

EL MECANISMO DEL UNIVERSO RELAJADO: POSIBLE
SOLUCIÓN DINÁMICA Y LIBRE DE AJUSTES FINOS AL
VIEJO PROBLEMA DE LA CONSTANTE COSMOLÓGICA.

JOSÉ FERNANDO RODRÍGUEZ RUIZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2012

EL MECANISMO DEL UNIVERSO RELAJADO: POSIBLE
SOLUCIÓN DINÁMICA Y LIBRE DE AJUSTES FINOS AL
VIEJO PROBLEMA DE LA CONSTANTE COSMOLÓGICA.

JOSÉ FERNANDO RODRÍGUEZ RUIZ¹

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

DIRECTOR

YEINZON RODRÍGUEZ GARCÍA^{1,2}, PH.D.

¹GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN RELATIVIDAD Y GRAVITACIÓN - UIS

²GRUPO DE FÍSICA - FENOMENOLOGÍA DE PARTÍCULAS ELEMENTALES Y COSMOLOGÍA - UAN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2012

“In general we look for a new law by the following process. First we guess it. Then we compute the consequences of the guess to see what would be implied if this law that we guessed is right. Then we compare the result of the computation to nature, with experiment or experience, compare it directly with observation, to see if it works. If it disagrees with experiment it is wrong.”

R. P. Feynman

“It is not unscientific to make a guess, although many people who are not in science think it is.”

R. P. Feynman

“Nothing is impossible. Not if you can imagine it. That’s what being is a scientist is all about.”

Professor H. J. Farnsworth.

Para Luz Marina y Margarita.

Agradecimientos

- A Dios por darme las fuerzas para continuar a pesar de las dificultades.
- A mis padres por apoyarme incondicionalmente en todo el desarrollo de mi carrera.
- A mi novia Margarita por llenar mi vida de tanta alegría.
- A mis amigos Wilson, Ivan, Carlos y Oscar.
- Al profesor Yeinzon, excelente director, que me guió y me facilitó el desarrollo de mi trabajo.

Contenido

Resumen	12
Abstract	13
Introducción	15
1. Gravedad de Einstein y Cosmología Estándar	17
1.1. El Principio de Equivalencia	17
1.2. Ecuaciones de Campo de Einstein	18
1.3. La Constante Cosmológica	19
1.4. Principio Variacional	20
1.4.1. El Tensor Energía-Momento	21
1.5. El Principio Cosmológico y la Dinámica del Universo	22
1.5.1. Ecuaciones Dinámicas	23
1.5.2. Ecuación de Continuidad	24
1.5.3. Soluciones Estándar	24
2. El viejo problema de la Constante Cosmológica	26

2.1. Introducción a la Cuantización Canónica	26
2.1.1. Campo Escalar	27
2.1.2. Vacío Electrodébil	28
2.2. El viejo problema de Constante Cosmológica como un problema de ajuste fino	31
3. Posible Solución	33
3.1. Principio Variacional	34
3.2. Cosmología $f(R, \mathcal{G})$	35
3.2.1. Ecuaciones modificadas de Friedmann	35
3.3. Condiciones sobre $f(R, \mathcal{G})$	38
4. Mecanismo Dinámico	40
4.1. Modelo de juguete	40
4.1.1. Época Actual	41
4.1.2. Época de Radiación y de Materia	41
4.2. Modelo Realista	43
4.2.1. Época de Radiación	43
4.2.2. Época de Materia	44
5. Solución Numérica	46
6. Conclusiones	49
Bibliografía	51
Apéndices	55

A. Gravedad Modificada	56
A.1. Gravedad $F(R, S, T)$	56
A.2. Gravedad $f(R, \mathcal{G})$	61
B. Cosmología $f(R, \mathcal{G})$	62
B.1. Tensor de Einstein y $E_{\mu\nu}$	63
C. Detalles de la Solución Numérica	70
C.1. Método de Runge-Kutta	73

Lista de figuras

2.1. El potencial $V(\phi)$ del campo de Higgs.	30
4.1. Comportamiento del parámetro a con una CC negativa comparable con la densidad de energía de la radiación.	42
5.1. Comportamiento del parámetro de desaceleración q versus el corrimiento al rojo z	46
5.2. Gráficas de la solución numérica de las ecuaciones.	47

Resumen

TÍTULO: EL MECANISMO DEL UNIVERSO RELAJADO: POSIBLE SOLUCIÓN DINÁMICA Y LIBRE DE AJUSTES FINOS AL VIEJO PROBLEMA DE LA CONSTANTE COSMOLÓGICAⁱ

AUTOR: RODRÍGUEZ RUIZ, José Fernandoⁱⁱ.

PALABRAS CLAVES: Constante Cosmológica, Energía Oscura, Gravedad Modificada.

DESCRIPCIÓN: Las contribuciones a una constante cosmológica efectiva Λ_E corresponden por un lado, a la presencia de una constante Λ_D , llamada la constante cosmológica “desnuda” y, por otro lado, a la energía del estado de vacío de los campos presentes en la acción. Al comparar el valor deducido a partir de las observaciones cosmológicas con el vacío electrodébil, se observa una diferencia de 55 órdenes de magnitud. Para obtener concordancia entre los valores, es necesario realizar un ajuste fino en Λ_D de tal manera que se cancele la enorme discrepancia. La imposibilidad de evitar que la contribución de los campos altere significativamente la constante cosmológica efectiva, sin recurrir a un ajuste fino, se denomina el viejo problema de la constante cosmológica. Distintas interpretaciones a Λ_D se han planteado, tales como su reemplazo por un campo escalar; sin embargo, ésto no resuelve el problema. Se pretenderá dar una solución alternativa, en donde Λ_D es complementada por un término originado a partir de modificaciones en la gravedad. La modificación se realiza mediante la introducción de un funcional $f(R, \mathcal{G})$ que involucra el invariante de Gauss-Bonnet \mathcal{G} . El término nuevo en las ecuaciones de campo, interpretado como un fluido cósmico con una ecuación de estado inhomogénea, relaja de manera dinámica el valor de Λ_E , y reproduce satisfactoriamente la cosmología estándar.

ⁱTrabajo de grado.

ⁱⁱFacultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodríguez García (Director).

Abstract

TITLE: THE MECANISM OF THE RELAXED UNIVERSE: POSSIBLE DYNAMICAL SOLUTION, AND FREE OF FINE TUNNING TO THE OLD PROBLEM OF THE COSMOLOGICAL CONSTANTⁱⁱⁱ

AUTHOR: RODRÍGUEZ RUIZ, José Fernando^{iv}.

KEYWORDS: Cosmological Constant, Dark Energy, Modified Gravity.

DESCRIPTION: The contributions to an effective cosmological constant Λ_E are the constant Λ_D , called the “bare” cosmological constant, and the vacuum energy of the fields present in the action. Comparing the deduced value from the cosmological observations with the electroweak vacuum, is observed a difference of 55 orders of magnitude. It is necessary to make a fine tuning in Λ_D in order to obtain concordance between this values. The impossibility to avoid a significative contribution from the fields without recurring to a fine tuning, is known as the old problem of the cosmological constant. Interpretations of Λ_D , such as its replacement by a scalar field, don't really solve the problem. We present an alternative solution, where Λ_D is supplemented with a term constructed from the modification of gravity. The modification is made by the introduction of a function $f(R, \mathcal{G})$ that involves the Gauss-Bonnet invariant \mathcal{G} . The new term, interpreted as a cosmic fluid with an inhomogeneous equation of state, will relax dynamically Λ_E without a fine tuning, and it will reproduce the standard cosmology.

ⁱⁱⁱDegree project.

^{iv}Faculty of Sciences, School of Physics, Yeinzon Rodríguez García (Supervisor).

Notación

Los índices griegos representan cualquiera de los números $\{0, 1, 2, 3\}$ y los índices latinos cualquiera de los números $\{1, 2, 3\}$.

La derivada parcial $\partial_\mu A^\nu$ se denotará por $A^\nu_{,\mu}$ y la derivada covariante $\nabla_\mu A^\nu$ por $A^\nu_{;\mu}$.

La signatura de la métrica $g_{\mu\nu}$ es $(+, -, -, -)$.

Los símbolos de Christoffel están dados por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} [g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}],$$

Las componentes del tensor de Riemann y Ricci por:

$$\begin{aligned} R^\rho_{\ \mu\lambda\nu} &= \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\rho + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma, \\ R_{\mu\nu} &= R^\rho_{\ \mu\rho\nu}. \end{aligned}$$

En resumen, la notación es $(-, +, -)$ según la Ref. [1]

Introducción

En la Teoría Clásica de Campos, un campo escalar ϕ puede ser visto como una colección continua de osciladores armónicos [2]. De esta manera, se entiende intuitivamente la cuantización del campo ϕ , como la cuantización de cada uno de los osciladores que lo conforman. Durante el proceso formal de la cuantización, se define el estado de vacío como aquel estado que posee la menor energía posible, y en el cual, el número de partículas es igual a cero. La interpretación del campo ϕ en términos de osciladores armónicos, implica que la energía del estado de vacío es igual a la suma de la energía mínima de los osciladores. Debido a lo anterior, la energía del estado de vacío es diferente de cero, i.e. en la Teoría Cuántica de Campos la ausencia total de partículas no implica un estado con energía igual a cero. Confirmación experimental de esta predicción se encuentra en las Refs. [3, 4, 5].

Por otro lado, en la Teoría General de la Relatividad el tensor energía-momento se constituye en la fuente del campo gravitatorio, por lo tanto, es el valor mismo de la energía, y no la diferencia entre estados, la cantidad decisiva en el comportamiento de los fenómenos gravitacionales. De este modo, cualquier energía, incluyendo la energía del estado de vacío, debe ser incluida en el análisis de la física gravitacional. Una energía de vacío que permea el Universo entero, induce un campo gravitacional que provoca una expansión acelerada, lo cual, es físicamente equivalente a la presencia de una Constante Cosmológica (CC) en la ecuaciones de campo de Einstein. Por lo tanto, el valor efectivo de la CC o energía de vacío, debe comprender dos contribuciones: una relacionada con una constante Λ_D , llamada la CC desnuda y, por otro lado, la contribución del estado de vacío de los campos. El valor teórico de la contribución de los campos es del orden de 10^8 GeV^4 [6]^v.

Los resultados experimentales del estudio de la supernova tipo Ia [8, 9] y los datos de

^vEste valor se obtiene teniendo en cuenta únicamente el vacío electro-débil; a una escala de gran unificación el valor es del orden de 10^{64} GeV^4 [7].

la radiación cósmica de fondo, implican la existencia de una forma hipotética de energía denominada Energía Oscura (EO). La EO constituye un 73% de la energía total del Universo [10, 11, 12] y es responsable de una expansión acelerada. Por consiguiente, es razonable tomar como medida experimental de Λ_E , la cantidad de EO presente en el Universo. El valor experimental de la densidad de EO es del orden de 10^{-47} GeV⁴. Al comparar éste valor con la contribución de los campos, se obtiene la enorme diferencia de 55 órdenes de magnitud. Con el único fin de obtener concordancia entre los resultados teóricos y experimentales, se elige el valor de Λ_D , de tal forma que se cancelan 55 cifras decimales de manera exacta. Sin embargo, es evidente que ésta elección no proporciona una explicación satisfactoria del porqué del pequeño valor observado de Λ_E , a pesar de la enorme contribución de los campos. La imposibilidad de evitar la contribución de los campos sin recurrir a un ajuste fino, se denomina el primer o viejo problema de la CC.

Como solución al viejo problema de la CC se ha reemplazado Λ_D por campos escalares [13, 14, 15, 16, 17, 18]; sin embargo, este reemplazo no resuelve realmente el problema [19]. Para dar una verdadera solución al primer problema de la CC se deben garantizar dos hechos: primero, la cancelación libre de ajustes finos de la contribución de los campos; y segundo, no se debe alterar la historia térmica del Universo. Se presentará una posible solución en donde estos dos hechos se satisfacen [20, 21, 22]. En la solución la CC desnuda no es reemplazada por campos escalares, sino que es complementada por un término proveniente de una teoría modificada de la gravedad. La modificación de la gravedad se realiza a través de la introducción de un funcional de la forma $f(R, \mathcal{G})$, que involucra el invariante de Gauss-Bonnet \mathcal{G} . La construcción del nuevo funcional garantiza que en la nueva teoría de la gravedad, el Principio de Equivalencia y la Conservación de la Energía-Momentum se sigan cumpliendo. El resultado efectivo de la modificación, es la aparición de una nueva forma de EO llamada el “Cosmón” X , cuya ecuación de estado es no homogénea y dependiente del parámetro de Hubble H y del parámetro de desaceleración q . La presencia del Cosmón en las ecuaciones de Friedmann y en la ecuación de continuidad provoca la cancelación dinámica de la contribución de los campos. Gracias al origen gravitacional del Cosmón, la misma expansión del universo pone en acción el mecanismo de cancelación y a su vez, la cancelación garantiza que la expansión del Universo sea la esperada, y además, la construcción de la función $f(R, \mathcal{G})$ provee una correcta transición entre las etapas conocidas del Universo. Un análisis numérico del modelo muestra que no se realizan ajuste finos en sus parámetros libres y que en efecto se reproduce la Cosmología estándar.

1

Gravedad de Einstein y Cosmología Estándar

Se presentará a continuación un resumen acerca de la Teoría General de la Relatividad de Einstein y de la Cosmología Estándar, haciendo énfasis en los principios que las rigen, y en la manera que estos fueron incorporados. Todos estos principios deben mantenerse en la nueva teoría de la gravedad a construir. Se mostrará el papel que cumple el valor de la energía en la física gravitacional en contraste con las otras áreas de la física, las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del universo y su historia.

1.1. El Principio de Equivalencia

El corazón de la teoría de Einstein se encuentra en el Principio General de la Relatividad, el cual consiste en la afirmación que *todos los sistemas de referencia, sin importar su estado de movimiento, son equivalentes para la formulación de las leyes de la física*, i.e. es imposible la definición de un sistema de referencia absoluto. Ahora, es bien conocido que no es posible conseguir tal cosa en un sistema de referencia acelerado, a menos que se asuma un principio adicional. Desde la época de Galileo Galilei, quien fue el primero en afirmar que el movimiento de cualquier cuerpo en caída libre es independiente de su composición y estructura [23], aparecen vestigios del principio de la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitacional, también conocido como el Principio de Equivalencia (PE). Sin embargo, es Roland Eötvös en 1889 [24] quien logra demostrarlo experimentalmente. Una consecuencia inmediata de este principio es la imposibilidad de diferenciar, mediante la realización de experimentos (locales), un sistema de referencia acelerado de un campo gravitacional. Por lo tanto, es imposible el

concepto de un verdadero sistema de referencia acelerado y además, la elección adecuada de un sistema de referencia elimina los efectos gravitacionales. Todo lo anterior hace finalmente posible el Principio General de la Relatividad. En resumen, el PE afirma que *en presencia de cualquier campo gravitacional, es posible para todo punto, construir un sistema de referencia local inercial, en el cual, las leyes de la física tienen la misma forma que en un sistema de referencia no acelerado y libre de campos gravitacionales*, y por ende, es la condición necesaria para el Principio General de la Relatividad [25]; también hace que este último no se constituya en una simetría, sino en una simetría dinámica, debido a la necesidad de introducir una fuerza fundamental para garantizar su validez [26]

1.2. Ecuaciones de Campo de Einstein

La mayor importancia del PE en una teoría de la gravedad yace en su capacidad para realizar afirmaciones acerca de la naturaleza misma del campo gravitacional. El PE insinúa, debido a su semejanza con las coordenadas normales de una variedad diferenciable, que la fuerza de la gravedad, a diferencia de las otras interacciones fundamentales, es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, y que el campo gravitatorio debe ser identificado con las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Si se realiza una descripción geométrica de la teoría de Newton, se intuye que la forma de las ecuaciones de campo debe ser [27]:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (1.2.1)$$

en donde G_N es la constante de gravitación universal. Además, deben cumplirse las siguientes condiciones: $G_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico construido a partir del tensor de curvatura de Riemann $R^\rho_{\mu\lambda\nu}$ [28] y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento. Puede demostrarse matemáticamente que la forma más general de $G_{\mu\nu}$ es [27]:

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R. \quad (1.2.2)$$

Como prueba de autoconsistencia de la teoría, se requiere que la ecuaciones (1.2.1) en el límite de bajas velocidades y campos débiles, sean equivalentes a la ley de gravitación de Newton. Para esto, el valor de las constantes C_1 y C_2 debe ser igual a -1 y $1/2$, respectivamente. Finalmente, se llega a las ecuaciones de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -8\pi G_N T_{\mu\nu}. \quad (1.2.3)$$

Es de extrema importancia notar que las ecuaciones (1.2.3) muestran que el tensor energía-momento es la fuente del campo gravitacional $g_{\mu\nu}$, o dicho de otra manera,

el espacio-tiempo se “curva” debido a la presencia de la materia-energía, incluyendo la misma energía gravitacional. Por esta razón, el campo gravitacional adquiere la capacidad de interactuar consigo mismo.

1.3. La Constante Cosmológica

Aunque las motivaciones iniciales de la introducción de la Constante Cosmológica fueron totalmente distintas [29], si se quiere una versión aún más general de $G_{\mu\nu}$, se debe incluir un término de la forma $g_{\mu\nu}\Lambda$, dando origen a las ecuaciones de campo de Einstein con CC:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G_N T_{\mu\nu}. \quad (1.3.1)$$

Se obtiene una interpretación física de la CC, al asumir la existencia de la energía de vacío. Se entiende intuitivamente que la energía de vacío permea la totalidad del Universo y *siempre* está presente; por lo tanto, en un sistema de referencia local, ésta debe comportarse como un invariante de Lorentz. Debido a que el único tensor invariante de Lorentz, en este sistema de referencia, es el tensor métrico de Minkowski, el tensor energía-momento del vacío $T_{\mu\nu}^V$ debe ser proporcional a $\eta_{\mu\nu}$. El PE permite que al reemplazar $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$, se obtenga una expresión válida en cualquier sistema de referencia,

$$T_{\mu\nu}^V = V g_{\mu\nu}. \quad (1.3.2)$$

Si se redefine la constante de proporcionalidad mediante el reemplazo $V = \Lambda/8\pi G_N$, se observa que el tensor energía-momento del vacío posee la misma forma que el término correspondiente a la CC en las ecuaciones de Einstein. Por lo tanto, la energía de vacío es físicamente equivalente a la CC. Puesto que la energía de vacío no posee una dirección preferencial, ésta se comporta como fluido que presenta una presión igual en todas las direcciones. Esta clase de fluido se conoce como un fluido perfecto, cuyo tensor energía-momento está descrito completamente por la cuadrivelocidad u_μ y, por el valor la densidad de energía y presión en un sistema de referencia comóvil, ρ y p , respectivamente.

$$T_{\mu\nu}^V = V g_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}. \quad (1.3.3)$$

Si se observa el fluido desde el sistema de referencia local inercial comóvil, $u_\mu = \delta_{0\mu}$, por lo cual, las componentes de (1.3.3) son $T_{00}^V = V$, $T_{ij}^V = -V\eta_{ij}$. De aquí, se deduce que la constante de proporcionalidad V es la densidad de energía del vacío y que ésta se relaciona con la presión mediante la expresión $p_V = -\rho_V$.

1.4. Principio Variacional

En contraste con la Sección 1, las ecuaciones de campo (1.2.3) pueden ser derivadas a partir de un principio variacional [30, 31]. Existen varias razones para la utilización de un principio variacional en el estudio de las leyes de la naturaleza. En primer lugar, la evidente ventaja de trabajar con una sola cantidad, en lugar de las múltiples componentes de un vector o un tensor, permite una fácil formulación de conjeturas acerca de la forma de las leyes. Además, gracias al teorema de Noether [32], se establece una elegante relación entre las simetrías de la acción y la existencia de cantidades conservadas.

En el caso del campo gravitacional se introduce el funcional S que contiene todas las características del campo:

$$S = \int \mathcal{L} d^n x. \quad (1.4.1)$$

La función \mathcal{L} que se denomina la densidad lagrangiana, depende de $g_{\mu\nu}$ y de sus derivadas $\{g_{\mu\nu,\sigma}, g_{\mu\nu,\sigma\lambda}, \dots\}$. De acuerdo con el Principio General de la Relatividad, *las leyes de la física deben ser invariantes ante una transformación general de coordenadas*, por lo tanto, el valor de S debe ser el mismo en cualquier sistema de referencia, i.e. S debe ser un escalar generalizadoⁱ. Este requerimiento trae como consecuencia que \mathcal{L} sea un escalar y que $d^n x$ deba reemplazarse por $\sqrt{|g|} d^n x$. Según el PE, la métrica $g^{\mu\nu}$ puede ser llevada a la forma $\eta^{\mu\nu}$, y su primera derivada ser igualada a cero, por consiguiente, cualquier escalar no constante debe contener al menos la segunda derivada de $g^{\mu\nu}$. El escalar más simple que puede ser construido a partir de la métrica y que además contiene segundas derivadas es el escalar de Ricciⁱⁱ. Se obtiene de esta forma la acción de Einstein-Hilbert:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4 x \sqrt{|g|} R. \quad (1.4.2)$$

(La constante $1/16\pi G$ se introduce con el fin de conseguir concordancia con la Ec. (1.2.3))

El Principio de Acción Estacionaria postula que, *de todas las métricas posibles, la naturaleza escoge aquella que es un punto estacionario del funcional S_{EH}* , i.e. la variación a primer orden de S_{EH} con respecto a la métrica $g^{\mu\nu}$ es cero:

$$\delta S_{EH} = \int d^4 x \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (1.4.3)$$

ⁱDebido a que las ecuaciones de campo son derivadas hallando la variación de S , si esta es invariante las ecuaciones también lo serán.

ⁱⁱDe hecho, el *único* tensor que puede ser construido a partir de la métrica y de su primera y segunda derivada, es el tensor de Riemann $R_{\rho\mu\lambda\nu}$ [27] y debido a que R se construye a través de contracciones de $R_{\rho\mu\lambda\nu}$, R hereda todas estas características.

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{|g|} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (1.4.4)$$

Ahora, como consecuencia del lema fundamental del cálculo variacional [33] se obtiene que

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} G_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0, \quad (1.4.5)$$

las cuales son las ecuaciones de Einstein en el vacío. Si se quiere obtener las ecuaciones de Einstein en presencia de la energía-materia, se debe introducir el funcional S_{EM} que contiene los campos de energía-materia:

$$S = S_{EH} + S_{EM}, \quad (1.4.6)$$

$$S_{EM} = \int d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{L}_{EM}. \quad (1.4.7)$$

Hallando los puntos estacionarios se obtiene que

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_{EM}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad (1.4.8)$$

$$= \frac{1}{16\pi G} \sqrt{|g|} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \frac{\delta S_{EM}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad (1.4.9)$$

lo cual implica:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.4.10)$$

en donde $T_{\mu\nu}$ se define como:

$$T_{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_{EM}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.4.11)$$

Aunque la ecuación (1.4.10) poseen la misma forma que la ecuación (1.2.3), para que éstas sean físicamente equivalentes se debe demostrar que la definición (1.4.11) corresponde en realidad al tensor energía-momento.

1.4.1. El Tensor Energía-Momento

Cuando se aplica la siguiente transformación infinitesimal de coordenadas, $x^\mu \mapsto x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$, a un funcional F , el cambio a primer orden es

$$\delta F = \int d^4x \sqrt{|g|} A^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu;\nu}, \quad (1.4.12)$$

en donde,

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta F}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.4.13)$$

Integrando por partes y eliminando los términos de superficie se obtiene que

$$\delta F = - \int d^4x \sqrt{|g|} A^{\mu\nu}{}_{;\nu} \varepsilon_\mu. \quad (1.4.14)$$

Si F es invariante ante la transformación, por el lema fundamental del cálculo variacional, se deduce que $A^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, i.e. $A^{\mu\nu}$ es una cantidad covariantemente conservada. Debido a que en la construcción de la acción S_{EH} se impuso su invariancia ante *cualquier* transformación de coordenadas, se garantiza que S_{EH} es invariante ante este tipo particular de transformación. De esta manera, se demuestra que el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ cumple las identidades de Bianchi:

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (1.4.15)$$

De acuerdo con las definiciones (1.4.11) y (1.4.13), si se aplica la transformación infinitesimal a la acción de energía-materia S_{EM} se obtiene que $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, lo cual, en un sistema de referencia local es igual a $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$. La expresión anterior no es más que el principio de conservación de la energía-momento. Siendo así, podemos identificar finalmente $T^{\mu\nu}$ (1.4.11) con el tensor energía-momento.

1.5. El Principio Cosmológico y la Dinámica del Universo

El Principio Cosmológico afirma que el Universo es *homogéneo e isótropo*. Una simple observación a través de un telescopio muestra que el Universo no es ni homogéneo ni isótropo, sin embargo, si se realizan observaciones de grandes porciones del Universo (distancias mayores a 100 Mpc), éste es en efecto una entidad que es homogénea e isótropa. Por consiguiente, el principio cosmológico debe ser entendido del mismo modo que se entiende la homogeneidad e isotropía en un gas [27], i.e. no deben realizarse comparaciones de los puntos individuales, sino comparaciones de celdas del tamaño de $\sim 3 \cdot 10^8$ años luz [34, 35].

Como primera aproximación (orden cero) en el análisis de la dinámica del Universo, se propone que el Universo debe estar descrito por un espacio-tiempo maximalmente simétrico, y como segunda aproximación (primer orden), se propone la introducción de perturbaciones en la métrica original, las cuales vendrían a ser las descripciones particulares dentro de cada celda. El desarrollo subsecuente en esta propuesta corresponde a la primera aproximación.

La única métrica Lorentziana de cuatro dimensiones que cumple los requisitos de homogeneidad e isotropía es la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW); sus

componentes en un sistema de coordenadas cartesianas son

$$g_{ij} = -a^2(t) \left[\delta_{ij} + K \frac{x_i x_j}{1 - K \mathbf{x}^2} \right], \quad g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0, \quad (1.5.1)$$

en donde $a(t)$ es una función del tiempo y K puede tomar cualquiera de los valores $\{-1, 0, 1\}$, indicando la geometría espacial del Universo como hiperbólica, plana o esférica, respectivamente. El elemento de línea definido a través de esta métrica es

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \left[d\mathbf{x}^2 + K \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - K \mathbf{x}^2} \right]. \quad (1.5.2)$$

Para entender el significado físico de la función $a(t)$ basta con observar el elemento de línea (1.5.2), y percatarse que un desplazamiento netamente espacial, $dt = 0$, es igual al producto de $a(t)$ por el cambio infinitesimal en las coordenadas espaciales; por consiguiente, esta función puede ser vista como un “factor de escala” que transforma una distancia coordenada en una distancia física medible, $d_f = a d_c$. Debido a que el factor de escala es dependiente del tiempo, la distancia física entre dos puntos cambia aunque las coordenadas permanezcan constantes:

$$\dot{d}_f = \dot{a} d_c = \frac{\dot{a}}{a} d_f. \quad (1.5.3)$$

La ecuación (1.5.3) es la expresión matemática de la ley de Hubble, la cual, establece que las galaxias se están alejando mutuamente con una velocidad proporcional a la distancia que las separa; la cantidad \dot{a}/a se define como el parámetro de Hubble H . También se define el parámetro adimensional $q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2$, que indica cuando es positivo, que el Universo se expande desaceleradamente, mientras que cuando es negativo, indica una expansión acelerada; por esta razón, recibe el nombre de parámetro de desaceleración.

1.5.1. Ecuaciones Dinámicas

Como consecuencia del principio cosmológico, el universo en todo punto debe ser isótropo, así, el contenido de materia es similar a un fluido que posee una presión igual en todas las direcciones. La expresión para este tipo de fluido (perfecto) es [27]:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}. \quad (1.5.4)$$

Con esta fuente y a partir de la ecuación (1.2.3) se obtienen las ecuaciones Friedmann-Lamaitre, las cuales, describen por completo la dinámica de Universo:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (1.5.5)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -H^2 q = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p). \quad (1.5.6)$$

1.5.2. Ecuación de Continuidad

En la Sección 1.4.1 se encontró que $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$; reemplazando (1.5.1) y (1.5.4) en esta expresión se obtiene que

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \quad (1.5.7)$$

La ecuación (1.5.7), que se denomina la ecuación de continuidad, también puede ser obtenida, independientemente de la teoría de la gravedad, a partir de la primera ley de la termodinámica y asumiendo homogeneidad e isotropía [36].

1.5.3. Soluciones Estándar

Para poder solucionar las ecuaciones de Friedmann se propone que la ecuación de estado (EDE) de los fluidos cósmicos es de la forma $p = \omega\rho$, con ω constante, lo cual permite que la ecuación (1.5.7) sea escrita de la siguiente manera:

$$\dot{\rho} = -3(1 + w)\rho H, \quad (1.5.8)$$

y así, pueda ser fácilmente integrada:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (1.5.9)$$

Las mediciones experimentales muestran que el Universo es muy cercano a ser plano [10, 11, 12], por consiguiente, para obtener las ecuaciones que gobiernan la dinámica del Universo, se debe reemplazar la expresión (1.5.9) en la primera ecuación de Friedmann (1.5.5) con $K = 0$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{a^{3(1+w)}}. \quad (1.5.10)$$

La expresión anterior es matemáticamente equivalente a la ecuación de movimiento de una partícula en un potencial de la forma $V(x) = -k/x^{3w+1}$ y, con energía total igual a cero. “Las mismas ecuaciones matemáticas tienen las mismas soluciones” [37], por lo tanto, si se desea un desarrollo más intuitivo de la dinámica del Universo, se puede estudiar el movimiento de una partícula en un potencial $V(x) = -k/x^{3w+1}$.

Universo dominado por la Radiación

Después de la época de recalentamiento, en donde se crean todas las partículas del Modelo Estándar, el contenido energético del universo está dominado por un conjunto de partículas con velocidades relativistas, denominado radiación. La EDE de la radiación posee un parámetro ω igual a $1/3$. Las soluciones de las ecuaciones (1.5.7) y (1.5.10) son

$\rho \propto a^{-4}$ y $a \propto t^{1/2}$, respectivamente. Adicionalmente, este período se caracteriza por tener un parámetro de Hubble igual a $1/2t^{-1}$ y un parámetro de desaceleración igual a $1/2$. Debido a que la radiación es inversamente proporcional a la cuarta potencia del factor de escala, la expansión del universo provoca que ésta decaiga rápidamente y el Universo pase a una nueva etapa dominada por otro fluido cósmico.

Universo dominado por la Materia

Esta etapa del Universo está dominada por partículas no-relativistas, llamadas “materia”, las cuales poseen parámetro ω igual a 0; de esta manera, la ecuación (1.5.9) adquiere la forma de $\rho \propto a^{-3}$ y la solución de (1.5.10) es $a \propto t^{2/3}$. Este período se caracteriza por una expansión desacelerada del Universo con un parámetro de desaceleración igual a 1. Debido a que la densidad de energía de la materia decae más lentamente que la densidad de energía de la radiación, el período de tiempo durante el cual la materia domina sobre los otros fluidos cósmicos es mucho mayor que el período dominado por la radiación.

Universo dominado por la Constante Cosmológica

Como se vio en la Sección 1.3, la CC o la energía de vacío poseen una EDE $p = -\rho$, por lo cual, el parámetro ω es igual a -1 . De acuerdo con la ecuación (1.5.9), la densidad de energía asociada al vacío es constante (como debería ser). La respectiva solución de la ecuación (1.5.10) es $a \propto \exp(\sqrt{\Lambda/3}t)$. De aquí, se deduce que el parámetro de Hubble es constante $H = \sqrt{\Lambda/3}$ y que el parámetro de desaceleración es igual a -1 . Los resultados experimentales [8, 9] muestran que el universo acaba de entrar en un período de expansión acelerada y de este modo, se ha dado inicio recientemente a la época dominada por la CC.

2

El viejo problema de la Constante Cosmológica

Aunque existen numerosas fuentes de energía de vacío, dependiendo del modelo de partículas fundamentales que se trabaje, por razones de simplicidad, se ilustrará el problema en el contexto del vacío electrodébil. Este vacío proveniente del mecanismo de Higgs es el responsable de la masa de los bosones W^\pm y Z (y de todos los fermiones con masa). Al comparar el valor deducido teóricamente y el valor experimental se encuentra una diferencia abismal de 55 órdenes de magnitud. Se mostrarán los primeros intentos para dar una solución a este problema, así como también por qué tales no lo solucionan realmente.

2.1. Introducción a la Cuantización Canónica

En Teoría Clásica Campos, la densidad lagrangiana que describe un campo escalar libre se puede obtener a partir del lagrangiano de una colección continua de partículas unidas por resortes [2]. Cuando se cuantiza el campo, en realidad, se están cuantizando cada uno de estos osciladores. Lo anterior sugiere que se deben utilizar las mismas reglas de cuantización de una partícula para cuantizar un campoⁱ. La mecánica cuántica de una partícula se obtiene esencialmente al reemplazar las variables canónicas por operadores y los corchetes de Poisson por conmutadores [38]. De acuerdo con lo anterior, si $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ es la densidad lagrangiana del campo ϕ , la cuantización se obtiene al exigir que los

ⁱSe hace la extrapolación de esta conjetura a los campos espinoriales, vectoriales y tensoriales.

operadores de campo $\hat{\phi}(\mathbf{x}, t)$ y momento conjugado $\hat{\pi}(\mathbf{x}, t)$ cumplan que

$$\left[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t) \right] = i\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}), \quad (2.1.1)$$

$$\left[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) \right] = \left[\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t) \right] = \hat{0}. \quad (2.1.2)$$

Adicionalmente, se debe definir satisfactoriamente el estado de vacío del sistema.

2.1.1. Campo Escalar

Para un campo escalar ϕ libre y de masa m , en el espacio-tiempo de Minkowski, la densidad lagrangiana que describe su comportamiento es:

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi). \quad (2.1.3)$$

Mediante la utilización del principio de acción estacionaria, se deriva la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\square^2 + m^2)\phi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.1.4)$$

Como primer paso en la cuantización, se eleva a grado de operador el campo $\phi(\mathbf{x}, t)$. Luego se toma la transformada de Fourier de la ecuación (2.1.4) para obtener la solución en términos de los modos de $\hat{\phi}$:

$$\hat{\phi}_{\mathcal{F}}(\mathbf{k}, t) = \hat{A}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + \hat{B}_{\mathbf{k}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}. \quad (2.1.5)$$

Se busca ahora obtener una descripción cuántica de muchas partículas cuya energía viene en paquetes de valor $\hbar\omega$, en concordancia con la radiación de cuerpo negro y el efecto fotoeléctrico. Para esto, se construyen los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$. de manera tal que la transformada de Fourier de las variables canónicas es

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{[(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}]^{1/2}} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right], \quad (2.1.6)$$

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}, t) = -i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right], \quad (2.1.7)$$

y se define un nuevo operador \hat{N} a través de ellos:

$$\hat{N}_{\mathbf{k}} := \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}. \quad (2.1.8)$$

Con el fin de que se cumplan las relaciones de conmutación (2.1.1) y (2.1.2), los nuevos operadores deben satisfacer las siguientes reglas de conmutación:

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \right] = \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}), \quad (2.1.9)$$

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'} \right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \right] = \hat{0}, \quad (2.1.10)$$

las cuales implican que

$$\left[\hat{N}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}} \right] = -\hat{a}_{\mathbf{k}} \text{ y } \left[\hat{N}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \right] = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger. \quad (2.1.11)$$

Las ecuaciones (2.1.11) muestran que los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ son en realidad los operadores que transforman el estado propio $|n_{\mathbf{k}}\rangle$ del operador $\hat{N}_{\mathbf{k}}$ en el estado propio $|n_{\mathbf{k}}+1\rangle$ o $|n_{\mathbf{k}}-1\rangle$, respectivamente. Por otro lado, el álgebra de operadores definida por las relaciones de conmutación (2.1.9, 2.1.10) permite escribir el operador Hamiltoniano (tal como se esperaba) de manera similar a la energía de un oscilador armónico cuántico,

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{x} \left(\dot{\hat{\phi}} + \nabla^2 \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi} \right) = \int d^3\mathbf{k} \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \hat{I} \right). \quad (2.1.12)$$

Al exigir la existencia de un estado de vacío $|0\rangle$ que cumple la condición $\hat{a}|0\rangle = |^\circ\rangle$, se puede demostrar que los valores propios de \hat{N} son números enteros no negativos. De esta manera, es correcto interpretar los operadores \hat{a}^\dagger y \hat{a} como los operadores que crean y destruyen partículas con una energía igual a $\hbar\omega$. Así mismo, según la expresión (2.1.12), la energía mínima del sistema se logra en el estado de vacío, donde el número de partículas es igual a 0:

$$\rho_{min} = \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{2} \hbar\omega. \quad (2.1.13)$$

La integral (2.1.13) diverge como k^4 , dando como resultado una energía de vacío infinita, lo cual no es físicamente viable. Sin embargo, se debe hacer énfasis en que la Teoría Cuántica de Campos es en realidad una teoría efectiva de la naturaleza [39], y de esta manera, no se debe suponer que dicha teoría describa correctamente la naturaleza a escalas de energía más altas que la energía de Planck. Por consiguiente, debe realizarse un corte en esta escala para poder calcular el valor de la integral (2.1.13). Realizando este corte el valor de la energía de vacío es finito y del orden de 1 en unidades de Planck, i.e. $\rho_{min} = 10^{72} \text{ GeV}^4$ [40].

2.1.2. Vacío Electrodébil

El campo del Higgs formalmente se describe por un doblete de campos escalares, sin embargo, por razones prácticas, se utilizará un solo campo escalar ϕ . La acción del sistema contiene una constante Λ_D , llamada la CC desnuda, cuya naturaleza es netamente geométrica:

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \sqrt{|g|} \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda_D) + \mathcal{L}_\phi \right], \\ &= \int d^4x \sqrt{|g|} \left[\frac{R}{16\pi G} - \rho_{\Lambda_D} + \mathcal{L}_\phi \right]. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

De acuerdo con el PE, la densidad lagrangiana de un campo escalar ϕ en cualquier sistema de referencia, se obtiene al reemplazar $\eta^{\mu\nu}$ por $g^{\mu\nu}$ ⁱⁱ

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi), \quad (2.1.15)$$

en donde, el potencial $V(\phi)$ contiene un término de masa y otro de interacción:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad (\lambda > 0). \quad (2.1.16)$$

Puesto que las consecuencias gravitacionales de la constante ρ_{Λ_D} son equivalentes a las de la densidad de energía de vacío, los términos en la densidad lagrangiana se reorganizan de la siguiente manera:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{|g|} R + S_M[\phi], \quad (2.1.17)$$

en donde,

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{|g|} \tilde{\mathcal{L}}_\phi, \quad (2.1.18)$$

con

$$\tilde{\mathcal{L}}_\phi = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) - \rho_{\Lambda_D}. \quad (2.1.19)$$

A partir de las expresiones (2.1.18) y (2.1.19) se calcula el tensor energía-momento,

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^\phi = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S[\phi]}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{L}} = g_{\mu\nu} \rho_{\Lambda_D} + T_{\mu\nu}^\phi, \quad (2.1.20)$$

en donde,

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\sigma\phi\partial^\sigma\phi + g_{\mu\nu}V(\phi). \quad (2.1.21)$$

En el estado de vacío no existe energía cinética ni gradiente, por consiguiente sólo contribuyen la constante ρ_{Λ_D} y el valor esperado en el vacío del potencial $V(\phi)$:

$$\langle \tilde{T}_{\mu\nu}^\phi \rangle = g_{\mu\nu} \rho_{\Lambda_D} + \langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle = g_{\mu\nu} (\rho_{\Lambda_D} + \langle V \rangle) = (\rho_{\Lambda_D} + \rho_\Lambda^i) g_{\mu\nu} = \rho_\Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.1.22)$$

Es decir, la “verdadera” densidad de energía asociada con la CC, que se denotará por ρ_Λ , comprende dos contribuciones: una dada por la constante geométrica ρ_{Λ_D} , y otra dada por el valor esperado en el vacío del potencial $V(\phi)$.

ⁱⁱEn realidad, el principio de equivalencia establece que se debe reemplazar $\eta^{\mu\nu}$ por $g^{\mu\nu}$ y las derivadas parciales por derivadas covariantes, sin embargo, en el caso de un campo escalar las derivadas parciales y covariantes son iguales. En el caso de un campo vectorial, donde el término es de la forma $F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$, se cancelan los símbolos de Christoffel y de nuevo no es necesario reemplazar las derivadas parciales por derivadas covariantes, $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$.

Como se observa en la figura 2.1, para que se active el mecanismo de Rompimiento Espontáneo de Simetría, se requiere que $m^2 < 0$, lo cual implica que el valor esperado en el vacío de ϕ sea diferente de cero:

$$\langle \phi \rangle = \sqrt{\frac{-6m^2}{\lambda}}. \quad (2.1.23)$$

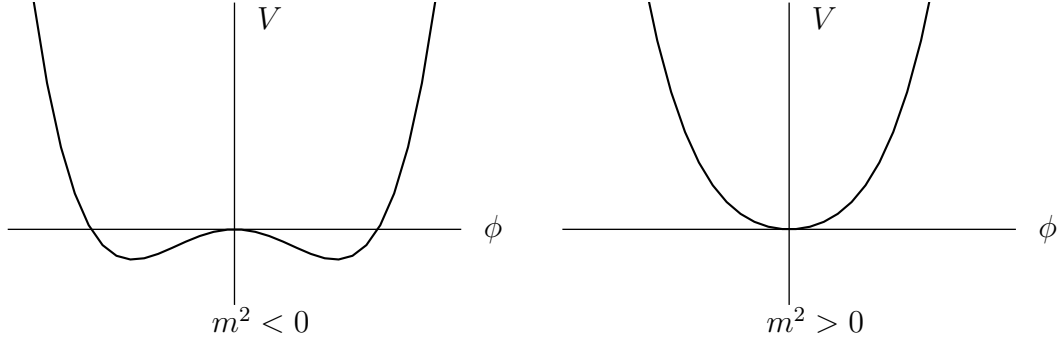


Figura 2.1: El potencial $V(\phi)$ para los casos $m^2 < 0$ y $m^2 > 0$. El primer caso presenta dos mínimos, lo cual crea un rompimiento espontáneo de la simetría al tener que elegir entre uno de ellos. En el segundo caso sólo existe un mínimo y por lo tanto la simetría no se rompe.

En resumen, la transición de fase electrodébil requiere que $\langle 0|\phi|0\rangle \neq 0$, lo cual induce una densidad de energía de vacío ρ_V . En un nivel clásico, la densidad de energía del vacío electrodébil tiene el valor de:

$$\rho_\Lambda^i = \langle V(\phi) \rangle = -\frac{3m^4}{2\lambda} = -\frac{1}{8}M_{\mathcal{H}}^2\langle\phi\rangle^2 = \frac{1}{8\sqrt{2}}M_{\mathcal{H}}^2M_{\mathcal{F}}^2 \sim -10^8 \text{ GeV}^4, \quad (2.1.24)$$

en donde $M_{\mathcal{H}}^2 = 2m^2 \simeq 100^2 \text{ GeV}^2$ [41] es la masa física del Higgs. El valor de $\langle 0|\phi|0\rangle$ en la expresión (2.1.24) se obtuvo a partir de la constante de Fermi G_F , o de manera más precisa, de la escala de Fermi $M_{\mathcal{F}} := G_F^{-1/2} \simeq 290 \text{ GeV}$, por dos razones: primero, el valor esperado en el vacío de ϕ permite que los mediadores a la interacción electrodébil W^\pm y Z obtengan masa, y así, la interacción adquiera todas sus características fundamentales; y segundo, es la constante de Fermi el valor que caracteriza las interacciones electrodébiles.

2.2. El viejo problema de Constante Cosmológica como un problema de ajuste fino

Los resultados experimentales [8, 9] muestran que el Universo no sólo se expande, sino que lo hace de una forma acelerada. Este hecho llevó a la hipótesis de la existencia de una nueva forma de energía llamada la EO, cuyas características deben ser similares a las de la CC efectiva, con el fin de obtener el tipo de expansión observada. De esta manera, la EO se constituye en la medida experimental de la CC efectiva. Por otro lado, los resultados de las Refs. [10, 11, 12], muestran que el universo es muy cercano a ser plano, sin embargo, si esto es cierto, existe un 73 % de energía faltante. La EO también proporciona una solución a este problema, constituyéndose en la cantidad de energía faltante. El valor experimental de esta energía faltante es del orden de 10^{-47} GeV⁴ [12]. En definitiva, este último valor se constituye en el valor experimental de la CC efectiva.

En la Sección 2.1.2 se encontró que el valor teórico de la contribución del vacío electrodébil es del orden de 10^8 GeV⁴, y ya que los experimentos descritos en las Refs. [3, 4, 5] demuestran la realidad indiscutible de la energía de vacío, el vacío electrodébil se constituye en una fuente real del campo gravitatorio. Al comparar este valor teórico con el valor experimental mostrado anteriormente, se puede decir que la teoría predice una cantidad que es 55 órdenes de magnitud mayor que el valor observado. Esto ha sido llamado por algunos autores como “la peor predicción teórica en la historia de la física” [42]. Ahora, si se supone que los campos sólo contribuyen con el valor exacto de $\rho_{\Lambda}^i = -10^8$ GeV⁴ y que el valor observado es exactamente 10^{-47} GeV⁴; la teoría muestra que para conseguir, *por sí sola*, concordancia entre los dos resultados, se debe escoger el valor ρ_{Λ_D} con una precisión de 55 cifras decimales. Es más, debido a que en Teoría Cuántica de Campos lo importante no es el valor mismo de la energía sino la diferencia existente entre dos estados diferentes, podemos cambiar el valor de la energía de vacío añadiendo una constante arbitraria; sin embargo, lo anterior nos indica que se debe escoger la constante con 55 cifras de exactitud, es decir, la constante ya no es arbitraria sino que esta restringida de una manera tan *fin*a (55 cifras exactas) que cualquier desviación provocará que los resultados experimentales no coincidan con los teóricos. Esto muestra en realidad que las teorías actuales son incapaces de dar una explicación satisfactoria de la existencia del pequeño valor observado de ρ_{Λ_E} , a pesar del enorme valor de ρ_V . Este problema se conoce como el primer o viejo problema de la CC.

En síntesis, quien quiera resolver el viejo problema de la CC debe preguntarse: ¿Cómo cancelar, sin recurrir a ajustes finos, la enorme contribución de los campos de energía-materia? Como solución a este cuestionamiento, se ha reemplazado ρ_{Λ_D} por

campos escalares; sin embargo, en la Ref. [19] se mostró que esto no es realmente la solución del problema. La demostración consiste básicamente en que si se logra la cancelación dinámica del vacío cuántico, los campos no satisfacen las ecuaciones de movimiento que se derivan a partir de su densidad lagrangiana, y viceversa; si los campos satisfacen las ecuaciones de movimiento, no logran solucionar el problema de ajuste fino [43].

3

Posible Solución

La motivación principal para plantear esta posible solución se encuentra en la Ref. [44], en donde se muestra un modelo cosmológico con una CC efectiva complementada por una función de la forma $1/H^{2n}$. Allí, es posible cancelar en épocas tardías y sin necesidad de recurrir a un ajuste fino, la contribución de los campos presentes en S_{EM} . Esto se debe esencialmente a que en épocas tardías el parámetro de Hubble es muy pequeño. De manera más general, un modelo cosmológico en donde la CC es complementada por un nuevo fluido cósmico X , llamado el Cosmón, y cuya EDE es de la forma $p = \omega\rho + \beta H^{-\alpha}$, con $\alpha > 0$, exhibe en épocas tardías una expansión acelerada producto de una CC efectiva de pequeño valor [44]. Este mecanismo dinámico, originado en la presencia del Cosmón, que cancela el gran valor de ρ_Λ , se llamará de ahora en adelante el “*mecanismo de relajación*” de la CC. Para épocas dominadas por la radiación o la materia, el valor de ρ_Λ se relaja mediante la introducción de términos de la forma $1/(q-1)$ o $1/(q-1/2)$, respectivamente [20].

En la Ref. [45] se mostró que una EDE no homogénea es en realidad la descripción efectiva de una teoría modificada de la gravedad; por consiguiente, *el Cosmón debe tener un origen gravitacional*. Debido a la forma que poseen los invariantes de curvatura en la métrica de FRW se puede, en principio, obtener algebraicamente los términos $1/(q-1)$ y $1/(q-1/2)$ a partir del escalar de Ricci y del invariante de Gauss-Bonnet. Todo lo anterior sugiere que una teoría modificada de la gravedad, la cual, involucre el escalar de Ricci y el invariante de Gauss-Bonnet es una posible solución al viejo problema de la CC. Se debe mencionar que la solución al ser de origen gravitacional y en contraste con las soluciones en términos de campos escalares, goza de la gran ventaja de ser un mecanismo autointeractuante, i.e. aparte de conseguir la relajación dinámica de ρ_Λ , este mismo proceso provoca que el mecanismo evolucione a través de la historia térmica del Universo. Como último beneficio, el enorme valor de ρ_Λ no se constituye en un problema

sino que garantiza el mismo éxito de la solución.

3.1. Principio Variacional

En las Refs. [20, 21, 22] se presenta la siguiente teoría modificada de la gravedad como la posible solución del problema:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda_E) - f(R, \mathcal{G}) + \mathcal{L}_M \right], \quad (3.1.1)$$

en donde \mathcal{G} es el invariante de Gauss-Bonnet dado por:

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\rho\mu\lambda\nu}R^{\rho\mu\lambda\nu}. \quad (3.1.2)$$

Puesto que el invariante de Gauss-Bonnet es un escalar que se construye a partir de sumas algebraicas de contracciones del tensor de Riemann, la presente teoría es coherente con el principio general de relatividad, el principio de equivalencia y la conservación de la energía-momento, ver Sección 1.4.

La forma específica de $f(R, \mathcal{G})$ es:

$$f(R, \mathcal{G}) = \frac{\beta}{B(R, \mathcal{G})} + A(R), \quad (3.1.3)$$

donde $A(R)$ es un polinomio de orden bajo (empezando desde el orden 2 debido a que los ordenes 0 y 1 ya están incluidos en la acción de Einstein-Hilbert con CC); las motivaciones para la introducción de este término no son relevantes en la solución del problema de ajuste fino ya que su importancia se encuentra en épocas tempranas del universo. El invariante de Gauss-Bonnet no se incluyó en este polinomio ya que al ser un invariante topológico no tendrá ningún efecto en las ecuaciones de campo resultantes [46]. El primer término en (3.1.3) conformado por la constante β y el polinomio B en R y \mathcal{G} , es el responsable de la cancelación dinámica de la energía de vacío. Con el propósito de obtener una densidad lagrangiana con una dimensión de masa correctaⁱ, la constante β debe poseer una dimensión de masa de:

$$[\beta] = M^{n+4}, \quad (3.1.4)$$

en donde n es la dimensión de masa característica del polinomio $B(R, \mathcal{G})$.

ⁱLa Acción S posee dimensiones de energía integrada en el tiempo, por lo tanto en unidades naturales su dimensión de masa es 0. En consecuencia, la dimensión de la densidad lagrangiana debe de M^4

Para comprender cómo se origina la cancelación dinámica a partir del funcional (3.1.1), se derivan las ecuaciones de campo correspondientes utilizando el Principio de Acción Estacionaria.ⁱⁱ.

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (3.1.5)$$

y por el lema fundamental del cálculo variacional se obtiene:

$$2\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{8\pi G}G_{\mu\nu} + \rho_\Lambda - 2E_{\mu\nu} + T_{\mu\nu} = 0. \quad (3.1.6)$$

De aquí se concluye que las ecuaciones (1.3.1) se ven modificadas por la introducción del tensor $E_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G(\rho_\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu} - 2E_{\mu\nu}). \quad (3.1.7)$$

El término ρ_Λ corresponde a la CC efectiva pero *sin realizar un ajuste fino*. Observando en este punto, se puede intuir que el resultado efectivo de la modificación de la gravedad consiste en la introducción de un nuevo “tensor energía-impulso” inducido gravitacionalmente.

3.2. Cosmología $f(R, \mathcal{G})$

Es obvio que la modificación de la gravedad ocasiona que la cosmología sea distinta a una cosmología dictada por las ecuaciones de Friedmann. Sin embargo, como se podrá notar más adelante, el resultado es simple: la introducción de un nuevo fluido cósmico, llamado el Cosmón, que complementa la CC efectiva. Debido a que el tensor $E_{\mu\nu}$ es originado a partir de modificaciones de la gravedad, en un Universo de FRW las expresiones para su densidad de energía y su presión serán una función del parámetro de expansión a ⁱⁱⁱ. Por consiguiente, el Cosmón no será un ente estático sino un ente dinámico que evoluciona a medida que el Universo se expande.

3.2.1. Ecuaciones modificadas de Friedmann

Con el propósito de obtener las expresiones para la densidad de energía y la presión del Cosmón, se hallan las componentes de las ecuaciones de campo con el primer índice contravariante y el segundo covariante. La componente 0_0 es:

$$\begin{aligned} G^0_0 = 3H^2 &= 8\pi G(\rho_\Lambda - 2E^0_0 + T^0_0), \\ &= 8\pi G(\rho_\Lambda - 2E^0_0 + \rho_m + \rho_r), \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

ⁱⁱSi se desea conocer los detalles de este cálculo, ver el Apéndice A.

ⁱⁱⁱVer el Apéndice B.

en donde

$$E_0^0 = -\frac{1}{2} \left[f - 24H^2(\dot{H} + H^2)f^{\mathcal{G}} - 6(\dot{H} + H^2)f^R + 6H\dot{f}^R + 24H^3\dot{f}^{\mathcal{G}} \right]. \quad (3.2.2)$$

con $f^Y = \partial f / \partial Y$. Esta ecuación corresponde a la primera ecuación de Friedmann modificada. Si se compara con la ecuación (1.5.5), la única diferencia que existe es el término E_0^0 . Cualquier persona que trabaje la ecuación (3.2.1) desconociendo su verdadero origen, podría interpretar el término E_0^0 como una densidad de energía que evoluciona en el tiempo. Es decir, el resultado efectivo de la modificación es la aparición de una nueva densidad de energía variable en el tiempo:

$$\rho_F = -2E_0^0. \quad (3.2.3)$$

Generalizando el resultado anterior, el tensor $E_{\mu\nu}$ se identifica con las componentes de un nuevo tensor $T_{\mu\nu}^G$ de origen puramente gravitacional. Debido al Principio Cosmológico, el Cosmón debe comportarse como un fluido perfecto, $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$. En un sistema de referencia donde el Cosmón está en reposo $u^\mu = \delta_0^\mu$, su densidad de energía y presión son:

$$T_0^0 = \rho_F = -2E_0^0 \quad \text{y} \quad T_i^i = -3p_F = +2E_i^i, \quad (3.2.4)$$

con:

$$E_j^i = -\frac{1}{2} \left[f + 8H^2\dot{f}^{\mathcal{G}} + 2\dot{f}^R - 2(\dot{H} + 3H^2)f^R - 24H^2(\dot{H} + H^2)f^{\mathcal{G}} + 16H(\dot{H} + H^2)\dot{f}^{\mathcal{G}} \right] \delta_j^i. \quad (3.2.5)$$

Gracias a que la función $f(R, \mathcal{G})$ se construyó a partir de invariantes de curvatura, la integral $\int d^4x \sqrt{|g|} f(R, \mathcal{G})$ es un escalar, y de acuerdo con la Sección 1.4.1, el tensor $E_{\mu\nu}$ cumple la identidad de Bianchi $E^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$. Por lo tanto, el Cosmón cumple individualmente la ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho}_F + 3H(\rho_F + p_F) = 0. \quad (3.2.6)$$

Para derivar la segunda ecuación modificada de Friedmann se halla la componente i_i de las ecuaciones de campo:

$$\begin{aligned} G^i_i &= -3(2\dot{H} + 3H^2) = 8\pi G(3p_\Lambda + 3p_F + 3p_r), \\ &= 6H^2q - 3H^2 = 8\pi G(3p_\Lambda + 3p_F + 3p_r). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Reorganizando la ecuación (3.2.7), y teniendo en cuenta que la presión de la materia es cero, se obtiene una ecuación que involucra únicamente la radiación, la CC y el Cosmón:

$$H^2(q - 1/2) = 4\pi G(p_r + p_\Lambda + p_F). \quad (3.2.8)$$

Si se ignoran los términos correspondientes a la CC y al Cosmón, se deduce que en una época dominada por la materia q debe ser igual a $1/2$, es decir, cuando el Cosmón se cancela con la CC, se obtiene el resultado esperado por la cosmología estándar. La ausencia del Cosmón en las ecuaciones no permitiría el desarrollo de una época dominada por la materia a menos que se realice un ajuste fino en la CC efectiva.

Al sumar la Ec. (3.2.1) con la Ec. (3.2.7) para eliminar H^2 se llega a la segunda ecuación de Friedmann modificada:

$$3H^2q = 4\pi G(\rho_\Lambda + 3p_\Lambda + \rho_F + 3p_F + \rho_m + \rho_r + 3p_r). \quad (3.2.9)$$

Por último, restando la segunda ecuación de Friedmann modificada de la primera, se obtiene una ecuación en donde se incluyen únicamente la materia, la CC y el Cosmón:

$$3H^2(1 - q) = 4\pi G[\rho_m + \rho_\Lambda + \rho_F - 3(p_\Lambda + p_F)]. \quad (3.2.10)$$

Nuevamente haciendo un análisis similar, la presencia o ausencia del Cosmón en las ecuaciones permite o prohíbe la existencia de una época dominada por la radiación con parámetro de desaceleración igual a 1.

En resumen, la EO real (medible) es un fluido cósmico constituido por dos partes: la CC efectiva y el Cosmón. La densidad de energía y la presión de la EO real están dadas por:

$$\begin{aligned} \rho_{\Lambda_{fis}} &= \rho_\Lambda + \rho_F, \\ p_{\Lambda_{fis}} &= p_\Lambda + p_F. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

La EDE de la EO real es $p_{\Lambda_{fis}} = \omega_{fis}\rho_{\Lambda_{fis}}$. Tal como se puede observar de las ecuaciones (3.2.2) y (3.2.5), el parámetro de estado ω_{fis} es una función no trivial de a y por consiguiente la EDE no es homogénea. La ecuación de estado permite reescribir la segunda ecuación de Friedmann de la siguiente manera:

$$3H^2q = 4\pi G[2\rho_r + \rho_m + (1 + \omega_{fis})p_{\Lambda_{fis}}]. \quad (3.2.12)$$

Y a partir de la EDE para cada fluido y de la ecuación (3.2.9), se obtiene una expresión para el parámetro de desaceleración q :

$$q = \sum_n (1 + \omega_n) \frac{\Omega_n}{2}, \quad \Omega_n = \frac{\rho_n}{\rho_c}, \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (3.2.13)$$

la cual permite obtener una expresión para q hoy en día:

$$q_0 = \frac{\Omega_m^0}{2} + \Omega_r^0 + (1 + \omega_{fis})\Omega_{\Lambda_{fis}}. \quad (3.2.14)$$

3.3. Condiciones sobre $f(R, \mathcal{G})$

En virtud que la presente solución no solamente debe cancelar de manera dinámica el valor de la energía de vacío, sino que también debe reproducir satisfactoriamente la cosmología estándar, $f(R, \mathcal{G})$ debe cumplir ciertas condiciones que garantizan que se logre tal objetivo. Las condiciones son [20]:

1. Debido a que en la época de recalentamiento aparecen todas las partículas del modelo estándar, justo después y en el principio de la era dominada por la radiación, en donde el parámetro de Hubble tiene un valor de H_{rad}^i , la densidad de energía $\rho_{\Lambda_{fis}}$ debe coincidir prácticamente con el enorme valor de la densidad de energía de vacío. Para una época anterior el mecanismo de relajación no debe funcionar, puesto que ocasionaría daños en el funcionamiento de los modelos inflacionarios. La primera condición es:

$$\frac{\beta}{B(R, \mathcal{G})} \rightarrow 0, \quad f(R, \mathcal{G}) \rightarrow a_2 R^2 + \dots \quad \text{para } H > H_{rad}^i. \quad (3.3.1)$$

La presencia de $A(R)$ no provoca que el valor de ρ_Λ se altere ya que a una escala de gran unificación, en donde $\rho_\Lambda \sim \rho_{GUT} \sim m_{GUT}^4$, se tiene que $R \sim H^2 \sim m_{GUT}^4/m_p^2$ y por lo tanto $R^2/\rho_\Lambda \sim 10^{-9}$, i.e R^2 es despreciable; la razón para introducir el polinomio $A(R)$ consiste en producir una inflación de tipo Starobinsky [47] o una inflación de tipo anómala [48, 49, 50]. El polinomio A también provee una vía de escape a inestabilidades encontradas en el formalismo métrico [51] y posibilidades de renormalización a altas energías. No obstante, el polinomio no cumplirá ninguna función en el mecanismo de relajación y será ignorado en el análisis subsecuente.

2. La presencia del Cosmón no debe distorsionar la historia térmica del universo, por consiguiente, el valor $\rho_{\Lambda_{fis}}$ hoy en día debe coincidir esencialmente con el valor medido experimentalmente de 10^{-47} GeV^4 . En vista de que la diferencia entre el valor experimental y el valor arrojado por teoría cuántica de campos es abismal, se necesita básicamente que los dos valores se cancelen mutuamente, i.e. $\rho_V \sim -\rho_F$; para esto, B deber ser tan pequeño como para que el cociente crezca y se produzca la cancelación. La segunda condición se puede resumir en:

$$B(R, \mathcal{G}) \rightarrow 0 \quad \text{para } H < H_{rad}^i. \quad (3.3.2)$$

Se deber resaltar que en el presente modelo el origen gravitacional del mecanismo garantiza que *la cancelación se realice mediante un proceso espontáneo que evoluciona en el tiempo, y no mediante ajustes finos en la CC efectiva*. Al tratar

de satisfacer esta condición en cada una de las etapas de la historia térmica, se podrá construir la forma explícita de la función B . Los detalles acerca de la cancelación dinámica y de la construcción de B , se mostrarán en el siguiente capítulo.

4

Mecanismo Dinámico

La idea básica es introducir el término ρ_F , de origen gravitacional, con el propósito de neutralizar el gran valor de ρ_Λ . Sin embargo, gracias a que el nuevo término es dependiente del parámetro a , el mecanismo evoluciona en el tiempo a medida que el universo se expande. Esto permite que la cancelación se realice mediante un ajuste natural que se detiene cuando se alcanza la neutralización deseada. Para entender de manera más precisa el mecanismo, se analizará un modelo de juguete en tres escenarios diferentes. Posteriormente se podrá construir un modelo acorde con las observaciones experimentales.

4.1. Modelo de juguete

En la Capítulo 2 se mostró que para solucionar el primer problema de la CC, se debe dar razón acerca del pequeño valor medido para la CC efectiva a pesar del enorme valor del vacío cuántico. La razón consiste, según [20], en que se está ignorando un término en las ecuaciones de campo, el cual cancela de manera espontánea el vacío cuántico provocando que el valor observado sea muy pequeño.

$$|\rho_\Lambda + \rho_F| \ll |\rho_\Lambda| \tag{4.1.1}$$

El término ρ_F *no es ajustado por el hombre*, sino que varía en el tiempo hasta que se alcanza la cancelación que provoca que el valor sea el correcto.

4.1.1. Época Actual

La cancelación en épocas tardías del Universo se obtiene con $\rho_F = \beta/H^2$. Al reemplazar en la primera ecuación de Friedmann se obtiene:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G_N} = \rho_m + \rho_\Lambda + \rho_F = \rho_m + \rho_\Lambda + \frac{\beta}{H^2}, \quad (4.1.2)$$

cuya solución es:

$$H^2 = \left(\frac{\beta}{\rho_\Lambda} \right) / \left(\frac{\rho_c - \rho_m}{\rho_\Lambda} - 1 \right). \quad (4.1.3)$$

Actualmente $\rho_m, \rho_c \ll |\rho_\Lambda|$, por consiguiente el primer término del denominador de la expresión (4.1.3) se puede despreciar y la solución es $H_0^2 = -\beta/\rho_\Lambda$. El enorme valor de ρ_Λ no es un problema dentro de este modelo, sino que por el contrario, ocasiona que el parámetro de Hubble actual sea pequeño. Sin la presencia de ρ_F , la ecuación estaría dominada por enorme la CC efectiva provocando que H sea grande en oposición con los resultados experimentales.

El mecanismo también puede ser analizado desde un punto de vista diferente. Debido a que el parámetro de Hubble hoy en día es muy pequeño comparado con la CC efectiva, el término $1/H^2$ se hace muy grande y, escogiendo correctamente el signo de β se obtiene la cancelación de la CC efectiva. De ahora en adelante *cada vez que se hable de relajar la CC se estará hablando de hacer que $B \rightarrow 0$* . La elección de la constante β no se constituye en un ajuste fino ya que pequeños cambios en β no producirán grandes cambios en H_0 ; el pequeño valor de H_0 es debido al gran valor de ρ_Λ , solo es necesario ajustar las unidades.

4.1.2. Época de Radiación y de Materia

Para analizar la época dominada por la radiación se toma como ejemplo el vacío electrodébil cuyo valor es negativo. El efecto de una CC negativa en esta época se deduce de la solución de la ecuación de Friedmann con densidades de energía ρ_r y ρ_Λ comparables en magnitud, y bajo la condición de $\rho_r - |\rho_\Lambda| > 0$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\rho_r - |\rho_\Lambda|}{3m_p^2} \quad \text{con} \quad m_p = \sqrt{\frac{1}{8\pi G}},$$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{\rho_r^0 - |\rho_\Lambda| a^4}{3m_p^2 a^4}}.$$

La solución viene dada por:

$$a(t) = \left[\frac{\rho_r^0}{|\rho_\Lambda|} \right]^{1/4} \sqrt{\sin \left(2 \frac{\sqrt{|\rho_\Lambda|}}{\sqrt{3}m_p} t \right)}. \quad (4.1.4)$$

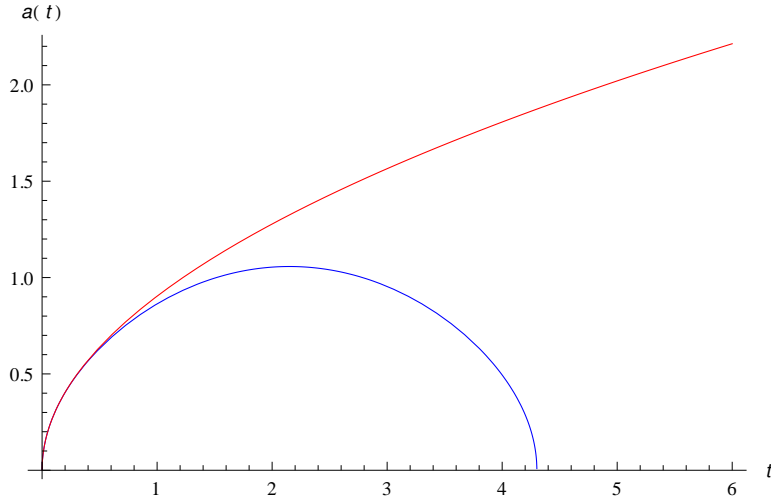


Figura 4.1: La línea azul muestra el comportamiento del parámetro a cuando la CC negativa es comparable con la densidad de energía de la radiación. La línea roja muestra el comportamiento asintótico cuando la CC es despreciable.

De la figura 4.1 se observa que la presencia de una energía de vacío negativa en la época de radiación provoca el recolapso del universo. Para evitar que esto suceda se introduce nuevamente un término que contrarresta el enorme valor de vacío electrodébil. Sin embargo, en este caso, el parámetro de Hubble es grande y no funciona el método utilizado para la época actual. Se debe complementar la función B con un término que tienda a cero en esta época:

$$B \propto H^2(1 - q). \quad (4.1.5)$$

Justo al inicio de la época de radiación, la energía de vacío negativa provocará que el parámetro de desaceleración tienda a valores positivos, debido al recolapso del universo. A medida que q se acerca a 1, $B \rightarrow 0$, por consiguiente el valor de la densidad de energía inducida gravitacionalmente tiende a ser muy grande, cancelando el valor de la CC efectiva. El valor de q será muy cercano a 1 debido al enorme valor de la CC, pero nunca será igual a 1 debido a que el proceso se detendrá cuando la cancelación sobre la CC sea tal que la radiación domine. Si q llegará a ser mayor que 1, ρ_F dominaría sobre ρ_Λ , lo cual sería equivalente a la presencia de una CC efectiva positiva que nuevamente produciría que q tendiera a 1. Por esta razón se concluye que el modelo con $q \approx 1$ es

estable. En resumen, el mecanismo de relajación provoca que se presente un período de radiación, y a su vez, la misma existencia de la época de radiación permite que el mecanismo funcione. Para la época dominada por la materia la expresión $(1/2 - q)$ relaja la CC debido a razones similares.

4.2. Modelo Realista

En la Sección anterior se mostró como relajar la CC en las diferentes épocas del Universo. Sin embargo, cada modelo implica un periodo de existencia infinita sin una transición entre épocas. A partir de lo trabajado anteriormente, se infiere que para lograr este acometido se requiere que la función B contenga cada uno de los términos H^2 , $(1 - q)$ y $(q - 1/2)$. En los artículos [20, 21, 22] se propone el siguiente ansatz:

$$B(R, \mathcal{G}) = b_2 R^2 + c_n \mathcal{G} + b_n R^n. \quad (4.2.1)$$

Del Apéndice B, se observa que cualquiera de los términos en (4.2.1) aporta un término proporcional a H^{2n} . Si se elige $b_2 = 2/3$ y $c = 1/2$, se obtiene $(q - 1/2)$. El último término proporciona $(1 - q)$ sin necesidad de fijar la constante b_n , la cual se denotará por y . De acuerdo con lo anterior el ansatz mejorado es:

$$B(R, \mathcal{G}) = \frac{2}{3} R^2 + \frac{1}{2} \mathcal{G} + (yR)^n = 24H^2 (q - 1/2) (q - 2) + [6yH^2 (1 - q)]^n. \quad (4.2.2)$$

El término proporcional a $(1 - q)$ será el responsable de relajar la CC en la época de radiación, donde H es grande; por consiguiente, éste debe dominar sobre el primero y para esto se necesita que $n > 2$. En la época de equivalencia entre la radiación y materia, los dos términos deben ser del mismo orden y por lo tanto:

$$y \sim H_{eq}^{(4-2n)/n}. \quad (4.2.3)$$

Se realizará a continuación un análisis detallado del comportamiento de la función (4.2.2) en cada época del Universo. Pero antes de ello, es importante mencionar que la manera como $B \rightarrow 0$ es diferente a la presentada en el modelo de juguete.

4.2.1. Época de Radiación

La época de radiación está caracterizada por $q \approx 1$, y por $H^2 \propto \rho_r \propto a^{-4}$. Para relajar la CC se requiere que $B \rightarrow 0$. Debido al valor q , los términos en B poseen signos contrarios y es posible la cancelación aproximada de ambos si $[H^2(1 - q)]^n \sim H^4$. De

aquí se deduce que $H^2(1 - q) \sim H^{4/n} \propto a^{-4(2/n)}$. Reemplazando en la ecuación (3.2.10) se encuentra que

$$3H^2(1 - q) = 4\pi G(\rho_m + \rho_{\Lambda_{fis}} - 3p_{\Lambda_{fis}}) \propto a^{-8/n}, \quad (4.2.4)$$

y por lo tanto $p_{\Lambda_{fis}} = 1/3\rho_m + 1/3\rho_{\Lambda_{fis}} + c_1 a^{-8/n}$. Cuando finaliza la época de radiación, q se hace diferente de 1; por lo tanto, para que se presente una transición suave a la época de materia, en donde $H^2 \propto a^{-3}$, se requiere que $n = 8/3$. Utilizando la ecuación de continuidad y la regla de la cadena, se llega a la siguiente ecuación diferencial ordinaria con coeficientes variables:

$$\rho'_{\Lambda_{fis}} - 3\frac{1}{a} \left(\rho_{\Lambda_{fis}} + \frac{1}{3}\rho_m + \frac{1}{3}\rho_{\Lambda_{fis}} + c_1 a^{-8/n} \right) = 0. \quad (4.2.5)$$

Al solucionar (4.2.5) con la ayuda del sistema de álgebra computacional MATHEMATICA, se obtiene una expresión para $\rho_{\Lambda_{fis}}$:

$$\rho_{\Lambda_{fis}} = c_2 a^{-4} - \rho_m + 3(-4 + 8/n)^{-1} a^{-8/n}. \quad (4.2.6)$$

A partir de la expresión anterior se puede hallar el parámetro de estado ω_{fis} valido en esta época:

$$\omega_{fis} = \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{1/3\rho_m + 1/3\rho_{\Lambda_{fis}} + c_1 a^{-8/n}}{c_2 a^{-4} - \rho_m + 3(-4 + 8/n)^{-1} a^{-8/n}} \right). \quad (4.2.7)$$

Si se reemplaza n por $8/3$, en el limite cuando $a \rightarrow 0$, es decir, en la época temprana de radiación, se obtiene que $\omega_{fis} \rightarrow 1/3$; en la época tardía de radiación, cuando $a \rightarrow \infty$, $\omega_{fis} \rightarrow 0$.

4.2.2. Época de Materia

La época dominada por la materia esta caracterizada por $q \approx 1/2$, $H^2 \propto \rho_m \propto a^{-3}$. Realizando un análisis similar, la condición $B \rightarrow 0$ implica que $H^4(q - 1/2) \sim H^{2n}$. A partir de la ecuación (3.2.8) se obtiene que:

$$H^2(q - 1/2) = 4\pi G(1/3\rho_r + p_{\Lambda_{fis}}) \sim H^{2n-2} \propto a^{3(n-1)}. \quad (4.2.8)$$

y por lo tanto $p_{\Lambda_{fis}} = -1/3\rho_r + c_3 a^{-3(n-1)}$. Al escoger $n = 7/3$ se obtiene una transición suave entre la radiación y materia. Nuevamente utilizando la ecuación de continuidad se llega a una ecuación diferencial para $\rho_{\Lambda_{fis}}$:

$$\rho'_{\Lambda_{fis}} - 3\frac{1}{a} \left(\rho_{\Lambda_{fis}} - \frac{1}{3}\rho_r + c_3 a^{-3(n-1)} \right) = 0, \quad (4.2.9)$$

cuya solución es:

$$\rho_{\Lambda_{fis}} = c_4 a^{-3} - \rho_r + \frac{c_3 a^{-3(n-1)}}{n-2}. \quad (4.2.10)$$

El parámetro de estado en esta época es:

$$\omega_{fis} = \frac{-\frac{1}{3}\rho_r + c_3 a^{-3(n-1)}}{c_4 a^{-3} - \rho_r + \frac{c_3}{n-2} a^{-3(n-1)}}. \quad (4.2.11)$$

Con $n = 7/3$, en la época temprana de materia ($a \rightarrow 0$) el parámetro tiende a $1/3$, y para la época tardía ($a \rightarrow \infty$) tiende a 0.

Anteriormente se mostró cómo se debe escoger el valor de n para producir una correcta transición entre las etapas. Sin embargo, el valor obtenido en los dos casos es diferente y por consiguiente se escogerá un valor cercano a las dos condiciones, $n = 3$. Esta selección también es congruente con la condición que se impuso al principio de $n > 2$. Por consiguiente, el ansatz completo es:

$$B(R, \mathcal{G}) = \frac{2}{3}R^2 + \frac{1}{2}\mathcal{G} + (yR)^3 = 24H^2 (q - 1/2) (q - 2) + [6yH^2 (1 - q)]^3. \quad (4.2.12)$$

Para la época actual el parámetro de Hubble H es muy pequeño y por lo tanto se desprecia el segundo término en (4.2.12). En este caso, no se puede producir una cancelación aproximada entre dos términos, por lo cual la relajación de la CC esta soportada en el pequeño valor de H , del mismo modo que se analizó en el modelo de juguete.

Se podría alegar en este punto que el análisis presentado no es valido ya que la densidad de energía inducida no contiene únicamente la función $1/B$. Sin embargo, al examinar los términos adicionales se observa que están acompañados por la derivada de la función $1/B$, lo cual implica que ρ_F sea una función de la forma:

$$\rho_F = \frac{\beta N(a, \dot{a}, \ddot{a}, \ddot{\ddot{a}})}{B^3}, \quad (4.2.13)$$

De esta manera, se mantiene la idea de hacer $B \rightarrow 0$ para que ρ_F neutralice el enorme valor de ρ_Λ .

5

Solución Numérica

La extrema complejidad de las expresión (3.2.2) hace necesaria la utilización de métodos numéricos para resolver las ecuaciones. Debido a que la primera ecuación Friedmann es de tercer orden, se realiza el siguiente cambio de variable para obtener una ecuación de menor orden:

$$\dot{f} = \dot{a}f'(a) = \dot{a}\frac{a}{a}f'(a) = aH(a)f'(a). \quad (5.0.1)$$

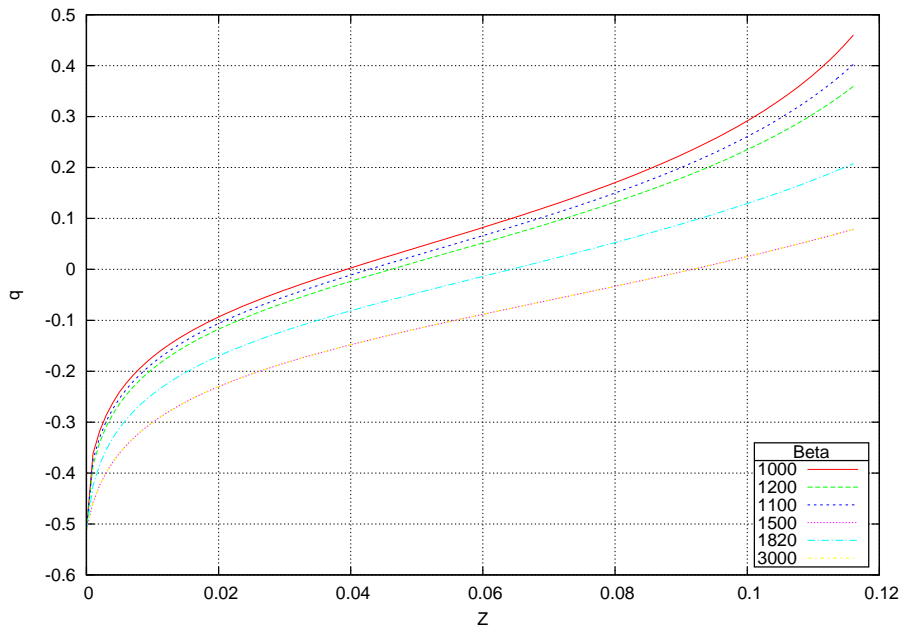


Figura 5.1: Comportamiento del parámetro de desaceleración q versus el corrimiento al rojo z , para diferentes valores de β .

La ecuación que se obtiene es de segundo orden para H en función de a . El método numérico utilizado por el autor para resolver la ecuación es Runge-Kutta de cuarto orden. Para ver los detalles del cálculo y el código utilizado ver el Apéndice C. El comportamiento matemático del modelo se puede analizar a partir de condiciones iniciales no realesⁱ. La figura 5.1 contiene la gráfica obtenida por el autor. Se puede observar cómo el parámetro de desaceleración evoluciona hacia atrás en el tiempo, desde una época con parámetro de desaceleración aproximadamente igual a 0,6 (época actual) hasta un período con un valor cercano a 1/2. Es decir, el modelo muestra que la época anterior a la actual es necesariamente una época dominada por la materia, lo cual es coherente con la cosmología estándar. Es importante notar que el comportamiento del modelo para diferentes valores del parámetro β es esencialmente el mismo, por lo tanto, *se muestra que en verdad no es necesario realizar un ajuste fino en β para que el mecanismo funcione.*

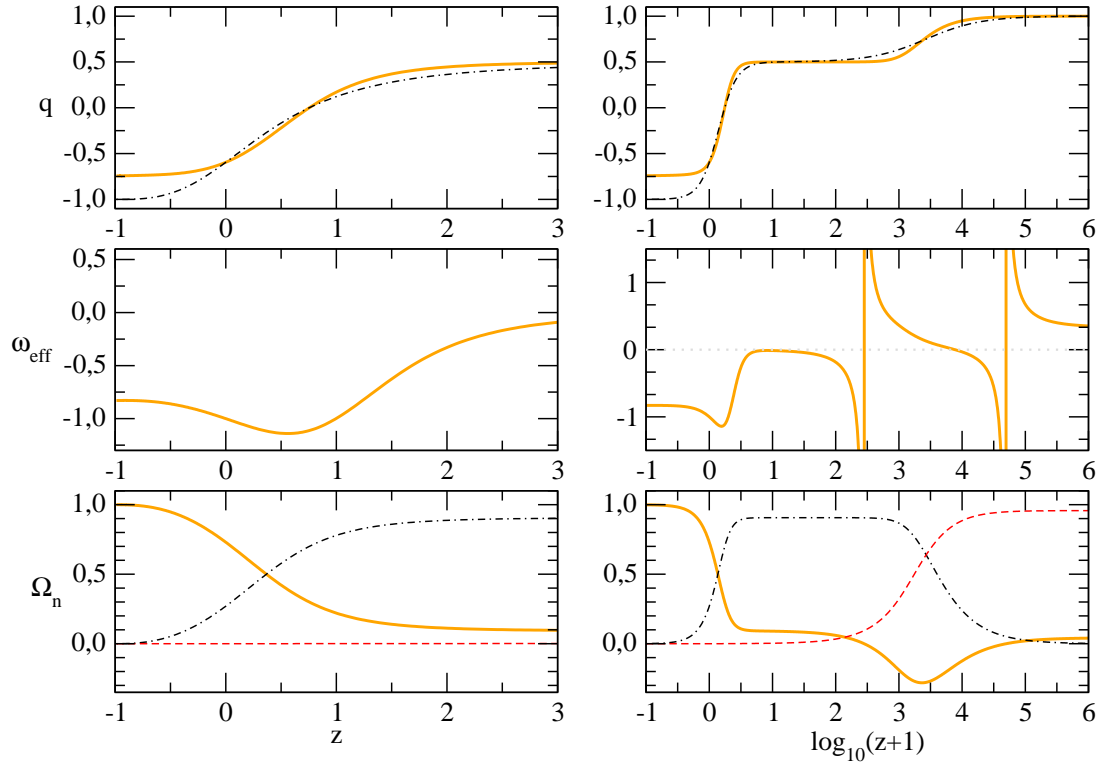


Figura 5.2: La línea de color naranja representa $\rho_{\Lambda_{fis}}$ en todas gráficas. La línea punteada de color negro en el primer par de gráficas representa el resultado obtenido por el modelo (Λ CDM). En las gráficas del fondo, la línea punteada de color negro representa materia oscura y la línea punteada de color rojo representa radiación.

ⁱCuando se utilizaron condiciones reales el código presentó inestabilidades producto de propagación de errores, las cuales fueron imposibles de corregir para el autor hasta la fecha.

En la figura 5.2 se encuentran las gráficas obtenidas por otros autores [20]. En ellas se utilizaron los datos reales: $y = 0,7 \times 10^{-3} H_0^{-2/3}$, $\rho_\Lambda = -10^{60} \text{ GeV}^4$, $\Omega_m^0 = 0,27$, $\Omega_r^0 = 10^{-4}$, $q_0 \approx -0,6$. Se observa del primer par de gráficas, que el comportamiento del parámetro de desaceleración q es el esperado: hacia atrás en el tiempo, q pasa desde la época actual ($q \approx -0,6$) a una época dominada por la materia ($q \approx 1/2$). A partir del segundo par de gráficas, se observa que el parámetro de estado ω_{fis} , correspondiente a la mezcla de CC efectiva-Cosmón, es igual a -1 en la actualidad ($z = 0$), de esta manera, $\rho_{\Lambda_{fis}}$ se comporta como energía de vacío. En el final de la época dominada por la materia el parámetro ω_{fis} tiende a 0, tal como se había predicho en el capítulo anterior. Finalmente, el tercer par gráficas muestra que la densidad de energía relativa de la radiación es despreciable tanto en la época actual como en la época dominada por la materia, lo cual es coherente con los datos experimentales. Además muestra el correcto comportamiento de la densidad relativa de la mezcla CC-Cosmón pasando de ser despreciable en la época dominada por la materia hasta un punto en el cual iguala la densidad relativa de la materia, para luego dominar la época actual. Como última observación, la suma $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_{\Lambda_{fis}} \approx 1$, mostrando concordancia con el resultado de que el Universo es prácticamente plano. En conclusión, el modelo de gravedad modificada reproduce satisfactoriamente la Cosmología estándar sin necesidad de realizar un ajuste fino en la CC efectiva.

6

Conclusiones

Se estudió la posible solución al viejo problema de la Constante Cosmológica, originada en un modelo de gravedad modificada (3.1.1), el cual involucra una función $f(R, \mathcal{G})$ dependiente del escalar de Ricci y del invariante de Gauss-Bonnet. La forma como se construyó el funcional es tal que los Principios de Equivalencia y de Conservación de la Energía-Momento siguen vigentes. Las ecuaciones de campo derivadas a partir del Principio de Acción Estacionaria, muestran que el resultado efectivo de la modificación consiste en la introducción de un nuevo tensor energía-momento $E_{\mu\nu}$. Al estudiar la nueva cosmología inducida por las ecuaciones modificadas de Friedmann, se mostró que la idea esencial detrás de la modificación de la gravedad, consiste en introducir un término variable que cancela dinámicamente el enorme valor de la densidad de energía de vacío. Con el fin de obtener la conocida historia térmica del Universo, se impusieron condiciones que permiten acotar la forma funcional de $f(R, \mathcal{G})$.

A partir del estudio de un modelo de juguete se mostró cómo el mecanismo, sin necesidad de realizar un ajuste fino, relaja de manera dinámica el enorme valor del vacío cuántico en diferentes épocas del Universo. Asimismo, se evidenció la existencia de un proceso de retroalimentación. El escogimiento de la forma de $f(R, \mathcal{G})$ como:

$$f(R, \mathcal{G}) = \frac{\beta}{B(R, \mathcal{G})} + A(R), \quad (6.0.1)$$

con

$$B(R, \mathcal{G}) = \frac{2}{3}R^2 + \frac{1}{2}\mathcal{G} + (yR)^3, \quad (6.0.2)$$

mostró que el comportamiento teórico del modelo permite la correcta transición entre las diferentes épocas del Universo, convirtiéndose en un modelo realista.

Por ultimo, se trató de resolver la primera ecuación de Friedmann modificada mediante la utilización del método de Runge-Kutta. Aunque no se utilizaron datos reales

en la gráfica obtenida, el análisis permitió mostrar cómo el modelo no realiza un ajuste fino en el parámetro β . Por otro lado, a partir de las gráficas obtenidas numéricamente por otros autores [20], se mostró como el modelo en efecto se comporta correctamente en las diferentes etapas del Universo. No obstante, debido a que no se estudió su comportamiento a escalas del sistema solar, en donde esencialmente, debe comportarse como la gravedad de Einstein, no se puede concluir que la solución es completa (véase sin embargo [52]). Como conclusión final, se puede decir que el modelo de gravedad modificada es en realidad, un modelo efectivo que soluciona el viejo problema de la Constante Cosmológica, pero sólo es válido en escalas cosmológicas.

Bibliografía

- [1] C. M. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, San Francisco, USA: W. H. Freeman and Company (1973).
- [2] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Massachusetts, USA: Addison-Wesley (2001).
- [3] H. B. G. Casimir, *On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates*, *Indag. Math.* **10**, 261 (1948).
- [4] U. Mohideen and A. Roy, *Precision Measurement of the Casimir Force from 0.1 to 0.9 μm* , *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4549 (1998).
- [5] G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio, and G. Ruoso, *Measurement of the Casimir Force Between Parallel Metallic surfaces*, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 041804 (2002).
- [6] G. Kane., *Modern Elementary Particle Physics*, Massachusetts, USA: Addison-Wesley (1993).
- [7] G. Ross, *Grand Unified Theories*, Michigan, USA: Benjamin-Cummings Pub. Co. (1984).
- [8] A. G. Riess et al., *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [9] S. Perlmutter et al., *Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [10] N. Jarosik et al., *Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **192**, 14 (2011).

- [11] D. Larson *et. al.*, *Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Power Spectra and WMAP-Derived Parameters*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **192**, 16 (2011).
- [12] E. Komatsu *et al.*, *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **192**, 18 (2011).
- [13] L. F. Abbott, *A Mechanism for Reducing the Value of the Cosmological Constant*, *Phys. Lett.* **B150**, 427 (1985).
- [14] L. H. Ford, *Cosmological Constant Damping by Unstable Scalar Fields*, *Phys. Rev.* **D35**, 2339 (1987).
- [15] S. M. Barr, *An Attempt at a Classical Cancellation of the Cosmological Constant*, *Phys. Rev.* **D36**, 1691 (1987).
- [16] S. M. Barr and D. Hochberg, *Dynamical Adjustment of the Cosmological Constant*, *Phys. Lett.* **B211**, 49 (1988).
- [17] R. D. Peccei, J. Sola, and C. Wetterich, *Adjusting the Cosmological Constant Dynamically: Cosmons and a New Force Weaker Than Gravity*, *Phys. Lett.* **B195**, 183 (1987).
- [18] J. Sola, *The Cosmological Constant and the fate Of the Cosmon in Weyl Conformal Gravity*, *Phys. Lett.* **B228**, 317 (1989).
- [19] S. Weinberg, *The Cosmological Constant Problem*, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
- [20] F. Bauer, J. Sola, and H. Stefancic, *Dynamically Avoiding Fine-Tuning the Cosmological Constant: the 'Relaxed Universe'*, *JCAP* **1012**, 029 (2010).
- [21] F. Bauer, *The Cosmological Constant and the Relaxed Universe*, *J. Phys. Conf. Ser.* **259**, 012083 (2010).
- [22] F. Bauer, J. Sola, and H. Stefancic, *The Relaxed Universe: Towards Solving the Cosmological Constant Problem Dynamically from an Effective Action Functional of Gravity*, *Phys. Lett.* **B688**, 269 (2010).
- [23] G. Galilei, *Consideraciones y Demostraciones Matemáticas Sobre Dos Nuevas Ciencias*, *Obras maestras del milenio*, Planeta-De Agostini, (1996).
- [24] R. V. Eotvos, D. Pekar, and E. Fekete, *Contributions to the Law of Proportionality of Inertia and Gravity*, *Annalen Phys.* **68**, 11 (1922).

- [25] A. Einstein, *Relativity: The Special and General Theory.*, New York, USA: Pi Press (2005).
- [26] E. Wigner, *Symmetries and Reflections*, Ox Bow Press, 1979.
- [27] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, New York, USA: John Wiley & Sons, Inc. (1972).
- [28] R. P. Feynman, F. B. Morinigo, W. G. Wagner, and B. Hatfield, *Feynman Lectures on Gravitation*, Massachussets, USA: Addison-Wesley (1995).
- [29] A. Einstein, *Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1917**, 142 (1917).
- [30] D. Hilbert, *The Foundations of Physics. 1*, Gott. Nachr. **27**, 395 (1915).
- [31] A. Einstein, *Hamilton's Principle and the General Theory of Relativity*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1916**, 1111 (1916).
- [32] E. Noether, *Invariant Variation Problems*, Gott. Nachr. **1918**, 235 (1918).
- [33] I. M. Gelfand and S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, New Jersey, USA: Pentice-Hall, Inc. (1963).
- [34] K. S. Wu, O. Lahav, and M. J. Rees, *The Large-Scale Smoothness of the Universe*, Nature **397**, 225 (1999).
- [35] J. Yadav, S. Bharadwaj, B. Pandey, and T. R. Seshadri, *Testing Homogeneity on Large Scales in the Sloan Digital Sky Survey Data Release One*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **364**, 601 (2005).
- [36] D. Lyth and A. Liddle, *The Primordial Perturbation Density: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure*, Cambrigde, UK: Cambridge University Press (2009).
- [37] R. P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics, Volume II*, Massachussets, USA: Adisson-Wesley (1965).
- [38] T. Cheng and L. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford, UK: Oxford University Press. (1984).
- [39] S. Weinberg, *The quantum theory of fields, Volume 1: foundations*, Cambridge, UK: Cambridge University Press (1995).
- [40] V. F. Mukhanov and S. Winitzki, *Introduction to Quantum Effects in Gravity*, Cambridge, UK: Cambridge University Press (2007).

- [41] K. Nakamura et al., *Review of particle physics*, J. Phys. **G37**, 075021 (2010).
- [42] M. Hobson, G. Efstathiou, and A. Lasenby, *General Relativity: An introduction for physicists*, Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [43] S. Weinberg, *Theories of The Cosmological Constants*, (1996), arXiv:astro-ph/9610044.
- [44] H. Stefancic, *The Solution of the Cosmological Constant Problem from the Inhomogeneous Equation of State - A Hint from Modified Gravity?*, Phys. Lett. **B670**, 246 (2009).
- [45] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Inhomogeneous Equation of State of the Universe: Phantom Era, Future Singularity and Crossing the Phantom Barrier*, Phys. Rev. **D72**, 023003 (2005).
- [46] M. Arnsen, *A Variational Proof of the Gauss-Bonnet Formula*, M. M. **20**, 245 (1977).
- [47] A. A. Starobinsky, *A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity*, Phys. Lett. **B91**, 99 (1980).
- [48] Y. Kluger, J. M. Eisenberg, B. Svetitsky, F. Cooper, and E. Mottola, *Fermion Pair Production in a Strong Electric Field*, Phys. Rev. **D45**, 4659 (1992).
- [49] I. L. Shapiro and J. Sola, *Massive Fields Temper Anomaly-Induced Inflation*, Phys. Lett. **B530**, 10 (2002).
- [50] J. Sola, *Dark Energy: A Quantum Fossil from the Inflationary Universe?*, J. Phys. **A41**, 164066 (2008).
- [51] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *$f(R)$ Theories Of Gravity*, Rev. Mod. Phys. **82**, 451 (2010).
- [52] F. Bauer, J. Sola, and H. Stefancic, *Relaxing a Large Cosmological Constant in the Astrophysical Domain*, Mod. Phys. Lett. **A26**, 2559 (2011).

Apéndice

A

Gravedad Modificada

A continuación se mostrará los detalles del cálculo de las ecuaciones de campo para una gravedad modificada del tipo $F(R, S, T)$ y a partir de esta expresión general se obtendrán las respectivas ecuaciones para la gravedad de tipo $F(R, \mathcal{G})$.

A.1. Gravedad $F(R, S, T)$

El funcional que describe este tipo de gravedad es:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} F(R, S, T), \quad (\text{A.1.1})$$

en donde $S = R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ y $T = R^{\rho\mu\lambda\nu} R_{\rho\mu\lambda\nu}$.

Para obtener la ecuaciones de campo se realiza una variación a primer orden al funcional \mathcal{S} . Debido a que $g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu$, las variaciones del tensor métrico doblemente covariante y doblemente contravariante se pueden expresar por medio de

$$\begin{aligned} \delta(g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu}) &= 0, \\ \delta g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} + g^{\mu\sigma} \delta g_{\sigma\nu} &= 0, \\ \delta g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} &= -g^{\mu\sigma} \delta g_{\sigma\nu}, \\ \delta g^{\nu\rho} &= -g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} \delta g_{\sigma\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

Haciendo un procedimiento similar se obtiene

$$\delta g_{\rho\mu} = -g_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} \delta g^{\nu\sigma}. \quad (\text{A.1.3})$$

La variación de los símbolos de Christoffel es:

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\delta g_{\nu\sigma,\mu} + \delta g_{\mu\sigma,\nu} - \delta g_{\mu\nu,\sigma}) \\ &\quad + \delta g^{\rho\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}).\end{aligned}\quad (\text{A.1.4})$$

Utilizando la expresión para los símbolos de Christoffel y (A.1.2) se obtiene:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\delta g_{\nu\sigma,\mu} + \delta g_{\mu\sigma,\nu} - \delta g_{\mu\nu,\sigma} - 2\delta g_{\sigma\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}).\quad (\text{A.1.5})$$

Por conveniencia, se hallan las derivadas covariantes de las variaciones de la métrica, calculadas respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$:

$$\delta g_{\nu\sigma;\mu} = \delta g_{\nu\sigma,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\delta g_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\delta g_{\nu\lambda}.\quad (\text{A.1.6})$$

$$\delta g_{\mu\sigma;\nu} = \delta g_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}\delta g_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\delta g_{\mu\lambda}.\quad (\text{A.1.7})$$

$$\delta g_{\mu\nu;\sigma} = \delta g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda}\delta g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda}\delta g_{\mu\lambda}.\quad (\text{A.1.8})$$

Utilizando la propiedad de simetría de los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ y restando la ecuación (A.1.8) de la suma de las ecuaciones (A.1.6) y (A.1.7), se obtiene la expresión dentro del paréntesis en (A.1.4), y así:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\delta g_{\nu\sigma;\mu} + \delta g_{\mu\sigma;\nu} - \delta g_{\mu\nu;\sigma}).\quad (\text{A.1.9})$$

Debido a que las variaciones son respecto a $g^{\mu\nu}$ se debe reemplazar (A.1.3) en (A.1.9)

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = -\frac{1}{2}(g_{\lambda\nu}\delta g^{\lambda\rho}_{;\mu} + g_{\lambda\mu}\delta g^{\lambda\rho}_{;\nu} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta;\rho}).\quad (\text{A.1.10})$$

La variación del tensor de Riemann es:

$$\begin{aligned}\delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} &= \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\lambda} - \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \\ &\quad - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} - \delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}.\end{aligned}\quad (\text{A.1.11})$$

Puesto que la diferencia de dos símbolos de Christoffel es un tensor, se halla su derivada covariante:

$$\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu;\lambda} = \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}.\quad (\text{A.1.12})$$

$$\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda;\nu} = \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}.\quad (\text{A.1.13})$$

Si se resta (A.1.13) de (A.1.12) se obtiene una expresión más adecuada para la variación del tensor de Riemann:

$$\delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = (\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})_{;\lambda} - (\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda})_{;\nu}.\quad (\text{A.1.14})$$

Con las expresiones anteriores se mostrará la variación del funcional (A.1.1). Debido a que la operación variación δ cumple la regla de Leibniz, se divide la variación en dos partes:

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x [\delta\sqrt{-g}F(R, S, T)] + \delta F(R, S, T). \quad (\text{A.1.15})$$

en donde $\delta F(R, S, T)$ es:

$$\delta F(R, S, T) = \delta\mathcal{S}_R + \delta\mathcal{S}_S + \delta\mathcal{S}_T. \quad (\text{A.1.16})$$

La variación del primer término de la integral, $\delta\sqrt{-g}$ es:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \frac{\delta g}{\sqrt{-g}}. \quad (\text{A.1.17})$$

Para hallar δg se utiliza el hecho que $\ln(\det A) = \text{Tr}(\ln A)$

$$\frac{1}{\det A} \delta(\det A) = \text{Tr}[\delta(\ln A)] = \text{Tr}(A^{-1}\delta A). \quad (\text{A.1.18})$$

Realizando la sustitución $A = g_{\mu\nu}$, $A^{-1} = g^{\mu\nu}$ se obtiene:

$$\delta g = g(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = -g(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}), \quad (\text{A.1.19})$$

y reemplazando en (A.1.17) se llega a la expresión:

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \frac{g(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.1.20})$$

A partir de este punto, el superíndice que acompañe la letra F denotará derivación parcial con respecto a este, $F^X = \partial F/\partial X$. La variación $\delta\mathcal{S}_R$ es:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}_R &= \int d^4x \sqrt{-g} F^R \delta R = \int d^4x \sqrt{-g} F^R \delta (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}), \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} F^R (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{A.1.21})$$

Para hallar la variación del tensor de Ricci se utiliza la expresión (A.1.14)

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R^\rho_{\mu\nu\rho} = (\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho})_{;\nu} - (\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu})_{;\rho}, \quad (\text{A.1.22})$$

y a partir de (A.1.12) se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left\{ [g_{\lambda\nu} (\delta g^{\lambda\rho})_{;\mu} + g_{\lambda\mu} (\delta g^{\lambda\rho})_{;\nu} - g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} (g^{\alpha\beta})^{;\rho}]_{;\rho} \right. \\ &\quad \left. - [g_{\lambda\rho} (\delta g^{\lambda\rho})_{;\mu}]_{;\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.23})$$

Reemplazando la expresión anterior en (A.1.21)

$$\delta\mathcal{S}_R = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ F^R R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + F^R \left[(\delta g^{\lambda\sigma})_{;\lambda} - g_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu})^{;\sigma} \right]_{;\sigma} \right\}. \quad (\text{A.1.24})$$

Se realiza integración por partes dos vecesⁱ para que así se obtenga una expresión en donde la variación de la métrica no sea operada por una derivada covariante. Cada vez que se realiza este proceso se ignoran los términos de superficie debido a las condiciones de frontera $\delta g^{\mu\nu} = (\delta g^{\mu\nu})_{,\sigma} = 0$. De este modo, la variación del primer término en (A.1.16) es:

$$\delta\mathcal{S}_R = \int d^4x \sqrt{-g} (F^R R_{\mu\nu} + F^R_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu} (F^R)^{;\sigma}_{;\sigma}) \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.1.25})$$

La variación $\delta\mathcal{S}_S$ es:

$$\delta\mathcal{S}_S = \int d^4x \sqrt{-g} F^S \delta (R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}). \quad (\text{A.1.26})$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \delta (R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) &= R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta R^{\mu\nu}, \\ &= R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta (g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} R_{\alpha\beta}), \\ &= 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + 2R_{\lambda\nu} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu}^{\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.27})$$

Utilizando la expresión (A.1.23):

$$\begin{aligned} \delta (R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) &= 2R^{\mu\nu} [g_{\lambda\nu} (\delta g^{\lambda\rho})_{;\mu}]_{;\rho} - R^{\mu\nu} [g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} (g^{\alpha\beta})_{;\rho}]_{;\rho} \\ &\quad - R^{\mu\nu} [g_{\lambda\rho} (\delta g^{\lambda\rho})_{;\mu}]_{;\nu} + 2R_{\lambda\nu} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu}^{\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.28})$$

Reemplazando en (A.1.26), integrando por partes dos veces y eliminando los términos de superficie se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}_S &= \int d^4x \sqrt{-g} [2(F^S R^{\sigma\lambda})_{;\mu\sigma} g_{\nu\lambda} - (F^S R_{\mu\nu})^{;\sigma}_{;\sigma} - g_{\mu\nu} (F^S R^{\sigma\lambda})_{;\sigma\lambda} \\ &\quad + 2F^S R_{\lambda\nu} R_{\mu}^{\lambda}] \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.29})$$

ⁱEste procedimiento es válido gracias a que el operador derivada covariante cumple la regla de Leibnitz. Así, integrar por partes en este caso es:

$$\int d^4x \sqrt{-g} A_{\mu} B_{\nu;\sigma} = \int d^4x \sqrt{-g} (A_{\mu} B_{\nu})_{;\sigma} - \int d^4x \sqrt{-g} B_{\nu} A_{\mu;\sigma}$$

Cada vez que se integra por partes, la operación derivada covariante pasa de un término al otro en el producto. En virtud del teorema de Gauss, se observa que el primer término en la expresión anterior es igual al integrando evaluado en la superficie que rodea el volumen de integración. De aquí, proviene el nombre de términos de superficie.

La variación $\delta\mathcal{S}_T$ es:

$$\delta\mathcal{S}_T = \int d^4x \sqrt{-g} F^T \delta (R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\mu\lambda\nu}), \quad (\text{A.1.30})$$

con

$$\delta(R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\mu\lambda\nu}) = \delta(R_{\rho\mu\lambda\nu}) R^{\rho\mu\lambda\nu} + R_{\rho\mu\lambda\nu} \delta(R^{\rho\mu\lambda\nu}). \quad (\text{A.1.31})$$

Utilizando las propiedades de simetría del tensor de Riemann se llega a:

$$R^{\rho\mu\lambda\nu} \delta(R_{\rho\mu\lambda\nu}) = -R_{\rho}^{\mu\lambda\nu} R_{\rho\mu\lambda\nu} + R_{\rho}^{\mu\lambda\nu} \delta R_{\mu\lambda\nu}^{\rho}, \quad (\text{A.1.32})$$

$$R_{\rho\mu\lambda\nu} \delta R^{\rho\mu\lambda\nu} = 2R_{\alpha}^{\nu\rho\mu} R_{\lambda\nu\rho\mu} + R_{\rho}^{\mu\lambda\nu} R_{\rho\mu\lambda\nu} + R_{\rho}^{\mu\lambda\nu} \delta R_{\mu\lambda\nu}^{\rho}. \quad (\text{A.1.33})$$

Por lo tanto, (A.1.31) queda expresada como:

$$\delta(R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\mu\lambda\nu}) = 2R_{\alpha}^{\nu\rho\mu} R_{\lambda\nu\rho\mu} + R_{\rho}^{\mu\lambda\nu} \delta R_{\mu\lambda\nu}^{\rho}. \quad (\text{A.1.34})$$

A partir de (A.1.10) y (A.1.14) se llega a:

$$\begin{aligned} \delta(R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\mu\lambda\nu}) &= 2R_{\alpha}^{\nu\rho\mu} R_{\lambda\nu\rho\mu} + 2R_{\rho}^{\mu\lambda\nu} [(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho})_{;\lambda} - (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho})_{;\nu}], \\ &= 2R_{\alpha}^{\nu\rho\mu} R_{\lambda\nu\rho\mu} + 4R_{\rho}^{\mu\lambda\nu} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho})_{;\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.35})$$

Al reemplazar la expresión (A.1.10) y emplear la primera identidad de Bianchi $R_{\rho\nu\lambda\mu} = R_{\rho\mu\lambda\nu} + R_{\rho\lambda\nu\mu}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta(R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\mu\lambda\nu}) &= 2R_{\alpha}^{\nu\rho\mu} R_{\lambda\nu\rho\mu} - 2R_{\rho}^{\mu\lambda\nu} \left(g_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\rho}_{;\mu\lambda} + g_{\sigma\mu} \delta g^{\sigma\rho}_{;\nu\lambda} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta;\rho}_{;\lambda} \right), \\ &= 2R_{\alpha}^{\nu\rho\mu} R_{\lambda\nu\rho\mu} - 2 \left(R_{\rho}^{\nu\lambda} \delta g^{\rho\sigma}_{;\nu\lambda} + R_{\rho}^{\nu\lambda} \delta g^{\sigma\rho}_{;\nu\lambda} + \cancel{R_{\rho}^{\lambda\nu} \delta g^{\sigma\rho}_{;\nu\lambda}} \right) \\ &\quad - \cancel{R_{\rho}^{\nu\lambda} \delta g^{\sigma\rho}_{;\nu\lambda}}, \\ &= 2R_{\alpha}^{\nu\rho\mu} R_{\lambda\nu\rho\mu} - 4R_{\rho}^{\nu\lambda} \delta g^{\rho\sigma}_{;\nu\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.36})$$

Si se reemplaza lo anterior en (A.1.30) y se eliminan nuevamente los términos de superficie al integrar por partes, (A.1.30) es:

$$\delta\mathcal{S}_T = \int d^4x \sqrt{-g} [2F^T R_{\mu\lambda\sigma\rho} R_{\nu}^{\lambda\sigma\rho} - 4(F^T R_{\mu}^{\sigma\rho})_{;\sigma\rho}]. \quad (\text{A.1.37})$$

Finalmente se obtiene la expresión completa para la variación a primer orden de (A.1.1):

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} F(R, S, T) + F^R R_{\mu\nu} + F_{;\mu\nu}^R - g_{\mu\nu} (F^R)_{;\sigma}^{\sigma} \right. \\ &\quad + 2(F^S R^{\sigma\lambda})_{;\mu\sigma} g_{\nu\lambda} - (F^S R_{\mu\nu})_{;\sigma}^{\sigma} - g_{\mu\nu} (F^S R^{\sigma\lambda})_{;\sigma\lambda} + 2F^S R_{\lambda\nu} R_{\mu}^{\lambda} \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad \left. + 2F^T R_{\mu\lambda\sigma\rho} R_{\nu}^{\lambda\sigma\rho} - 4(F^T R_{\mu}^{\sigma\rho})_{;\sigma\rho} \right] \delta g^{\mu\nu} + (\text{Términos de superficie}). \end{aligned} \quad (\text{A.1.38})$$

De acuerdo con el principio de acción estacionaria, las ecuaciones de campo en el vacío para una gravedad del tipo $F(R, S, T)$ son:

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F(R, S, T) + F^R R_{\mu\nu} + F^R_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu}(F^R)_{;\sigma}{}^\sigma \\
& + 2(F^S R^{\sigma\lambda})_{;\mu\sigma} g_{\nu\lambda} - (F^S R_{\mu\nu})_{;\sigma}{}^\sigma - g_{\mu\nu}(F^S R^{\sigma\lambda})_{;\sigma\lambda} + 2F^S R_{\lambda\nu} R_\mu{}^\lambda \delta g^{\mu\nu}. \\
& + 2F^T R_{\mu\lambda\sigma\rho} R_\nu{}^{\lambda\sigma\rho} - 4(F^T R_\mu{}^{\sigma\rho}{}_\nu)_{;\sigma\rho} = 0
\end{aligned} \tag{A.1.39}$$

A.2. Gravedad $f(R, \mathcal{G})$

Las ecuaciones de campo para una gravedad de tipo $F(R, \mathcal{G})$ se obtienen utilizando la regla de la cadena en las derivadas parciales de F de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
F(R, S, T) = f(R, \mathcal{G}) \quad \implies \quad F^R &= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial R} f^\mathcal{G} + f^R = 2R f^\mathcal{G} + f^R, \\
F^S &= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial S} f^\mathcal{G} = -4f^\mathcal{G}, \quad F^T = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T} f^\mathcal{G} = f^\mathcal{G}.
\end{aligned} \tag{A.2.1}$$

Por consiguiente las respectivas ecuaciones de campo en el vacío son:

$$\begin{aligned}
E_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}f(R, \mathcal{G})g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} (2R f^\mathcal{G} + f^R) + (2R f^\mathcal{G} + f^R)_{;\mu\nu} \\
& - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (2R f^\mathcal{G} + f^R)_{;\alpha\beta} - 8f^\mathcal{G} R_{\mu\lambda} R_\nu{}^\lambda + 4g_{\mu\nu} (f^\mathcal{G} R^{\alpha\beta})_{;\alpha\beta} \\
& - 8(f^\mathcal{G} R^{\alpha\beta})_{;\mu\alpha} g_{\nu\beta} + 4g^{\alpha\beta} (f^\mathcal{G} R_{\mu\nu})_{;\alpha\beta} + 2f^\mathcal{G} R_{\mu\alpha\beta\gamma} R_\nu{}^{\alpha\beta\gamma} \\
& - 4(f^\mathcal{G} R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta})_{;\alpha\beta} = 0.
\end{aligned} \tag{A.2.2}$$

Por último, la expresión (A.1.39) con $F^R = 1, F^S = 0, F^T = 0$ corresponde a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu} = 0. \tag{A.2.3}$$

B

Cosmología $f(R, \mathcal{G})$

Se presentará en detalle el cálculo de la cosmología $f(R, \mathcal{G})$ y en especial la expresión para el tensor inducido $E_{\mu\nu}$ en la métrica de FRW plana. Los símbolos de Christoffel en FRW son:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^0 &= a\dot{a}\delta_{ij}, \\ \Gamma_{j0}^i &= \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i.\end{aligned}\tag{B.0.1}$$

Las componentes que no se mencionen son cero. Con las expresiones anteriores se hallan las componentes del tensor de Riemann:

$$\begin{aligned}R^i{}_{jmn} &= (\delta_m^i\delta_{nj} - \delta_n^i\delta_{jm})\dot{a}^2, \\ R^0{}_{i0j} &= a\ddot{a}\delta_{ij}, \\ R^i{}_{00j} &= \frac{\ddot{a}}{a}\delta_j^i,\end{aligned}\tag{B.0.2}$$

$$R_{0i0j} = a\ddot{a}\delta_{ij}, \quad R_{ijmn} = -(\delta_{im}\delta_{nj} - \delta_{in}\delta_{jm})a^2\dot{a}^2,\tag{B.0.3}$$

$$R^{0i0j} = \frac{\ddot{a}}{a^3}\delta^{ij}, \quad R^{ijmn} = -(\delta^{im}\delta^{nj} - \delta^{in}\delta^{jm})\frac{\dot{a}^2}{a^4},\tag{B.0.4}$$

y las componentes del tensor de Ricci:

$$R_{00} = 3\frac{\dot{a}}{a}, \quad R_{ij} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\delta_{ij},\tag{B.0.5}$$

$$R^{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R^{ij} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a^3} + \frac{2\dot{a}^2}{a^4}\right)\delta^{ij}.\tag{B.0.6}$$

El escalar de Ricci, los escalares S, T y el invariante de Gauss-Bonnet \mathcal{G} se obtienen a partir de las expresiones anteriores:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = 6H^2(1 - q).\tag{B.0.7}$$

$$S = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 12 \left(\frac{\ddot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{a^3} + \frac{\dot{a}^4}{a^4} \right) = 12H^4(q^2 - q + 1). \quad (\text{B.0.8})$$

$$T = R_{\rho\mu\lambda\nu}R^{\rho\mu\lambda\nu} = 12 \left(\frac{a^2\ddot{a}^2}{a^4} + \frac{\dot{a}^4}{a^4} \right) = 12H^2(q^2 + 1). \quad (\text{B.0.9})$$

$$\mathcal{G} = R^2 - 4S + T = -24H^4q. \quad (\text{B.0.10})$$

B.1. Tensor de Einstein y $E_{\mu\nu}$

Las componentes del tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ se obtienen a partir de las expresiones (B.0.5) y (B.0.7). La componente G^0_0 :

$$\begin{aligned} G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R, \\ &= 3\frac{\ddot{a}}{a} - 3\frac{\ddot{a}}{a} - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}, \\ &= -3H^2. \end{aligned} \quad (\text{B.1.1})$$

$$G^0_0 = g^{0\mu}G_{\mu 0} = G_{00} = -3H^2. \quad (\text{B.1.2})$$

La componente G^i_j :

$$G^i_j = g^{i\mu}G_{\mu j} = -\frac{1}{a^2}\delta^{il}G_{il}, \quad (\text{B.1.3})$$

$$= -\frac{1}{a^2}\delta^{il} \left(R_{lj} - \frac{1}{2}g_{lj}R \right), \quad (\text{B.1.4})$$

$$= -\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} \right) \delta^i_j, \quad (\text{B.1.5})$$

ahora $\dot{H} = \ddot{a}/a - \dot{a}^2/a^2$, por lo tanto:

$$G^i_j = -(2\dot{H} + 3H^2)\delta^i_j. \quad (\text{B.1.6})$$

Para hallar $E_{\mu\nu}$ es muy conveniente hallar las siguientes derivadas covariantes:

$$f_{;\nu} = f_{,\nu}, \quad (\text{B.1.7})$$

$$(fR^{00})_{;0} = (fR^{00})_{,0}, \quad (\text{B.1.8})$$

$$(fR^{00})_{;i} = 0, \quad (\text{B.1.9})$$

$$(fR^{0i})_{;0} = 0, \quad (\text{B.1.10})$$

$$(fR^{0i})_{;j} = \Gamma^0_{jm}fR^{mi} + \Gamma^i_{j0}fR^{00}, \quad (\text{B.1.11})$$

$$(fR^{ij})_{;0} = (fR^{ij})_{,0} + \Gamma^i_{0m}fR^{mj} + \Gamma^j_{0m}fR^{im}, \quad (\text{B.1.12})$$

$$(fR^{ij})_{;m} = 0. \quad (\text{B.1.13})$$

De acuerdo con el apéndice anterior el tensor $E_{\mu\nu}$ es:

$$\begin{aligned}
E_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}f(R, \mathcal{G})g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} (2Rf^{\mathcal{G}} + f^R) + (2Rf^{\mathcal{G}} + f^R)_{;\mu\nu} \\
& - g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta} (2Rf^{\mathcal{G}} + f^R)_{;\alpha\beta} - 8f^{\mathcal{G}}R_{\mu\lambda}R_{\nu}^{\lambda} + 4g_{\mu\nu}(f^{\mathcal{G}}R^{\alpha\beta})_{;\alpha\beta} \\
& - 8(f^{\mathcal{G}}R^{\alpha\beta})_{;\mu\alpha}g_{\nu\beta} + 4g^{\alpha\beta}(f^{\mathcal{G}}R_{\mu\nu})_{;\alpha\beta} + 2f^{\mathcal{G}}R_{\mu\alpha\beta\gamma}R_{\nu}^{\alpha\beta\gamma} \\
& - 4(f^{\mathcal{G}}R^{\alpha\beta})_{;\alpha\beta}, .
\end{aligned} \tag{B.1.14}$$

Expandiendo esta expresión se obtiene:

$$\begin{aligned}
E_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}fg_{\mu\nu} + 2R_{\mu\nu}Rf^{\mathcal{G}} + R_{\mu\nu}f^R + (2Rf^R)_{;\mu\nu} + f^R_{;\mu\nu} \\
& - g_{\mu\nu}[g^{00}(2Rf^{\mathcal{G}} + f^R)_{;00} + g^{ij}(2Rf^{\mathcal{G}} + f^R)_{;ij}] - 8f^{\mathcal{G}}R_{\mu\lambda}R_{\nu}^{\lambda} \\
& + 4g[(f^{\mathcal{G}}R^{00})_{;00} + (f^{\mathcal{G}}R^{0i})_{;0i} + (f^{\mathcal{G}}R^{i0})_{;i0} + (f^{\mathcal{G}}R^{ij})_{;ij}] \\
& - 8[(f^{\mathcal{G}}R^{00})_{;\mu 0}g_{\nu 0} + (f^{\mathcal{G}}R^{0i})_{;\mu 0}g_{\nu i} + (f^{\mathcal{G}}R^{i0})_{;\mu i}g_{\nu 0} + (f^{\mathcal{G}}R^{ij})_{;\mu i}g_{\nu j}] \\
& + 4[g^{00}(f^{\mathcal{G}}R_{\mu\nu})_{;00} + g^{ij}(f^{\mathcal{G}}R_{\mu\nu})_{;ij}] + 2f^{\mathcal{G}}R_{\mu\alpha\beta\gamma}R_{\nu}^{\alpha\beta\gamma} \\
& - 4[(f^{\mathcal{G}}R^0_{\mu\nu})_{;00} + (f^{\mathcal{G}}R^i_{\mu\nu})_{;i0} + (f^{\mathcal{G}}R^0_{\mu\nu})_{;0i} + (f^{\mathcal{G}}R^j_{\mu\nu})_{;ij}].
\end{aligned} \tag{B.1.15}$$

Según (B.1.15) la componente E^0_0 es:

$$\begin{aligned}
E^0_0 = g^{\alpha 0}E_{\alpha 0} = E_{00} = & -\frac{1}{2}f + R_{00}Rf^{\mathcal{G}} + R_{00}f^R - g^{ij}(2Rf^{\mathcal{G}} + f^R)_{;ij} \\
& - 8f^{\mathcal{G}}R_{0\lambda}R_0^{\lambda} - 4[(f^{\mathcal{G}}R^{00})_{;00} + (f^{\mathcal{G}}R^{0i})_{;0i}] + 4[(f^{\mathcal{G}}R^{i0})_{;i0} + (f^{\mathcal{G}}R^{ij})_{;ij}] \\
& + 4[(f^{\mathcal{G}}R_{00})_{;00} + g^{ij}(f^{\mathcal{G}}R_{00})_{;ij}] + 2f^{\mathcal{G}}R_{0\alpha\beta\gamma}R_0^{\alpha\beta\gamma} \\
& - 4[(f^{\mathcal{G}}R^0_{00})_{;00} + (f^{\mathcal{G}}R^i_{00})_{;i0} + (f^{\mathcal{G}}R^0_{00})_{;0i} + (f^{\mathcal{G}}R^j_{00})_{;ij}].
\end{aligned} \tag{B.1.16}$$

Se procederá al cálculo de cada uno de los términos de la expresión anterior:

$$\begin{aligned}
2R_{00}Rf^{\mathcal{G}} & = 2 \left(3\frac{\ddot{a}}{a} \right) \left(6\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) f^{\mathcal{G}}, \\
& = \left(36\frac{\ddot{a}^2}{a^2} + 36\frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{a^3} \right) f^{\mathcal{G}}. \\
R_{00}f^R & = 3\frac{\ddot{a}}{a}f^R.
\end{aligned} \tag{B.1.17}$$

Utilizando (B.1.8):

$$\begin{aligned}
g^{ij}(2Rf^{\mathcal{G}} + f^R)_{;ij} &= g^{ij}[(2Rf^{\mathcal{G}} + f^R)_{;ij} - \Gamma_{ij}^0(2Rf^{\mathcal{G}} + f^R)_{;0}], \\
&= \frac{1}{a^2}\delta_{ij}a\dot{a}\delta_{ij}(2Rf^{\mathcal{G}} + f^R)_{;0}, \\
&= 3\frac{\dot{a}}{a} \left[\left(12\frac{\ddot{a}}{a} + 12\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) f^{\mathcal{G}} + f^R \right]_{;0}, \\
&= 36\frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2}f^{\mathcal{G}} + 36\frac{\dot{a}^3}{a^3}f^{\mathcal{G}} + 3\frac{\dot{a}}{a}f^R + 36\frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2}f^{\mathcal{G}}, \\
&\quad + 36\frac{\dot{a}^2\ddot{a}}{a^3}f^{\mathcal{G}} - 72\frac{\dot{a}^4}{a^4}f^{\mathcal{G}}. \\
8f^{\mathcal{G}}R_{0\lambda}R_0^\lambda &= 72\frac{\ddot{a}^2}{a^2}. \tag{B.1.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f^{\mathcal{G}}R^{0i})_{;0i} &= (f^{\mathcal{G}}R^{0i})_{;0,i} + \Gamma_{im}^0(f^{\mathcal{G}}R^{mi})_{;0} + \Gamma_{i0}^i(f^{\mathcal{G}}R^{00})_{;0}, \\
&\quad - \Gamma_{0i}^m(f^{\mathcal{G}}R^{0i})_{;m}, \\
&= \Gamma_{im}^0(f^{\mathcal{G}}R^{im})_{;0} + \Gamma_{im}^0\Gamma_{0l}^mR^{li} + \Gamma_{im}^0\Gamma_{0l}^i f^{\mathcal{G}}R^{ml}, \\
&\quad - \Gamma_{im}^0\Gamma_{ml}^m f^{\mathcal{G}}R^{li} - \Gamma_{0i}^m\Gamma_{m0}^i f^{\mathcal{G}}R^{00} + \Gamma_{i0}^i(f^{\mathcal{G}}R^{00})_{;0}, \\
&= 6\left(\frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} - \frac{\dot{a}^3}{a^3}\right)f^{\mathcal{G}} + \left(18\frac{\dot{a}^4}{a^4} - 24\frac{\dot{a}^2\ddot{a}}{a^3} + 6\frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2}\right)f^{\mathcal{G}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f^{\mathcal{G}}R^{i0})_{;0i} &= (f^{\mathcal{G}}R^{i0})_{;i,0} + \Gamma_{0m}^i(f^{\mathcal{G}}R^{m0})_{;i} + \Gamma_{0\lambda}^0(f^{\mathcal{G}}R^{i\lambda})_{;i} - \Gamma_{i0}^m(f^{\mathcal{G}}R^{i0})_{;m}, \\
&= (f^{\mathcal{G}}R^{i0})_{;i,0} + (\Gamma_{i0}^i f^{\mathcal{G}}R^{00})_{;0} + (\Gamma_{im}^i f^{\mathcal{G}}R^{im})_{;0} \quad R^{\mu\nu} \text{ es diagonal}, \\
&= \left(6\frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} - 6\frac{\dot{a}^3}{a^3}\right)f^{\mathcal{G}} + \left(6\frac{\ddot{a}^2}{a^2} - 30\frac{\dot{a}^2\ddot{a}}{a^3} + 6\frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} + 18\frac{\dot{a}^4}{a^4}\right)f^{\mathcal{G}}.
\end{aligned}$$

$$(f^{\mathcal{G}}R^{ij})_{;ij} = (f^{\mathcal{G}}R^{ij})_{;i,j} + \Gamma_{j0}^i(f^{\mathcal{G}}R^{0j})_{;i} + \Gamma_{j0}^j(f^{\mathcal{G}}R^{i0})_{;i} - \Gamma_{ij}^0(f^{\mathcal{G}}R^{ij})_{;0}. \tag{B.1.19}$$

Los tres símbolos de Christoffel son debido a que la contracción no es completa. Utilizando (B.0.1) y las expresiones (B.1.9-B.1.12) se obtiene:

$$(f^{\mathcal{G}}R^{ij})_{;ij} = \left(33\frac{\dot{a}^2\ddot{a}}{a^3} - 36\frac{\dot{a}^4}{a^4} + 3\frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2}\right)f^{\mathcal{G}} + \left(3\frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} + 6\frac{\dot{a}^3}{a^3}\right)f^{\mathcal{G}}. \tag{B.1.20}$$

$$\begin{aligned}
g^{ij}(f^{\mathcal{G}}R_{00})_{;ij} &= -\frac{1}{a^2} \left[(f^{\mathcal{G}}R_{00})_{;i,i} - \Gamma_{0i}^m(f^{\mathcal{G}}R_{m0})_{;i} - \Gamma_{0i}^m(f^{\mathcal{G}}R_{0m})_{;i} \right. \\
&\quad \left. - \Gamma_{ii}^0(f^{\mathcal{G}}R_{00})_{;0} \right], \\
&= \left(-21\frac{\dot{a}^2\ddot{a}}{a^3} + 12\frac{\dot{a}^4}{a^4} + 9\frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} \right) f^{\mathcal{G}} + 9\frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} f^{\mathcal{G}}.
\end{aligned}$$

$$2f^{\mathcal{G}}R_{0\alpha\beta\gamma}R_0^{\alpha\beta\gamma} = 2f^{\mathcal{G}}g_{0\theta}R_{0\alpha\beta\gamma}R^{\theta\alpha\beta\gamma} = 2f^{\mathcal{G}}R_{0\beta\gamma}R^{0\alpha\beta\gamma} = 4f^{\mathcal{G}}R_{0i0j}R^{0i0j}, \tag{B.1.21}$$

$$2f^{\mathcal{G}} R_{0\alpha\beta\gamma} R_0^{\alpha\beta\gamma} = 12 \frac{\ddot{a}^2}{a^2} f^{\mathcal{G}}. \quad (\text{B.1.22})$$

Finalmente, la parte que involucra al tensor de Riemann.

$$(f^{\mathcal{G}} R_{00}^0{}^0)_{;00} = 0, \quad (\text{B.1.23})$$

$$(f^{\mathcal{G}} R_{00}^0{}^i)_{;0i} = 0, \quad (\text{B.1.24})$$

$$(f^{\mathcal{G}} R_{00}^i{}^0)_{;i0} = 0, \quad (\text{B.1.25})$$

$$\begin{aligned} (f^{\mathcal{G}} R_{00}^i{}^j)_{;ij} &= (f^{\mathcal{G}} R_{00}^i{}^j)_{;i,j} + \Gamma_{j0}^i (f^{\mathcal{G}} R_{00}^0{}^j)_{;i} + \Gamma_{j0}^j (f^{\mathcal{G}} R_{00}^i{}^0)_{;i} \\ &\quad - \Gamma_{0j}^m (f^{\mathcal{G}} R_{m0}^i{}^j)_{;i} - \Gamma_{0j}^m (f^{\mathcal{G}} R_{0m}^i{}^j)_{;i} - \Gamma_{ij}^0 (f^{\mathcal{G}} R_{00}^i{}^j)_{;0}, \\ &= \left(3 \frac{\dot{a}^2 \ddot{a}}{a^3} + 3 \frac{\dot{a} \ddot{a}}{a^2} - 6 \frac{\dot{a}^4}{a^4} \right) f^{\mathcal{G}} + 3 \frac{\ddot{a}}{a^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.26})$$

A continuación se reemplazarán todos los términos anteriores en la ecuación (B.1.16):

$$\begin{aligned} E^0_0 &= -\frac{1}{2} f + \left(36 \frac{\ddot{a}^2}{a^2} + 36 \frac{\ddot{a} \dot{a}^2}{a^3} \right) f^{\mathcal{G}} + 3 \frac{\ddot{a}}{a} f^R - 36 \frac{\dot{a} \ddot{a}}{a^2} f^{\mathcal{G}} - 36 \frac{\dot{a}^3}{a^3} f^{\mathcal{G}} - 3 \frac{\dot{a}}{a} f^R \\ &\quad - 36 \frac{\ddot{a} \dot{a}}{a^2} f^{\mathcal{G}} - 36 \frac{\dot{a}^2 \ddot{a}}{a^3} f^{\mathcal{G}} + 72 \frac{\dot{a}^4}{a^4} f^{\mathcal{G}} - 72 \frac{\ddot{a}^2}{a^2} f^{\mathcal{G}} - 24 \frac{\dot{a} \ddot{a}}{a^2} f^{\mathcal{G}} + 24 \frac{\dot{a}^3}{a^3} f^{\mathcal{G}} \\ &\quad + 96 \frac{\dot{a}^2 \ddot{a}}{a^3} f^{\mathcal{G}} - 72 \frac{\dot{a}^4}{a^4} f^{\mathcal{G}} - 24 \frac{\dot{a} \ddot{a}}{a^2} f^{\mathcal{G}} + 24 \frac{\ddot{a} \dot{a}}{a^2} f^{\mathcal{G}} - 24 \frac{\dot{a}^3}{a^3} f^{\mathcal{G}} + 24 \frac{\ddot{a}^2}{a^2} f^{\mathcal{G}} \\ &\quad - 120 \frac{\dot{a}^2 \ddot{a}}{a^3} f^{\mathcal{G}} + 24 \frac{\dot{a} \ddot{a}}{a^2} f^{\mathcal{G}} + 74 \frac{\dot{a}^4}{a^4} f^{\mathcal{G}} + 132 \frac{\ddot{a} \dot{a}}{a^3} f^{\mathcal{G}} - 144 \frac{\dot{a}^4}{a^4} f^{\mathcal{G}} + 12 \frac{\dot{a}^2 \ddot{a}}{a^2} f^{\mathcal{G}} \\ &\quad + 24 \frac{\dot{a}^3}{a^3} f^{\mathcal{G}} + 12 \frac{\dot{a} \ddot{a}}{a^2} f^{\mathcal{G}} - 84 \frac{\dot{a}^2 \ddot{a}}{a^3} f^{\mathcal{G}} + 48 \frac{\dot{a}^4}{a^4} f^{\mathcal{G}} + 36 \frac{\dot{a} \ddot{a}}{a^2} f^{\mathcal{G}} + 36 \frac{\ddot{a} \dot{a}}{a^2} f^{\mathcal{G}} \\ &\quad - 12 \frac{\dot{a} \ddot{a}}{a^2} f^{\mathcal{G}} - 12 \frac{\dot{a}^2 \ddot{a}}{a^3} f^{\mathcal{G}} + 12 \frac{\ddot{a}^2}{a^2} f^{\mathcal{G}} - 12 \frac{\dot{a} \ddot{a}}{a^2} f^{\mathcal{G}} + 24 \frac{\dot{a}^4}{a^4} f^{\mathcal{G}}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.27})$$

$$\begin{aligned} E^0_0 &= -\frac{1}{2} f + 12 \frac{\dot{a}^2 \ddot{a}}{a^3} f^{\mathcal{G}} + 3 \frac{\ddot{a}}{a} f^R - 3 \frac{\dot{a}}{a} f^R - 12 \frac{\dot{a}^3}{a^3} f^{\mathcal{G}}, \\ &= -\frac{1}{2} \left[f - 24 H^2 (\dot{H} + H^2) f^{\mathcal{G}} - 6 (\dot{H} + H^2) f^R + 6 H \dot{f}^R + 24 H^3 \dot{f}^{\mathcal{G}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.1.28})$$

Se obtiene la componente E^i_j al contraer E_{α_j} con la métrica:

$$E^i_j = g^{i\alpha} E_{\alpha_j} = g^{im} E_{mj} = -\frac{1}{a^2} \delta^{im} E_{mj} = -\frac{1}{a^2} E_{ij}. \quad (\text{B.1.29})$$

Según la ecuación (B.1.15) la componente E_{ij} tiene la forma:

$$\begin{aligned}
E_{ij} = & \frac{1}{2}a^2 f \delta_{ij} + 2R_{ij} R f^{\mathcal{G}} + R_{ij} f^R + (2R f^{\mathcal{G}})_{;ij} + f^R_{;ij} \\
& + a^2 \delta_{ij} \left[(2R f^{\mathcal{G}} + f^R)_{;00} - \frac{1}{a^2} \delta^{mn} (2R f^{\mathcal{G}} + f^R)_{;mn} \right] \\
& - 8R_{i\lambda} R_j^\lambda - 4a^2 \left[\delta_{ij} (f^{\mathcal{G}} R^{00})_{;00} + (f^{\mathcal{G}} R^{0m})_{;0m} \right. \\
& \left. + (f^{\mathcal{G}} R^{m0})_{;m0} + (f^{\mathcal{G}} R^{mn})_{;mn} \right] + 8a^2 \left[(f^{\mathcal{G}} R^{0m})_{;i0} \delta_{jm} \right. \\
& \left. + (f^{\mathcal{G}} R^{mn})_{;im} \delta_{jn} \right] + 4 \left[(f^{\mathcal{G}} R_{ij})_{;00} - \frac{1}{a^2} \delta^{mn} (f^{\mathcal{G}} R_{ij})_{;mn} \right] \\
& + 2f^{\mathcal{G}} R_{i\alpha\beta\gamma} R_j^{\alpha\beta\gamma} - 4(f^{\mathcal{G}} R_{ij}^{\alpha\beta})_{;\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{B.1.30}$$

Se proseguirá al desarrollo de cada uno de los términos que conforman la expresión anterior:

$$\begin{aligned}
2R_{ij} R f^{\mathcal{G}} &= -2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) \left(6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) f^{\mathcal{G}} \delta_{ij}, \\
&= -12 \left(\ddot{a}^2 + 3\frac{\dot{a}^2 \ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) f^{\mathcal{G}} \delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{B.1.31}$$

$$R_{ij} f^R = -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) f^R \delta_{ij}. \tag{B.1.32}$$

$$(2R f^{\mathcal{G}})_{;ij} = \cancel{(2R f^{\mathcal{G}})_{;i,j}} - \Gamma_{ij}^0 (2R f^{\mathcal{G}})_{;0} = -a\dot{a} (2R f^{\mathcal{G}})_{;0} \delta_{ij}. \tag{B.1.33}$$

$$f^R_{;ij} = -\Gamma_{ij}^0 f^R_{;0} = -a\dot{a} \dot{f}^R \delta_{ij}. \tag{B.1.34}$$

$$\begin{aligned}
(2R f^{\mathcal{G}} + f^R)_{;00} &= (2R f^{\mathcal{G}} + f^R)_{;0,0} - \Gamma_{00}^\lambda \cancel{(2R f^{\mathcal{G}} + f^R)}, \\
&= (2R f^{\mathcal{G}})_{;00} + \ddot{f}^R, \\
&= 36 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right]_{,00} + \ddot{f}^R, \\
&= 12 \frac{\ddot{a}}{a} \ddot{f}^{\mathcal{G}} + 24 \frac{\dot{a} \ddot{a}}{a^2} \dot{f}^{\mathcal{G}} + 24 \frac{\ddot{a}}{a} \dot{f}^{\mathcal{G}} - 96 \frac{\dot{a}^2 \ddot{a}}{a^3} f^{\mathcal{G}} \\
&+ 12 \frac{\ddot{a}^2}{a^2} f^{\mathcal{G}} + 12 \frac{\ddot{a}}{a} f^{\mathcal{G}} + 12 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \dot{f}^{\mathcal{G}} - 48 \frac{\ddot{a}}{a^3} \dot{f}^{\mathcal{G}} \\
&+ 72 \frac{\dot{a}^4}{a^4} f^{\mathcal{G}} + \ddot{f}^R.
\end{aligned} \tag{B.1.35}$$

$$\begin{aligned}
\delta^{mn} (2R f^{\mathcal{G}} + f^R)_{;mn} &= -\delta^{mn} \Gamma_{mn}^0 (2R f^{\mathcal{G}} + f^R)_{;0}, \\
&= -3a\dot{a} (2R f^{\mathcal{G}})_{;0} - 3a\dot{a} \dot{f}^R.
\end{aligned} \tag{B.1.36}$$

$$\begin{aligned}
8R_{i\lambda} R_j^\lambda &= 8R_{i\lambda} g^{\lambda\theta} R_{j\theta} = 8R_{im} g^{mn} R_{jn}, \\
&= -8 \frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)^2}{a^2} \delta_{im} \delta^{mn} \delta_{jn}, \\
&= -8 \frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)^2}{a^2} \delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{B.1.37}$$

$$(f^{\mathcal{G}} R^{00})_{;00} = (f^{\mathcal{G}} R^{00})_{,00}. \quad (\text{B.1.38})$$

$$\begin{aligned} (f^{\mathcal{G}} R^{0m})_{0m} &= \Gamma_{mi}^0 (f^{\mathcal{G}} R^{im})_{,0} + \Gamma_{mi}^0 \Gamma_{0l}^i f^{\mathcal{G}} R^{lm} - \Gamma_{0m}^i \Gamma_{i0}^m f^{\mathcal{G}} R^{00} \\ &\quad + \Gamma_{m0}^m (f^{\mathcal{G}} R^{00})_{,0}, \\ &= 6 \left(\frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{\dot{a}^3}{a^3} \right) f^{\mathcal{G}} + \left(18 \frac{\dot{a}^4}{a^4} - 24 \dot{a}\ddot{a}^2 j_6 \frac{\ddot{a}\ddot{a}}{a^2} \right) f^{\mathcal{G}}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.39})$$

$$\begin{aligned} (f^{\mathcal{G}} R^{m0})_{;m0} &= \Gamma_{;m0}^m (f^{\mathcal{G}} R^{00})_{,0} + (\Gamma_{mi}^0 f^{\mathcal{G}} R^{mi})_{,0}, \\ &= \left(6 \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - 6 \frac{\dot{a}^3}{a^3} \right) f^{\mathcal{G}} + \left(6 \frac{\ddot{a}}{a^2} - 30 \frac{\dot{a}^2 \ddot{a}}{a^3} + 6 \frac{\ddot{a}\ddot{a}}{a^2} + 18 \frac{\dot{a}^4}{a^4} \right) f^{\mathcal{G}} \end{aligned} \quad (\text{B.1.40})$$

$$\begin{aligned} (f^{\mathcal{G}} R^{mn})_{;mn} &= \left(33 \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^3} - 36 \frac{\dot{a}^4}{a^4} + 3 \frac{\ddot{a}\ddot{a}}{a^2} \right) \\ &\quad + \left(3 \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} + 6 \frac{\dot{a}^3}{a^3} \right) f^{\mathcal{G}}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.41})$$

$$(f^{\mathcal{G}} R^{0m})_{;i0} \delta_{jm} = (f^{\mathcal{G}} R^{0j})_{i0} = (f^{\mathcal{G}} R^{j0})_{;i0}. \quad (\text{B.1.42})$$

Ahora

$$(f^{\mathcal{G}} R^{m0})_{;m0} = \delta_{mn} (f^{\mathcal{G}} R^{m0})_{;n0}, \quad (\text{B.1.43})$$

por lo tanto,

$$(f^{\mathcal{G}} R^{m0})_{;m0} \delta_{ij} = 3 (f^{\mathcal{G}} R^{0j})_{;i0}, \quad (\text{B.1.44})$$

$$\begin{aligned} (f^{\mathcal{G}} R^{mn})_{;im} \delta_{jn} &= (f^{\mathcal{G}} R^{mj})_{;im}, \\ &= \cancel{(f^{\mathcal{G}} R^{mj})_{;i,m}} + \Gamma_{m0}^m (f^{\mathcal{G}} R^{0j})_{;i} + \Gamma_{m0}^j (f^{\mathcal{G}} R^{m0})_{;i} - \Gamma_{im}^0 (f^{\mathcal{G}} R^{mj})_{;0}, \\ &= \left(\frac{\dot{a}^2 \ddot{a}}{a^3} - 12 \frac{\dot{a}^4}{a^4} + \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} \right) f^{\mathcal{G}} + \left(\frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} + 2 \frac{\dot{a}^3}{a^3} \right) f^{\mathcal{G}}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.45})$$

$$\begin{aligned} (f^{\mathcal{G}} R_{ij})_{;00} &= (f^{\mathcal{G}} R_{ij})_{;0,0} - \Gamma_{i0}^m (f^{\mathcal{G}} R_{mj})_{;0} - \Gamma_{j0}^m (f^{\mathcal{G}} R_{im})_{;0} - \cancel{\Gamma_{00}^\lambda (f^{\mathcal{G}} R_{ij})_{;\lambda}}, \\ &= (-a\ddot{a} - 2\dot{a}^2) \dot{f}^{\mathcal{G}} + \left(18 \frac{\dot{a}^3}{a} - 6\dot{a}\ddot{a} - 2a\ddot{a} \right) \dot{f}^{\mathcal{G}} \\ &\quad + \left(18 \frac{\dot{a}^2 \ddot{a}}{a} - 3\dot{a}^2 - 2\dot{a}\ddot{a} - a\ddot{a}\ddot{a} - 12 \frac{\dot{a}^4}{a^4} \right) f^{\mathcal{G}}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.46})$$

$$\begin{aligned} (f^{\mathcal{G}} R_{ij})_{;mm} &= \cancel{(f^{\mathcal{G}} R_{ij})_{;m,m}} - \Gamma_{im}^0 (f^{\mathcal{G}} R_{0j})_{;m} - \Gamma_{jm}^0 (f^{\mathcal{G}} R_{i0})_{;m} - \Gamma_{mm}^0 (f^{\mathcal{G}} R_{ij})_{;0}, \\ &= (13\dot{a}\ddot{a}\dot{a}^2 - 16\dot{a}^4 + 3\dot{a}a^2\ddot{a}) f^{\mathcal{G}} + (3\dot{a}a^2\ddot{a} + 6\dot{a}^3a) \dot{f}^{\mathcal{G}}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.47})$$

$$\begin{aligned}
2f^{\mathcal{G}} R_{i\alpha\beta\gamma} R_j^{\alpha\beta\gamma} &= 2f^{\mathcal{G}} R_{i\alpha\beta\gamma} g_{j\theta} R^{\theta\alpha\beta\gamma}, \\
&= 2f^{\mathcal{G}} R_{i\alpha\beta\gamma} g_{jm} R^{m\alpha\beta\gamma}, \\
&= -2a^2 f^{\mathcal{G}} R_{i\alpha\beta\gamma} R^{j\alpha\beta\gamma}, \\
&= -2a^2 f^{\mathcal{G}} (R_{i0m0} R^{j0m0} + R_{i00m} R^{j00m} + R_{imnl} R^{jmnl}), \\
&= -2a^2 f^{\mathcal{G}} \left[2\frac{\ddot{a}^2}{a^2} \delta_{ij} + \frac{1}{a^6} (\delta_{in} \delta_{ml} - \delta_{il} \delta_{mn}) (\delta_{jn} \delta_{ml} - \delta_{jl} \delta_{mn}) a^2 \dot{a}^4 \right], \\
&= -2f^{\mathcal{G}} \left[2\ddot{a}^2 + 4\frac{\dot{a}^4}{a^2} \right] \delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{B.1.48}$$

Por último el tensor de Riemann:

$$\begin{aligned}
(f^{\mathcal{G}} R^{\alpha\beta}_{ij})_{;\alpha\beta} &= (f^{\mathcal{G}} R^{\alpha\beta}_{ij})_{;ij} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\beta} (f^{\mathcal{G}} R^{\alpha\lambda}_{ij})_{;\alpha} - \Gamma_{i\beta}^{\lambda} (f^{\mathcal{G}} R^{\alpha\beta}_{\lambda j})_{;\alpha} \\
&\quad - \Gamma_{j\beta}^{\lambda} (f^{\mathcal{G}} R^{\alpha\beta}_{i\lambda})_{;\alpha}, \\
&= -a\ddot{a}\ddot{f}^{\mathcal{G}} + \left(2\frac{\dot{a}^3}{a} - 2\dot{a}\ddot{a} - 2a\ddot{\ddot{a}} \right) \dot{f}^{\mathcal{G}} \\
&\quad + \left(6\frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{a} - 2\dot{a}\ddot{\ddot{a}} - 2\frac{\dot{a}^4}{a^2} - \ddot{a}^2 - a\ddot{\ddot{\ddot{a}}} \right) f^{\mathcal{G}}.
\end{aligned} \tag{B.1.49}$$

Finalmente reemplazando todas las expresiones anteriores en la ecuación (B.1.29) se obtiene que

$$\begin{aligned}
E^i_j &= -\frac{1}{a^2} E_{ij} = \left[-\frac{1}{2}f - 4\frac{\dot{a}^2}{a^2}\ddot{f}^{\mathcal{G}} - \ddot{f}^R - 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{f}^R + \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) f^{\mathcal{G}} \right. \\
&\quad \left. + 24\frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{a^3} f^{\mathcal{G}} + 16\frac{\ddot{\ddot{a}}\dot{a}^2}{a^2} \dot{f}^{\mathcal{G}} \right] \delta^i_j \\
&= -\frac{1}{2} \left[f + 8H^2\ddot{f}^{\mathcal{G}} + 2\ddot{f}^R - 2(\dot{H} + 3H)f^R - 24H^2(\dot{H} + H^2)f^{\mathcal{G}} \right. \\
&\quad \left. + 16H(\dot{H} + H^2)\dot{f}^{\mathcal{G}} \right].
\end{aligned} \tag{B.1.50}$$

C

Detalles de la Solución Numérica

La ecuación diferencial a resolver es la primera ecuación de Friedmann modificada:

$$3H^2 = \frac{1}{m_p^2} \left(\frac{\rho_r^i}{a^4} + \frac{\rho_m^i}{a^3} + \rho_F + \rho_\Lambda \right). \quad (\text{C.0.1})$$

Para esto es necesario conocer la forma explícita de ρ_F . Del Apéndice anterior se conoce que ρ_F esta dada por:

$$\rho_F = -2E_0 = \left[f - 6(\dot{H} + H^2)f^R + 6H\dot{f}^R - 24H^2(\dot{H} + H^2)f^G + 24H^3\dot{f}^G \right], \quad (\text{C.0.2})$$

en donde

$$f = \frac{\beta}{B}, \quad (\text{C.0.3})$$

y

$$B = \frac{2}{3}R^2 + \frac{1}{2}\mathcal{G} + (yR)^3 = 24H^2(q - 1/2)(q - 2) + [6yH^2(1 - q)]^3. \quad (\text{C.0.4})$$

Se procede a calcular las diferentes derivadas de la función f :

$$f^R := \frac{\partial f}{\partial R} = -\frac{\beta(4/3R + 3y^3R^2)}{B^2}, \quad (\text{C.0.5})$$

$$f^G := \frac{\partial f}{\partial \mathcal{G}} = -\frac{\beta}{2B^2}, \quad (\text{C.0.6})$$

$$\dot{B} = \frac{1}{2}\dot{\mathcal{G}} + \frac{4}{3}R\dot{R} + 3y^3R^2\dot{R}, \quad (\text{C.0.7})$$

$$\dot{f}^R = \frac{\beta \left[32y^3R^3\dot{R} - 2\mathcal{G}\dot{R} + 36y^6R^4\dot{R} + R^2(9y^3\dot{\mathcal{G}} + 8\dot{R}) + R(4\dot{\mathcal{G}} - 9y^3\mathcal{G}\dot{R}) \right]}{3B^3}, \quad (\text{C.0.8})$$

$$f^{\mathcal{G}} = \frac{\beta \dot{B}}{B^3} = \frac{\beta \left(\dot{\mathcal{G}}/2 + 4/3 R \dot{R} + 3y^3 R^2 \dot{R} \right)}{B}, \quad (\text{C.0.9})$$

y las derivadas con respecto al tiempo de los invariantes de curvatura en la métrica de FRW:

$$\dot{R} = 12H(1-q)\dot{H} - 6H^2\dot{q}, \quad (\text{C.0.10})$$

$$\dot{\mathcal{G}} = -96H^3q\dot{H} - 24H^4\dot{q}. \quad (\text{C.0.11})$$

Al reemplazar las expresiones anteriores en la ecuación (C.0.2) se obtiene:

$$\rho_F = \beta \left(\frac{1}{B} + \frac{k_1}{B^2} + \frac{k_2}{B^3} + \frac{k_3}{B^2} + \frac{k_4}{B^3} \right), \quad (\text{C.0.12})$$

en donde

$$k_1 = 24H^2 [2 + 27y^3H^2(1-q)] (1-q)(H^2 + \dot{H}), \quad (\text{C.0.13})$$

$$k_2 = 288H^6 \left\{ 1944y^6H^4(q-1)^4 [2(1-q)\dot{H} - H\dot{q}] + 2q [2(1-q)\dot{H} - H\dot{q}] + 288y^3H^2(-1+q)^3 [2(-1+q)\dot{H} + H\dot{q}] - 6(-1+q)^2 \times \right. \\ \left. [4(-1+q + 9y^3H^2q)\dot{H} + H(2 + 9y^3H^2)\dot{q}] + (1-q) (-16q\dot{H} - 4H\dot{q} + 54y^3H^2q [-2(-1+q)\dot{H} - H\dot{q}]) \right\}, \quad (\text{C.0.14})$$

$$k_3 = 12H^2(H^2 + \dot{H}) \quad (\text{C.0.15})$$

$$k_4 = 288H^6 \left\{ -4q\dot{H} - H\dot{q} + [4 - 54y^3H^2(-1+q)] (1-q) \times \right. \\ \left. [-2(-1+q)\dot{H} - H\dot{q}] \right\} \quad (\text{C.0.16})$$

$$\rho_F = 144H^6 \left\{ 324y^6H^6(-4+q)(-1+q)^5 + (74 - 241q + 214q^2 - 56q^3) \dot{H} - 18y^3H^4(-1+q)^2 \left[-3(5 + 162y^3\dot{H}) - 6q^2(4 + 243y^3\dot{H}) + q^3(4 + 486y^3\dot{H}) + 2q(19 + 729y^3\dot{H}) \right] + H^2 \times \right. \\ \left. (-1+q) \left[4q^3(1 + 333y^3\dot{H}) - 12q^2(2 + 375y^3\dot{H}) - 2(7 + 783y^3\dot{H}) + q(39 + 4734y^3\dot{H}) \right] - 3888y^6H^5(-1+q)^4\dot{q} - \right. \\ \left. 6H(7 - 10q + 4q^2)\dot{q} + 36y^3H^3(-22 + 57q - 51q^2 + 16q^3)\dot{q} \right\} / B^3 \quad (\text{C.0.17})$$

Se puede observar que los términos k_2 y k_4 incluyen la derivada del parámetro de desaceleración con respecto al tiempo, por lo tanto la ecuación diferencial es de tercer grado en $a(t)$. Con el fin de disminuir el orden de la ecuación, se expresan todas las funciones como una función del parámetro a :

$$\dot{f} = \dot{a}f'(a) = \dot{a} \frac{a}{a} f'(a) = aH(a)f'(a) \quad (\text{C.0.18})$$

$$\dot{H}(a) = aH(a)H'(a), \quad (\text{C.0.19})$$

$$q(a) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2} = -1 - \frac{aH'(a)}{H(a)}, \quad (\text{C.0.20})$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -\frac{\ddot{H}}{H^2} + 2\frac{\dot{H}^2}{H^3}, \\ &= a^2 \left(\frac{H'}{H} - H'' \right) - H'a, \end{aligned} \quad (\text{C.0.21})$$

Al hacer este cambio de variable se obtiene una expresión para la densidad de energía en donde el parámetro de Hubble es una función explícita de a :

$$\rho_F = \beta \frac{864H^4(M + NH'')}{B^3}, \quad (\text{C.0.22})$$

con

$$\begin{aligned} M &= 27H^4 + 972H^6y^3 + 8640H^8y^6 + 80352aH^7y^6H' + 152928a^2H^6y^6H'^2 \\ &+ 57a^3HH'^3 + 6a^4H'^4 + 138a^5Hy^3H'^5 + 12aH^5y^3H' (589 + 10548a^2y^3H'^2) \\ &+ 3a^2H^4y^3H'^2 (3383 + 17604a^2y^3H'^2) + 3a^2H^2H'^2 (55 + 506a^2y^3H'^2 \\ &+ 288a^4y^6H'^4) + 3aH^3H' (55 + 1971a^2y^3H'^2 + 3618a^4y^6H'^4) \end{aligned} \quad (\text{C.0.23})$$

$$\begin{aligned} N &= 10368a^2H^7y^6 + 20736a^3H^6y^6H' + 4a^4HH'^2 + 6a^3H^2H' (3 + 16a^2y^3H'^2) \\ &+ 54a^3H^4y^3H' (23 + 96a^2y^3H'^2) + 12a^2H^5y^3 (73 + 1296a^2y^3H'^2) \\ &+ 3a^2H^3 (7 + 198a^2y^3H'^2 + 216a^4y^6H'^4) \end{aligned} \quad (\text{C.0.24})$$

$$B = 12H^4 \left(1 + \frac{aH'}{H} \right) + 24H^4 \left(2 + \frac{aH'}{H} \right)^2 + 216y^3H^6 \left(2 + \frac{aH'}{H} \right)^3. \quad (\text{C.0.25})$$

Si se reemplaza (C.0.22) en (C.0.1) se obtiene la forma explícita de la ecuación de Friedmann modificada:

$$F + \left(\frac{\beta}{m_p^2} \right) \left[\frac{864H^4(M + NH'')}{B^3} \right] = 0, \quad (\text{C.0.26})$$

con

$$F = \frac{\rho_r^i}{m_p^2 a^4} + \frac{\rho_m^i}{m_p^2 a^3} + \frac{\rho_\Lambda}{m_p^2} - 3H^2. \quad (\text{C.0.27})$$

C.1. Método de Runge-Kutta

El método numérico consiste básicamente en realizar un “paso de prueba” para hallar el valor aproximado de la derivada en diferentes puntos de un intervalo de tamaño h . La ecuación diferencial debe llevarse a la siguiente forma:

$$y' = f(x, y). \quad (\text{C.1.1})$$

El primer paso de prueba consiste en $y_{n+1} = y_n + hf(x, y_n) = y_n + hk_1$, el cual, será utilizado para hallar el valor de la derivada en la mitad del intervalo:

$$y'_{h/2} = f(x_n + h/2, y_n + k_1/2). \quad (\text{C.1.2})$$

El valor aproximado de la función y al final del intervalo es

$$y_{n+1} \approx y_n + f(x_n + h/2, y_n + k_1/2). \quad (\text{C.1.3})$$

Lo presentado anteriormente consiste en el método de Runge-Kutta de segundo orden. El método de Runge-Kutta de cuarto orden sigue la misma línea de pensamiento, con la diferencia que los valores de la derivada se hallan en el principio, en la mitad y al final del intervalo, utilizando como paso de prueba la aproximación hallada en un punto anterior. Finalmente, se halla un promedio entre las derivadas dando un mayor peso al valor encontrado en la mitad del intervalo. El método de cuarto se resume en las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2), \\ k_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2), \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3), \end{aligned} \quad (\text{C.1.4})$$

$$y_{n+1} \approx y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4. \quad (\text{C.1.5})$$

Para poder implementar el método de Runge-Kutta se debe llevar la ecuación a la forma (C.1.1). Utilizando la expresión (C.0.26) se puede despejar H'' fácilmente:

$$H'' = - \left(\frac{m_p^2}{864\beta H^4} \right) \left(\frac{M + FB^3}{N} \right), \quad (\text{C.1.6})$$

El código utilizado para implementar Runge-Kutta de cuarto orden fue escrito en el lenguaje de programación PYTHON y es el siguiente:

```

from math import *
#####CONDICIONES INICIALES#####
#estos parametros varian
a = 1.0 #parametro expansion
h = 1.0 # parametro de Hubble
H = -0.4 # Derivada parametro de Hubble
b = 9.6e-106# beta
y = 3.9e38 # y
p = -1.0e60 # energia de vacio
mp = 5.5e36
omegar = 0.0001
omegam = 0.27
H0 = 1.76e-42
paso = 0.00000001
##### ECUACION DIFERENCIAL #####
def aceleracion(a,h,H):
    M= 27*h**4+972*h**6*y**3+8640*h**8*y**6+80352*a*h**7*y**6*H
+152928*a**2*h**6*y**6*H**2+57*a**3*h**H**3+6*a**4*H**4
+138*a**5*h*y**3*H**5+12*a*h**5*y**3*H*(589
+10548*a**2*y**3*H**2)+3*a**2*h**4*y**3*H**2*(3383
+17604*a**2*y**3*H**2)+3*a**2*h**2*H**2*(55
+506*a**2*y**3*H**2+288*a**4*y**6*H**4)+3*a*h**3*H*(55
+1971*a**2*y**3*H**2+3618*a**4*y**6*H**4)
    N = 10368*a**2*h**7*y**6+20736*a**3*h**6*y**6*H
+4*a**4*h*H**2+6*a**3*h**2*H*(3+16*a**2*y**3*H**2)
+54*a**3*h**4*y**3*H*(23+96*a**2*y**3*H**2)
+12*a**2*h**5*y**3*(73+1296*a**2*y**3*H**2)
+3*a**2*h**3*(7+198*a**2*y**3*H**2+216*a**4*y**6*H**4)
    B = 12*h**4*(1+(a*H)/h)+24*h**4*(2+(a*H)/h)**2
+216*h**6*y**3*(2+(a*H)/h)**3
    F = omegar*H0**2/mp/a**4+omegam*H0**2/mp/a**3+p/mp-3*h**2
    k = mp/840/b/h**4
    return -k*(M+F*B**3)/N

#####
#####RUNGE-KUTTA#####

for k in range(2000000):
    z = 1.0/a-1.0
    q = -1.0-a*H/h
    print a,z,h,H,q

    n1 = -paso*H

```

```
m1 = -paso*aceleracion(a,h,H)

n2 = -paso*(H+m1/2.0)
m2 = -paso*aceleracion(a-paso/2.0,h+n1/2.0,H+m1/2.0)

n3 = -paso*(H+m2/2.0)
m3 = -paso*aceleracion(a-paso/2.0,h+n2/2.0,H+m2/2.0)

n4 = -paso*(H+m3)
m4 = -paso*aceleracion(a-paso,h+n3,H+m3)

a-=paso
h+=(n1+2.0*n2+2.0*n3+n4)/6.0
H+=(m1+2.0*m2+2.0*m3+m4)/6.0
```