

Análisis de la estructura del campo gravitacional en modelos compuestos por la superposición de un agujero negro de Schwarzschild con un disco anular

Cristian Sneydder Urrea Avella

Trabajo de grado para optar al título de Físico

Director

Guillermo Alfonso González Villegas

Físico, Ms.Sc., Ph D.

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2023

Agradecimientos

Agradezco especialmente a mi director, Guillermo Alfonso González Villegas, cuyo esfuerzo y dedicación fueron fundamentales para la culminación de esta gran etapa.

A mi familia quienes han sido mi mayor apoyo a lo largo de estos años, y en especial a mi Mallory y Cherie quienes me han dado fuerza para poder culminar con esta etapa. También agradezco a mis amigos y compañeros por las risas compartidas, las horas de estudio juntos y el apoyo mutuo en los momentos difíciles, los cuales han hecho estos años de universidad más llevaderos.

Finalmente, agradezco a la Universidad Industrial de Santander, por brindarme una plataforma excepcional para mi crecimiento académico y personal. Estos años han sido una travesía de aprendizaje significativa, y estoy agradecido por las oportunidades que esta institución me ha proporcionado.

Tabla de Contenido

INTRODUCCIÓN	7
1. MÉTRICA DE WEYL	11
2. CAMPO GRAVITACIONAL	15
2.1. Cuadri-aceleración	15
2.2. Líneas de campo	19
3. SISTEMAS BINARIOS AGUJERO NEGRO DE SCHWARZCHILD Y DISCO ANULAR	24
3.1. Agujero negro de Schwarzschild	24
3.2. Disco anular	28
4. CONCLUSIONES	38
BIBLIOGRAFIA	39

Lista de Figuras

- Figura 1. Líneas de campo gravitacional para un agujero negro de Schwarzschild, graficadas en coordenadas de Weyl. Normalizada en términos de a y tomando $m = a = 1$ 33
- Figura 2. Líneas equipotenciales de un agujero negro de Schwarzschild, graficadas en coordenadas de Weyl. Normalizada en términos de a y tomando $m = a = 1$ 34
- Figura 3. Líneas de campo gravitacional de un disco anular, graficadas en coordenadas de Weyl. Normalizada en términos de a y tomando $m = a = 1$ 35
- Figura 4. Líneas equipotenciales de un disco anular, graficadas en coordenadas de Weyl. Normalizada en términos de a y tomando $m = a = 1$ 35
- Figura 5. Líneas de campo gravitacional para la superposición de un agujero negro de Schwarzschild y un disco anular, graficadas en coordenadas de Weyl. Normalizada en términos de a y tomando $m = a = 1$ 36
- Figura 6. Líneas equipotenciales para la superposición de un agujero negro de Schwarzschild y un disco anular, graficadas en coordenadas de Weyl. Normalizada en términos de a y tomando $m = a = 1$ 37

Resumen

Título: Análisis de la estructura del campo gravitacional en modelos compuestos por la superposición de un agujero negro de Schwarzschild con un disco anular *

Autor: Cristian Sneydder Urrea Avella **

Palabras Clave: Geodésicas, Espacio-Tiempo de Weyl, Discos Anulares, Agujeros Negros, Líneas de Campo Gravitacional.

Descripción: Se presenta un estudio de la estructura del campo gravitacional en un espacio-tiempo de Weyl correspondiente a la superposición de un agujero negro de Schwarzschild con el primer miembro de la familia de discos anulares de González, Gutiérrez-Piñeres y Viña-Cervante (González et al., 2009). Las propiedades del sistema compuesto se estudian mediante un análisis de las líneas de campo gravitacional, las cuales se definen como las curvas integrales de la cuadri-aceleración de observadores estacionarios con momento angular cero con respecto al eje de simetría. Se describe el proceso por el cual se obtiene un tensor métrico capaz de describir el sistema compuesto mencionado anteriormente y a partir de este se estudia el comportamiento de la cuadri-aceleración de dichos observadores, y se estudia igualmente la distorsión en el horizonte de eventos.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Grupo de investigación en Relatividad y Gravitación. Escuela de Física. Director: Guillermo Alfonso González Villegas, Ph.D.

Abstract

Title: Analysis of the structure of the gravitational field in models composed of the superposition of a Schwarzschild black hole with an annular disk *

Autor: Cristian Sneydder Urrea Avella **

Keywords: Geodesics, Weyl Space-Time, Annular Disks, Black Holes, Gravitational Field Lines.

Description: A study of the structure of the gravitational field in a Weyl space-time corresponding to the superposition of a Schwarzschild black hole with the first member of the family of annular disks of González, Gutiérrez-Piñeres and Viña-Cervante is presented (González et al., 2009). The properties of the composite system are studied through an analysis of the gravitational field lines, which are defined as the integral curves of the quadri-acceleration of stationary observers with zero angular momentum with respect to the axis of symmetry. The process by which a metric tensor capable of describing the aforementioned composite system is obtained is described and from this the behavior of the quadri-acceleration of said observers is studied, and the behavior of the quadri-acceleration of said observers is studied.

* Degree Work

** Facultad de Ciencias. Grupo de investigación en Relatividad y Gravitación. Escuela de Física. Director: Guillermo Alfonso González Villegas, Ph.D.

INTRODUCCIÓN

En astrofísica y cosmología es de gran interés el estudio de la evolución del universo con el fin de realizar modelos los cuales nos ayuden comprender los fenómenos que suceden en el mismo. El estudio de los agujeros negros es de gran relevancia ya que nos permite investigar las condiciones extremas en las que la gravedad tiene gran importancia, especialmente en el horizonte de eventos. Además, el estudio de los agujeros negros nos da información sobre el origen y la evolución del universo, lo cual es apoyado con las observaciones las cuales han logrado deducir que los agujeros negros son el resultado de la evolución estelar y galáctica, es por esto la gran relevancia en estudiar y comprender todas las interacciones que estos tienen. A su vez el estudio de los discos anulares es importante ya que nos otorga información sobre la evolución de los planetas, estrellas y galaxias. Un interés particular radica en el estudio de los sistemas binarios compuestos por un agujero negro rodeado por un disco delgado (disco anular).

Por medio de la solución de las ecuaciones de campo de Einstein podemos analizar el comportamiento del campo gravitacional de los cuerpos en el cosmos. La obtención de estas soluciones para agujeros negros y discos anulares es una tarea complicada ya que se debe tener en cuenta factores como la rotación, la polarización, la magnetización, la carga, la densidad, la geometría, etc. Es por esto que al analizar estos cuerpos se hace necesario realizar algunas aproximaciones las cuales nos reduzcan la complejidad del problema, entre estas aproximaciones está considerar un espacio-tiempo axisimétrico y estático. Considerar nuestro espacio-tiempo estático descarta fenó-

menos de dinámica de fluidos los cuales pueden estar presentes en el disco anular, considerarlo axisimétrico nos permite hacer uso de simetrías esferoidales las cuales nos permitan una solución más sencilla de las ecuaciones de campo de Einstein. A su vez, no se tomará en cuenta fenómenos de polarización ni magnetización y se considerará el disco anular en el plano ecuatorial del agujero negro.

El estudio de los campos gravitacionales para modelos compuestos por la superposición de un agujero negro de Schwarzschild con un disco anular de polvo son ampliamente estudiados, ya sea por las perturbaciones del espacio-tiempo, análisis numérico de las ecuaciones de Einstein o por la obtención de soluciones analíticas de las ecuaciones de Einstein. El estudio por medio de las perturbaciones del espacio-tiempo es amplio, Teukolsky separó las ecuaciones desacopladas para las perturbaciones de un agujero negro de Kerr obteniendo las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden para escalares a partir del tensor de Weyl (Teukolsky, 1973). Posteriormente Chandrasekhar encontró las soluciones a estas ecuaciones (Chandrasekhar, 1979). Chrzanowski calculó las perturbaciones del tensor métrico a partir de las soluciones de las ecuaciones de Teukolsky (Chrzanowski, 1975), posteriormente estudió la distorsión del horizonte de eventos del agujero negro (Chrzanowski, 1976). Demianski abordó este problema tomando simetría axial y estacionaria (Demianski, 1976). Linet determinó la función de Green estacionaria axisimétrica de la ecuación de Teukolsky (Linet, 1977). La perturbación de la métrica de Schwarzschild por un anillo ecuatorial delgado no estacionario axisimétrico débilmente gravitante fue estudiado por Will (Will, 1974), Campanelli y Lousto analizan las perturbaciones gravitacionales invariantes de

calibre de segundo orden de un agujero negro de Kerr (Campanelli and Lousto, 1999). Poisson calcula la absorción de masa y momento angular por parte de un agujero negro cuando procesos externos producen radiación gravitatoria (Poisson, 2004).

Por otra parte, el análisis numérico de las ecuaciones de Einstein en sistemas con agujeros negros es complicado. Lanza analizó espacio-tiempos que contienen un agujero negro giratorio con un disco ecuatorial delgado finito (Lanza, 1992), posteriormente Nishida y Eriguchi analizaron un agujero negro con un toroide grueso (Nishida and Eriguchi, 1994). Sandip y Chakrabarti estudiaron procesos astrofísicos para un sistema de un agujero negro y un disco de acreción (Chakrabarti, 1996), Ansorg y Petroff obtienen resultados numéricos que muestran que las configuraciones pueden alcanzar un límite interno de desprendimiento de masa a medida que aumenta la masa del agujero negro (Ansorg and Petroff, 2005), Duez y Zlochower realizan una revisión de los análisis numéricos de objetos compactos y objetos binarios compactos realizados en las dos décadas del siglo XXI (Duez and Zlochower, 2018).

Así mismo, los estudios correspondientes a la obtención de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein en sistemas binarios compuestos por un agujero negro y un disco anular son variados. Žáček y Semerák estudiaron la clase de discos anulares de Lemos-Letelier (discos finos axisimétricos estáticos gravitatorios obtenidos por inversión de la primera solución de Morgan-Morgan) alrededor de los agujeros negros de Schwarzschild (Semerák and Žáček, 2000), posteriormente obtuvieron una secuencia de espacio-tiempos exactos que describen los campos de un

agujero negro de Schwarzschild rodeado por discos finos axisimétricos y estáticos estables que tienen su borde interior en el menor radio posible (Žáček and Semerák, 2002). González y Gutiérrez-Piñeres obtuvieron la solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein correspondientes a la superposición de un disco de polvo contrarrotante con un agujero negro central (González and Gutiérrez-Piñeres, 2008), posteriormente González, Gutiérrez-Piñeres y Viña-Cervantes analizaron discos finos de polvo estáticos con un borde interior obteniendo una familia infinita de soluciones exactas para las ecuaciones de Einstein en el vacío (González et al., 2009). Semerák, Zellerin y Žáček estudiaron la estructura del campo gravitacional y su distorsión en el horizonte de eventos para sistemas compuestos por un agujero negro de Schwarzschild y el anillo de Apell (Semerák et al., 1999).

En este trabajo de grado se busca analizar las líneas de campo gravitacional para la superposición de un agujero negro de Schwarzschild con un disco anular. Para realizar este análisis se partirá de las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein (de un espacio-tiempo axisimétrico y estático) para el agujero negro y un disco anular, se realizará la superposición de estas soluciones, con esta superposición se determinará el tensor métrico con el fin de encontrar la expresión de la cuadri-aceleración. Posteriormente se realizará la gráfica de las líneas de campo gravitacional y se analizará el comportamiento de estas en el horizonte de eventos.

1. MÉTRICA DE WEYL

La métrica de Weyl para un espacio-tiempo axisimétrico y estático tiene la forma (Stephani et al., 2009)

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{-2\nu} (\rho^2 d\phi^2 + e^{2\Lambda} d\rho^2 + e^{2\Lambda} dz^2), \quad (1)$$

en coordenadas de Weyl (t, ϕ, ρ, z) . Reescribiendo la métrica de la forma

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{-2\nu} dl^2, \quad (2)$$

con el elemento de línea dl^2 dado por

$$dl^2 = h_1^2 (dx^1)^2 + h_2^2 (dx^2)^2 + h_3^2 (dx^3)^2, \quad (3)$$

donde h_i , con $i = 1, 2, 3$, corresponde a los factores de escala, la métrica de Weyl se expresa como

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{-2\nu} (h_\phi^2 d\phi^2 + h_\rho^2 d\rho^2 + h_z^2 dz^2). \quad (4)$$

Los factores de escala para la métrica de Weyl se obtienen de la ecuación (1) y están dados por

$$h_\phi = \rho, \quad h_\rho = e^\Lambda, \quad h_z = e^\Lambda. \quad (5)$$

Analizando la métrica se obtiene el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ el cual tiene la forma

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_\phi^2 e^{-2\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_\rho^2 e^{-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_z^2 e^{-2\nu} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Weyl demostró que en las coordenadas canónicas de Weyl la métrica se puede escribir en términos de dos funciones, ν y Λ , las cuales solo dependen de las coordenadas ρ y z (Weyl, 1917).

Las ecuaciones de campo de Einstein tienen la forma (Semerák et al., 1999)

$$\Lambda_{,\rho\rho} + \Lambda_{,zz} - \nabla^2 \nu + \nu_{,\rho}^2 + \nu_{,z}^2 = 4\pi e^{2(\Lambda-\nu)} (T_t^t + T_\phi^\phi), \quad (7)$$

$$\rho^{-1} \nu_{,\rho} + \nu_{,\rho\rho} + \nu_{,zz} = \nabla^2 \nu = 4\pi e^{2(\Lambda-\nu)} (T_\phi^\phi - T_t^t), \quad (8)$$

$$\rho^{-1} \Lambda_{,\rho} - \nu_{,\rho}^2 + \nu_{,z}^2 = 4\pi (T_{\rho\rho} - T_{zz}), \quad (9)$$

$$\rho^{-1}\Lambda_{,z} - 2v_{,\rho}v_{,z} = 8\pi T_{\rho z}, \quad (10)$$

donde $T_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía-momentum. En el caso del vacío tenemos que $T_{\alpha\beta} = 0$, por lo tanto la función v es solución de la ecuación de Laplace (ver ecuación 8)

$$\nabla^2 v = 0. \quad (11)$$

De las ecuaciones (9) y (10) se obtiene la expresión para Λ , la cual es de la forma

$$\Lambda[v] = \int \rho [(v_{,\rho}^2 - v_{,z}^2)d\rho + 2v_{,\rho}v_{,z}dz]. \quad (12)$$

Proponiendo una solución para la ecuación (8) de la forma

$$v = \psi + \varphi, \quad (13)$$

donde ψ corresponde a la solución para el agujero negro de Schwarzschild y φ corresponde a la solución del disco anular, de las ecuaciones (12) y (13) se obtiene

$$\Lambda[v] = \Lambda[\psi] + \Lambda[\varphi] + 2\Lambda[\psi, \varphi], \quad (14)$$

donde

$$\Lambda[\psi, \varphi] = \int \rho [(\psi_{,\rho} \varphi_{,\rho} - \psi_{,z} \varphi_{,z}) d\rho + 2(\psi_{,\rho} \varphi_{,z} + \psi_{,z} \varphi_{,\rho}) dz]. \quad (15)$$

2. CAMPO GRAVITACIONAL

Para obtener una correcta interpretación del campo gravitacional se realizará el análisis de la cuadri-aceleración y se analizarán las líneas de campo gravitacional las cuales son definidas como las curvas integrales de la cuadri-aceleración. Estas líneas nos proporcionan información sobre las trayectorias y el comportamiento de las partículas bajo la influencia de la fuerza gravitacional.

2.1. Cuadri-aceleración

Partiendo de la definición de la cuadri-aceleración en términos de la derivada covariante de la cuadri-velocidad se obtiene

$$a^\beta = u^\mu u^\beta_{;\mu} + \Gamma^\beta_{\nu\tau} u^\nu u^\tau, \quad (16)$$

donde $\Gamma^\beta_{\nu\tau}$ son los símbolos de Christoffel, los cuales cumplen la relación

$$\Gamma^\beta_{\nu\tau} = \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} (g_{\gamma\nu,\tau} + g_{\tau\gamma,\nu} - g_{\nu\tau,\gamma}), \quad (17)$$

obteniendo así la expresión para la cuadri-aceleración en términos del tensor métrico

$$a^\beta = u^\mu u^\beta_{;\mu} + \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} (g_{\gamma\nu,\tau} + g_{\tau\gamma,\nu} - g_{\nu\tau,\gamma}) u^\nu u^\tau. \quad (18)$$

La expresión anterior se puede reescribir de forma covariante de la forma

$$a_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\mu u^\beta_{,\mu} + \frac{1}{2} \delta_\alpha^\gamma (g_{\gamma\nu,\tau} + g_{\tau\gamma,\nu} - g_{\nu\tau,\gamma}) u^\nu u^\tau. \quad (19)$$

Considerando un espacio-tiempo axisimétrico y estacionario, la métrica en coordenadas cilíndricas (Weyl-Lewis-Papapetrou) tendrá la forma (Semerák et al., 1999)

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{t\phi} dt d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2 + g_{zz} dz^2, \quad (20)$$

donde el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ solo depende de las coordenadas ρ y z . Las funciones métricas g_{tt} , $g_{t\phi}$ y $g_{\phi\phi}$ están dadas por los vectores de campo de Killing $\eta^\alpha = \partial x^\alpha / \partial t$ y $\xi^\alpha = \partial x^\alpha / \partial \phi$ como

$$g_{tt} = \eta_\alpha \eta^\alpha, \quad g_{t\phi} = \eta_\alpha \xi^\alpha, \quad g_{\phi\phi} = \xi_\alpha \xi^\alpha. \quad (21)$$

Los observadores que se mueven a lo largo de las líneas de campo observan que este no cambia, estos observadores se consideran observadores estacionarios y son utilizados como sistemas de referencia comóvil, los cuales tienen una cuadri-velocidad de la forma

$$u^\alpha = u^t (1, \Omega, 0, 0), \quad (22)$$

$$u^t = (-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2). \quad (23)$$

Partiendo de la definición de la cuadri-velocidad descrita en la ecuación (22) se tiene que el termino $u^\mu u^\beta_{,\mu}$ de la ecuación (19) toma la forma

$$u^\mu u^\beta_{,\mu} = u^t u^\beta_{,t} + u^\phi u^\beta_{,\phi}, \quad (24)$$

donde se puede evidenciar que debido a la definición de u^t en términos del tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ (descrita en (23)) las derivadas t y ϕ de u^β son igual a cero, por lo tanto

$$u^\mu u^\beta_{,\mu} = 0. \quad (25)$$

Reemplazando (25) en (19) se obtiene

$$a_\alpha = -\frac{1}{2}g_{v\tau,\alpha}u^v u^\tau + g_{\alpha\tau,v}u^v u^\tau. \quad (26)$$

Analizando el segundo término de la ecuación (26) se tiene que se puede expresar de la siguiente manera

$$g_{\alpha\tau,v}u^v u^\tau = g_{\alpha\tau,\rho}u^\tau u^\rho + g_{\alpha\tau,z}u^\tau u^z = 0, \quad (27)$$

debido a que el tensor métrico solo depende las coordenadas ρ y z se tiene que las derivadas

con respecto a t y ϕ son igual a cero y haciendo uso de la definición de la cuadri-velocidad descrita en la ecuación (22), se tiene que las componentes u^{ρ} y u^z son iguales a cero por lo tanto la expresión (27) es igual a cero. Simplificando (26) se obtiene al final una expresión para la cuadri-aceleración la cual solo depende de la derivada covariante del tensor métrico y de la cuadri-velocidad

$$a_{\alpha} = -\frac{1}{2}g_{\nu\tau,\alpha}u^{\nu}u^{\tau}. \quad (28)$$

Para observadores estacionarios con momento angular cero respecto al eje de simetría la velocidad angular azimutal será

$$\Omega = -g_{t\phi}/g_{\phi\phi} \equiv \omega. \quad (29)$$

Por lo tanto la componente temporal de la cuadri-velocidad será entonces

$$u^t = (g_{tt} - g_{t\phi}\omega)^{-1/2} = \sqrt{-g^{tt}}. \quad (30)$$

En el espacio-tiempo de Weyl tenemos que $g_{t\phi} = 0$, por lo tanto $\omega = 0$, entonces la componente temporal de la cuadri-velocidad para un observador estacionario será

$$u^t = (g_{tt})^{-1/2}, \quad (31)$$

y la expresión de la cuadri-aceleración (19) toma la forma

$$a_\alpha = \frac{g_{tt,\alpha}}{2g_{tt}} = \frac{1}{2}[\ln(-g_{tt})], \alpha. \quad (32)$$

Analizando el elemento de línea para un espacio-tiempo de Weyl tenemos que $g_{tt} = -e^{2v}$, por lo tanto la cuadri-aceleración tendrá la forma

$$a_\alpha = v_{,\alpha}. \quad (33)$$

2.2. Líneas de campo

Las líneas de campo gravitacional nos ayudan a visualizar como el espacio-tiempo se curva debido a la presencia de la masa y la energía. El campo gravitacional en relatividad general no es descrito mediante líneas tridimensionales como en la mecánica Newtoniana, sino que es descrito mediante la curvatura del espacio tiempo en un diagrama de espacio-tiempo. Estas líneas de campo gravitacional son definidas como las curvas integrales de la cuadri-aceleración, con el fin de determinar una expresión de estas líneas se partirá de su definición en forma diferencial, la cual tiene la forma

$$dx^\alpha = g^{\alpha\beta} a_\beta d\lambda, \quad (34)$$

donde λ corresponde al parámetro. Determinando cada componente de la ecuación diferencial (34), se tiene

$$dx^0 = g^{00} a_0 d\lambda = 0, \quad (35)$$

$$dx^1 = g^{11} a_1 d\lambda = 0, \quad (36)$$

$$dx^2 = g^{22} a_2 d\lambda = \frac{e^{2\nu} a_2}{h_2^2} d\lambda, \quad (37)$$

$$dx^3 = g^{33} a_3 d\lambda = \frac{e^{2\nu} a_3}{h_3^2} d\lambda. \quad (38)$$

Las ecuaciones (35) y (36) son iguales a cero debido a la definición de la cuadri-aceleración presentada en (33), el tensor métrico $g^{\alpha\beta}$ se puede obtener analizando la métrica definida en (2).

De las ecuaciones (37) y (38) se tiene que el diferencial del parámetro λ es igual a

$$d\lambda = \frac{e^{2\nu} h_2^2 dx^2}{a_2} = \frac{e^{2\nu} h_3^2 dx^3}{a_3}. \quad (39)$$

Por último, despejando la expresión (39) se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$h_2^2 a_3 dx^2 - h_3^2 a_2 dx^3 = 0, \quad (40)$$

la solución a esta ecuación representa las líneas de campo gravitacional. Multiplicando la

ecuación (40) por los factores de escala se obtiene

$$\frac{h_1 h_2}{h_3} v_{,3} dx^2 - \frac{h_1 h_3}{h_2} v_{,2} dx^3 = 0. \quad (41)$$

Definiendo

$$M(x^2, x^3) = \frac{h_1 h_2}{h_3} v_{,3}, \quad (42)$$

$$N(x^2, x^3) = -\frac{h_1 h_3}{h_2} v_{,2}, \quad (43)$$

suponiendo que $M(x^2, x^3)$ y $N(x^2, x^3)$ tienen primeras derivadas parciales continuas para todo (x^2, x^3) y expresando la ecuación (41) en términos de (42) y (43), se tiene

$$M(x^2, x^3) dx^2 + N(x^2, x^3) dx^3 = 0. \quad (44)$$

Definiendo una función V tal que la expresión (44) toma la forma

$$M(x^2, x^3) dx^2 + N(x^2, x^3) dx^3 = \frac{\partial V}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial V}{\partial x^3} dx^3. \quad (45)$$

Por lo tanto

$$M(x^2, x^3) = \frac{\partial V}{\partial x^2}, \quad N(x^2, x^3) = \frac{\partial V}{\partial x^3}, \quad (46)$$

al derivar a $M(x^2, x^3)$ con respecto a x^3 y a $N(x^2, x^3)$ con respecto a x^2 , se obtiene

$$\frac{\partial M}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\partial V}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2 \partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial V}{\partial x^3} \right) = \frac{\partial N}{\partial x^2}. \quad (47)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial N}{\partial x^2} - \frac{\partial M}{\partial x^3} = 0. \quad (48)$$

Reescribiendo (48) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} v_{,2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} v_{,3} \right) = \nabla^2 v = 0. \quad (49)$$

La cual corresponde a la ecuación de Laplace, por lo cual la función v es solución de la ecuación de Laplace.

Partiendo de la definición de $M(x^2, x^3)$ presentada en la ecuación (46) se puede encontrar la función V al integrar con respecto a x^2 , obteniendo

$$V(x^2, x^3) = \int M(x^2, x^3) dx^2 + g(x^3), \quad (50)$$

donde la función $g(x^3)$ corresponde a la constante de integración. Al derivar a $V(x^2, x^3)$ con respecto a x^3 y tomando $N(x^2, x^3) = \frac{\partial V}{\partial x^3}$ definida en (46), se tiene

$$V(x^2, x^3)_{,3} = \frac{\partial}{\partial x^3} \int M(x^2, x^3) dx^2 + g_{,3}(x^3) = N(x^2, x^3). \quad (51)$$

Por lo tanto

$$g_{,3}(x^3) = N(x^2, x^3) - \frac{\partial}{\partial x^3} \int M(x^2, x^3) dx^2. \quad (52)$$

Por último se integran (52) con respecto a x^3 y se sustituye el resultado en (50).

De manera similar se puede realizar el anterior análisis pero esta vez partiendo de la definición de $N(x^2, x^3)$ presentada en (46) integrando con respecto a x^3 , obteniendo así la expresión para la función V y la constante de integración que en este caso se denota por $h_2(x^2)$

$$V(x^2, x^3) = \int M(x^2, x^3) dx^3 + h(x^2), \quad (53)$$

$$h_2(x^2) = M(x^2, x^3) - \frac{\partial}{\partial x^2} \int N(x^2, x^3) dx^3. \quad (54)$$

3. SISTEMAS BINARIOS AGUJERO NEGRO DE SCHWARZCHILD Y DISCO ANULAR

Con el fin de obtener soluciones analíticas se toma un agujero negro de Schwarzschild y un disco anular los cuales se representan en un espacio tiempo axisimétrico y estático lo cual reduce la complejidad de los cálculos, analizando las soluciones particulares y obteniendo la cuadri-aceleración y líneas de campo del agujero y disco se obtiene de manera más sencilla las líneas de campo del sistema binario compuesto por estos dos objetos.

3.1. Agujero negro de Schwarzschild

Para el agujero negro se toma la solución de Schwarzschild, donde ψ tiene la forma (González and Gutiérrez-Piñeres, 2008)

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right], \quad (55)$$

y Λ es de la forma

$$\Lambda[\psi] = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2} \right], \quad (56)$$

con ξ y η las coordenadas esferoidales prolatas, las cuales se definen por medio de

$$\rho^2 = m^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2), \quad z = m\xi\eta, \quad (57)$$

con $1 \leq \xi \leq \infty$ y $-1 \leq \eta \leq 1$. Haciendo uso de la expresión (33) se obtiene así la cuadri-aceleración correspondiente al agujero negro

$$a_\xi = \frac{1}{\xi^2 - 1}, \quad a_\eta = 0, \quad (58)$$

la cuadri-aceleración se descompone en dos componentes, a_ξ y a_η . Debido a la naturaleza de las soluciones, se observa que la cuadri-aceleración no depende de la coordenada η .

Partiendo de la ecuación (40) la cual nos define las líneas de campo gravitacional en términos de las componentes de la cuadri-aceleración obtenemos la expresión para la ecuación diferencial de las líneas de campo

$$h_\eta^2 a_\xi d\eta - h_\xi^2 a_\eta d\xi = 0. \quad (59)$$

Para obtener los factores de escala correspondientes se partirá de la definición presentada en la ecuación (57) la cual nos relaciona las coordenadas prolatas con las cilíndricas. Se puede obtener la forma que tendrá la métrica de Weyl donde

$$d\rho = m\xi \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{\xi^2-1}} d\xi - m\eta \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta, \quad (60)$$

$$dz = m\eta d\xi + m\xi d\eta. \quad (61)$$

Al introducir (60) y (61) en (1) se tiene

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{-2\nu} \left(\frac{m^2 e^{2\Lambda} (\xi^2 - \eta^2)}{\xi^2 - 1} d\xi^2 + m^2 (\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) d\phi^2 + \frac{m^2 e^{2\Lambda} (\xi^2 - \eta^2)}{1 - \eta^2} d\eta^2 \right) \quad (62)$$

Analizando (62) se obtienen los factores de escala los cuales tienen la forma

$$h_\xi = e^\Lambda \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, \quad h_\eta = e^\Lambda \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}, \quad h_\phi = \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \quad (63)$$

multiplicando la ecuación (59) por los factores de escala se obtiene

$$\frac{h_\phi h_\eta}{h_\xi} a_\xi d\eta - \frac{h_\phi h_\xi}{h_\eta} a_\eta d\xi = 0. \quad (64)$$

Definiendo

$$M(\xi, \eta) = \frac{h_\phi h_\eta}{h_\xi} a_\xi = 1, \quad N(\xi, \eta) = -\frac{h_\phi h_\xi}{h_\eta} a_\eta = 0, \quad (65)$$

la ecuación diferencial (64) toma la forma

$$M(\xi, \eta)d\eta + N(\xi, \eta)d\xi = 0, \quad (66)$$

donde se puede demostrar fácilmente que la ecuación (66) cumple con la condición de integrabilidad $\partial_\xi M(\xi, \eta) - \partial_\eta N(\xi, \eta) = 0$, obteniendo la solución correspondiente

$$V_\psi(\xi, \eta) = \int M(\xi, \eta)d\eta + g(\xi) = \eta + g(\xi) \quad (67)$$

donde la función $g(\xi)$ es la constante de integración.

Ahora, al derivar la ecuación (67) con respecto a ξ y suponiendo que $V_{\psi, \xi}(\xi, \eta) = N(\xi, \eta)$

$$V_{\psi, \xi}(\xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial \xi} \int M(\xi, \eta)d\eta + g_{, \xi}(\xi) = N(\xi, \eta). \quad (68)$$

Debido a que $a_\eta = 0$, se tiene que $N(\xi, \eta) = 0$ (ver (65)), por tanto de la ecuación (68) se obtiene

$$\frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi} = 0, \quad (69)$$

obteniendo así que la función arbitraria $g(\xi) = 0$, por lo tanto, se puede determinar la función V_ψ la cual nos expresa el comportamiento de líneas de campo gravitacional

$$V_\psi(\xi, \eta) = \eta. \quad (70)$$

En términos de las coordenadas de Weyl tenemos que la expresión correspondiente que representa las líneas de campo gravitacional toma la forma

$$V_\psi(\rho, z) = \frac{\sqrt{(z+m)^2 + \rho^2} - \sqrt{(z-m)^2 + \rho^2}}{2m}, \quad (71)$$

donde se tiene que las coordenadas esferoidales prolatas (ξ, η) cumplen la siguiente relación

$$\xi = \frac{R_1 + R_2}{2m}, \quad \eta = \frac{R_1 - R_2}{2m}, \quad (72)$$

donde

$$R_{1,2} = \sqrt{(z \pm m)^2 + \rho^2}. \quad (73)$$

3.2. Disco anular

Para el disco anular se toma la primera familia de soluciones de González, Gutiérrez-Piñeres y Viña-Cervantes (González et al., 2009), donde φ es de la forma

$$\varphi = \frac{\alpha y}{a(x^2 + y^2)}, \quad (74)$$

y Λ es de la forma

$$\Lambda[\varphi] = -\frac{\alpha^2}{4a^2} \left[\frac{1 - y^2}{(x^2 + y^2)^4} \right], \quad (75)$$

con x y y las coordenadas esferoidales oblatas, las cuales se definen por medio de

$$\rho^2 = a^2(1 + x^2)(1 - y^2), \quad z = axy, \quad (76)$$

con $-\infty \leq x \leq \infty$ y $0 \leq y \leq 1$. Obteniendo así la cuadri-aceleración correspondiente al disco anular

$$a_x = -\frac{2\alpha xy}{a(x^2 + y^2)^2}, \quad (77)$$

$$a_y = \frac{\alpha}{a(x^2 + y^2)} - \frac{2\alpha y^2}{a(x^2 + y^2)^2}, \quad (78)$$

descomponiendo así la cuadri-aceleración en componentes a_x y a_y .

Partiendo de la ecuación (40) la cual nos define las líneas de campo gravitacional en términos de las componentes de la cuadri-aceleración obtenemos la expresión para la ecuación diferencial de las líneas de campo

$$h_x^2 a_y dx - h_y^2 a_x dy = 0. \quad (79)$$

Para obtener los factores de escala correspondientes se partirá de la definición presentada en la ecuación (76) la cual nos relaciona las coordenadas oblatas con las cilíndricas. Se puede obtener la forma que tendrá la métrica de Weyl donde

$$d\rho = ax \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{x^2+1}} dx - ay \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1-y^2}} dy, \quad (80)$$

$$dz = aydx + axdy. \quad (81)$$

Al introducir (80) y (81) en (1) se tiene

$$ds^2 = -e^{2v} dt^2 + e^{-2v} \left(a^2 (1+x^2)(1-y^2) d\phi^2 + \frac{a^2 e^{2\Lambda} (x^2+y^2)}{x^2+1} dx^2 + \frac{a^2 e^{2\Lambda} (x^2+y^2)}{1-y^2} dy^2 \right). \quad (82)$$

Analizando (82) se obtienen los factores de escala los cuales tienen la forma

$$h_x = e^\Lambda \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad h_y = e^\Lambda \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad h_\phi = \sqrt{(x^2 + 1)(1 - y^2)}, \quad (83)$$

multiplicando la ecuación (79) en términos de los factores de escala se obtiene

$$\frac{h_\phi h_x}{h_y} a_y dx - \frac{h_\phi h_y}{h_x} a_x dy = 0. \quad (84)$$

Definiendo

$$M(x, y) = \frac{h_\phi h_x}{h_y} a_y = \alpha \frac{y^4 - (x^2 + 1)y^2 + x^2}{y^4 + 2x^2y^2 + x^4}, \quad (85)$$

$$N(x, y) = -\frac{h_\phi h_y}{h_x} a_x = 2\alpha \frac{(x^2 + 1)xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (86)$$

por lo tanto la ecuación diferencial (84) toma la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (87)$$

donde se puede demostrar fácilmente que la ecuación (87) cumple con la condición de integrabilidad $\partial_y M(x, y) - \partial_x N(x, y) = 0$, obteniendo la solución correspondiente

$$V_\phi(x, y) = \int N(x, y)dy + g(x) = -\frac{\alpha x(x^2 + 1)}{x^2 + y^2} + g(x), \quad (88)$$

donde la función $g(x)$ es la constante de integración.

Ahora, al derivar la ecuación (88) con respecto a x y suponiendo que $V_{\varphi,x}(x,y) = M(x,y)$

$$V_{\varphi,x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \int N(x,y)dy + g_{,x}(x) = M(x,y). \quad (89)$$

Reemplazando $N(x,y)$ en la ecuación (89) se obtiene

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = \alpha, \quad (90)$$

obteniendo así que la función arbitraria $g(x) = \alpha x$, por lo tanto, se puede determinar la función V_{φ} la cual nos expresa el comportamiento de líneas de campo gravitacional

$$V_{\varphi}(x,y) = \alpha x \left[\frac{y^2 - 1}{y^2 + x^2} \right]. \quad (91)$$

En términos de las coordenadas de Weyl tenemos que la expresión correspondiente que representa las líneas de campo gravitacional toma la forma

$$V_{\varphi}(R_3, R_4) = -\frac{(R_3 + R_4)(4a^2 + R_3^2 - 2R_3R_4 + R_4^2)}{8aR_3R_4} \quad (92)$$

donde se tiene que las coordenadas esferoidales oblatas (x,y) cumplen la siguiente relación

$$x = \frac{R_3 + R_4}{2a}, \quad y = \frac{R_3 - R_4}{2ia} \quad (93)$$

donde

$$R_{3,4} = \sqrt{(z \pm ia)^2 + \rho^2}. \quad (94)$$

Líneas de Campo Gravitacional

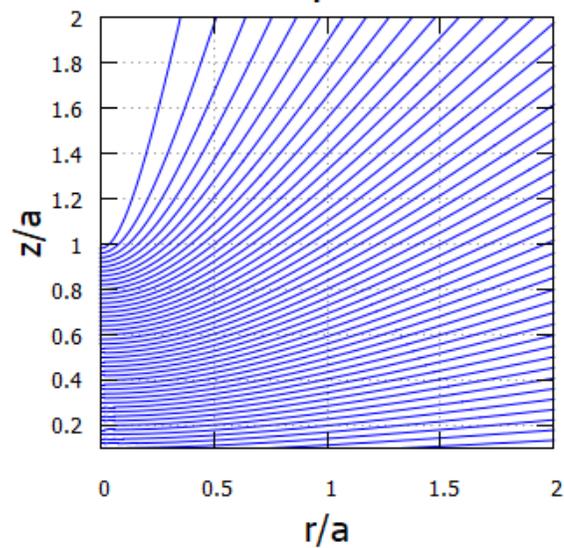


Figura 1. Líneas de campo gravitacional para un agujero negro de Schwarzschild, graficadas en coordenadas de Weyl. Normalizada en términos de a y tomando $m = a = 1$

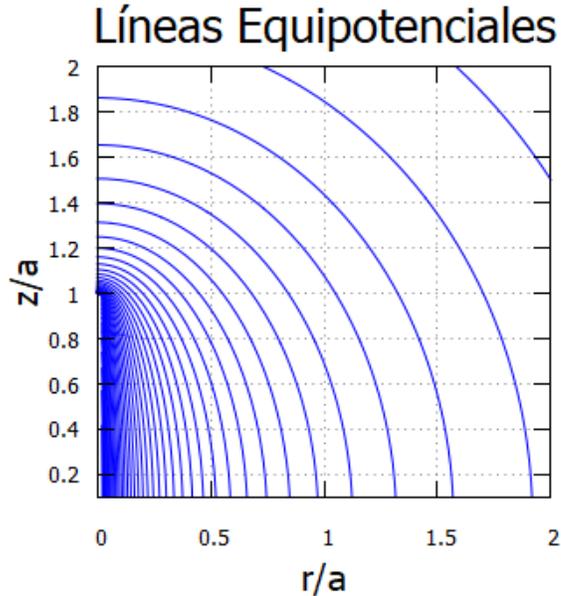


Figura 2. Líneas equipotenciales de un agujero negro de Schwarzschild, graficadas en coordenadas de Weyl. Normalizada en términos de a y tomando $m = a = 1$

En la figura 1 se presentan las líneas de campo gravitacional para el agujero negro en coordenadas de Weyl, donde se puede evidenciar la representación elipsoidal alargada del agujero negro el cual se representa en el eje en el rango de $-1 < z < 1$, la cual en esta representación hace alusión al horizonte de eventos del agujero negro y se puede evidenciar que para valores de $r < 0.5$ se obtiene una mayor curvatura. En la figura 2 se presentan las líneas equipotenciales del agujero negro las cuales permiten visualizar de igual manera la representación elipsoidal del agujero negro al graficar en coordenadas de Weyl.

Líneas de Campo Gravitacional

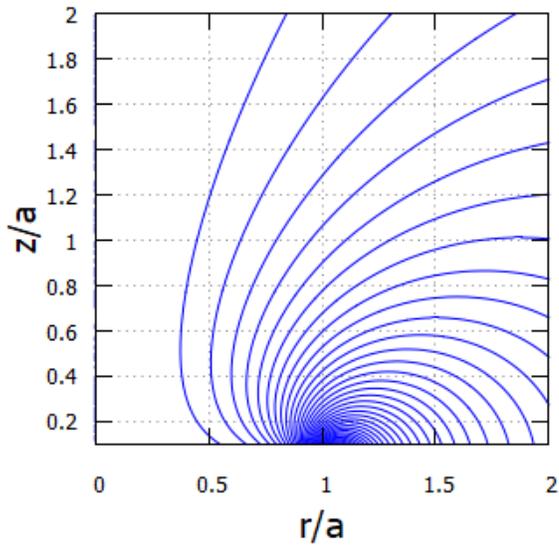


Figura 3. Líneas de campo gravitacional de un disco anular, graficadas en coordenadas de Weyl. Normalizada en términos de a y tomando $m = a = 1$

Líneas Equipotenciales

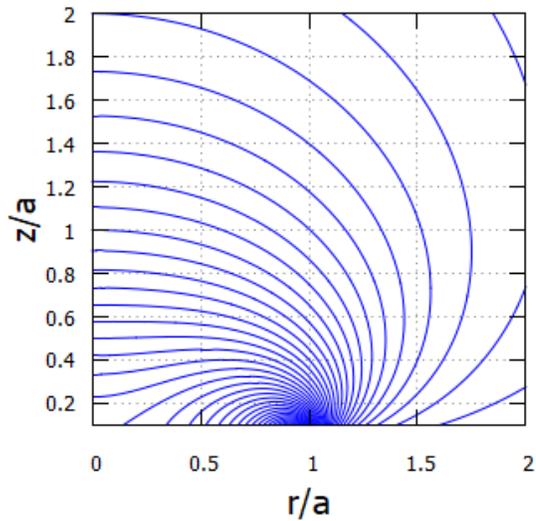


Figura 4. Líneas equipotenciales de un disco anular, graficadas en coordenadas de Weyl. Normalizada en términos de a y tomando $m = a = 1$

En la figura 3 se presentan las líneas de campo gravitacional para el disco anular en coordenadas de Weyl, el disco anular es un disco infinitesimalmente delgado en la cual se toma el radio interno del disco a igual a 1, para valores de $z < 1$ se logra evidenciar una mayor curvatura. En la figura 4 se presentan las líneas equipotenciales correspondientes al disco anular en coordenadas de Weyl.

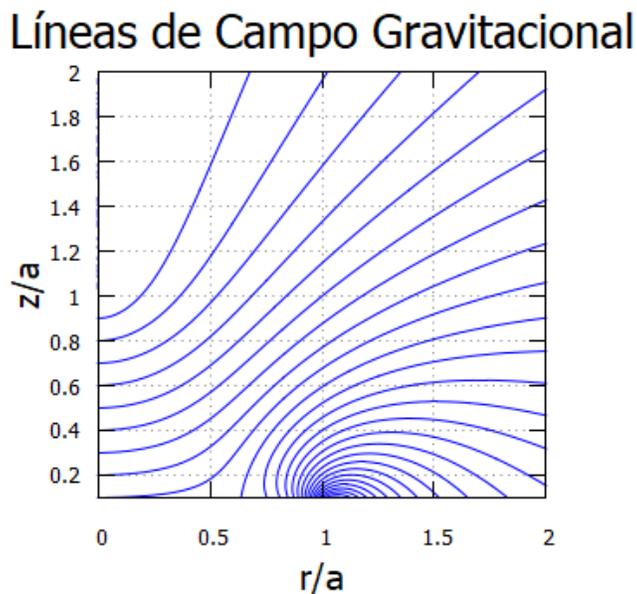


Figura 5. Líneas de campo gravitacional para la superposición de un agujero negro de Schwarzschild y un disco anular, graficadas en coordenadas de Weyl. Normalizada en términos de a y tomando $m = a = 1$

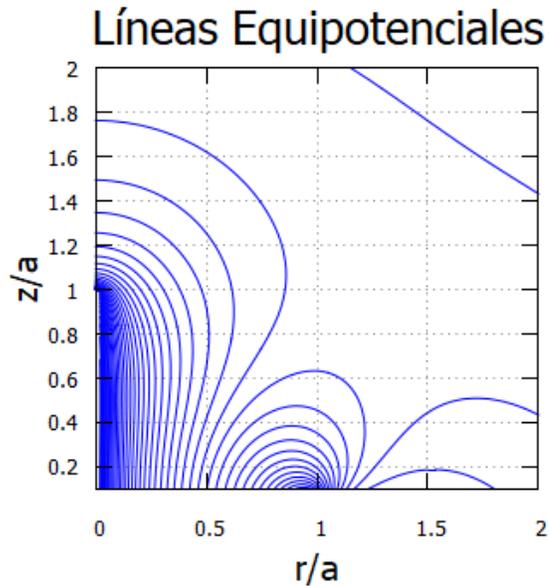


Figura 6. Líneas equipotenciales para la superposición de un agujero negro de Schwarzschild y un disco anular, graficadas en coordenadas de Weyl. Normalizada en términos de a y tomando $m = a = 1$

En la figura 5 se presentan las líneas de campo gravitacional para la superposición del agujero negro y el disco anular en coordenadas de Weyl, en las cuales se logra evidenciar mayor curvatura conforme se acerca al horizonte de eventos del agujero negro y al plano ecuatorial de este sistema binario. En la figura 6 se presentan las líneas equipotenciales para esta superposición las cuales cerca al horizonte de eventos no se ven muy afectadas con respecto a las equipotenciales del agujero negro presentadas en la figura 2.

4. CONCLUSIONES

Se ha logrado analizar sistemas binarios compuestos por un agujero negro de Schwarzschild y un disco anular, obteniendo las expresiones de la cuadri-aceleración en términos de las coordenadas de Weyl, con estas expresiones se logró obtener las líneas de campo gravitacional en donde el agujero negro en coordenadas de Weyl tiene una representación elipsoidal alargada lo cual permite visualizar el comportamiento de las líneas de campo gravitacional y las líneas equipotenciales, por último la visualización de las líneas de campo y equipotenciales para la superposición del agujero negro y disco anular, las cuales se ha evidenciado que tiene un buen comportamiento de acuerdo a la métrica utilizada y . Donde las gráficas se normalizan en términos del parámetro “ a ” tomando $a = m = 1$.

Al realizar la representación gráfica de las líneas de campo gravitacional se logra evidenciar el comportamiento de estas líneas en el horizonte de eventos lo cual conlleva a visualizar una mayor curvatura, en la superposición del agujero negro y el disco anular las líneas de campo cerca al horizonte de eventos presentan un comportamiento similar a solo tener el agujero negro (ver 1) pero cerca al plano del disco anular si se nota un cambio en comparación a la gráfica del disco anular (ver 3) correspondiente a las líneas equipotenciales se logra evidenciar que para la superposición del agujero negro con el disco anular estas líneas no se ven muy afectadas en el horizonte de eventos comparadas con las del agujero negro sin presencia del disco anular y al alejarnos del horizonte de eventos estas líneas equipotenciales varían en gran medida, por lo cual se logra evi-

denciar que el agujero negro es el mayor influyente en la curvatura.

Los resultados obtenidos en este trabajo de grado fueron presentados en el XXIX Congreso Nacional de Física.

Referencias Bibliográficas

- Ansorg, M. and Petroff, D. (2005). Black holes surrounded by uniformly rotating rings. *Physical Review D*, 72(2):024019.
- Campanelli, M. and Lousto, C. O. (1999). Second order gauge invariant gravitational perturbations of a kerr black hole. *Physical Review D*, 59(12):124022.
- Chakrabarti, S. K. (1996). Accretion processes on a black hole. *Physics Reports*, 266(5-6):229–390.
- Chandrasekhar, S. (1979). An introduction to the theory of the Kerr metric and its perturbations. In Hawking, S. W. and Israel, W., editors, *General Relativity: An Einstein centenary survey*, pages 370–453.
- Chrzanowski, P. L. (1975). Vector potential and metric perturbations of a rotating black hole. *Physical Review D*, 11(8):2042.
- Chrzanowski, P. L. (1976). Applications of metric perturbations of a rotating black hole: Distortion of the event horizon. *Physical Review D*, 13(4):806.
- Demianski, M. (1976). Stationary axially symmetric perturbations of a rotating black hole. *General Relativity and Gravitation*, 7(7):551–567.
- Duez, M. D. and Zlochower, Y. (2018). Numerical relativity of compact binaries in the 21st century. *Reports on Progress in Physics*, 82(1):016902.

- González, G. and Gutiérrez-Piñeres, A. (2008). Counterrotating dust disk around a schwarzschild black hole: New fully integrated explicit exact solution. *Revista Integración*, 26.
- González, G. A., Gutiérrez-Piñeres, A. C., and Viña-Cervantes, V. M. (2009). Relativistic static thin dust disks with an inner edge: An infinite family of new exact solutions. *Physical Review D*, 79(12):124048.
- Lanza, A. (1992). Self-gravitating thin disks around rapidly rotating black holes. *The Astrophysical Journal*, 389:141–156.
- Linet, B. (1977). Stationary axisymmetric test fields on a kerr metric. *Physics Letters A*, 60(5):395–396.
- Nishida, S. and Eriguchi, Y. (1994). A general relativistic toroid around a black hole. *The Astrophysical Journal*, 427:429–437.
- Poisson, E. (2004). Absorption of mass and angular momentum by a black hole: time-domain formalisms for gravitational perturbations, and the small-hole or slow-motion approximation. *Physical Review D*, 70(8):084044.
- Semerák, O. and Žáček, M. (2000). Gravitating discs around a schwarzschild black hole: I. *Classical and Quantum Gravity*, 17(7):1613.
- Semerák, O., Zellerin, T., and Žáček, M. (1999). The structure of superposed weyl fields. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 308(3):691–704.

Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C., and Herlt, E. (2009). *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge university press.

Teukolsky, S. A. (1973). Perturbations of a rotating black hole. i. fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations. *The Astrophysical Journal*, 185:635–648.

Weyl, H. (1917). Zur gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, 359(18):117–145.

Will, C. M. (1974). Perturbation of a slowly rotating black hole by a stationary axisymmetric ring of matter. i. equilibrium configurations. *The Astrophysical Journal*, 191:521–532.

Žáček, M. and Semerák, O. (2002). Gravitating discs around a schwarzschild black hole ii. *Czechoslovak Journal of Physics*, 52(1):19–27.