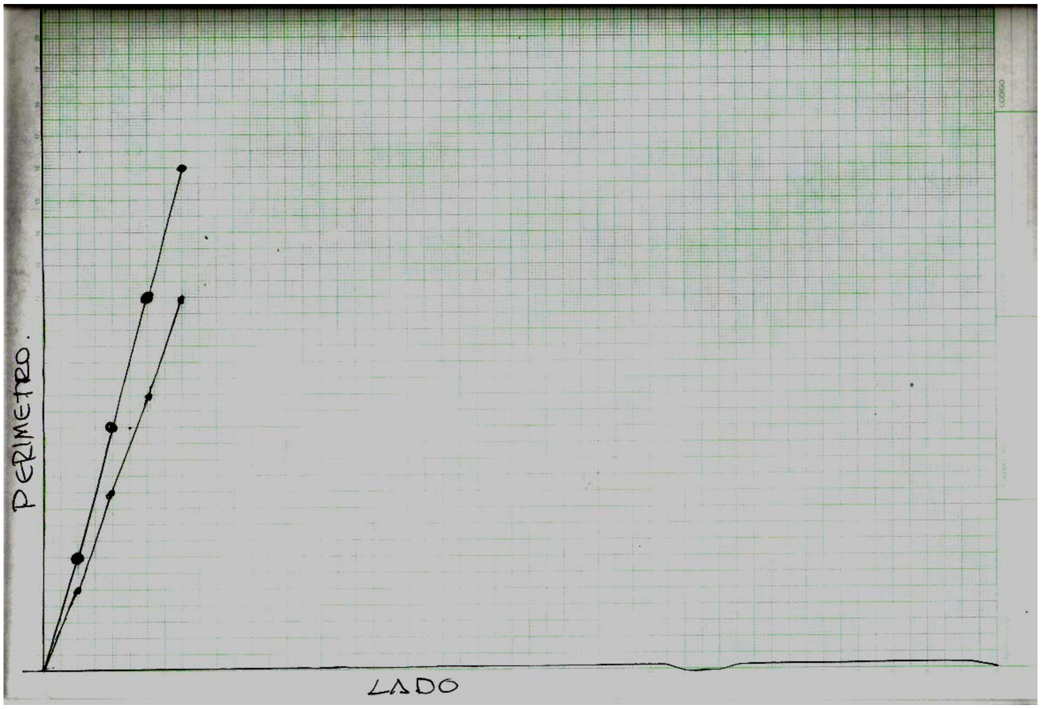
**“Todos tienen que salir acá de la esquina.”**( señaló un gráfico así).



**“Esquina”**

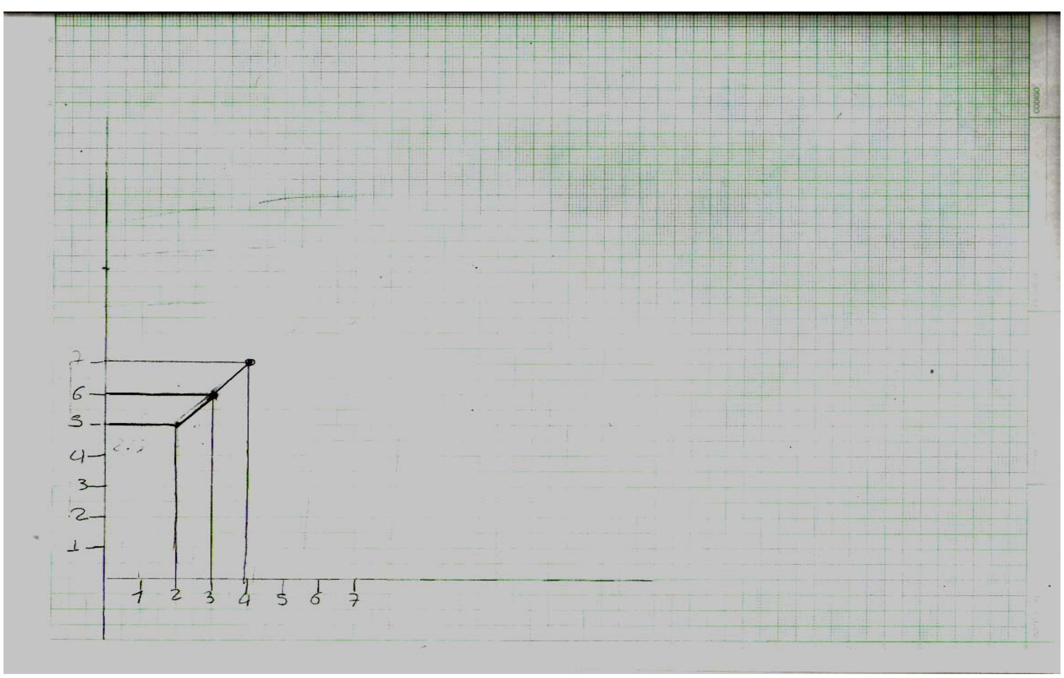
**(DAVID, Diálogo, Octubre 26 de 2006)**

En el desarrollo de la guía número 8, en la construcción de las gráficas de DAVID, éstas parten del origen, es decir vuelve a tener en cuenta en su interpretación geométrica del modelo lineal de la forma f(x)=kx, el punto de origen (0,0).




**(DAVID, Guía 8, Noviembre 2 de 2006)**

En el desarrollo de la guía número 8, RUBY tuvo en cuenta al punto (0,0), pues sus gráficas parten del origen. Ahora para el desarrollo gráfico de la guía número 9 este punto simplemente desapareció.




**(RUBY, Guía 9, Noviembre 3 de 2006)**

Es indudable que este punto de origen (0,0), de acuerdo a los casos que observamos definitivamente llama la atención, en el sentido en que para algunos está, para otros no, con los argumentados ya expresados, con respecto a este punto importante del modelo lineal Guacaneme, (2001), expresa:

> No sobra reseñar que es imprescindible que la recta contenga al origen de coordenadas, no sólo porque, como lo hemos señalado antes, si dos magnitudes son directamente proporcionales las cantidades modulo aditivo de una y otra deben estar en correspondencia, sino que de no ser así, no se satisfarían las condiciones enunciadas en la nota 26 de pie de página, o sus relativas condiciones del lenguaje funcional: $f(a + b) = f(a)+f(b)$ y $f(r * a) = r * f(a)$ . (Guacaneme, 2001, p.120)

Este argumento anterior ratifica la importancia de hacer énfasis en el punto de origen, que pasa desapercibido para algunos estudiantes y que dentro de un análisis de un modelo funcional, por lo menos de una forma muy básica para este nivel de escolaridad, se hace necesario dedicarle un momento de revisión, de este punto en particular, que llamó la atención en cuanto a la información recopilada en mi investigación. Queda claro entonces que el modelo lineal en general y siendo el caso particular de esta investigación de la forma f(x)=kx, encapsula, guarda en sí mismo este punto, el cual no se debe dejar de lado cuando estamos estableciendo una relación de los conceptos de proporcionalidad directa simple e idea intuitiva de función lineal de la forma f(x)=kx, en estudiantes de séptimo grado.

- **GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LINEAL DE LA FORMA f(x) = kx.**

Sin duda alguna, otra característica muy importante para el modelo lineal es la representación gráfica la cual nos permite realizar una visualización, no local, de la proporcionalidad directa simple y su relación con la función lineal de la forma f(x)=kx.

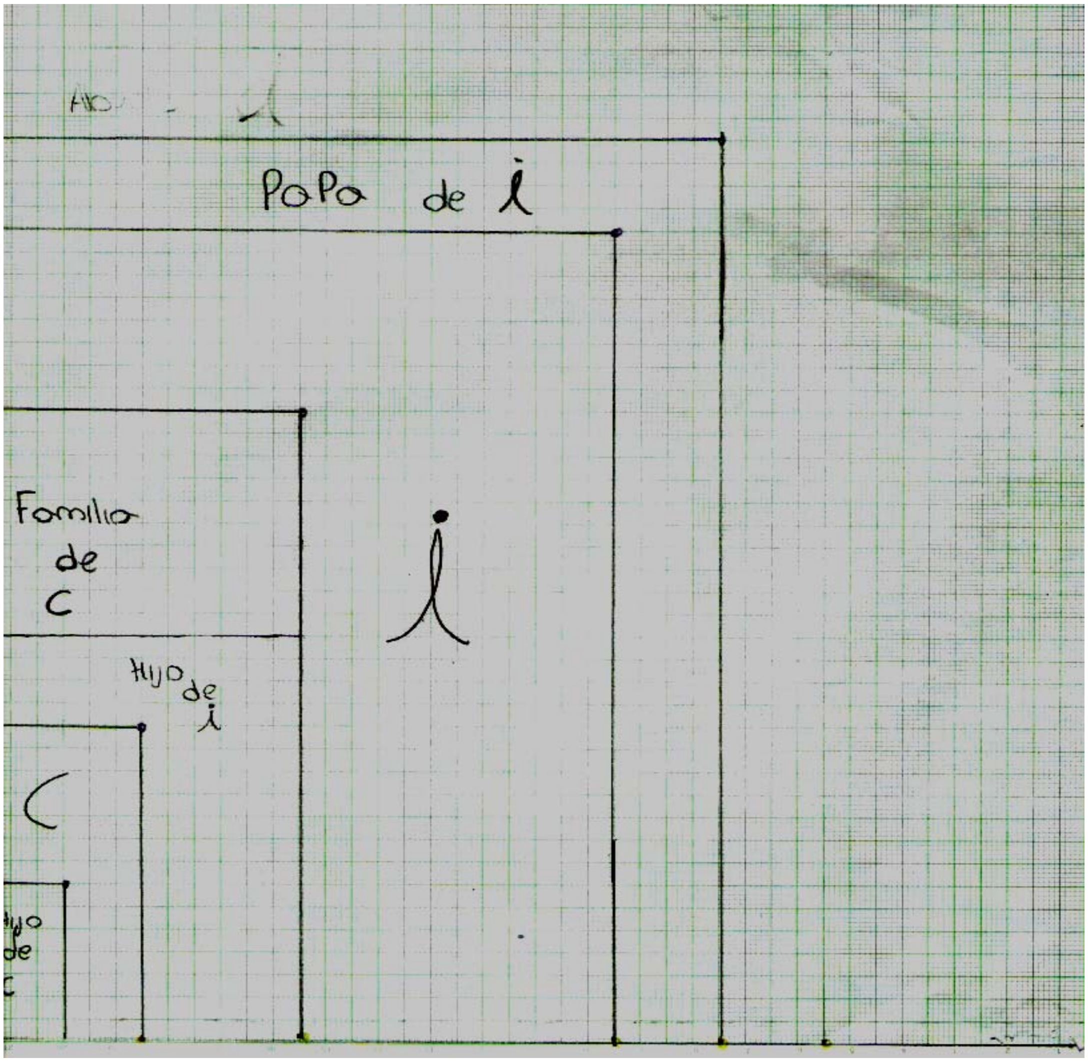
Es así, que quiero referirme antes de la construcción que el alumno elabora en cuanto a la gráfica, del apoyo que para él significa en el sentido de colocar sus datos de la situación experimental a través de una tabla de valores, esta le permite ordenar sus datos que serán plasmados posteriormente en una gráfica, en este sentido el MEN plantea, “Las tablas se pueden usar posteriormente para llevar a los estudiantes a la graficación de situaciones problema de tipo concreto, aunque quede restringida al primer cuadrante.” (MEN, 1998, p. 73), estoy identificado con este planteamiento pues en el proceso de investigación pude apreciar que estas tablas sirvieron para encontrar una relación con la gráfica y un análisis de ésta, con la modelación matemática.

Ahora una gráfica lineal no se debe quedar en un simple dibujo de una línea recta, es decir, esto sería ver este modelo como un proceso totalmente estático, que se limita simplemente a un dibujo o representación de la misma. Este es un gráfico o modelo que debe mostrar la variación entre las variables o magnitudes que están incluidas en este aspecto de función lineal. Debemos presentarlo como un modelo dinámico que permita un análisis de características y situaciones y que a su vez sirve de soporte para observar otros aspectos que ya he enunciado en páginas anteriores, al respecto el MEN dice:

> Por su parte, las gráficas cartesianas también pueden ser introducidas tempranamente en el currículo. Ellas hacen posible el estudio dinámico de la variación. La relación explícita entre las variables que determinan una gráfica puede ser iniciada con situaciones de variación cualitativa y con la identificación de nombres para los ejes de coordenadas. (MEN, 1998, pp. 73-74)

Es precisamente un gráfico cartesiano, el que muestran los estudiantes al relacionar las variables en juego. En este análisis de proporcionalidad directa simple y modelo lineal de la forma f(x)=kx el cual debe establecer y plasmar por medio de una representación gráfica, para su posterior análisis de las estructuras que la conforman.

Veamos algunas de las observaciones y razonamientos que los estudiantes de séptimo grado participantes de la investigación hacen con respecto a la gráfica cartesiana de la función lineal de la forma f(x)= kx.




**(FELIPE, Guía 4, Octubre 26 de 2006)**

**“Al unir estos vértices no da línea recta pues, por que todos son diferentes, y no tienen nada en común, por que las familias son diferentes, unos son familia de C y otros de I, entonces como.”**

**(FELIPE, Diálogo, Octubre 26 de 2006)**

**“Entre los familiares de I, si se que es una línea recta, por que todos aumentan lo mismo de largo y lo mismo de ancho”**

**(FELIPE, Diálogo, Octubre 26 de 2006)**

Las anteriores fueron algunas interpretaciones que FELIPE entregó acerca de esa relación entre proporcionalidad directa simple y el modelo gráfico o cartesiano de la función lineal, a continuación quiero exponer un corto diálogo que sostuve con el estudiante FELIPE, acerca de esa relación que estoy revisando.

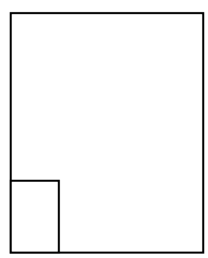
**PROFESOR: “¿Por qué es semejante a C?”**

**FELIPE: “Pues, por que usted pone C encima de este rectángulo, y parece que el largo y el ancho aumentan lo mismo.”**

**PROFESOR: “¿Por qué?”**

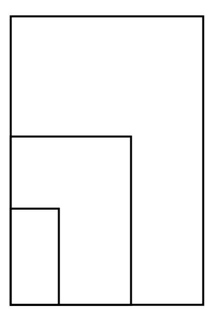
**FELIPE: “Por que usted a simple vista lo pude ver, entonces, tienen un parecido, vea.”**

**PROFESOR: “¿Qué pasa con éstos vértices?”**



**FELIPE: “Pues que van rectos.”**

**PROFESOR: “Traiga el otro también”**



**PROFESOR: “¿Qué observa entre esos vértices?**

**FELIPE: “¡Queda una línea recta!”**

**PROFESOR: “¿Por qué empieza a aparecer una línea recta?”**

**FELIPE: “Por que C e I son semejantes también”**

**(PROFESOR y FELIPE, Diálogo, Octubre 27 de 2006)**

Ahora, le indague en la entrevista a FELIPE nuevamente por la relación entre proporcionalidad directa simple y modelo lineal, estos fueron algunos de sus aportes con respecto a dicha relación.

**“Pues que al unir los vértices de C, I y sus familiares, no nos quedaría una línea así recta, recta, no.”**

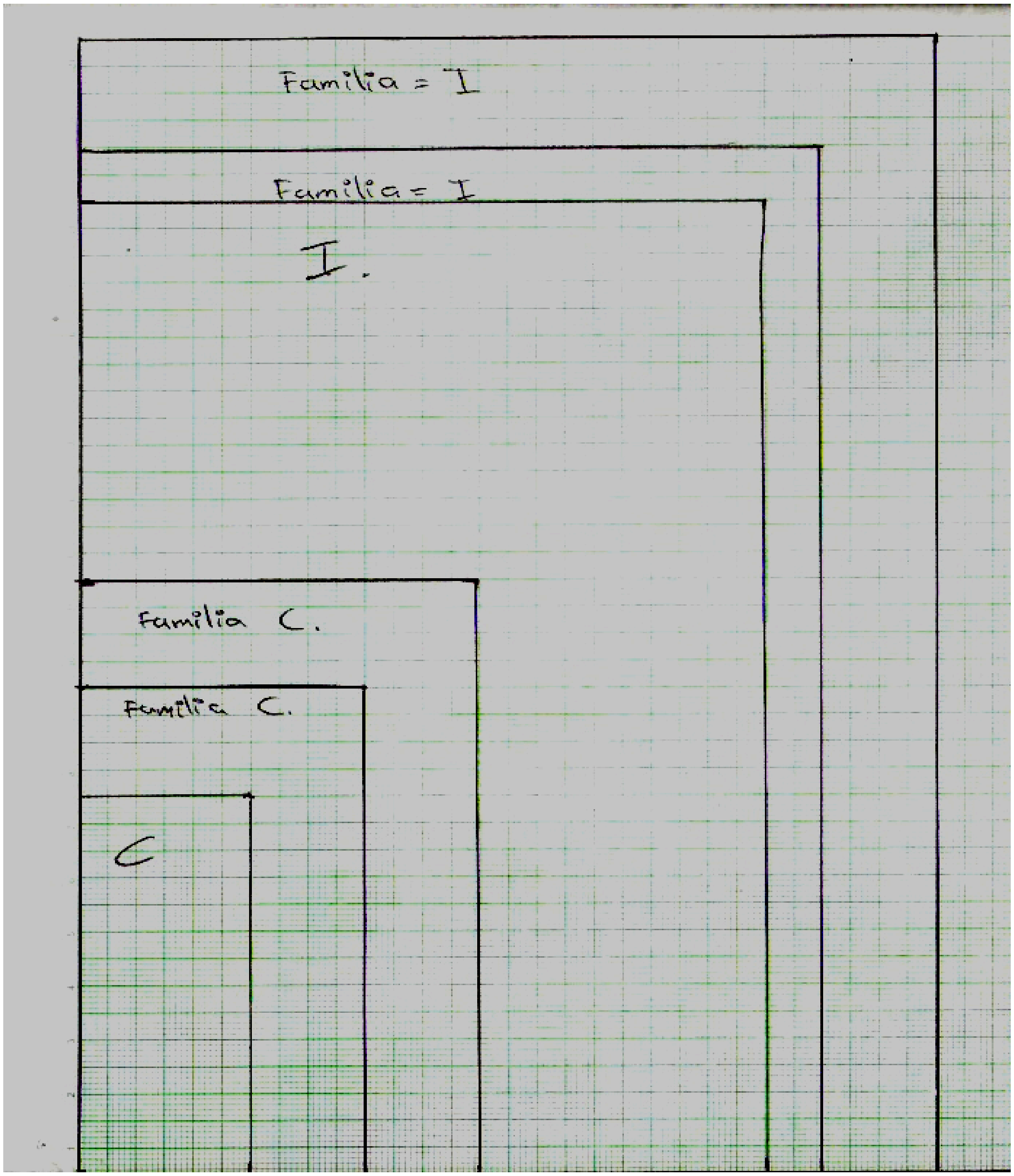
**“Por que como le digo, los familiares de C, no son semejantes a los familiares de I.”**

**“La familia de C está muy aparte de la familia de I, osea no tienen nada que ver.”**

**“Si yo uno solo los de la familia de C, pues yo diría que tendría una línea recta. Entonces puedo concluir que los de C son proporcionales, muy proporcionales, entonces tenemos semejanza, una línea recta”**

**(FELIPE, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

Aunque para DAVID la relación entre proporcionalidad directa simple y modelo lineal no es totalmente clara, deja apreciar ciertas nociones que se fueron encaminando poco a poco hacia el encuentro de dicha relación. Observemos apartes de la guía 4 y la información recopilada en la entrevista.



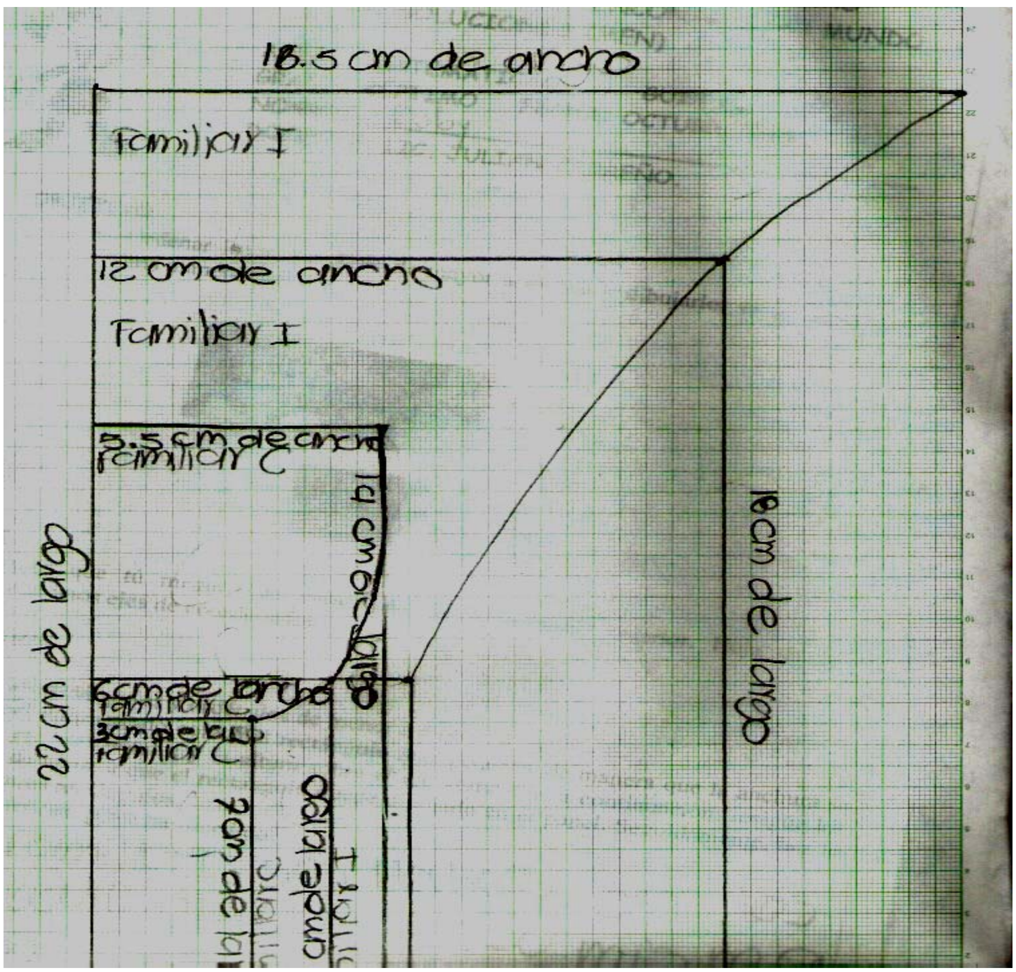

**(DAVID, Guía 4, Octubre 26 de 2006)**

**“Al unir todos los vértices de C e I, no da línea recta porque, por ejemplo la C, la figura es diferente, si ve, entonces C es como mas larga, entonces va a quedar el desnivel ahí.”**

**(DAVID, Diálogo, Octubre 26 de 2006)**

> **“Por ejemplo, al tener una medida proporcional, entonces va a quedar, al trazar la línea va a quedar recta, por que van a ser como en escala la suma de los lados, en cambio así como uno es mas grande, otro es mas pequeño y no van en proporcionalidad entonces van a quedar diferentes.”**
>
> **(DAVID, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

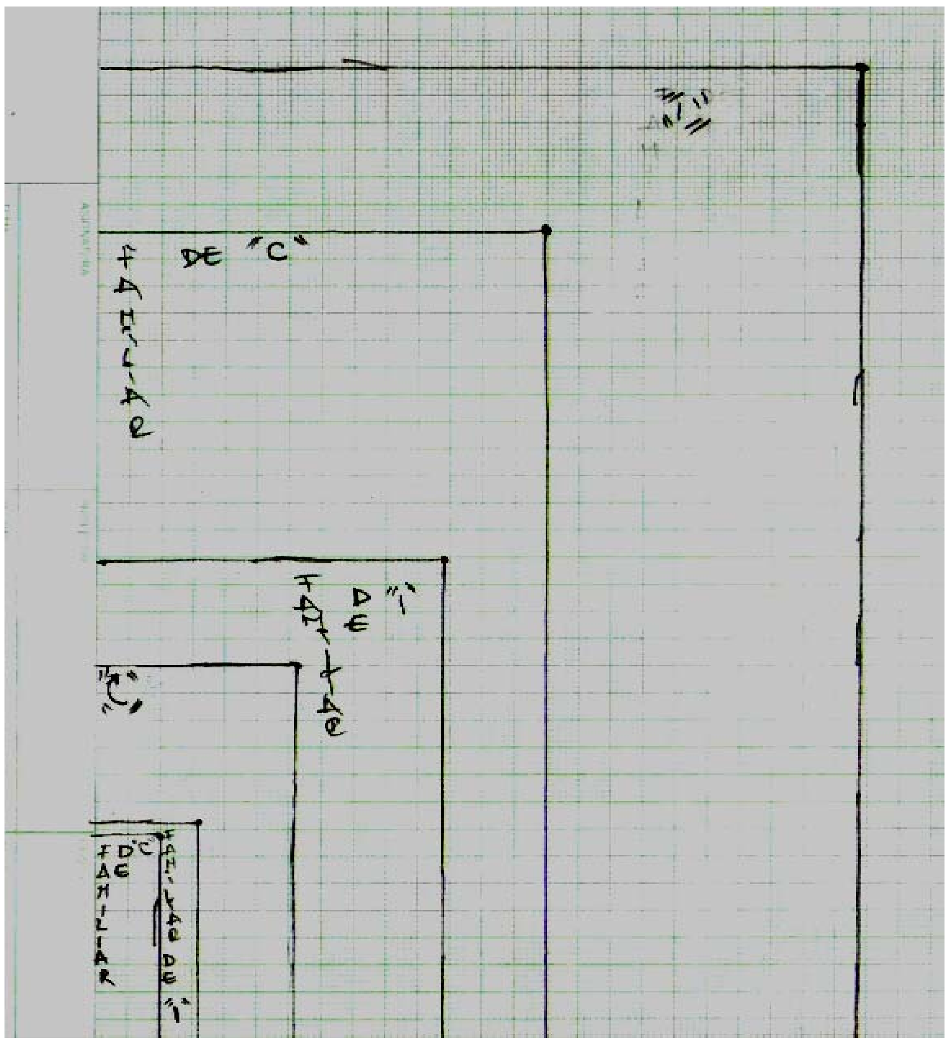
En las gráficas de RUBY, se puede apreciar que el modelo lineal para ella no es tan claro, con respecto a la proporcionalidad directa simple que presentan sus rectángulos.




**(RUBY, Guía 4, Octubre 26 de 2006)**

Pero el anterior modelo gráfico que obtuvo RUBY, no es lineal por una razón que detecte en las observaciones directas de la investigación, como es que sus rectángulos, y los familiares de los rectángulos no mantienen una proporcionalidad, precisamente por el error frecuente de creer que la proporcionalidad siempre se mantiene cuando aplico una estrategia aditiva, entonces claro, al no mantener la proporcionalidad entre sus rectángulos, no tendrá un gráfico cartesiano que obedece a un modelo lineal de la forma f(x)=kx.

Observemos los argumentos entregados por SEBASTIÁN con respecto al modelo lineal que se relaciona con la proporcionalidad directa simple.




**(SEBASTIÁN, Guía 4, Octubre 26 de 2006)**

**“Al unir los vértices de los rectángulos C e I y sus familiares no da recta, porque los familiares de C son semejantes a C, no a I, no tienen nada que ver, entonces pueden ser rectángulos todos, pero las medidas siempre van a ser diferentes y no va a quedar recta.”**

**(SEBASTIÁN, Diálogo, Octubre 26 de 2006)**

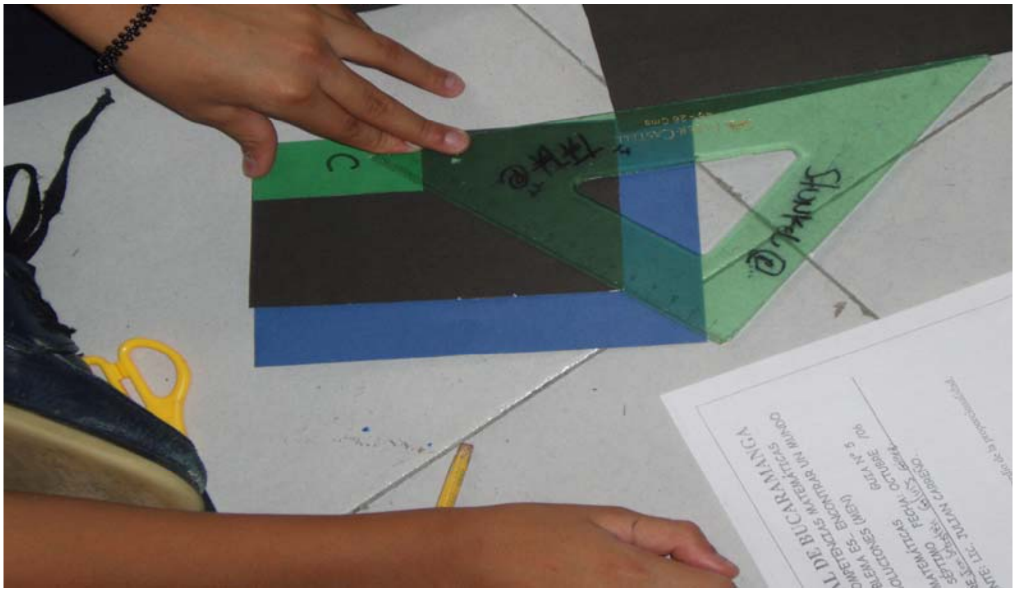
**“Osea que no son semejantes, no cuadran, los vértices no forman una línea, una línea recta.**
**Si, yo esperaba una línea recta, pero después ya de cuadrarlos en la hoja milimetrada me di cuenta que no salía, porque son dos familias muy diferentes, no son semejantes, los de la familia C a la familia de I.**
**La familia de C forma una línea recta, igual que la familia de I, pero solo entre ellos.”**

**(SEBASTIÁN, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

**“Cogí el rectángulo que hice con la proporción de 15/10 la de acá y la puse en el medio de I y C y me dio, los vértices son rectos. Todos los vértices, los de C, osea forman una línea recta, los de C, los de el familiar que todavía no se de cuál es y el de I.”**

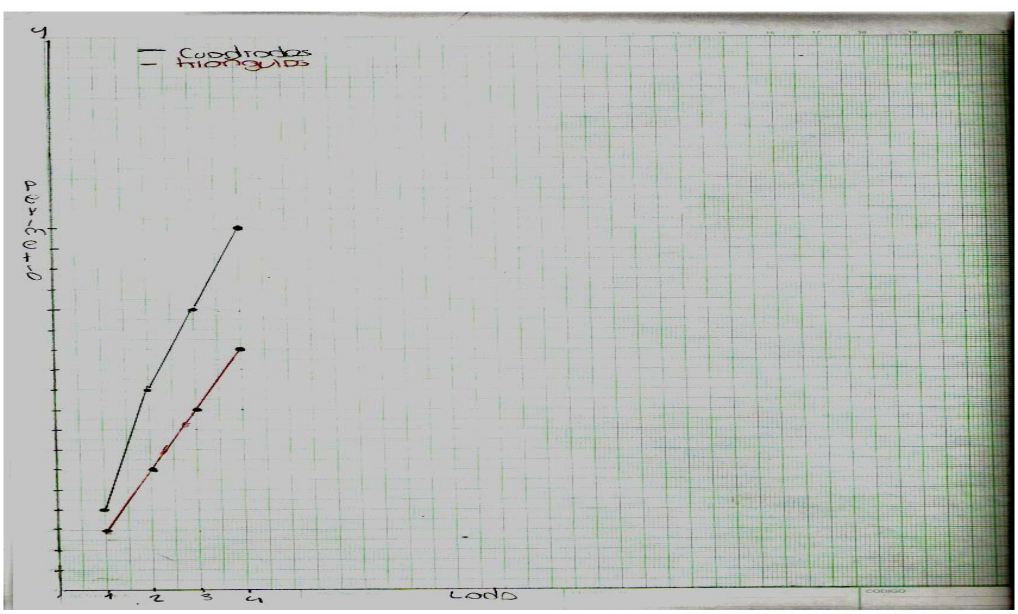
**(SEBASTIÁN, Diálogo, Octubre 27 de 2006)**

Observo que Sebastián tiene de cierta forma adquirida la relación directa que existe entre la proporcionalidad directa simple y el modelo lineal, como pude corroborar en el desarrollo de cada una de sus guías y los diálogos realizados con el estudiante, así mismo en la socialización de las actividades dicha argumentación siempre estuvo clara.



**(SEBASTIÁN, Fotografía, Octubre 27 de 2006)**

En las siguientes interpretaciones de FELIPE, MARCELA y SEBASTIÁN, me encuentro con una apreciación muy valiosa para mi investigación, en el sentido que estos estudiantes trasladan la proporcionalidad directa simple que tienen en un material concreto y también en unas magnitudes de las dimensiones de los rectángulos y triángulos, a la gráfica del plano cartesiano evidenciando nuevamente la construcción de la idea intuitiva de función lineal de la forma f(x)=kx.



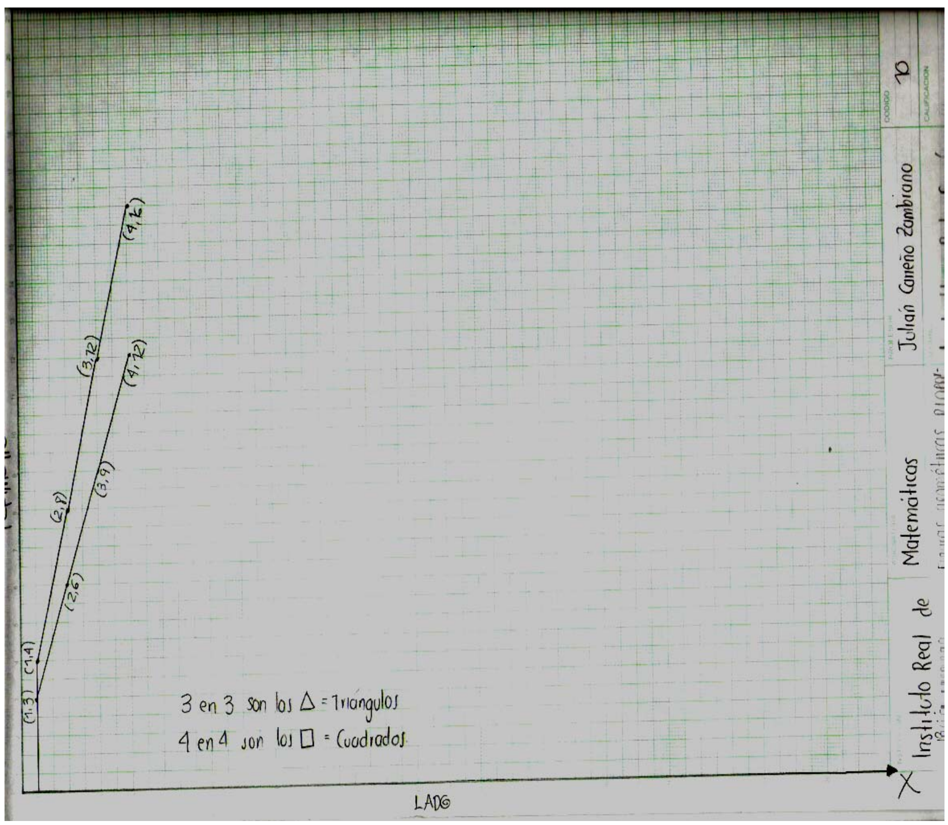
Analisis de graficos

La linea de la grafica de los cuadrados quedo mas lejos pero es una proporcionalidad directa por

La linea de los triangulos quedo cerca tambien hay proporcionalidad directa

porque en el lado y el perimetro aumentan y el resultado de las divisiones son iguales

**(FELIPE, Guía 8, Noviembre 2 de 2006)**



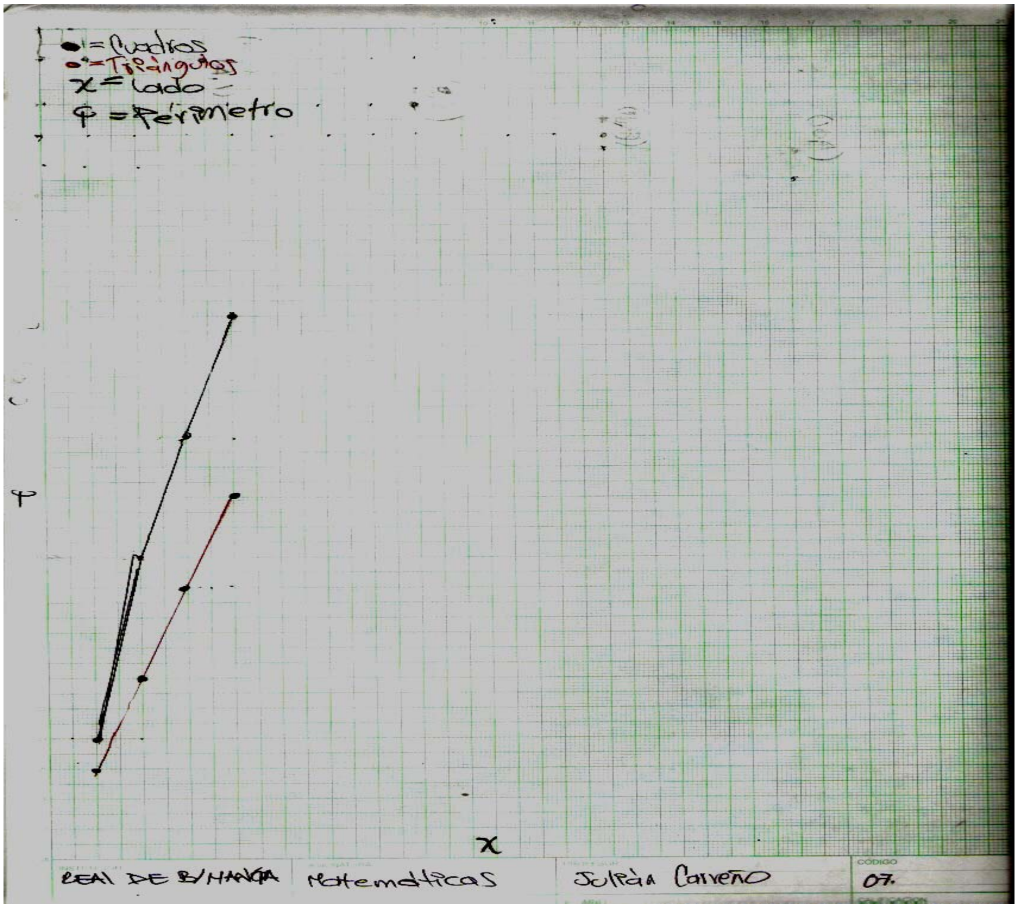

Explicación:

- En las medidas del cuadrado van aumentando de 4 en 4 como lo demuestra la gráfica.
- En los triángulos se va aumentan de 3 en 3, poreso el 3 en la gráfica se ve menor que en el del cuadrado.

**(MARCELA, Guía 8, Noviembre 2 de 2006)**

**“Pues bueno eso también viene por las medidas no, también se va dando entonces va sacando la línea, es decir, prácticamente sale la línea.”**

**(MARCELA, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**




**(SEBASTIÁN, Guía 8, Noviembre 2 de 2006)**

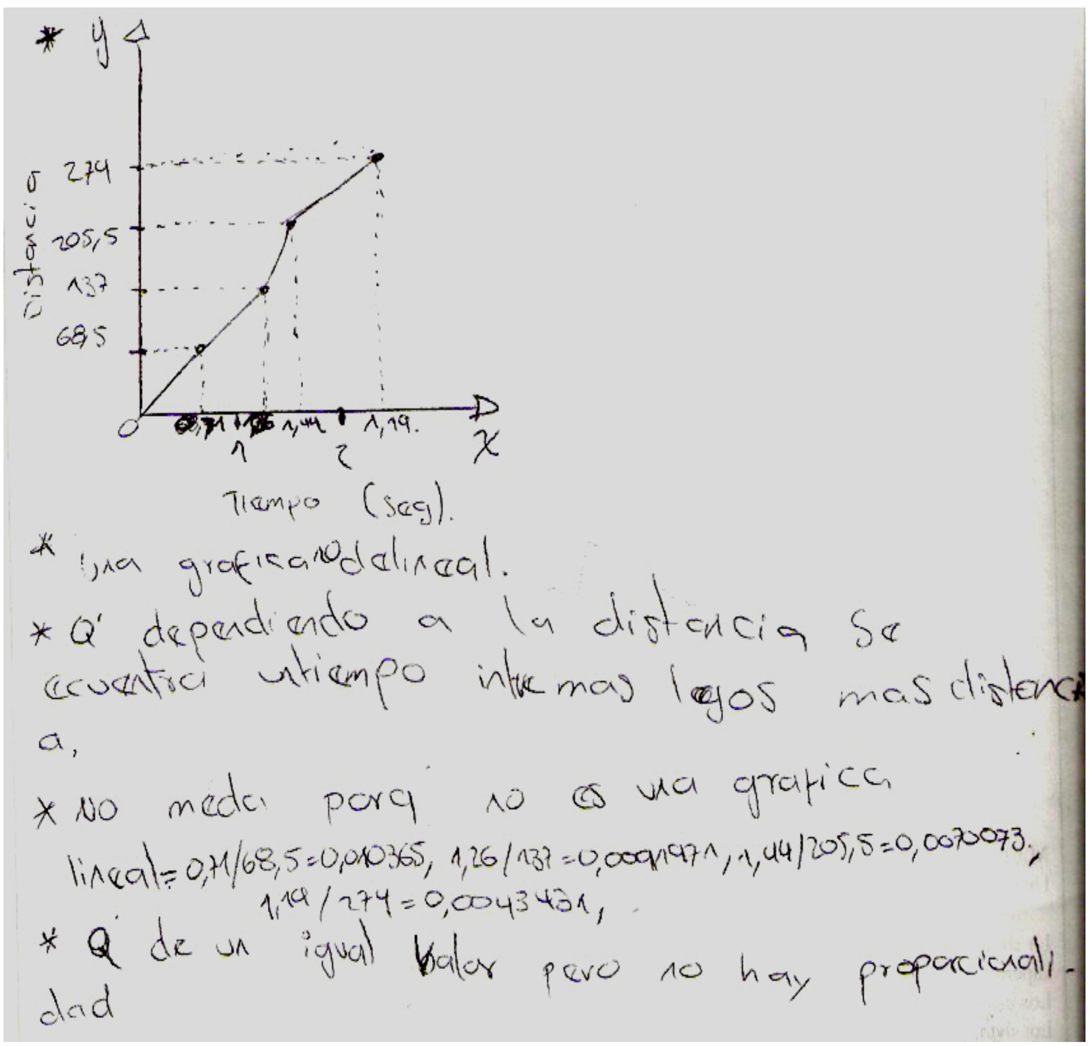
**“me dio línea recta, debe ser por la semejanza en los vértices, entre sus medidas, debe ser la semejanza.”**

**(SEBASTIÁN, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

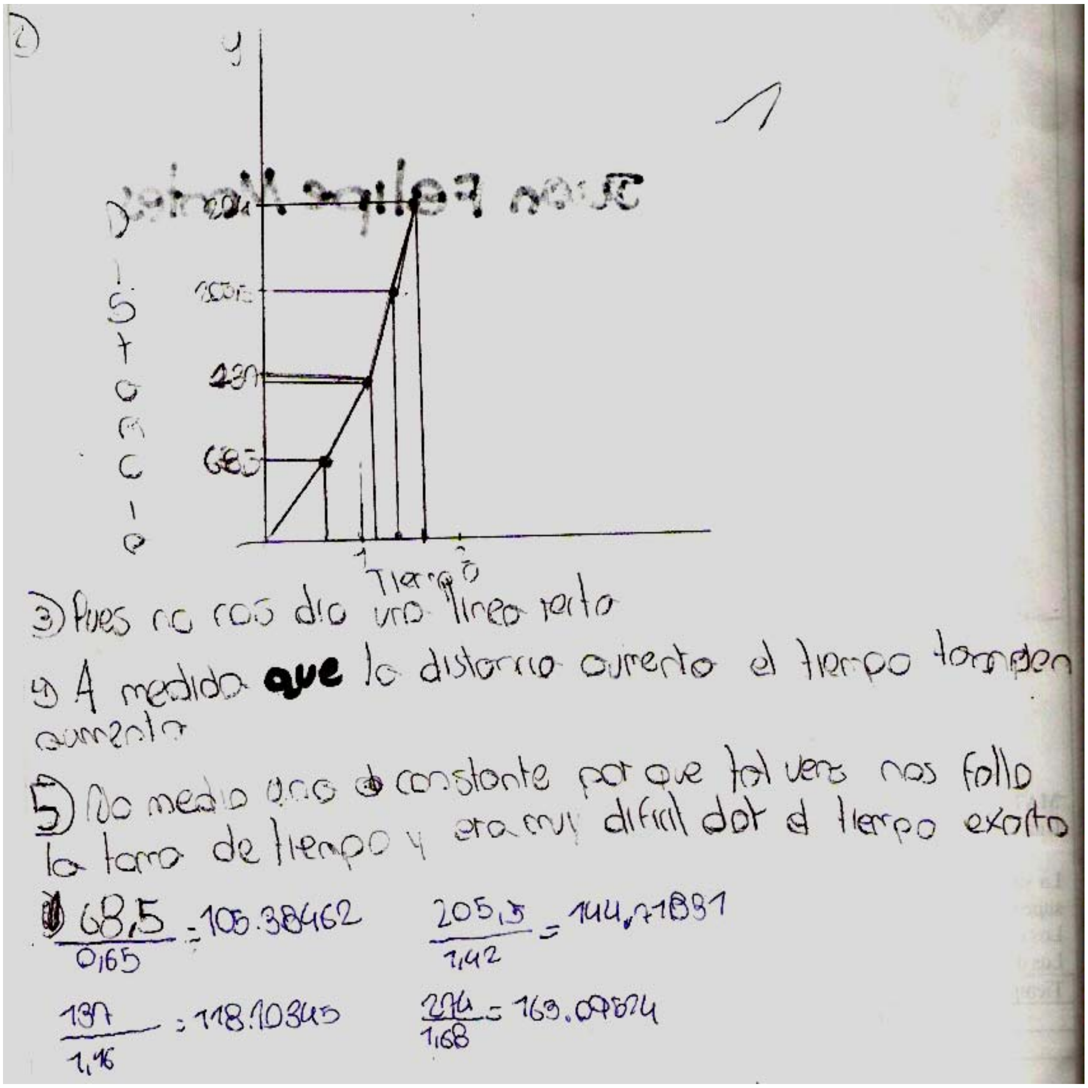
Aquí se puede ver que en los anteriores argumentos entregados por los estudiantes, la asociación por medio del razonamiento proporcional entre la proporcionalidad directa simple y la función lineal de la forma f(x)=kx, por lo menos de una forma muy intuitiva y a través del gráfico cartesiano.

En contraste con las anteriores actividades, diseñé la actividad número 10, como una forma de ver hasta que punto los estudiantes habían asimilado la proporcionalidad directa simple con el modelo lineal; entonces propuse una actividad que consistió en dejar rodar una esfera por la superficie de un plano inclinado que tenía una longitud de 274 cm., se dejaba rodar a partir de la parte superior del plano inclinado. Los estudiantes tomaban los tiempos y distancias recorridas para intervalos de tiempos distintos. Después con los datos que ubicaron en una tabla se procedía a contestar una serie de preguntas.

Algunas de las respuestas que me interesaron para este caso, las presento a continuación.




**(DAVID, Guía 10, Noviembre 7 de 2006)**




**(FELIPE, Guía 10, Noviembre 7 de 2006)**

Observo entonces que en la mayoría de los casos la gráfica o el modelo cartesiano que caracteriza a la función lineal, que es la línea recta, esta bien asociada por los estudiantes. Se observa la relación que ellos realizan de forma directa con proporcionalidad directa simple en las situaciones tratadas.

Respecto a los gráficos cartesianos que caracterizan este modelo de función lineal de la forma f(x)=kx y su relación con la proporcionalidad directa simple, Fiol y Fortuny, (1990), expresan, “Los gráficos cartesianos ilustran el concepto de variación, caracterizando el cambio proporcional. Este cambio proporcional es lineal en el sentido de que los puntos de la gráfica de la función de proporcionalidad están sobre una línea recta.” (Fiol y Fortuny, 1990, p.84).

Quiero rescatar una idea importante que expresa el planteamiento anterior, en el sentido en que la variación caracteriza precisamente el cambio proporcional mostrando nuevamente que este es un proceso de interrelación entre variables, que a su vez con esos continuos cambios en la proporcionalidad directa simple generan y muestran un proceso totalmente dinámico.

Insistir en la tabla de valores como herramienta que permite construir las gráficas de proporcionalidad directa simple, en el sentido en que estas posibilitan una primera mirada de la variación y el cambio y dan unas primeras luces para la construcción y análisis del modelo matemático o el gráfico cartesiano que será una línea recta, sobre este particular Obando et al., (2006), manifiestan:

> Es pertinente anotar que este tipo de problemas puede ser modelado a través de una tabla de correspondencia entre los dos espacios de medida, la cual, además de construir una buena herramienta para comprender las relaciones de proporcionalidad que están involucradas, en tanto que permite ver la dependencia de las variaciones de los valores de un espacio de medida con respecto al otro espacio de medida, también permite realizar representaciones gráficas en el plano cartesiano. (Obando et el., 2006, pp.127,128)

Identificado con el planteamiento realizado por Obando et al., (2006), estos aspectos se plasman en mi trabajo de investigación, cuando observé que los estudiantes manifiestan la fortaleza que posee la tabla de valores, como un primer elemento precisamente para ver el cambio proporcional que se está realizando y que posteriormente este se observará en un gráfico cartesiano, como una línea recta, que modeliza estas propiedades de la proporcionalidad directa simple.

Encuentro entonces otra justificación mas, para manifestar que una alternativa de construcción de la idea intuitiva de la función lineal de la forma f(x)=kx, es precisamente la proporcionalidad directa simple, pues partiendo de la segunda se llega a la primera, por medio de unos razonamientos proporcionales que estructuran y forman un camino para llegar al modelo lineal.

En páginas anteriores hable de una variación proporcional que es constante en la medida en que están cambiando las variables, estas no lo hacen por si mismas sino que un cambio de una magnitud dije que necesariamente genera otro cambio en la otra magnitud, que esta determinado lógicamente por un cambio proporcional constante, que a su vez dicho cambio constante es el que en cierta medida garantiza que al plasmar esta variación en un modelo cartesiano este resulte ser una recta, en este aspecto Posada et al., (2006), manifiestan:

> Se puede probar que las funciones lineales se representan en el registro gráfico cartesiano a través de una línea recta, esto se observa en que independientemente de la longitud del segmento tomada para la cantidad de magnitud control y los puntos que lo definen, el cambio en la otra cantidad de magnitud será proporcional a éste, es decir, el cociente entre ellos determina una constante. (Posada et al., 2006, p. 139)

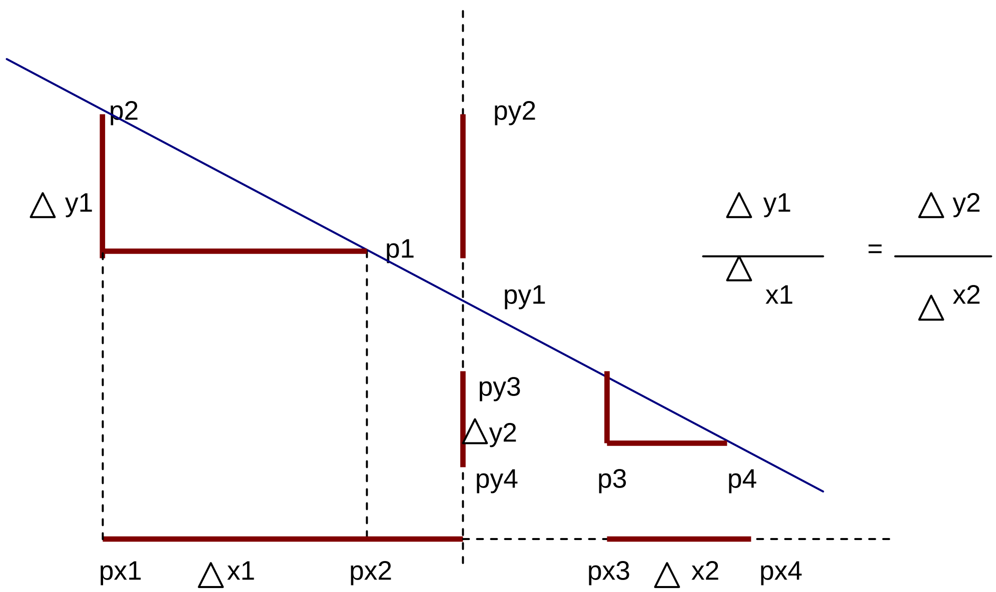
Entonces algo si esta quedando claro en este análisis y es la condición en la cual la razón de cambio constante genera una función lineal que para nuestro caso es de la forma f(x)=kx, es decir que el hecho que la proporcionalidad directa simple realice un cambio proporcional y constante garantiza la existencia del modelo lineal.

En este sentido insisto, en que la proporcionalidad directa simple se convierte entonces en una alternativa para la construcción de la idea intuitiva de función lineal de forma f(x)=kx, en estudiantes de séptimo grado.

Entonces la constante de proporcionalidad juega aquí en el modelo cartesiano un papel muy importante, por que de cierta forma garantiza el comportamiento lineal o de línea recta cuando expresamos este cambio proporcional en un gráfico, como otra representación geométrica de la proporcionalidad directa simple. Es en esta forma clara, y en la cual me identifico con el planteamiento que hacen Posada et al., (2006), quienes conceptúan al respecto:

> Dicha constante se visualiza en este registro, en uno de los siguientes aspectos: a) la congruencia entre los ángulos formados por la representación del registro dado y cualquier recta paralela al eje x, o b) por la semejanza presentada entre todos los triángulos

rectángulos determinados por los segmentos diferencia correspondientes obtenidos. Lo anterior justifica el hecho que "toda recta en el registro de representación gráfico cartesiano es la representación de una función lineal", ver siguiente gráfico. En conclusión, en el registro gráfico toda función lineal tiene como representación gráfica de una línea recta y toda línea recta en registro gráfico, está asociada a una función lineal.




Independientemente del incremento en y la relación por cociente con respecto al incremento en x se conserva. (Posada et al, 2006, p.139)

He visto entonces las diversas justificaciones para encontrar en la proporcionalidad directa simple y la gráfica de la función lineal de la forma f(x)=kx, una relación muy directa entre estos.

Se muestra entonces que este modelo gráfico o cartesiano permite realizar un análisis por parte de estudiantes que muchas veces lo pasan un poco desapercibido. Mí propuesta de investigación quiere resaltar, que en el diálogo de construcción de conceptos con los estudiantes, generemos en ellos esa cultura del análisis detallado de cada una de las características de la proporcionalidad directa simple, como una alternativa hacia ese primer acercamiento que el estudiante de grado séptimo comienza a realizar del concepto de función lineal, que en nuestro caso particular modelo lineal de la forma f(x)=kx, visto como un modelo de pensamiento variacional.

La socialización de esta característica que presenta la proporcionalidad directa simple se realizó en medio del análisis en plenaria de grupo donde cada uno de los estudiantes participó con la exposición de los argumentos anteriormente expuestos acerca de la generación de la gráfica del modelo lineal de la forma f(x)=kx y su relación con la proporcionalidad directa simple. En esta socialización fue común que los estudiantes manifestaran que “si hay proporcionalidad entonces tendremos una gráfica de línea recta”.

He hablado de grafica de la función lineal, y de forma acertada lo expone Guacaneme, (2001), quien reitera que la constante de proporcionalidad es la que en gran porcentaje permite ese dibujo en el plano cartesiano, ya desde una óptica funcional:

> El hecho de que la constante de proporcionalidad permita describir tanto la correspondencia f entre las cantidades de las magnitudes proporcionales, así como la correspondencia g entre las respectivas medidas de las cantidades posibilita y soporta la posibilidad de graficar la función g en un plano cartesiano, en tanto representación de la función f. (Guacaneme, 2001, p.121).

Esta mirada fortalece desde un punto de vista formal de las matemáticas, que la gráfica de la proporcionalidad directa simple relacionada al modelo lineal será una línea recta, las funciones, las correspondencias, las variaciones, los cambios constantes, la variación proporcional, permiten encontrar varias relaciones entre proporcionalidad directa simple e idea intuitiva de función lineal de la forma f(x)=kx, en estudiantes de séptimo grado, visto bajo la mirada del pensamiento variacional.

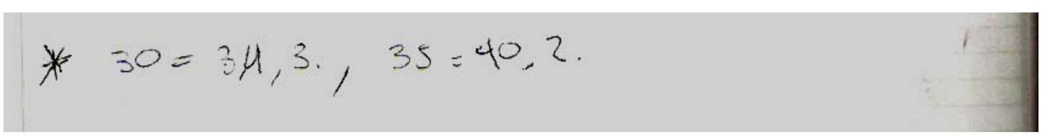
- **EL MODELO LINEAL f(x)=kx, UNA FUNCIÓN CRECIENTE Y MONÓTONA.**

Otra de las características que consideré como punto de observación en el análisis en este tipo de función f(x)=kx, es que es una función de tipo creciente.

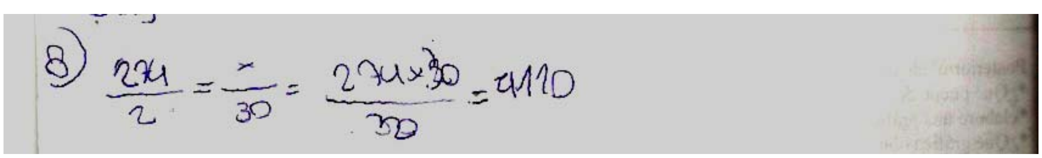
Los estudiantes analizados muchas veces, después de haber construido la gráfica se quedan en un modelo local, simplemente desconociendo la riqueza de proyección que ésta función pude tener, al ir mas allá de un simple modelo local y conservarlo como un modelo de crecimiento proporcional que se extiende hasta el infinito, lógicamente cuando no hay restricciones y analizado para nuestro caso al primer cuadrante del plano cartesiano.

En este orden de ideas presento los análisis hechos por los estudiantes cuando se les indagó en el desarrollo de la actividad 10, acerca de proyectar información sobre la gráfica en cuanto a las distancias recorridas para los tiempos transcurridos respectivamente.

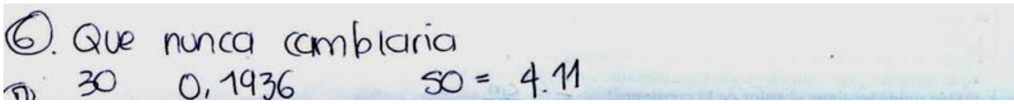
La pregunta concreta planteada fue, ¿qué distancia habrá recorrido la esfera después de 30, 35, 40, 50, 100 segundos respectivamente?, aunque todos ellos habían observado que este era un modelo no lineal, pues así estaba planteada la situación, tuvieron gran dificultad para asociar estos tiempos y recorridos como una visión no local de la situación, en la pregunta realizada. Veamos sus respuestas.




**(DAVID, Guía 10, Noviembre 7 de 2006)**



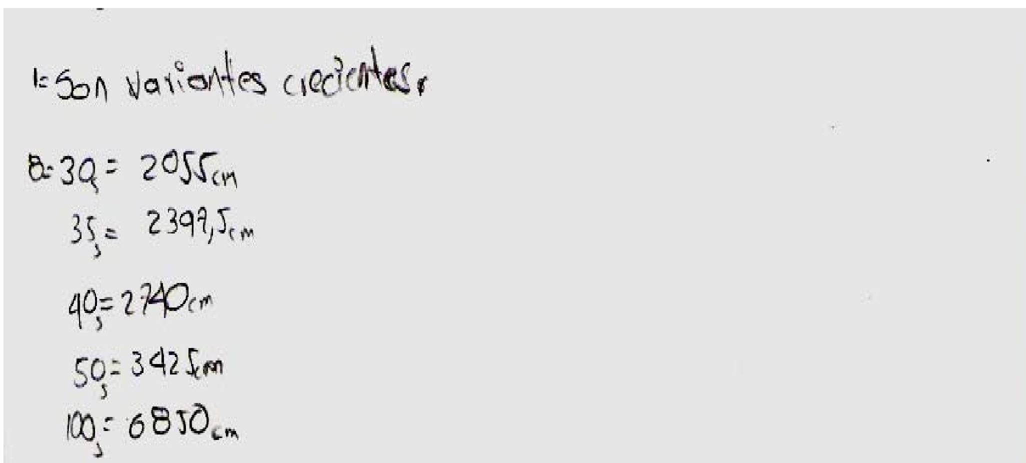

**(FELIPE, Guía 10, Noviembre 7 de 2006)**



6. Que nunca cambiaria
7. 30 0,1936 50 = 4.11

**(MARCELA, Guía 10, Noviembre 7 de 2006)**

Una de las respuestas que me llamó la atención es la presentada por SEBASTIÁN, quien fue el estudiante que más se acerco a los tiempos reales, y que estaba convencido que este modelo no obedecía a una proporcionalidad directa simple, pero como pocos vio que este no es un modelo local o finito, si no que con el comportamiento de la función podía encontrar los tiempos pedidos.



1: Son variantes crecientes.

8: 30 = 2055cm

35s = 2397,5cm

40s = 2740cm

50s = 3425cm

100s = 6850cm

**(SEBASTIÁN, Guía 10, Noviembre 7 de 2006)**

observo entonces esa dificultad presentada por los estudiantes de ver el modelo funcional como algo local, mas no como un modelo extendido que permite ver la variación que esta presentando la situación de análisis.

En otros apartes de la investigación pude apreciar, como algunos estudiantes de una forma muy primaria realizan afirmaciones que interpreto como esa idea intuitiva que los alumnos, sin tener ningún contacto con la definición formal de función, manifiestan de una u otra forma que este modelo funcional es creciente.

> **“Que van creciendo, van creciendo, osea mas altas que las otras”**
>
> **(FELIPE, Diálogo, Octubre 26 de 2006)**

> **“Por que va aumentando, lo que yo dije anteriormente, por que va aumentando 1 cm, que va engrandeciendo el cuadrado, hasta que sus vértices se unen y queda una línea recta, aumenta la longitud y va aumentando cada vez mas centímetros.”**
>
> **(RUBY, Entrevista, Noviembre 9 de 2006)**

Esta característica de función creciente y monótona, no es fácil de ser asimilada por estudiantes de séptimo grado, se puede hacer un acercamiento muy intuitivo a estas características de la función lineal de la forma f(x)=kx, será necesario para esto colocar un poco de más atención, en estas características y trabajarlas un poco más a fondo.

Como el caso de estudio de la función es de la forma f(x)=kx, entonces con respecto a este tipo de función Fiol y Fortuny, (1990), plantean, “El valor numérico de y es directamente proporcional al de x, la constante k es su constante de proporcionalidad y representa el valor de y correspondiente a la unidad de la variable x. La función lineal y = kx **es monótona**; para valores positivos **es monótona creciente**” (Fiol y Fortuny, 1990, p.86). Es precisamente esa variación proporcional la que permite observar que la función en cuestión, es decir, de la forma f(x)=kx es monótona, brinda ese cierto grado de seguridad, y que en el sentido en que una variable aumenta su respectiva imagen también lo hace dando una significación entonces de función creciente.

Con respecto a la característica de análisis que la función lineal de la forma $f(x)=kx$, tiene con respecto a la proporcionalidad directa simple, Guacaneme, (2001), plantea:

> En caso que el punto P estuviese ubicado en el cuadrante I o III, la proporcionalidad implicaría una función creciente, es decir una correspondencia caracterizada por la conservación del orden de manera estricta (i.e., si a< c <b... entonces a'< c'< b'< ...), que es la habitualmente presentada a través de la afirmación “si una cantidad aumenta la otra aumente proporcionalmente”. (Guacaneme, 2001, p.120)

Claro esta que en el planteamiento hecho por Guacaneme, en nuestro estudio de investigación de la función lineal de la forma $f(x)=kx$, se restringe solamente al primer cuadrante y es el acercamiento a esa primera idea intuitiva que el estudiante de séptimo grado debe ir formando, para que en el siguiente grado llegue con unos primeros conocimientos de lo funcional y en el caso particular la función lineal $f(x)=kx$.

De esta forma he hablado de algunas características de la función lineal de la forma $f(x)=kx$. Es lógico que en este tipo de función se pueden analizar otros aspectos, pero en mi estudio y a manera de mostrar este modelo de una forma intuitiva a los estudiantes de séptimo grado, quiero considerar que estos son unos primeros rasgos que son fundamentales en el momento de comenzar el camino de la modelación matemática por medio de las funciones, como ese proceso de variación y dinámica que requiere, sin llegar por ahora a generar una escritura netamente algebraica de lo que es la función lineal de la forma $f(x)=kx$.

Más que la escritura algebraica es que el estudiante se familiarice con esas primeras características que vistas desde una forma muy primaria de las estructuras multiplicativas, pasando por una fase secundaria por así llamarla de razonamiento proporcional, con nuestro caso particular de la proporcionalidad directa simple, y llegando a unas características de un modelo lineal con una forma determinada ( f(x)=kx ), éste estudiante sin llegar a escribir la expresión algebraica como tal encuentre otras herramientas para realizar un análisis funcional un poco más enriquecedor.

A manera de resumen en esta tercera categoría de análisis, quiero expresar que el modelo funcional sin duda brinda un análisis más profundo acerca de la proporcionalidad, y, que esta a su vez le entrega al estudiante una alternativa de encontrar su relación con el modelo funcional, al respecto Fiol y Fortuny, (1990), manifiestan:

> En el camino del estudio teórico del concepto de proporcionalidad, sin duda el lenguaje funcional hace un papel especialmente sintetizador. La idea de función lineal ayuda en la visualización de la relación entre dos variables, y en los experimentos científicos sean estos de física, química o biología nos permite predecir comportamientos, definir relaciones de dependencia, etc. (Fiol y Fortuny, 1990, p.81)

Hemos visto a lo largo de este trabajo de investigación la relación y agrupación de términos como razón, proporción, función lineal, todos ellos girando en torno a la proporcionalidad, es decir ellos interactúan para generar un mundo cambiante de variación, un modelo dinámico y no estático. En este sentido la función o el lenguaje funcional, se refiere a la manera como el hombre a podido expresar en términos de matemáticas las diversas situaciones que están a su alrededor, así lo expresa Fiol y Fortuny, (1990), “La función lineal pude considerarse como la matematización de las nociones cotidianas y utilitarias de proporcionalidad. La función lineal representa la estructura de la proporcionalidad, sirve para visualizar los diferentes estados de variación, es decir expresa su comportamiento cualitativo.” (Fiol y Fortuny, 1990, p.83).

Como el objetivo de mi trabajo es lograr una construcción del concepto de función lineal, pero de una forma muy intuitiva, no tan formal, ni con la escritura de rigor algebraico, sino que como ya lo he dicho en reiteradas ocasiones, que el estudiante de séptimo grado encuentre de cierta manera esa primera aproximación al concepto de función lineal de la forma f(x)=kx, partiendo desde el concepto de proporcionalidad directa simple. creo que este camino que recorrí nos plantea entonces, que ésta forma es válida en el sentido de introducir al estudiante de una manera muy básica al modelo funcional, así lo manifiesta Fiol y Fortuny, (1990), “La construcción mental del concepto de función lineal requiere una fase previa de experimentación de la variabilidad que favorezca el proceso abstracto de relacionar mentalmente números que representan las medidas, de objetos o cantidades.” (Fiol y Fortuny, 1990, p.83).

He tenido aparte de la caracterización que ya elaboré acerca del concepto de función lineal de la forma f(x)=kx, tres aspectos muy importantes que fueron de cierta forma relevantes en el análisis de esta categoría y que los quiero resaltar en este momento pues ellos encierran otras características especiales que debe tener el modelo funcional, y que siempre que se hable de función estarán allí presentes, tales conceptos o características son: variación, dependencia y correspondencia, tres aspectos o características propios de la función lineal, pero que éstas también son heredadas por la proporcionalidad directa simple cuando este se observa como un modelo funcional.

## REFLEXIONES

- La estructura multiplicativa se convierte en otro análisis de pensamiento variacional, que a su vez fija las primeras bases de razonamiento proporcional en la educación básica primaria, es dicha estructura la que brinda una posibilidad para que el niño comience a interpretar de cierta forma la noción de variación y covariación, que encuentra en cada uno de los razonamientos en torno a la estructura multiplicativa en la interpretación, desarrollo y análisis de una situación matemática de su contexto.

- El razonamiento proporcional se da como una alternativa para que el estudiante de séptimo grado logre solidificar aquellas bases recibidas en los primeros años de escolaridad, en torno a los conceptos de proporcionalidad y de esa forma evitar razonamientos no tan acertados como la utilización de la estructura aditiva, mas no multiplicativa, en casi todas las situaciones de proporcionalidad directa simple, permitiendo observar una deficiencia en el razonamiento proporcional, visto como ese proceso dinámico de variación proporcional.

- El modelo lineal se presenta como otra forma de ver la variación, y nuevamente la dinámica que muestra la proporcionalidad, ya que los estudiantes comienzan a percibirla en la medida en que transportan la proporcionalidad directa simple a un elemento de ayuda en el análisis tal como un gráfico cartesiano, el cual les otorga a estos alumnos, un nivel de razonamiento mayor de la proporcionalidad directa simple, conectado lógicamente con el modelo lineal, que ellos vieron, siempre esta asociado a la proporcionalidad directa simple.

- Los estudiantes tal como se evidenció en los distintos razonamientos, justificaciones, expresiones, y a lo largo de todo el trabajo de investigación, encontraron, a través de diferentes maneras, la relación explicita existente entre la proporcionalidad directa simple y la función lineal de la forma f(x)=kx, claro esta, que en el caso de la función lineal para nuestro nivel (grado séptimo), el acercamiento a esta función fue de una forma intuitiva, sin el rigor, pero entregando en el lenguaje manejado por el nivel de ellos características visibles de la función lineal de la forma f(x)=kx.

- El pensamiento variacional se hace presente en el proceso de razonamiento dinámico que se desarrolló en los estudiantes de grado séptimo, en el sentido de la relación que tienen las distintas variables en los diversos espacios de medida donde se este trabajando, de esta forma se determinó entonces que en la proporcionalidad directa simple y la función lineal de la forma f(x)=kx, existe una covariación entre los distintas magnitudes o espacios de medida, que es sustraída de los procesos encontrados en las situaciones de contexto y con algún significado específico para los estudiantes de séptimo grado.

- Paso a paso los estudiantes partiendo de la estructura multiplicativa como base primaria, pasando por el razonamiento proporcional, en especial de la proporcionalidad directa simple, con actividades en concreto y de manipulación de material didáctico, lograron establecer una relación explícita entre proporcionalidad directa simple e idea intuitiva de función lineal de la forma f(x)=kx, en este proceso de observación , manipulación, relación y comprensión, los estudiantes de séptimo grado, lograron una primera construcción, reitero, de forma intuitiva de la función lineal de la forma f(x)=kx, esta construcción realizada por los estudiantes siempre fue asociada por ellos al razonamiento proporcional y en nuestro caso particular a la proporcionalidad directa simple.

- Covariación es una característica propia de la proporcionalidad directa simple y función lineal de la forma f(x)=kx, es por esto que los estudiantes de séptimo grado la deben palpar en el sentido que dichos conceptos(proporcionalidad y función lineal) encierran variables que interactúan entre ellas, que el cambio en una genera cambios en las otras. De esta misma forma nosotros los maestros debemos propiciar ese espacio de análisis para que los estudiantes puedan encontrar características como la covariación en estos conceptos. y de esta manera se fortalezca un poco el razonamiento matemático de los estudiantes.

- La modelación matemática se encontró en mi trabajo de investigación, en el sentido en que esa misma covariación entre variables vista por medio de diversos razonamientos como la observación de material concreto, la toma de datos, Organización de los datos por medio de tablas y a través de éstas, empezar a determinar esos primeros niveles de observación de variación entre variables. Todas estas observaciones y registros permitieron encontrar en los estudiantes una herramienta fundamental para establecer una modelación matemática, este modelo matemático de la función lineal de la forma f(x)=kx, fue dado de una forma muy intuitiva, no en el sentido algebraico de la misma, pues este concepto será abordado de una manera mas amplia en álgebra en grados posteriores.

- Sería importante que futuras investigaciones continúen con este proceso que he presentado a ustedes, basado en la construcción de una reflexión hecha acerca de la proporcionalidad directa simple y noción de función lineal de la forma f(x)=kx, con base en investigaciones ya realizadas en este campo conceptual de las matemáticas. La idea que quiero expresar es que este camino que he presentado sea extendido a conceptos como la proporcionalidad inversa y proporcionalidad compuesta relacionándolos con otros modelos funcionales, generando así otras alternativas dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de estos conceptos matemáticos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


- FIOL, M., y, FORTUNY, J., Proporcionalidad Directa. La Forma y el Número. Madrid, editorial síntesis., 1990.

- GARCÍA, G., y, SERRANO, C., La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva social y cultural, Bogotá, grupo editorial gaía., 1999.

- GUACANEME, E., Estudio Didáctico de la Proporción y la Proporcionalidad: una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas. Cali, tesis de maestría., 2001.

- Ministerio de Educación Nacional (1998).Estándares Curriculares. Bogotá. Editorial Magisterio.

- Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos curriculares. Bogotá. Editorial magisterio.

- OBANDO, G., Proporcionalidad directa: del pensamiento numérico al variacional. In: Memorias séptimo encuentro colombiano de matemática educativa. Bogotá., 2005.

- OBANDO, G., VANEGAS, M., y, VÁSQUEZ, N., Pensamiento numérico y sistemas numéricos, Medellín, Editorial Artes y Letras Ltda., 2006.

- POSADA, F., GALLO, O., GUTIÉRREZ, J., JARAMILLO, C., MONSALVE, O., MÚNERA, J., OBANDO, G., SILVA, G., y VANEGAS, M., pensamiento variacional y razonamiento algebraico. Medellín, editorial artes y letras Ltda.., 2006.

- TOURNIAIRE, F., y, PULOS, S., Proportional Reasoning: A Review of the Literature. Traducción del artículo hecha por, Figueras, O y Ruiz, E. Articulo sin editorial.1985

- VASCO., C., El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. In: Memorias, tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas. Ministerio de educación nacional. Bogotá., 2002.