

**Desarrollo del componente métrico-espacial en estudiantes de primer semestre de la  
Licenciatura en Educación Básica Primaria: Una propuesta de acompañamiento  
extraescolar.**

**Íngrid Katherine Cárdenas Gómez**

**Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciada en Matemáticas**

**Directora:**

**Jenny Patricia Acevedo- Rincón**

**Doctora en Educación Matemática**

**Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander**

**Facultad de Ciencias**

**Escuela de Matemáticas**

**Licenciatura en Matemáticas**

**Bucaramanga**

**2023**

## **Agradecimientos**

Primeramente, quiero agradecer a Dios, porque en su infinita misericordia, bondad y fidelidad, me permite alcanzar esta meta tan esperada.

A la escuela de Matemáticas; en especial a Claudia Garavito. Gracias por todo el apoyo y la ayuda que me brindó durante mi formación profesional.

A la escuela de Educación, porque me permitió llevar adelante la aplicación de esta investigación, dentro del programa de Licenciatura en Educación Básica Primaria, en especial, a los estudiantes de primer semestre.

A mi directora de tesis, doctora Jenny P. Acevedo, por la dedicación, paciencia, confianza y el apoyo incondicional que me ha dado durante todo este tiempo de trabajo. Además, porque me llevo sus enseñanzas y sus consejos grabados en mi mente.

A mis evaluadores, doctor Ronald E. Paternina y Jorge E. Fiallo, por los aportes hechos en este trabajo, y en general a los profesores, porque me compartieron sus conocimientos para hoy poder estar aquí.

Y, por último, a cada una de las personas que de una u otra forma contribuyeron a que lograra esta meta. En especial, Pangaby Isla, Ernesto Estupiñán, Marta Gómez, Ruth Soto, Merary.

## **Dedicatoria**

Dedico esta tesis principalmente a Dios por su amor y fidelidad al darme las fuerzas cuando sentía que no las tenía y permitirme alcanzar esta meta.

A mi hermosa y amada madre Lucia Gómez, por su apoyo y aliento incondicional en cada momento que enfrentaba, además de todos los sacrificios y esfuerzos que ha hecho por amor a mí. Por eso, le dedico este trabajo.

A mi hermano Milton, porque me enseña y me motiva a salir adelante con su ejemplo.

## Contenido

<b><u>CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN .....</u></b>	<b><u>10</u></b>
1.1. JUSTIFICACIÓN .....	12
<b><u>1.2. OBJETIVOS .....</u></b>	<b><u>15</u></b>
1.2.1. OBJETIVO GENERAL .....	15
1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	15
<b><u>CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO .....</u></b>	<b><u>17</u></b>
2.1. ANTECEDENTES .....	17
2.2. MARCO CONCEPTUAL.....	22
2.2.1. SÓLIDOS .....	22
2.2.2. PROYECCIÓN SOBRE UN PLANO .....	24
2.3. MARCO TEÓRICO .....	27
2.3.1. UN MODELO DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO PARA EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS .....	27
2.3.2. EL MODELO MTSK (MATHEMATICS TEACHERS’ SPECIALIZED KNOWLEDGE) .....	29
2.4. LINEAMIENTOS CURRICULARES DE EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA EN MATEMÁTICAS. ....	31
2.5. ARTICULACIÓN DEL COMPONENTE MÉTRICO- ESPACIAL CON EL MODELO MTSK .....	34
<b><u>CAPÍTULO 3. ASPECTOS METODOLÓGICOS.....</u></b>	<b><u>37</u></b>
3.1. DISEÑO METODOLÓGICO .....	37
3.2. FASES DE LA INVESTIGACIÓN.....	38
3.2.1. FASE I: REVISIÓN DE LECTURAS PARA EL MARCO TEÓRICO (MODELO MTSK).....	38

	5
3.2.2. FASE II: RELACIÓN DE DEFINICIÓN DE PRÁCTICA, ESTRUCTURA Y TEMAS.....	39
3.2.3. FASE III: SELECCIONAR TAREAS PARA LA ACCIÓN TUTORIAL.....	40
3.2.4. FASE IV: DISEÑO DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA ENSEÑANZA.....	41
3.2.5. FASE V: ANÁLISIS DE LA METODOLOGÍA DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA ENSEÑANZA.....	41
<b>3.3. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN.....</b>	<b>42</b>
<b><u>CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....</u></b>	<b><u>44</u></b>
<b>4.1. TUTORÍAS DEL PRIMER CORTE 2023-I.....</b>	<b>44</b>
<b>4.2. TUTORÍAS DEL SEGUNDO CORTE 2023-I.....</b>	<b>68</b>
<b><u>CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN.....</u></b>	<b><u>83</u></b>
<b><u>CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES.....</u></b>	<b><u>87</u></b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>89</b>
<b><u>APÉNDICES.....</u></b>	<b><u>94</u></b>

## Lista de figuras

<b>Figura 1.</b> Mathematics Teachers' Specialized Knowledge.....	29
<b>Figura 2.</b> Fases de la investigación .....	38
<b>Figura 3.</b> Ejemplo 1 de poliedro convexo.....	45
<b>Figura 4.</b> Ejemplo 2 de poliedro convexo.....	46
<b>Figura 5.</b> Ejemplo 3 de poliedro convexo.....	47
<b>Figura 6.</b> Pirámide de base cuadrada .....	48
<b>Figura 7.</b> Validación y demostración de convexidad de un tetraedro.....	49
<b>Figura 8.</b> Validación y demostración de convexidad de un tetraedro.....	50
<b>Figura 9.</b> Elementos notables del cuboctaedro y octaedro truncados .....	52
<b>Figura 10.</b> Sólidos arquimedianos .....	53
<b>Figura 11.</b> Icosaedro .....	54
<b>Figura 12.</b> Pirámide truncada.....	56
<b>Figura 13.</b> Clasificación de cuerpos geométricos .....	57
<b>Figura 14.</b> Clasificación de cuerpos geométrico.....	58
<b>Figura 15.</b> Cuerpos redondos .....	60
<b>Figura 16.</b> Elementos notables de los cuerpos redondos .....	61
<b>Figura 17.</b> Sólidos platónicos.....	63
<b>Figura 18.</b> Problema de tronco de un cono .....	65
<b>Figura 19.</b> Problema de tronco de un cono .....	66
<b>Figura 20.</b> Volumen y área de una pirámide regular .....	67
<b>Figura 21.</b> Modelación en Matthigon y construcción de los sólidos .....	69
<b>Figura 22.</b> Perspectiva isométrica de un sólido y vistas .....	70

<b>Figura 23.</b> Perspectiva de un sólido y vistas .....	71
<b>Figura 24.</b> Perspectiva isométrica de un sólido y vistas .....	72
<b>Figura 25.</b> Modelado de sólido con la perspectiva isométrica de GeoGebra .....	74
<b>Figura 26.</b> Representación gráfica de un sólido en GeoGebra .....	75
<b>Figura 27.</b> Base de sólidos .....	77
<b>Figura 28.</b> Sólido I .....	78
<b>Figura 29.</b> Desarrollo plano del sólido 1.....	79
<b>Figura 30.</b> Sólido número 3 .....	80
<b>Figura 31.</b> Volumen del sólido 3 .....	81

**Lista de tablas**

<b>Tabla 1.</b> Eje problematizador 1: Geometría Tridimensional.....	34
<b>Tabla 2.</b> Caracterización del conocimiento en el componente métrico-espacial .....	39
<b>Tabla 3.</b> Caracterización de las tutorías .....	42

**Lista de apéndices**

<b>Apéndice A-Taller 1</b> .....	94
<b>Apéndice B-Taller 2</b> .....	99
<b>Apéndice C-Taller 3</b> .....	104
<b>Apéndice D-Taller 4</b> .....	106

## Capítulo 1. Problema de investigación

La transición de la educación media a la universitaria es, en cierta **forma**, complicada por aspectos como lo son: los psicológicos, la desorientación vocacional y la preparación intelectual (Montes, 2022). En particular, la preparación intelectual y humana, está relacionada con la atención, la preparación de las clases, las horas y los métodos que se deben dedicar al estudio, la relación entre compañeros, entre otros factores. Existen numerosas investigaciones (Gómez-Chacón, 2009; Schukajlow et al., 2012) donde se analiza dicha transición, pues muy fácilmente los estudiantes desertan en esta etapa impidiéndoles continuar con sus estudios. Otros estudios como los de Rach y Heinze (2017) evidencian que lo que influye en el éxito de la transición es la adecuada aproximación a las matemáticas durante su etapa escolar; dado que el nivel superior se centra en su parte formal (por ejemplo, demostraciones) y en el bachillerato se priorizan los cálculos operativos. En consecuencia, elementos de tipo cognitivo y afectivo están fuertemente relacionados, es decir, las creencias, actitudes y emociones de los estudiantes frente a las matemáticas (Gil, et al, 2005; Gómez-Chacón, 2009; McLeod, 1992; Schukajlow et al., 2012).

De esta manera se crean y desarrollan programas de apoyo a los estudiantes de primer ingreso para garantizar la inserción, integración y permanencia en las diferentes universidades a nivel mundial (Gustavo & del Valle, 2017). Para cimentarlos en el área de las matemáticas donde se evidencia uno de los mayores problemas ya mencionados, ya que, las universidades promueven la acción tutorial (por ejemplo, pares-tutores, profesores, etc.) centrándolas, en su mayoría en las materias de ciclo básico.

Como evidencia para el año 2021 el examen de estado de la educación media, SABER 11 Colombia, reportaron una leve caída en el puntaje del área de Matemáticas, más del que se venía

presentando desde el año 2015<sup>1</sup>. Gracias a las pruebas realizadas y al informe nacional emitido por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes), se puede confirmar que los conocimientos de los estudiantes han bajado en el área de las matemáticas y la brecha que se puede presentar al llegar a la educación superior es bastante amplia. Universidades en Colombia, como es el caso de la Universidad Industrial de Santander (UIS) brinda apoyo fortaleciendo los contenidos de las materias como: cálculo, álgebra lineal, química, entre otras materias que son propias de programas académicos, como es el caso de la geometría euclidiana, algebra moderna y el análisis matemático que benefician a unos estudiantes en específico, los de la escuela de matemáticas, de las carreras de licenciatura en Matemáticas y Matemática. Sin embargo, muchos de estos programas no son concebidos para estudiantes de todos los programas, como, por ejemplo, la licenciatura en educación básica primaria, por el nivel de profundidad y amplitud de sus contenidos. Tampoco, por concebir una matemática particular pensada para futuros profesores de infantes. Por ejemplo, el análisis matemático de los estudiantes de licenciatura en matemáticas no tiene los mismos alcances de las competencias que pretende desarrollar los cursos de pensamiento matemático I (Componente métrico- espacial), Pensamiento Matemático II (Componente numérico-variacional) y Pensamiento Matemático III (Componente aleatorio) Pertenecientes a la licenciatura en educación básica primaria de la universidad Industrial de Santander, pues esto acontece porque los propósitos con los que se enseñan estos cursos divergen entre sí.

En particular, los estudiantes de la Licenciatura en educación básica primaria pasan por la transición anteriormente mencionada, pero, desafortunadamente, no son beneficiarios en un

---

<sup>1</sup> Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES). (2022). Informe nacional de resultados del examen Saber 11° 2021.

programa de apoyo extraescolar (tutorías), donde se les permita desarrollar su pensamiento matemático que sea base para el desarrollo de los cursos venideros. Por tal razón, es conveniente un refuerzo extracurricular definido con el propósito de mejorar su desempeño académico. De acuerdo con lo anterior, esta propuesta de investigación pretende dar respuesta a la pregunta: ¿qué estrategias de acompañamiento extraescolar permiten el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico para estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Educación Básica Primaria que cursan Pensamiento Matemático I?

### **1.1. Justificación**

El programa de Licenciatura en Educación Básica Primaria de la UIS, busca atender los componentes disciplinares, pedagógicos y didácticos con el propósito de que el egresado de dicho programa pueda tener un pleno conocimiento en la enseñanza del ciclo básico en primaria (obligatorio en Colombia) que va desde el grado primero hasta el grado quinto, dónde, según el MEN, los estudiantes deben adquirir habilidades y conocimientos fundamentales en áreas como lenguaje, matemáticas, ciencias naturales, ciencias sociales, tecnología e inglés.

En relación con el área de las Matemáticas, estas son las que permitirán que el estudiante pueda enfrentarse a situaciones problemáticas de la vida diaria, de las mismas matemáticas y de otras ciencias (MEN, 1998).

Lo anterior, es el resultado de un buen aprendizaje de la aritmética básica (suma, resta, multiplicación y división), fracciones, decimales y porcentajes, los cuales pueden estar inmersas en situaciones como cocinar, comprar alimentos, calcular presupuestos, administrar gastos, pagar facturas, entre otras. En la geometría básica en situaciones tales como dibujar estructuras, calcular dimensiones y pintar. En el álgebra elemental para calcular el tiempo que se tarda en llegar a un destino, determinar la cantidad de materiales necesarios para realizar una tarea y calcular

proporciones en recetas de cocina. En la estadística y probabilidad por ejemplo a la hora de jugar juegos de mesa, cartas o cualquier otro, que involucre probabilidad y le sea posible calcular la posibilidad de ganar o perder, diseñar estructuras, calcular dimensiones, pintar, las cuales, según los estándares básicos de competencias están en los cinco tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Por lo anterior, el programa de educación básica primaria contempla una línea de educación matemática, donde la primera parte es el desarrollo de los pensamientos que son Pensamiento Matemático I (Componente métrico-espacial), pensamiento Matemático II (Componente numérico-variacional) y Pensamiento Matemático III (Componente aleatorio), segundo, la parte didáctica de estos, y por último el uso de la matemática en la investigación cuantitativa.

Para efectos de esta investigación, se centrará el estudio en el primer curso de Matemáticas que enfrentan los ingresados al programa, Pensamiento Matemático I, que tiene como propósito: Generar experiencias de aprendizaje de los procesos matemáticos a través del reconocimiento de la enseñanza de la matemática escolar centradas en el componente espacial y métrico, a partir del reconocimiento disciplinar e interdisciplinar de la matemática en la educación básica primaria, capacitarlos en la especialización del conocimiento disciplinar (e interdisciplinar) para su enseñanza en la educación básica primaria<sup>2</sup>.

Ahora bien, a pesar de que hay una estructura curricular en las distintas carreras de la UIS, los estudiantes necesitan del apoyo de tutores que da la universidad a través de los programas. Sin embargo, posterior a los cambios y la organización que se le dieron al programa de apoyo

---

<sup>2</sup> Tomado del contenido programado del curso Pensamiento Matemático I - 2023-I con la autorización de la profesora titular la doctora Jenny Acevedo.

extracurricular SEA en la UIS, que fueron propuestos para los estudiantes de las facultades (físicoquímicas, físicomecánicas, ciencias, salud y ciencias humanas). Revisando, el programa de la licenciatura en educación básica primaria, de la facultad de ciencias humanas, no cuenta con la evidencia de un acompañamiento extracurricular para el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas de los estudiantes del programa, la única estrategia hallada es el acompañamiento de una hora semanal, por parte de la profesora durante la cual se realiza el asesoramiento tutorial por parte de ella, haciendo talleres de repaso (sin estar en el programa) con el objetivo que todos obtengan los resultados de aprendizaje apropiados.

Evidentemente, los estudiantes de este programa no cuentan con un acompañamiento académico extracurricular para el aprendizaje, o las diferentes dificultades que ellos puedan atravesar en un primer nivel de estudio dentro de esta asignatura de educación superior, sin mencionar, las materias de pensamiento Matemático, II y III. Los obstáculos se deben superar sin el acompañamiento que reciben estudiantes de otros programas en la UIS. Según lo manifestado por la profesora titular, el nivel de repitencia fue poca durante el semestre 2022-2 debido al rol asumido por ella como tutora en las horas de atención a los estudiantes, su aprendizaje durante el semestre exige un mayor nivel de compromiso. Por lo anterior, es necesario que los estudiantes de la licenciatura en educación básica primaria cuenten con el acompañamiento de las tutorías entre pares, y así cumplir a cabalidad la misión de formar personas de alta calidad ética, política y profesional.

Para este caso, la tutoría de pares se presenta como vía efectiva para lograr la calidad de la educación (Durand, et al. 2015) pues es muy importante que los futuros profesores cuenten con sólidas bases en el desarrollo del pensamiento matemático. Dentro de las ventajas de la tutoría entre pares, según Glenda (2021), se presenta como una estrategia de gran valor para el

fortalecimiento de la vocación pedagógica del futuro profesor. Por lo cual, beneficia no solo a los docentes en educación básica primaria en formación (beneficiario) sino al tutor par que será también un licenciado en formación, pero en Matemáticas. Es decir, el tutor mejora su capacidad de enseñar los temas, obteniendo la responsabilidad de transmitir y desarrollar habilidades sociales (Garitano, Ruiz, & Andonegui, 2017), y el estudiante tutorado dispone de una ayuda ajustada a la particularidad del grupo que resulta pertinente y accesible (Gallego, 1997) fomentando un aprendizaje cooperativo (Palma et al, 2019), tal como lo asume la misión institucional de formar profesionales de alta calidad en todos los programas de pregrado.

## **1.2.Objetivos**

A continuación, se presentan los objetivos generales y específicos que pretende alcanzar esta propuesta investigativa.

### **1.2.1. Objetivo general**

Analizar la propuesta de acompañamiento extraescolar por tutorías para el desarrollo del pensamiento matemático I en el componente métrico-espacial con estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Educación Básica Primaria.

### **1.2.2. Objetivos Específicos**

- Identificar tareas formativas para estudiantes de primer semestre de licenciatura en educación básica primaria con base en las estructuras, las prácticas y los tópicos de la matemática escolar del componente métrico-espacial
- Diseñar una estrategia de acompañamiento extraescolar que permitan el desarrollo del componente métrico-espacial en los estudiantes de Licenciatura en Educación básica primaria de la Universidad Industrial de Santander.

- Implementar la estrategia de acompañamiento que permita a los estudiantes de licenciatura en educación básica primaria el desarrollo del pensamiento matemático.

## Capítulo 2. Marco Teórico

Se presenta este marco teórico como la integración de: i) antecedentes; ii) marco conceptual; iii) marco teórico; iv) lineamientos curriculares de educación básica primaria en Matemáticas; y, v) articulación del componente métrico- espacial con el modelo MTSK (por sus siglas en inglés). Lo anterior, con el objetivo de proporcionar una base sólida y completa que orientará el desarrollo de la investigación. Esta combinación de elementos busca no solo contextualizar el problema de estudio, sino también brindar las herramientas necesarias para realizar un análisis profundo y fundamentado del mismo, aprovechando el conocimiento existente para establecer una perspectiva más amplia y rigurosa sobre el tema de investigación.

### 2.1. Antecedentes

La tutoría es un acompañamiento en la formación del alumno, la cual busca que los estudiantes adquieran saberes y competencias (García, 1996). Por lo anterior, se plantean diversos estudios que mencionan variados programas de apoyo académicos, desde primeros semestres, entre ellos destacando las tutorías entre pares (estudiantiles) y tutorías dadas por los propios docentes. A continuación, se presentan algunos de los programas propuestos a nivel internacional, nacional y local que contribuyen al desarrollo de competencias generales en los estudiantes.

A nivel internacional, se encuentran los programas: *Brújula* (Velasco & Benito, 2011), *Innovar* (López, 2013). A nivel nacional, *Acompañamiento tutorial* (Hernández & Vallejo, 2017), *Pipe* (Arenas & Hurtado, 2018) y a nivel local SEA (Acuerdo No. 018, 2014) UIS. Inicialmente, Velasco y Benito (2011) sustentan que el programa *brújula* en la Universidad Europea de Madrid dada a través de la mentoría entre pares, *tenía* por objetivo buscar una formación integral de los estudiantes recién ingresados, fundamentándolos en la obtención de conocimientos propios de cada carrera afianzando el rendimiento académico en Matemáticas, obteniendo como resultado el

favorecimiento de todos los agentes involucrados en este tipo de apoyo, desarrollando cada uno diferentes competencias como habilidades y actitudes personales.

Otro programa de apoyo académico lo menciona López (2013), Innovar, con el cual muestra la necesidad de orientar a los estudiantes en las asignaturas con respecto a los contenidos, revisión de tareas, metodología, prácticas, elaboración de trabajos, etc. Lo cual disminuye la deserción de las asignaturas, acompañado de una reflexión e innovación docente y a una amplia adaptación por parte de los estudiantes.

Por otra parte, una referencia nacional es Hernández y Vallejo (2017), cuyo trabajo refiere al propósito de mostrar la tutoría como una figura clave para promover la formación en la estabilidad académica del estudiante en las diferentes sedes de dicha universidad, al implementarlas diferentes tutorías (formativas, mejorativas, recuperativas, la tutoría individual o grupal), así como también las prácticas de acompañamiento del docente o el acompañamiento entre estudiantes pares y profesionales de apoyo, es decir, egresados de la misma.

Así mismo, otro a nivel nacional lo menciona Hernández y Hurtado (2018), el programa reestructurado de la universidad de Santiago de Cali. Busca ayudar a la formación integral del estudiante y a la mejora de la calidad de la educación, desarrollándose en tres fases: (i) diagnóstica, (ii) intervención, y, (iii) seguimiento y evaluación. En el ámbito académico el programa apoya el proceso de enseñanza y aprendizaje dado por la monitoria entre iguales, brindando el acompañamiento en las materias más críticas debido a su alto índice de deserción, adicional a esto, dan talleres sobre hábitos de estudio y cursos generales comunes y obligatorios en pensamiento lógico matemático, de escritura y comprensión textual.

Por último, a nivel local se centra el estudio en la dimensión cognitiva del programa de apoyo SEA, el cual pertenece a la Universidad Industrial de Santander (UIS). Mediante el acuerdo

No. 018 del 2014 se crea el Sistema de Apoyo a la Excelencia Académica (SEA), liderado por la Vicerrectoría Académica, el cual tiene la intención de acompañar a los estudiantes beneficiarios en su paso por la universidad. La misión de formar estudiantes de alta calidad, éticos, culturales y profesionales hace que se cree dicho programa contando con espacio a estudiantes de nuevo ingreso, módulos a grupos especiales de diferentes niveles, donde el protagonista es el estudiante, ayudando al fortalecimiento de las habilidades académicas en las materias de ciclo básico de las carreras de pregrado. A su vez, para uso propio del presente trabajo se nombrarán las siguientes subdivisiones del programa: Primero, Modelo de Intervención Integral para disminuir la deserción y la retención académica (MIDAS) se inició en el año 2006 haciendo un buen acompañamiento en las asignaturas de ciclo básico (cálculos, algebra lineal, química, físicas). Seguido, el programa de Atención, seguimiento y Acompañamiento Estudiantil en la asignatura de cálculo I en la UIS (ASAE) nace en el año 2012 como una actividad extraescolar para reforzar los programas pertenecientes a la universidad. Este, con la finalidad de apoyar a los estudiantes en las materias que tengan que ver con matemáticas, apoyados en estudiantes tutores de semestre superiores y con buen desempeño académico, que acompañen en el transcurso del semestre para superar las dificultades que estos puedan presentar. Por último, el programa de Asesoría para el Mejoramiento del Rendimiento Académico (PAMRA) el cual se consolidó 1994 para evitar que el estudiante esté en condición de PFU (Por fuera de la universidad) y brindar ayuda para un estudio excelente, donde se evidencie un buen nivel de rendimiento académico en los estudiantes que se encuentran con un nivel bajo. Los programas que aquí se presentan, son una buena guía para el presente trabajo, ya que trabajan con el propósito de garantizar la permanencia y evitar la deserción estudiantil, además de fortalecer el rendimiento académico de los estudiantes en sus primeras etapas de estudio, potenciando solamente el conocimiento de los temas.

En educación matemática, se han realizado y mencionado variados estudios que destacan la importancia del modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) al momento de mejorar el aprendizaje de los estudiantes, enfatizando la creciente necesidad de que los profesores posean un mejor conocimiento centrado y apropiado de los contenidos matemáticos que se enseñan, los procesos de aprendizaje y los obstáculos que se presentan por parte de los estudiantes al momento de aprender matemáticas.

En el marco de investigación sobre el modelo MTSK (por sus siglas en inglés), es clave mencionar el estudio realizado por Montes et al. (2019). El cuál, abordó aspectos importantes del modelo MTSK aplicándolo en el ámbito educativo. Montes et al. muestra una visión detallada de las características y beneficios del modelo, así como ejemplos de dos implementaciones exitosas en el entorno educativo, específicamente en la etapa infantil. Sus hallazgos destacaron la efectividad del modelo MTSK para mejorar la motivación y el rendimiento académico de los estudiantes, sin embargo, no presenta un enfoque versátil en el diseño e implementación de enseñanza en un solo componente que permita la comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes.

Este estudio previo sentó las bases para la exploración y el análisis más profundo del modelo MTSK en el presente trabajo de investigación. Su enfoque detallado y sus ejemplos prácticos brindaron un punto de partida sólido para comprender las implicaciones y desafíos de implementar este modelo en el contexto educativo. Asimismo, sirvió como punto de referencia para identificar posibles mejoras y áreas de desarrollo en la aplicación del MTSK en la enseñanza de las matemáticas.

Siguiendo por la línea de investigación sobre el modelo MTSK y abriéndolo al ámbito de formación inicial de profesores de matemáticas de primaria, Escudero y Flores (2014) realizaron

un estudio sobre el uso del modelo MTSK, pero su investigación se centró en observar cómo la implementación del modelo MTSK en la formación docente puede contribuir al desarrollo de las habilidades pedagógicas y a mejorar la enseñanza de las matemáticas en el nivel primario. Asimismo, destacan la importancia de proporcionar a los futuros profesores una base sólida en el modelo MTSK, entendiendo que esto de alguna forma permite abordar efectivamente los desafíos específicos que surgen al enseñar matemáticas en la educación primaria. Sin embargo, el estudio de Escudero y Flores también evidencia una limitación en cuanto al análisis detallado del diseño e implementación de las actividades creadas para abordar por los profesores. Aunque resaltan la relevancia y pertinencia del modelo MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria, no profundizan en la estructura y ejecución específica de las actividades propuestas.

No obstante, la investigación de Escudero y Flores pone de manifiesto la importancia de integrar el modelo MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. Destacan que brindar a los futuros docentes una comprensión sólida de este modelo contribuye a fortalecer sus habilidades pedagógicas y, en última instancia, mejora la enseñanza de las matemáticas en el nivel primario.

Asimismo, el estudio realizado por Montes, Climent y Contreras (2022) muestra la caracterización del conocimiento especializado que se puede desarrollar en un aula de formación inicial de maestros mediante el uso de una tarea basada en el análisis de vídeos de aula que abordaba la construcción de una definición de polígono y haciendo uso del modelo MTSK se logra identificar diversos aspectos de conocimiento que fueron activados por los participantes. Estos aspectos abarcaron el entendimiento de la definición de polígono y sus componentes, la práctica matemática de realizar definiciones, los recursos y ejemplos empleados en la definición de polígono, los desafíos asociados a este tema y su inclusión en el plan de estudios de la educación

primaria. Estos resultados se encuentran en concordancia con los hallazgos previos documentados en la investigación existente sobre este tema.

## **2.2. Marco conceptual**

En la elaboración del marco conceptual, se ha tomado en consideración una serie de atributos fundamentales que han sido contemplados, abordados y aplicados en cada sesión implementada, estableciendo una conexión con el tema de investigación en términos de comprensión y dominio de los conceptos geométricos. Además, estos atributos constituyen un punto de referencia para el análisis de las intervenciones, por ello, se considera a Rojas (2017) como fuente de información relevante en este apartado. A continuación, se presentan los elementos claves que conforman el marco conceptual de la presente investigación:

### **2.2.1. Sólidos**

Es un objeto tridimensional que ocupa un espacio definido y tiene una forma y estructura fija. A diferencia de los objetos bidimensionales, como los objetos en un plano o una superficie, los sólidos tienen volumen y están compuestos por diversas partes, como caras, aristas y vértices. Estos se dividen principalmente en poliedros y cuerpos redondos.

*Poliedros.* Es un objeto tridimensional compuesto por un conjunto limitado de formas poligonales, conocidas como caras. Además, los lados y puntos de intersección de las caras con las aristas y vértices, respectivamente. Donde cada arista de una cara coincide con la arista de la otra cara seguida (Rojas, 2017). Asimismo, los poliedros se nombran según el número de caras que tenga, por ejemplo: tetraedro (4 caras), pentaedro (5 caras), hexaedro (6 caras), etc. A su vez, estos se clasifican en cóncavos o convexos y según la regularidad que presenten. Los poliedros cóncavos se caracterizan por tener la particularidad de que cualquier segmento cuyos extremos sean dos puntos del poliedro no se encuentra completamente en su interior, los poliedros convexos

se caracterizan por la propiedad de que cualquier segmento, cuyos extremos sean dos puntos pertenecientes al poliedro, se encuentran por completo dentro del poliedro o en su interior. Asimismo, los poliedros regulares tienen todas sus caras congruentes (iguales) y todos sus ángulos también son congruentes.

Existen solo cinco (5) poliedros regulares convexos o también llamados sólidos platónicos: tetraedro regular, cubo, octaedro regular, dodecaedro y el icosaedro regular. Sujeto a los poliedros regulares convexos, están los sólidos arquimedianos, trece (13) sólidos que presentan caras regulares (pero no todas son iguales como en los sólidos platónicos). Ahora, haciendo una distinción entre los poliedros regulares cóncavos, se encuentran los poliedros regulares estrellados, estos se obtienen a través del pentagrama de los pitagóricos de los cuales existen (4): pequeño dodecaedro estrellado, gran dodecaedro estrellado, gran icosaedro y el dodecaedro. Existen otros tipos de poliedros, los poliedros irregulares, los cuales se clasifican en prismas y pirámides.

Los prismas se distinguen por poseer dos bases planas y paralelas, las cuales son polígonos idénticos. Estas bases se unen mediante caras laterales que adoptan la forma de paralelogramos o rectángulos que se encuentran perpendicularmente a las bases y comparten la misma altura. Estos se pueden presentar rectos u oblicuos. Seguidamente, una pirámide es un sólido geométrico que se distingue por contar con una base poligonal plana y caras triangulares que se encuentran en un único punto central conocido como vértice o cúspide. Se pueden encontrar pirámides regulares troncadas que es aquella sección de una pirámide que se encuentra entre la base y un plano paralelo a ella y que corta todas las caras laterales, a esta se le conocen también como tronco de pirámide.

*Cuerpo redondo.* Utilizado para describir un tipo de objeto tridimensional que tiene una forma o superficie curva y suave, sin aristas o esquinas, generalmente se aplica a objetos como cilindros, conos y esferas. Primeramente, según Rojas (2017), “Un cilindro circular recto de

revolución es un sólido engendrado por la revolución completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados, denominado eje de revolución o eje de giro” (p.55).

Paralelo al eje de giro se encuentra la generatriz quién es la que recorre la superficie curva del cilindro, este también cuenta con dos bases circulares que son adyacentes al eje de giro. Segundo, Rojas (2017) también menciona que “Un cono circular recto de revolución es un sólido engendrado por la revolución completa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, denominado eje de revolución o eje de giro” (p.56). Para este cuerpo redondo queda por generatriz la hipotenusa y el otro cateto, viene a ser el radio del cono, si él, se corta por un plano paralelo a la base y se elimina esa porción. El resultado es un objeto que tiene dos bases circulares paralelas y una superficie curva que las conecta, quedando el tronco de un cono recto.

### **2.2.2. Proyección sobre un plano**

Es el procedimiento mediante el cual se representa un objeto en tres dimensiones en un plano de dos dimensiones o en un espacio de menor dimensión. Su propósito es permitir una visualización y representación más práctica y comprensible de objetos y figuras. Rojas (2017) menciona cuatro categorías de proyecciones, pero en el contexto de esta investigación, se enfatizará: la definición de proyección ortogonal con la cual se puede hablar de vistas múltiples y la proyección axonométrica, en particular la proyección isométrica.

Para poder hablar de lo anterior, es necesario establecer primero que existe *un plano de proyección*, el cual es imaginario y es aquel que se sitúa entre el objeto y quién lo observa. Sobre este plano, se proyecta el objeto en 3D en una representación bidimensional, dado que se dibujan las *líneas de proyección* desde los puntos del objeto hacia el plano, siendo estas líneas perpendiculares al plano de proyección.

*Proyección ortogonal.* Rojas (2017) define la proyección ortogonal de la siguiente manera "representa la forma exacta de un objeto por medio de dos o más vistas sobre planos que forman ángulos rectos entre sí, obtenidas por la intersección de las perpendiculares trazadas desde el objeto sobre los planos" (p. 75). Es decir, Las vistas en la proyección son planas y en dos dimensiones. El objeto se encuentra paralelo al plano de proyección, lo que implica que no hay un punto de fuga o centro de proyección. Esto se debe a que todas las líneas de fuga son líneas infinitas que se mantienen paralelas entre sí.

Existen tres planos de proyección que forman un ángulo de  $90^\circ$  según lo que menciona Rojas (2017) en la definición: i) plano de proyección frontal; ii) plano de proyección horizontal; y, iii) plano de proyección de perfil. En el primero, el objeto tridimensional se proyecta de manera tal, que muestra la vista frontal directamente a quién lo observa. El segundo, se usa para obtener la vista superior de un objeto en la representación gráfica. Y, el tercero, muestra desde la parte derecha o izquierda del objeto.

Las proyecciones de las vistas respecto a la principal, va a depender de los métodos de representación ortográfica que se utilicen. Aquí se plantea dos opciones de los cuatro métodos de proyección que Rojas (2017) menciona: i) Proyecciones de tercer ángulo; ii) Proyecciones de primer ángulo. El primero, también es llamado método del tercer cuadrante es una técnica de representación ortogonal en la cual el objeto que se está representando aparece ubicado detrás del plano en el cual se está realizando la proyección y este método el que se usará para efectos del trabajo. El segundo, también llamado método del primer cuadrante, es una técnica de representación ortogonal en la cual el objeto a representar se encuentra ubicado entre el observador y el plano de proyección.

*Proyección axonométrica.* Las representaciones tienen un carácter ilustrativo, ya que generalmente no se suelen incluir medidas o dimensiones precisas del objeto y ayudan a interpretar el objeto mediante las vistas ortogonales y se definen como vistas en perspectiva. Podemos identificar tres tipos de proyecciones según el ángulo con el cual inclinamos el objeto: La isométrica, dimétrica y oblicua. Para efectos del trabajo se da una definición de la Proyección isométrica.

*Proyección isométrica.* Rojas (2017) define la proyección isométrica como “un tipo de proyección axonométrica en la que las escalas de cada uno de los ejes son iguales. Por tal razón, las proyecciones de los ejes sobre el plano de proyección forman ángulos congruentes de  $120^{\circ}$ ” (p.86). Esto implica que las líneas proyectadas en la proyección isométrica mantienen una relación angular constante entre sí, lo que proporciona una apariencia visual equilibrada y simétrica, es decir, que las dimensiones del objeto en los tres ejes (largo, ancho y alto) se representan de manera proporcional en el plano de proyección.

A partir de este momento, para llevar a cabo el estudio, se presenta a continuación los referentes teóricos partiendo de: i) el modelo de conocimiento especializado para el profesor de Matemáticas como referente teórico que permite reflexionar sobre las piezas que constituyen el conocimiento existente y dirige el contenido de la inmersión en el aula, basados en Shulman (1986) y Ball, Thames y Phelps (2008); para unificarlos con ii) los lineamientos curriculares para la formación del profesor de básica primaria en Matemáticas, los cuales constituyen referentes para comprender y diseñar las situaciones tomando como base lo que expone el (MEN, 2006); y, iii) la articulación del componente métrico- espacial con el modelo MTSK, relaciona el contenido matemático de la formación de los estudiantes del programa con el modelo MTSK guiando el proceso de enseñanza y aprendizaje en matemáticas en estos niveles.

### 2.3. Marco teórico

A continuación, se presenta el modelo que permite analizar a profundidad el conocimiento matemático que debe poseer el profesor de Matemáticas, permitiendo analizar y describir la práctica hecha en esta investigación.

#### 2.3.1. Un modelo de conocimiento especializado para el profesor de Matemáticas

En educación matemática existe un constante interés por el conocimiento profesional del profesor de matemáticas en formación y en ejercicio, por lo cual, hay estudios que fijan la atención en la relación entre el conocimiento matemático y el didáctico. Principalmente, desde los estudios de Shulman (1986) estas relaciones refieren el conjunto de conocimientos que debe poseer un profesor, enfatizando que no solo debe poseer el conocimiento de la disciplina, sino que además debe poseer conocimiento sobre lo pedagógico en general, lo curricular, los alumnos, los contextos educativos, los fines y valores educativos y también, sobre el conocimiento didáctico del contenido (Aguilar et al, 2013).

Posteriormente, las investigaciones de Ball et al. (2008) introdujeron el dominio del conocimiento disciplinar y el dominio del conocimiento didáctico del contenido, como una especificidad de un conocimiento otorgado en conjunto con el conocimiento de la enseñanza de un contenido matemático. Lo anterior, dio origen al modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) en el cual centran el conocimiento especializado del contenido. Este distingue al propio conocimiento del profesor que enseña matemáticas, versus, al conocimiento común del contenido que es el que puede tener cualquier persona que haga uso de las matemáticas o que sea instruida en ellas.

En este modelo se puede apreciar una distinción en dos de los dominios ya mencionados, derivados de Shulman (1986), el conocimiento de la disciplina (SMK, de sus siglas en inglés) y el

conocimiento didáctico del contenido (PCK, de sus siglas en inglés) en los cuales se definen 6 subdominios; el primer dominio (SMK) referente al conocimiento del contenido y a toda su estructura, conformado por: el Conocimiento Común del Contenido (CCK, de sus siglas en inglés), que corresponde al que cualquier persona instruida puede conocer; el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK, de sus siglas en inglés), que es propio del profesor de matemáticas; el Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK, de sus siglas en inglés) que refiere el conocimiento de la interrelación de los temas matemáticos a lo largo del currículo. Así mismo, el segundo dominio (PCK, de sus siglas en inglés) relacionado al conocimiento del contenido para la enseñanza, el cual está constituido por: el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS, de sus siglas en inglés) que implica el conocer el contenido desde la perspectiva del estudiante, el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT, de sus siglas en inglés), que permite conocer qué representaciones o métodos son más adecuados para enseñar, el Conocimiento del Currículo de las Matemáticas Escolares (KCC, de sus siglas en inglés) que implica el conocimiento de los contenidos que corresponden a cada nivel (Muñoz et al, 2015)

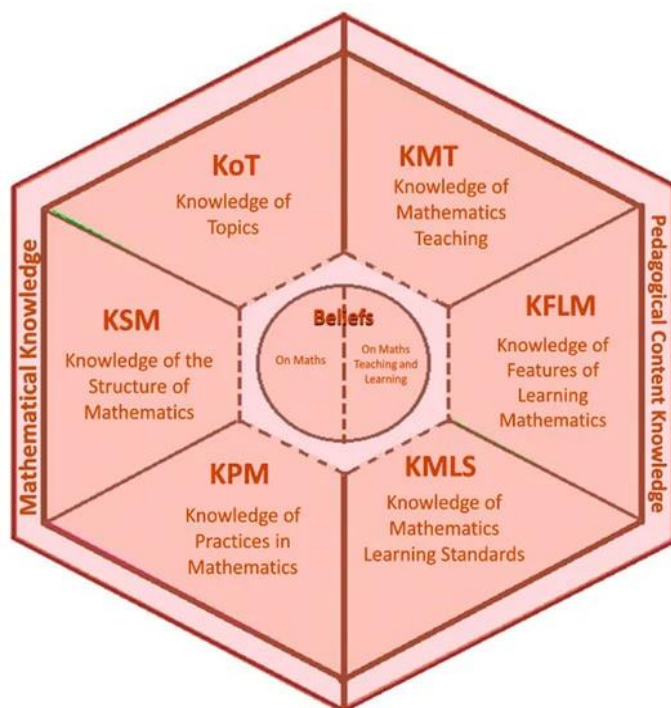
El análisis profundo de las asignaciones de evidencias a subdominios ayudó a la detección de dificultades con respecto a la delimitación entre distintos subdominios como afirman diversas investigaciones recientes (Escudero, Flores y Carrillo, 2012; Flores, Escudero y Carrillo, 2013) como la delimitación con el KCS o el CCK (Flores, et al., 2013), hasta con HCK (Jakobsen et al, 2013).

### 2.3.2. El Modelo MTSK (Mathematics Teachers' Specialized Knowledge)

Por lo anterior, se propone el modelo MTSK en el cual comprende que la especialización debe efectuarse a todos los subdominios, partiendo de lo que limitaba y condicionaba el modelo MKT, la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas dado por su quehacer y la especificidad a la enseñanza de las matemáticas, necesario para analizar el conocimiento de una persona que enseñe matemáticas. Por lo cual, tiene una propuesta teórica tal que el conocimiento

*Figura 1. Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*

es núcleo del conocimiento del profesor de matemáticas y también es una herramienta metodológica que analiza distintas prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías (Flores, et al, 2013), manteniendo lo establecido por Shulman (1986) y la partición mejorada de Ball et al (2008) MK y PCK dotando de tres subdominios cada dominio (MK y PCK).



*Nota:* Dominios y subdominios del modelo MTSK. Tomado de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) (Carrillo et al., 2017).

A continuación; se describen y se definen cada uno de los subdominios de los conocimientos del modelo de forma breve. Inicialmente, el Conocimiento Matemático (MK, por sus siglas en inglés) asumido como el saber qué y cómo conoce o debe conocer matemáticas un profesor de matemáticas, está compuesto de tres subdominios que se explican a continuación:

*Knowledge of Topic (KoT)*. Contempla el conocimiento de los contenidos matemáticos abarcando aquellos que el alumnado debe aprender, aspectos fenomenológicos, definiciones, ejemplos, etc. Tales que caractericen aspectos del tema abordado, además del contenido disciplinar de las matemáticas que figura en libros matemáticos (Escudero-Ávila et al, 2015).

*Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM)*. Es la relación entre los temas o conceptos más avanzados con los más elementales. Se diferencian las siguientes conexiones: conexiones entre contenidos matemáticos (interconceptuales) de la cual se pueden apreciar las relacionadas con contenidos transversales y las auxiliares; por otro lado, las conexiones temporales pueden dar lugar a conexiones de complejización y de simplificación (Escudero-Ávila et al, 2015).

*Knowledge of practices in Mathematics (KPM)*. Reúne los conocimientos que ayudan a identificar, crear o producir matemáticas ligadas a un tema específico o a la matemática en general, y las practicas propias del trabajo matemático; definir, argumentar y demostrar (Montes et al, 2014).

Por otra parte, se encuentra el dominio del Conocimiento didáctico del contenido (PCK, por sus siglas en inglés) el cual se caracteriza como un conocimiento esencial del profesor, propio de la de enseñanza haciendo que el contenido matemático condicione la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Este dominio está compuesto por tres subdominios que se enuncian a continuación:

*Knowledge of Mathematics Teaching (KMT)*. Son los conocimientos que posee el profesor sobre teorías de enseñanza de las matemáticas, de las tareas, analogías, actividades y ejemplos que usa, además de conocer la potencialidad de los recursos ya sean físicos o virtuales al momento de abordar los contenidos (Escudero-Ávila et al, 2015).

*Knowledge of Features of Learning Mathematics (KFLM)*. Son los conocimientos intrínsecamente dependientes de los contenidos matemáticos que caracterizan el proceso de abstracción de los distintos contenidos por parte de los estudiantes, también el conocimiento sobre teorías de aprendizaje matemático y los aspectos emocionales del aprendizaje (Aguilar et al, 2013).

*Knowledge of Mathematics Learning Standards (KMLS)*. Se define como un estándar de aprendizaje, lo que indica las habilidades del estudiante en el momento específico de la escuela para construir y comprender las matemáticas (Flores et al, 2013). Por lo tanto, el docente debe tener conocimiento de los contenidos correspondientes a cada nivel escolar, de las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático. Es decir, un pleno conocimiento del currículo institucional, vigente en el país en que está enseñando.

#### **2.4. Lineamientos curriculares de educación básica primaria en Matemáticas.**

En Colombia el diseño e implementación curricular que guía la educación se basa en los decretos y lineamientos dados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), dónde se encuentran principalmente dos documentos que regulan el diseño curricular en las instituciones educativas. En primer lugar, están los lineamientos curriculares (MEN, 1998) y, en segundo lugar, los estándares básicos de competencia (MEN, 2006), siendo el primero un conjunto de orientaciones y directrices que fundamentan los objetivos, competencias, contenidos, metodologías y criterios de evaluación (Gómez, 2010) y el segundo, un conjunto de referencias de

calidad que fundamentan lo que los estudiantes deben saber y ser capaces de hacer al finalizar cada nivel educativo (Gómez, 2010).

Para el área de Matemáticas se habla del pensamiento Matemático, el cual, permite a la persona desarrollar habilidades y destrezas para comprender situaciones del entorno que coadyuven a fomentar la resolución de problemas, permitiendo encontrar rápidamente una solución eficaz para cualquier situación que se le pueda presentar. Además, es necesario que el estudiante desarrolle o potencialice dicho pensamiento matemático, dominando las habilidades y destrezas para comprender en un lenguaje matemático.

Por su parte, el MEN (2006) afirma que “Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problemas significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos” (p. 49).

A su vez, este documento menciona que el pensamiento a través del tiempo se fue abriendo a tres componentes principales que conforman el pensamiento matemático, las cuales se dividen en cinco categorías diferentes y se relacionan con conceptos específicos en áreas como la aritmética, el álgebra, la geometría, la estadística y la probabilidad. Por lo anterior, los Lineamientos Curriculares prefirieron hablar de los cinco tipos de pensamiento matemático que existen, categorizándolos de la siguiente manera: i) *Componente numérico -variacional* (pensamiento numérico y pensamiento variacional); ii) *Componente aleatorio* (pensamiento aleatorio); y, iii) *Componente métrico – espacial* (pensamiento métrico y pensamiento espacial)

Para efectos del presente trabajo se destacará el componente métrico-espacial debido a que se desarrolla el pensamiento espacial y el pensamiento métrico, para la educación en Colombia, tomándolo especialmente para la básica primaria que comprende del grado primero al quinto.

Frente al pensamiento Espacial, el Ministerio de Educación Nacional (2006) menciona que: “es el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales” (p. 61). Es decir, se refiere a la habilidad para visualizar y manipular objetos en el espacio mentalmente, permitiendo a las personas comprender y manipular objetos tridimensionales, entender patrones, relaciones espaciales, y orientarse en el entorno físico. Lo anterior implica que es esencial en muchas disciplinas como la Matemática, Física, Ingeniería, Arquitectura, Geografía, Biología, entre otras, y es una habilidad fundamental para el aprendizaje y resolución de problemas en estas áreas.

Consecuentemente, los sistemas geométricos son conjuntos de axiomas y teoremas que se utilizan para estudiar las propiedades y relaciones entre los objetos geométricos. Estos sistemas pueden ser tanto planos (bidimensionales) como espaciales (tridimensionales) y es esencial para describir y entender el mundo físico que nos rodea.

Por otra parte, el desarrollo del pensamiento métrico se vio influenciado por el progreso en la definición y estandarización de las unidades de medida de longitud. Inicialmente, estas unidades eran muy variadas, ya que se basaban en partes del cuerpo humano y variaban según la región y la cultura. Con el tiempo, estas unidades se estandarizaron para su uso en el comercio y la industria, y se crearon distintos sistemas de medidas y unidades métricas en diversas regiones y países (el Sistema Internacional de Unidades (SI), el sistema imperial británico, el sistema de unidades estadounidense, el sistema de unidades del CGS (centímetro-gramo-segundo) y el sistema técnico de unidades). Por lo anterior, el documento del ministerio de educación nacional (2006) reconoce que el pensamiento métrico “hace referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre

las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones” (p. 63).

## 2.5. Articulación del componente métrico- espacial con el modelo MTSK

A continuación, se expondrá el uso del modelo MTSK como marco teórico que junto a los lineamientos curriculares se articulan para que se permita justificar y comprender la estructura de las actividades que más adelante se aplican y se desarrollan en la práctica de la presente investigación con los futuros docentes de formación inicial.

El recorrido conceptual y procedimental del componente métrico-espacial del semestre 2023-1, está dividido en 3 ejes principales los cuales son: i) eje problematizador 1: geometría tridimensional; ii) eje problematizador 2: geometría bidimensional; y, iii) Eje problematizador 3: medición, sobre los cuales se desarrolla el semestre y, sin embargo, para efectos del presente trabajo, las actividades solo se realizarán para el: i) eje problematizador 1: geometría tridimensional , siendo este, una guía para la investigación, este está basado en los estándares básicos de competencia del MEN (Tabla 1). En particular, esta propuesta es definida desde el reconocimiento y estudio de definiciones y propiedades de la tridimensionalidad (3D) para llegar al estudio de lo bidimensional (2D).

**Tabla 1.** Eje problematizador 1: Geometría Tridimensional

KoT	KSM	KPM
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Clasificación de cuerpos geométricos</li> <li>-Poliedros: Prismas, pirámides, platónicos y arquimedianos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realización de proyecciones de objetos tridimensionales en un plano bidimensional utilizando las técnicas de</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Creación y manipulación de modelos de figuras tridimensionales utilizando herramientas como GeoGebra</li> </ul>

---

-Cuerpos redondos: perspectiva-proyección en	•Uso de la validación en la
Cilindros, esferas y conos	clasificación de cóncavo -
-Oblicuos y rectos	•Identificación y convexo
-Cóncavos, convexos	representación de figuras, •Interpretación y uso del lenguaje
•Propiedades de objetos en situaciones estáticas y	formal y símbolos en las
tridimensionales (diagonal).	definiciones y propiedades de los
•Registros de	•Realización de cuerpos geométricos.
representación.	transformaciones y analiza
	cómo cambian las
	propiedades geométricas
	de los objetos en el espacio
	proyectivo.
	•Construcción y
	descomposición de figuras
	2D y 3D
	•Justificación de relaciones
	de dependencia del área y
	volumen, respecto a las
	dimensiones de figuras y
	sólidos

---

Por lo anterior, el futuro profesor de básica primaria debe involucrar la clasificación de cuerpos geométricos (KoT), los cuales están divididos entre i) poliedros con sus distintas

clasificaciones según sus propiedades (KoT) como prismas, pirámides, estrellados, platónicos y arquimedianos; ii) cuerpos redondos clasificados como cilindros, esferas y conos; iii) cuerpos geométricos rectos u oblicuos, para los cuales, necesariamente debe identificar si está inclinada o si solo está en distinta posición, es decir, debe conocer las relaciones espaciales (KSM) y por último, iv) cuerpos geométricos cóncavos o convexos. De lo anterior, se espera que el estudiante valide por sí mismo si un cuerpo geométrico es cóncavo o convexo e interprete los cuerpos que observa y tiene su contexto, además, que pueda validar entre los elementos notables que tiene cada figura tridimensional (KPM) teniendo conocimiento de relaciones internas como la fórmula de Euler (KoT).

Como se empieza desde la parte en 3D de la geometría, es necesario que construya y descomponga figuras de 3D y 2D (KSM) y a partir de allí debe estar en la capacidad de conocer las relaciones externas con conceptos que más adelante se trabajan como lo es el área y por consiguiente el volumen (KSM).

### **Capítulo 3. Aspectos metodológicos**

El presente trabajo es de carácter cualitativo el cual se estructura sobre un grupo social específico (Hernández Sampieri et al. 2014). Esta propuesta se constituye en el marco de investigación fenomenológica debido a que su objetivo es “explorar, describir y comprender las experiencias de las personas con respecto a un fenómeno y descubrir los elementos en común de tales vivencias” (Ibid, pág. 493), para este caso el fenómeno a estudiar estará centrado en el apoyo extraescolar de los estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la UIS. El grupo de participantes está conformado por treinta y cinco (35) estudiantes, cuyas edades variarán entre los 17 y los 23 años. Es importante destacar que en el grupo hay una mayor proporción de mujeres que de hombres. Además, algunos de los participantes han tenido experiencia previa en otras disciplinas académicas, porque han pertenecido a otros programas académicos como Matemáticas e Ingeniería Eléctrica, los cuales, pertenecen a la misma universidad.

#### **3.1. Diseño Metodológico**

Para alcanzar los objetivos, se aproxima al estudio de casos, así como menciona Stake (2005): “[...] el estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p. 11). En particular, este estudio enfatizará en el estudio de caso instrumental, dónde Gómez (2012) afirma que este:

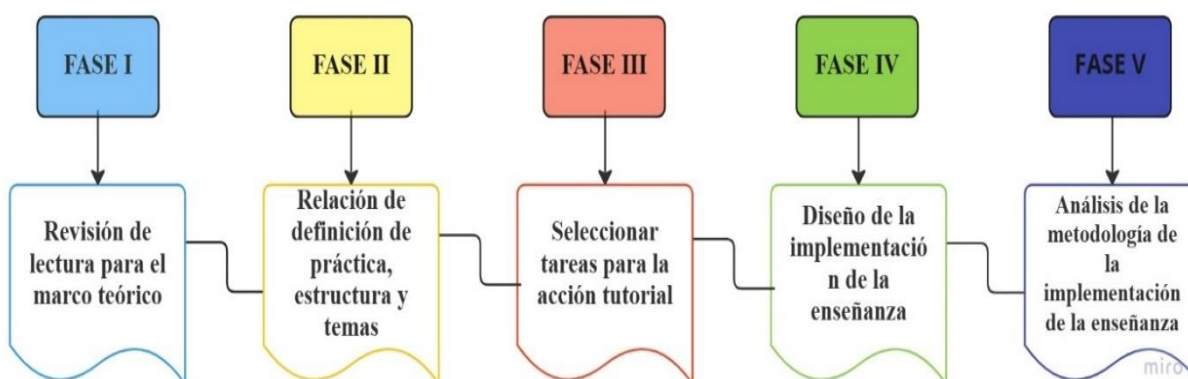
Pretende generalizar a partir de un conjunto de situaciones específicas. El caso se examina para profundizar en un tema o afinar una teoría, de tal modo que el caso juega un papel secundario, de apoyo, para llegar a la formulación de afirmaciones sobre el objeto de estudio (p. 6).

Para el caso particular de este estudio, el caso a estudiar será el curso de pensamiento matemático I, en el que participan la profesora que diseña el curso, los estudiantes de primer ingreso a la licenciatura en educación básica de la UIS, los estudiantes repitentes de esta disciplina y la investigadora.

### 3.2. Fases de la investigación

El estudio se desarrolla en cinco fases de investigación, las cuales direccionarán el presente trabajo, las cuales se muestran en la figura I.

*Figura 2. Fases de la investigación*



*Nota:* esta figura muestra los pasos a seguir durante la presente investigación

A continuación, se dará una breve explicación de cada una de ellas.

#### 3.2.1. Fase I: Revisión de lecturas para el marco teórico (Modelo MTSK)

Esta fase emplea la revisión de la literatura para el marco teórico, en las cuales abordan los dominios y subdominios del modelo Carillo et al (2018). Lo que permitirá comprender los alcances del conocimiento del profesor, lo cual va más allá de conocer solo el contenido (MK), ya que, en el PCK está el conocimiento de la práctica de un profesional que enseña matemáticas, y lograr así

fundamentar la reflexión sobre la práctica, esto pueda influenciar en las otras fuentes como las disciplinares (Climent et al, 2014).

### 3.2.2. Fase II: Relación de definición de práctica, estructura y temas.

Se diseña un instrumento de registro de los subdominios del conocimiento matemático (MK) enfocando en el conocimiento de la práctica matemática, estructura y temas manteniendo la relación con el diseño del programa de la asignatura (Pensamiento Matemático I) y el modelo. Por lo anterior, se explica en la Tabla 2 de manera breve la caracterización de dicha relación.

**Tabla 2.** Caracterización del conocimiento en el componente métrico-espacial

Contenidos	KoT	KSM	KPM
Temas incorporados en el diseño del programa de la asignatura de forma detallada y relacionada con las partes del modelo. Es importante conocer el currículo para obtener de manera sistemática los contenidos a desarrollar, siendo	Profundización del contenido, donde la evidencia de conocimiento de este, entendiéndolo que el profesor debe conocer más allá de lo que los alumnos pueden alcanzar a aprender. Se incluyen de forma detallada los conceptos que permiten trabajar con los alumnos, brindando;	del Integra el conocimiento de las estructuras estableciendo conexiones epistemológicas entre los diferentes conceptos, presentando conexiones basadas en; el incremento de	el Características del trabajo matemático, ligadas a la matemática en general y a las prácticas, como, proceder en la resolución de problemas matemáticos, validación, demostración, uso del lenguaje formal, procesos, modelación y generar definiciones

---

este el objeto de aspectos	complejidad, en
enseñanza y epistemológicos,	la
aprendizaje. definiciones,	simplificación,
propiedades,	transversales y
representaciones,	auxiliares
significados y ejemplos.	

---

Cabe señalar que en la Tabla 2 se evidencia el conocimiento Matemático de lo que el profesor debería conocer. Según Ma (citada en Muñoz-Catalán et al, 2015) el conocimiento “no se limita al contenido que es objeto de enseñanza y aprendizaje, sino que es un conocimiento profundo del contenido escolar, ya que entendemos que un profesor puede y debe conocer el contenido más allá de lo que sus alumnos aprenden.” (p. 1808). Por lo anterior, es necesario el KoT y cada tema que allí se propone porque podemos relacionarlos con otros conceptos. Esa integración se brinda en el KSM, de tal forma que se mezclan los conceptos (contemplando la complejidad) para llegar a hacer y proceder en matemáticas como por ejemplo demostrar o validar en ellos, por lo que se reconoce también la importancia del KPM para abarcar incluso las prácticas lógicas que siguen un camino hacia la solución de problemas.

### **3.2.3. Fase III: Seleccionar tareas para la acción tutorial**

Una de las principales acciones durante este trabajo es sistematizar las tareas formativas del componente métrico-espacial, para llevar a cabo en el acompañamiento extracurricular a estudiantes, de tal forma que sean aptas para el aprendizaje de los beneficiados con la tutoría y estén bajo soporte del modelo que se pretende trabajar. Por lo anterior, se pretende seleccionar las actividades que nos propone Acevedo-Rincón con su proyecto. “Tareas para el desarrollo del

pensamiento matemático. Un estudio teórico desde el modelo del conocimiento especializado del futuro profesor de matemáticas en Educación Básica Primaria”, apoyado bajo la Vicerrectoría de Investigación y Extensión (VIE 2845, ejecutado en el año 2022), realizado bajo el marco teórico del modelo MTSK.

#### **3.2.4. Fase IV: Diseño de la implementación de la enseñanza.**

Posterior a la selección de las actividades, se busca diseñar una secuencia, para estudiantes de Licenciatura Educación Básica Primaria (UIS) durante el el periodo 2023-. Para lo cual se hará necesaria la participación en el cotidiano de las clases teóricas, de manera que el tutor tenga un reconocimiento de características propias de la enseñanza asociadas en los conceptos, actividades previamente identificadas en la fase anterior y recursos (físicos y virtuales) que pueden emplearse para fortalecer los temas asociados al componente espacial - métrico (Carrillo et al. 2014) y para el estudiante beneficiado características propias del aprendizaje de los temas necesarios para impartirlos a nivel escolar, siendo el objetivo principal de su preparación profesional, pero también de la estrategia de acompañamiento extraescolar.

#### **3.2.5. Fase V: Análisis de la metodología de la implementación de la enseñanza**

En esta fase será necesario determinar el alcance de los objetivos. Será necesario analizar la metodología de la implementación previamente diseñada e implementada y su permanencia en el tiempo, para ello, se tendrá en cuenta a todos los estudiantes que reciban el acompañamiento extraescolar, describiendo las evidencias que se recojan en la implementación y se tendrá en cuenta los dominios y subdominios del modelo MTSK los cuales ya fueron detallados en el apartado de marco teórico.

### 3.3. Técnicas e instrumentos de recolección de la información

Por otra parte, a lo largo del semestre 2023-1 con los estudiantes del curso de pensamiento matemático I de la licenciatura en Educación Básica Primaria de la UIS, se empleará el diseño de los temas que se trabajarán de la mano con la docente de dicho curso, los cuales fueron estructurados bajo el marco teórico MTSK, que nos brindará datos, gracias a la observación participante (Hernández Sampieri, 2014). A su vez, se recolectarán en planeaciones de clases, trabajos desarrollados en la tutoría, entre otros que emerjan durante el acompañamiento, las cuales continuarán refinándose conforme avance la construcción e implementación de dicha estrategia.

A continuación, en la Tabla 3 se presenta el cronograma de ejecución de la presente propuesta, contemplada para dos semestres académicos (2022-II y 2023-I).

**Tabla 3.** Caracterización de las tutorías

#	Fecha	Tema	Material usado	#Estudiantes
1	31-03-2023	Propiedades y clasificaciones de poliedros	<a href="https://app.nearpod.com/?pin=7B5D40357C8884D1A6D44DED91EAAE2B-1&amp;&amp;utm_source=link">https://app.nearpod.com/?pin=7B5D40357C8884D1A6D44DED91EAAE2B-1&amp;&amp;utm_source=link</a>	33
2	14-04-2023	Volúmenes y áreas superficiales	<a href="https://app.nearpod.com/?pin=005664790D0D96867187ED4C026D5B5F-1&amp;&amp;utm_source=link">https://app.nearpod.com/?pin=005664790D0D96867187ED4C026D5B5F-1&amp;&amp;utm_source=link</a>	28
3	05-05-2023	Perspectiva Isométrica y vistas	<a href="https://app.nearpod.com/?pin=EC07BAD26FAE0E97DF40B8C33CC9B0B-C-1&amp;&amp;utm_source=link">https://app.nearpod.com/?pin=EC07BAD26FAE0E97DF40B8C33CC9B0B-C-1&amp;&amp;utm_source=link</a>	33
4	12-05-2023	Volúmenes y áreas	Hoja de trabajo	28

---

superficiales de  
sólidos  
construidos  
con cubos

---

La anterior tabla presenta información relevante sobre las tutorías realizadas, en la cual se incluye la fecha en que se realizaron las clases, los temas abordados (Propiedades y clasificaciones de poliedros, volúmenes y áreas superficiales, perspectiva isométrica y vistas y Volúmenes y áreas superficiales de sólidos construidos con cubos) y los enlaces asociados a cada sesión. Estos contienen el material interactivo proporcionado por la profesora y la tutora a través de la plataforma de Nearpod, espacio creado para subir las actividades y donde se evidenciaba los ejercicios hechos por los alumnos. Además, se adjunta una hoja de trabajo que se incluye en los apéndices de este documento (A, B, C, D). Por último, se registra el número de estudiantes que asistieron a cada sesión propuesta para ser analizada posteriormente. Proporcionando una visión de los aspectos generales de las clases en el contexto de las tutorías.

## Capítulo 4. Análisis de resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en las primeras cuatro tutorías del semestre 2023-I, ocurridas entre los meses de abril y mayo de 2023. Para ello, se toma como referencia los indicadores de los subdominios del MTSK, del dominio de conocimiento disciplinar de las matemáticas (MK) con el fin de analizar cada actividad desarrollada con los tres primeros subdominios. Este análisis se encuentra organizado de acuerdo con las actividades propuestas para el primer y segundo corte del semestre 2023-I.

### 4.1. Tutorías del primer corte 2023-I

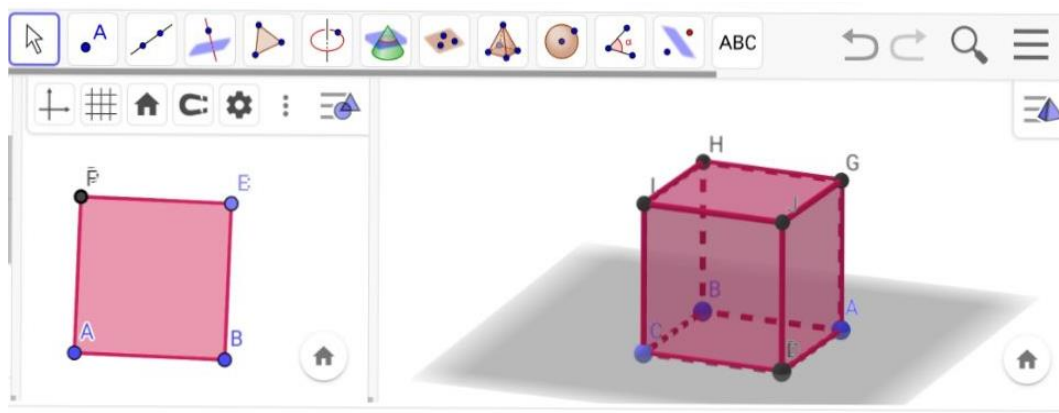
En este apartado, se mostrarán las dos primeras tutorías que se realizaron durante el primer corte del semestre 2023-1. La primera tutoría consta de cinco actividades, mientras que la segunda tutoría tiene cuatro actividades. Las actividades se indicarán al momento de analizarlas.

<b>Corte:</b>	<b>1</b>
<b>Tutoría No.</b>	<b>1</b>
<b>Tema:</b>	Propiedades y clasificaciones de poliedros
<b>Fecha:</b>	31 de marzo del 2023
<b>Objetivos de la sesión:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Reconocer propiedades de los poliedros y clasificar según caras, ángulos, vértices.</li> <li>- Identificar las propiedades de los sólidos arquimedianos</li> <li>- Construir poliedros a partir de su desarrollo plano.</li> <li>- Obtener el número de caras y de vértices de un poliedro, cuando conoce los otros elementos que aparecen en la fórmula de Euler.</li> </ul>
<b>KoT:</b>	Definiciones, propiedades y sus fundamentos de los poliedros y <i>Registros de representación</i>
<b>KPM:</b>	Prácticas particulares del quehacer matemático (modelar y validar), papel de los símbolos y uso del lenguaje formal.
<b>KSM:</b>	Conocimiento de las conexiones auxiliares: Sólidos arquimedianos.

**Actividad 1.** Utiliza GeoGebra y elabora mínimo 2 ejemplos de poliedros convexos (platónicos) que cumplan las tres condiciones dadas (Ver en el enlace: [https://app.nearpod.com/?pin=7B5D40357C8884D1A6D44DED91EAAE2B-1&&utm\\_source=link](https://app.nearpod.com/?pin=7B5D40357C8884D1A6D44DED91EAAE2B-1&&utm_source=link) ) Registra tu evidencia describiendo el número de caras, aristas y vértices.

Para la realización de esta actividad se les dio a los estudiantes las definiciones de poliedros platónicos o regulares con las propiedades que cumple cada uno de ellos. Todos los estudiantes pusieron el cubo (Figura 3), porque primero, es el poliedro convexo regular más conocido y segundo, porque es el más fácil de modelar en GeoGebra (KPM).

**Figura 3.** Ejemplo 1 de poliedro convexo



Fórmula de Euler:

$$C+V= A+2$$

$$-2+6+8=A+2-2$$

$$A=12$$

Caras: 6

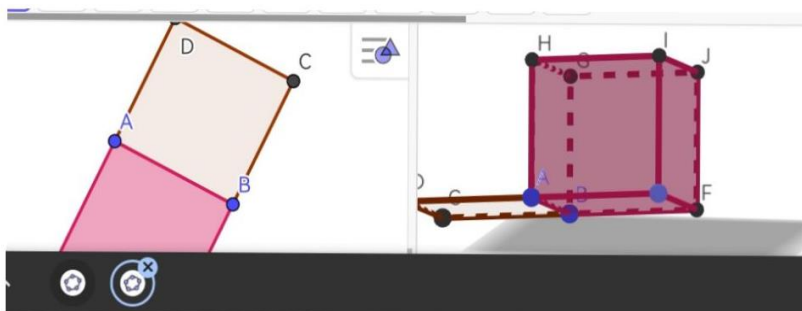
Vértices: 8

Aristas

Nota: Construcción en GeoGebra hecha por un estudiante durante el desarrollo de la tutoría en la actividad 1.

En la Figura 3, se puede observar claramente que el estudiante valida las propiedades del cubo y los elementos notables que posee este cuerpo tridimensional. Esto demuestra un reconocimiento de las *definiciones, propiedades y sus fundamentos (KoT)*. Teniendo por base el conocimiento de relaciones internas y *conexiones auxiliares* con la fórmula de Euler (*KSM*), con la cual verifican que se cumple con las características de tridimensionalidad de este cuerpo. Es decir, que el cubo que modelaron (*Modelación, KPM*) en GeoGebra (siendo esta la primera vez que ellos manipulan el software matemático) tiene los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DA}$ ,  $\overline{AG}$ ,  $\overline{GJ}$ ,  $\overline{JD}$ ,  $\overline{IJ}$ ,  $\overline{IH}$ ,  $\overline{HG}$ ,  $\overline{HB}$  y  $\overline{IC}$  que conforman el conjunto de las 12 aristas del cubo (*validación, KPM*), debido a que sí, el estudiante verifica que un cubo tenga 12 arista, está validando que cumpla con la propiedad de tener esa cantidad de aristas. En cambio, otros estudiantes no verificaron las propiedades de la figura que estaban modelando (Figura 4) donde se muestra que solo se contó los vértices y las caras, comprobando que el cubo cumple con estas características (*definiciones, propiedades y sus fundamentos, KoT*) pero no validan sus propiedades.

**Figura 4.** Ejemplo 2 de poliedro convexo



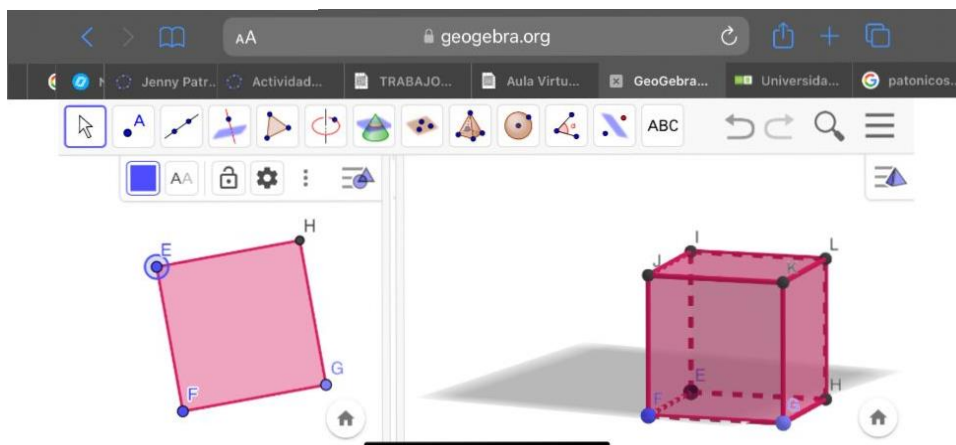
Vértices:8  
Caras:6

Nota: Construcción en GeoGebra hecha por un estudiante durante el desarrollo de la tutoría en la actividad 1.

Lo anterior, demuestra la necesidad de profundizar en la exigencia de esta práctica matemática con el fin de desarrollar habilidades y así poder brindar un apoyo adecuado a los estudiantes en sus procesos de aprendizaje.

En particular, un estudiante no realizó la actividad completa (Figura 5), pues, aunque modeló el cubo (*modelación, KPM*), no identificó (ni registró) los elementos notables de este, y, al indagar con el estudiante, él reconoce la *propiedad* de convexidad (KoT), sin embargo, no valida la convexidad, ni tampoco usa un lenguaje matemático propio, lo que refiere a dificultades en el *uso del lenguaje formal (KPM)*.

**Figura 5.** Ejemplo 3 de poliedro convexo

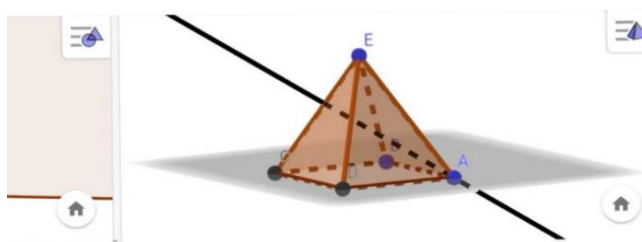


Nota: Construcción en GeoGebra hecha por un estudiante durante el desarrollo de la tutoría en la actividad 1.

En este orden de ideas, el estudiante durante la actividad enfrentó dificultad al momento de escribir cuando se le pedía la descripción del cuerpo geométrico con las condiciones de un poliedro platónico dadas previamente. Esto evidencia una limitada comprensión y *uso del lenguaje matemático (KPM)*, y probablemente le falta identificar las propiedades de un sólido platónico (*definiciones, propiedades y sus fundamentos, KoT*) quedando sin verificar lo que observaba en cuanto a los elementos notables del sólido (*validación, KPM*), debido a que solo logró modelarlo.

Asimismo, para el momento cuando tocó hacer el segundo ejemplo de la misma actividad, todos dibujaron el mismo poliedro, el tetraedro, debido a una pregunta hecha por un estudiante durante la realización de esta: “¿la pirámide con base triangular puede representarse como un tetraedro a la vez?”, es decir, tenía en cuenta los *Registros de representación* (KoT), y también, las propiedades de un poliedro convexo (*definiciones, propiedades y sus fundamentos*, KoT), en respuesta a esto, se le mencionó, que un tetraedro era una pirámide, pero también un sólido platónico por sus elementos notables (como sus caras congruentes). En este caso todos los triángulos son equiláteros y congruentes, por ello, cumplía perfectamente para ser sólido platónico, sin embargo, no todas las pirámides son tetraedros platónicos, por ejemplo, está la pirámide de base cuadrada, o la de base pentagonal (*definiciones, propiedades y sus fundamentos*, KoT), estas no cumplen para ser sólidos platónicos, debido a que no tiene todas las caras congruentes. La pregunta y la respuesta dada al estudiante, se convirtió en ejemplo de referencia para que la mayoría replicaran una pirámide (de base triangular), sin embargo, hubo casos en que estudiantes dibujaron la pirámide de base cuadrada (Figura 6)

**Figura 6.** Pirámide de base cuadrada



$$C+V=A+2$$

$$A=-2$$

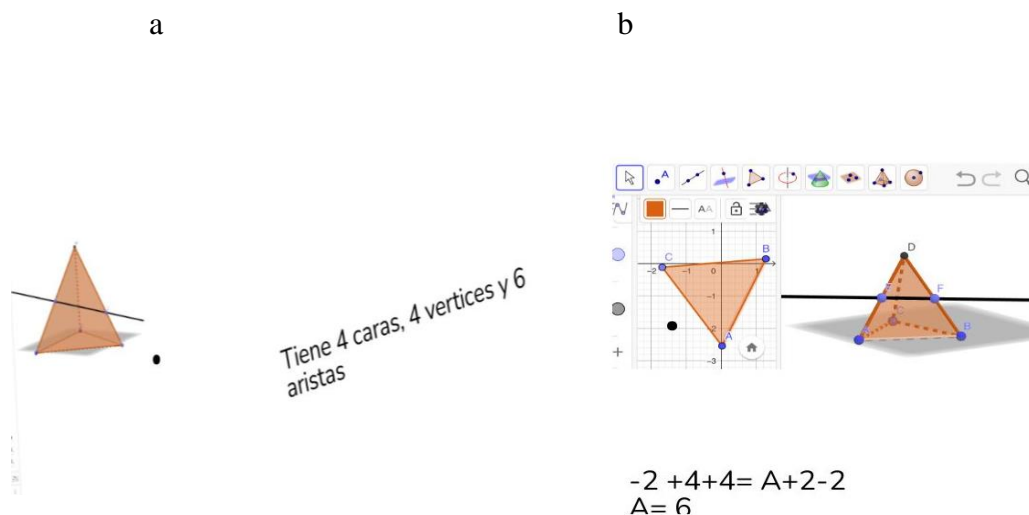
Nota: Construcción en GeoGebra hecha por un estudiante durante el desarrollo de la tutoría en la actividad 1.

Es importante destacar que el estudiante no tiene claro que las caras de un sólido platónico deben ser congruentes entre sí, esta es una propiedad fundamental de estos sólidos (*definiciones, propiedades y sus fundamentos*, KoT). Sin embargo, el estudiante logra modelar una pirámide (*modelar, KPM*) y, además, intenta validar la convexidad de la figura al tomar dos puntos cualesquiera y trazar un segmento que los una, siendo este interno a la figura.

Es relevante mencionar, que a todos los estudiantes les resultaba fácil modelar una pirámide debido a que GeoGebra ofrece una herramienta específica para dibujar figuras en 3D, pues ellos no contaban con mucha experiencia previa utilizando este software.

Por otra parte, se observa una notable diferencia entre la primera figura y la segunda. En la primera representación, como se mencionó anteriormente, en la figura del cubo los estudiantes no validaron la convexidad de la figura (probablemente porque era un sólido muy conocido) mientras que en la segunda sí se vieron en la necesidad de tratar de validarla (Figura 7), demostrando *formas de validación* (KPM).

**Figura 7.** Validación y demostración de convexidad de un tetraedro.

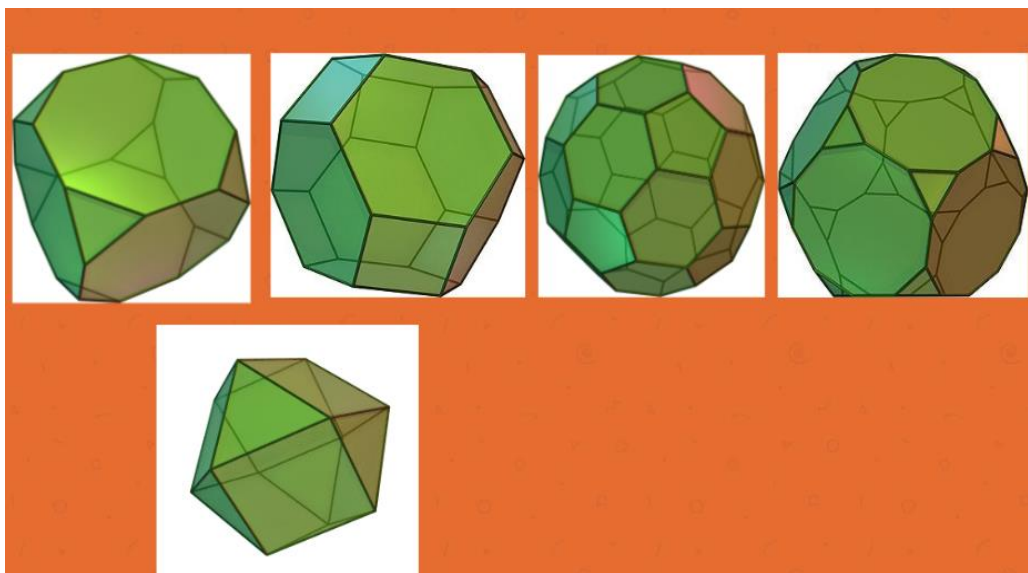


Nota: a) Ejemplo de sólido platónico descrito por sus elementos notables y b) Sólido platónico verificando el número de aristas con la fórmula de Euler.

Por otro lado, algunos estudiantes usaron la fórmula de Euler (KoT) como herramienta para *validar (KPM)*, cuántas aristas tenía el tetraedro dejando la formula enunciada y solo hallaron un elemento notable; sin embargo, debieron asegurarse de que se había modelado adecuadamente el poliedro, haciendo la suma de las caras, aristas y vértices quedando 2 cómo resultado. Por lo tanto, la mayoría no describe la figura según todos los elementos notables del sólido platónico (Figura 7.b), es decir, el número de: caras, aristas y vértices (Figura 7.a). También, se esperaba que mencionaran o describirán por qué al principio la consideraban una pirámide (KPM) que cumplía para ser platónico también, que era uno de los objetivos que tenía la actividad, identificar los poliedros según sus *propiedades (KoT)*, sin embargo, no hubo respuesta alguna por parte de los estudiantes.

**Actividad 2:** De los poliedros mostrados (Figura 8), escoge dos y descríbelos según el número de caras, número de aristas y número de vértices.

**Figura 8.** Validación y demostración de convexidad de un tetraedro.



Nota: Google (s.f.). Imágenes de sólidos arquimedianos [Capturas de pantalla].

Recuperado de <https://n9.cl/5i45y>

Durante la actividad, se presentaron los sólidos arquimedianos (Figura 8) como una categoría de figuras relacionadas con los poliedros convexos. Los sólidos platónicos cumplen con las siguientes propiedades: i) sus caras son polígonos regulares; ii) sus caras son congruentes; y, iii) sus ángulos poliedros son congruentes (Rojas, 2017). Sin embargo, Los sólidos arquimedianos son modificaciones de los platónicos, y aunque comparten algunas propiedades con ellos, no cumplen completamente con todas las características de los sólidos platónicos (*definiciones, propiedades y sus fundamentos*, KoT).

Los sólidos arquimedianos cumplen con la propiedad i), la cual, establece que sus caras son polígonos regulares. Esto significa que todos los lados y ángulos de las caras son iguales en cada sólido arquimedianos. En cuanto a la propiedad ii), algunos arquimedianos pueden tener caras congruentes entre sí, es decir, que todas las caras tengan el mismo tamaño y forma. Sin embargo, esto no se sucede en todos los casos. Por otro lado, la propiedad iii), que establece que los ángulos poliédricos (los ángulos entre las caras en los vértices) son congruentes, no se cumple para los sólidos arquimedianos.

En base a lo mencionado, se solicita a los estudiantes que realicen una descripción (KPM) de lo que están observando, es decir, que proporcionaran detalles sobre *las propiedades, definiciones*, etc. (KoT).

Por lo tanto, el objetivo de la actividad era que los estudiantes pudieran identificar las propiedades de los sólidos arquimedianos a partir de las condiciones dadas y sus propias observaciones, y que fueran capaces de describirlos y formular su definición, para luego compararlas. Al analizar las respuestas de los estudiantes, se encontró que la mayoría de ellos tomó los sólidos y los describió según lo que observaban, *usando el lenguaje formal* (KPM). Esto se puede apreciar en la Figura 9.

**Figura 9.** Elementos notables del cuboctaedro y octaedro truncados



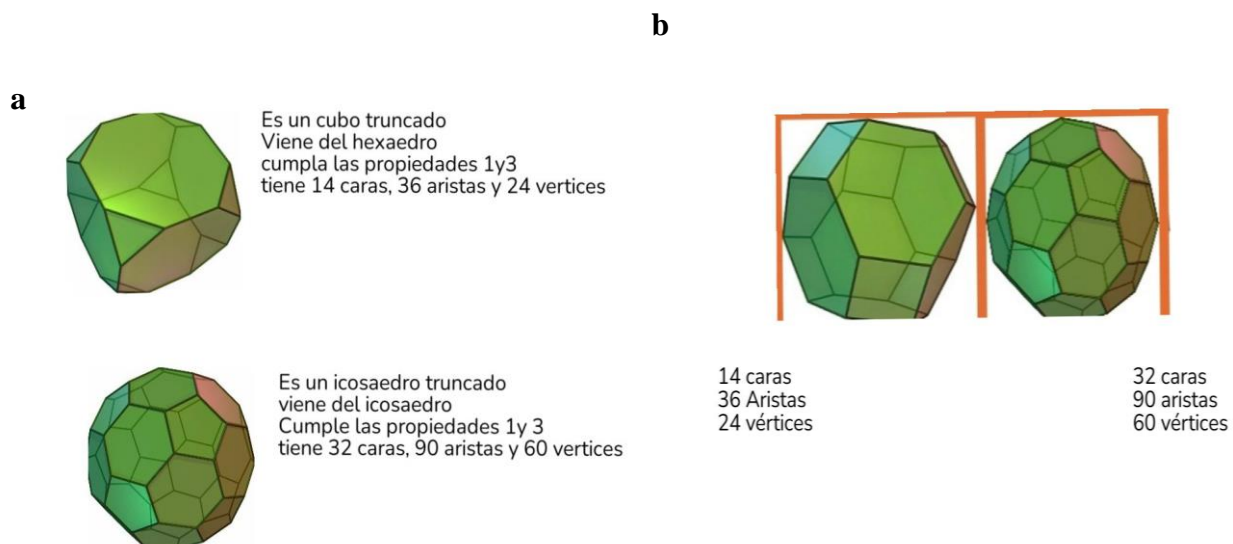
Cuboctaedro truncado  
 Sus caras son polígonos  
 regulares  
 14 caras  
 48 vértices  
 72 aristas  
 Octaedro truncado  
 Sus caras son polígonos  
 regulares  
 Sus ángulos poliedros son  
 congruentes  
 Caras 14  
 Aristas 36  
 Vértice 24

Nota: Descripción dada por un estudiante del curso de pensamiento Matemático I.

Se puede apreciar en la figura anterior como el estudiante tiene la capacidad de reconocer los elementos notables del cuboctaedro y octaedro truncado mostrando una *propiedad* (KoT) de estos. Lo anterior, hace que el estudiante tenga que hacer uso del *lenguaje formal* (KPM). Cuando menciona “los ángulos poliedros son congruentes” y también cuando escribe que “sus caras son polígonos regulares” este hace una *conexión auxiliar* (KSM) que intuitivamente lo está llevando a dar propiedades compartidas y diferenciadas de los platónicos, cumpliendo según él con la propiedad iii) y i) respectivamente a lo que él describió, sin embargo, es importante señalar que los sólidos arquimedianos no cumplen con la propiedad de tener todos los ángulos poliédricos congruentes (es decir, propiedad iii) por lo cual, contradice la afirmación del estudiante cuando intenta formular o describir una definición de estos sólidos (*condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*, KPM).

Continuando con el análisis, en la figura 10 se presenta una gran diferencia entre dos respuestas a la misma actividad.

**Figura 10. Sólidos arquimedianos**



Nota: Descripciones dadas por dos estudiantes del curso de pensamiento Matemático I. a) Descripción detallada de un cuboctaedro y un icosaedro truncados. b) descripción de los elementos notables de un octaedro y un icosaedro truncados.

En la Figura 10.a), es claro que el estudiante tiene que hacer uso del *lenguaje formal* (KPM), reconoce los elementos notables de ambas figuras y, además, menciona de qué sólido platónico es derivado o viene a ser arquimedianos tratando de dar una definición de las dos (KoT), haciendo una *conexión auxiliar* (KSM) porque recurre a los sólidos platónicos para describir la figura que está observando. Nótese también, que aquí el análisis de la Figura 9 es válido, debido a que este estudiante también deduce que los ángulos de los poliedros son congruentes (propiedad iii), lo cual, no es verdad, como ya se mencionó. Sin embargo, el estudiante trata de generar una definición un poco más detallada al indicar de cuál figura venía *conexión auxiliar* (KSM).

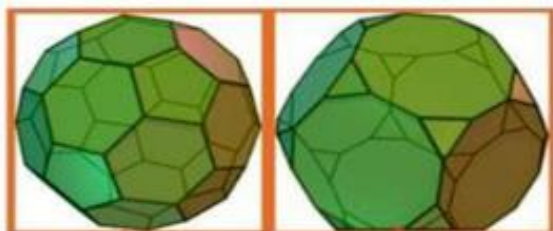
En la figura 10.b), se observa que el estudiante no utiliza ninguna relación auxiliar (KSM), sino que simplemente reconoce los elementos notables de los sólidos arquimedianos seleccionados. Esto demuestra su conocimiento de las *definiciones, propiedades y sus fundamentos*

(KoT) y su capacidad para cumplir con los requisitos de la actividad. Sin embargo, sería recomendable que el estudiante también considerare aplicar relaciones auxiliares para profundizar en su comprensión de los sólidos arquimedianos y ampliar su capacidad para describir y analizar estas figuras de manera más precisa. Al establecer conexiones entre el nuevo conocimiento y algo que se conoce, se crean vínculos que facilitan el proceso de aprendizaje. Estas ayudan a contextualizar y visualizar el concepto, haciendo fácil la comprensión.

**Actividad 3:** *Concluye algo de la actividad*

Se quería evaluar el aprendizaje de la *Definición* de sólidos arquimedianos (KoT), a lo que los alumnos debían responder con las propiedades que cumplían los sólidos arquimedianos que ellos escogieron, y que difieren de los platónicos (conexiones auxiliares, KSM).

**Figura 11.** *Icosaedro*



Ambos sólidos cumplen con la propiedad 1.

El de la izquierda cumple con la 1 y 2

El de la derecha solo cumple con la propiedad 1

Nota: Descripción de las propiedades del icosaedro truncado y el dodecaedro.

Se presenta una descripción que muestra la Figura 11 como la única que cumple y detalla las propiedades de los sólidos arquimedianos generando *condiciones necesarias y suficientes para*

*generar definiciones* (KPM) basándose en las propiedades de los sólidos platónicos (conexiones auxiliares, KSM). Sin embargo, esta descripción carece de una definición precisa (que era un objetivo con la actividad) es decir que no hace uso *del lenguaje formal* y no menciona ningún elemento notable (KoT) ni de que figura procede (Conexiones auxiliares, KSM).

Aunque se observaron las caras para determinar si cumple con la propiedad i) o ii), no se hace de manera formal utilizando un lenguaje adecuado (KPM). Como resultado, se necesita mejorar las habilidades comunicativas, teniendo en cuenta las interferencias que se evidencian cuando se solicita el uso del lenguaje formal. Al dar definiciones completas haciendo uso del lenguaje formal se podrá brindar una descripción más completa y precisa de los sólidos arquimedianos.

**Actividad 4:** *Construye una pirámide y córtala por los puntos medios de las aristas.*

La actividad tenía como objetivo que los estudiantes exploraran la construcción y descomposición de figuras en 2D y 3D (Relación entre contenido, KSM) porque ellos notaban que la pirámide de base cuadrada (KoT) constaba de un cuadrado por base y de triángulos en sus caras laterales, sin embargo, no se evidenció que dijeran que estas caras laterales eran congruentes entre sí. Otro contenido que debían conocer era la definición de punto medio (*definiciones, KoT*) para establecer *conexiones transversales KSM* con los sólidos. A continuación, se presenta el resultado final de la conversión de un objeto 2D a 3D. En este proceso, se ha creado un sólido tridimensional, que después es troncado y el cual se muestra en la Figura 12. Específicamente, se ha obtenido una pirámide recta troncada, donde se ha eliminado la parte superior para crear una superficie plana en su lugar (*conexiones auxiliares, KSM*).

**Figura 12.** Pirámide truncada



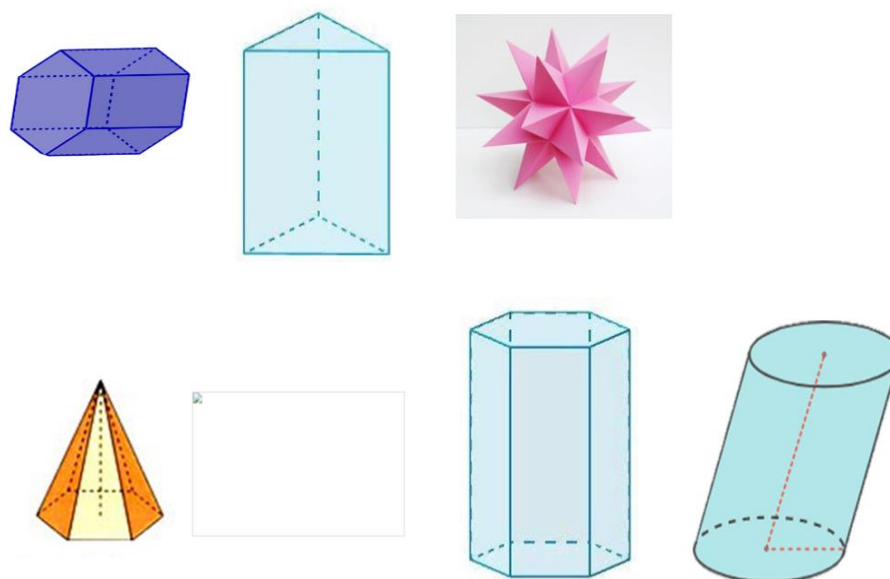
Nota: Pirámide armada por un estudiante del curso de pensamiento Matemático I.

Para la actividad se entregó el material, el cual constaba de un desarrollo plano de una pirámide, tijeras y colbón; de tal forma que pudieran medir con la regla el punto medio de la pirámide y por ahí truncarla. Todos los estudiantes recibieron el desarrollo plano de la pirámide (2D), de tal forma, que debían analizar qué figura podía armar (conexiones auxiliares, KSM) y que al construirla fuera totalmente sellada (al momento de pasar del desarrollo plano a la construcción de la figura, *Relación entre contenido*, KSM). Así mismo, se les pedía el punto medio para poder cortar por ahí la pirámide y truncarla (ver Figura 12) por lo que les fue necesario tomar una regla, medir la arista, y obtener el punto medio de la misma (*definiciones*, *KoT*). Al momento de medir el punto medio y cortar el cuerpo geométrico que habían armado, estaban trabajando *conexiones transversales*, KSM porque reconocen que el punto medio divide una línea (arista) en dos segmentos congruentes y que se encuentra a la mitad de esta, relacionando el tema con las aristas del sólido que se representó con el material dado en tutorías.

**Actividad 5:** *Clasifica las siguientes figuras según sus propiedades*

En esta actividad, se busca que los estudiantes identifiquen y clasifiquen varios cuerpos geométricos que se han trabajado previamente con la profesora titular del curso y en las tutorías. Se les presentan diferentes sólidos geométricos (ver figura 13) y se les pide que los clasifiquen según *sus propiedades y definiciones* (KoT) correspondientes. El objetivo es que los estudiantes apliquen sus conocimientos sobre las características de cada sólido y los relacionen con los conceptos aprendidos. De esta manera, se busca reforzar su comprensión de las propiedades y definiciones de los cuerpos geométricos.

**Figura 13.** *Clasificación de cuerpos geométricos*



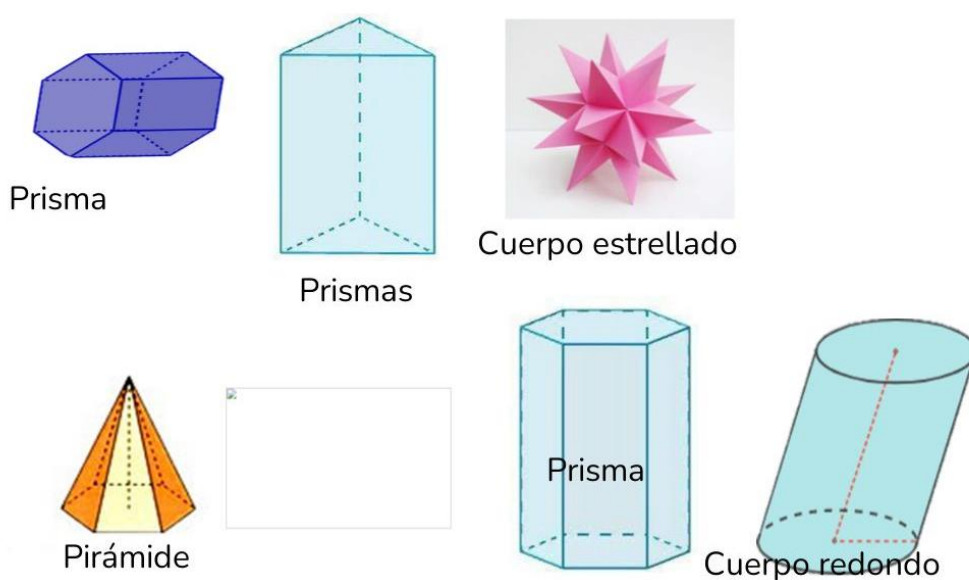
Nota: Google. (s.f.). Imágenes de cuerpos geométricos [Capturas de pantalla]. Recuperado de <https://n9.cl/pw71ry>

Para realizar esta actividad, el estudiante debía tener clara las clasificaciones de las figuras tridimensionales (definiciones y propiedades, KoT) pues debían mirar si era prisma, pirámide,

cuerpo redondo, estrellado, cóncavo, convexo, si estaba inclinado, etc. Debían hacer *uso del lenguaje matemático* (KPM) al clasificarlas.

Sin embargo, todos los estudiantes se limitaron a escribir el nombre de la categoría (ver Figura 14) a la que pertenecía la figura, sin describir la propiedad que los hacía estar en dicha clasificación.

**Figura 14.** Clasificación de cuerpos geométrico



Nota: Ejemplo tomado de un estudiante del curso de pensamiento Matemático I.

Lo que probablemente se generó por cumplir rápidamente con la actividad, pero no se puede sacar de esta actividad la conclusión, que ellos entienden las definiciones y propiedades, (KoT) pero no hacen uso del lenguaje matemático (KPM).

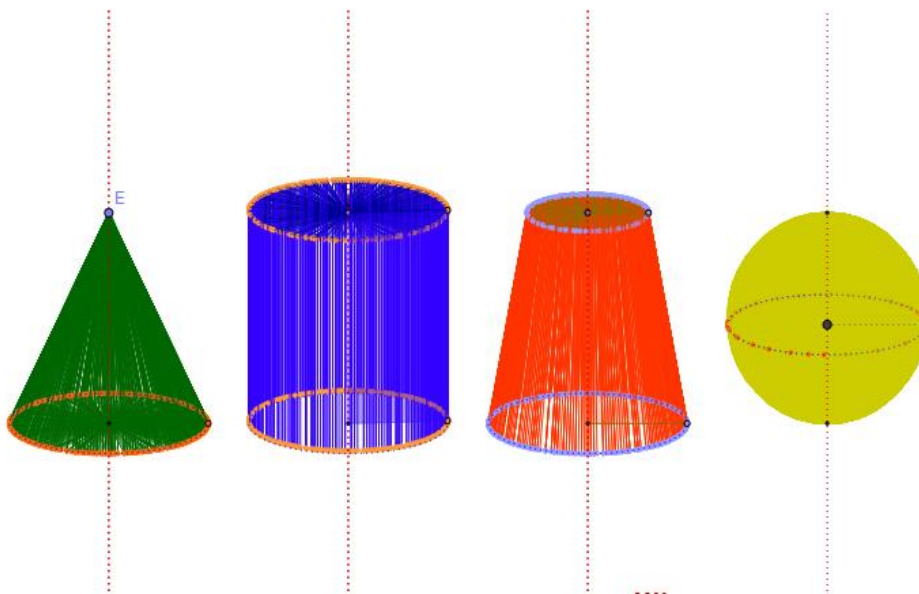
Luego de la primera implementación, se lleva a cabo una segunda sesión centrada en el estudio de los cuerpos redondos. El objetivo principal es familiarizar a los estudiantes con estos cuerpos haciendo uso de un applet en GeoGebra, para luego avanzar hacia el cálculo del área y el volumen de todos los sólidos tridimensionales que se han trabajado.

Es decir, que, a través de esta tutoría, se busca profundizar en el conocimiento de las propiedades y características de los cuerpos redondos, de tal forma que, conozcan e identifiquen, los cuerpos redondos con los elementos notables. También, se pretende reforzar los poliedros, y que conozcan los ángulos diedros, triedros y poliedros, así como desarrollar habilidades para calcular sus medidas geométricas, como el área y el volumen. Haciendo uso del pensamiento métrico, utilizando unidades de medidas.

<b>Corte:</b>	<b>1</b>
<b>Tutoría No.</b>	<b>2</b>
<b>Tema:</b>	<b>Volúmenes y áreas superficiales</b>
<b>Fecha:</b>	14 abril del 2023
<b>Objetivos de la sesión:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Conocer e identificar las propiedades de los cuerpos redondos</li> <li>-Distinguir entre ángulos diedros, triedros y poliedros</li> <li>-Hallar el área y el volumen de un cuerpo truncado (pirámide, cono)</li> </ul>
<b>KoT:</b>	Definiciones, propiedades y sus fundamentos de los poliedros procedimientos
<b>KPM:</b>	Prácticas particulares del quehacer matemático (modelar y validar), papel de los símbolos y uso del lenguaje formal.
<b>KSM:</b>	Conocimiento de las conexiones transversales: los ángulos

**Actividad 1:** Describe los elementos notables de los siguientes cuerpos redondos:

**Figura 15.** Cuerpos redondos



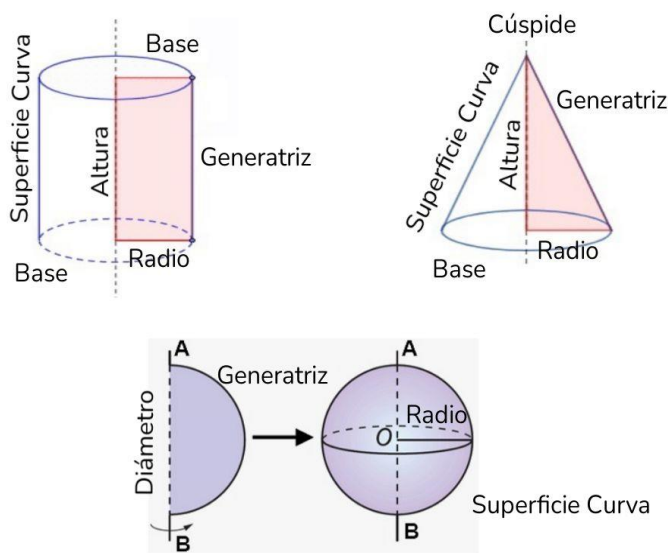
Nota: Alberto Ugarte, Ceferino A. (s.f.). Cuerpos de revolución [Captura de pantalla de GeoGebra]. Recuperado de <https://www.geogebra.org/m/ssavhkr5>

Para llevar a cabo la actividad, se comienza utilizando la herramienta de modelado en GeoGebra, un applet que permite interactuar y visualizar para este caso cómo se generan los cuerpos redondos. Específicamente, el alumno abre el enlace y empieza a observar cómo se forman los cuerpos redondos que se observan en la Figura 15, cuando se gira la figura alrededor de un eje vertical, lo que resulta en la creación del cuerpo redondo.

Esta interacción con GeoGebra permite percibir y comprender de manera más clara la formación de estos cuerpos y su relación con la rotación alrededor de un eje. Lo anterior, solo con el fin de que ellos por su propia cuenta conozcan e identifiquen las *propiedades y definiciones* de los cuerpos redondos (KoT).

Esta actividad fue fácil de abordar, todos los estudiantes presentaron los elementos notables (*definiciones y propiedades*, KoT) correspondientes a los cuerpos redondos (ver Figura 16). Se demuestra la comprensión de los sólidos en revolución, para ello se debía sustentar, por ejemplo, por qué reconocen que es la generatriz de un cilindro, ellos, argumentaban según lo visto en clase porque es paralela al eje de giro y que forma una superficie curva. También identificaron el radio de la base como uno de los lados del rectángulo que lo genera. Del mismo modo, al tratar el cono, identifican los lados del triángulo rectángulo que lo forma y muestran que la generatriz es la hipotenusa. Además, reconocen que el barrido de la hipotenusa es la superficie curva, la base y la cúspide del cono. Asimismo, reconocen el radio, el diámetro, la generatriz y el barrido que forma la semicircunferencia creando la superficie curva de la esfera.

**Figura 16.** *Elementos notables de los cuerpos redondos*



Nota: los elementos notables de los cuerpos redondos, dados por un estudiante de pensamiento matemático I.

En resumen, se encontró que la manipulación de un applet de GeoGebra resultó en una mejor comprensión de las *propiedades y definiciones* (KoT) que caracterizan a cada cuerpo redondo (para este caso el cilindro, cono, tronco de cono y esfera). Visualizando y experimentando de forma dinámica cómo se forman y se relacionan las diferentes partes de estos cuerpos. Sin embargo, ningún estudiante identifica el tronco de cono como se puede apreciar en la Figura 15, todos dan la definición y muestran sus argumentos de las tres figuras más conocidas, pero, no encuentran al tronco de cono familiar, pues la omiten para explicar los elementos notables. Lo anterior demuestra que no reconocen muy bien todavía un sólido truncado (registros de representación, KoT)

**Actividad 2:** *Escribe o señala los diferentes ángulos que ve en los siguientes poliedros.*

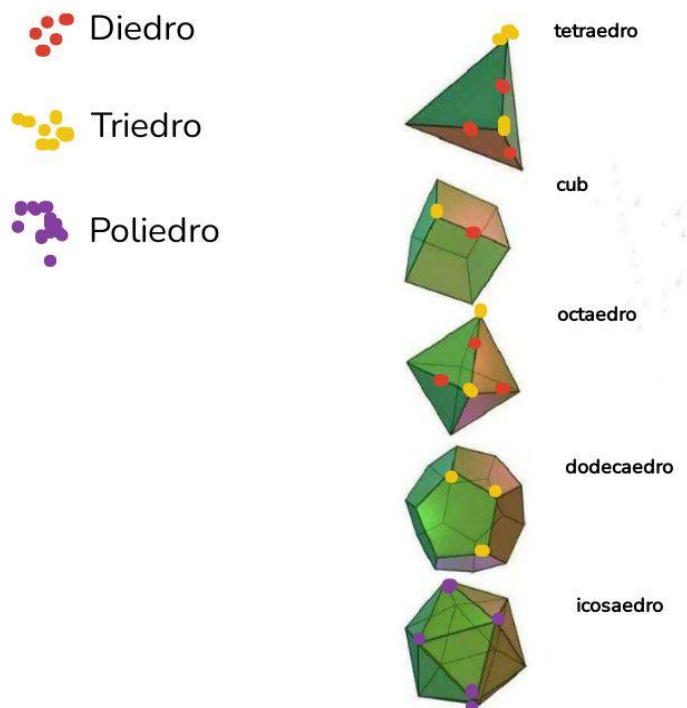
Para efectuar la actividad, primero se incorpora una explicación breve de los ángulos diedros (la región del espacio limitada por dos semiplanos que tienen una recta en común, llamada arista), ángulos triedros<sup>3</sup> y, por último, ángulos poliedros<sup>4</sup>. Sin entrar a mayor detalle con los grados de los ángulos, solo se les indica sobre ellos (*conexiones transversales, KSM*). La mayor parte del grupo identifica los ángulos, señalando la arista o el vértice, según el ángulo que trataban de identificar. Mostrando así un conocimiento de la intersección de los planos, o la unión de las aristas.

---

<sup>3</sup> Se llama ángulo triedro a la región del espacio limitada por tres semiplanos que se cortan sucesivamente según rectas que concurren en un mismo punto, es decir, en un vértice, dónde concurren de él, tres aristas.

<sup>4</sup> Es la región del espacio limitada por tres o más semirrectas con un origen común, llamado vértice.

**Figura 17.** *Sólidos platónicos*



Nota: identificación por parte de un estudiante de los ángulos diedros, triedros y poliedros de los sólidos platónicos.

Sin anotar la descripción detallada del sólido, por ejemplo, en el tetraedro se presentan 4 vértices donde concurren 3 caras, identificando ángulos triedros, y 6 aristas en las cuales concurren 2 caras obteniendo ángulos diedros. Sin embargo, al intentar expresar y comunicar de manera precisa las propiedades geométricas de un sólido tridimensional como el tetraedro, se encuentra que el *uso del lenguaje* (KPM) puede resultar insuficiente. Se debe a que el lenguaje carece de términos y estructuras adecuadas para describir y argumentar de manera rigurosa los elementos y relaciones de un objeto tridimensional. Evidenciándose una vez más la necesidad de desarrollar en los estudiantes del curso de pensamiento matemático I, la habilidad de usar el lenguaje matemático, ya que es muy limitado.

**Actividad 3:** Halle área y el volumen de los siguientes troncos.

Esta actividad presentó ciertas dificultades para los estudiantes, especialmente al calcular el volumen de un tronco. Por esta razón, en clase se resolvió el primer ejercicio sobre el tronco de una pirámide de forma colaborativa, involucrando a todos los participantes. Sin embargo, se decidió dejar el segundo ejercicio sobre el tronco de un cono a los alumnos que participaban de la tutoría (ver figura 18).

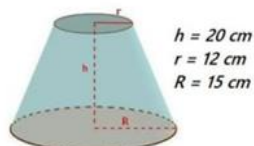
De esta manera, se buscó brindar un mayor apoyo y atención individualizada a los estudiantes tutorados, permitiéndoles desarrollar sus habilidades y comprensión en el cálculo del volumen de un tronco de cono

Esta actividad presentó un nivel de dificultad considerable, lo que resultó en que solo unos pocos estudiantes lograran completarla con éxito. Los problemas surgieron principalmente debido a la falta de comprensión de la fórmula específica necesaria para calcular el volumen de los cuerpos troncados. Algunos estudiantes no seguían la fórmula correctamente o no estaban familiarizados con la fórmula a utilizar en cada caso.

Estas dificultades revelaron la necesidad de una mayor claridad y comprensión por parte de los estudiantes en relación con las fórmulas pertinentes, (*procedimientos, KoT*) ya sea por la fórmula que usaron o porque hicieron algún proceso mal ejecutado. En la Figura 18 se observa un adecuado *procedimiento* (KoT) identificando las medidas necesarias del sólido como la altura, el radio de la base menor, el radio de la base mayor. También hace un buen uso de la potencia, dando así una respuesta correcta al problema. Además, usa la fórmula correctamente para hallar el volumen del tronco del cono, suceso que no acontece en varios estudiantes.

**Figura 18.** Problema de tronco de un cono

**PROBLEMA 1:** Un masetero tiene la forma de tronco de cono recto, y sus medidas se muestran en la figura:



Determine el volumen de tierra aproximadamente que cabe en dicho masetero. (considere  $\pi = 3,14$ )

1.

$$V = \frac{h\pi}{3} \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

$$V = \frac{(20 \text{ cm})(3,14)}{3} \cdot ((15 \text{ cm})^2 + (12 \text{ cm})^2 + (15 \text{ cm})(12 \text{ cm}))$$

$$V = \frac{62,8 \text{ cm}}{3} \cdot (225 \text{ cm}^2 + 144 \text{ cm}^2 + 180 \text{ cm}^2)$$

$$V = \frac{62,8 \text{ cm}}{3} \cdot (549 \text{ cm}^2)$$

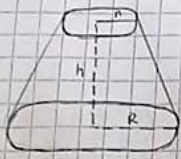
$$V = \frac{34477,2 \text{ cm}^3}{3} \rightarrow \boxed{V = 11492,4 \text{ cm}^3}$$

Nota: respuesta correcta dada por un estudiante al problema de tronco de un cono.

Por otro lado, es importante destacar que algunos estudiantes proporcionaron respuestas incorrectas al calcular el volumen del tronco de cono. Al analizar los procedimientos realizados, se identificó que uno de los errores comunes fue olvidar multiplicar por  $\pi$ , lo cual es necesario al utilizar las fórmulas del volumen de un cono. En algunos casos, los estudiantes multiplicaron por  $\pi$  dos veces por error, lo que llevó a resultados incorrectos. Además, se observó que algunos estudiantes no seleccionaron la fórmula adecuada para calcular el volumen del tronco de cono, lo que también influyó en respuestas incorrectas. Estos errores señalan la importancia de prestar atención a los detalles y utilizar las fórmulas correctas en los *procedimientos* (KoT) para obtener resultados precisos en el cálculo del volumen del tronco de cono. Así como se presenta a continuación en la Figura 19.

**Figura 19.** Problema de tronco de un cono

Problema 1: Un masetero tiene la forma de tronco de cono recto, y sus medidas se muestran en la figura:



$h = 20 \text{ cm}$   
 $r = 12 \text{ cm}$   
 $R = 15 \text{ cm}$

Determine el volumen de tierra aproximadamente que cabe en dicho masetero. (considere  $\pi = 3,14$ )

volumen tronco de cono

$$V = \frac{1}{3} (AB_1 + AB_2 + \sqrt{AB_1 \cdot AB_2} \cdot H)$$

- $AB_1 = \text{Area esfera} = 4 \cdot \pi \cdot (15 \text{ cm})^2 = 2,826 \text{ cm}$
- $AB_2 = \text{Area esfera} = 4 \cdot \pi \cdot (12 \text{ cm})^2 = 1,808.64 \text{ cm}$

$$\rightarrow V = \frac{1}{3} (2,826 \text{ cm} + 1,808.64 \text{ cm} + \sqrt{2,826 \text{ cm} \cdot 1,808.64 \text{ cm}} \cdot 20 \text{ cm})$$

$$V = \frac{1}{3} (2,826 \text{ cm} + 1,808.64 \text{ cm} + 3,040.452 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm})$$

$$V = \frac{1}{3} (2,826 \text{ cm} + 1,808.64 \text{ cm} + 60,800.04 \text{ cm}^2)$$

$$V = \frac{1}{3} (64,715.68 \text{ cm}^2)$$

$$V = 21,571.893 \text{ cm}^2$$

Nota: respuesta incorrecta dada por un estudiante al problema del volumen de tronco de un cono.

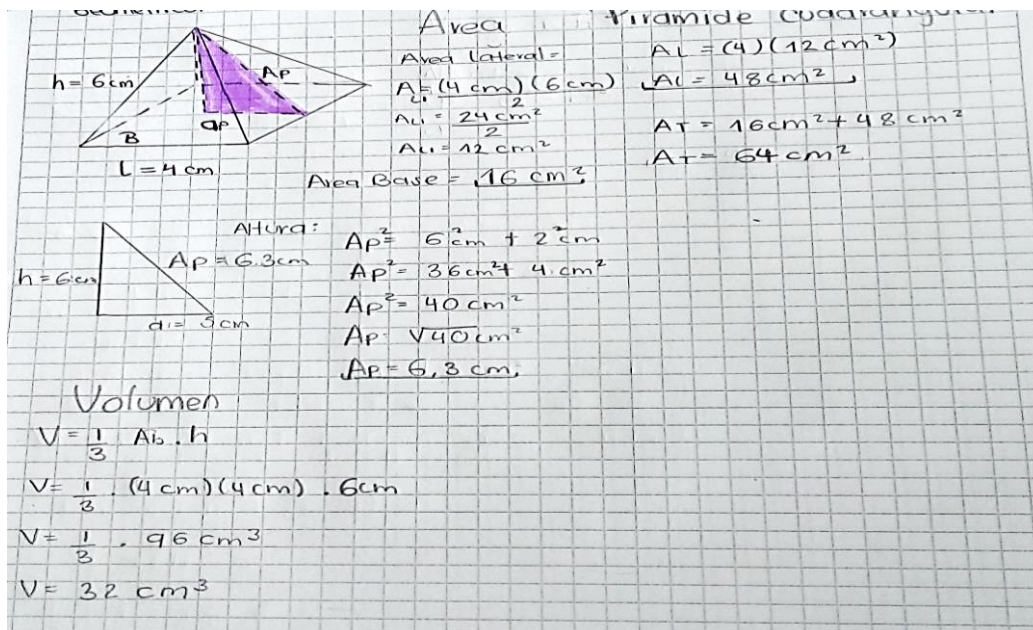
En esta figura, se puede observar claramente que el estudiante utilizó una fórmula inapropiada para calcular el volumen del tronco de pirámide. En lugar de utilizar el procedimiento correcto, que implica restar el volumen del cono más pequeño del volumen del cono completo, de esta forma:  $V = V_{\text{Mayor}} - V_{\text{menor}}$

quedando  $V = \frac{h \times \pi}{3} \times (R^2 + r^2 + R \times r)$ , el estudiante utilizó una fórmula diferente a la anterior. Esta fórmula que se usó en la Figura 19 no tiene en cuenta el volumen del fragmento de cono que queda al ser troncado. Sin embargo, los pasos que lleva a cabo el estudiante están bien tomados, aunque en vez de llamar área de la base menor y área de la base mayor, indica que es

área de esfera, lo cual, indica un mal manejo *de las definiciones* (KoT) y un mal uso del lenguaje (KPM).

**Actividad 4:** Escribe el nombre y halla el área y el volumen del siguiente cuerpo geométrico.

**Figura 20.** Volumen y área de una pirámide regular



Nota: respuesta dada por un estudiante al problema de volumen de un cono

Después de recibir una explicación detallada sobre el cálculo del área y el volumen de la pirámide troncada, así como del volumen del cono troncado, los estudiantes demostraron un mayor nivel de comprensión y habilidad para calcular el volumen y el área de estos cuerpos geométricos completos. Fue evidente que habían aprendido los *procedimientos* (KoT) pues sabían que solo era hallar el área de la base multiplicarla por la altura y dividir todo entre 3 considerando que el volumen de la pirámide es una tercera parte del volumen del prisma rectangular, con la misma base y altura, debido a que no era necesario determinar el volumen del pedazo faltante.

## 4.2. Tutorías del segundo corte 2023-I

A continuación, se presenta la tercera tutoría hecha a los estudiantes sobre la cual se refuerzan los primeros temas del segundo corte 2023-1, se trabaja con los estudiantes, el desarrollo de la visualización espacial, es decir, que puedan identificar propiedades geométricas de los objetos en el espacio proyectivo, además, representar objetos tridimensionales en un plano bidimensional, además, haciendo uso de GeoGebra puedan crear modelos en un plano isométrico.

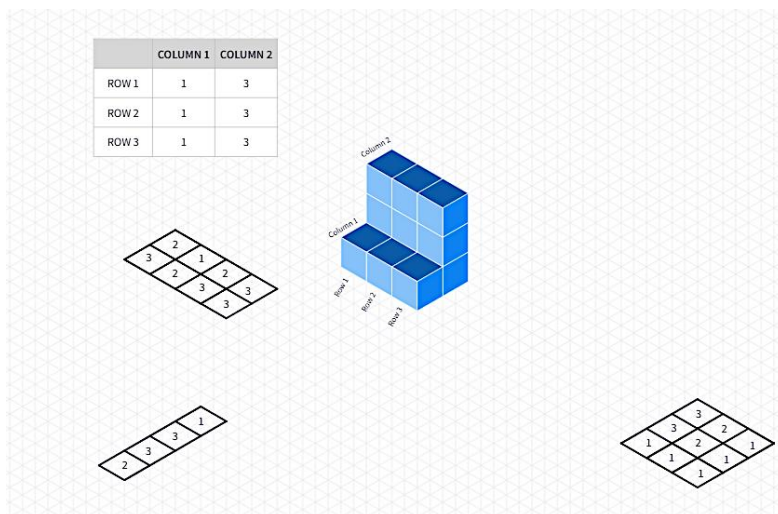
<b>Corte:</b>	<b>2</b>
<b>Tutoría No.</b>	<b>3</b>
<b>Tema:</b>	<b>Perspectiva Isométrica</b>
<b>Fecha:</b>	05 mayo del 2023
<b>Objetivos de la sesión:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificar las propiedades geométricas de los objetos en el espacio proyectivo</li> <li>- Construir y analizar las representaciones gráficas y geométricas de un sólido en perspectiva isométrica</li> <li>- Identificar en figuras con perspectiva isométrica el perfil, la vista frontal y superior de la figura.</li> <li>-Argumentar sobre la elección de los elementos y propiedades de la construcción.</li> <li>- Modelar en GeoGebra un sólido en el plano isométrico</li> </ul>
<b>KoT:</b>	Definiciones, propiedades y sus fundamentos de los sólidos en perspectiva, isométrica, fenomenología y registros de representación
<b>KPM:</b>	Prácticas particulares del quehacer matemático (modelar y validar), papel de los símbolos y uso del lenguaje formal.

**KSM:** conexiones auxiliares, conexiones transversales

**Actividad 1:** Realiza la perspectiva isométrica, con las diferentes vistas estudiadas en clase.

Para la primera actividad, se plantea una base en Matthigon donde se indica la cantidad precisa de cubos que deben ser apilados uno encima del otro (ver figura 21). Permitiendo que los estudiantes tengan una idea de la figura final sin necesidad de verla directamente. Teniendo una referencia de la estructura que deben construir. Los estudiantes pueden desarrollar sus habilidades de proyección espacial y representación visual de objetos tridimensionales.

**Figura 21.** Modelación en Matthigon y construcción de los sólidos



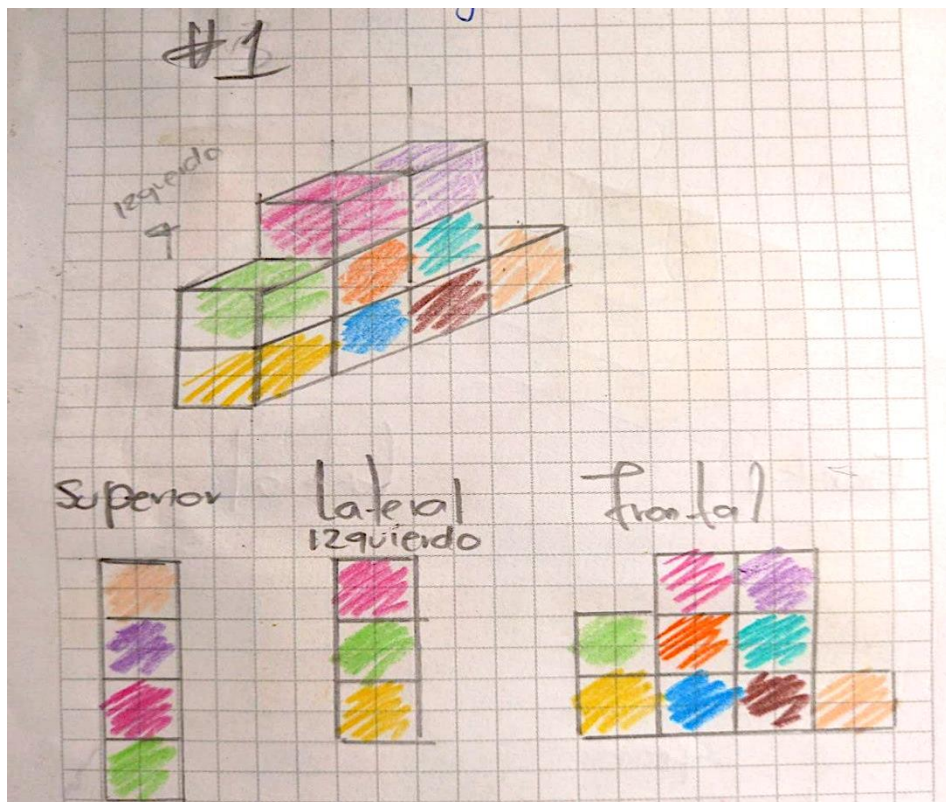
Nota: Actividad tomada de la profesora titular del curso de pensamiento Matemático I.

La actividad fomenta de manera significativa la construcción geométrica y la habilidad para representar geoméricamente (registros de representación, KoT) los sólidos en perspectiva isométrica con la acumulación de cubos, y así poder identificar las tres vistas principales de la proyección ortogonal: frontal, lateral y superior (*fenomenología, KoT*).

También, propicia el espacio para el razonamiento y la argumentación (KPM) con ayuda de *Matthigon* (Figura 21), la aplicación permite interactuar en el espacio isométrico y modelar de

manera más simple el sólido (*prácticas particulares del quehacer matemático*, KPM) que se desea representar luego en la hoja de trabajo.

**Figura 22.** *Perspectiva isométrica de un sólido y vistas*



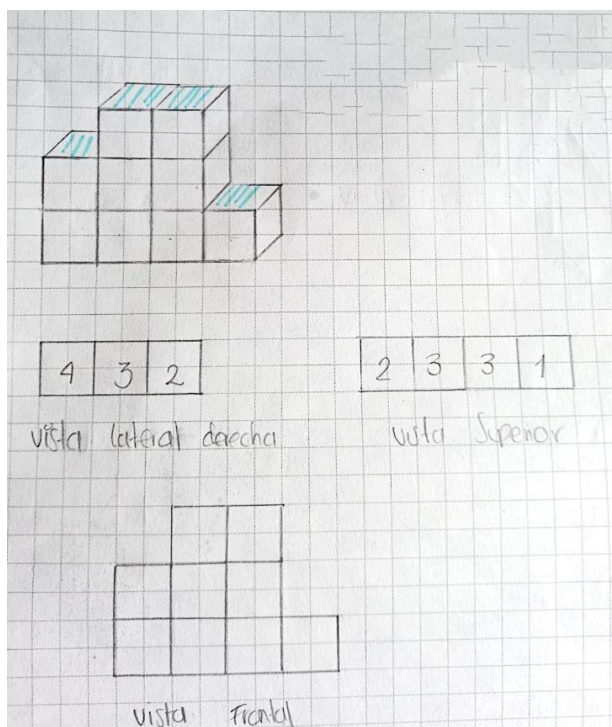
Nota: Registro de representación hecha por un estudiante de pensamiento matemático I.

Se puede visualizar en la imagen que el estudiante dibuja la perspectiva isométrica (*registros de representación*, KoT), tal cual se le indica en Mattighon (figura 21) dónde puede identificarse la vista superior, lateral izquierda y frontal (*uso del lenguaje del lenguaje formal*, KPM).

Para una mejor comprensión el estudiante recurre a echarle color a los cubos, haciendo más fácil la observación y que durante el paso del sólido en perspectiva isométrica a las vistas (*fenomenología*, KoT) se pueda identificar claramente cada cara de los cubos, como si se estuvieran viendo en una proyección del tercer ángulo diedro (*conexiones auxiliares*, KSM). Sin

embargo, a pesar de haber hecho una buena representación y haber logrado el paso de 3D a 2D (conexión auxiliar, KSM) el estudiante no tiene un buen dominio de los límites porque se observa que retiñe las líneas (observe la figura 22) seguramente por algún tipo de error en estas, que lo llevó a hacerlo. Al igual que el estudiante anterior, la mayoría dibujó el objeto de acuerdo con las instrucciones dadas, sin embargo, esto no implica que sea la única manera de representarlo.

**Figura 23.** *Perspectiva de un sólido y vistas*

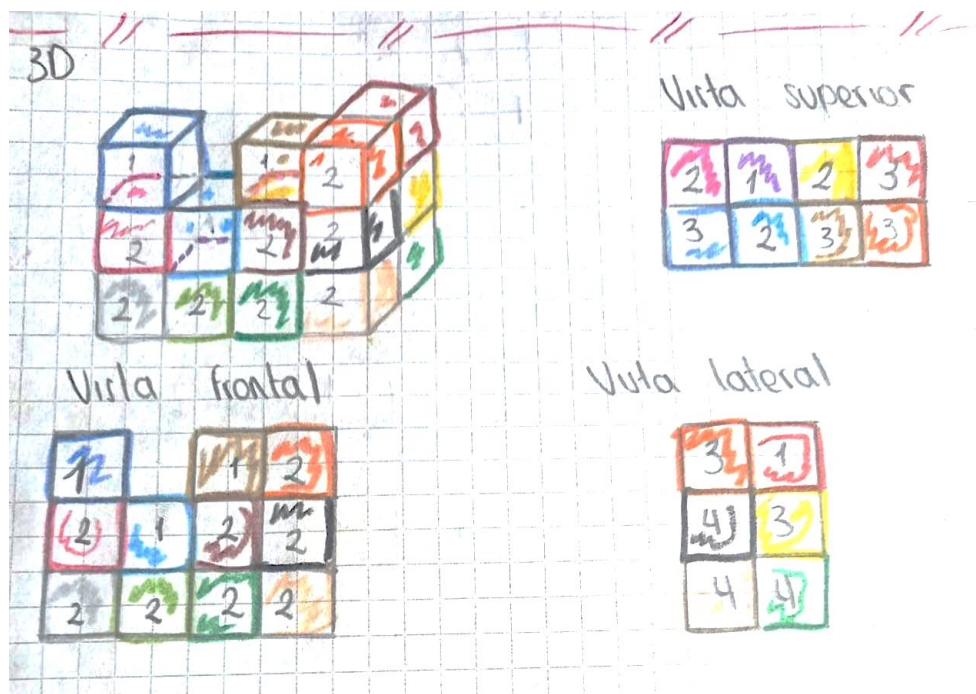


Nota: Registro de representación hecha por un estudiante de pensamiento matemático I.

En la imagen se puede observar cómo el estudiante representa el objeto en una perspectiva diferente a la isométrica (registros de representación, KoT), apreciándose que lo dibujó diferente a lo que se le había indicado (figura 21) porque lo muestra de una forma más frontal. No obstante, no implica que su representación esté mal hecha, debido a que es una forma que eligió para visualizar mejor la vista frontal de la imagen o poderla representar. Es evidente que el estudiante pasa por alto el hecho de que haya coloreado en azul la parte superior del sólido, pues esta debe

contener el mismo color al dibujar la vista, lo que resulta una representación incorrecta al pasar de la perspectiva isométrica a una de las vistas que en este caso es la superior para esta actividad (fenomenología, KoT). El estudiante se esfuerza por escribir la acumulación de los cubos con el fin de dar una interpretación a su dibujo. A través de este proceso, él argumenta que las vistas que ha dibujado son correctas. Esta práctica demuestra su capacidad para analizar y justificar su trabajo, estableciendo una conexión entre las representaciones visuales y las características del sólido. Para efectos del análisis, se presenta otra representación ligeramente incorrecta de uno de los objetos que se indican en la actividad (figura 20) dibujo en perspectiva isométrica hecha por un estudiante.

**Figura 24.** Perspectiva isométrica de un sólido y vistas



Nota: Registro de representación hecha por un estudiante de pensamiento matemático I

Se puede observar que la ilustración presentada por el estudiante en la Figura 24 la muestra con una perspectiva isométrica y en una proyección del tercer ángulo diedro, pero al momento de

dibujar las marcas de las aristas de la parte inferior trasera de los cubos, la figura pierde totalmente el sentido de lo que se observa en la proyección axonométrica (*fenomenología y aplicaciones*, KoT) aunque el estudiante asigna colores diferentes a cada cubo para facilitar la identificación de las vistas, él no utiliza una herramienta adecuada como una regla o una escuadra para dibujar líneas rectas (perpendiculares y paralelas) haciendo perder la proyección ortogonal de las vistas, Además, ocasiona una falta de precisión en los ángulos de las esquinas de algunos cubos.

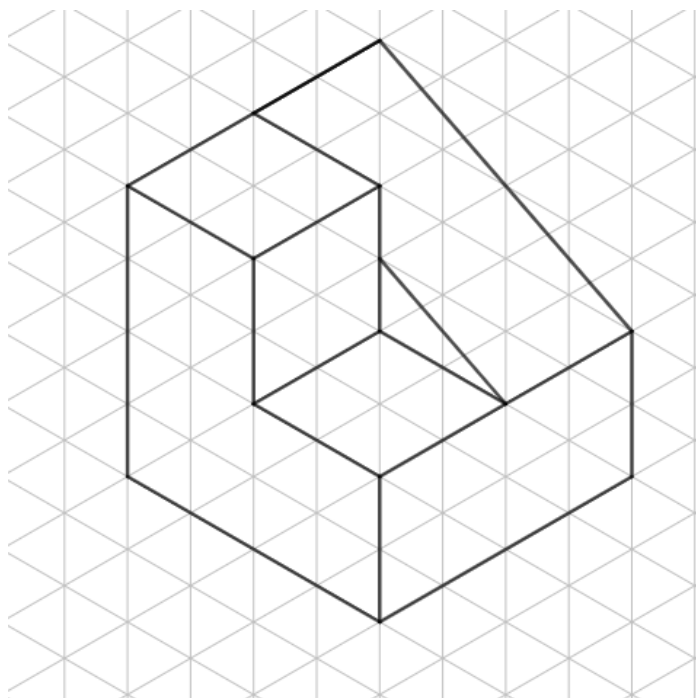
Es importante destacar que el estudiante logra representar de manera adecuada la transición del sólido a la vista (*fenomenología*, KoT) No obstante, es importante señalar que el trazado realizado con los colores no permite una representación clara de los atributos de la figura en el sistema diédrico.

**Actividad 2:** Modela la siguiente figura dibujada en perspectiva isométrica en GeoGebra y realiza el dibujo de la vista superior, el frente y el perfil.

La actividad se centra en utilizar GeoGebra para trabajar en el espacio isométrico y modelar sólidos con perspectiva isométrica. Este software ofrece la funcionalidad de un plano isométrico, lo que permite dibujar objetos y obtener una perspectiva isométrica de los mismos. Esto brinda a los estudiantes la oportunidad de explorar y visualizar los sólidos en un entorno tridimensional, facilitando así su comprensión y estudio.

El objetivo principal es que los estudiantes puedan interactuar con el sólido, mirar si pueden rotarlo, observar los ángulos y resaltar las caras utilizando diferentes colores. Además, que identifiquen la proyección en el tercer ángulo diedro. Esto les brinda la oportunidad de explorar y visualizar las propiedades del sólido de una manera más dinámica y comprensible, igual que como se hacía en Mattighon.

**Figura 25.** Modelado de sólido con la perspectiva isométrica de GeoGebra



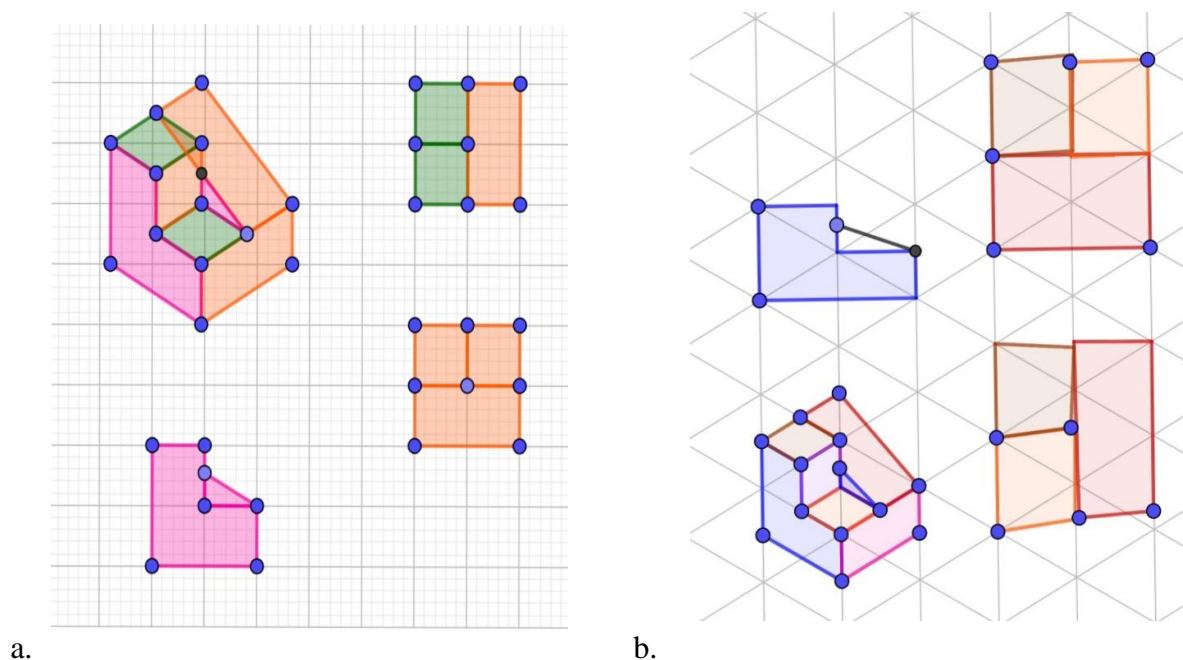
Nota: Sólido dibujado en GeoGebra

Dado que los estudiantes estaban acostumbrados a trabajar en una cuadrícula debido a que las hojas son cuadrículadas, se les planteó el desafío de utilizar GeoGebra e intentar dibujar un cubo, ya que era la figura más sencilla de crear en un plano isométrico. Todos lograron dibujar el cubo en el espacio. Sin embargo, al presentarles el sólido que debían modelar en un plano isométrico (Figura 25), se les dificultó realizarlo, sabían que tenía la forma de un cubo, pero los estudiantes encontraron dificultades para visualizar y trasladar esa representación mental de la nueva figura al plano isométrico en GeoGebra. Por lo tanto, se notó la necesidad de desarrollar habilidades espaciales en los estudiantes y también que comprendieran las proyecciones en un software.

Algunos de ellos tuvieron muchas dificultades para entender cómo representar las dimensiones tridimensionales en un plano bidimensional (Registros de representación, KoT), y

otros estudiantes se confundieron al intentar ubicar correctamente los puntos y trazar las líneas correspondientes.

**Figura 26.** Representación gráfica de un sólido en GeoGebra



Nota: a) Modelación hecha por un estudiante en GeoGebra con cuadrícula. b) Modelación hecha por un estudiante en GeoGebra con el plano isométrico.

Observe la representación mostrada en la figura 26 - a), aproximadamente la mitad de los estudiantes no modeló el sólido en un plano isométrico (Modelar, KPM). En su lugar, simplemente continuaron utilizando la cuadrícula de la hoja de trabajo y realizaron el modelado sobre ella. Algunos, tampoco hicieron uso de los colores para darle más solides a la figura. Los que usaron el plano isométrico (Registros de representación, KoT), se les dificultó bastante (Ver figura 26- b) Aunque el sólido se ve bien y aprovecha la paleta de colores proporcionados por GeoGebra para mostrar las vistas superior, lateral y frontal (fenomenología, KoT), el estudiante no logra

representar adecuadamente dichas vistas en su modelación (KPM). Es decir, no se evidencian líneas paralelas ni tampoco perpendiculares, los ángulos, etc.

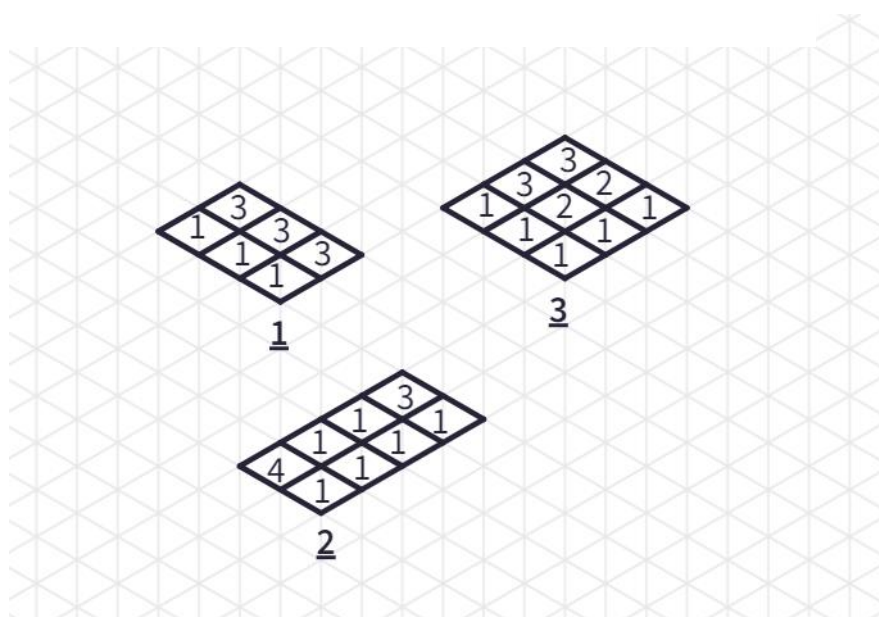
<b>Corte:</b>	2
<b>Tutoría No.</b>	4
<b>Tema:</b>	<b>Volúmenes y áreas superficiales de sólidos construidos con cubos</b>
<b>Fecha:</b>	12 mayo del 2023
<b>Objetivos de la sesión:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificar las propiedades geométricas de los objetos en el espacio proyectivo</li> <li>- Construir y analizar las representaciones gráficas y geométricas de un sólido en perspectiva isométrica</li> <li>- Identificar en figuras con perspectiva isométrica el perfil, la vista frontal y superior de la figura.</li> <li>- Argumentar sobre la elección de los elementos y propiedades de la construcción.</li> <li>- Determinar el área superficial y el volumen del objeto</li> </ul>
<b>KoT:</b>	<i>Procedimientos, Fenomenología</i> , registros de representación, definiciones, propiedades y sus fundamentos
<b>KPM:</b>	Prácticas particulares del quehacer matemático (modelar y validar), papel de los símbolos y uso del lenguaje formal.
<b>KSM:</b>	Conocimiento de las conexiones auxiliares: Pasar de 2D a 3D

El objetivo principal de esta clase fue que los estudiantes aprendieran a determinar el área superficial y el volumen del objeto (*procedimientos, KoT*) (que se les indique, para ello, debe ser capaz de pasar de una representación en el plano tridimensional (3D) al plano bidimensional (2D) (*Fenomenología, KoT*), desplegando el sólido, de tal forma que queda el recortable del sólido y si se desea volver a armar se pueda hacer, es decir, pasar del 2D al 3D (Conexiones auxiliares, KSM).

**Actividad 1:** Dibujar el sólido que se indique, encontrar las vistas, el desplegable, el área y volumen de cada uno.

Para esta actividad se les propuso la base de los sólidos que debían dibujar en sus hojas de trabajo (Ver figura 27)

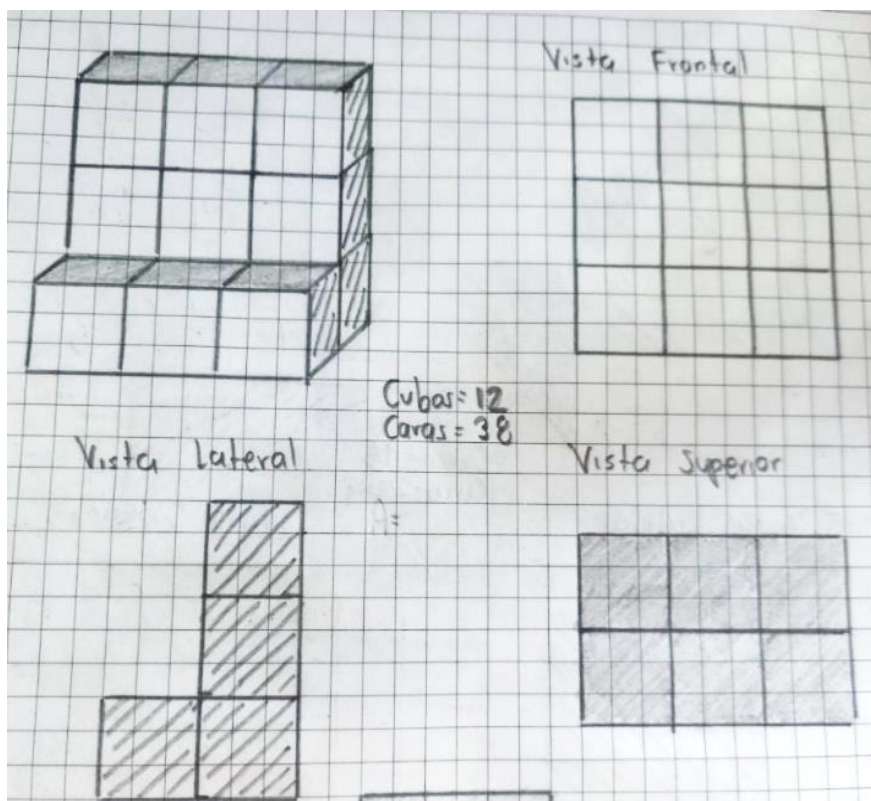
**Figura 27.** Base de sólidos



Nota: Actividad tomada y adaptada de la profesora titular del curso.

Cada estudiante debía tomar las bases que aparecen en la Figura 27 y utilizar la habilidad espacial y de comprender proyecciones, para tener la capacidad de imaginarse el sólido que debían dibujar.

**Figura 28. Sólido I**



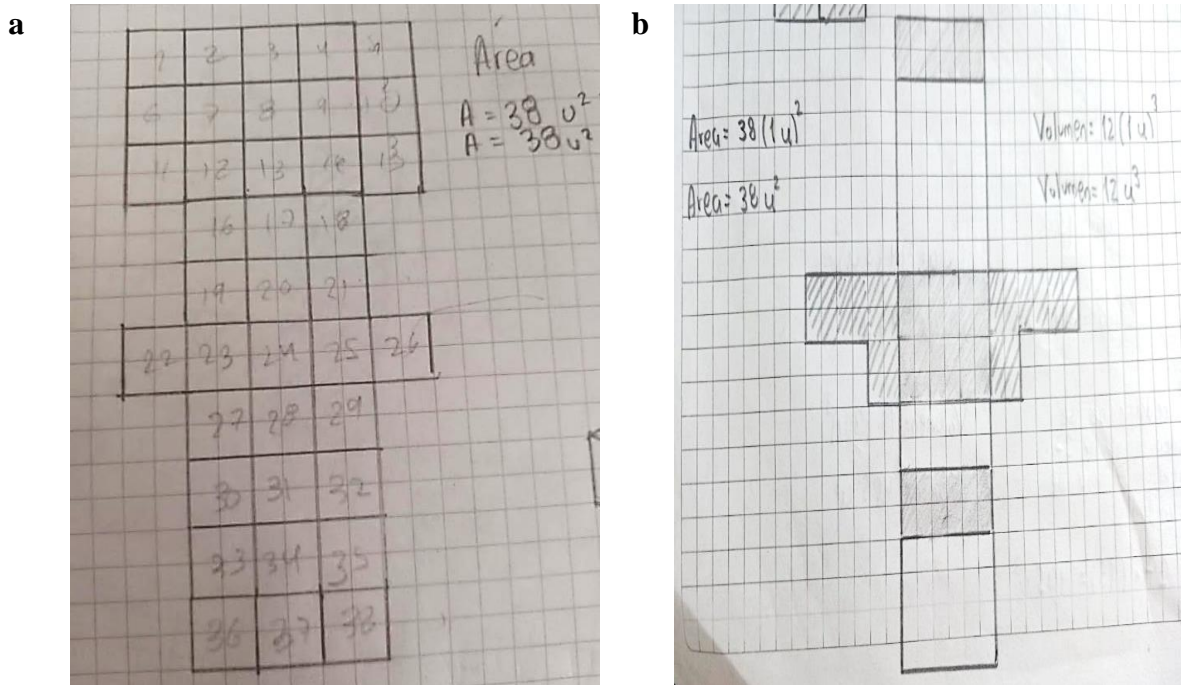
Nota: dibujo hecho por un estudiante de pensamiento matemático I

La Figura 28 muestra el sólido representado en perspectiva isométrica, tal como se solicitó usando técnica en el dibujo que permita la representación de objetos tridimensionales en un plano bidimensional utilizando ángulos y escalas uniformes (registros de representación, KoT).

También, se puede apreciar el progreso del estudiante en el entendimiento de las diferentes vistas del sólido, las cuales están debidamente marcada y dibujadas como se muestra (Figura 28).

Para el paso del plano en 3D al 2D (*conexiones auxiliares*, KSM) también se puede dibujar el desarrollo plano del sólido y con este, encontrar el área superficial de la figura contando las unidades cuadradas (cada cara del cubo que se ve). Se encontraron dos formas de hacer el desarrollo plano (ver figura 29).

**Figura 29.** Desarrollo plano del sólido 1



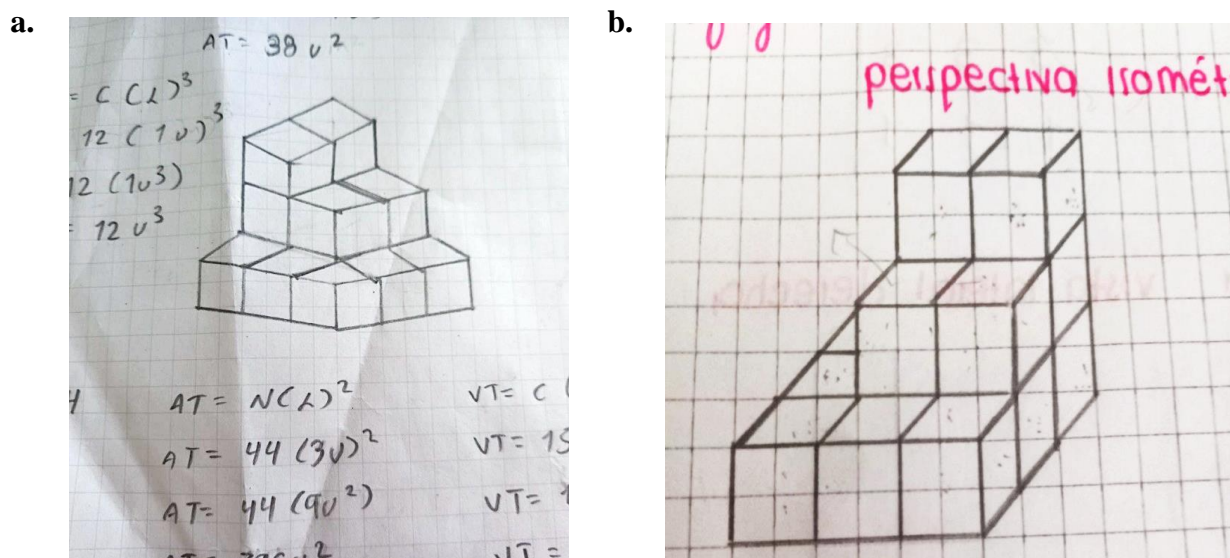
Nota: a) desarrollo plano del sólido hecho por un estudiante de pensamiento Matemático I.  
b) desplegable de la figura hecha por un estudiante de pensamiento Matemático I.

En la figura número 29. a), se puede observar que el estudiante realiza el desarrollo del plano utilizando las caras de los cubos presentes en el sólido. Cada cara es enumerada con el objetivo de calcular el área superficial del sólido. En este caso, se menciona que cada arista del cubo tiene una longitud de 1 unidad, por lo que el estudiante afirma que hay 38 caras, las cuales se multiplican por la unidad al cuadrado ( $38 u^2$ ) (*procedimientos*, KoT). En la figura número 29. b), el estudiante dibuja un desplegable donde se pueden distinguir claramente las partes del sólido que se doblan. Asimismo, se utiliza un enfoque similar al del inciso a) para calcular el área (*procedimientos*, KoT). Es importante destacar que cada estudiante debía proporcionar una argumentación sólida (*prácticas particulares del quehacer matemático*, KPM) para respaldar el

del área superficial en que tiene la representación. Esto se debe a que la forma en que los estudiantes dibujaban cada desplegable era diferente, lo que resultó en algunos casos en un número de caras mayor o menor que en otros. Sin embargo, lo que se buscó en común era seleccionar el desplegable mejor argumentado y dibujado para calcular el área superficial del sólido (*procedimientos, KoT*).

A pesar de que en clase y en las tutorías se dibujaron sólidos utilizando la perspectiva isométrica, se encontraron algunos dibujos dónde se evidenciaba un manejo incorrecto de la regla y de la técnica de dibujo, por lo tanto, no existe un buen registro de representación (*KoT*). Por lo cual, no logran representar adecuadamente los objetos tridimensionales en un plano bidimensional, ya que no se apreciaron los ángulos y las escalas uniformes necesarias para una representación precisa (*definiciones, propiedades y sus fundamentos, KoT*) (ver figura 30).

**Figura 30.** Sólido número 3



Nota: diferente perspectiva del sólido 1 realizadas por dos estudiantes de pensamiento Matemático I.

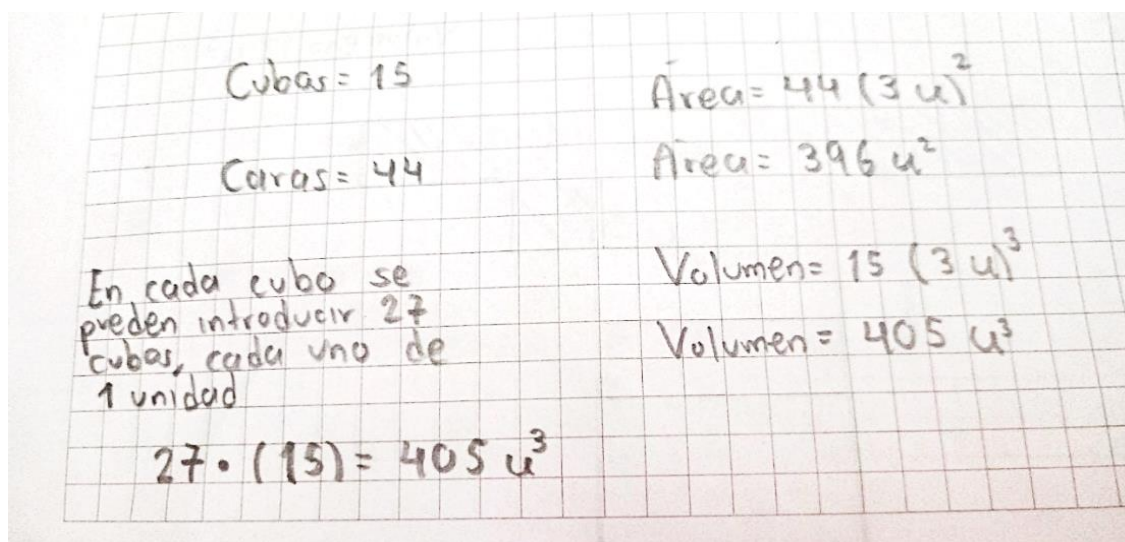
En la Figura 30. a) se aprecia una mala representación del sólido en perspectiva isométrica, sobre el cual se observan algunas alteraciones empezando por el trazado de las aristas, donde ha tenido que reteñir para ocultar cualquier error en el trazado, además, no se aprecia en todos los cubos ángulos de  $90^\circ$ , obteniendo así dificultades en la representación de este sólido.

En la Figura 30. b), se ve otra perspectiva, el estudiante tuvo que darle el giro a la figura para poder dibujarla de tal forma que quedara bien representada, con el uso de la regla dibujó líneas mejor trazadas, marcando los ángulos correctamente.

**Actividad 2:** Observa el volumen del sólido número 3 ¿Cuánto cubos de una unidad caben en este sólido?

El propósito de esta actividad era lograr una comprensión más profunda del concepto de volumen, más allá de simplemente calcularlo a partir de las medidas de las aristas. Se buscaba que los estudiantes comprendieran en qué consistía realmente el volumen y tuvieran una comprensión conceptual sólida del tema. Lo encontrado con esta actividad fue en todos los casos lo mismo (figura 31)

**Figura 31.** Volumen del sólido 3



Nota: análisis de un estudiante sobre el volumen del sólido 3

En la actividad 1, los estudiantes ya calcularon el área y el volumen de los sólidos presentados en la figura 26 de Mattighon. Como resultado, ya tienen el volumen del sólido número 3 en la actividad. En la figura 31, se puede observar que el estudiante proporciona el volumen en la parte derecha de la respuesta de la pregunta de la actividad 2, contando la cantidad de cubos y multiplicándolos por  $3u^3$  (Procedimientos, KoT) debido a que cada dimensión del cubo mide 3 unidades. Sin embargo, es evidente que al calcular cuántos cubos de una unidad caben dentro del sólido que tiene por aristas en los cubos 3 unidades, da la respuesta de la cantidad de cubos, pero no interpreta primero, que si le había dado  $405 u^3$ . En la Figura 31 se observa que, cuenta los 15 cubos, multiplicando dicho número por la cantidad de cubos de una unidad que caben en un cubo donde la longitud de cada arista es de tres unidades, para determinar cuántos cubos de una unidad caben en el sólido con aristas de 3 unidades. Demostrando que no ha interiorizado completamente el concepto de volumen (Definiciones, KoT).

## Capítulo 5. Discusión

Se sostiene que el modelo MTSK desempeña un papel crucial al proporcionar una estructura que organiza la información y facilita la comprensión del conocimiento utilizado por los docentes al momento de enseñar geometría. Este enfoque permite establecer conexiones con los temas específicos que se abordan en la enseñanza, como se ha demostrado en las implementaciones propuestas. Estas conexiones están basadas en los estándares básicos de competencia del MEN y se pudieron sintetizar y organizar gracias al modelo MTSK, comenzando con la manipulación y observación de figuras tridimensionales, avanzando hacia representaciones bidimensionales y finalmente hacia conceptos unidimensionales, así como indica (Teixidor, 2016) desde su experiencia por más de 25 años como maestra.

Lo anterior, se puede lograr mediante el uso de *conexiones auxiliares y transversales* del subdominio KSM pertenecientes al modelo, lo cual, refuerza las *definiciones y propiedades* de cada tema, tal como se aborda en la caracterización de los temas en el KoT. Estas estrategias son aplicables tanto en la formación de profesores de matemáticas como en la enseñanza de la geometría en educación básica primaria. Así como se observa en cada una de las practicas aquí registradas, los temas son específicos de la geometría en primaria.

Siguiendo con el análisis de resultados, se mostraron y documentaron 13 actividades, cada una con diferentes objetivos, dónde se encontraron e identificaron las diferentes categorías para cada uno de los subdominios del dominio (MK). Estas categorías aparecieron durante la implementación de la siguiente forma (ordenadas de mayor a menor frecuencia):

Para el subdominio KoT se identificaron las definiciones, propiedades y sus fundamentos; procedimientos; registros de representación; y, fenomenología y sus aplicaciones. Encontrando en todas las actividades propuestas y analizadas una mayor predominancia en la categoría de las

definiciones, propiedades y sus fundamentos, siendo este el que adquiere mayor relevancia debido a que el conocimiento matemático, en particular el conocimiento de los temas específicos son claves del conocimiento especializado del profesor, ya que responde a la pregunta “¿qué se va a enseñar?” (Fuentes, 2020). Haciendo que predomine incluso este subdominio más que los otros dos, por lo tanto, se tiene como resultado que el KoT es lo que más se trabaja a la hora de dar un tema en matemáticas.

En cuanto al subdominio KSM se observan las conexiones auxiliares y transversales, estas son las que hacen la conexión entre los temas. Se observa casi una igualdad de predominancia en las actividades, pero las conexiones auxiliares sobre salen con más frecuencia, debido a que la intención en las actividades es evidenciar la noción de un conocimiento relacionado por múltiples conceptos, procesos y comunicaciones entre los diferentes elementos matemáticos que se tienen para enseñar un tema (Montes, Climent, Contreras, 2022). Teniendo por resultado la forma que debe abordar el profesor de matemáticas en la enseñanza de un tema antes de ver otro, esto fue lo que permitió que se viera con los estudiantes primero los sólidos (3D) antes que las figuras planas (2D), como normalmente se ve en clases de geometría (1D, 2D y 3D).

Al analizar el subdominio KPM, se observa que ocupa el segundo lugar en frecuencia después de KoT. Dentro de este subdominio, se abordan categorías como el uso del lenguaje formal, prácticas particulares del quehacer matemático (modelar y modelación), formas de validación y condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones. Estos aspectos son de vital importancia para el desarrollo de las clases de matemáticas, sobre todo el uso del lenguaje matemático, ya que desempeña un papel importante en la construcción de nuevos conocimientos matemáticos (Escobar, 2023). Se ha encontrado como resultado que los estudiantes necesitan un dominio adecuado del lenguaje matemático para que puedan comprender y comunicar conceptos,

procedimientos y razonamientos. Además de argumentar o justificar los resultados explicando y demostrando por qué un resultado es válido o no.

La capacidad de modelar es una habilidad que el profesor de matemáticas debe ser capaz de fomentar y facilitar en sus estudiantes. Además, en el ámbito del quehacer matemático, el estudiante debe tener la competencia de desarrollar y aplicar un modelo matemático para comprender un fenómeno o resolver un problema.

La anterior recopilación resume los aspectos fundamentales que deben considerarse al desarrollar una tutoría de matemáticas en conjunto con la clase regular. Sin embargo, es importante destacar que abordar todos los subdominios en su totalidad puede resultar desafiante, ya que los profesores requieren de amplios de conceptos matemáticos, que tengan combinaciones básicas pero que a la vez sean complejas, deben tener claras las definiciones y las conexiones sólidas entre ellas. Además, necesitan comprender diversas aplicaciones y manifestaciones complejas de estos conceptos. En este sentido, se tiene que el conocimiento de los profesores es complejo y completo, porque se busca caracterizarlo con fines analíticos, con el objetivo de proporcionar evidencia de que este conocimiento matemático práctico se refleje en el aula (Zakaryan & Sosa, 2021).

Lo anterior, y con la experiencia adquirida en cada una de las implementaciones, se puede deducir que la estrategia de acompañamiento para el futuro profesor de matemáticas se vuelve fundamental, y necesaria, además, que esta debe ser continua y complementaria. Lo que implica trabajar en conjunta colaboración con los temas abordados en el aula (por parte de la profesora), reforzándolos y, si es necesario, introduciendo nuevos conceptos o conocimientos (por parte del tutor) que puedan coadyuvar a desarrollar y potenciar la comprensión de otros conceptos e incluso las habilidades matemáticas que se requieren para poder llevar a cabo todo lo que se plantea.

El objetivo de la estrategia debe ser brindar un apoyo continuo y personalizado al futuro profesor, asegurando que adquiera una base sólida de conocimientos matemáticos y habilidades pedagógicas. Esto se logra mediante la identificación de áreas de mejora y la implementación de actividades y recursos adicionales que fortalezcan el conocimiento matemático.

## Capítulo 6. Conclusiones

La presente investigación fue realizada durante los semestres 2022-II y 2023-I, con el objetivo de analizar una propuesta de acompañamiento extracurricular para el desarrollo del curso de pensamiento matemático I, haciendo uso del modelo MTSK y enfocada en el componente métrico-espacial, para acompañar a los estudiantes de la licenciatura en educación básica primaria de la UIS. Identificándose la necesidad de brindarles el acompañamiento adicional, a la cual se le da respuesta, con la propuesta de acompañar a los estudiantes, con clases de tutorías, siendo estas diseñadas en conjunto con la profesora titular del curso, creando tareas formativas para implementar en las clases. Para luego ser estudiadas y analizadas en detalle cómo se mostró durante el desarrollo de este estudio, cumpliendo así con el objetivo principal de esta investigación.

Primeramente, las tutorías son preparadas en compañía de la profesora, quién informa cómo se van dando las clases en el curso, y expresa según lo que va observando, lo que se debe complementar y reforzar en el acompañamiento. Asimismo, las actividades son diseñadas en trabajo junto con ella, revisando a detalle las actividades que se van a proponer para luego ser implementadas. Las sesiones de tutoría tienen una duración de dos horas, las cuales son aprovechadas al máximo por los estudiantes. No obstante, desde la experiencia, se ha identificado la necesidad de proporcionar una hora adicional para aquellos estudiantes que requieren un refuerzo extra. En resumen, se sugiere asignar tres horas de acompañamiento, dos para la complementariedad y el refuerzo general de las clases y otra adicional, para atender de manera más personalizada las necesidades específicas de los tutorados.

También, se recomienda considerar que el acompañamiento extracurricular sea un complemento con las clases dadas por el programa, logrando así mejores resultados en la formación de los estudiantes, debido a que, si se presentan momentos que no se alcanzan a abordar

los temas por completo, en tutorías se pueda profundizar, coadyuvando con el aprendizaje de los temas. Por consiguiente, es esencial que las actividades de apoyo estén cuidadosamente planificadas y se basen en la formación de futuros profesores.

Se infiere que los estudiantes necesitan contar con el apoyo de las tutorías, sobre todo en los tres primeros semestres, dónde se necesita de un acompañamiento extracurricular como se ha observado en los diferentes programas que se ofrecen en la universidad. Para este caso viene a ser la de un tutor par quién ayuda solidificar las bases que se traen desde el colegio y complementa las que se están adquiriendo en la formación profesional, por lo tanto, la participación de los estudiantes debe ser de manera voluntaria.

Además, el estudiante tutor obtiene experiencia y dominio de los temas, lo cual le beneficia en su desarrollo profesional al enfrentarse al aula y al realizar planificaciones de clases con un enfoque en la formación docente. Es esencial que se continúen los estudios en educación matemática con el conocimiento especializado del profesor, y que, además se puedan enfocar en la práctica del profesor y en cómo este adquiere el conocimiento necesario para crear y hacer matemáticas, en este caso, de la educación básica primaria.

### Referencias bibliográficas

- Aguilar, Á., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., Flores, P., Montes, M., y Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguay (Ed.), VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 5063-5069). Montevideo, Uruguay: SEMUR.
- Álvarez, C. J. R. (2017). Geometría para diseño gráfico. Universidad del Norte.
- Arenas, F. A., y Hurtado, D. I. (2018). Alertas Tempranas Para Promover La Retención El Caso De La Universidad Santiago De Cali.
- Badillo, J. E. (2019). Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional. *Investigación sobre el profesor de matemáticas*, 1-440.
- Barbosa, J., Castillo, A., Casas, P., Ramírez, N., Ordóñez, G., Ayala, J., . . . y Arenas, A. (2016). La interacción intercontexto como estrategia para fortalecer el programa de tutores pares: el caso de la Universidad Industrial de Santander (UIS) de Colombia. Foro Internacional de Innovación Docente, 105-136.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Defining specialized knowledge for mathematics teaching. Actas del CERME8. Antalya, Turquía (en prensa).
- Carrillo, J., Escudero, D. I., & Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. *Revista de Análisis Matemático-Didáctico para profesores*, 1, 16-26.
- Cívico, A., Núñez, N., Gómez, P., Peña, F., de la Fuente, M., Juárez, M., y Martínez, A. comunicación breve: estudio del origen de ácido ruménico presente en la grasa láctea de

- cabras mediante un modelo de regresión lineal. *Revista Científica [en línea]*. 2016, XXVI (6), 397-401 [fecha de Consulta 6 de enero de 2023]. ISSN: 0798-2259. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=95949934008>.
- Davis, B., & Renert, M. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. *Educ Stud Math* 82, 245–265 (2013). <https://doi-org.bibliotecavirtual.uis.edu.co/10.1007/s10649-012-9424-8>
- Enríquez, C. H., & Giraldo, F. V. (2017). Acompañamiento tutorial en la Universidad de Antioquia. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (52), 3-22.
- Escobar, C. A. G. (2023). Construcción del conocimiento para la comprensión del lenguaje matemático. *Revista Colegiada de Ciencia*, 4(2), 111-122.
- Gallego, S. (1997). Las funciones del tutor universitario. VIII Jornadas Nacionales de la Asociación Española de Orientación y Psicopedagogía (AEOP). La orientación educativa y la intervención psicopedagógica integrada en el curriculum, Valencia, AEOP, 289-292.
- García, N. (1996). Los contenidos de la función tutorial. *Revista complutense de educación*, 7, 1-14.
- Garitano, R., y Andonegui, A. (2017). Influencia de la mentoría en el desempeño de los participantes en comunidades virtuales de práctica. *Revista interuniversitaria de Investigación en Tecnología Educativa*, (3), 40-50
- Gómez, P. (2010). Diseño curricular en Colombia: el caso de las matemáticas.
- Gómez, P. (2012). La elección del estudio de caso en investigación educativa.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a. ed. --.). México D.F.: McGraw-Hill.

- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes). (2022). Informe nacional de resultados del examen Saber 11° 2021.
- López, G. E. (2013). La tutoría en la universidad: una experiencia innovadora en el Grado de Educación Primaria. REDU. Revista de Docencia Universitaria, 11(2), 243-261.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 75-88.
- Montes Navarro, M. Á., Climent, N., y Contreras, L. C. (2022). Construyendo conocimiento especializado en geometría: un experimento de enseñanza en formación inicial de maestros. Aula abierta, 51(1), 27–36. <https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.27-36>
- Montes, H. (2002). La Transición de la educación media a la educación superior. *Calidad en la Educación*, (17), 269-276. doi:<https://doi.org/10.31619/caledu.n17.420>
- Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán, M. M. y Barrera, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 157-176). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.
- Montes, M., Flores, E., Carmona, E., Huitrado, J. L., Flores, P., Carrillo, J., ... y Escudero, D. (2014). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones. *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*, 9-22.
- Muñoz, M.C., Contreras, L.C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico

- para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 18 (3), 1801-1817
- Quintana, P. J. V., y Capa, Á. B. (2011) *La Mentoría entre Iguales en la Universidad Europea de Madrid: Una Estrategia Educativa para el Desarrollo de Competencias Generales y Específicas*.
- Rach, S., & Heinze, A. (2017). The transition from school to university in mathematics: Which influence do school-related variables have? *International journal of science and mathematics education*, 15(7), 1343-1363.
- Ramos, R. E., y Martínez, C. G. (2020). Uso del Modelo MTSK para la Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas en Secundaria: El caso de la Proporcionalidad. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16(59), 33-63.
- Rodríguez, C. L. M., y Perdomo D. J. (2019). Transición del bachillerato a universidad en matemáticas desde la visión del docente. In XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática CIAEM, 5-10 de mayo, Medellín, Colombia (pp. 1-8).
- Rodríguez, M. L. J., y Díaz, P. (2015). Estrategias de las universidades españolas para mejorar el rendimiento en matemáticas del alumnado de nuevo ingreso. *Aula abierta*, 43(2), 69-76.
- Stake, R. (2005). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, Morata
- Teixidor, E. (2016). 3D, 2D, 1D. En Afonso, Hugo; Bruno, Alicia; de la Coba, Dolores; Domínguez, Miguel; Duque, Yanira; García, Fátima; Noda, M<sup>a</sup> Aurelia; Plasencia, Inés (Eds.), *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas* Números, 92 . (pp. 93-103). La Laguna (Tenerife), España: Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas.

- Valverde, G. (2014). Experimentos de enseñanza: una alternativa metodológica para investigar en el contexto de la formación inicial de docentes/Teaching experiments: a methodological alternative to research in the context of the initial teacher training. *Actualidades investigativas en educación*, 14(3).
- Villavicencio, M. M. P., Salmon, L. D. R. L., Rodríguez, L. J. S., y Chávez, Ó. E. B. (2019). La tutoría entre iguales: Modalidad para promover el aprendizaje cooperativo a nivel superior. *Polo del Conocimiento: Revista científico-profesional*, 4(5), 431-443.
- Zakaryan, D., & Sosa, L. (2021). Knowledge of practices in mathematics of a secondary teacher in geometry classes. *Educación matemática*, 33(1), 71-97.

**APÉNDICES****Apéndice A-Taller 1****TALLER NO. 1**

Se define poliedro regular o platónico al poliedro convexo que cumple las siguientes condiciones:

1. Sus caras son polígonos regulares
2. Sus caras son congruentes
3. Sus ángulos poliedros son congruentes



Lección: **Taller No. 1**

1/17



1. Utiliza GeoGebra y da mínimo 2 ejemplos de poliedros convexos que cumplan las tres condiciones dadas

Registra tu evidencia



Lección: **Taller No. 1**

2/17





2. Describe el primer poliedro construido según el número de caras, número de aristas y número de vértices




2. Describe el segundo poliedro construido según el número de caras, número de aristas y número de vértices


# OBSERVA LOS SIGUIENTES SÓLIDOS.

Platónicos



Arquimedianos

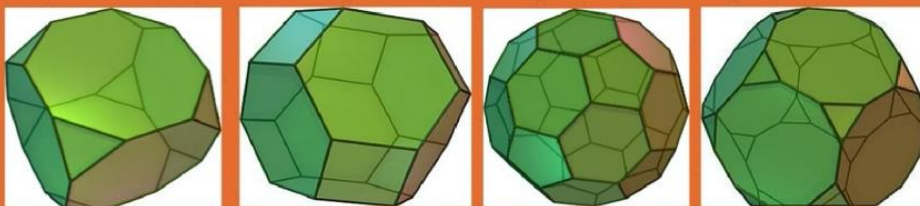


Lección: Taller No. 1

7/15



2. ¿Cuales de las tres propiedades mencionadas al principio se cumplen estos sólidos arquimedianos?



Lección: Taller No. 1

8/15

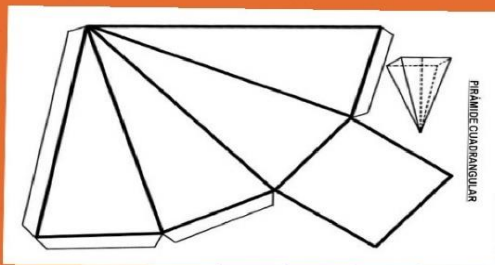




4. De los poliedros anteriores, escoge dos y descríbelos según el número de caras, número de aristas y número de vértices

<p>¿Que propiedades cumplen?          • Sus caras son polígonos regulares.          • Sus ángulos poliedros son congruentes.          De que platónes viene?          • 1. Cubo truncado.          14 Caras - 24 Aristas - 22 vértices.          • 2. Octaedro truncado: 14 Caras - 36 Aristas - 24 vértices.</p>	<p>¿Que propiedades cumplen?          • Sus caras son polígonos regulares.          • Sus ángulos poliedros son congruentes.          De que platónes viene?          • 1. Cubo truncado - 14 Caras - 36 Aristas - 22 vértices.          • 2. Octaedro truncado - 14 Caras - 36 Aristas - 24 vértices.</p>	<p>Figura 1: Caras: 14 Vértices: 22 Aristas: 36</p> <p>Figura 2: Caras: 22 Vértices: 30 Aristas: 50</p> <p>Los principales platónes que cumplen con el primero y el tercero.</p>	<p>Esperando respuesta</p>
<p>Cubo truncado.          Sus Caras: 14 (polígonos regulares).          14 Caras.          22 vértices.          36 aristas.          Octaedro truncado.          Sus caras son polígonos regulares.          Sus ángulos poliedros son congruentes.          Caras: 14          Aristas: 36          vértices: 24</p>	<p>1. Cubo de un truncado truncado.          Caras: 22 vértices: 30 Aristas: 50</p> <p>2. Octaedro de un truncado truncado.          Caras: 14 vértices: 24 Aristas: 36</p> <p>Se cumplen solo dos propiedades.          Solo se cumplen dos condiciones:          1. Sus caras son polígonos regulares.          2. Sus ángulos poliedros son congruentes.</p>	<p>Caras: 32          Vértices: 50          Aristas: 90</p> <p>Caras: 22          Vértices: 30          Aristas: 50</p> <p>• No se cumplen las siguientes propiedades:          1. Sus caras son polígonos regulares.          2. Sus ángulos poliedros son congruentes.</p>	<p>Prisma de un truncado y su nombre es octaedro truncado.          Caras: 14 aristas: 36 vértices: 24</p> <p>Prisma de un truncado su nombre es dodecaedro truncado.          Caras: 32 aristas: 90 y vértices: 50</p> <p>Prisma de un truncado que cumple:          1. Sus caras son polígonos regulares.          2. Sus ángulos poliedros son congruentes.</p>
<p>¿Que propiedades cumplen?          • Sus caras son polígonos regulares.          • Sus ángulos poliedros son congruentes.          De que platónes viene?          • 1. Cubo truncado: 14 Caras - 24 Aristas - 22 vértices.          • 2. Octaedro truncado: 14 Caras - 36 Aristas - 24 vértices.</p>	<p>1. Caras: 14          Vértices: 22          Aristas: 36</p> <p>2. Caras: 32          Vértices: 50          Aristas: 90</p> <p>Se cumplen las propiedades 1 y 2. Sus caras son polígonos regulares y sus ángulos son congruentes.          Se forma cada vértice de un octaedro.</p> <p>3. Caras: 22          Vértices: 30          Aristas: 50</p> <p>Se cumplen las propiedades 1 y 2. Sus caras son polígonos regulares y sus ángulos son congruentes.          Se forma cada vértice de un cubo.</p>	<p>Volado truncado.          Hecho de un octaedro.          Caras: 22          Vértices: 30          Aristas: 50</p> <p>Cubo truncado.          Se obtiene truncando cada vértice de un cubo.          Caras: 14          Aristas: 24          Vértices: 22</p>	<p>Dodecaedro truncado, viene del Dodecaedro, cumple la propiedad 1 y 2.</p>
	<p>Octaedro truncado.          Caras: 14          Aristas: 36          vértices: 24          sus caras son polígonos regulares.</p>	<p>Las propiedades que cumplen son:          1. Sus caras son polígonos regulares.          2. Sus ángulos poliedros son congruentes.</p>	

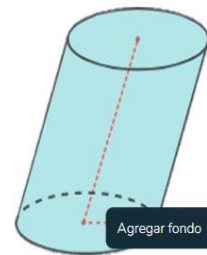
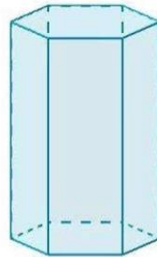
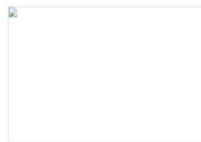
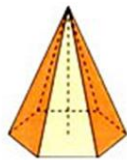
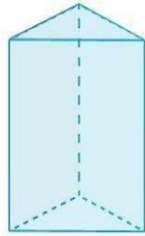
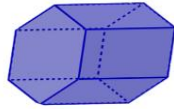
Construye una pirámide y cortala por los puntos medios de las aristas



Clasifica las siguientes figuras según sus propiedades

Ingresar texto de hasta 1000 caracteres

Instrucciones

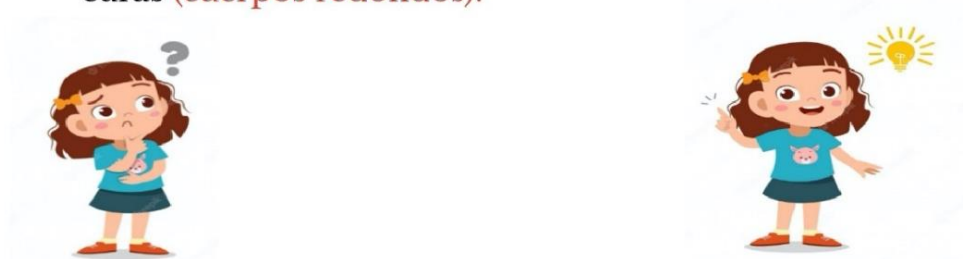


Apéndice B-Taller 2

# Recordemos...

Los cuerpos geométricos están divididos:

1. Primero, los que tienen sus caras planas (**poliedros**);
2. Segundo, los que tienen alguna o todas sus caras curvas (**cuerpos redondos**).



Lección: Taller No. 2

1/15



GeoGebra

## Cuerpos de revolución

Autor: Ceferino A.

Generar cuerpos de revolución

### Fácil asignación

Asignar a tus clases de Google, crear una lección de GeoGebra y mucho más.



DESCARTAR

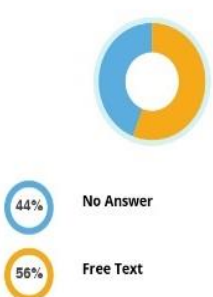


Lección: Taller No. 2

2/15



¿Qué es un cuerpo redondo? ¿Qué es un cuerpo redondo?

Response	Poll Stats
<p>Un cuerpo redondo es un cuerpo con base circular y dispone de una o más caras con forma curva.</p>	 <p>44% No Answer</p> <p>56% Free Text</p>
<p>Son aquellas figuras geométricas sólidas compuestas por superficies curvas en su totalidad o por superficies planas y curvas.</p>	
<p><b>Tiene una o todas sus caras curvas Se forma al girar una figura sobre su eje</b></p> <p>Un cuerpo redondo es un sólido en revolución. Tiene superficie curvas y la generatriz que se mueve por el eje dictamina su forma. Ejemplos: Cilindros, conos y esferas.</p>	
<p>Es un figura geometrica, cuerpos en revolución, conformados por líneas y superficies curvas. Los cuerpos redondos son el cilindros, cono, esfera.</p> <p><b>Es un cuerpo que no tiene aristas definidas pero si cuenta y tiene al menos una de sus caras o superfie curva, puede ser de forma total como la esfera o puede tener una base como la semiesfera</b></p>	
<p>Figuras geométricas sólidas compuestas por superficies curvas o por superficies planas y curvas</p>	
<p><b>Una figura curva que se forma al girar una generatriz alrededor de una recta llamada eje.</b></p>	

<p><b>Los cuerpos redondos son los que disponen de una o superficie curva</b></p>
<p>Un cuerpos redondo se forman al girar ciertas figuras alrededor de una recta llamada eje, como el cilindro, el cono y la esfera.</p> <p>Es una figura que se forma alrededor de un eje como lo es el cilindro, el cono y la esfera</p>
<p>Son los que se forman al girar cierta figura en una recta que se llama eje</p> <p><b>Una figura que tiene una o todas sus caras curvas</b></p>
<p><b>Es un cuerpo con superficie curvas.</b></p> <p>Es una figura que se forma al girar un cuerpo sobre el eje (es un cuerpo en revolución) y sus caras son curvas.</p>
<p>Disponen de una o mas caras/superficies con forma curva</p> <p>Son la esfera, el cono y el cilindro.</p> <p>Los cuerpos redondos son aquellos que tienen, al menos, una de sus caras o superficies de forma curva. se forman al girar una cierta figura alrededor de una recta llamada eje.</p>
<p>Son cuerpos que se forman al girar una cierta figura en el eje, algunos son: cono, esfera y cilindro.</p>
<p>Se pueden formar a girar cierta figura al rededor de una recta y tienen al menos una de sus caras curvada</p>



Describe los elementos notables de los siguientes cuerpos redondos


Escribe los diferentes angulos que ve en los siguientes poliedros

Instructions



tetraedro

cub

octaedro

dodecaedro

icosaedro

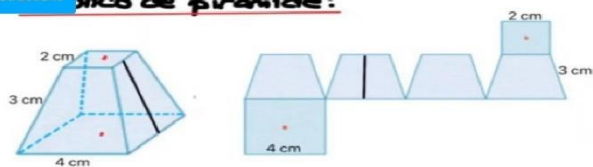


Submit

Halle area y el volumen del siguiente tronco

Instructions

Tronco de pirámide:



Submit

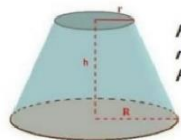
Lección: Taller No. 2

10/15



Instructions

**PROBLEMA 1:** Un masetero tiene la forma de tronco de cono recto, y sus medidas se muestran en la figura:



$$\begin{aligned} h &= 20 \text{ cm} \\ r &= 12 \text{ cm} \\ R &= 15 \text{ cm} \end{aligned}$$

Determine el volumen de tierra aproximadamente que cabe en dicho masetero. (considere  $\pi=3,14$ )



Submit

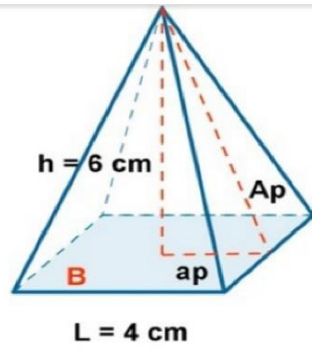
Lección: Taller No. 2

12/15



Escribe el nombre y halla el area y el volumen del siguiente cuerpo geometrico

Instructions



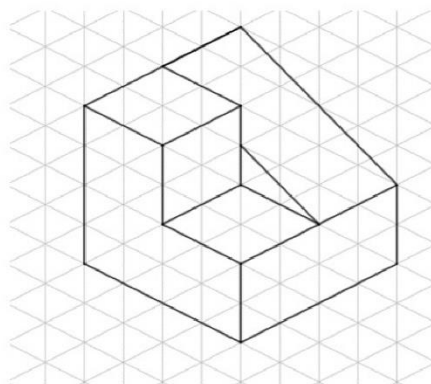
Submit

### Apéndice C-Taller 3

The screenshot shows the Polypad interface with a dark sidebar on the left containing categories like Geometry, Numbers, Fractions, Algebra, and Probability and Data. The main workspace features a grid with several geometric objects: a blue cube, a globe, a 3D rectangular prism, a diamond-shaped grid, and a small table with columns and rows. A URL bar in the center displays <http://polypad.org/M9DDnQcPp0rQ>. The bottom of the interface includes a navigation bar with the text "Lección: Lección sin título", a page indicator "2/5", and the Nearpod logo.

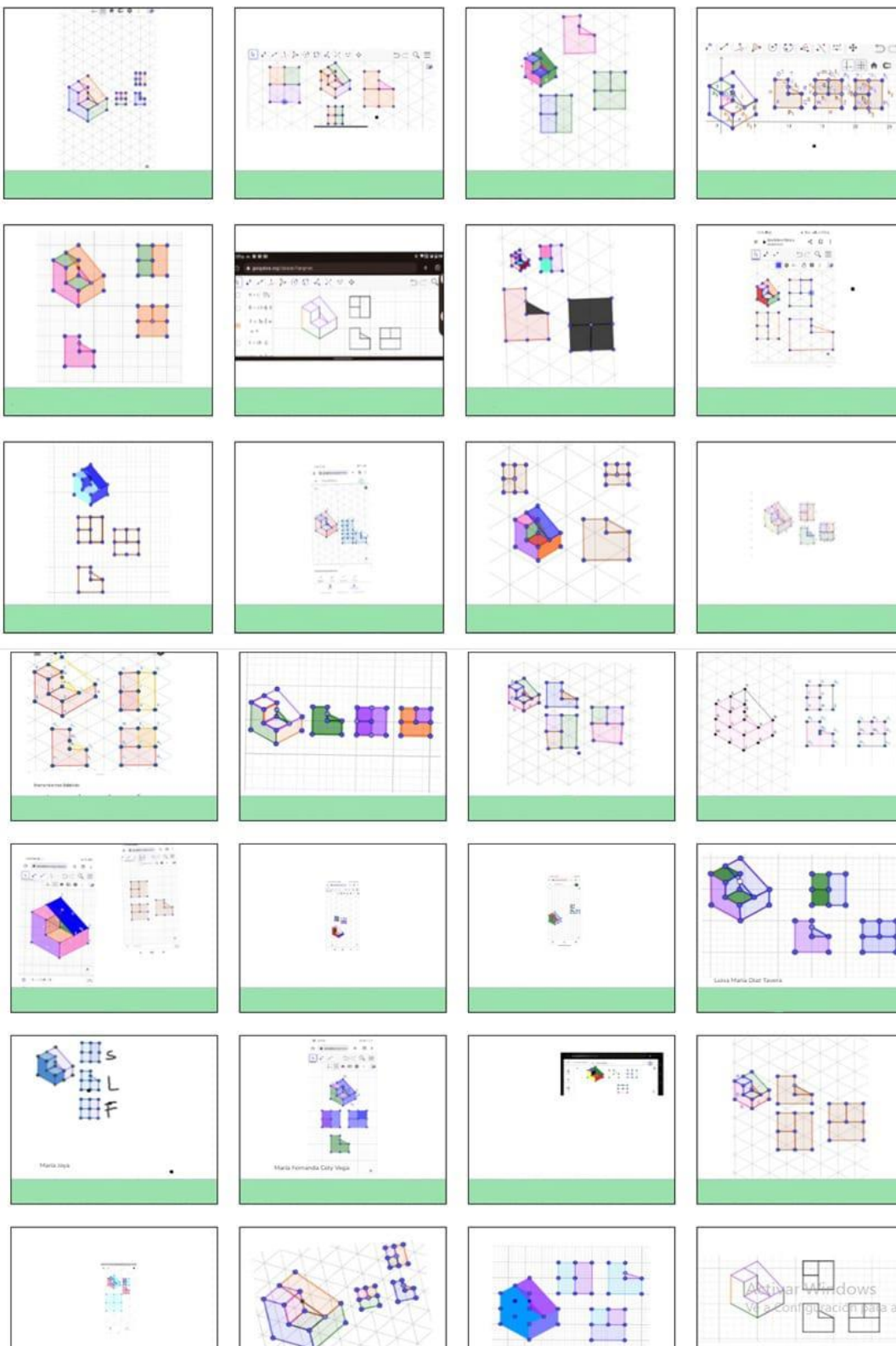
## En GeoGebra

Dibuja la siguiente figura en perspectiva isométrica y realiza el dibujo de alzado, planta y perfil



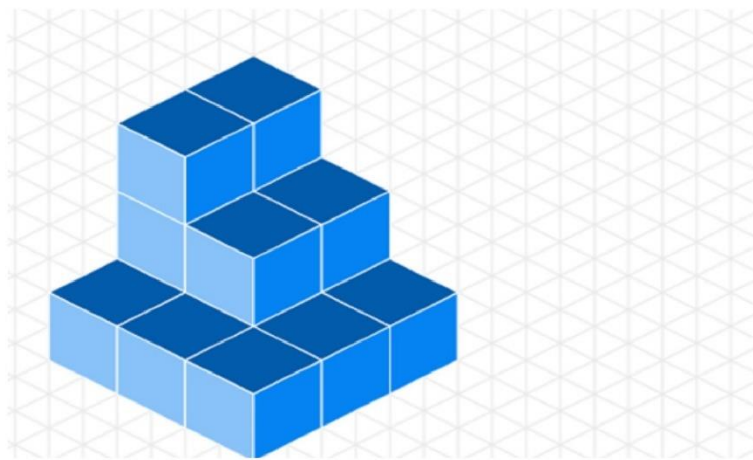


Sube la evidencia de tu trabajo en GeoGebra



*Apéndice D-Taller 4*

Observa el volumen del sólido número 3. ¿Cuántos cubos de una unidad caben en este sólido?

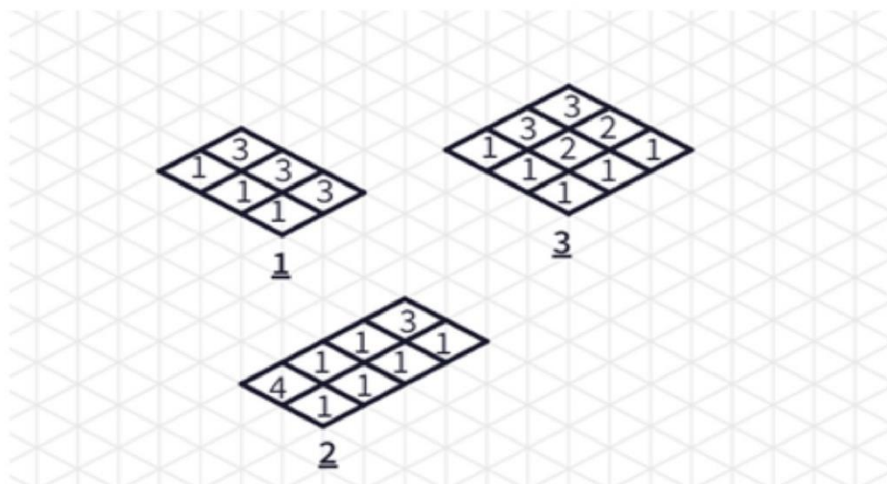


Lección: Taller 4

2/2



Dibujar el sólido que se indique, encontrar las vistas, el desplegable, el área y volumen de cada uno.



Lección: Taller 4

1/2

