

**SELECTIVIDAD ESPECTRAL EN UN SISTEMA DE SENSADO COMPRESO DE
IMÁGENES ESPECTRALES BASADO EN APERTURAS CODIFICADAS EN
ESCALA DE GRISES**

ARMANDO RAFAEL CALDERÓN GRANADOS

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA
BUCARAMANGA
2013**

**SELECTIVIDAD ESPECTRAL EN UN SISTEMA DE SENSADO COMPRESO DE
IMÁGENES ESPECTRALES BASADO EN APERTURAS CODIFICADAS EN
ESCALA DE GRISES**

ARMANDO RAFAEL CALDERÓN GRANADOS

Trabajo de grado para optar por el título de:
Ingeniero de Sistemas

Director:

PhD (c). HENRY ARGUELLO FUENTES
Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática - UIS

Codirector:

HOOVER FABIAN RUEDA CHACON
Magíster en Ingeniería de Sistemas e Informática - UIS

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA
BUCARAMANGA
2013**

DEDICATORIA

Dedico el presente trabajo de grado a mis queridos padres. Los cuales han sacrificado mucho para que hoy en día, pueda estar en donde estoy.

Armando Rafael Calderón Granados

AGRADECIMIENTOS

Al director del proyecto, profesor Henry Arguello Fuentes, por ofrecerme la oportunidad de trabajar en este proyecto, por sus guía, por sus recomendaciones y por su paciencia.

Al codirector del proyecto, Hoover Fabián Rueda Chacón, por el tiempo dedicado, por la ayuda, los consejos y todo lo aprendido en este proceso.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	14
1. CODED APERTURE SNAPSHOT SPECTRAL IMAGER (CASSI)	16
1.1 FUNDAMENTOS DE COMPRESSIVE SENSING	16
1.1.1 Sensado de la señal	16
1.1.2 Representación dispersa de una señal	17
1.1.3 Muestreo incoherente	18
1.1.4 Fundamentos para la reconstrucción de la señal	18
1.2 IMÁGENES ESPECTRALES	19
1.3 ARQUITECTURA DEL CASSI	20
1.4 MODELO MATEMÁTICO BÁSICO DEL CASSI	21
1.5 RECONSTRUCCIÓN DEL CUBO DE DATOS	24
2. MODELO MATEMÁTICO MATRICIAL DEL CASSI	26
2.1 DEFINICIONES PRELIMINARES	27
2.1.1 Matriz de permutación cíclica	27
2.1.2 Matriz de orden inverso	27
2.1.3 Matriz de única fila o columna	28
2.1.4 Matriz identidad expandida	28
2.2 CORTE DEL CUBO DE DATOS	29
2.3 MODELO DE LA APERTURA CODIFICADA	30
2.4 EFECTO DEL ELEMENTO DISPERSIVO	31
2.5 MEDICIÓN DEL SENSOR MONOCROMÁTICO	31
3. DISEÑO DE APERTURAS CODIFICADAS SELECTIVAS	33
3.1 MEDICIÓN COMPRESA DESEADA	34

3.2 DISEÑO DEL COMPONENTE SELECTIVO (w)	35
3.3 DISEÑO DEL COMPONENTE ALEATORIO (r)	36
3.4 CONSTRUCCIÓN DE LA FILA DE APERTURAS CODIFICADAS	37
3.5 REDUCCIÓN DEL NÚMERO DE CAPTURAS	38
3.6 EXTRACCIÓN SELECTIVA DE MEDICIONES ESPECTRALES	40
3.7 MODELO DE SENSADO SELECTIVO	44
3.8 GENERALIZACIÓN DEL MODELO DE SENSADO SELECTIVO	48
4. SIMULACIONES Y RESULTADOS	53
4.1 PRELIMINARES	53
4.2 SIMULACIÓN DEL PROCESO DE SENSADO	55
4.3 IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO DE RECONSTRUCCIÓN	57
4.4 EXPERIMENTOS Y RESULTADOS	58
4.4.1 Reconstrucción selectiva de la imagen espectral	58
4.4.2 Comportamiento del parámetro ρ	60
4.4.3 Reducción del número de capturas	61
4.4.4 Beneficios del sensado selectivo mediante perfiles espectrales grises	63
5. CONCLUSIONES	67
6. RECOMENDACIONES	69
BIBLIOGRAFÍA	70

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1: Resumen de las variables principales del capítulo 1.	25
Tabla 2: Resumen de las variables principales del capítulo 2.	32
Tabla 3: Resumen de las variables principales del capítulo 3.	50
Tabla 4: PSNR de las reconstrucciones según parámetro ρ .	61
Tabla 5: Resultados en PSNR del experimento 4.4.4.	66

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Cubo de datos de una imagen espectral.	19
Figura 2. Arquitectura del CASSI.	20
Figura 3. Componentes del CASSI dentro del modelo matemático.	21
Figura 4. Esquema del corte realizado para el modelo matricial.	26
Figura 5. Modelo del sistema para un corte del cubo de datos \mathbf{F} .	29
Figura 6. Perfiles espectrales binarios y grises, y sus correspondientes aperturas codificadas.	33
Figura 7. Ejemplos de construcción de aperturas codificadas.	38
Figura 8. Matriz \mathbf{M}_y mostrando los posibles casos de concordancia entre $\bar{\lambda}_{i,l}$ y λ .	41
Figura 9. Matrices \mathbf{M}_y creadas a partir de aperturas codificadas con diferentes valores de ρ : a) $\rho = 0.9$, b) $\rho = 0.6$, c) $\rho = 0.3$.	43
Figura 10. Relación entre la apertura codificada $\tilde{\mathbf{t}}$ y la medición \mathbf{y} .	45
Figura 11. Relación entre las aperturas codificadas $\tilde{\mathbf{t}}_j$ y las aperturas alternas $\tilde{\mathbf{t}}_j^{(k)}$.	46
Figura 12. Diagrama de flujo del proceso de creación de un conjunto de aperturas codificadas $\{\mathbf{T}^{(k)}\}_{k=0}^{K-1}$.	51
Figura 13. Diagrama de flujo del proceso de sensado y reconstrucción selectiva.	52

Figura 14. Escena original de la imagen espectral.	53
Figura 15. Imagen espectral de dimensiones $128 \times 128 \times 24$ píxeles.	54
Figura 16. Similitud factible entre un perfil espectral gris y un filtro paso banda.	55
Figura 17. Simulación del proceso de sensado del CASSI.	56
Figura 18. PSNR de las reconstrucciones mediante el GPSR.	57
Figura 19. Perfil espectral deseado para el experimento 4.4.1.	58
Figura 20. Ejemplos de aperturas codificadas creadas para el experimento 4.4.1.	59
Figura 21. Reconstrucción selectiva de la imagen espectral.	59
Figura 22. Perfil espectral deseado para el experimento 4.4.2.	60
Figura 23. Perfil espectral deseado para el experimento 4.4.3.	62
Figura 24. PSNR promedio de las reconstrucciones para el experimento 4.4.3.	63
Figura 25. Perfil espectral binario junto con perfil espectral gris ajustado.	64
Figura 26. Perfil espectral binario junto a perfil espectral gris expandido.	65

RESUMEN

TÍTULO: SELECTIVIDAD ESPECTRAL EN UN SISTEMA DE SENSADO COMPRESO DE IMÁGENES ESPECTRALES BASADO EN APERTURAS CODIFICADAS EN ESCALA DE GRISES ¹

AUTOR: Armando Rafael Calderón Granados ²

PALABRAS CLAVE: Compressive Spectral Imaging, Grayscale Coded Apertures, Spectral Selectivity, Compressive Sensing.

El sensado compreso de imágenes espectrales es una técnica de adquisición de señales, que captura un mapa de la variación espectral de una escena. Estos mapas, compuestos de 2 componentes espaciales y una componente espectral son llamados imágenes espectrales. Estas imágenes son usadas en aplicaciones como sensado remoto, astrofísica, imágenes biomédicas y vigilancia militar.

Recientemente, una nueva arquitectura ha surgido llamada CASSI (Coded Aperture Snapshot Spectral Imaging). El CASSI es un espectrómetro que utiliza aperturas codificadas para tomar una medición compresada en 2 dimensiones. Esta medición luego es procesada mediante un método de reconstrucción para obtener una estimación de la imagen espectral entrante. Tanto las aperturas codificadas como el método de reconstrucción, están basados en la teoría de Compressive Sensing, la cual postula que señales naturales como las imágenes espectrales, pueden ser reconstruidas a partir de un conjunto de mediciones aleatorias.

Los enfoques tradicionales del CASSI reconstruyen una franja completa del espectro, para luego desechar las zonas de poco interés, ocasionando una pérdida de tiempo y recursos. La selectividad espectral investiga metodologías para adquirir únicamente las bandas de interés. Para lograr esto, se busca optimizar la distribución de los patrones inscritos en las aperturas codificadas. El presente trabajo presenta una metodología para obtener imágenes espectrales con perfil espectral selectivo, utilizando aperturas codificadas en escala de grises. El uso de este tipo de aperturas está motivado por la forma como varía la señal espectral de los objetos.

Primeramente, se exponen conceptos básicos del CASSI. Seguidamente, se presenta un nuevo modelo matemático para el CASSI, que permite el diseño de aperturas codificadas selectivas en escala de grises, junto con un el método de reconstrucción. Por último, se muestran simulaciones del proceso de sensado y reconstrucción con aperturas codificadas en escala de grises. Resultados experimentales arrojan un PSNR de alrededor de 30 dB.

¹ Trabajo de Investigación.

² Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática.
Director: Henry Arguello Fuentes, Codirector: Hoover Fabián Rueda Chacón.

ABSTRACT

TITLE: SPECTRAL SELECTIVITY IN COMPRESSIVE SPECTRAL IMAGING BASED ON GRAYSCALE CODED APERTURES ¹

AUTHOR: Armando Rafael Calderón Granados ²

KEYWORDS: Compressive Spectral Imaging, Grayscale Coded Apertures, Spectral Selectivity, Compressive Sensing.

Compressive Spectral Imaging (CSI) is a signal acquisition technique that captures a spatial map of the spectral variation of a scene. These maps are called spectral images. Spectral images are widely used in areas including remote sensing, astrophysics, military surveillance and biomedical optics.

Recently, a new optical imaging architecture called Coded Aperture Snapshot Spectral Imaging (CASSI) emerged. The CASSI captures spectral information but uses coded apertures to take 2D compressed measurements from a 3D scene. Afterwards, the compressed measurement is processed by a reconstruction scheme to obtain an estimate of the incoming spectral image. Both, the coded aperture-based approach of CASSI and the reconstruction procedure exploits the Compressive Sensing (CS) theory. CS postulates that natural signals such as spectral images, exhibit a sparse representation when expressed in a convenient basis (i.e. Wavelets) and consequently they can be reconstructed from few random measurements.

In CASSI, however, the complete spectrum constituting the 3D scene is recovered and then uninteresting spectral frequencies are discarded, causing a waste of time and power consumption. In consequence, spectral selectivity methods emerged focusing on sensing just the bands of interest. To accomplish selectivity, optimization in the distribution of the patterned features inscribed in the coded aperture is performed. This paper presents a methodology to obtain spectral images with selective spectral profiles through the use of CASSI optical imaging system, using gray scale coded apertures instead of binary patterned as have been proposed in the literature.

Along with it, we first present a new mathematical model for CASSI. Next, a selective grayscale spectral profile is explored as the design basis of gray scale coded apertures. Finally, a proposed reconstruction scheme is shown, aiming to obtain only the desired bands. Extensive simulations are performed obtaining reconstructions exhibiting PSNRs of up to 30 dB.

¹ Research Project.

² Faculty of Physical-Mechanics Engineering. Systems engineering and Informatics school.
Advisor: Henry Arguello Fuentes, Co-advisor: Hoover Fabián Rueda Chacón.

INTRODUCCIÓN

El sensado compreso de imágenes espectrales, es una metodología que permite obtener imágenes con más información espectral por pixel, que las obtenidas por medio de cámaras tradicionales, estas imágenes reciben el nombre de Imágenes Espectrales. Actualmente, es aplicado en campos como: control de calidad, sensado remoto, astrofísica, vigilancia militar e imágenes biomédicas [1-3]. Estas aplicaciones utilizan la información espectral, en procesos de detección y clasificación.

Avances en el sensado compreso de imágenes espectrales han dado como resultado el CASSI (*Coded Aperture Snapshot Spectral Imager*) [4]. Este espectrómetro captura, con el uso de una apertura codificada, una medición compresada de la escena, la cual es procesada posteriormente para obtener la imagen espectral [2][4]. El desarrollo de modelos multi-capturas [5], y la inclusión de un DMD ('Digital Micro-mirror Device') [6], han permitido obtener múltiples mediciones de una escena, con diferentes patrones en la apertura codificada.

El proceso de reconstrucción de la señal, a partir de las mediciones, se basa en la metodología de Compressive Sensing (CS), la cual afirma que señales como las imágenes espectrales, pueden ser recuperadas a partir de un conjunto de mediciones aleatorias, mediante la solución de un problema de optimización numérica [7-9]. En el CASSI, las mediciones son reguladas por el patrón de características presente en la apertura codificada.

Las longitudes de onda del espectro electromagnético que el CASSI puede sensar, están limitadas principalmente por un filtro paso banda, o por el tipo de luz que captura el sensor monocromático [4][5]. Debido a esto, el enfoque tradicional del CASSI reconstruye una porción del espectro contenida entre 2 longitudes de onda. Esto representa una dificultad cuando las aplicaciones centran su atención en un grupo determinado de bandas, dado que, sensar y reconstruir toda la zona

espectral sensible del dispositivo, para luego desechar algunas partes, resulta en una pérdida de tiempo y recursos [10-12].

Los desarrollos en el CASSI han estado enfocados principalmente en el uso de aperturas codificadas binarias, reciben este nombre porque sus características solo poseen 2 valores posibles de transmitancia, generalmente 0% o 100%. Esta investigación se basa en el sensado por medio de aperturas codificadas en escala de grises, las cuales poseen una mayor variedad de características con valores de transmitancia en el intervalo 0% al 100%. Dada esta variedad de características, este tipo de aperturas codificadas permiten simular de manera más realista el proceso de selectividad espectral, de la forma como es realizado por los filtros ópticos [3].

El presente proyecto de grado propone una metodología para el diseño de aperturas codificadas en escala de grises con características selectivas, basándose en trabajos previos en selectividad espectral con aperturas de transmitancia binaria [10][11]. En el capítulo 1 se introducen conceptos fundamentales del CASSI y de Compressive Sensing. En el capítulo 2 se presenta un modelo matricial para el CASSI, que permite el diseño de las características de las aperturas codificadas. En el capítulo 3 se muestra el proceso de diseño de aperturas codificadas selectivas en escala de grises, y el proceso de reconstrucción selectivo. En el capítulo 4 se exponen simulaciones y resultados obtenidos.

1. CODED APERTURE SNAPSHOT SPECTRAL IMAGER

La arquitectura del CASSI explota los principios de Compressive Sensing en el de sensado de imágenes espectrales. Los fundamentos de esta metodología, son esenciales en la comprensión de la arquitectura del CASSI, y del proceso de recuperación de la imagen espectral.

1.1 FUNDAMENTOS DE COMPRESSIVE SENSING

Compressive Sensing es una metodología de muestreo que busca recuperar una señal a partir de un conjunto de mediciones lineales no adaptativas, mediante un proceso de optimización convexa [9]. Se ha convertido en una herramienta utilizada en: matemáticas aplicadas, ciencias de la computación e ingeniería y es aplicada actualmente en: astronomía, biología, medicina, sismología, geología, estudio del medio ambiente, aprendizaje de máquinas, análisis por radar, conversión análoga-digital, entre otros [7][8][9].

Aunque se puede desarrollar una metodología de Compressive Sensing para señales continuas, solo se expone los fundamentos utilizando señales discretas.

1.1.1 Sensado de la señal: Sea $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, un vector columna que representa la señal a sensar, y Φ una matriz de orden $m \times n$, que representa la base de sensado. El vector de mediciones $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^M$ se puede obtener mediante producto matricial de la forma:

$$\mathbf{g} = \Phi \mathbf{f}, \quad (1.1)$$

El interés principal de la teoría de CS radica en los casos donde $m \ll n$, siendo n el tamaño de la señal \mathbf{f} , y m el número de mediciones hechas sobre \mathbf{f} . Se ha demostrado que Compressive Sensing, necesita menos mediciones para reconstruir la señal, que los métodos tradicionales como el teorema de Nyquist-Shannon [13]. Dado que, una señal discreta depende de un número de grados de libertad mucho menores que su longitud [7].

Para lograr la reconstrucción de la señal \mathbf{f} , a partir del conjunto de mediciones \mathbf{g} , CS se vale de dos principios fundamentales: la representación dispersa de una señal y el muestreo incoherente.

1.1.2 Representación dispersa de una señal: Compressive Sensing aprovecha que muchas señales naturales son dispersas en el sentido de que tienen una representación concisa cuando son expresadas en una base apropiada. Un ejemplo de representación dispersa son los coeficientes Wavelet de una imagen digital convencional [14].

La representación dispersa de una señal concentra la mayor cantidad de información en una pequeña porción de datos. Dada una señal $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, y sea Ψ una matriz de orden $n \times n$ la base de representación, la señal \mathbf{f} se puede representar como,

$$\mathbf{f} = \Psi\boldsymbol{\theta}, \quad (1.2)$$

donde $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ es un vector columna con los coeficientes de representación. Si se tiene que los coeficientes $\boldsymbol{\theta}$ son en su mayoría cero o cercanos a cero, se puede decir que $\boldsymbol{\theta}$ es una representación dispersa de \mathbf{f} en la base Ψ , o equivalentemente, que \mathbf{f} es dispersa en Ψ .

Sea θ' una aproximación al vector de coeficientes θ de la ecuación (1.2), se puede obtener una reconstrucción aproximada de \mathbf{f} mediante,

$$\mathbf{f}' = \Psi\theta', \quad (1.3)$$

donde Ψ es la base de representación de la ecuación (1.2). En algunos casos, donde los valores de θ' son lo suficientemente representativos, la reconstrucción puede llegar a ser exacta.

1.1.3 Muestreo incoherente: Garantiza que una señal con representación dispersa pueda ser sensada y reconstruida [7][9]. Este principio radica en que la base de sensado Φ , y la base de representación Ψ deben ser incoherentes entre sí, o en otras palabras descorrelacionadas, ya que esto permite un sensado mas comprimido, necesitando menos mediciones para lograr la reconstrucción.

Se ha demostrado que matrices de sensado aleatorias, como las creadas mediante una distribución Bernoulli, tienen gran probabilidad de ser altamente incoherentes con cualquier base de representación fija [7][8][9].

Existen otras propiedades que también pueden dar garantía de una correcta reconstrucción como por ejemplo: el spark [15], NSP (*Null Space Property*) [16], RIP (*Restricted Isometry Property*) [17].

1.1.4 Fundamentos para la reconstrucción de la señal: Compressive Sensing utiliza algoritmos de optimización convexa para reconstruir la señal a partir del conjunto de mediciones \mathbf{g} . Un enfoque básico en esta clase de reconstrucciones es la utilización de la norma ℓ_1 en un problema de minimización tal que,

$$\min \|\theta'\|_1 \quad \text{sujeto a} \quad \mathbf{g} = \Phi\Psi\theta', \quad (1.4)$$

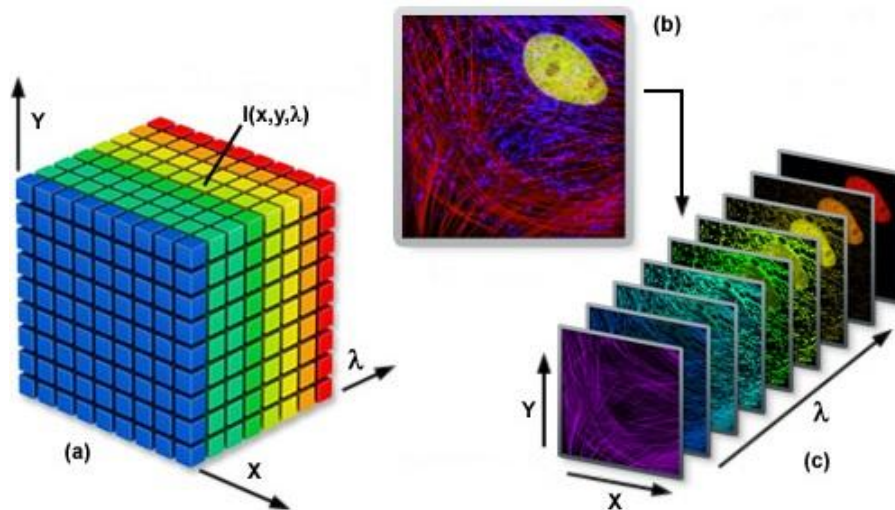
Esto implica que, entre todos los objetos consistentes con los datos, se van a buscar aquellos que tenga mínima norma ℓ_1 . Una vez obtenida una solución, se reconstruye un cubo de datos aproximado \mathbf{f}' , mediante la ecuación (1.3).

El uso de esta norma radica en que promueve la búsqueda de soluciones dispersas para θ' . Aunque este enfoque funciona, para señales donde n es muy grande (como por ejemplo las imágenes espectrales), la minimización ℓ_1 es poco realizable [7]. Por esta razón, otro tipo de optimización debe ser formulado.

1.2 IMÁGENES ESPECTRALES

Las imágenes espectrales se representan como un arreglo tridimensional llamado cubo de datos [1][3]. En la Figura 1 (a) se puede observar la estructura de un cubo de datos donde X y Y son las coordenadas espaciales, y λ es la coordenada espectral; $I(x,y,\lambda)$ es la intensidad de la luz en un punto (x,y) , dada la longitud de onda λ . En (b) se muestra la imagen confocal de una estructura microscópica y en (c) se muestran las diferentes bandas del cubo organizadas según λ .

Figura 1. Cubo de datos de una imagen espectral³.



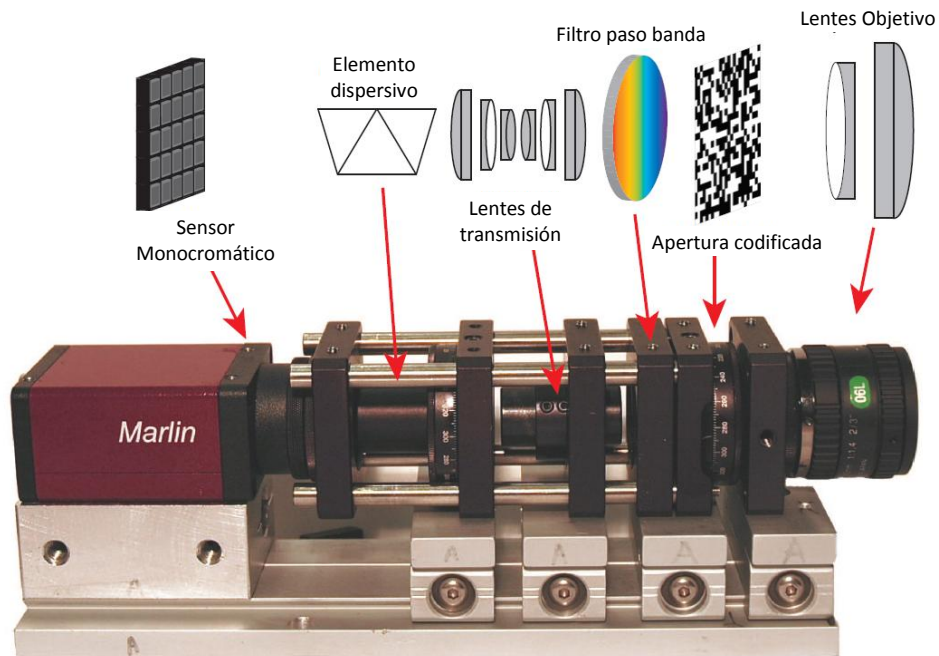
³ Fuente: [en línea] <http://zeiss-campus.magnet.fsu.edu/tutorials/spectralimaging/lambdastack/lambdastacktutorialfigure1.jpg>

1.3 ARQUITECTURA DEL CASSI

Es sistema CASSI es un espectrómetro de imágenes, que utiliza los principios de Compressive Sensing para reconstruir la imagen espectral de entrada, a partir de un conjunto de mediciones dadas por el patrón presente en las aperturas codificadas [2][4][5].

La Figura 2 muestra la arquitectura del CASSI. Este sistema está formado por 6 elementos ópticos: lentes objetivo, apertura codificada, filtro paso banda, lentes de transmisión, elemento dispersivo y un sensor monocromático. Los lentes objetivo enfocan la imagen entrante en el plano de la apertura codificada. La apertura codificada modula la luz que entra al sistema, y determina cuales zonas de la imagen son sensadas. Luego pasa por un filtro paso banda, que limita las longitudes de onda que se van a sensar. Los lentes de transmisión enfocan la imagen del filtro paso banda a un elemento dispersivo, como por ejemplo un prisma, el cual fracciona la luz en sus componentes espectrales, para luego ser registrada por el sensor monocromático.

Figura 2. Arquitectura del CASSI [4].



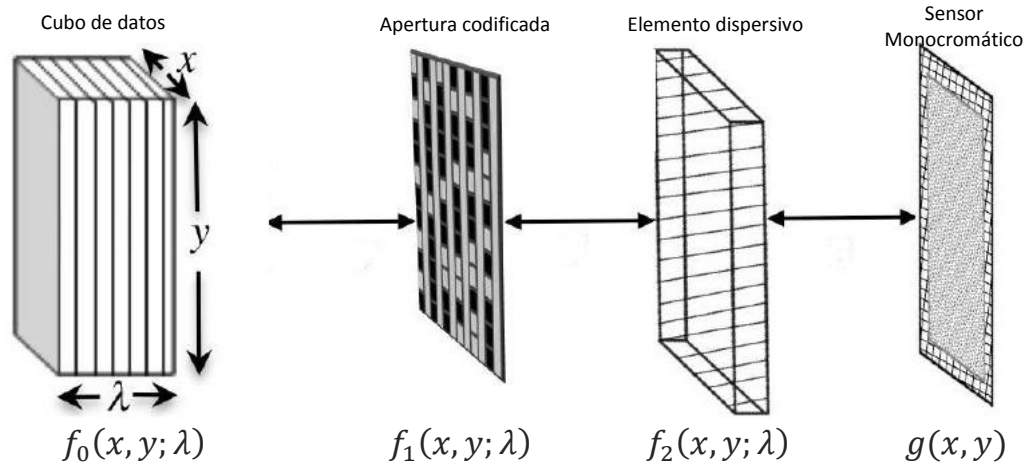
La imagen recibida por el sensor se conoce como medición. Posteriormente, un método de reconstrucción basado en el modelo matemático del CASSI, permite obtener un cubo de datos aproximado a la imagen espectral de entrada.

1.4 MODELO MATEMÁTICO BÁSICO DEL CASSI

Este modelo representa la propagación de la señal a través de los componentes principales del CASSI, y asiste en la creación de la matriz operador del sistema, la cual representa el proceso de sensado y necesaria en la reconstrucción.

En la Figura 3 se muestran los componentes presentes en el modelo básico del CASSI. No se tienen en cuenta los lentes objetivo, ni los lentes de transmisión, tampoco se tienen en cuenta las distorsiones ópticas, debidas a la naturaleza de los elementos, defectos en la calibración o desenfocues.

Figura 3. Componentes del CASSI dentro del modelo matemático [10].



La densidad espectral que ingresa al instrumento $f_0(x, y; \lambda)$, es transmitida al plano de la apertura codificada, esta función es una representación continua del cubo de datos. El patrón de transmisión de la apertura codificada se representa como $T(x, y)$. Entonces, la imagen justo después de la apertura está dada por,

$$f_1(x, y; \lambda) = f_0(x, y; \lambda)T(x, y). \quad (1.5)$$

La densidad espectral modulada por la apertura, es transmitida hasta el plano del elemento dispersivo. La imagen inmediatamente después del elemento dispersivo se define como,

$$f_2(x, y; \lambda) = f_0(x + \alpha(\lambda - \lambda_c), y; \lambda)T(x + \alpha(\lambda - \lambda_c), y), \quad (1.6)$$

donde la expresión $\alpha(\lambda - \lambda_c)$, describe la propagación de la luz a través del elemento dispersivo, con dispersión lineal α y longitud de onda central λ_c . Esta longitud de onda central es aquella en la que los rayos se proyectan de manera paralela a su trayectoria de entrada. En consecuencia, la imagen análoga en el plano del sensor monocromático es representada como,

$$g(x, y) = \int f_0(x + \alpha(\lambda - \lambda_c), y; \lambda)T(x + \alpha(\lambda - \lambda_c), y)d\lambda. \quad (1.7)$$

Dado que el sensor es pixelado, con un tamaño de pixel Δ , el tamaño de los orificios de la apertura codificada deben ser un múltiplo entero de Δ . Además, el filtro paso banda, restringe los componentes espectrales entre 2 longitudes de onda λ_1 y λ_2 , limitando el número de bandas a $L = \alpha \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{\Delta}$, permitiendo expresar a $g(x, y)$ de forma discreta.

Denotando la densidad espectral $f_0(x, y; \lambda)$ en forma discreta como F_{nmk} , y el patrón de la apertura codificada $T(x, y)$ como T_{nm} , la medición del sensor en la posición (n, m) , puede ser escrita como:

$$g_{nm} = \sum_{l=0}^{L-1} F_{n(m+l)l} T_{n(m+l)} + w_{nm}, \quad (1.8)$$

donde w_{nm} modela el ruido presente en el sistema. Teniendo en cuenta la ecuación (1.8), la medición g puede expresarse como un vector columna de la forma,

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \mathbf{w}, \quad (1.9)$$

donde $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^V$ y $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^Q$, siendo Q el tamaño de la imagen espectral y V el tamaño de la medición, ambos expresados como vectores columna. La matriz \mathbf{H} de orden $V \times Q$, se denomina operador del sistema.

Dentro de la metodología de K múltiples capturas, realizadas con aperturas codificadas diferentes $T_{nm}^{(k)}$, $k = 0, \dots, K - 1$. El modelo del CASSI está dado por,

$$g_{nm}^{(k)} = \sum_{l=0}^{L-1} F_{n(m+l)l} T_{n(m+l)}^{(k)} + w_{nm}^{(k)}, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{g}^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)}\mathbf{f} + \mathbf{w}^{(k)}, \quad (1.11)$$

donde $\mathbf{g}^{(k)}$ es la k -ésima medición realizada con la apertura codificada $T^{(k)}$, y $\mathbf{H}^{(k)}$ es el operador del sistema de la k -ésima captura. Para concluir, el modelo del CASSI para K capturas se realiza de la forma,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}^{(0)} \\ \mathbf{g}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{g}^{(K-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(0)} \\ \mathbf{H}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{(K-1)} \end{bmatrix} \mathbf{f}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{g} = \mathcal{H}\mathbf{f}, \quad (1.13)$$

donde $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{V \times K}$ y la matriz \mathcal{H} de orden $V * K \times Q$ son los ensambles de los vectores de mediciones y las matrices operador del sistema, correspondientemente.

1.5 RECONSTRUCCIÓN DEL CUBO DE DATOS

Basándose en Compressive Sensing, la imagen espectral \mathbf{f} es representada de manera dispersa como $\mathbf{f} = \Psi\boldsymbol{\theta}$, por consiguiente, la ecuación (1.13) se puede expresar como [18],

$$\mathbf{g} = \mathcal{H}\Psi\boldsymbol{\theta}. \quad (1.14)$$

Nótese que \mathcal{H} hace las veces de matriz de sensado Φ , similar a la de la ecuación (1.1). Como se mencionó en la sección 1.1.3, dado que la búsqueda en ℓ_1 no es viable en conjuntos grandes de datos, la reconstrucción se replantea como un problema de optimización convexa sin restricciones de la forma [2],

$$\mathbf{f}' = \Psi^{-1} [\operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\theta}'} (\|\mathbf{g} - \mathcal{H}\Psi\boldsymbol{\theta}'\|_2^2 + \tau\|\boldsymbol{\theta}'\|_1)], \quad \text{con } \tau > 0. \quad (1.15)$$

El término $\|\mathbf{g} - \mathcal{H}\Psi\boldsymbol{\theta}'\|_2^2$ minimiza el error entre las mediciones obtenidas por el CASSI \mathbf{g} , y las aproximaciones calculadas por $\mathcal{H}\Psi\boldsymbol{\theta}'$. El término $\tau\|\boldsymbol{\theta}'\|_1$ es un estímulo para encontrar soluciones dispersas, a mayor valor del parámetro τ , mas dispersa será $\boldsymbol{\theta}'$ [2].

Para encontrar una solución a la ecuación (1.15), se utiliza un algoritmo iterativo de búsqueda de soluciones dispersas, a sistemas de ecuaciones lineales llamado *Gradient Projection for Sparse Reconstruction* (GPSR) [19]. Este algoritmo es utilizado en Compressive Sensing, debido a su buen desempeño en una gran variedad de aplicaciones. GPSR busca soluciones dispersas en la base Wavelet, y se vale de la presunción que los objetos dentro de la escena, tengan una estructura espacial suave y continua por partes [20].

El uso de transformadas Wavelet requiere que las dimensiones espaciales del cubo de datos a reconstruir, sean iguales y potencias de 2. Por consiguiente, todo el proceso del diseño del CASSI basado en el GPSR, debe hacerse con aperturas que cumplan con esta restricción.

La calidad de reconstrucción es medida mediante la Relación del Pico Señal a Ruido o PSNR (*Peak Signal-to-Noise Ratio*). El PSNR define la relación entre la máxima energía posible de una señal y el ruido que afecta a su reconstrucción. El PSNR se expresa en escala logarítmica, la unidad que utiliza es el decibel (dB).

Sea \mathbf{I} una imagen espectral de dimensiones $N \times M \times L$, compuesta de L bandas espectrales $\{\mathbf{I}_0, \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_{L-1}\}$, y \mathbf{R} una reconstrucción de la imagen espectral, compuesta de L bandas espectrales $\{\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_{L-1}\}$, el PSNR de una banda espectral \mathbf{R}_l de dimensiones $N \times M$, se calcula mediante la fórmula,

$$\text{PSNR}(\mathbf{I}_l, \mathbf{R}_l) = 20 \log_{10} \left(\frac{\max(\mathbf{I}_l)}{\sqrt{\text{MSE}(\mathbf{I}_l, \mathbf{R}_l)}} \right), \quad (1.16)$$

donde $\max(\mathbf{I}_l)$ es el máximo valor de pixel que puede alcanzar la banda original \mathbf{I}_l , y $\text{MSE}(\mathbf{I}_l, \mathbf{R}_l)$ es el error medio cuadrático entre \mathbf{I}_l y \mathbf{R}_l calculado como,

$$\text{MSE}(\mathbf{I}_l, \mathbf{R}_l) = \frac{1}{NM} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \| (\mathbf{I}_l)_{ij} - (\mathbf{R}_l)_{ij} \|^2. \quad (1.17)$$

El PSNR de la reconstrucción \mathbf{R} es el promedio de los PSNR de todas las bandas. En la Tabla 1 se resumen las variables principales del capítulo 1.

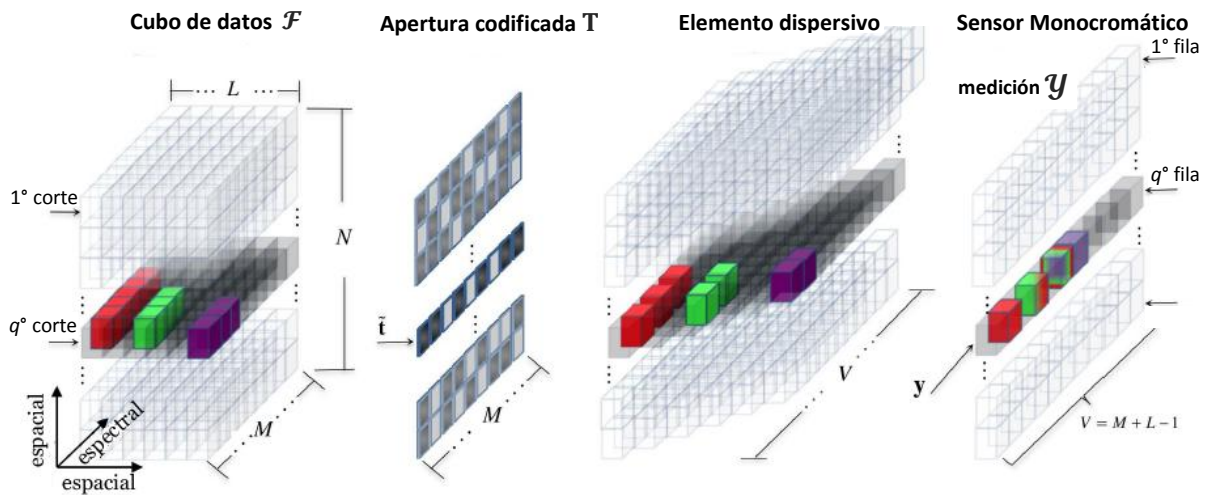
Tabla 1. Resumen de las variables principales del capítulo 1.

Variable	Símbolo	Dimensiones
Imagen espectral, Cubo de datos	\mathbf{f}	$N \times M \times L$
Medición en el sensor	\mathbf{g}	$N \times V$
Número de Columnas de la medición	$V = M + L - 1$	escalar
Matriz operador del sistema	\mathcal{H}	$V \times Q$
Base de sensado	Φ	$N \times M$
Representación dispersa de \mathbf{f}	$\mathbf{f} = \Psi \boldsymbol{\theta}'$	$N \times M$

2. MODELO MATEMÁTICO MATRICIAL PARA EL CASSI

Este modelo, postulado en [11], permite el diseño de aperturas codificadas selectivas en el espectro. Primero se realiza el modelado de una sola sección del sensor monocromático, llamada corte, para luego generalizarlo en un modelo completo del CASSI. La Figura 4 muestra como el corte corresponde a una fila del sensor, y por ende, a una fila de cubo de datos y de la apertura codificada.

Figura 4. Esquema del corte realizado para el modelo matricial [11].



El cubo de datos \mathcal{F} se representa como un arreglo de orden $N \times M \times L$, donde N y M son las dimensiones espaciales y L es la dimensión espectral. Se muestra el q -ésimo corte de \mathcal{F} , y los elementos espectrales presentes en él. En la apertura codificada \mathbf{T} se ve la fila $\tilde{\mathbf{t}}$, que modula el corte del cubo de datos. También se observa el efecto del elemento dispersivo sobre los componentes espectrales, y por último, la medición \mathbf{y} que toma el sensor monocromático, donde se muestra la fila \mathbf{y} de la medición.

El cubo de datos \mathcal{F} , posee $Q = N * M * L$ elementos, y cada fila de la medición \mathbf{y} tiene $V = M + L - 1$ elementos.

2.1 DEFINICIONES PRELIMINARES

2.1.1 Matriz de permutación cíclica: Sea Θ_L una matriz de permutación cíclica de orden $L \times L$ definida como,

$$\Theta_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Esta matriz actúa como una transformación lineal, que rota circularmente los elementos de una matriz. Sea \mathbf{A} una matriz de orden $L \times L$ cualquiera, $\mathbf{A}\Theta_L$ rota las columnas de \mathbf{A} una unidad a la izquierda; $\mathbf{A}\Theta_L^T$ rota las columnas de \mathbf{A} una unidad a la derecha; $\Theta_L\mathbf{A}$ rota las filas de \mathbf{A} una unidad hacia abajo; $\Theta_L^T\mathbf{A}$ rota las columnas de \mathbf{A} una unidad hacia arriba.

2.1.2 Matriz de orden inverso: Sea \mathbf{C} una matriz de orden inverso de $L \times L$ definida por,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Esta matriz es una transformación lineal, que cambia el orden de los elementos de una matriz. Sea \mathbf{A} una matriz de orden $L \times L$ cualquiera, \mathbf{CA} posee las mismas columnas que \mathbf{A} , pero sus elementos están en orden inverso; \mathbf{AC} posee las mismas filas que \mathbf{A} , pero sus elementos están en orden inverso. El orden inverso consiste en cambiar los elementos de cualquier fila o columna de \mathbf{A} , designados como $a_0, a_1, \dots, a_{L-2}, a_{L-1}$ por $a_{L-1}, a_{L-2}, \dots, a_1, a_0$.

2.1.3 Matriz de única fila o columna: Sea \mathbf{J}_L una matriz de orden $L \times L$ de la forma,

$$\mathbf{J}_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Una matriz de única fila o columna $\mathbf{P}_{L;k}$ de orden $L \times L$ se define como,

$$\mathbf{P}_{L;k} = \mathbf{\Theta}_L^k \mathbf{J}_L (\mathbf{\Theta}_L^T)^k, \quad (2.4)$$

donde $\mathbf{\Theta}_L^k$ es una matriz de permutación cíclica, elevada a la k -ésima potencia, y $(\mathbf{\Theta}_L^T)^k$ es la traspuesta de una matriz de permutación cíclica, elevada a la k -ésima potencia. Sea \mathbf{A} una matriz de orden $L \times L$ cualquiera, $\mathbf{A}\mathbf{P}_{L;(k-1)}$ genera una matriz con la k -ésima columna igual que \mathbf{A} , pero el resto de sus elementos son ceros. Mientras que $\mathbf{P}_{L;(k-1)}\mathbf{A}$ genera una matriz con la k -ésima fila igual que \mathbf{A} , pero el resto de sus elementos son ceros.

2.1.4 Matriz identidad expandida: Sea $\bar{\mathbf{I}}$ una matriz identidad expandida de orden $V \times M$, se define como,

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M \times M} \\ \mathbf{0}_{(L-1) \times M} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

donde $\mathbf{I}_{M \times M}$ es una matriz identidad de orden $M \times M$, y $\mathbf{0}_{(L-1) \times M}$ es una matriz de ceros de orden $(L-1) \times M$. Sea \mathbf{A} una matriz de orden $M \times M$ cualquiera, $\mathbf{I}\mathbf{A}$ genera una matriz de orden $V \times M$ con las primeras M filas iguales que \mathbf{A} , y el resto de filas con ceros.

2.2 CORTE DEL CUBO DE DATOS

El q -ésimo corte de \mathcal{F} es creado como,

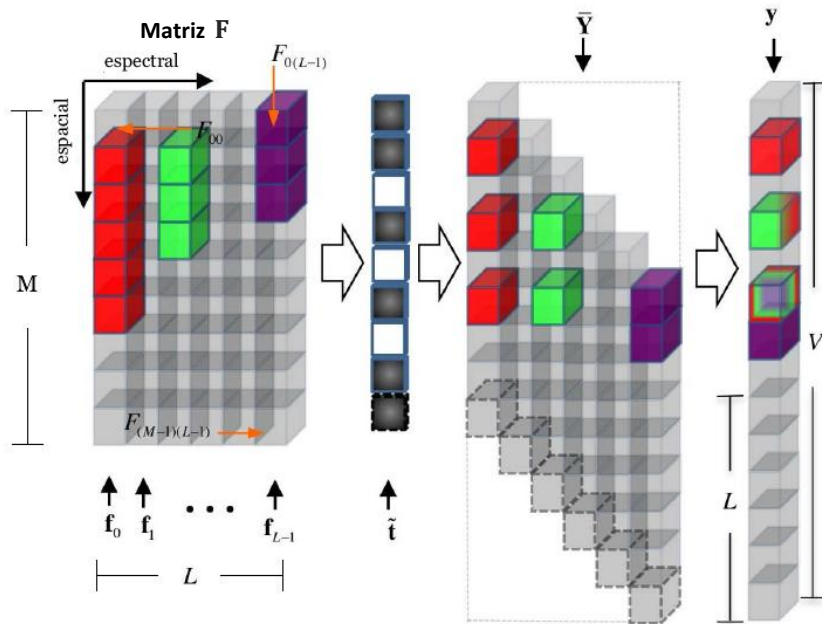
$$\mathbf{F}_{nm} = \mathcal{F}_{qml}, \quad \text{para } n = 0, \dots, M - 1, \quad l = 0, \dots, L - 1. \quad (2.6)$$

La Figura 5 muestra un corte \mathbf{F} presentado como una matriz de orden $M \times L$, junto con la fila de la apertura codificada $\tilde{\mathbf{t}}$, el efecto del elemento dispersivo $\bar{\mathbf{Y}}$, y la medición en el detector \mathbf{y} . Cada columna de \mathbf{F} , representadas como $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{L-1}$, contiene información espectral dada una longitud de onda. Utilizando la matriz $\mathbf{P}_{L;k}$ definida en (2.4), \mathbf{F} se puede expresar como,

$$\mathbf{F} = \sum_{k=0}^{L-1} \mathbf{F} \mathbf{P}_{L;k}. \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) es equivalente a decir que \mathbf{F} puede expresarse como la suma de sus L columnas, utilizando matrices de única columna $\mathbf{F} \mathbf{P}_{L;k}$ de orden $M \times L$.

Figura 5. Modelo del sistema para un corte del cubo de datos \mathbf{F} [11].



2.3 MODELO DE LA APERTURA CODIFICADA

Como se puede observar en la Figura 5, el corte \mathbf{F} es modulado por una fila de la apertura codificada. Esta fila se representa como un vector columna $\tilde{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}^M$, compuesto por los elementos $\tilde{\mathbf{t}} = [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{M-1}]$, y se construye mediante el producto Hadamard de 2 vectores columna $\tilde{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^M$ y $\tilde{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^M$ de la forma,

$$\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{w}} \circ \tilde{\mathbf{r}}, \quad (2.8)$$

donde $\tilde{\mathbf{w}} = [\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{M-1}]$ representa la componente que brinda selectividad espectral, y $\tilde{\mathbf{r}} = [\tilde{r}_0, \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_{M-1}]$ la componente aleatoria de $\tilde{\mathbf{t}}$.

Solo L elementos del sensor son afectados por un punto espacial de la escena capturada. La Figura 5 muestra que el elemento \tilde{t}_{M-1} afecta solo L pixeles en el detector \mathbf{y} . Por lo tanto, el componente selectivo $\tilde{\mathbf{w}}$ y el componente aleatorio $\tilde{\mathbf{r}}$, pueden ser modelados como vectores de longitud L , repetidos por toda la longitud M de la fila de la apertura $\tilde{\mathbf{t}}$. Mas específicamente, los vectores $\tilde{\mathbf{w}}$ y $\tilde{\mathbf{r}}$ son contruidos a partir de vectores $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^L$ y $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^L$ de la forma,

$$\tilde{w}_m = w_{\text{mod}_L(m)}, \quad \tilde{r}_m = r_{\text{mod}_L(m)}, \quad \text{para } m = 0, \dots, M-1, \quad (2.9)$$

donde $\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_{L-1}]$ y $\mathbf{r} = [r_0, r_1, \dots, r_{L-1}]$. El operador módulo indica el orden en el cual, los elementos de \mathbf{w} y \mathbf{r} son asignados a $\tilde{\mathbf{w}}$ y $\tilde{\mathbf{r}}$, elemento por elemento.

Definiendo a \mathbf{W} como $\text{diag}(\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{M-1})$ y \mathbf{R} como $\text{diag}(\tilde{r}_0, \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_{M-1})$, matrices de orden $M \times M$, cuyos elementos de la diagonal principal son los elementos de $\tilde{\mathbf{w}}$ y $\tilde{\mathbf{r}}$ respectivamente, y el resto de elementos son ceros. El corte del cubo de datos \mathbf{F} modulado por la fila de la apertura $\tilde{\mathbf{t}}$, puede ser expresado como,

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{RWF}, \quad (2.10)$$

2.4 EFECTO DEL ELEMENTO DISPERSIVO

Ahora se modela el efecto que causa el elemento dispersivo en la imagen modulada $\bar{\mathbf{F}}$. Se puede notar en la Figura 5 que $\bar{\mathbf{Y}}$ es una versión expandida y corrida de $\bar{\mathbf{F}}$, y que el corrimiento varía según la banda espectral. Utilizando la matriz $\mathbf{\Theta}_V$, similar a la definida en la ecuación (2.1), pero de orden $V \times V$, y la matriz $\bar{\mathbf{I}}$ definida en la ecuación (2.5), se puede expresar la matriz que modela el efecto del elemento dispersivo $\bar{\mathbf{Y}}$ de orden $V \times L$ mediante,

$$\bar{\mathbf{Y}} = \sum_{k=0}^{L-1} (\mathbf{\Theta}_V)^k \bar{\mathbf{I}} \bar{\mathbf{F}} \mathbf{P}_{L;k} = \sum_{k=0}^{L-1} (\mathbf{\Theta}_V)^k \bar{\mathbf{I}} \mathbf{R} \mathbf{W} \mathbf{F} \mathbf{P}_{L;k}, \quad (2.11)$$

donde el termino $\bar{\mathbf{F}} \mathbf{P}_{L;k} = \mathbf{R} \mathbf{W} \mathbf{F} \mathbf{P}_{L;k}$ son matrices de orden $M \times L$ que contienen únicamente la k -ésima columna o banda espectral de $\bar{\mathbf{F}}$ y el resto de elementos son ceros, y el termino $(\mathbf{\Theta}_V)^k \bar{\mathbf{I}}$ realiza el efecto de expansión y corrimiento del elemento dispersivo.

2.5 MEDICIÓN DEL SENSOR MONOCROMÁTICO

Dada la ecuación (2.11), se puede deducir una expresión para la medición \mathbf{y} en el sensor monocromático de la forma,

$$\mathbf{y} = \sum_{k=0}^{L-1} (\mathbf{\Theta}_V)^k \bar{\mathbf{I}} \mathbf{R} \mathbf{W} \mathbf{F} \mathbf{P}_{L;k} \mathbf{u}_L, \quad (2.12)$$

donde \mathbf{y} es un vector columna de longitud V , y \mathbf{u}_L es un vector columna unitario de longitud L . El vector \mathbf{u}_L permite sumar los elementos de las filas de la expresión $(\mathbf{\Theta}_V)^k \bar{\mathbf{I}} \mathbf{R} \mathbf{W} \mathbf{F} \mathbf{P}_{L;k}$, para cada $k = 0, \dots, L - 1$.

Aunque la ecuación (2.12) permite modelar el sensado de una fila de la medición \mathbf{y} , no queda claro cómo puede diseñarse el componente selectivo \mathbf{w} . Por esta razón, se debe replantear el modelo.

Partiendo de la ecuación (2.11) y modelando el sensado del CASSI sin tener en cuenta la matriz \mathbf{W} , es posible obtener una expresión para la medición del sensor en función de \mathbf{w} de la forma [11],

$$\mathbf{y} = \sum_{j=0}^{V-1} \mathbf{P}_{V;j} \sum_{k=0}^{L-1} (\Theta_V)^k \bar{\mathbf{I}} \mathbf{R} \mathbf{F} \mathbf{P}_{L;k} \mathbf{C} (\Theta_L^T)^{j+1} \mathbf{w}. \quad (2.13)$$

donde \mathbf{w} es el componente selectivo utilizando en la ecuación (2.9), para construir la apertura codificada. La ecuación (2.13) es conveniente para el diseño del componente selectivo \mathbf{w} , dado que se encuentra en la parte derecha de la ecuación. El componente aleatorio \mathbf{r} permanece fijo, representado por \mathbf{R} .

Cabe recordar que estos modelos representan solamente una fila de la medición $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^V$, para generalizarlo a toda la medición, deben aplicarse las ecuaciones (2.12) o (2.13) N veces para completar la matriz de medición \mathbf{Y} de orden $N \times V$. En la Tabla 2 se resumen las variables principales del capítulo 2.

Tabla 2. Resumen de las variables principales del capítulo 2.

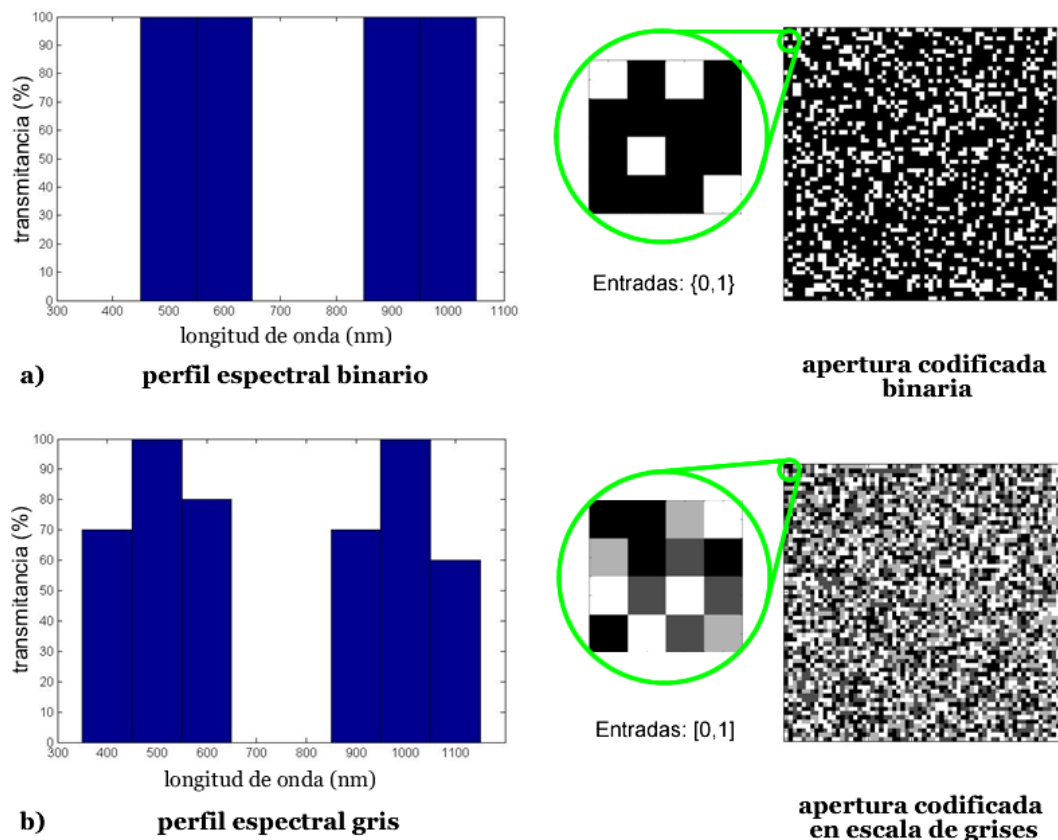
Variable	Símbolo	Dimensiones
Imagen espectral, Cubo de datos	\mathcal{F}	$N \times M \times L$
Corte del cubo de datos	\mathbf{F}	$M \times L$
Fila de la medición en el sensor	\mathbf{y}	$V \times 1$
Modelo de la apertura codificada	$\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{w}} \circ \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{t} = \mathbf{w} \circ \mathbf{r}$	$M \times 1, L \times 1$
Elemento selectivo	\mathbf{w}	$L \times 1$
Elemento randómico	\mathbf{r}	$L \times 1$

3 DISEÑO DE APERTURAS CODIFICADAS SELECTIVAS

El proceso de selectividad espectral apunta a sensar y reconstruir un cierto conjunto de bandas de interés. Una metodología de sensado de este tipo, requiere tanto un diseño del patrón inscrito en las aperturas codificadas, como un método de reconstrucción que permita recuperar únicamente las bandas deseadas.

El conjunto de bandas de interés se determina mediante un perfil espectral selectivo deseado; este perfil indica el porcentaje de transmisión de luz, conocido como transmitancia, para cada banda espectral. El perfil espectral es un factor determinante en el tipo de apertura a construir. En la Figura 6 se observan 2 tipos de perfiles junto con el tipo de apertura generado.

Figura 6. Perfiles espectrales binarios y grises, y sus correspondientes aperturas codificadas.



En a) se muestra un perfil espectral binario, con valores de transmitancia del conjunto $\{0, 1\}$ donde 0 corresponde al 0% y 1 al 100% de transmitancia. Estos generan aperturas con entradas binaria. En b) se observa un perfil espectral gris, que involucra mayor variedad de valores de transmitancia en el intervalo $[0, 1]$, produciendo aperturas en escala de grises. Note que las bandas sin interés, poseen una transmitancia del 0%.

Los perfiles espectrales grises permiten seleccionar la transmitancia deseada para cada banda, permitiendo modelar la selectividad espectral manera mas natural, similar a la que se puede encontrar en los filtros ópticos.

Partiendo del modelo matemático selectivo y el perfil espectral deseado, se busca obtener una expresión para la medición deseada. Es importante resaltar que los primeros pasos de esta metodología están encaminados al diseño de una única fila del sistema. La generalización para todas las filas del sistema se presentará en el numeral 3.8

3.1 MEDICIÓN COMPRESA DESEADA

La medición compresada deseada \mathbf{d} se utiliza como referencia para hallar una expresión, que permita el diseño de características selectivas. Esta medición es creada a partir del perfil espectral deseado, asignando un valor de transmitancia deseado a las bandas espectrales.

Sea $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^L$ un vector columna que representa el perfil espectral deseado, donde L es el número de bandas espectrales que puede sensor el sistema CASSI. El vector $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{L-1}]$ se construye de la forma,

$$\lambda_k = \begin{cases} \mathcal{T}_k & , \quad \text{si la } k - \text{esima banda es de interés} \\ 0 & , \quad \text{de otra manera} \end{cases} \quad , \quad (3.1)$$

donde $0 < \mathcal{T}_k \leq 1$ es la transmitancia asignada a la banda k . Nótese que $\boldsymbol{\lambda}$ establece un valor de transmitancia a cada banda espectral, asignando ceros a las que no tienen importancia. El número de elementos diferentes a cero de $\boldsymbol{\lambda}$ es el número de bandas de interés \mathcal{L} , esto es,

$$\mathcal{L} = \|\boldsymbol{\lambda}\|_0. \quad (3.2)$$

Utilizando la ecuación (2.13) del modelo matemático, se puede expresar la medición deseada \mathbf{d} en función de $\boldsymbol{\lambda}$ de la forma [11],

$$\mathbf{d} = \sum_{j=0}^{V-1} \mathbf{P}_{V;j} \sum_{k=0}^{L-1} (\boldsymbol{\Theta}_V)^k \bar{\mathbf{I}} \mathbf{R} \mathbf{F} \mathbf{P}_{L;k} \boldsymbol{\lambda}. \quad (3.3)$$

3.2 DISEÑO DEL COMPONENTE SELECTIVO (\mathbf{w})

Fijar el componente aleatorio \mathbf{r} como un vector unitario, permite concentrar la atención en el diseño del componente selectivo \mathbf{w} . Dada la expresión para \mathbf{y} en (2.13) y \mathbf{d} en (3.3), se puede hallar una expresión para \mathbf{w} mediante $\mathbf{d} = \mathbf{y}$ resultando en,

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\Theta}_L^T)^{j+1} \mathbf{w}, \quad \text{para } j = 0, \dots, V-1, \quad (3.4)$$

teniendo en cuenta que $(\boldsymbol{\Theta}_L^T)^{-1} = \boldsymbol{\Theta}_L$ y que $(\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{C}$, se puede resolver (3.4) para despejar \mathbf{w} , obteniendo,

$$\mathbf{w} = (\boldsymbol{\Theta}_L)^{j+1} \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}, \quad \text{para } j = 0, \dots, V-1. \quad (3.5)$$

Se puede observar en (3.5) que un único vector \mathbf{w} no puede satisfacer la igualdad. Por lo tanto, se necesitan $V-1$ vectores \mathbf{w}_j de la forma,

$$\mathbf{w}_j = (\boldsymbol{\Theta}_L)^{j+1} \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}, \quad \text{para } j = 0, \dots, V-1. \quad (3.6)$$

Esto equivale a necesitar $V - 1$ capturas del CASSI con aperturas basadas en un \mathbf{w}_j diferente, para sensar la medición deseada \mathbf{d} . Teniendo en cuenta que el periodo de la matriz de permutación cíclica Θ_L es de L , se tiene que $\mathbf{w}_{j+aL} = \mathbf{w}_j$ para $a = 0, 1, \dots, \lfloor V/L \rfloor$. Debido a esto, el número de capturas en (3.6) se reduce considerablemente de la forma,

$$\mathbf{w}_j = (\Theta_L)^{j+1} \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}, \quad \text{para } j = 0, \dots, L - 1, \quad (3.7)$$

necesitando solamente L capturas para obtener la información necesaria. Una por cada banda que el sistema CASSI puede sensar.

3.3 DISEÑO DEL COMPONENTE ALEATORIO (\mathbf{r})

Como se mencionó anteriormente, el componente aleatorio \mathbf{r} genera incoherencia entre la base de sensado y la base de representación. Esta incoherencia es necesaria como garantía para lograr un sensado más comprimido, y una buena reconstrucción del cubo de datos.

El componente aleatorio \mathbf{r} es creado a partir de una distribución de Bernoulli, teniendo en cuenta que $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_{L-1}]$, se construye de la forma,

$$r_k = \text{Bernoulli}(\rho), \quad \text{para } k = 0, \dots, L - 1, \quad (3.8)$$

donde el parámetro ρ es la probabilidad de 1's en la distribución.

El parámetro ρ juega un papel importante en el sensado selectivo porque, como se mostrará más adelante, influye en la cantidad de información espectral adecuada, que se sensa con una apertura codificada. Teniendo en cuenta el modelo de la apertura codificada en la ecuación (2.8), es fácil deducir que,

$$\mathbf{t} = \mathbf{w} \circ \mathbf{r}, \quad (3.9)$$

de esta manera, se puede agregar el elemento \mathbf{r} en la ecuación (3.7) para obtener una expresión que defina a \mathbf{t} en el diseño selectivo de las aperturas, resultando en,

$$\mathbf{t}_j = \mathbf{w}_j \circ \mathbf{r}_j = (\mathbf{\Theta}_L)^{j+1} \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{r}_j, \quad \text{para } j = 0, \dots, L - 1. \quad (3.10)$$

Se puede observar en (3.10) que se pueden crear L vectores \mathbf{r}_j para satisfacer la igualdad, sin necesitar mas capturas del CASSI. Los conjuntos de vectores solución de la ecuación 3.10 son determinados como $\{\mathbf{w}_j\}_{j=0}^{L-1}$ y $\{\mathbf{r}_j\}_{j=0}^{L-1}$.

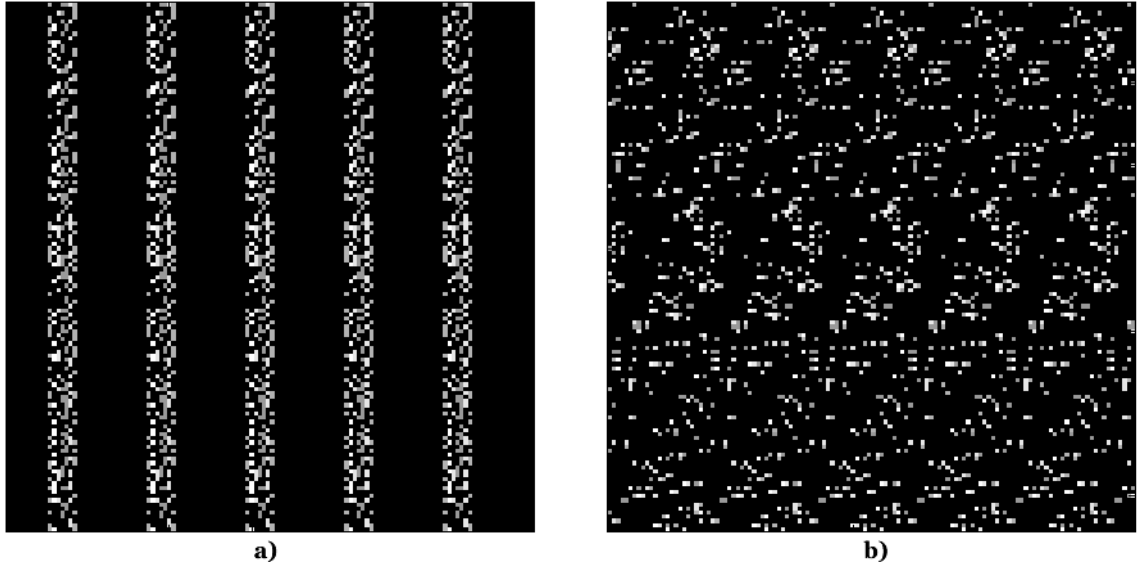
3.4 CONSTRUCCIÓN DE LA FILA DE APERTURAS CODIFICADAS

Con los conjuntos de vectores $\{\mathbf{w}_j\}_{j=0}^{L-1}$ y $\{\mathbf{r}_j\}_{j=0}^{L-1}$, es posible construir una fila de las L aperturas codificadas mediante las ecuaciones 2.8 y 2.9. Nótese que en la ecuación (3.7), los elementos selectivos \mathbf{w}_j poseen una estructura fija determinada por $\boldsymbol{\lambda}$. Esta estructura no presentará variación alguna durante la creación de las $N - 1$ filas restantes de las aperturas codificadas en 2 dimensiones \mathbf{T}_j . Por esta razón, es necesario expresar los conjuntos de vectores $\{\mathbf{w}_j\}_{j=0}^{L-1}$ y $\{\mathbf{r}_j\}_{j=0}^{L-1}$ en orden aleatorio. Esto puede lograrse utilizando como índice un vector $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^K$ de la forma,

$$\{\mathbf{w}_{\beta_j}\}_{j=0}^{L-1}, \quad \{\mathbf{r}_{\beta_j}\}_{j=0}^{L-1}, \quad (3.11)$$

donde los elementos de $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{K-1}]$, son una permutación aleatoria de un conjunto de números $\{n\}_{n=0}^{L-1}$. En la Figura 7 se muestra el efecto de la construcción mediante orden aleatorio, generalizado en una apertura codificada en 2 dimensiones. En a) se muestra una apertura codificada construida con los conjuntos ordenados $\{\mathbf{w}_j\}_{j=0}^{L-1}$ y $\{\mathbf{r}_j\}_{j=0}^{L-1}$, y en b) una apertura construida con los conjuntos definidos en (3.11).

Figura 7. Ejemplos de construcción de aperturas codificadas.



Nótese como la apertura codificada de la Figura 7 b) presenta un patrón claramente aleatorio en comparación con la apertura codificada en a). Como se mencionó en el numeral 1.1.2, esta aleatoriedad en el sentido es necesaria dentro de un esquema de reconstrucción basado en Compressive Sensing.

Para simplificar la notación, los conjuntos de componentes selectivos y aleatorios organizados en orden aleatorio $\{\mathbf{w}_{\beta_j}\}_{j=0}^{L-1}$ y $\{\mathbf{r}_{\beta_j}\}_{j=0}^{L-1}$, se les determinará como $\{\mathbf{w}_j\}_{j=0}^{L-1}$ y $\{\mathbf{r}_j\}_{j=0}^{L-1}$ respectivamente. Además, a las filas de aperturas codificadas construidas a partir de estos conjuntos, se les denominará como $\{\tilde{\mathbf{t}}_j\}_{j=0}^{L-1}$.

3.5 REDUCCIÓN DEL NÚMERO DE CAPTURAS

Dado que el componente aleatorio \mathbf{r}_j no depende de un parámetro fijo, como lo es \mathbf{w}_j de λ , es posible reducir el número de capturas a $K < L$. Esta reducción depende de que algunos de los vectores del conjunto $\{\mathbf{t}_j\}_{j=0}^{L-1}$, sean linealmente dependientes de otros.

Sea \mathbf{M}_t una matriz de orden $L \times L$ donde sus columnas son el conjunto de vectores $\{\mathbf{t}_j\}_{j=0}^{L-1}$, el rango de \mathbf{M}_t expresado como,

$$K = \text{rango}(\mathbf{M}_t), \quad (3.12)$$

es el número de capturas necesarias para satisfacer la ecuación (3.10). Esto se debe a que un conjunto de vectores, pueden ser expresados como la combinación lineal de sus vectores linealmente independientes. Por lo tanto, si se define a $\{\mathbf{t}_{\alpha k}\}_{k=0}^{K-1}$ como el conjunto de columnas linealmente independientes de \mathbf{M}_t , y \mathbf{W}_t como una matriz de orden $L \times K$, la cual sus columnas son los vectores $\{\mathbf{t}_{\alpha k}\}_{k=0}^{K-1}$, el conjunto de vectores $\{\mathbf{t}_j\}_{j=0}^{L-1}$ puede expresarse como,

$$\mathbf{t}_j = \sum_{k=0}^{K-1} \mathcal{C}_{kj} \mathbf{t}_{\alpha k}, \quad \text{para } j = 0, \dots, L-1, \quad (3.13)$$

donde \mathcal{C}_{kj} son los elementos de una matriz de orden $K \times L$ definida como,

$$\mathcal{C} = (\mathbf{W}_t^T \mathbf{W}_t)^{-1} \mathbf{W}_t^T \mathbf{M}_t. \quad (3.14)$$

Nótese que el resultado de la ecuación (3.12), puede ser manipulado para arrojar un valor $K < L$, mediante la búsqueda de componentes \mathbf{r}_j que minimicen el rango de la matriz \mathbf{M}_t , reduciendo así el número de capturas. Este resultado puede ser generalizado para el conjunto de aperturas codificadas $\{\tilde{\mathbf{t}}_j\}_{j=0}^{L-1}$, el cual puede ser recuperado a partir del conjunto de aperturas codificadas linealmente independientes $\{\tilde{\mathbf{t}}_{\alpha j}\}_{j=0}^{K-1}$.

Calculando el conjunto de aperturas codificadas linealmente independientes $\{\tilde{\mathbf{t}}_{\alpha j}\}_{j=0}^{K-1}$, el proceso de sensado se realiza sobre un modelo matemático, para obtener las K filas de mediciones, este conjunto de mediciones se determinará como $\{\mathbf{y}_{\alpha j}\}_{j=0}^{K-1}$, donde $\mathbf{y}_{\alpha j} \in \mathbb{R}^V$ son vectores columna.

Si se tiene que el número de capturas es $K < L$, el conjunto de L mediciones $\{\mathbf{y}_j\}_{j=0}^{L-1}$ necesarias para la reconstrucción selectiva, pueden recuperarse a partir del conjunto $\{\mathbf{y}_{\alpha j}\}_{j=0}^{K-1}$ mediante la forma,

$$\mathbf{y}_j = \sum_{k=0}^{K-1} \mathcal{C}_{kj} \mathbf{y}_{\alpha k}, \quad \text{para } j = 0, \dots, L-1, \quad (3.15)$$

donde \mathcal{C}_{kj} es la misma matriz de coeficientes utilizada en (3.13). La ecuación (3.15) puede aplicarse a las mediciones, ya que existe una relación lineal entre el conjunto de componentes de las aperturas codificadas $\{\mathbf{t}_{\alpha j}\}_{j=0}^{K-1}$, el conjunto de filas de aperturas codificadas $\{\tilde{\mathbf{t}}_{\alpha j}\}_{j=0}^{K-1}$ y el conjunto de mediciones $\{\mathbf{y}_{\alpha j}\}_{j=0}^{K-1}$. Para el caso donde $K = L$, el conjunto de mediciones $\{\mathbf{y}_j\}_{j=0}^{L-1}$ será el mismo adquirido mediante el proceso de sensado.

3.6 EXTRACCIÓN SELECTIVA DE MEDICIONES ESPECTRALES

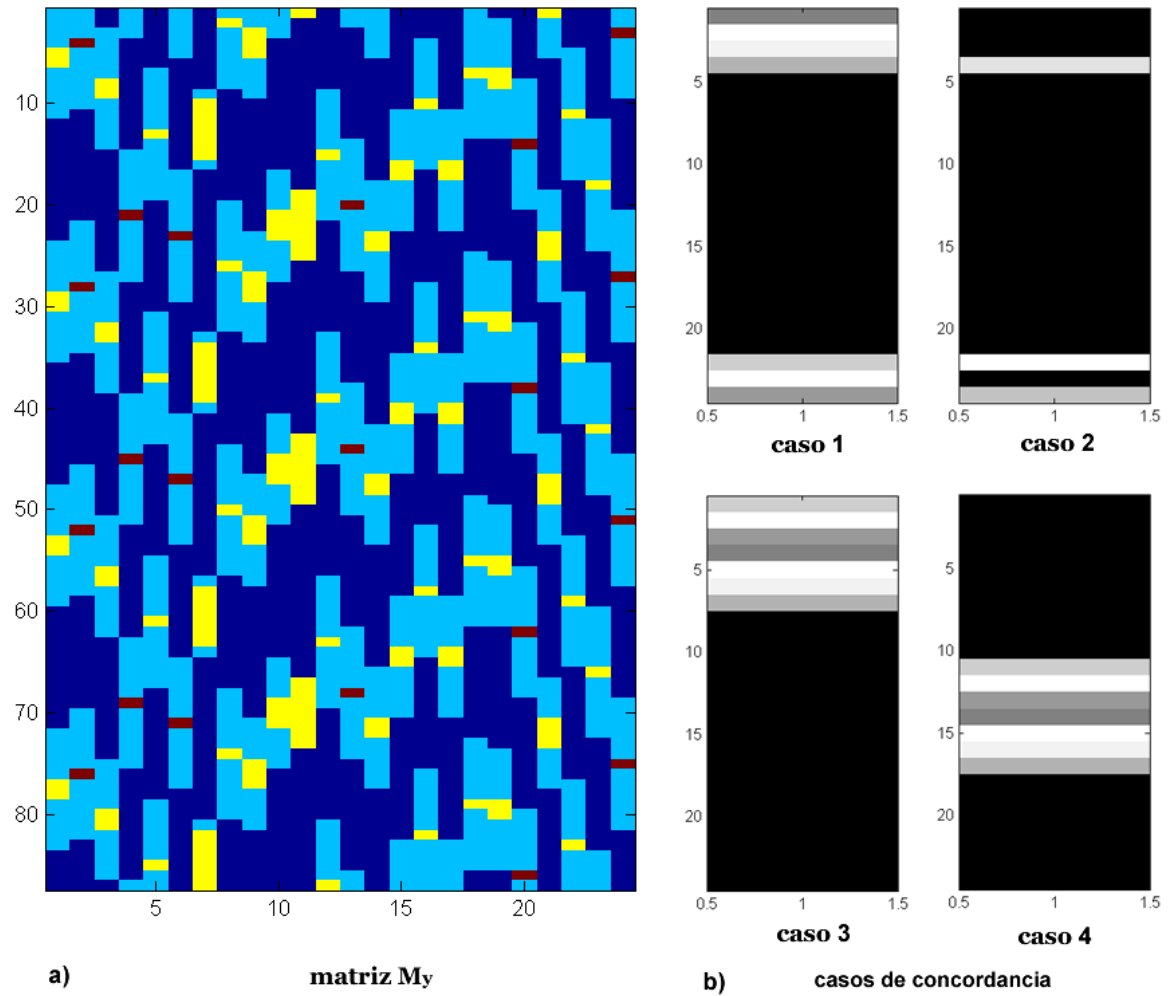
No todos los elementos dentro de una medición poseen información espectral de interés, por esta razón, es necesario extraer solamente la información espectral que se va a utilizar en el proceso de reconstrucción selectivo. Sea \mathbf{M}_y una matriz de orden $V \times L$, donde sus columnas son el conjunto de mediciones $\{\mathbf{y}_j\}_{j=0}^{L-1}$. Los elementos en \mathbf{M}_y con información espectral de interés, pueden ser identificados mediante la ecuación (3.4) y (3.9) de la forma,

$$\bar{\lambda}_{i,l} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\Theta}_L^T)^{j+1} \mathbf{w}_j \circ \mathbf{r}_j, \quad \text{para } j = 0, \dots, L-1, \quad (3.16)$$

donde $\bar{\lambda}_{i,l} \in \mathbb{R}^L$ es un vector columna que indica cuales bandas espectrales están presentes en la posición (i, l) de la matriz \mathbf{M}_y . En la Figura 8 se muestra una matriz \mathbf{M}_y con $V = 87$ y $L = 24$, donde se indican los 4 posibles casos de

concordancia que pueden existir entre $\bar{\lambda}_{i,l}$, y el perfil espectral λ deseado definido en la ecuación (3.1).

Figura 8. Matriz M_y mostrando los posibles casos de concordancia entre $\bar{\lambda}_{i,l}$ y λ .



En la Figura 8 a) se muestran:

- caso 1: con color rojo se indican los elementos de M_y que poseen concordancia completa, con el conjunto de bandas de interés indicadas en el perfil espectral λ .
- caso 2: con color amarillo se indican los elementos de M_y que poseen parcialmente, información espectral de interés exclusivamente.

- caso 3: con color azul claro se indican los elementos de \mathbf{M}_y que poseen información espectral de interés, junto con información espectral de bandas que no son de interés.
- caso 4: con color azul oscuro se indican los elementos de \mathbf{M}_y que no poseen información espectral de interés.

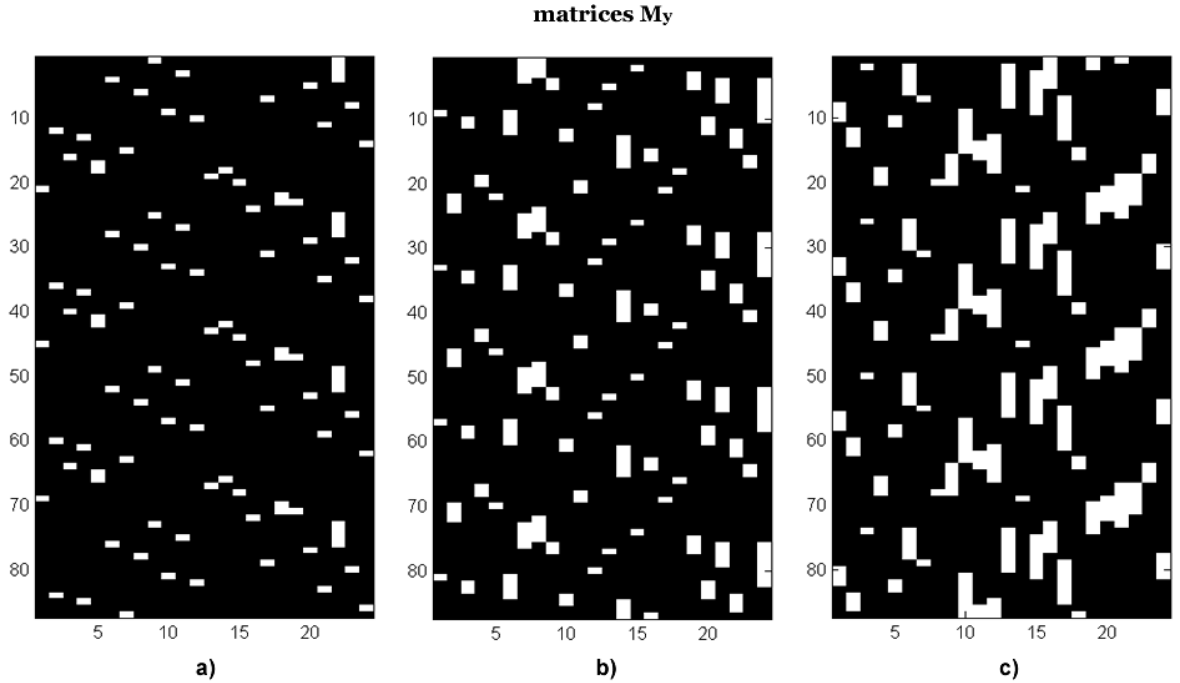
En b) se muestran ejemplos del vector $\bar{\lambda}_{i,l}$ para los 4 casos de concordancia. El perfil espectral esperado λ es el mismo del caso 1.

En esta metodología, solo se van a tomar los elementos de \mathbf{M}_y que posean concordancia completa o parcial con las bandas espectrales de interés (casos 1 y 2). Los elementos que poseen información espectral que no es de interés se dejan por fuera del modelo de reconstrucción selectivo (casos 3 y 4).

Como se mencionó en el numeral (3.3), el diseño del componente aleatorio influye en la cantidad de información espectral de interés que poseen las mediciones. En la Figura 9 se muestran diferentes matrices \mathbf{M}_y , creadas a partir de aperturas codificadas con diferentes valores de ρ . En color blanco se indican los elementos espectrales de interés para esta metodología, y en negro los elementos sin interés. En a) se muestra una matriz \mathbf{M}_y creada a partir de K aperturas codificadas con $\rho = 0.9$; en b) se muestra una matriz \mathbf{M}_y donde $\rho = 0.6$; y en c) se muestra una matriz \mathbf{M}_y donde $\rho = 0.3$.

El proceso de extracción selectiva de mediciones espectrales va encaminado a crear, un conjunto denominado mediciones espectrales deseadas $\{\mathbf{g}_j\}_{j=0}^{U-1}$, las cuales poseen exclusivamente elementos con información espectral de interés, junto con elementos que no poseen ningún tipo de información espectral.

Figura 9. Matrices \mathbf{M}_y creadas a partir de aperturas codificadas con diferentes valores de ρ : a) $\rho = 0.9$, b) $\rho = 0.6$, c) $\rho = 0.3$.



Sea $\{\mathbf{g}_j\}_{j=0}^{U-1}$ un conjunto de U vectores columna donde $\mathbf{g}_j \in \mathbb{R}^V$. Las mediciones espectrales deseadas son creadas a partir de la ecuación,

$$(\mathbf{g}_j)_i = \begin{cases} (\mathbf{M}_y)_{i,l} & , \quad \{\exists l \in \{0, \dots, L-1\} : (\bar{\lambda}_{i,l} \vee \lambda) = (\lambda \vee \lambda)\} \\ 0 & , \quad \text{de otra manera} \end{cases} \quad (3.17)$$

donde $(\bar{\lambda}_{i,l} \vee \lambda) = (\lambda \vee \lambda)$ es el criterio utilizado para escoger solamente los casos de concordancia 1 y 2. Esto es posible gracias a la operación lógica OR entre los k -esimos elementos de cada vector, definida como:

- $(\bar{\lambda}_{i,l})_k \vee (\lambda)_k = 0$ si $(\bar{\lambda}_{i,l})_k = (\lambda)_k = 0$.
- $(\bar{\lambda}_{i,l})_k \vee (\lambda)_k = 1$ si $(\bar{\lambda}_{i,l})_k > 0$ y $(\lambda)_k = 0$, o $(\bar{\lambda}_{i,l})_k = 0$ y $(\lambda)_k > 0$.
- $(\bar{\lambda}_{i,l})_k \vee (\lambda)_k = 1$ si $(\bar{\lambda}_{i,l})_k > 0$ y $(\lambda)_k > 0$.

Lo mismo sucede para $(\lambda \vee \lambda)$, donde el operador OR convierte en 1's los elementos $(\lambda)_k > 0$, sin alterar los elementos $(\lambda)_k = 0$.

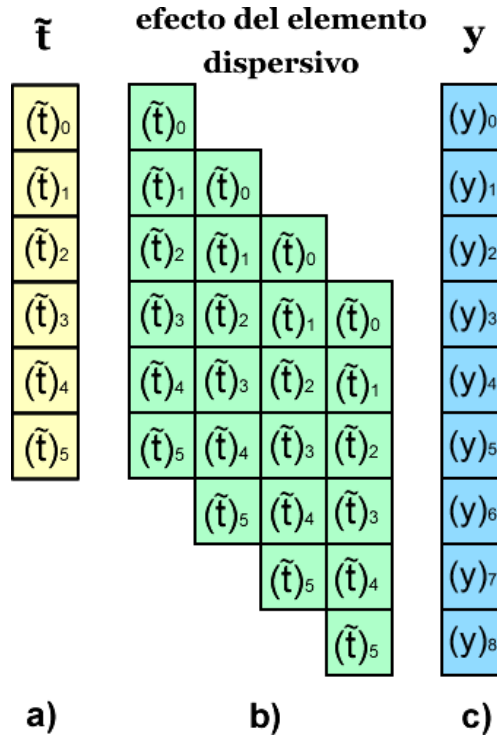
En la ecuación (3.17) es necesario tener en cuenta que, los elementos de \mathbf{M}_y utilizados en construir \mathbf{g}_{j1} no son usados para construir \mathbf{g}_{j2} , para $j1 < j2$. Dado que no toda la información contenida en \mathbf{M}_y , va a ser seleccionada en el proceso de extracción, el número de mediciones espectrales deseadas es $U < K$. Este número corresponde a la cantidad máxima de elementos espectrales de interés, que se pueden encontrar en cualquier fila de la matriz \mathbf{M}_y .

3.7 MODELO DE SENSADO SELECTIVO

Para completar el modelo de reconstrucción selectivo, es necesario encontrar los elementos del conjunto de filas de las aperturas codificadas $\{\tilde{\mathbf{t}}_j\}_{j=0}^{L-1}$, que sensan los elementos extraídos en el numeral anterior. Para lograr esto, se debe tener en cuenta cuales elementos de una apertura codificada $\tilde{\mathbf{t}}$, forman cada elemento de una medición \mathbf{y} . En la Figura 10 se muestra un esquema que permite identificar, los elementos de una apertura codificada, que influyen en la creación de cada elemento de una medición. Para este ejemplo se utilizó $M = 6$, $L = 4$ y $V = 9$.

En a) se muestra la apertura codificada $\tilde{\mathbf{t}}$ con sus elementos $(\tilde{\mathbf{t}})_m$, donde $m = 0, \dots, M - 1$; en b) se muestra el efecto del elemento dispersivo sobre los elementos de $\tilde{\mathbf{t}}$; en c) se muestra la medición \mathbf{y} con sus elementos $(\mathbf{y})_v$, donde $v = 0, \dots, V - 1$;

Figura 10. Relación entre la apertura codificada \tilde{t} y la medición y .

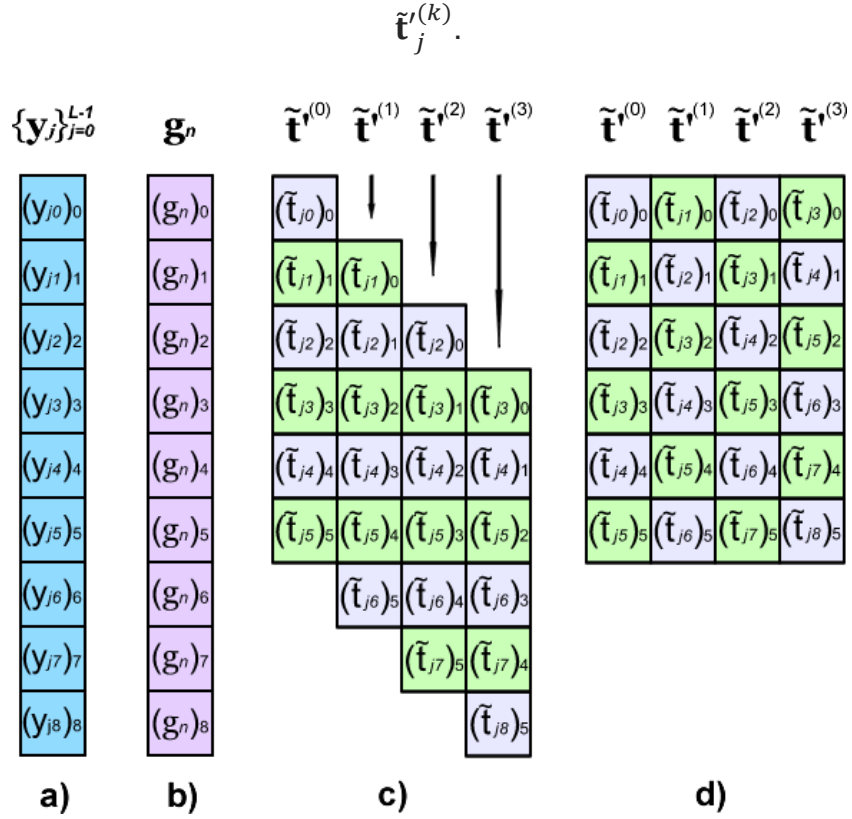


Es posible generalizar el esquema a un conjunto de aperturas $\{\tilde{t}_j\}_{j=0}^{L-1}$, que modulan el sensado de un conjunto de mediciones $\{y_j\}_{j=0}^{L-1}$. Teniendo en cuenta los elementos de \tilde{t}_j que conforman los elementos de y_j , se pueden extraer los elementos $(\tilde{t}_j)_m$ para construir un conjunto alterno de aperturas $\{\tilde{t}^{(k)}\}_{k=0}^{L-1}$, que permita el sensado directo de la medición deseada g_n . Este conjunto alterno de aperturas puede ser creado para una medición deseada a partir del esquema en la Figura 11.

En a) y b) se muestran los elementos del conjunto $\{y_j\}_{j=0}^{L-1}$, que fueron seleccionados por la ecuación 3.17, para formar la medición deseada g_n . Los subíndices $\{j_0, j_1, \dots, j_8\}$ son los valores obtenidos para l , y el subíndice n es j de la ecuación 3.17. En c) se observan los elementos $(\tilde{t}_{jv})_i$ del conjunto de aperturas $\{\tilde{t}_j\}_{j=0}^{L-1}$, que ayudan a formar la medición $(y_{jv})_v$, y por ende, la medición

selectiva $(\mathbf{g}_n)_v$. En d) se muestra el conjunto de aperturas alternas $\{\tilde{\mathbf{t}}^{(k)}\}_{k=0}^{L-1}$, con cada uno de sus elementos.

Figura 11. Relación entre las aperturas codificadas $\tilde{\mathbf{t}}_j$ y las aperturas alternas



Nótese que por cada medición \mathbf{g}_n se crea un conjunto de aperturas alternas $\{\tilde{\mathbf{t}}^{(k)}\}_{k=0}^{L-1}$. De la misma manera, se debe generalizar para el conjunto de mediciones deseadas $\{\mathbf{g}_j\}_{j=0}^{U-1}$, creando el conjunto de aperturas alternas $\{\tilde{\mathbf{t}}_j^{(k)}\}_{k=0}^{L-1}$ con $j = 0, \dots, U - 1$.

Para crear el modelo de sensado para el conjunto $\{\mathbf{g}_j\}_{j=0}^{U-1}$, es necesario modificar la ecuación 2.12 de la forma,

$$\mathbf{y}_j = \sum_{k=0}^{L-1} (\Theta_V)^k \bar{\mathbf{I}} \text{diag}(\tilde{\mathbf{t}}_j) \mathbf{f}_k, \quad (3.17)$$

donde $\text{diag}(\tilde{\mathbf{t}}_j) = \mathbf{R}\mathbf{W}$, y $\mathbf{f}_k \triangleq \mathbf{F}\mathbf{P}_{L,k} \mathbf{u}_L$ es la k -ésima banda espectral del corte \mathbf{F} . En esta ecuación se da por entendido que una única apertura $\tilde{\mathbf{t}}$, es utilizada para sensar las L bandas espectrales \mathbf{f}_k . Adaptando esta ecuación, es posible modelar el sensado del conjunto de mediciones deseadas $\{\mathbf{g}_j\}_{j=0}^{U-1}$, sensando solamente las \mathcal{L} bandas de interés definidas en (3.1) y (3.2).

Dado el conjunto alterno de aperturas $\{\tilde{\mathbf{t}}_j^{(k)}\}_{j=0}^{L-1}$, el sensado del conjunto de mediciones deseadas $\{\mathbf{g}_j\}_{j=0}^{U-1}$, puede expresarse como,

$$\mathbf{g}_j = \sum_{k=0}^{\mathcal{L}-1} (\mathbf{\Theta}_V)^{\varepsilon_k} \bar{\mathbf{I}} \text{diag}(\tilde{\mathbf{t}}_j^{(\varepsilon_k)}) \mathbf{f}_{\varepsilon_k}, \quad \text{para } j = 0, \dots, U-1, \quad (3.18)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}}$ es un vector auxiliar cuyos elementos $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\mathcal{L}-1}]$, son los índices de las bandas espectrales de interés. Nótese que en la ecuación (3.18), cada banda espectral $\mathbf{f}_{\varepsilon_k}$ es sensada por una apertura alterna $\tilde{\mathbf{t}}_j^{(\varepsilon_k)}$ diferente. Este modelo permite crear la matriz operador del sistema \mathbf{H} , necesaria para el modelo de reconstrucción selectivo.

Definiéndose la matriz $\bar{\mathbf{H}}_{jk}$ de orden $V \times M$ como $\bar{\mathbf{H}}_{jk} \triangleq (\mathbf{\Theta}_V)^{\varepsilon_k} \bar{\mathbf{I}} \text{diag}(\tilde{\mathbf{t}}_j^{(\varepsilon_k)})$, el conjunto de vectores $\{\mathbf{g}_j\}_{j=0}^{U-1}$ en (3.18) pueden expresarse de la forma,

$$\mathbf{g}_j = \sum_{k=0}^{\mathcal{L}-1} \bar{\mathbf{H}}_{jk} \mathbf{f}_{\varepsilon_k}, \quad \text{para } j = 0, \dots, U-1. \quad (3.19)$$

La matriz operador del sistema para una fila del detector, se denominará matriz operador del sistema parcial, y su expresión para una medición \mathbf{g}_j sería,

$$\mathbf{H}_j = (\mathbf{i}_{\mathcal{L}}(\mathbf{\Theta}_{\mathcal{L}}^T)^k) \otimes \bar{\mathbf{H}}_{jk}, \quad \text{para } k = 0, \dots, \mathcal{L}, \quad j = 0, \dots, U-1, \quad (3.19)$$

donde $\mathbf{i}_L \in \mathbb{R}^L$ es un vector fila con el primer elemento en 1 y el resto de elementos en 0, y \otimes es el producto Kronecker entre 2 vectores. Definiendo el vector de las bandas de interés $\bar{\mathbf{f}}$ como el ensamble en una misma columna de la forma $\bar{\mathbf{f}} \triangleq [\mathbf{f}_{\varepsilon_0}^T, \mathbf{f}_{\varepsilon_1}^T, \dots, \mathbf{f}_{\varepsilon_{L-1}}^T]^T$, el modelo selectivo del sistema para una única medición deseada \mathbf{g}_j , se define como,

$$\mathbf{g}_j = \mathbf{H}_j \bar{\mathbf{f}}. \quad (3.19)$$

El conjunto de las mediciones $\{\mathbf{g}_j\}_{j=0}^{U-1}$ en un único vector, y el conjunto de las matrices operador del sistema parcial, pueden expresarse de la forma,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{U-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 \\ \mathbf{H}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{U-1} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{H} \bar{\mathbf{f}}, \quad (3.21)$$

donde la ecuación (3.21) representa el proceso de sensado selectivo de una única fila de la medición \mathbf{y} , expresado en función de las bandas espectrales de interés $\bar{\mathbf{f}}$. Para lograr el modelo de reconstrucción selectivo, es necesario generalizar la ecuación (3.21), para el resto de $N - 1$ filas del sensor monocromático.

3.8 GENERALIZACIÓN DEL MODELO DE SENSADO SELECTIVO

Para lograr el modelo de reconstrucción selectivo, es necesario generalizar el proceso de creación de la filas de aperturas codificadas, expuesto en los numerales 3.2 al 3.5, el proceso de extracción selectiva de mediciones espectrales, expuesto en el numeral 3.6, y el correspondiente modelo de sensado selectivo expuesto en el numeral 3.7.

Esta generalización consiste en crear las N filas de aperturas codificadas $\tilde{\mathbf{t}}_j$ y construir con ellas, el conjunto de aperturas codificadas $\{\mathbf{T}^{(k)}\}_{k=0}^{K-1}$, cada una de ellas de orden $M \times M$, utilizadas en las K capturas de la forma,

$$\mathbf{T}^{(0)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{t}}_{0;0}^T \\ \tilde{\mathbf{t}}_{0;1}^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{t}}_{0;N-1}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{(1)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{t}}_{1;0}^T \\ \tilde{\mathbf{t}}_{1;1}^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{t}}_{1;N-1}^T \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{T}^{(K-1)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{t}}_{K-1;0}^T \\ \tilde{\mathbf{t}}_{K-1;1}^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{t}}_{K-1;N-1}^T \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

donde $\tilde{\mathbf{t}}_{k;n}^T$ es la transpuesta del k -ésimo elemento del conjunto de vectores filas de aperturas codificadas, creado por la reducción de rango del numeral 3.5; y n indica la n -ésima generalización de todo el proceso. Nótese que cada uno de los N procesos de reducción de rango, deben arrojar en mismo resultado para K en la ecuación 3.12, de lo contrario, el conjunto de la ecuación 3.22 no se podrá realizar.

También se generalizan las N filas de mediciones \mathbf{y}_j , para obtener el conjunto de mediciones $\{\mathbf{Y}^{(k)}\}_{k=0}^{K-1}$, cada una de orden $V \times N$, esta generalización se realiza de la misma forma que en la ecuación (3.22) se hizo para $\mathbf{T}^{(k)}$.

A la par con el conjunto $\{\mathbf{Y}^{(k)}\}_{k=0}^{K-1}$, se realiza la generalización de las mediciones deseadas \mathbf{g} , las aperturas alternas $\tilde{\mathbf{t}}'$ y de las matrices operador del sistema parcial \mathbf{H} , definidas en las ecuaciones 3.20 y 3.21. El conjunto generalizado del sistema, para el modelo de reconstrucción selectivo, esta dado por las ecuaciones,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{H}_{N-1} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{g} = \mathcal{H}\bar{\mathbf{f}}, \quad (3.24)$$

donde \mathbf{g}_n y \mathbf{H}_n en la ecuación 3.23 son las n -ésimas generalizaciones de \mathbf{g} y \mathbf{H} de la ecuación 3.21, y donde $\mathbf{0}$ representa matrices de elementos ceros, que poseen el orden necesario para realizar el ensamble de las matrices \mathbf{H}_n de forma diagonal. Dado que el conjunto de bandas de interés puede ser representado de manera dispersa mediante $\bar{\mathbf{f}} = \Psi\bar{\boldsymbol{\theta}}$. La ecuación (3.24) puede expresarse como,

$$\mathbf{g} = \mathcal{H}\Psi\bar{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.24)$$

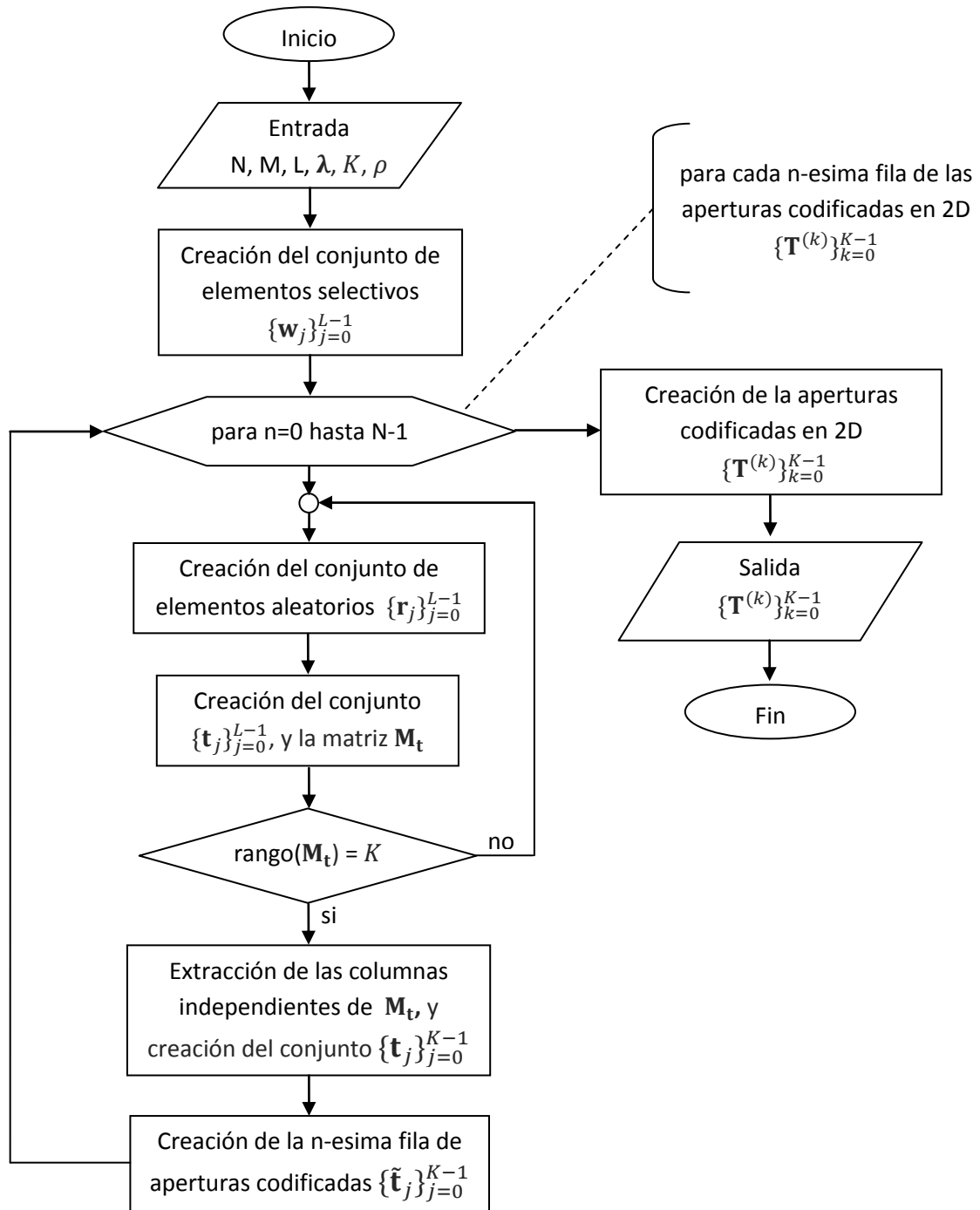
Nótese que la ecuación 3.24 es similar a la ecuación 1.14, con la diferencia que la ecuación (3.24), permite la reconstrucción selectiva de las bandas espectrales de interés $\bar{\mathbf{f}}'$, aplicando el método de reconstrucción expuesto en el numeral 1.5. En la Tabla 3 se resumen las variables principales del capítulo 2.

Tabla 3. Resumen de las variables principales del capítulo 3.

Variable	Símbolo	Dimensiones
Perfil espectral deseado	$\boldsymbol{\lambda}$	$L \times 1$
Número de bandas de interés	$\mathcal{L} = \ \boldsymbol{\lambda}\ _0$	escalar
Probabilidad de 1's del elemento \mathbf{r}	ρ	escalar
Conjuntos de componentes \mathbf{w} y \mathbf{r}	$\{\mathbf{w}_j\}_{j=0}^{K-1}, \{\mathbf{r}_j\}_{j=0}^{K-1}$	K vectores de $L \times 1$
Matriz conjunto de aperturas \mathbf{t}	\mathbf{M}_t	$L \times L$
Número de capturas	$K \leq L$	escalar
Matriz conjunto de mediciones \mathbf{y}	\mathbf{M}_y	$V \times L$
Conjunto de mediciones deseadas	$\{\mathbf{g}_j\}_{j=0}^{U-1}$	U vectores de $V \times 1$
Conjunto de aperturas alternas	$\{\tilde{\mathbf{t}}_j^{(k)}\}_{k=0}^{L-1}$, con $j = 0, \dots, U - 1$	L vectores de $M \times 1$
Apertura codificada en 2D	\mathbf{T}	$M \times M$
Vector de bandas de interés	$\bar{\mathbf{f}}$	$(\mathcal{L} * M) \times 1$

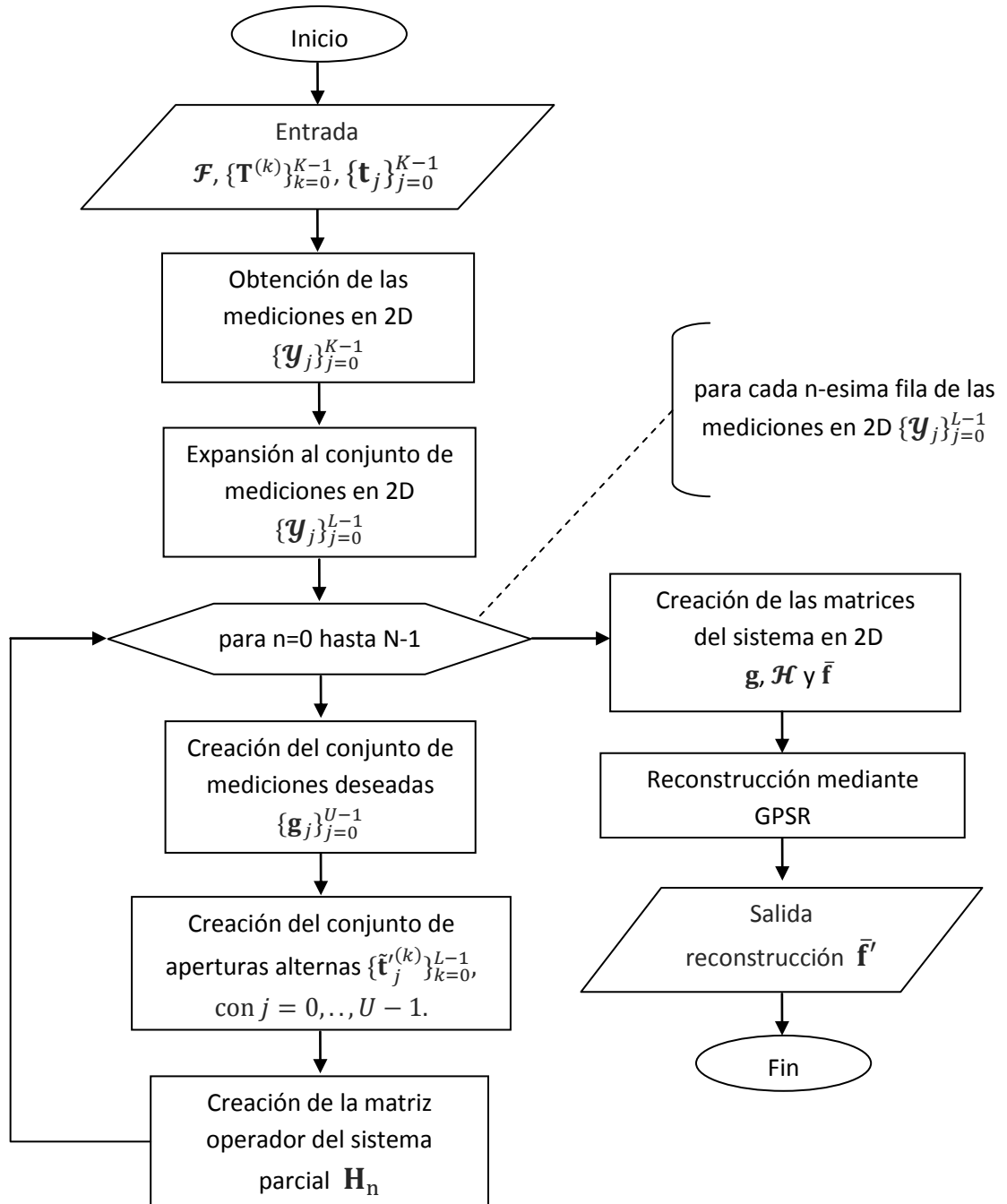
En la Figura 12 se muestra un diagrama de flujo del proceso de creación de un conjunto de aperturas codificadas $\{\mathbf{T}^{(k)}\}_{k=0}^{K-1}$.

Figura 12. Diagrama de flujo del proceso de creación de un conjunto de aperturas codificadas $\{\mathbf{T}^{(k)}\}_{k=0}^{K-1}$.



El diagrama de flujo del proceso de sensado y reconstrucción selectivo se muestra en la Figura 13.

Figura 13. Diagrama de flujo del proceso de sensado y reconstrucción selectiva.



4. SIMULACIONES Y RESULTADOS

4.1 PRELIMINARES

La imagen espectral para los experimentos es la misma utilizada en [22-24]. Esta imagen fue capturada utilizando una fuente de luz monocromática, en el rango visible [451nm-635nm], para iluminar la escena uniformemente. En la Figura 14 se muestra la escena original tomada por una cámara en RGB.

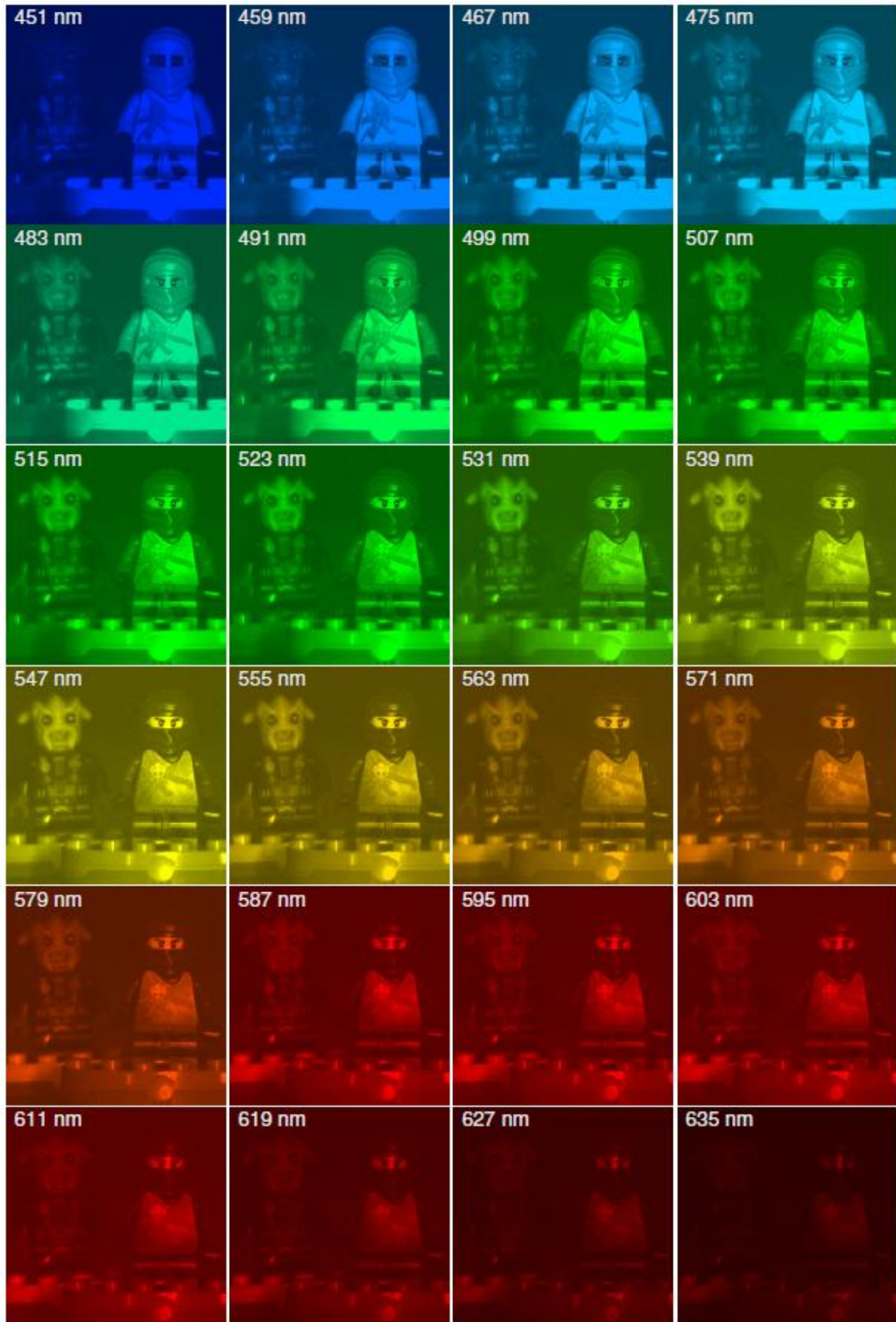
Figura 14. Escena original de la imagen espectral [21].



La imagen espectral tomada por el CASSI, posee una resolución de 256×256 píxeles en coordenadas espaciales, y 24 bandas espectrales. Esta imagen es tomada como la señal espectral real, en el proceso de modelado. Para efectos prácticos, ha sido escalada a $128 \times 128 \times 24$ píxeles para la realización de este trabajo. La Figura 15 muestra la imagen espectral.

Las imágenes espectrales poseen valores de intensidad de luz, por ende, son representadas como un conjunto de imágenes en escala de grises. Consecuentemente, la imagen espectral de la Figura 15 ha sido presentada utilizando falso color, para indicar a que longitud de onda pertenece cada banda.

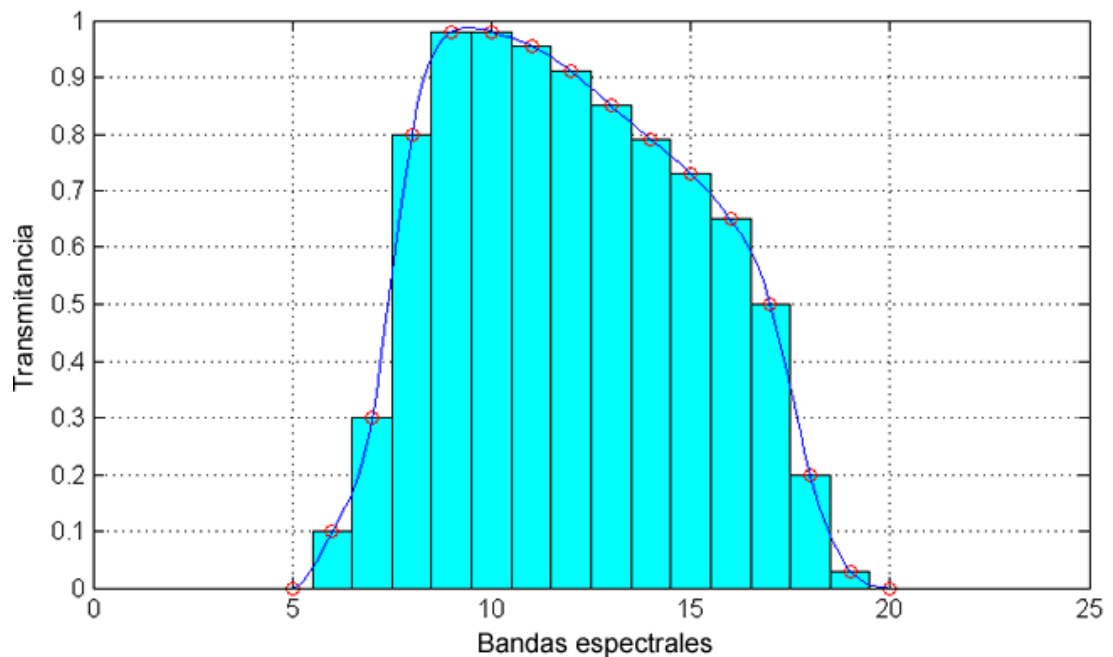
Figura 15. Imagen espectral de dimensiones $128 \times 128 \times 24$ pixeles [21].



Los perfiles espectrales deseados son generados con valores de transmitancia escogidos arbitrariamente. El presente proyecto no profundiza en la búsqueda de valores de transmitancia óptimos, para una distribución de bandas de interés. Los valores de transmitancia son escogidos de manera que asemejen el comportamiento natural que presentan los filtros paso banda.

En la Figura 16 se muestra un ejemplo de la similitud factible utilizando perfiles espectrales grises, al comportamiento espectral de un filtro paso banda. La línea azul muestra la distribución de transmitancia de un filtro paso banda. Las barras muestran la transmitancia de un perfil espectral gris, que busca simular el comportamiento espectral del filtro.

Figura 16: Similitud factible entre un perfil espectral gris y un filtro paso banda.

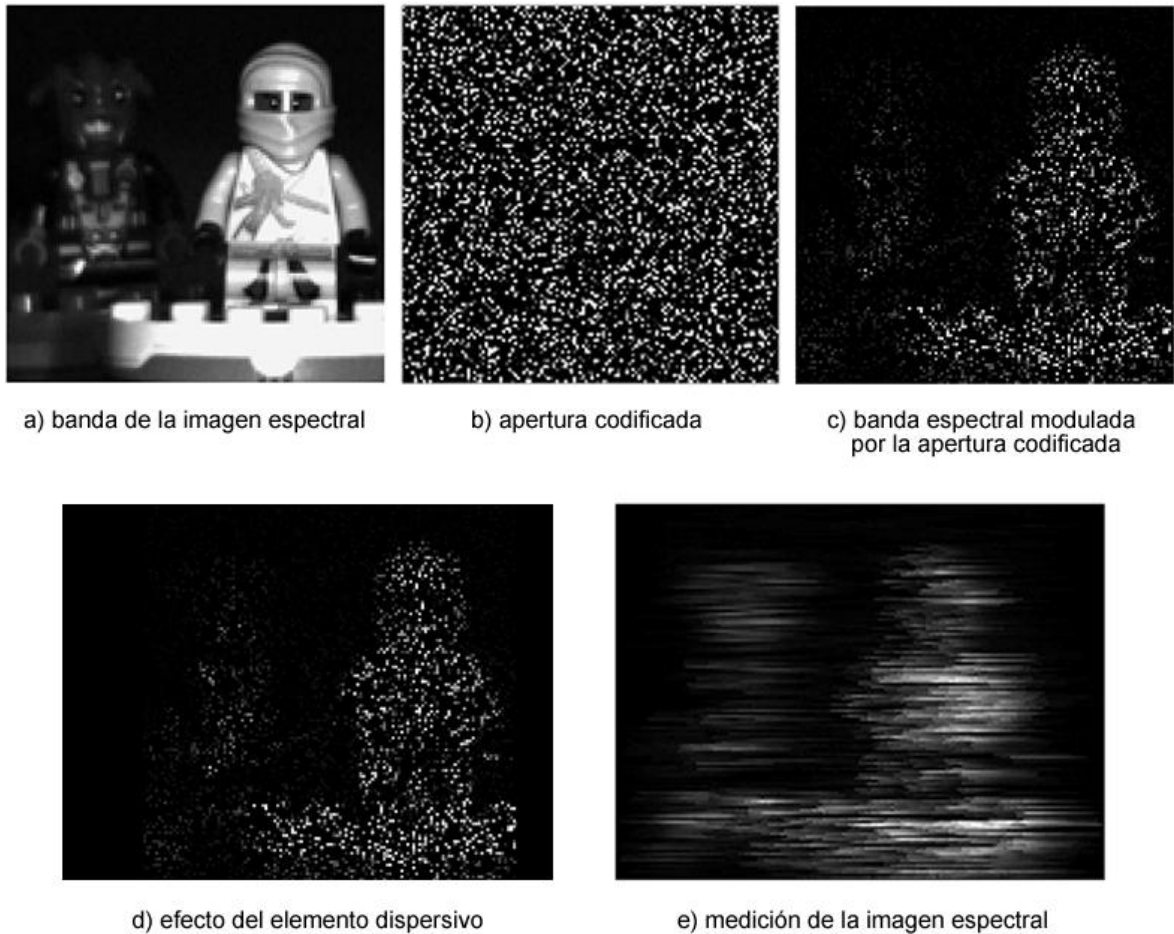


4.2 SIMULACIÓN DEL PROCESO DE SENSADO

La simulación del proceso de sensado se realiza, mediante la manipulación de los índices de la matriz correspondiente a cada banda espectral. Esta manipulación

busca simular el proceso de modulación espacial de la apertura codificada, y la dispersión creada por el elemento dispersivo. Con esto es posible obtener una medición compresa de toda la imagen espectral, en una única imagen en 2 dimensiones. En la Figura 17 se muestra el proceso de sensado del CASSI.

Figura 17. Simulación del proceso de sensado del CASSI.



En a) se muestra una banda de la imagen espectral, la cual es modulada espacialmente por una apertura codificada en escala de grises aleatoria presentada en b), la imagen resultante se muestra en c). El efecto de dispersión del elemento dispersivo se observa en d), el corrimiento que presenta la imagen modulada depende de la longitud de onda a la que pertenece la banda a). La medición obtenida de la imagen espectral que se presenta en e), es la suma de los

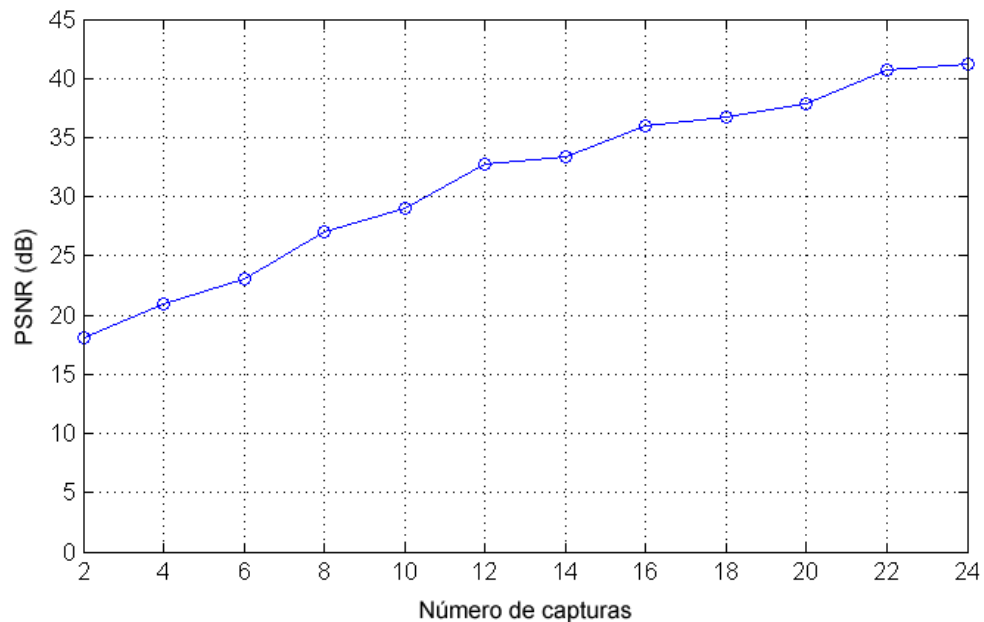
procesos de modulado espacial y dispersión c) y d), realizado con todas las bandas espectrales.

4.3 IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO DE RECONSTRUCCIÓN

Como se indicó en el numeral 1.5, el algoritmo de reconstrucción implementado es el GPSR (*Gradient Projection for Sparse Reconstruction*). El GPSR necesita que la imagen espectral sea representada de manera dispersa. Diferentes estudios realizados en [21][22], han encontrado que las bases de representación Kronecker, son la mejor opción para imágenes espectrales. Específicamente, la base de representación Ψ utilizada en este trabajo, consiste en una transformación de Coseno Discreto para el dominio espectral, y una transformación Wavelet 2D (Symlet 8) para el dominio espacial.

Un ejemplo de reconstrucción, utilizando el GPSR en un modelo del CASSI no selectivo para un conjunto de capturas {2, 4, 6, ..., 24} capturas se muestra en la Figura 18.

Figura 18: PSNR de las reconstrucciones mediante el GPSR.

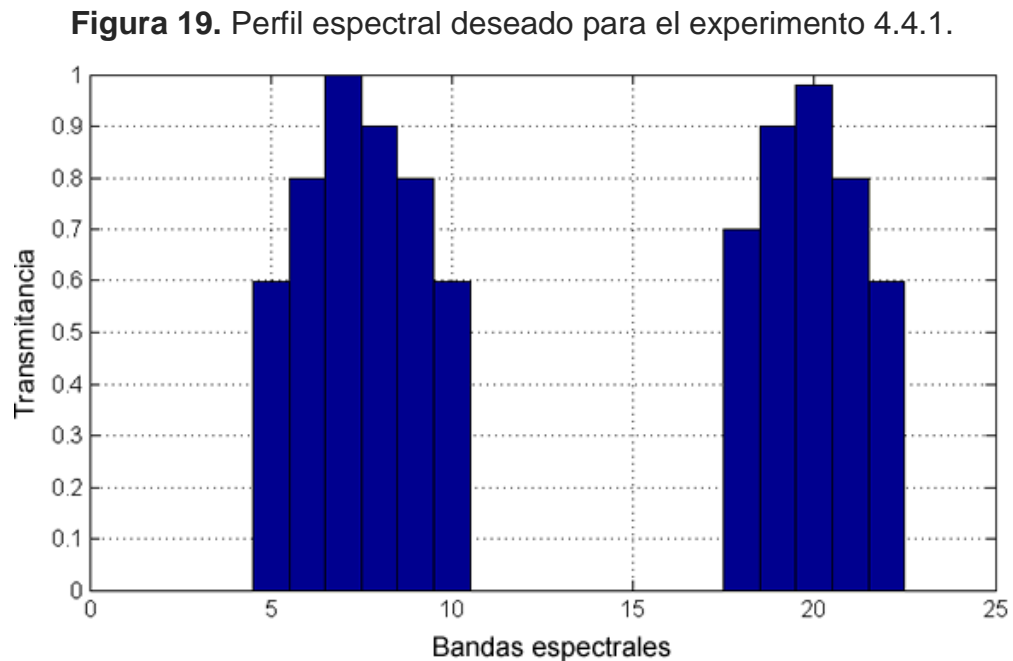


Se utilizaron 200 iteraciones para generar las reconstrucciones, el parámetro τ de la ecuación (1.15), que representa el estímulo a las soluciones dispersas, es escogido cuidadosamente para maximizar la calidad de reconstrucción. Cabe recalcar que en este experimento, se reconstruyen todas las bandas de la imagen espectral.

4.4 EXPERIMENTOS Y RESULTADOS

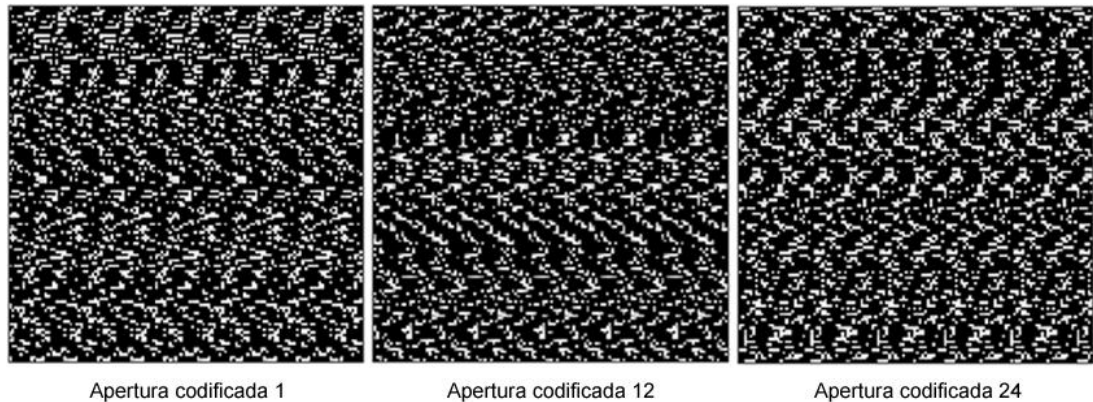
4.4.1 Reconstrucción selectiva de la imagen espectral: Este experimento verifica el diseño de las aperturas codificadas selectivas, y del método de reconstrucción expuesto en el capítulo 3.

El perfil espectral deseado para este experimento se muestra en la Figura 19, las bandas de interés son {5,6,7,8,9,10,18,19,20,21,22}. Los valores de transmitancia fueron escogidos de manera arbitraria.



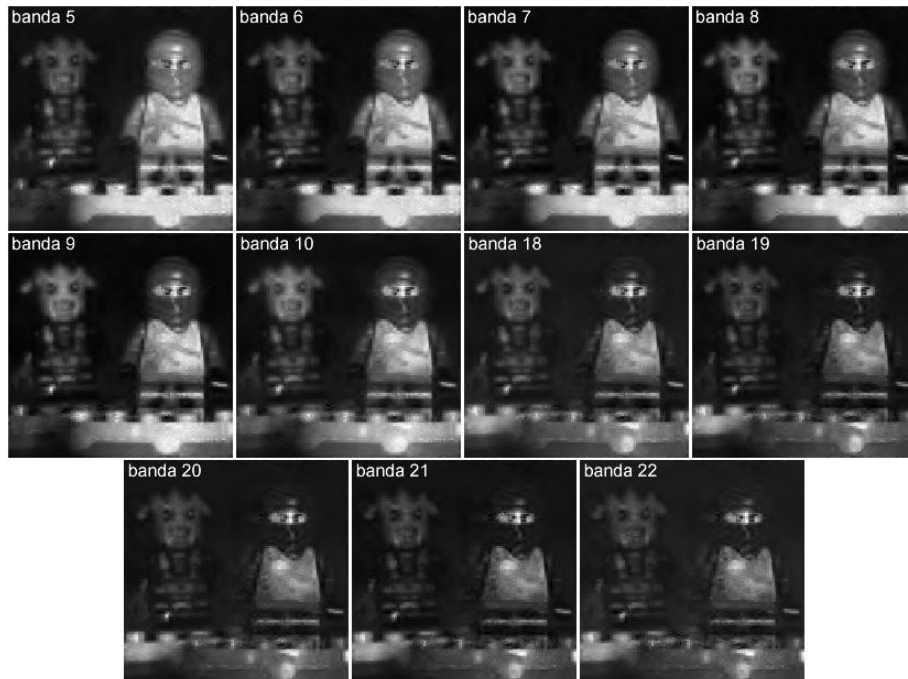
Se crearon 24 aperturas codificadas para el proceso de sensado, con un parámetro para la creación de las componentes aleatorias $\rho = 0.5$. En la Figura 20 se muestran 3 aperturas codificadas en escala de grises selectivas.

Figura 20. Ejemplos de aperturas codificadas creadas para el experimento 4.4.1.



El GPSR es ejecutado para 200 iteraciones y se buscó un valor de τ que maximizara la calidad de reconstrucción. La reconstrucción selectiva de la imagen espectral se muestra en la Figura 21, el PSNR promedio fue de 29.18 dB.

Figura 21. Reconstrucción selectiva de la imagen espectral.

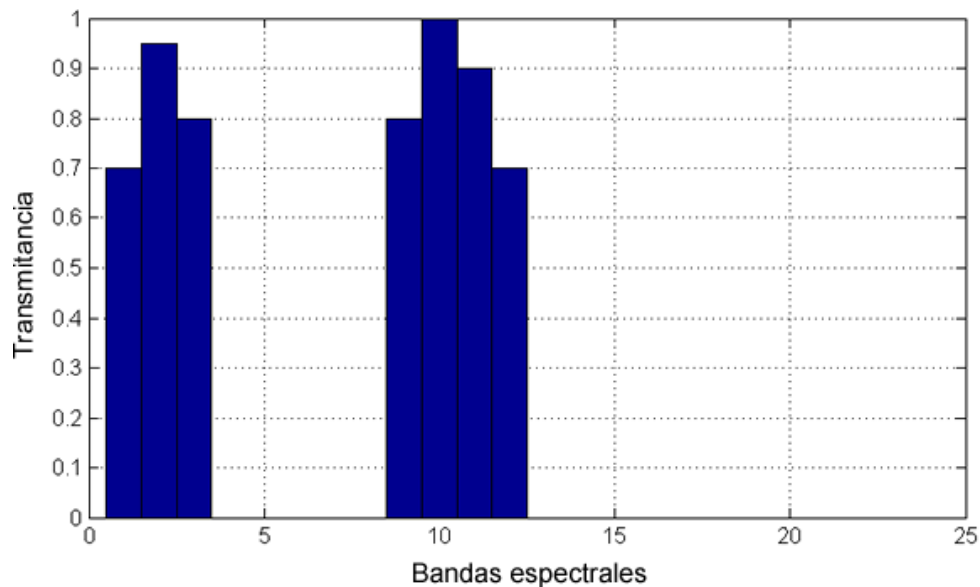


4.4.2 Comportamiento del parámetro ρ : Este experimento investiga la relevancia del parámetro ρ , en un conjunto de aperturas codificadas.

Se utilizó un conjunto de 24 aperturas codificadas, cada simulación en este experimento fue repetida 5 veces. El valor de ρ varía en el intervalo $\{0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9\}$. No se tiene en cuenta el valor $\rho = 0$ porque éste genera aperturas codificadas completamente oscuras sin ningún valor de transmitancia. Tampoco se tiene en cuenta $\rho = 1$ dado que desaparecería el efecto del componente aleatorio de la apertura codificada.

El perfil espectral utilizado se muestra en la Figura 22, las bandas de interés en este experimento son $\{1, 2, 3, 9, 10, 11, 12, 13\}$. Los valores de transmitancia son escogidos arbitrariamente.

Figura 22. Perfil espectral deseado para el experimento 4.4.2.



El GPSR fue ejecutado con un máximo de 100 iteraciones, y el valor de τ fue escogido para maximizar la calidad de la reconstrucción en cada caso. En la Tabla 4 se muestra el PSNR de la reconstrucción para cada valor de ρ .

Tabla 4. PSNR de las reconstrucciones según parámetro ρ .

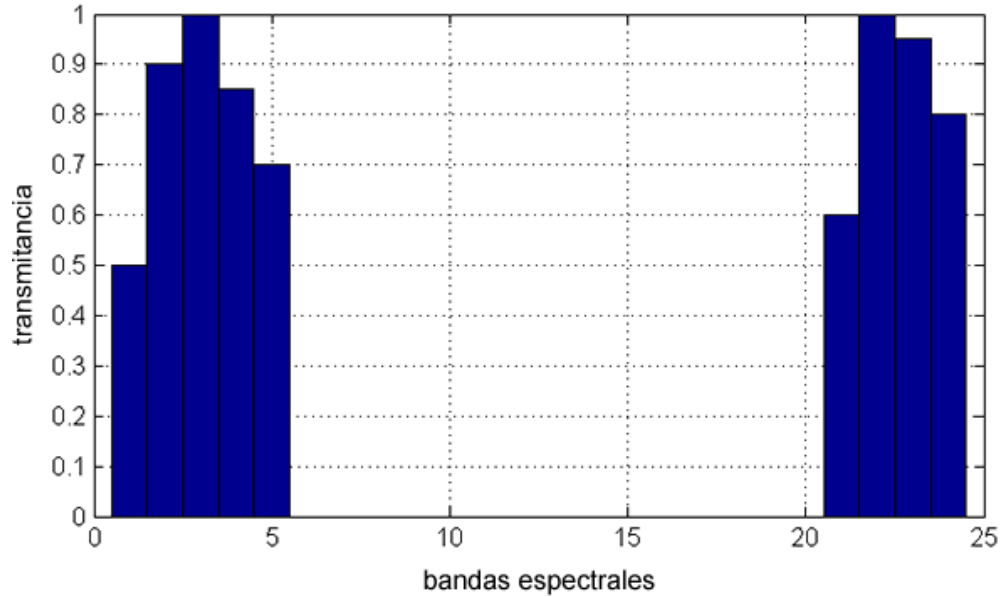
ρ	Promedio (dB)	Máximo (dB)	Mínimo (dB)
0.1	24.76	25.10	24.32
0.2	29.89	30.22	29.42
0.3	28.24	28.61	27.75
0.4	27.28	27.37	27.08
0.5	25.28	25.76	25.25
0.6	23.81	24.24	23.40
0.7	22.51	22.80	22.34
0.8	21.34	21.44	21.09
0.9	19.97	20.07	19.83

Nótese que para valores cercanos a $\rho = 0$ el PSNR decae rápidamente, esto se debe a que las aperturas creadas con este valor, poseen una transmitancia muy pequeña, capturando poca cantidad de información. También puede observarse que para valores cercanos a $\rho = 1$, el PSNR decae. Esto se debe a que para valores de ρ muy altos, la aleatoriedad del componente \mathbf{r} , se hace menos relevante.

4.4.3 Reducción del número de capturas: Este experimento verifica el método de reducción del número de capturas, expuesto en el numeral 3.5.

Se crearon grupos de aperturas para 24, 21, 18, 16, 14 y 12 capturas, utilizando un mismo perfil espectral deseado. El punto escogido para la creación del perfil espectral se muestra en la Figura 23. Las bandas de interés en este experimento son {1, 2, 3, 4, 5, 21, 22, 23, 24}. El sensado para cada número de capturas fue repetido 5 veces.

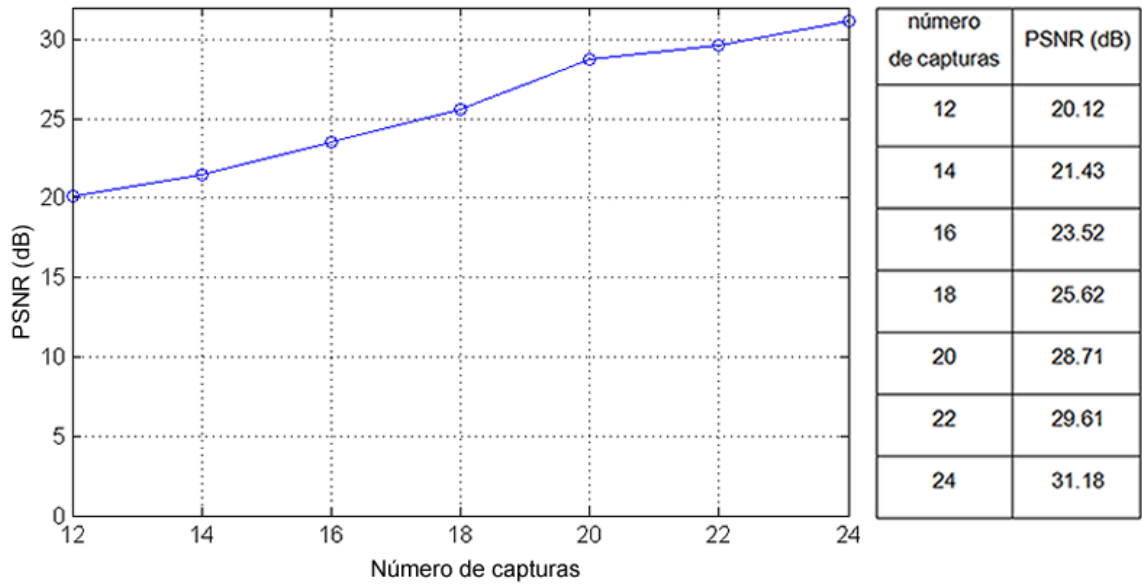
Figura 23. Perfil espectral deseado para el experimento 4.4.3.



El parámetro ρ fue escogido cuidadosamente para maximizar la calidad de la reconstrucción. El GPSR es ejecutado para 200 iteraciones y un valor de τ que maximizara la calidad de reconstrucción.

En la Figura 24 se muestran los promedios en PSNR de las reconstrucciones por número de capturas. La reducción en la calidad de reconstrucción puede explicarse, ya que la recuperación del conjunto de mediciones $\{\mathbf{y}_j\}_{j=0}^{L-1}$, realizada con la ecuación (3.15), no es exacta. El ruido presente en ésta recuperación, es anexado al ruido producido por el GPSR, resultando en una menor calidad de reconstrucción. También puede notarse que los valores de PSNR obtenidos en el presente experimento, no se equiparan a los obtenidos en el numeral 4.3. Esto se debe a que en esta metodología, algunos pixeles de la medición con información espectral de interés, son descartadas por poseer también información espectral que no es de interés (ver numeral 3.5), mientras que en la reconstrucción no selectiva del numeral 4.3, se utilizan todos los pixeles de la medición para la reconstrucción. Esto hace que la reconstrucción selectiva cuente con menor cantidad de información, para lograr un estimado de la imagen espectral original.

Figura 24. PSNR promedio de las reconstrucciones para el experimento 4.4.3.



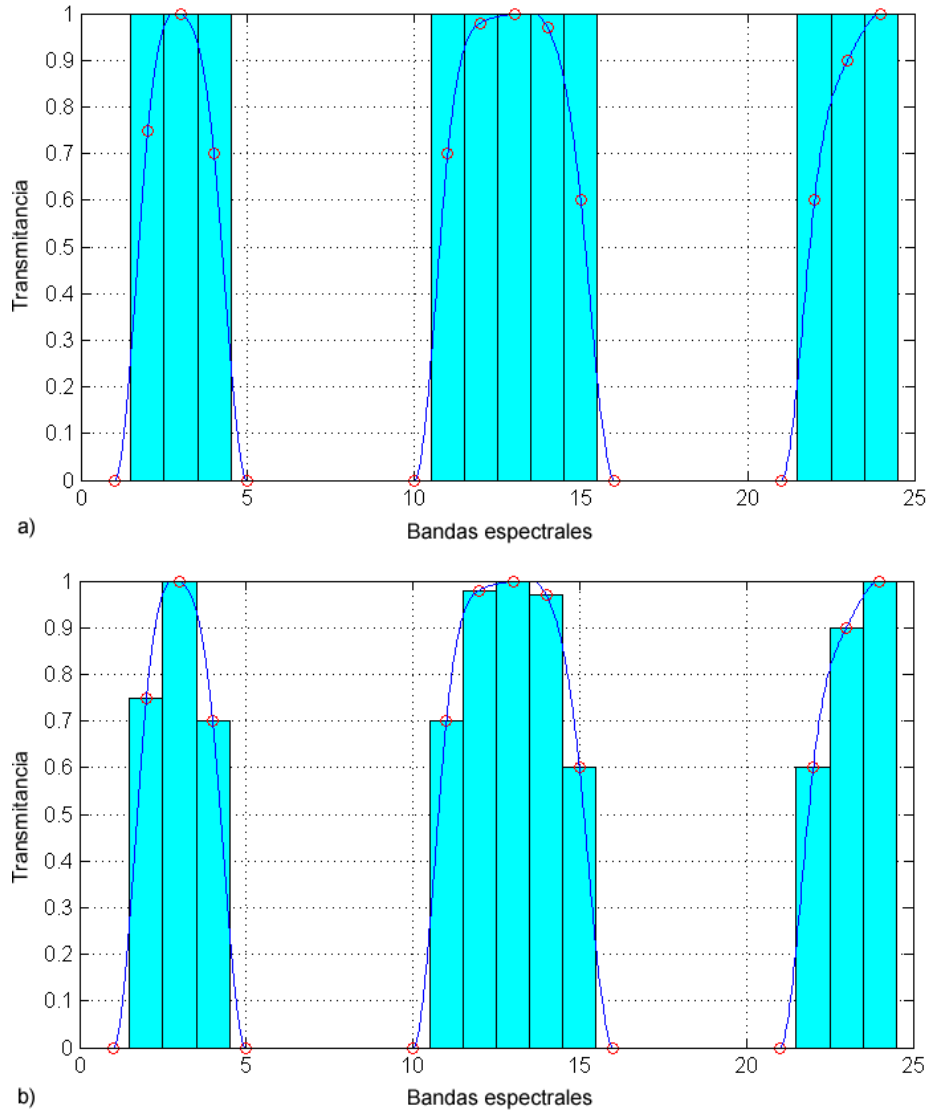
4.4.4 Beneficios del sensado selectivo mediante perfiles espectrales grises:

En este experimento se explora los beneficios de utilizar perfiles espectrales grises, en un sistema CASSI para el sensado selectivo de una imagen espectral.

Para este experimento se compara el desempeño de un sistema de selectividad espectral que utiliza un perfil espectral binario (aperturas codificadas binarias), y 2 sistemas que utilizan perfiles espectrales grises (aperturas codificadas en escala de grises). Se propone sensar de manera selectiva la imagen espectral para un conjunto de bandas de interés { 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14, 15, 22, 23, 24 }. La Figura 25 a) muestra el perfil espectral binario para las bandas de interés, en b) se muestra una de las posibles distribuciones para un perfil espectral grises.

Nótese que los valores de transmitancia del perfil espectral gris se encuentra completamente ajustado a las bandas de interés. Esto no sucede en los filtros paso banda, donde existe un pequeño porcentaje de transmitancia de las bandas espectrales adyacentes, dada la naturaleza óptica del instrumento.

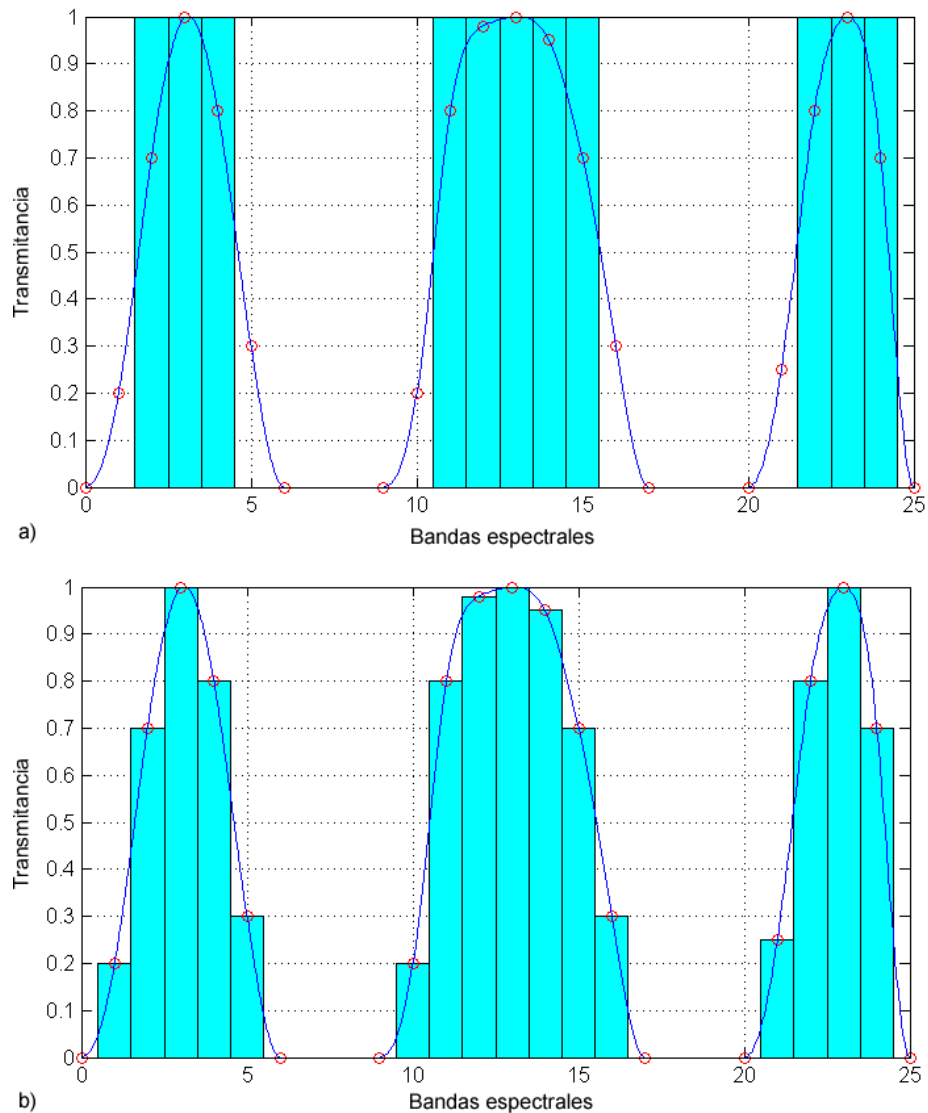
Figura 25. a) Perfil espectral binario, junto con b) perfil espectral gris ajustado.



Una de las ventajas importantes de la selectividad espectral basada en aperturas codificadas en escala de grises, es que es posible realizar un sensado mas realista de la señal espectral, tal y como los filtros ópticos funcionan, permitiendo capturar una gama más amplia de información. De esta manera, es posible asignar valores bajos de transmitancia, a las bandas espectrales adyacentes al conjunto de bandas de interés, simulando el comportamiento de los filtros reales.

En la Figura 26 se observa una variante del perfil espectral gris, con valores de transmitancia bajos en las bandas adyacentes al conjunto de bandas de interés. Al perfil espectral gris expuesto en la Figura 26 b) se le denominará perfil espectral expandido.

Figura 26. a) Perfil espectral binario, junto con b) perfil espectral gris expandido.



Para el presente experimento, se considera el perfil espectral binario expuesto en la Figura 25 a), el perfil espectral gris ajustado de la Figura 25 b), y el perfil espectral gris expandido de la Figura 26 b). Se utilizaron conjuntos de aperturas para 20 capturas, cada caso fue repetido 5 veces, y el PSNR presentado es el

promedio. También se buscó un parámetro ρ que maximice la calidad de la reconstrucción. El GPSR fue corrido a 200 iteraciones y el parámetro τ fue escogido para cada caso. El resultado del experimento se muestra en la Tabla 5.

Tabla 5. Resultados en PSNR del experimento 4.4.4.

Perfil espectral	PSNR (dB)		
	promedio	máximo	mínimo
Binario	25.72	26.33	24.94
Gris ajustado	26.46	27.72	26.12
Gris expandido	28.57	29.91	27.03

Como se puede observar, la inclusión de bandas adyacentes al conjunto de interés, mejora la calidad de la reconstrucción, a pesar de que posean niveles bajos de transmitancia. Esto se debe a que existe mas información espectral de interés, que se puede utilizar en el algoritmo de reconstrucción.

5. CONCLUSIONES

- Se realizó la simulación del proceso de sensado de un sistema de captura de imágenes espectrales (CASSI), obteniendo una medición compresada, modulada por una apertura codificada en escala de grises.
- Se implementó un algoritmo de reconstrucción que permite recuperar un estimado de la imagen espectral, a partir de la medición obtenida por el CASSI.
- Basándose en el modelo matricial para el CASSI, se desarrolló una metodología para la creación de aperturas codificadas en escala de grises selectivas. Esta metodología permitió el sensado y la reconstrucción de las bandas espectrales de interés de una imagen espectral, llegando a obtener valores de PSNR cercanos a 32 dB.
- Se demostró que el parámetro ρ influye en la calidad de la reconstrucción. Valores óptimos pueden ser calculados para maximizar la calidad de la reconstrucción.
- Se demostró que la metodología de reducción de capturas, expuesta en el numeral 3.5, permite obtener un estimado de la imagen espectral a partir de un número menor de capturas.
- Se modeló el sensado selectivo de la imagen espectral, con perfiles espectrales que incluyen bandas adyacentes al conjunto de interés, mostrando un aumento en el PSNR de entre 2 y 3 dB con respecto al sensado con perfiles binarios y grises de concordancia exacta al conjunto de bandas de interés.

- Los sistemas de selectividad en imágenes espectrales basados en aperturas codificadas en escala de grises requieren mayor investigación, debido a que aun están por debajo en cuanto a calidad de reconstrucción, comparados con los sistemas de reconstrucción completa del cubo de datos. Esta investigación es el primer paso para el desarrollo de una metodología de sensado selectivo, que permita obtener reconstrucciones de mayor calidad.

6. RECOMENDACIONES

- Realizar el proceso de sensado selectivo utilizando perfiles espectrales con valores de transmitancia basados en aplicaciones concretas, que permitan evaluar la utilidad de la presente metodología en diferentes campos de aplicación.
- Basándose en el modelo expuesto en el presente trabajo, investigar la selectividad espectral en un sistema CASSI para imágenes hiperespectrales. Estas imágenes poseen mayor cantidad de bandas espectrales.
- Desarrollar una metodología de sensado selectivo de imágenes espectrales basado en aperturas codificadas en escala de grises, que permita utilizar el 100% de la información espectral de interés en el proceso de reconstrucción.
- Desarrollar una metodología para la creación del elemento aleatorio \mathbf{r} , que maximice la incoherencia entre la matriz operador del sistema \mathcal{H} y la base de representación Kronecker Ψ .

BIBLIOGRAFÍA

- [1] RESONON Inc., "What is Spectral Imaging and When Should I Use It?," [en línea]. Disponible en: <http://www.resonon.com/whitepapers/Resonon-Hyperspectral-Tutorial.pdf>
- [2] A. Wagadarikar, R. John, R. Willett, y D. Brady, "Single disperser design for coded aperture snapshot spectral imaging," *Applied optics*, vol. 47, no. 10, pp. B44-B51, Abril 2008.
- [3] G.A. Shaw y H.K. Burke, "Spectral Imaging for Remote Sensing," *Lincoln Laboratory Journal*, vol. 14, no. 1, pp. 3-27, 2003.
- [4] D.S. Kittle, "Compressive Spectral Imaging," M.S. thesis, Duke University, Durham, NC, 2010.
- [5] D. Kittle, K. Choi, A. A. Wagadarikar, y D. J. Brady, "Multiframe image estimation for coded aperture snapshot spectral imagers," *Appl. Opt.*, 49(36):6824–6833, 2010.
- [6] Y. Wu, I. Iftekhar, O. Mirza, G. R. Arce y D. W. Prather, "Development of a digital-micromirror-device-based multishot snapshot spectral imaging system," *Optics Letters*, vol. 36, no. 14, Julio 15 2011.
- [7] E.J Candes y M.B. Walkin, "An Introduction To Compressive Sampling," *IEEE Signal Processing Magazine*, IEEE, vol. 25, no. 2, pp. 21-30, Marzo 2008.
- [8] M.A. Davenport, M.F. Duarte, Y.C. Eldar, y G. Kutyniok, "Introduction to Compressed Sensing," en *Compressed Sensing: Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2012.

- [9] G. Kutyniok, "Compressed Sensing: Theory and Applications," en *Compressed Sensing: Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2012.
- [10] H. Arguello y G.R. Arce, "Code aperture optimization for spectrally agile compressive imaging," *JOSA A*, vol. 28, Issue 11, pp. 2400-2413, 2011.
- [11] H. Arguello y G.R Arce, "Rank Minimization Code Aperture Design for Spectrally Selective Compressive Imaging," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 22, no. 3, pp. 941-954, 2013.
- [12] H. Arguello y G. R. Arce, "Spectrally selective compressive imaging by matrix analysis," en *OSA Optics and Photonics Congress*, Monterey, CA, USA, 2012.
- [13] D. J. Brady, "Optical *Imaging and Spectroscopy*." New Jersey: John Wiley & Sons Inc, 2008.
- [14] D.S Taubman y M.W. Marcellin, "JPEG 2000: Image Compression Fundamentals, Standards and Practice." Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [15] D. Donoho y M. Elad, "Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ_1 minimization," *en Proc. Natl. Acad. Sci.*, vol. 100, no. 5, pp. 2197 - 2202, 2003.
- [16] A. Cohen, W. Dahmen, y R. DeVore, "Compressed sensing and best k-term approximation," *Amer. Math. Soc.*, vol. 22, no. 1, pp. 211 - 231, 2006.
- [17] H. Arguello y G. R. Arce, "Restricted isometry property in coded aperture compressive spectral imaging," en *IEEE Statistical Signal Processing Workshop*, Ann Arbor, MI, USA, 2012.

- [18] H. Arguello, C. Correa y G. Arce., "Fast lapped block reconstructions in compressive spectral imaging," *Applied Optics: Appl. Opt.*, vol. 52, pp. D32-D45, 2013.
- [19] M.A.T Figueiredo, R.D. Nowak, y S.J. Wright, "Gradient Projection for Sparse Reconstruction: Application to Compressed Sensing and Other Inverse Problems," *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 1, pp. 586 - 597, Dec. 2007.
- [20] A.A. Wagadarikar, N.P. Pitsianis, X. Sun, and D.J. Brady, "Spectral Image Estimation for Coded Aperture Snapshot Spectral Imagers," *in Proc. of SPIE 7076*, vol. 7076, pp. 707602-1, 2008.
- [21] H. Rueda, "Super-resolution algorithm applied to Spectral images acquired via Compressive sensing." Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander Bucaramanga, 2012.
- [22] M. F. Duarte y R. G. Baraniuk. "Kronecker product matrices for compressive sensing." *IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pp. 3650–3653, 2010.
- [23] H. Arguello, H. Rueda, Y. Wu, D. Prather y G. Arce, "Higher-order computational model for coded aperture spectral imaging," *Appl. Opt.*, vol. 52, pp. D12-D21, 2013.
- [24] H. Rueda y H. Arguello, "Spatial super-resolution in coded aperture-based optical compressive hyperspectral imaging systems," To appear in *Journal of the Engineering Department*, Universidad de Antioquia, Colombia, 2013.