ANILLOS TOTALES DE COCIENTES Y SU RECTA PROYECTIVA

Autor:
JACKSON GUEVARA GÓMEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2021

ANILLOS TOTALES DE COCIENTES Y SU RECTA PROYECTIVA

Autor:
JACKSON GUEVARA GÓMEZ

Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en Matemáticas

Directora:
CLAUDIA INÉS GRANADOS PINZÓN
DRA. EN MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2021

AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos a la profesora Claudia Granados por la orientación, dedicación y compromiso en este trabajo.

Agradezco a mis padres, Claudia Gómez y Moises Guevara por ser unos padres ejemplares, por apoyarme en todo momento en el logro de mis metas. A mi familia, en especial a mi gemelo Jefferson por toda la motivación, ánimo y amor brindado.

También agradezco a Daniela Díaz, quién me motivó en el desarrollo de este proceso de formación, con su apoyo incondicional y amor. A mis grandes amigos, Daniel Suarez y Ana Mileidy, por ser parte de este proceso en todo momento.

Agradezco finalmente a mis compañeros y compañeras de Posgrado, con quienes tuve la dicha de compartir este proceso de formación, principalmente a quienes me brindaron su valiosa amistad, a Andrea Quintero y Astrid Contreras.

TABLA DE CONTENIDO

TITULO: ANILLOS TOTALES DE COCIENTES Y SU RECTA PROYECTIVA [*]

AUTOR: JACKSON GUEVARA GÓMEZ [**]

PALABRAS CLAVES: Anillos Totales de Cocientes; Recta Proyectiva; referencia proyectiva; razón doble, proyectividad de Staudt.

RESUMEN

En este trabajo de investigación se estudia el problema abierto de la geometría proyectiva, que consiste en caracterizar la recta proyectiva sobre anillos, en todo el documento, se entenderá por anillo, como un anillo conmutativo con uno. Particularmente, este trabajo se centra en la recta proyectiva sobre anillos totales de cocientes. Primero, se consideran los anillos de cocientes y el homomorfismo canónico. Se introducen los anillos totales de cocientes como un caso particular de los anillos de cocientes y se establecen relaciones existentes con otros anillos como los dominios euclídeos, las $\mathbb{K}$-álgebras finitas y el producto directo de anillos totales de cocientes. Finalmente se muestra la inmersión de cualquier anillo en un producto de cuerpos.

Así mismo, se inicia el estudio de la recta proyectiva sobre anillos totales de cocientes, definiendo los elementos complementables en un módulo libre bidimensional. También se mencionan conceptos como fuertemente independientes y referencia proyectiva; posteriormente se definen las proyectividades algebraicas τ- semilineales; la razón doble (o razón anarmónica) y como un caso particular, la cuaterna armónica. Finalmente se consideran las proyectividades de Staudt que mantienen invariantes las cuaternas armónicas y se demuestra El Teorema de Staudt.

[*]Proyecto de grado

[**]FACULTAD DE CIENCIAS, ESCUELA DE MATEMÁTICAS.
DIRECTORA: DRA. EN MATEMÁTICAS CLAUDIA INÉS GRANADOS PINZÓN

TITLE: TOTAL QUOTIENT RINGS AND YOUR PROJECTIVE LINE [***]

AUTHOR: JACKSON GUEVARA GÓMEZ [****]

KEYWORDS: Total Quotient Rings; Projective line; projective reference; double ratio, Staudt's projectivity.

ABSTRACT

This research work studies the open problem of projective geometry, which is to characterize the projective line on rings, throughout the document, a ring, as a commutative ring with one. In particular, this work focuses on the projective line on total quotient rings. First, quotient rings and canonical homomorphism are considered. Total quotient rings are introduced as a particular case of quotient rings and existing relationships are established with other rings such as euclidean domains, finite $\mathbb{K}$-algebras, and the direct product of total quotient rings. Finally, the immersion of any ring in a fields product is shown.

Likewise, the study of the projective line on total quotient rings begins, defining the complementable elements in a two-dimensional free module. Concepts such as strongly independent and projective reference are also mentioned; subsequently, the algebraic projections are defined for the semi-liners; the double ratio (or anamonic ratio) and as a particular case, the harmonic tetrad. Finally, Staudt's projections that keep the harmonic quasts invariant are considered and Staudt's Theorem is demonstrated.

[***]Degree project

[****]SCIENCE FACULTY, SCHOOL OF MATHEMATICS.
ADVISOR: DRA. EN MATEMÁTICAS CLAUDIA INÉS GRANADOS PINZÓN.

INTRODUCCIÓN

El anillo de cocientes se define por primera vez en 1927 [14], por Heinrich Grell, estudiante de doctorado de Emmy Noether, considerando a S como el conjunto de los no divisores de cero de un anillo R, lo que actualmente conocemos como anillo total de cocientes.

Esta definición no cambió hasta 1944, cuando Claude Chevalley extiende la noción dada por Grell de anillo de cocientes, considerando a S como el complemento de un ideal primo $\mathfrak{p}$ ($S = R\backslash\mathfrak{p}$), lo que hoy se le conoce como la localización del anillo R por $\mathfrak{p}$.

Finalmente, Uzkov en 1948 extiende la definición de sus predecesores, la cual sigue vigente, considerando a S como un subconjunto multiplicativo. Cabe mencionar, que los conjuntos considerados por Grell y Chevalley, son casos particulares de estos subconjuntos.

La construcción de anillos de cocientes es una técnica muy relevante en álgebra conmutativa, pues éstos generalizan la construcción de los números racionales a partir de los números enteros. Basta considerar a S como el conjunto de números enteros distintos de cero, es decir, $S = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ es un conjunto multiplicativo ($1 \in S$ *y* $st \in S$, *con* $s, t \in S$) de $\mathbb{Z}$ y, una relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathbb{Z} \times S$, entonces, el cuerpo $\mathbb{Q}$ consiste de todas las clases de equivalencia $\dfrac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in S$.

Se entenderá por un anillo R, como un anillo conmutativo con uno. Para cualquier R anillo, consideramos $S \subseteq R$ multiplicativo, y definimos $\sim$ la relación de equivalencia definida sobre $R \times S$,

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \text{ existe } u \in S \text{ tal que } u(at - bs) = 0,$$

con $a, b \in R$ y $s, t \in S$. Considere $\dfrac{R \times S}{\sim}$ dotado de las siguientes operaciones

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at + bs}{st} \; y \; \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st}.$$

Las cuales le dan a $\dfrac{R \times S}{\sim}$ una estructura de anillo, denominado anillo de cocientes o de fracciones.

Un caso especial de los anillos de cocientes es el anillo total de cocientes, que considera un anillo R y S el conjunto multiplicativo de los no divisores de cero de R, esto resulta ser equivalente a que el anillo R está compuesto de elementos invertibles o divisores de cero.

Este trabajo consta de dos capítulos donde se hace un estudio de los anillos totales de cocientes y se caracteriza la recta proyectiva sobre estos anillos. En el primer capítulo, se parte de un estudio de los anillos de cocientes y se exponen propiedades del homomorfismo canónico. Además, se establecen relaciones existentes con otros anillos, como los dominios euclídeos, las $\mathbb{K}$-álgebras finitas, el producto de anillos totales de cocientes, y finalmente se muestra la inmersión de cualquier anillo R en un producto de cuerpos.

El capítulo *Rectas proyectivas sobre anillos*, se desarrolla en la rama de la geometría proyectiva. Esta geometría no verifica el quinto postulado de Euclides de manera local, pero permite trabajar con el infinito y contiene a una geometría no local como es la euclídea.

La teoría de geometría proyectiva desarrollada en [1], [3], [4] y [13] tiene un enfoque algebraico, la definición del espacio proyectivo parte de los espacios vectoriales; este enfoque, permite considerar la generalización de los espacios vectoriales a los R-módulos libres, y trabajar las rectas proyectivas sobre estas estructuras, como en [7] y [10].

Un problema central en geometría proyectiva es el estudio de la recta proyectiva sobre anillos, en este trabajo, se exponen los avances de la recta proyectiva sobre los anillos totales de cocientes.

Se pueden evidenciar estudios de las rectas proyectivas sobre las $\mathbb{R}$-álgebras de dimensión 2, conocidas como el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C} = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2+1\rangle}$, el anillo de los paracomplejos $\mathbb{M} = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2-1\rangle}$ y el anillo de los números duales $\mathbb{D} = \frac{R[x]}{\langle x^2\rangle}$, las cuales generan las tres geometrías clásicas del plano, Moebius, Laguerre y Minkowski, realmente es poco lo que se conoce sobre las rectas proyectivas sobre otras $\mathbb{R}$-álgebras finitas. Este trabajo finaliza mostrando que la recta proyectiva sobre alguna $\mathbb{R}$-álgebra de dimensión dos, tiene estructura de variedad diferencial bidimensional como aparece en [11].

CAPÍTULO 1

ANILLOS TOTALES DE COCIENTES

La construcción de anillos de cocientes es una técnica muy usada en álgebra conmutativa, pues éstos generalizan la construcción del cuerpo de los números racionales partiendo de los números enteros, basta considerar una relación de equivalencia definida sobre el producto cartesiano $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

Para que las definiciones, lemas, proposiciones y teoremas de este capítulo, sean mejor comprendidos, se han propuesto ejemplos sencillos que permiten ilustrar estos resultados.

1.1. ANILLOS DE COCIENTES

En esta primera sección se estudian los anillos de cocientes y algunas propiedades que tiene el homomorfismo canónico.

Definición 1.1. Sean R un anillo y S un subconjunto no vacío de R. Se dice que S es un subconjunto multiplicativo de R, si

1. $0 \notin S$,
2. $1 \in S$,
3. para cualesquiera $s, t \in S$, tenemos que $st \in S$.

Nota 1.1. Sea $x \in R$, denotamos el ideal generado por el elemento x como $\langle x \rangle$.

A continuación se exponen unos ejemplos básicos de subconjuntos multiplicativos S de un anillo R.

Ejemplo 1.1. Sea $R = \mathbb{Z}/\langle 6\rangle = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$, consideremos a $S = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\}$, claramente es un subconjunto multiplicativo, ya que $\overline{1} \in S$, $\overline{0} \notin S$ y $\overline{2} \cdot \overline{4} = \overline{2}$, $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4}$, $\overline{4} \cdot \overline{4} = \overline{4}$, $\overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}$, $\overline{1} \cdot \overline{2} = \overline{2}$, $\overline{1} \cdot \overline{4} = \overline{4} \in S$.

Ejemplo 1.2. Sea R un anillo, considere $\mathfrak{p}$ un ideal primo propio de R, entonces $S = R \setminus \mathfrak{p}$ es un subconjunto multiplicativo. En efecto, como $0 \in \mathfrak{p}$ entonces, $0 \notin S$, así mismo, como $\mathfrak{p}$ es ideal propio, $1 \notin \mathfrak{p}$, entonces $1 \in S$. Por otra parte, si $s, t \in S$, entonces $st \in S$ ya que $st \notin \mathfrak{p}$ dado que $s, t \notin \mathfrak{p}$. Luego, S es un subconjunto multiplicativo.

En la siguiente proposición tomada de [9], se completan aquí detalles de su demostración.

Proposición 1.1. *Sean R un anillo y $S \subseteq R$ subconjunto multiplicativo. La relación $\sim$ definida en $R \times S$ mediante, para $a, b \in R$ y $s, t \in S$*

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \text{ existe } u \in S \text{ tal que } u(at - bs) = 0,$$

entonces, es una relación de equivalencia.

Demostración.

1. $\sim$ es reflexiva. En efecto, para todo $u \in S$, se cumple que $u \cdot 0 = u \cdot (as - as) = 0$, para todos $a \in R$ y $s \in S$, entonces $(a, s) \sim (a, s)$.

2. $\sim$ es simétrica. En efecto, si $(a, s) \sim (b, t)$ para $a, b \in R$ y $s, t \in S$ entonces existe $u \in S$ tal que $u(at - bs) = 0$, entonces

   $$uat = ubs \Leftrightarrow 0 = ubs - uat \Leftrightarrow 0 = u(bs - at),$$

   por lo tanto, $(b, t) \sim (a, s)$.

3. $\sim$ es transitiva. Sean $(a, s), (b, t)$ y $(c, r) \in R \times S$ con $a, b, c \in R$ y $s, t, r \in S$ tales que $(a, s) \sim (b, t)$ y $(b, t) \sim (c, r)$, entonces existen $u, v \in S$ tales que $u(at - bs) = 0$ y $v(br - tc) = 0$. Falta ver que $(a, s) \sim (c, r)$. Consideremos las ecuaciones

   $$u(at - bs) = uat - ubs = 0 \tag{1.1}$$

y

$$v(br - tc) = vbr - vtc = 0. \tag{1.2}$$

Después de multiplicar la ecuación (1.1) por rv y la ecuación (1.2) por us, y de igualar las ecuaciones resultantes se obtiene que $uatrv = ubsrv$ y $vbrus = vtcus$, luego

$$uatrv - vtcus = (utv)ar - (utv)cs = utv(ar - cs) = 0.$$

Así, $utv \in S$ y se cumple que $utv(ar - cs) = 0$ para todos $a, c \in R$ y $r, s \in S$. Por consiguiente, $(a, s) \sim (c, r)$. □

Se denota por $\frac{a}{s}$ la clase de (a, s), bajo la anterior relación de equivalencia definida.

Considere el conjunto $\frac{R \times S}{\sim} = \left\{\frac{a}{b}, a \in R \ y \ b \in S\right\}$, el cual dotado de dos operaciones suma y producto, tendrá estructura de anillo. El siguiente teorema puede ser revisado en [9].

Teorema 1.2. *El conjunto* $RS^{-1} = R_S := \frac{R \times S}{\sim}$*, dotado de las siguientes operaciones:*

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at + bs}{st} \ y \ \frac{a}{s}\frac{b}{t} := \frac{ab}{st}$$

define una estructura de anillo, denominado el Anillo de Cocientes de R *por* S*.*

Note que el elemento neutro de la suma en el anillo de cocientes de R por S, está dado por $\frac{0}{s} = 0$ para cualquier $s \in S$. Además, para todo $s \in S$, $\frac{s}{s} = 1$ es el uno del anillo de cocientes de R por S.

El siguiente ejemplo considera anillos y sus subconjuntos multiplicativos, y se calcula sus respectivos anillos de cocientes.

Ejemplo 1.3. 1. Considere $R = \mathbb{Z}$ y el subconjunto multiplicativo $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, el anillo de cocientes de R por S está dado por

$$RS^{-1} = \left\{\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \ y \ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\} = \mathbb{Q}.$$

Observe que $R \subseteq RS^{-1}$ dado que RS^{-1} es el cuerpo $\mathbb{Q}$. Este resultado de obtener un cuerpo como anillo de cocientes partiendo de ciertos anillos se puede

generalizar, véase el siguiente ítem.

2. Si R es un dominio entero y $S = R\backslash\{0\}$, luego S es un subconjunto multiplicativo, entonces RS^{-1} es un cuerpo, denominado el *cuerpo de cocientes de* R.

3. Considere a $R = \mathbb{Z}/\langle 6\rangle$ y $S = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\}$, entonces el anillo de cocientes de R por S es $RS^{-1} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.

Note que en el Ejemplo 1,3, en los ítems 1 y 2, se tiene que $R \subseteq RS^{-1}$, sin embargo, en el tercer ítem se observa que $RS^{-1} \subseteq R$; es decir, esta contenencia depende del subconjunto multiplicativo elegido.

En el Teorema 1,2 se observó que RS^{-1} tiene estructura de anillo con las dos operaciones que se mencionaron, podemos preguntar: ¿Cómo son los ideales del anillo de cocientes?.

Observación 1.1. Considere RS^{-1} el anillo de cocientes de R por S, los ideales de RS^{-1} son de la forma

$$IS^{-1} = \left\{ \frac{a}{s} \in RS^{-1} | a \in I, s \in S \right\}$$

donde I es un ideal de R.

En el siguiente ejemplo se construye un ideal para el ítem 3 del Ejemplo 1,3.

Ejemplo 1.4. Sea $R = \mathbb{Z}/\langle 6\rangle = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$, y considere el ideal $\langle \overline{3}\rangle$ de R, entonces

$$\begin{aligned} IS^{-1} &= \left\{ \frac{a}{s} \in RS^{-1} : a \in \langle \overline{3}\rangle, s \in \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\} \right\} \\ &= \left\{ \frac{a}{s} \in RS^{-1} : a = \overline{0}, a = \overline{3}, s \in \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\} \right\} \\ &= \left\{ \frac{\overline{0}}{\overline{1}} \right\} \end{aligned}$$

es un ideal de RS^{-1}.

Definición 1.3. Considere R un anillo y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de R. Sea $S := R\backslash\mathfrak{p}$, llamamos al anillo RS^{-1} la localización de R por $\mathfrak{p}$, denotado también como $R_{\mathfrak{p}} = RS^{-1}$.

Observación 1.2. Como $S = R \setminus \mathfrak{p}$ es un subconjunto multiplicativo la Definición 1,3 anterior tenemos que $R_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local, y su ideal maximal está dado por $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$.

Proposición 1.2. *Sean R un anillo, $S \subset R$ un subconjunto multiplicativo y RS^{-1} su anillo de cocientes. Consideremos la siguiente aplicación*

$$\begin{aligned} \varphi \ &: R \longrightarrow RS^{-1} \\ &a \longmapsto \frac{a}{1}. \end{aligned}$$

φ es un homomorfismo de anillos, denominado el homomorfismo canónico.

Demostración. Note que φ está bien definida. En efecto, sean $a, b \in R$ con $a = b$, se tiene que para todo $u \in S$, $u(a-b) = 0$, es decir, $\frac{a}{1} = \frac{b}{1}$, por lo tanto, $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Ahora observe que φ cumple con las condiciones de ser un homomorfismo de anillos. Sean $a, b \in R$, entonces

1. $\varphi(a+b) = \dfrac{a+b}{1} = \dfrac{a}{1} + \dfrac{b}{1} = \varphi(a) + \varphi(b)$,

2. $\varphi(ab) = \dfrac{a \cdot b}{1} = \dfrac{a}{1} \cdot \dfrac{b}{1} = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$,

3. $\varphi(1) = \dfrac{1}{1}$.

Por lo tanto φ es un homomorfismo. □

Nota 1.2. Se denota como R^* al conjunto de los elementos invertibles del anillo R.

El siguiente teorema fue tomado de [6] y [9], donde no aparece la prueba para los ítems 4,5 y 6, por ello, aquí se sugiere una prueba al resultado.

Teorema 1.4. *Si $S \subseteq R$ es un subconjunto multiplicativo y $\varphi : R \longrightarrow RS^{-1}$ es el homomorfismo canónico, entonces*

1. *$s \in S$ entonces $\varphi(s) \in (RS^{-1})^*$,*

2. *$\varphi(a) = 0$ si y sólo si $as = 0$ para algún $s \in S$,*

3. *$\frac{a}{s} \in S^{-1}R$ es de la forma $\varphi(b)\varphi(t)^{-1}$, para $b \in R$ y $t \in S$,*

4. *φ es inyectiva si y sólo si S no tiene divisores de cero,*

5. *φ es sobreyectiva si y sólo si para todo $a \in R$, para todo $s \in S$, existen $b \in R$ y $s' \in S$ tales que $(a - bs)s' = 0$,*

6. *φ es biyectiva si y sólo si $S \subseteq R^*$.*

Demostración. 1. Sea $s \in S$ entonces $\varphi(s) = \frac{s}{1}$. Además

$$1 = \varphi(1) = \varphi(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{s}.$$

Luego, $\varphi(s) \in (S^{-1}R)^*$.

2. Note que $\varphi(a) = 0$ si y sólo si $as = 0$ para algún $s \in S$. En efecto, sea $\varphi(a) = \frac{a}{1} = \frac{0}{s}$ para $s \in S$, entonces $(a, 1) \sim (0, s) \Leftrightarrow$ existe $u \in S$ tal que $u(as - 0) = uas = 0$, donde $us \in S$, ya que $u, s \in S$.

3. Observe que $\frac{a}{s} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s} = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$.

4. φ es inyectiva si y sólo si S no posee divisores de cero. En efecto,

   $\Rightarrow$) Suponga que existe $s \in S$ divisor de cero entonces existe $a \in R$ con $a \neq 0$ tal que $as = 0$, entonces por ítem 2, $\varphi(a) = 0$, pero por hipótesis φ es inyectiva, es decir $ker\varphi = \{0\}$, por lo tanto $a = 0$, contradicción, luego, S no contiene divisores de cero.

   $\Leftarrow$) Sea $\varphi(a) = 0$, entonces por ítem 2 $as = 0$ para algún $s \in S$, como s no es divisor de cero entonces $a = 0$, luego $ker\varphi = \{0\}$.

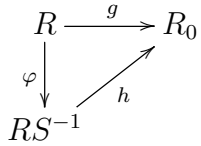
5. Para todo $\frac{a}{s} \in RS^{-1}$, existe $b \in R$ tal que $\varphi(b) = \frac{b}{1} = \frac{a}{s}$ si y sólo si para todo $a \in R$, para todo $s \in S$, existe $s' \in S$ tales que $(a - bs)s' = 0$

6. $\Rightarrow$) Si φ es un isomorfismo, φ es sobreyectiva. Por ítem 5, para todo $s \in S$, existe $b \in R$ y existe $s' \in S$ tales que $(1 - bs)s' = 0$. Además, como φ es inyectiva $1 - bs = 0$. Luego, s es invertible.

   $\Leftarrow$) Si $S \subseteq R^*$, S no tiene divisores de cero y por el ítem 3, $Ker\varphi = \{0\}$, es decir, φ es inyectiva. Por otra parte, como s es invertible, para todo $\frac{a}{s} \in RS^{-1}$, existe $as^{-1} \in R$ tal que $\frac{a}{s} = \frac{as^{-1}}{1} = \varphi(as^{-1})$. Por tanto, φ es sobreyectiva.

□

Teorema 1.5 (Propiedad universal)**.** *Sea $g : R \longrightarrow R_0$ un homomorfismo de anillos tal que $g(S) \subseteq R_0^*$ entonces, existe un único homomorfismo $h : RS^{-1} \longrightarrow R_0$ tal que $h \circ \varphi = g$ conmuta*



Además, si g es inyectiva entonces h también es inyectiva.

Demostración. Para probar la existencia de h, considere $h : RS^{-1} \longrightarrow R_0$ definida, $h\left(\frac{a}{s}\right) = g(a)g(s)^{-1}$ con $a \in R$, $s \in S$.

Observe que h está bien definida. Si $\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2}$ entonces existe $u \in S$ tal que $u(a_1s_2 - a_2s_1) = 0$, luego $a_1s_2u = a_2s_1u$. Aplicando el homomorfismo g a ambos lados se obtiene $g(a_1)g(s_2)g(u) = g(a_2)g(s_1)g(u)$, y puesto que $g(S) \subseteq R_0^*$, entonces $g(a_1)g(s_2) = g(a_2)g(s_1)$. Ahora multiplicando por $g(s_2)^{-1}g(s_1)^{-1}$, se obtiene $g(a_1)g(s_2)g(s_2)^{-1}g(s_1)^{-1} = g(a_2)g(s_1)g(s_2)^{-1}g(s_1)^{-1}$, y agrupando $g(a_1)g(s_1)^{-1} = g(a_2)g(s_2)^{-1}$, por lo tanto, $h\left(\frac{a_1}{s_1}\right) = h\left(\frac{a_2}{s_2}\right)$. Luego, h está bien definida.

Ahora observe que h es un homomorfismo. En efecto, sean $a, b \in R$ y $s, t \in S$, entonces

$$\begin{aligned} h\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right) = h\left(\frac{at+bs}{st}\right) &= g(at+bs)g(st)^{-1} \\ &= (g(at) + g(bs))g(st)^{-1} \\ &= (g(a)g(t) + g(b)g(s))g(s)^{-1}g(t)^{-1} \\ &= g(a)g(s)^{-1} + g(b)g(t)^{-1} \\ &= h\left(\frac{a}{s}\right) + h\left(\frac{b}{t}\right), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h\left(\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}\right) = h\left(\frac{ab}{st}\right) &= g(ab)g(st)^{-1} \\ &= g(a)g(b)g(s)^{-1}g(t)^{-1} \\ &= g(a)g(s)^{-1}g(b)g(t)^{-1} \\ &= h\left(\frac{a}{s}\right)\cdot h\left(\frac{b}{t}\right). \end{aligned}$$

Finalmente, $h\left(\frac{1}{1}\right) = g(1)\cdot g(1)^{-1} = 1$. Luego, h es un homomorfismo de anillos.

Ahora note que la función h definida anteriormente es única. Sea $f : RS^{-1} \longrightarrow R_0$ un homomorfismo tal que $f \circ \varphi = g$. Considere $x \in RS^{-1}$ entonces por el ítem 3 del Teorema 1.4 se tiene que $x = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ con $a \in R$ y $s \in S$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\varphi(a)\varphi(s)^{-1}) \\ &= f(\varphi(a))f(\varphi(s)^{-1}) \\ &= g(a)g(s)^{-1} \\ &= h(\varphi(a))h(\varphi(s)^{-1}) \\ &= h(\varphi(a)\varphi(s)^{-1}) \\ &= h(x), \end{aligned}$$

es decir, $f = h$.

Además, observe que si g es inyectivo, entonces h es inyectivo. En efecto, sea

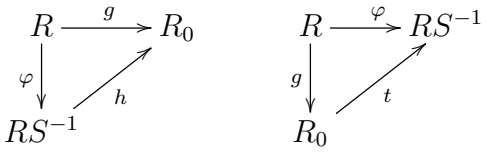
$$h\left(\frac{a}{s}\right) = g(a)g(s)^{-1} = 0,$$

como $g(s) \in R_0^*$ entonces $g(a) = 0$, ya que $g(s)$ no puede ser divisor de cero, y como g es inyectivo, entonces $a = 0$, por lo tanto, h es inyectivo. □

Corolario 1.1. *Sean R_0 un anillo y $g : R \to R_0$ un homomorfismo tal que $g(S) \subset R_0^*$ y R_0 también cumple con la propiedad universal del teorema anterior, entonces $R_0 \simeq RS^{-1}$.*

Demostración. Como RS^{-1} tiene la propiedad universal, existe el homomorfismo h tal que $h : RS^{-1} \longrightarrow R_0$ tal que $h \circ \varphi = g$ único, y como R_0 también tiene la propiedad

universal entonces existe $t : R_0 \longrightarrow RS^{-1}$ tal que $t \circ g = \varphi$. Luego, se tiene que



$$\begin{aligned} h \circ \varphi &= g & \qquad t \circ g &= \varphi \\ h \circ (t \circ g) &= g \quad \text{y} & t \circ (h \circ \varphi) &= \varphi \\ h(t(g)) &= g & t(h(\varphi)) &= \varphi. \end{aligned}$$

Entonces, por la propiedad universal h y t son únicos, tales que

$$R_0 \xrightarrow{t} RS^{-1} \xrightarrow{h} R_0,$$

luego $h \circ t = i_{R_0}$. De igual forma,

$$RS^{-1} \xrightarrow{h} Ro \xrightarrow{t} RS^{-1},$$

así $h \circ t = i_{RS^{-1}}$, es decir, h es un isomorfismo. □

1.2. ANILLOS TOTALES DE COCIENTES

En esta sección se introducen los anillos totales de cocientes, pues son un caso particular de los anillos de cocientes cuando se considera el subconjunto multiplicativo de los no divisores de cero.

Definición 1.6. Si R es un anillo y $S_0 \subseteq R$ es el subconjunto multiplicativo de los no divisores de cero, entonces al anillo RS_0^{-1} se le denomina; anillo total de cocientes de R.

Como ejemplo de este tipo de anillos basta referenciar el ítem 1 del Ejemplo 1.3, donde $R = \mathbb{Z}$ y $S_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, claramente S_0 contiene los no divisores de cero.

Según la Definición 1,6, es posible construir un anillo total de cocientes partiendo de un anillo. Sin embargo, también es posible determinar qué anillos son anillos totales de cocientes, en virtud al siguiente teorema que permite caracterizar los elementos de los anillos totales de cocientes, tomado de [10], el cual aparece sin demostración, por ello se propone una prueba que verifica el resultado.

Teorema 1.7. *Sea R un anillo, entonces R es un anillo total de cocientes si y sólo si sus elementos son invertibles ó divisores de cero.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $\frac{a}{s} \in RS^{-1}$, considere los siguientes casos

1. Si a es divisor de cero, entonces existe $u \in R$, $u \neq 0$, tal que $au = 0$, luego

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{u}{1} = \frac{au}{s} = \frac{0}{s} = 0$$

   es decir, que $\frac{a}{s}$ es divisor de cero.

2. Si a es no divisor de cero, $a \in S$ y como $s \in S$, entonces puede considerar al elemento $\frac{s}{a}$, así

$$\frac{a}{s}\frac{s}{a} = \frac{as}{sa} = 1.$$

   Luego, $\frac{a}{s}$ es invertible.

   $\Leftarrow$) Sea $\frac{a}{b} \in RS^{-1}$, $b \in S$, luego b no es divisor de cero, es decir, b es invertible. Considere $\frac{ab^{-1}}{1} = \frac{a}{b} \in R$.

□

Ejemplo 1.5. Un cuerpo K es un anillo total de cocientes, ya que todos sus elementos diferentes de cero son invertibles. En particular los cuerpos $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/\langle \mathfrak{p} \rangle$ con $\mathfrak{p}$ es primo, son anillos totales de cocientes.

Ejemplo 1.6. Note que si R es un dominio entero que no es un cuerpo, entonces R no es anillo total de cocientes. En particular, $\mathbb{Z}$ no es un anillo total de cocientes.

Observación 1.3. Si R es un anillo total de cocientes y X un subanillo de R, X no necesariamente será un anillo total de cocientes. Específicamente, considere X un dominio entero que no es cuerpo y R su cuerpo de cocientes, por hipótesis se tiene que X es subanillo de R; pese a que R es un anillo total de cocientes, X no lo es.

Para exponer más ejemplos de anillos totales de cocientes es necesario definir anillo euclídeo y se ilustran ejemplos de estos anillos.

Definición 1.8. Se dice que un anillo R es un dominio euclídeo, si R es un dominio entero y existe una aplicación $\gamma : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, tal que

1. $\gamma(a) \leq \gamma(ab)$ para todo par a, b de elementos no nulos de R.

2. Si $a \in R \setminus \{0\}$, para cada $b \in R$ existen $c, r \in R$ tales que $b = ac + r$, $\gamma(r) < \gamma(a)$ ó $r = 0$.

Ejemplo 1.7. 1. $\mathbb{Z}$ es un dominio euclídeo, basta considerar $\gamma(n) = |n|$.

2. El anillo de polinomios $\mathbb{K}[x]$ con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$ y tomando $\gamma(p(x)) = grad(p(x))$, es un dominio euclídeo.

3. El anillo de los enteros gaussianos $Z[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ es un dominio entero y dotado de la función $\gamma(a + bi) = a^2 + b^2$ es un dominio euclídeo.

Los ítems 1 y 2 del Ejemplo anterior, al igual que la siguiente proposición conocida como la identidad de Bézout, se pueden encontrar en [6].

Proposición 1.3. *Propiedad de Bézout Sean R un dominio euclídeo, $f, g \in R$ y $d = mcd(f, g)$ entonces existen $\lambda, \mu \in R$ tales que $d = \lambda f + \mu g$.*

En [6] se encuentra la siguiente proposición que relaciona el dominio euclídeo con el anillo total de cocientes.

Proposición 1.4. *Si R es un dominio euclídeo y $f \in R$, $f \neq 0$, entonces $R/\langle f \rangle$ es un anillo total de cocientes.*

Demostración. Considere $g + \langle f \rangle \in R/\langle f \rangle$, supongamos que $d = mcd(f, g)$. Por la Proposición 1,3, existen λ, μ tales que $\lambda f + \mu g = d$. Por lo tanto,

$$(g + \langle f \rangle)(\mu + \langle f \rangle) = \mu g + \langle f \rangle = \mu g + \lambda f + \langle f \rangle = d + \langle f \rangle.$$

Consideremos los siguientes casos:

1. Si d es invertible en R, entonces existe d' tal que $dd' = 1$, luego,

$$(d + \langle f \rangle)(d' + \langle f \rangle) = dd' + \langle f \rangle = 1 + \langle f \rangle.$$

   Por lo tanto, $d + \langle f \rangle$ es invertible en $R/\langle f \rangle$, luego $g + \langle f \rangle$ también lo es.

2. Si d no es invertible en R, como $d|f$ y $d|g$, existen $c_1, c_2 \in R$ tales que $f = c_1 d$ y $g = c_2 d$. Entonces, $c_1 + \langle f \rangle \neq 0$, ya que f no divide a c_1, puesto que d no es invertible. Ahora, como $(g + \langle f \rangle)(c_1 + \langle f \rangle) = gc_1 + \langle f \rangle = c_2 dc_1 + \langle f \rangle = c_2 f + \langle f \rangle = 0 + \langle f \rangle$, entonces $g + \langle f \rangle$ es divisor de cero.

□

Ejemplo 1.8. Considere el anillo $\mathbb{Z}$ y sea $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, entonces $\mathbb{Z}/\langle n \rangle$ es un anillo total de cocientes.

Ejemplo 1.9. Sea $\mathbb{K}[x]$ el anillo de polinomios con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$, entonces $\mathbb{K}[x]/\langle f(x) \rangle$ con $f(x) \neq 0$ son anillos totales de cocientes. En particular, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, el cuerpo de los números complejos

$$\mathbb{C} = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle},$$

el anillo de los paracomplejos

$$\mathbb{M} = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 - 1 \rangle}$$

y el anillo de los números duales

$$\mathbb{D} = \frac{R[x]}{\langle x^2 \rangle}$$

son anillos totales de cocientes.

La siguiente Proposición fue tomada de [5].

Proposición 1.5. *Si R es un anillo total de cocientes, entonces*

$$A = \frac{R[x]}{\langle x^2 \rangle} = \{a + b\gamma : a, b \in R, \gamma^2 = 0\}$$

es un anillo total de cocientes.

Demostración. Sean $a + b\gamma$, $c + d\gamma \in A$, entonces

$$\begin{aligned}(a + b\gamma)(c + d\gamma) &= ac + ad\gamma + bc\gamma + bd\gamma^2 \\ &= ac + (bc + ad)\gamma.\end{aligned}$$

Como R es un anillo total de cocientes, tenemos que todo elemento es divisor de cero o invertible. Considere los siguientes casos

1. $a+b\gamma$ es invertible si y sólo si $a \in R$ es invertible. En efecto, si $a+b\gamma$ es invertible, existen $c, d \in R$, $(c, d) \neq (0, 0)$ tales que $ac = 1$ y $bc+ad = 0$, luego a es invertible. Recíprocamente, si a es invertible en R, se debe encontrar el elemento de la forma

$c + d\gamma$ cuyo producto sea el uno de A, entonces

$$(a + b\gamma)(c + d\gamma) = ac + (ad + bc)\gamma = 1$$

es decir, $ac = 1$ y $bc + bd = 0$. Basta considerar $c = a^{-1}$ y $d = -ba^{-2}$, así $a + b\gamma$ es invertible.

2. $a + b\gamma$ es divisor de cero si y sólo si $a \in R$ es divisor de cero. En efecto, $a + b\gamma$ es divisor de cero, es decir existe $c+d\gamma$ con $(c, d) \neq (0, 0)$ tales que $ac = bc+ad = 0$, si $c \neq 0$, entonces a y c son divisores de cero. Ahora, si $c = 0$ entonces $d \neq 0$ y $ad = 0$, luego a es divisor de cero. De manera recíproca, si a es divisor de cero, entonces existe $c \neq 0$ tal que $ac = 0$ y $bc + ad = 0$. Así, $a + b\gamma$ es divisor de cero.

□

Ejemplo 1.10. Sea $R = \mathbb{Z}/\langle n\rangle$, $n \neq 0$, por el Ejemplo 1,8 se tiene que R es un anillo total de cocientes, ahora considere

$$A = \frac{\mathbb{Z}/\langle n\rangle[x]}{\langle x^2\rangle} = \{a + b\gamma : a, b \in \mathbb{Z}/\langle n\rangle, \gamma^2 = 0\}.$$

Por la Proposición 1,5, A también es un anillo total de cocientes.

1.3. PRODUCTO DIRECTO DE ANILLOS

El producto directo de anillos totales de cocientes es otro ejemplo de anillos totales de cocientes. Para ver este hecho, a continuación se mencionan las propiedades y definiciones requeridas.

Sean I un conjunto arbitrario y $\{R_i\}_{i\in I}$ una familia de anillos, consideremos el producto directo de anillos $R = \prod_{i\in I} R_i$ con las operaciones suma y producto componente a componente. Note que R así definido es un anillo, ver [7]. Sea $\pi_i : R \to R_i$ la proyección i-ésima, es decir, para $\mathbf{f} = (f(i))_{i\in I} \in R$, $\pi_i(\mathbf{f}) = f(i)$.

Definición 1.9. Sea R un anillo conmutativo con uno es primo si $\mathfrak{p} \neq \{1\}$ y si $ab \in \mathfrak{p}$ implica que $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$.

Definición 1.10. Un ideal $\mathfrak{m}$ de R es maximal si $\mathfrak{m} \neq \{1\}$ y no existe ningún otro ideal $\mathfrak{a}$ tal que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a} \subset \langle 1\rangle$.

Las anteriores definiciones son equivalentes respectivamente a:

$\mathfrak{p}$ es ideal primo si y sólo si $R/\mathfrak{p}$ es dominio entero, y $\mathfrak{m}$ es maximal si y sólo si $R/\mathfrak{m}$ es cuerpo.

Se denota por $Spec(R)$, al conjunto de todos los ideales primos del anillo R.Y $Max(R)$ al conjunto de todos los ideales maximales del anillo R.

Lema 1.1. *Sea* $R = \prod_{i\in I} R_i$.

1. *Si para cada* $\mathfrak{p} \in Spec(R_i)$ *consideramos* $M_{\mathfrak{p},i} = \pi_i^{-1}(\mathfrak{p})$, *entonces* $M_{\mathfrak{p},i}$ *es un ideal primo de* R *y*

$$M_{\mathfrak{p},i} = \prod_{j\in I} m_j \text{ con } m_j = R_j \text{ para todo } j \neq i, \text{ y } m_i = \mathfrak{p}.$$

2. *Si para cada* $\mathfrak{m} \in Max(R_i)$ *consideramos* $M_{\mathfrak{m},i} = \pi_i^{-1}(\mathfrak{m})$, *entonces* $M_{\mathfrak{m},i}$ *es un ideal maximal de* R *y*

$$M_{\mathfrak{m},i} = \prod_{j\in I} m_j \text{ con } m_j = R_j \text{ para todo } j \neq i, \text{ y } m_i = \mathfrak{m}.$$

Demostración. 1. Puesto que π_i es un homomorfismo de anillos y $\mathfrak{p} \in Spec(R_i)$, entonces $\pi_i^{-1}(\mathfrak{p}) = M_{\mathfrak{p},i}$ es un ideal primo de R.

2. Como π_i es sobreyectiva y $\mathfrak{m} \in Max(R_i)$, entonces $\pi_i^{-1}(\mathfrak{m}) = M_{\mathfrak{m},i} \in R$.

□

Proposición 1.6. *Sean* $R = \prod_{i\in I} R_i$ *y* $\boldsymbol{f} = (f(i))_{i\in I} \in R$. *Entonces*

1. $\boldsymbol{f}$ *es invertible si y sólo si, para todo* $i \in I$, $\pi_i(\boldsymbol{f}) = f(i)$ *es invertible.*

2. $\boldsymbol{f}$ *es un divisor de cero si y sólo si existe* $i \in I$ *tal que* $\pi_i(\boldsymbol{f}) = f(i)$ *es divisor de cero.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$) Si $\mathbf{f} = (f(i))_{i\in I}$ es invertible, existe $\mathbf{g} = (g(i))_{i\in I}$ tal que $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} = 1 = (f(i)g(i))_{i\in I}$, es decir, $f(i)\cdot g(i) = 1$ para todo $i \in I$, luego $f(i) = \pi_i(f)$ es invertible.

$\Leftarrow$) Si para todo $i \in I$, $\pi_i(\mathbf{f}) = f(i)$ es invertible, existe $g(i) \in R_i$ tal que $f(i)\cdot g(i) = 1$ para todo $i \in I$, donde $g(i) = f(i)^{-1}$.

2. $\Rightarrow$) Si existe $i \in I$ tal que $\pi_i(\mathbf{f}) = f(i)$ es divisor de cero, entonces existe $a_i \neq 0$, $a_i \in R_i$ tal que $f(i) \cdot a_i = 0$, sea $g = (g(i))_{i \in I} \in R$ con $g(i) = a_i$ y $g(j) = 0$ para $i \neq j$. Luego, $\mathbf{g} \neq 0$ y $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = 0$.

   $\Leftarrow$) Si $\mathbf{f}$ es divisor de cero, existe $\mathbf{g} \neq 0$ en R tal que $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = 0 = (f(i)_{i \in I}) \cdot (g(i)_{i \in I})$, entonces, existe $j \in I$ tal que $g(j) \neq 0$ y $f(j) \cdot g(j) = 0$, es decir $f(j)$ es divisor de cero.

□

De acuerdo a la Proposición 1,2 se puede enunciar los corolarios siguientes que muestran los objetivos de esta subsección, es decir que el producto directo de anillos totales de cocientes es un anillo total de cocientes. En particular, el producto directo de cuerpos es un anillo total de cocientes.

Corolario 1.2. *Sea $\{R_i\}_{i \in I}$ una familia de anillos totales de cocientes, entonces $R = \prod_{i \in I} R_i$ es un anillo total de cocientes.*

Demostración. Por hipótesis cada R_i es un anillo total de cocientes, es decir, sus elementos son invertibles o divisores de cero, consideremos $f \in R$, entonces cada $f(i)$ es invertible o divisor de cero de R_i para todo $i \in I$, entonces si todos son invertibles, tenemos que f es invertible por el teorema anterior, pero si alguno de ellos o todos son divisores de cero entonces f es divisor de cero. □

Ejemplo 1.11. Sea $R_i = \mathbb{Z}/\langle 6 \rangle$ el anillo total de cocientes, entonces $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/\langle 6 \rangle$ es un anillo total de cocientes.

Corolario 1.3. *Sean $R = \prod_{i \in I} R_i$ y $\boldsymbol{f} = (f(i))_{i \in I} \in R$. Si para todo $i \in I$, R_i es un cuerpo, entonces*

1. *$\boldsymbol{f}$ es invertible si y sólo si $f(i) \neq 0$ para todo $i \in I$.*
2. *$\boldsymbol{f}$ es un divisor de cero si y sólo si existe $i \in I$ tal que $f(i) = 0$.*
3. *R es un anillo total de cocientes.*

1.4. ÁLGEBRAS FINITAS SOBRE UN CUERPO $\mathbb{K}$

En la presente sección se demuestra que las álgebras finitas sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, es un anillo total de cocientes. Esta prueba se sigue de [5], previamente se realiza un breve

estudio sobre algunas de sus propiedades.

Definición 1.11. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Una $\mathbb{K}$-álgebra A con unidad es un conjunto dotado de dos operaciones $(A, +, *)$ cumpliendo que:

1. es un anillo con unidad.

2. es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

3. para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y para todos $a, b \in A$, $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.

A es una $\mathbb{K}$-álgebra finita si es una $\mathbb{K}$-álgebra conmutativa con unidad y la dimensión como $\mathbb{K}$ espacio vectorial es finita.

Ejemplo 1.12. Existen, salvo isomorfismos, tres álgebras de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{C} = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 + 1\rangle},\ \mathbb{M} = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 - 1\rangle},\ \mathbb{D} = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2\rangle}.$$

Las rectas proyectivas sobre las $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{C}, \mathbb{M}, \mathbb{D}$ generan las geometrías del plano conocidas como geometrías de Moebius, Minkowski y Laguerre, respectivamente.

Toda $\mathbb{R}$-álgebra de dimensión dos es isomorfa a alguna de las anteriores $\mathbb{R}$-álgebras, las cuales no son isomorfas entre ellas, ya que los paracomplejos tienen divisores de cero y los duales elementos nilpotentes.

Definición 1.12. Una $\mathbb{K}$-álgebra finita A que tiene exactamente un ideal maximal se llama $\mathbb{K}$-álgebra finita local.

Ejemplo 1.13. Note que $\mathbb{D} = \dfrac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2\rangle}$ es una $\mathbb{R}$-álgebra local con ideal maximal $\langle x\rangle$.

La siguiente proposición muestra que una $\mathbb{K}$-álgebra finita se descompone en forma única, salvo isomorfismos, en suma directa de $\mathbb{K}$-álgebras finitas locales, y su demostración se encuentra en [7].

Proposición 1.7. *A es una $\mathbb{K}$-álgebra finita si y sólo si A es una suma directa de $\mathbb{K}$-álgebras locales finitas.*

Lema 1.2. *Sea $A = \bigoplus_{i=1}^{r} A_i$ una $\mathbb{K}$-álgebra finita donde cada A_i es una $\mathbb{K}$-álgebra local finita. Para $i = 1, \ldots, r$ sea $\mathfrak{m}_i$ el ideal maximal de A_i. Entonces:*

(1) $Max(A) = \{M_1, \ldots, M_r\}$ *donde* $M_i = \prod_{j=1}^{r} m_j$ *con* $m_j = A_j$, *para todo* $j \neq i$ *y* $m_i = \mathfrak{m}_i$.

(2) Para todo $i = 1, \ldots, r$ *se tiene que* $A_{M_i} \simeq A_i$.

Demostración. 1. Es consecuencia de que los ideales maximales de una suma directa de r anillos tienen la forma M_i para todo $i = 1, \cdots, r$. Ver [[7], Lema 1.2.6].

2. Para todo $i = 1, \cdots, r$,

$$A_{M_i} = \left\{ \frac{(a_1, \cdots, a_r)}{(b_1, \cdots, b_r)} : (b_1, \cdots, b_r) \notin M_i \right\} = \left\{ \frac{(a_1, \cdots, a_r)}{(b_1, \cdots, b_r)} : b_i \notin \mathfrak{m}_i \right\}$$

Como A_i es local, b_i es invertible y la aplicación

$$\begin{aligned} \phi_i : A_{M_i} &\to A_i \\ \frac{(a_1, \cdots, a_r)}{(b_1, \cdots, b_r)} &\mapsto b_i^{-1} a_i \end{aligned}$$

es un homomorfismo de anillos. Note que ϕ_i es inyectiva ya que si $b_i^{-1} a_i = 0$, entonces existe $(0, \cdots, b_i^{-1}, \cdots, 0) \notin M_i$ tal que

$$(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_r)(0, \cdots, b_i^{-1}, \cdots, 0) = (0, \cdots, 0)$$

y esto equivale a que

$$\frac{(a_1, \cdots, a_r)}{(b_1, \cdots, b_r)} = (0, \cdots, 0)$$

para $\frac{(a_1, \cdots, a_r)}{(b_1, \cdots, b_r)} \in A_{Mi}$. Además, ϕ_i es sobreyectiva porque, para todo $a_i \in A_i$, existe $\frac{(a_i, \cdots, a_i)}{(1, \cdots, 1)} \in A_{M_i}$ tal que $\phi_i \left(\frac{(a_i, \cdots, a_i)}{(1, \cdots, 1)} \right) = a_i$. □

Para mejorar la comprensión del lema anterior, se presenta la construcción del siguiente ejemplo, producto de este trabajo de investigación.

Ejemplo 1.14 (Granados, Guevara)**.** Considere el producto de cuerpos $A = \mathbb{Z}/\langle 2 \rangle \times \mathbb{Z}/\langle 2 \rangle$, y sus ideales maximales

$$M_1 = \langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}/\langle 2 \rangle \ y \ M_2 = \mathbb{Z}/\langle 2 \rangle \times \langle 0 \rangle.$$

Como M_1 y M_2 son maximales, entonces M_1 y M_2 son ideales primos. De esta manera, considere los subconjuntos multiplicativos de A, dados por $S_1 = A - M_1$ y

$S_2 = A - M_2$, respectivamente. El anillo de cocientes de A por S_1 está dado por

$$\begin{aligned} A_{S_1} = A_{M_1} &= \left\{ \frac{(a,b)}{(c,d)} : (a,b) \in A, (c,d) \notin M_1 \right\} \\ &= \left\{ \frac{(a,b)}{(c,d)} : (a,b) \in A, c \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ \frac{(a,b)}{(c,d)} : (a,b) \in A, c = 1 \right\} \\ &= \left\{ \frac{(1,1)}{(1,0)}, \frac{(0,0)}{(1,0)} \right\}. \end{aligned}$$

Note que $\frac{(0,0)}{(1,0)} \sim \frac{(0,0)}{(1,1)} \sim \frac{(0,1)}{(1,1)} \sim \frac{(0,1)}{(1,0)}$ y $\frac{(1,0)}{(1,0)} \sim \frac{(1,1)}{(1,0)} \sim \frac{(1,0)}{(1,1)} \sim \frac{(1,1)}{(1,1)}$.

Defina el homomorfismo $\phi_1 : A_{M_1} \to \mathbb{Z}/\langle 2 \rangle$, donde $\phi_1 \left(\frac{(1,1)}{(1,0)} \right) = 1$ y $\phi_1 \left(\frac{(0,0)}{(1,0)} \right) = 0$.

De manera análoga, $A_{S_2} = A_{M_2} = \left\{ \frac{(1,1)}{(0,1)}, \frac{(0,0)}{(0,1)} \right\}$, y defina $\phi_2 : A_{M_2} \to \mathbb{Z}/\langle 2 \rangle$, donde $\phi_2 \left(\frac{(1,1)}{(0,1)} \right) = 1$ y $\phi_2 \left(\frac{(0,0)}{(0,1)} \right) = 0$.

Claramente ϕ_1 y ϕ_2 son biyectivas, luego $A_{M_1} \simeq \mathbb{Z}/\langle 2 \rangle$ y $A_{M_2} \simeq \mathbb{Z}/\langle 2 \rangle$, como se indica en el Lema 1,2.

Proposición 1.8. *Toda $\mathbb{K}$-álgebra finita es un anillo total de cocientes.*

Demostración. Sean A una $\mathbb{K}$-álgebra finita y $dim_{\mathbb{K}} A = n$. Para todo $u \in A$, existe $r < n$ tal que $1, u, \cdots, u^r$ son linealmente independientes y u^{r+1} depende linealmente de $\{1, u, \cdots, u^r\}$ luego existen $b_0, b_1, \cdots, b_r \in K$ tales que $u^{r+1} = b_r u^r + \cdots + b_0 1$ y tenemos dos casos:

1. Si $b_0 = 0$ entonces $0 = u^{r+1} - b_r u^r - \cdots - b_1 u = u(u^r - \cdots - b_2 u - b_1 1)$ luego u es divisor de cero. Note que $u^r - \cdots - b_2 u - b_1 1 \neq 0$ ya que $1, u, \cdots, u^r$ son linealmente independientes.

2. Si $b_0 \neq 0$ entonces $1 = b_0^{-1} u(u^r - \cdots - b_2 u - b_1 1)$ por tanto u es invertible. En consecuencia, A es un anillo total de cocientes.

□

1.5. INVERSIÓN DE UN ANILLO EN UN PRODUCTO DE CUERPOS

Para introducir esta sección es necesario mostrar algunos resultados conocidos del álgebra conmutativa. La inmersión de un anillo en un producto de cuerpos, ver [7], considera al conjunto $Max(R)$ de todos los ideales maximales de un anillo R, así como los cuerpos $R/\mathfrak{m}$ donde $\mathfrak{m} \in Max(R)$. El objetivo de esta sección es ver la inmersión de R en el producto de cuerpos $\prod_{\mathfrak{m}\in Max(R)} R/\mathfrak{m}$.

Definición 1.13. El radical de Jacobson $\mathcal{J}(R)$ de R, es la intersección de todos los ideales maximales de R, es decir,

$$\mathcal{J}(R) = \bigcap_{\mathfrak{m}\in Max(R)} \mathfrak{m}.$$

Sean R un anillo y $Max(R) = \{\mathfrak{m} : \mathfrak{m} \text{ es ideal maximal de } R\}$. Considere el producto de cuerpos, dado por

$$\prod_{\mathfrak{m}\in Max(R)} R/\mathfrak{m}.$$

Por la propiedad universal del producto, existe un único homomorfismo de anillos

$$\begin{aligned} \varphi : R &\longrightarrow \prod_{\mathfrak{m}\in Max(R)} R/\mathfrak{m} \\ a &\longmapsto (a+\mathfrak{m})_{\mathfrak{m}\in Max(R)} \end{aligned}$$

El homomorfismo φ en general no es inyectivo, pues $Ker(\varphi) = \mathcal{J}(R)$, donde $\mathcal{J}(R)$ es el radical de Jacobson.

En efecto,

$$\begin{aligned} Ker(\varphi) =& \{a \in R : \varphi(a) = \prod_{\mathfrak{m}\in Max(R)} (a+\mathfrak{m}) = 0\} \\ =& \{a \in R : a+\mathfrak{m} = \mathfrak{m}, \forall \mathfrak{m} \in Max(R)\} \\ =& \{a \in R : a \in \mathfrak{m}, \forall \mathfrak{m} \in Max(R)\} \\ =& \{a \in R : a \in \bigcap_{\mathfrak{m}\in Max(R)} \mathfrak{m}\} = \mathcal{J}(R). \end{aligned}$$

El conjunto de los elementos invertibles de R se denota como $I(R)$ y el de los divisores de cero de R como $O(R)$, es decir,

$$O(R) = \{f \in R : existe\ g \neq 0\ tal\ que\ f \cdot g = 0\}$$

y

$$I(R) = \{f \in R : existe\ g \in R\ tal\ que\ f \cdot g = 1\}.$$

La demostración de la siguiente proposición se encuentra en ([2], la proposición 1,11).

Proposición 1.9. *Sean $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ ideales y sea $\mathfrak{p}$ ideal primo tal que $\cap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$ entonces $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$ para algún i. Si $\mathfrak{p} = \cap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$ entonces $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$ para algún i.*

Proposición 1.10. *Sea R un anillo, entonces*

1. *$\varphi(I(R)) = I(\prod_{\mathfrak{m} \in max(R)} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$.*
2. *Para todo $a \in R$, $\varphi(a) \in O(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$ si y sólo si existe $\mathfrak{m} \in Max(R)$ tal que $a \in \mathfrak{m}$.*
3. *$\varphi(O(R)) \subset O(\prod_{\mathfrak{m} \in Max} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$.*
4. *Si R es un anillo total de cocientes, entonces*

$$\varphi(O(R)) = O\left(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}\right) \bigcap \varphi(R).$$

Además, el recíproco se cumple si $\mathcal{J}(R) = \{0\}$.

Demostración. 1. Si $a \in I(R)$, entonces $a \notin \mathfrak{m}$ para todo $\mathfrak{m} \in Max(R)$ luego $a + \mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}$ en $R/\mathfrak{m}$, para todo $\mathfrak{m} \in Max(R)$; como $\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}$ es un producto de cuerpos, y todas sus componentes son distintas de cero, $a + \mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}$, entonces $\varphi(a)$ es invertible en $\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}$.

Recíprocamente, sea $\mathbf{b} \in \prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m} \cap \varphi(R)$, observe que $\mathbf{b} \in \varphi(I(R))$. Por la hipótesis, existe $a \in R$ tal que $\mathbf{b} = \varphi(a)$ y $\varphi(a)$ es invertible en $\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}$, es decir $a + \mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}$ en $R/\mathfrak{m}$ para todo $\mathfrak{m} \in Max(R)$, luego $a \notin \mathfrak{m}$ para todo $\mathfrak{m} \in Max(R)$, es decir a es invertible, por lo tanto $\mathbf{b} = \varphi(a) \in \varphi(I(R))$.

2. $\varphi(a) = (a + \mathfrak{m})_{\mathfrak{m} \in Max(R)}$ es divisor de cero, si y sólo si existe $\mathfrak{m} \in Max(R)$ tal que $a + \mathfrak{m}$ es divisor de cero, es decir, $a \in \mathfrak{m}$.

3. Sea $b \in O(R)$, es decir, b es divisor de cero, en consecuencia $b \in R \setminus R^*$ entonces existe $\mathfrak{m} \in Max(R)$ tal que $b \in \mathfrak{m}$, y se aplica el ítem anterior.

4. Por el Corolario 1,2, $\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}$ es un anillo total de cocientes, por lo tanto,

$$O\left(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}\right) \bigcup I\left(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}\right) = \prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}$$

y

$$O\left(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}\right) \bigcap I\left(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}\right) = \emptyset$$

ya que, todo elemento de un anillo total de cocientes es invertible o divisor de cero. Así,

$$\begin{aligned}\varphi(R) &= \left(O\left(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}\right) \bigcup I\left(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}\right)\right) \bigcap \varphi(R) \\ &= \left(O\left(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}\right) \bigcap \varphi(R)\right) \bigcup \left(I\left(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}\right) \bigcap \varphi(R)\right)\end{aligned}$$

y $\emptyset \bigcap \varphi(R) = (O(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}) \bigcap I(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m})) \bigcap \varphi(R)$
$= (O(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)) \bigcap (I(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R))$
$\subseteq O(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}) \bigcap I(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}) = \emptyset.$

Por el ítem 1, se tiene que $\varphi(I(R)) = I(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$, y por el ítem 3 se tiene que $\varphi(O(R)) \subset O(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$.

$\Rightarrow$) Por hipótesis, R es un anillo total de cocientes, entonces $R = O(R) \bigcup I(R)$ y $O(R) \bigcap I(R) = \emptyset$. Luego, $\varphi(O(R)) = O(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$.

$\Leftarrow$) Sea $a \in R$, observe que R es un anillo total de cocientes, para esto, observe que si $a \notin I(R)$ entonces, $\varphi(a) \notin I(\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$. En efecto, si $\varphi(a) \in$

$I(\prod_{\mathfrak{m}\in Max(R)} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$ entonces, por el ítem 1, existe $c \in R$, luego,

$$c = \varphi(b) \Longrightarrow b \in I(R).$$

$\varphi(a) = \varphi(b)$, entonces, $\varphi(b-a) = 0$ y $Ker\varphi = J(R) = \{0\}$, por lo tanto, $b-a = 0$ ya que es inyectiva, luego $b = a$ y $a \in I(R)$.

Ahora, si $a \notin I(R)$, entonces $\varphi(a) \notin I(\prod_{\mathfrak{m}\in Max(R)} R/\mathfrak{m}) \cap \varphi(R)$, pero $\varphi(a) \in \varphi(R)$, luego $\varphi(a) \notin I(\prod_{\mathfrak{m}\in Max(R)} R/\mathfrak{m})$, por lo tanto, como $\prod_{\mathfrak{m}\in Max(R)} R/\mathfrak{m}$ es un anillo total de cocientes, entonces $\varphi(a) \in O(\prod_{\mathfrak{m}\in Max(R)} R/\mathfrak{m}) \cap \varphi(R) = \varphi(O(R))$. Luego, existe $b \in O(R)$ tal que $\varphi(b) = \varphi(a)$, es decir $\varphi(b-a) = 0$, luego $b - a = 0$. Por lo tanto, $b = a$ y $a \in O(R)$, entonces R es un anillo total de cocientes.

□

Proposición 1.11. *R es anillo con $Max(R) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots \mathfrak{m}_r\}$ y $\mathcal{J}(R) = \{0\}$ si y sólo si $R = K_1 \times \cdots \times K_r$ con K_i cuerpo para todo $i = 1, \ldots, r$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea

$$\begin{aligned} \varphi : R &\longrightarrow R/\mathfrak{m}_1 \times \cdots \times R/\mathfrak{m}_r \\ a &\longmapsto (a + \mathfrak{m}_1, \ldots, a + \mathfrak{m}_r) \end{aligned}$$

- Como $\mathcal{J}(R) = \{0\}$ por hipótesis, y $\mathcal{J}(R) = Ker\varphi = \{0\}$ entonces φ es inyectiva.

- Ahora observe que φ es sobreyectiva. Sea $(a_1 + \mathfrak{m}_1, \ldots, a_r + \mathfrak{m}_r) \in R/\mathfrak{m}_1 \times \cdots \times R/\mathfrak{m}_r$, se probará que existe $a \in R$ tal que $a_i + \mathfrak{m}_i = a + \mathfrak{m}_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Para ello, observe que para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, se tiene que

$$\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{i-1} \cap \mathfrak{m}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r \neq \{0\}$$

ya que si $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{i-1} \cap \mathfrak{m}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r = \{0\}$, entonces $\{0\} = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{i-1} \cap \mathfrak{m}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r \subset \mathfrak{m}_i$.

Por la Proposición 1.9 y ya que todo maximal es ideal primo, se tiene que existe $k \neq i,\ k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tal que $\mathfrak{m}_k \subset \mathfrak{m}_i$ contradicción del hecho de $\mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}_i$ son

maximales.

Por lo tanto,

$$\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{i-1} \cap \mathfrak{m}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r \neq \{0\}$$

y

$$\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{i-1} \cap \mathfrak{m}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r \not\subset \mathfrak{m}_i.$$

Luego, existe $x_i \in \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{i-1} \cap \mathfrak{m}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r$ y $x_i \notin \mathfrak{m}_i$, entonces $x_i + \mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_i$ en $R/\mathfrak{m}_i$, y como $R/\mathfrak{m}_i$ es cuerpo, entonces para $x_i + \mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_i$ existe $y_i \in R$ que cumple $(y_i + \mathfrak{m}_i) \in R/\mathfrak{m}_i$, tal que

$$(x_i + \mathfrak{m}_i)(y_i + \mathfrak{m}_i) = x_i y_i + \mathfrak{m}_i = 1 + \mathfrak{m}_i$$

es decir,

$$x_i y_i - 1 \in \mathfrak{m}_i$$

y

$$x_i y_i \in \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{i-1} \cap \mathfrak{m}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r$$

ya que la intersección de ideales es un ideal y x_i pertenece a esa intersección.

Sea $e_i = x_i y_i$ para $i = 1, \ldots, r$, luego para todo i se tiene que $e_i - 1 \in \mathfrak{m}_i$ y $e_i \in \mathfrak{m}_j,\ \forall j \neq i$, y sea $a = \sum_{i=1}^{r} a_i e_i + \mathfrak{m}_j = a_j e_j + \mathfrak{m}_j = a_j + \mathfrak{m}_j$.

Luego, $a + \mathfrak{m}_j = a_j + \mathfrak{m}_j$ para todo j. Entonces φ es sobreyectiva y R es producto de cuerpos.

$\Leftarrow$) Si $R = K_1 \times \cdots \times K_r$ con K_i cuerpo para todo $i = 1, \ldots, r$, es decir, $\langle 0_{K_i} \rangle$ es el único ideal maximal para cada K_i, entonces por el Lema 1,1, se tiene que

$$M_i = \prod_{j=1}^{n} m_j \ con\ m_j = K_j,\ \forall j \neq i,\ y\ m_i = \langle 0_{K_i} \rangle.$$

Luego, $\mathcal{J}(R) = \{0\}$.

□

CAPÍTULO 2

RECTAS PROYECTIVAS SOBRE ANILLOS

El siguiente capítulo presenta definiciones y resultados referentes a las rectas proyectivas sobre anillos, en particular las rectas proyectivas sobre anillos totales de cocientes. Se inicia definiendo los elementos complementables, algunas equivalencias de estos elementos, y como resultado de este trabajo se presentan observaciones y un corolario que permite determinar cuándo un par es o no complementable en un anillo total de cocientes. Así mismo, se definen los puntos fuertemente independientes y las referencias proyectivas. Finalmente, se definen las proyectividades entre rectas proyectivas que conservan cuaternas armónicas, como se muestra en el Teorema de Staudt. Se plantean demostraciones que no se presentan en proposiciones revisadas principalmente en [10], además de completar detalles en varias pruebas.

Definición 2.1. Sean R un anillo conmutativo con uno, y $(M, +)$ un grupo abeliano. Se dice que $R \times M \longrightarrow M$ define en M una estructura de R-módulo cuando:

1. $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$
2. $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$
3. $(rs) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$
4. $1 \cdot m = m$

donde $r, s \in R$ y $m, n \in M$.

Si un R-módulo admite alguna base, se dice que es un módulo libre. Para el caso particular del estudio de rectas proyectivas sobre anillos, considere aquellos R-módulos con dimensión dos (o bidimensionales).

Definición 2.2. Sean R un anillo, $z_1, z_2 \in R$, se dice que el par (z_1, z_2) es complementable si existe otro par (z_1', z_2') tal que (z_1, z_2) y (z_1', z_2') generan el R-módulo libre bidimensional R^2.

Observación 2.1. Por la definición anterior, si (z_1, z_2) es un elemento complementable, existe (z_1', z_2') tal que (z_1, z_2) y (z_1', z_2') generan a R^2, lo que resulta ser equivalente a decir que $\{(z_1, z_2), (z_1', z_2')\}$ es una base para R^2. Es decir, cualquier conjunto generador de dos elementos forma una base, según [12].

Ejemplo 2.1. Sea R un anillo, considere R^2, entonces $(1, 0)$ es complementable ya que existe $(0, 1)$ tal que generan a R^2. Observe que son linealmente independientes. En efecto,

$$(0, 0) = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$$

implica que $x = y = 0$.

Ejemplo 2.2. Sean $R = \mathbb{Z}[x]$ y $R^2 = \mathbb{Z}[x] \times \mathbb{Z}[x]$, entonces $(2, 3)$ es complementable. En efecto, $\{(2, 3), (1, 1)\}$ es base de R^2. En efecto, si

$$(0, 0) = p(x)(2, 3) + q(x)(1, 1) = (2p(x) + q(x), 3p(x) + q(x))$$

entonces, $2p(x) + q(x) = 0$ y $3p(x) + q(x) = 0$, por lo tanto, $q(x) = -2p(x)$, y reemplazando en la segunda ecuación tenemos que $3p(x) + (-2p(x)) = p(x) = 0$, de donde $q(x) = 0$. Luego, $p(x) = q(x) = 0$, por lo tanto $(2, 3)$ y $(1, 1)$ son linealmente independientes, es decir son base de R^2.

Definición 2.3. Sean R un anillo y $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ una base de R^2, con $a, b, \in R^2$. Si $a = a_1u_2 + a_2u_2$ y $b = b_1u_1 + b_2u_2$, se define el producto exterior relativo a la base $\mathcal{B}$ como:

$$a \wedge_{\mathcal{B}} b = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \in R.$$

La siguiente proposición sobre las propiedades de la aplicación asociada a la Definición 2,3, aparece sin demostración en [7], por ello se plantea una demostración detallada de la misma.

Proposición 2.1. *Sean $a = a_1u_1 + a_2u_2$, $b = b_1u_1 + b_2u_2$, $c = c_1u_1 + c_2u_2$. La siguiente aplicación,*

$$\begin{aligned} \wedge_{\mathcal{B}} : & R^2 \times R^2 \longrightarrow R \\ & (a, b) \mapsto a \wedge_{\mathcal{B}} b \end{aligned}$$

cumple las siguientes propiedades:

1. *$\wedge_{\mathcal{B}}$ es bilineal y antisimétrica, en particular $a \wedge b = -b \wedge_{\mathcal{B}} a$ y $a \wedge_{\mathcal{B}} a = 0$.*

2. *Si $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ es otra base de R^2 entonces,*

$$a \wedge_{\mathcal{B}} b = (a \wedge_{\mathcal{B}'} b)(v_1 \wedge_{\mathcal{B}} v_2).$$

3. *$\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ es base de R^2 si y sólo si $v_1 \wedge_{\mathcal{B}} v_2 \in R^*$.*

Demostración. 1. Note inicialmente que $\wedge_{\mathcal{B}}$ es bilineal, es decir:

$$\begin{aligned} (a+b) \wedge_{\mathcal{B}} c = & \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ = & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ = & a \wedge_{\mathcal{B}} c + b \wedge_{\mathcal{B}} c \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (\alpha a) \wedge_{\mathcal{B}} b = & \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ = & \alpha a_1 b_2 - \alpha a_2 b_1 \\ = & \alpha(a \wedge_{\mathcal{B}} b). \end{aligned}$$

De manera análoga, se obtiene que $a \wedge_{\mathcal{B}} (b + c) = a \wedge_{\mathcal{B}} b + a \wedge_{\mathcal{B}} c$ y $a \wedge_{\mathcal{B}} (\alpha b) = \alpha(a \wedge_{\mathcal{B}} b)$.

Ahora, note que $\wedge_{\mathcal{B}}$ es antisimétrica

$$-(b \wedge_{\mathcal{B}} a) = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = -(a_2b_1 - a_1b_2) = a_1b_2 - a_2b_1 = a \wedge_{\mathcal{B}} b.$$

Finalmente, observe que $a \wedge_{\mathcal{B}} a = 0$. En efecto

$$a \wedge_{\mathcal{B}} a = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_1a_2 = 0.$$

2. Sean $v_1 = v_{11}u_1 + v_{12}u_2$, $v_2 = v_{21}u_1 + v_{22}u_2$, $a = a_1v_1 + a_2v_2$ y $b = b_1v_1 + b_2v_2$, entonces $a = a_1(v_{11}u_1 + v_{12}u_2) + a_2(v_{21}u_1 + v_{22}u_2)$ y $b = b_1(v_{11}u_1 + v_{12}u_2) + b_2(v_{21}u_1 + v_{22}u_2)$, luego a y b en la base $\{u_1, u_2\}$ se expresan como: $a = (a_1v_{11} + a_2v_{21})u_1 + (a_1v_{12} + a_2v_{22})u_2$ y $b = (b_1v_{11} + b_2v_{21})u_1 + (b_1v_{12} + b_2v_{22})u_2$. Por lo cual,

$$a \wedge_{\mathcal{B}'} b = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

y

$$v_1 \wedge_{\mathcal{B}} v_2 = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} = v_{11}v_{22} - v_{21}v_{12},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} a \wedge_{\mathcal{B}} b &= \begin{vmatrix} a_1v_{11} + a_2v_{21} & a_1v_{12} + a_2v_{22} \\ b_1v_{11} + b_2v_{21} & b_1v_{12} + b_2v_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} \\ &= (a \wedge_{\mathcal{B}'} b)(v_1 \wedge_{\mathcal{B}} v_2). \end{aligned}$$

3. $\Rightarrow$) Como $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ son bases de R^2, entonces por el ítem anterior $u_1 \wedge_{\mathcal{B}} u_2 = (u_1 \wedge_{\mathcal{B}'} u_2)(v_1 \wedge_{\mathcal{B}} v_2)$. Así

$$1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (u_1 \wedge_{\mathcal{B}'} u_2)(v_1 \wedge_{\mathcal{B}} v_2) \in R, \text{ entonces } (v_1 \wedge_{\mathcal{B}} v_2) \in R^*.$$

$\Leftarrow$) Sean $v_1 = a_1u_1 + a_2u_2$ y $v_2 = b_1u_1 + b_2u_2$, luego $v_1 \wedge_{\mathcal{B}} v_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \in R^*$, entonces $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ es invertible, con inversa $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$. Así, $u_1 = \alpha_1v_1+\alpha_2v_2$ y $u_2 = \beta_1v_1+\beta_2v_2$. Puesto que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ es base, entonces $\{v_1, v_2\}$ también es un conjunto generador de R^2. Así, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es base de R^2. □

Las demostraciones presentadas en la Observación 2,2, son derivadas de este trabajo, y sus enunciados se encuentran en [7].

Observación 2.2. Por la proposición anterior, si $a, b \in R^2$, entonces las siguientes afirmaciones son independientes de la base $\mathcal{B}$ elegida; considere $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ bases de R^2.

1. Sea $a \wedge_{\mathcal{B}} b = 0$ entonces, por el ítem 2 de la Proposición 2,1, se tiene que $0 = a \wedge_{\mathcal{B}} b = (a \wedge_{\mathcal{B}'} b)(v_1 \wedge_{\mathcal{B}} v_2)$, además $(v_1 \wedge_{\mathcal{B}} v_2)$ es invertible, luego $(a \wedge_{\mathcal{B}'} b) = 0$.

2. Sea $a \wedge_{\mathcal{B}} b$ divisor de cero, entonces, existe $\alpha \in R$, con $\alpha \neq 0$ tal que $(a \wedge_{\mathcal{B}} b)\alpha = 0$, y por el ítem 2 de la Proposición 2,1, se tiene que

$$(a \wedge_{\mathcal{B}} b)\alpha = (a \wedge_{\mathcal{B}'} b)(v_1 \wedge_{\mathcal{B}} v_2)\alpha = 0.$$

   Luego, $(a \wedge_{\mathcal{B}'} b)$ es divisor de cero.

3. Sea $a \wedge_{\mathcal{B}} b$ no divisor de cero. Suponga que $a \wedge_{\mathcal{B}'} b$ es divisor de cero, entonces existe $\lambda \in R$, con $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda(a \wedge_{\mathcal{B}'} b) = 0$ y por ítem 2 de la Proposición 2,1 se tiene que

$$\begin{aligned} (a \wedge_{\mathcal{B}} b) &= (a \wedge_{\mathcal{B}'} b)(v_1 \wedge_{\mathcal{B}} v_2) \\ \lambda(a \wedge_{\mathcal{B}} b) &= \lambda(a \wedge_{\mathcal{B}'} b)(v_1 \wedge_{\mathcal{B}} v_2) = 0 \end{aligned}$$

   luego, $a \wedge_{\mathcal{B}} b$ es divisor de cero.

4. $a \wedge_{\mathcal{B}} b \in R^*$, entonces existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$1 = \lambda(a \wedge_{\mathcal{B}} b) = \lambda(a \wedge_{\mathcal{B}'} b)(v_1 \wedge_{\mathcal{B}} v_2),$$

   sea $\alpha = \lambda(v_1 \wedge_{\mathcal{B}} v_2)$, como $\alpha \neq 0$ entonces $(a \wedge_{\mathcal{B}'} b)$ es invertible.

Por otro lado, es posible establecer un isomorfismo entre R^2 como R-módulo bidimensional, y cualquier módulo M libre de rango 2, es decir, los resultados anteriores para R^2 como R-módulo bidimensional, se pueden extender para cualquier R- módulo libre de rango 2.

La Proposición 2,2 es mencionada en [7], se puede verificar el resultado con la prueba aquí sugerida.

Proposición 2.2. *Sea M un R-módulo libre de rango 2, y R^2 el R-módulo bidimensional, la aplicación*

$$\varphi_{\mathcal{B}} : M \longrightarrow R^2$$

$$a_1u_1 + a_2u_2 \longmapsto (a_1, a_2)$$

es un isomorfismo de R-módulos, donde $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ es una base de M, $a_1, a_2 \in R$.

Demostración. Observe que $\varphi_{\mathcal{B}}$ es un homomorfismo de R-módulos. Considere $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ una base de M, y $a, b \in M$, con $a = a_1u_1 + a_2u_2$ y $b = b_1u_1 + b_2u_2$, donde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{B}}(a+b) &= \varphi_{\mathcal{B}}((a_1u_1 + a_2u_2) + (b_1u_1 + b_2u_2)) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}((a_1u_1 + b_1u_1) + (a_2u_2 + b_2u_2)) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}((a_1 + b_1)u_1 + (a_2 + b_2)u_2) \\
&= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}(a) + \varphi_{\mathcal{B}}(b)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{B}}(\alpha a) &= \varphi_{\mathcal{B}}(\alpha(a_1u_1 + a_2u_2)) \\
&= \varphi_{\mathcal{B}}(\alpha a_1u_1 + \alpha a_2u_2) \\
&= (\alpha a_1, \alpha a_2) \\
&= \alpha(a_1, a_2) \\
&= \alpha\varphi_{\mathcal{B}}(a).
\end{aligned}$$

Observe que $\varphi_{\mathcal{B}}$ es inyectivo. En efecto,

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{B}}(a) &= (0,0)\\ &= (a_1, a_2)\end{aligned}$$

entonces $a_1 = a_2 = 0$, es decir, $a = 0$, luego $\varphi_{\mathcal{B}}$ es inyectiva.

Note que $\varphi_{\mathcal{B}}$ es sobreyectiva, sea $(a,b) \in R^2$, existe $x = au_1 + bu_2 \in M$ tal que $\varphi_{\mathcal{B}}(au_1 + bu_2) = (a,b)$. □

Se plantea el Lema 2,1 junto a su demostración para demostrar la Proposición 2,3, revisada en [7].

Lema 2.1. *Sean M y N $R-$módulos libres de rango 2 y $\mathcal{B}\{u_1, u_2\}$ una base de M. Si $\varphi : M \longrightarrow N$ es un isomorfismo de $R-$módulos entonces, para todos $a, b \in M$*

$$det\varphi = \varphi(u_1) \wedge_{\mathcal{B}} \varphi(u_2).$$

Demostración. Sea A la matriz asociada al isomorfismo φ y $\mathcal{B}$ una base de M, entonces $\varphi(u_1) = Au_1$ y $\varphi(u_2) = Au_2$. Luego,

$$\varphi(u_1) \wedge_{\mathcal{B}} \varphi(u_2) = det(Au_1\ Au_2) = detA\ det(u_1\ u_2).$$

En particular, si $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ se tiene que

$$det(u_1\ u_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Entonces, $\varphi(u_1) \wedge_{\mathcal{B}} \varphi(u_2) = det\varphi$. □

Para la siguiente proposición, tomada de [7], se plantea una prueba que permite verificar el resultado.

Proposición 2.3. *Sean M y N $R-$módulos libres de rango 2 y $\mathcal{B}$ una base de M. Si $\varphi : M \longrightarrow N$ es un isomorfismo de $R-$módulos, entonces para todos $a, b \in M$,*

$$a \wedge_{\mathcal{B}} b = \varphi(a) \wedge_{\varphi(\mathcal{B})} \varphi_{(b)},$$

$$\varphi(a) \wedge_{\mathcal{B}} \varphi_{(b)} = (det\varphi)(\varphi(a) \wedge_{\varphi(\mathcal{B})} \varphi(b)).$$

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ una base de M, entonces $\varphi(\mathcal{B}) = \{\varphi(u_1), \varphi(u_2)\}$ es base de N, ya que φ es un isomorfismo. Sean $a, b \in M$ entonces, $a = a_1u_1 + a_2u_2$ y $b = b_1u_1 + b_2u_2$. Luego, como φ es un isomorfismo $\varphi(a) = (a_2u_1 + a_2u_2) = a_1\varphi(u_1) + a_2\varphi(u_2)$ y $\varphi(b) = b_1\varphi(u_1) + b_2\varphi(u_2)$, por lo tanto

$$a \wedge_{\mathcal{B}} b = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \varphi(a) \wedge_{\varphi(\mathcal{B})} \varphi(b).$$

Ahora bien, aplicando el ítem 2 de la proposición 2,1 se obtiene,

$$\varphi(a) \wedge_{\mathcal{B}} \varphi(b) = (\varphi(a) \wedge_{\varphi(\mathcal{B})} \varphi(b))(\varphi(u_1) \wedge_{\mathcal{B}} \varphi(u_2)),$$

y por el Lema 2,1, se obtiene

$$\varphi(a) \wedge_{\mathcal{B}} \varphi(b) = (\varphi(a) \wedge_{\varphi(\mathcal{B})} \varphi(b))(det\varphi).$$

□

Proposición 2.4. *Sean R un anillo, y $z_1, z_2 \in R$, entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(z_1, z_2) es complementable en R.*
2. *El ideal generado por z_1 y z_2 es R.*
3. *Si existe $\lambda \in R$ tal que $\lambda z_1 = \lambda z_2 = 0$, entonces $\lambda = 0$.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Sea (z_1, z_2) complementable en R, entonces existe $(z_1', z_2') \in R^2$ tal que (z_1, z_2) y (z_1', z_2') generan a R^2, esto es

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} = z_1z_2' - z_2z_1' \in R^*.$$

Luego, el conjunto $\{z_1, z_2\}$ genera a R, es decir,

$$\langle\{z_1, z_2\}\rangle = \{\alpha z_1 + \beta z_2 : \alpha, \beta \in R\} = R.$$

$(2 \Rightarrow 3)$ Sea R el ideal generado por z_1 y z_2. Considere $z \in R$, existen α y β tales que $z = \alpha z_1 + \beta z_2$. Además, suponga que existe $\lambda \in R$ tal que $\lambda z_1 = \lambda z_2 = 0$. Si $z = 1$ entonces existen $\alpha_1, \beta_1 \in R$ tales que $1 = \alpha_1 z_1 + \beta_1 z_2$, así $\lambda = \lambda\alpha_1 z_1 + \lambda\beta_1 z_2$. Por

hipótesis, se tiene que $\lambda z_1 = \lambda z_2 = 0$, por lo tanto, $\lambda = 0$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Por reducción al absurdo, suponga que existe $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda z_1 = \lambda z_2 = 0$, entonces para cualquier pareja (z_1', z_2') se tiene que

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} = z_1 z_2' - z_2 z_1',$$

y al multiplicar por λ se obtiene que

$$\lambda(z_1 z_2' - z_2 z_1') = \lambda z_1 z_2' - \lambda z_2 z_1' = 0$$

luego, $z_1 z_2' - z_2 z_1'$ es divisor de cero, entonces (z_1, z_2) no es complementable. □

Observación 2.3 (Granados, Guevara)**.** Sean R un anillo total de cocientes y $(z_1, z_2) \in R \times R$ donde z_1 o z_2 es invertible, supongamos sin pérdida de generalidad que $z_1 \in R^*$, entonces eligiendo el punto $(0, 1)$, se obtiene que

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = z_1 \in R^*.$$

Luego, (z_1, z_2) es complementable.

Pero, ¿Qué ocurre si ambos elementos z_1 y z_2 son divisores de cero en el anillo total de cocientes R, será (z_1, z_2) complementable o no complementable?. No es posible establecer inmediatamente el hecho, para ello se enuncia el siguiente corolario como resultado de este trabajo.

Corolario 2.1. *[Granados, Guevara] Sea R un anillo total de cocientes, y sean $(z_1, z_2) \in R \times R$ donde z_1 y z_2 no invertibles. Es decir, z_1, z_2 son divisores de cero y existen $\mu_1 \neq 0$ y $\mu_2 \neq 0$ tales que $z_1\mu_1 = 0$ y $z_2\mu_2 = 0$. Si $\mu_1\mu_2 \neq 0$, entonces (z_1, z_2) no es complementable.*

Demostración. Sea $(z_1, z_2) \in R \times R$ donde z_1 y z_2 son divisores de cero, entonces existen $\mu_1 \neq 0$ y $\mu_2 \neq 0$ tales que $z_1\mu_1 = 0$ y $z_2\mu_2 = 0$. Sea $\lambda = \mu_1\mu_2$ note que $\lambda \neq 0$, con $\lambda z_1 = \mu_1\mu_2 z_1 = 0$ y $\lambda z_2 = \mu_1\mu_2 z_2 = 0$, por el ítem 3 de la Proposición 2.4, se tiene que (z_1, z_2) no es complementable. □

Ejemplo 2.3 (Granados, Guevara)**.** Sea el anillo total de cocientes $R = \mathbb{Z}/\langle 6\rangle$. Los

elementos invertibles de R son $\{\overline{1}, \overline{5}\}$ y los divisores de cero de R son $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$.

Considere el R-módulo bidimensional $R^2 = \mathbb{Z}/\langle 6\rangle \times \mathbb{Z}/\langle 6\rangle$, ¿Qué ocurre si $(z_1, z_2) \in R \times R$, donde z_1 y z_2 son no invertibles, es decir son divisores de cero?. Se pueden tener dos casos:

1. Sean $z_1 = \overline{4}$ y $z_2 = \overline{2}$ en $\mathbb{Z}/\langle 6\rangle$, entonces son divisores de cero, y existen $\mu = \overline{3}$ y $\mu_2 = \overline{3}$ respectivamente, tales que, $\overline{4}\cdot\overline{3} = \overline{0}$ y $\overline{2}\cdot\overline{3} = \overline{0}$. Sea $\lambda = \mu_1\mu_2 = \overline{3}\cdot\overline{3} = \overline{3} \neq 0$, entonces por el Corolario 2,1 $(\overline{4}, \overline{2})$ no es complementable.

2. Tome $z_1 = \overline{3}$ y $z_2 = \overline{2}$ divisores de cero de $\mathbb{Z}/\langle 6\rangle$, entonces existen $\mu_1 = \overline{2}$ y $\mu_2 = \overline{3}$ respectivamente, tales que, $\overline{3} \cdot \overline{2} = \overline{0}$. Si se toma $\lambda = \mu_1\mu_2 = \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$, es decir no se puede aplicar el Corolario 2,1. Sin embargo, $(\overline{3}, \overline{2})$ es complementable, ya que el ideal generado por $\overline{3}$ y $\overline{2}$ es R.

Proposición 2.5. *Sea*

$$R_0^2 = \{(z_1, z_2) \in R^2 : (z_1, z_2) \textit{ no es complementable}\}.$$

La relación $\sim$ definida en $R^2 \setminus R_0^2$ por $v \sim w$ si y sólo si existe $\lambda \in R^*$ con $\lambda v = w$, es una relación de equivalencia.

Demostración. Observe que $\sim$ define una relación de equivalencia, es decir, $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

1. Reflexiva, $v \sim v$ si y sólo si existe $1 \in R^*$ con $1v = v$.

2. Simétrica, como $v \sim w$ si y sólo si existe $\lambda \in R^*$ con $\lambda v = w$ entonces $\lambda^{-1}\lambda v = \lambda^{-1}w$ luego $v = \lambda^{-1}w$. Así $w \sim v$.

3. Transitiva, como $v \sim w$ y $w \sim z$ entonces existen $\lambda_1, \lambda_2 \in R^*$ tales que $\lambda_1 v = w$ y $\lambda_2 w = z$, luego $\lambda_2 w = \lambda_2(\lambda_1 v) = z$. Claramente $\lambda_2\lambda_1 \in R^*$, por lo tanto $v \sim z$.

□

Definición 2.4. Se define la recta proyectiva asociada al anillo R, a:

$$\mathbb{P}^1_R = \frac{R^2 \setminus R_0^2}{\sim}.$$

Nota 2.1. Los elementos en $\mathbb{P}^1_R$ son las clases de equivalencia, que notaremos por $[a_0, a_1]$.

La definición anterior de recta proyectiva está dada para cualquier anillo R conmutativo con uno, sin embargo nuestro trabajo se centra en estudiar la recta proyectiva sobre R cuando R es un anillo total de cocientes, por lo cual a partir de este momento consideraremos al anillo R como un anillo total de cocientes.

2.1. PUNTOS FUERTEMENTE INDEPENDIENTES

Definición 2.5. Sean $A = [a_0, a_1], B = [b_0, b_1] \in \mathbb{P}^1_R$, se dice que son un par de puntos fuertemente independientes, si

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \in R^*.$$

Nota 2.2. La definición anterior es independiente del representante elegido. En efecto, dados dos representantes distintos de A, $[a_0, a_1]$ y $[a'_0, a'_1]$, se tiene que $[a_0, a_1] = [a'_0, a'_1]$, entonces existe $\alpha \in R^*$ tal que $(a'_0, a'_1) = \alpha(a_0, a_1)$. De forma análoga, dados dos representantes distintos de B, $[b_0, b_1]$ y $[b'_0, b'_1]$, se tiene que $[b_0, b_1] = [b'_0, b'_1]$, entonces existe $\beta \in R^*$ tal que $(b_0, b_1) = \beta(b'_0, b'_1)$. Luego

$$\begin{vmatrix} a'_0 & a'_1 \\ b'_0 & b'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_0 & \alpha a_1 \\ \beta b_0 & \beta b_1 \end{vmatrix} = \alpha\beta a_0 b_1 - \alpha\beta a_1 b_0 = \alpha\beta(a_0 b_1 - a_1 b_0)$$

es invertible, ya que $(a_0 b_1 - a_1 b_0) \in R^*$ y $\alpha, \beta \in R^*$.

Proposición 2.6. *Sean A y B fuertemente independientes entonces para todo $C \in \mathbb{P}^1_R$ existen $\gamma_1, \gamma_2 \in R$ tales que si $A = [a_0, a_1]$, $B = [b_0, b_1]$, $C = [c_0, c_1]$, entonces*

$$[c_0, c_1] = [\gamma_1 a_0 + \gamma_2 b_0, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 b_1]$$

el par (γ_1, γ_2) es único salvo producto por unidades.

Demostración. Observe inicialmente la existencia de γ_1 y γ_2. Sean $A, B \in \mathbb{P}^1_R$ fuertemente independientes entonces, por definición,

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \in R^*$$

es decir, generan todo R^2, por lo tanto existen $\gamma_1, \gamma_2 \in R$ tal que

$$\begin{aligned}(c_0, c_1) =&\gamma_1(a_0, a_1) + \gamma_2(b_0, b_1)\\ (c_0, c_1) =&(\gamma_1 a_0 + \gamma_2 b_0, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 b_1).\end{aligned}$$

Para la unicidad de (γ_1, γ_2) salvo producto por unidades. Sean (γ_1, γ_2) y (γ_1', γ_2') tales que

$$[c_0, c_1] = [\gamma_1 a_0 + \gamma_2 b_0, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 b_1] = [\gamma_1' a_0 + \gamma_2' b_0, \gamma_1' a_1 + \gamma_2' b_1].$$

Por lo tanto, existe $\alpha \in R^*$ tal que $\gamma_1 a_0 + \gamma_2 b_0 = (\gamma_1' a_0 + \gamma_2' b_0)\alpha$ y $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 b_1 = (\gamma_1' a_1 + \gamma_2' b_1)\alpha$, es decir

$$a_0(\alpha\gamma_1' - \gamma_1) + b_0(\alpha\gamma_2' - \gamma_2) = 0,$$

$$a_1(\alpha\gamma_1' - \gamma_1) + b_1(\alpha\gamma_2' - \gamma_2) = 0.$$

Este sistema de ecuaciones tiene solución trivial cero, puesto que A y B son fuertemente independientes, entonces A y B son linealmente independientes, es decir

$$(\alpha\gamma_1' - \gamma_1) = 0 \ y \ (\alpha\gamma_2' - \gamma_2) = 0.$$

Entonces, $\gamma_1 = \alpha\gamma_1'$ y $\gamma_2 = \alpha\gamma_2'$, luego $(\gamma_1, \gamma_2) = \alpha(\alpha_1', \alpha_2')$. □

Definición 2.6. Se dice que A, B *y* $C \in \mathbb{P}^1_R$, forman una referencia proyectiva, si A y B son fuertemente independientes y existen representantes de los tres puntos tales que:

$$(c_0, c_1) = (a_0, a_1) + (b_0, b_1).$$

Proposición 2.7. *Son equivalentes:*

1. $\{A, B, C\}$ *es una referencia proyectiva.*

2. *A y B son fuertemente independientes y existen γ_1, γ_2 invertibles tales que*

$$(c_0, c_1) = \gamma_1(a_0, a_1) + \gamma_2(b_0, b_1).$$

3. $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ *y* $\{B, C\}$ *son fuertemente independientes.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Sea $\{A, B, C\}$ una referencia proyectiva, por definición

$$(c_0, c_1) = (a_0, a_1) + (b_0, b_1)$$

y así claramente se cumple, ya que existen $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Si A y B fuertemente independientes, existen γ_1 y γ_2 invertibles tales que

$$(c_0, c_1) = \gamma_1(a_0, a_1) + \gamma_2(b_0, b_1) = (\gamma_1 a_0, \gamma_1 a_1) + (\gamma_2 b_0, \gamma_2 b_1).$$

Así, existen representantes de los puntos A y B tales que se cumple la ecuación.

$(2 \Rightarrow 3)$ Por hipótesis, $\{A, B\}$ son fuertemente independientes, y existen γ_1, γ_2 invertibles tales que $(c_0, c_1) = \gamma_1(a_0, a_1) + \gamma_2(b_0, b_1)$, donde $A = [a_0, a_1]$, $B = [b_0, b_1]$ y $C = [c_0, c_1]$. Observe que A y C son fuertemente independientes,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ \gamma_1 a_0 + \gamma_2 b_0 & \gamma_1 a_1 + \gamma_2 b_1 \end{vmatrix} &= \gamma_1 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} + \gamma_2 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = \\
&= a_0(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 b_1) - a_1(\gamma_1 a_0 + \gamma_2 b_0) \\
&= \gamma_1 a_0 a_1 + \gamma_2 a_0 b_1 - \gamma_1 a_0 a_1 - \gamma_2 a_1 b_0 \\
&= \gamma_2 a_0 b_1 - \gamma_2 a_1 b_0 = \gamma_2(a_0 b_1 - a_1 b_0) \in R^*
\end{aligned}$$

ya que, γ_2 y $(a_0 b_1 - a_1 b_0)$ pertenecen a R^*. Por lo tanto, A y C son fuertemente independientes. De manera análoga se prueba que B y C son fuertemente independientes.

$(3 \Rightarrow 2)$ Sean A y B fuertemente independientes, entonces A y B generan a R^2, por lo tanto existen $\gamma_1, \gamma_2 \in R$ tales que

$$(c_0, c_1) = \gamma_1(a_0, a_1) + \gamma_2(b_0, b_1).$$

Suponga que γ_1 no es invertible, entonces γ_1 es divisor de cero, luego existe $\gamma' \neq 0$ tal que $\gamma_1 \gamma' = 0$. Al multiplicar la ecuación anterior por γ', se obtiene que

$$\begin{aligned}
\gamma'(c_0, c_1) &= \gamma'\gamma_1(a_0, a_1) + \gamma'\gamma_2(b_0, b_1) \\
&= \gamma'\gamma_2(b_0, b_1)
\end{aligned}$$

es decir, B es múltiplo escalar de C y esto contradice la hipótesis de que B y C son fuertemente independientes. Y de manera análoga se prueba que γ_2 es invertible. $\square$

2.2. PROYECTIVIDADES EN $\mathbb{P}^1_R$ Y RAZÓN DOBLE

Sea M una matriz 2×2 de elementos de R, se define la correspondencia

$$\psi_M : \mathbb{P}^1_R \longrightarrow \mathbb{P}^1_R$$
$$[x_0, x_1] \mapsto [y_0, y_1]$$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Nota 2.3. Dos matrices inducen la misma correspondencia si y sólo si $M = \rho N$ con $\rho \in R^*$.

Proposición 2.8. *Si $detM \in R^*$ entonces la correspondencia ψ_M es una aplicación bien definida.*

Demostración. Sea $(x_0, x_1) \in R^2 \setminus R_0^2$, si

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \in R_0^2$$

como el $detM \in R^*$, existe $M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que

$$M^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_0 + by_1 \\ cy_0 + dy_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $(x_0, x_1) \in R^2 \setminus R_0^2$, existen $\mu_0, \mu_1 \in R$ tales que $\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 = 1$ y por lo tanto, al reemplazar a x_0 y x_1 se obtiene que

$$\begin{aligned} \mu_0(ay_0 + by_1) + \mu_1(cy_0 + dy_1) &= 1, \\ y_0(a\mu_0 + c\mu_1) + y_1(b\mu_0 + d\mu_1) &= 1 \end{aligned}$$

así $(y_0, y_1) \in R^2 \setminus R_0^2$. $\square$

Proposición 2.9. *La aplicación ψ_M dada por una matriz M envía pares de puntos fuertemente independientes en pares fuertemente independientes si y sólo si $detM \in R^*$.*

Demostración. Sean $A = [a_0, a_1]$, $B = [b_0, b_1]$ dos puntos fuertemente independientes y $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, entonces

$$\psi_M(A) = MA = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_0 + \beta a_1 \\ \gamma a_0 + \delta a_1 \end{pmatrix},$$

$$\psi_M(B) = MB = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha b_0 + \beta b_1 \\ \gamma b_0 + \delta b_1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, $\psi_M(A)$ y $\psi_M(B)$ son fuertemente independientes si y sólo si

$$\psi_M(A) \wedge \psi_M(B) = \begin{vmatrix} \alpha a_0 + \beta a_1 & \alpha b_0 + \beta b_1 \\ \gamma a_0 + \delta a_1 & \gamma b_0 + \delta b_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \right| = detM \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \in R^*.$$

Es decir, $\psi_M(A) \wedge \psi_M(B) \in R^*$ si y sólo si $detM \in R^*$, ya que $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \in R^*$. □

Definición 2.7. Sea Φ una correspondencia $\Phi : \mathbb{P}^1_R \longrightarrow \mathbb{P}^1_R$, decimos que Φ es una proyectividad algebraica $\tau - semilineal$ de $\mathbb{P}^1_R$ si existen $M \in Mat_{2\times 2}(R)$ con $detM \in R^*$ y un automorfismo continuo de R llamado τ, tal que

$$\Phi([x, y]) = \psi_M([\tau(x), \tau(y)]).$$

La siguiente proposición aparece sin demostración en [10], se puede verificar el resultado con la prueba que aquí se sugiere.

Proposición 2.10. *Sea $\{A, B, C\}$ una referencia, entonces para todo $X \in \mathbb{P}^1_R$ existen (α, β) únicos salvo producto por unidades tales que*

$$\begin{aligned} (c_0, c_1) =& (a_0, a_1) + (b_0, b_1), \\ (x_0, x_1) =& \alpha(a_0, a_1) + \beta(b_0, b_1). \end{aligned}$$

Demostración. La primera igualdad se tiene por definición de referencia proyectiva. En la segunda igualdad se hace uso de la proposición 2.6, es decir existen $\alpha, \beta \in R$ únicos

salvo producto por unidades tales que

$$[x_0, x_1] = [\alpha a_0 + \beta b_0, \alpha a_1 + \beta b_1].$$

Luego, para $\lambda \in R^*$ se tiene que

$$\begin{aligned}(x_0, x_1) &= \lambda(\gamma_1 a_0 + \gamma_2 b_0, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 b_1),\\ (x_0, x_1) &= \alpha(a_0, a_1) + \beta(b_0, b_1),\end{aligned}$$

donde $\alpha = \lambda\gamma_1$ y $\beta = \lambda\gamma_2$. □

Definición 2.8. Si $\{A, B, C\}$ forma una referencia proyectiva, se define la razón doble de cuatro puntos A, B, C, $X \in \mathbb{P}^1_R$ como

$$[A, B, C, X] = \frac{\beta}{\alpha}$$

siempre que α y β sean invertibles, donde $X = [\alpha, \beta]$ en la referencia proyectiva $\{A, B, C\}$.

La siguiente proposición muestra la condición necesaria para hallar la razón doble de cuatro puntos en $\mathbb{P}^1_R$.

Proposición 2.11. *Sean A, B, C, X puntos fuertemente independientes dos a dos, entonces $[A, B, C, X]$ está bien definida.*

Demostración. Sea $\{A, B, C\}$ una referencia proyectiva, entonces por la Proposición 2,7, se tiene que A, B, C son fuertemente independientes dos a dos. Ahora, verifiquemos que A, B, C son fuertemente independientes con $X = [\alpha, \beta]$ donde $\alpha, \beta \in R^*$.

En efecto, por la Proposición 2,10, se tiene que $(x_0, x_1) = \alpha(a_0, a_1) + \beta(b_0, b_1)$, entonces

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ \alpha a_0 + \beta b_0 & \alpha a_1 + \beta b_1 \end{vmatrix} &= a_0\alpha a_1 + a_0\beta b_1 - a_1\alpha a_0 - \beta a_1 b_0\\ &= a_0\beta b_1 - \beta a_1 b_0\\ &= \beta(a_0 b_1 - a_1 b_0) \in R^*.\end{aligned}$$

Ya que A y B son fuertemente independientes, y $\beta \in R^*$, es decir, A y X son fuertemente

independientes. De manera análoga se prueba que $\{X, B\}$ y $\{X, C\}$ son fuertemente independientes. □

Nota 2.4. Dada una referencia proyectiva $\{A, B, C\}$ con $A = [a_0, a_1]$, $B = [b_0, b_1]$, $C = [c_0, c_1]$ y $D = [d_0, d_1]$, el hecho de que los cuatro puntos estén alineados se traduce en que el rango

$$r \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \\ d_0 & d_1 \end{pmatrix} = 2. \tag{2.2}$$

Para calcular la razón doble $[A, B, C, D]$ se requiere calcular las coordenadas de D en la referencia $\mathcal{R} = \{A, B, C\}$, y para eso se necesita conocer una base normalizada asociada a dicha referencia, es decir vectores (a_0, a_1), (b_0, b_1), tales que $[a_0, a_1] = A$, $[b_0, b_1] = B$ y $[a_0 + b_0, a_1 + b_1] = C$. Si se buscan números tales que

$$\alpha_1(a_0, a_1) + \alpha_2(b_0, b_1) = (c_0, c_1). \tag{2.3}$$

Se verifica que los vectores de coordenadas $\{\alpha_1(a_0, a_1), \alpha_2(b_0, b_1)\}$ en la base normalizada asociada a $\mathcal{R}$ forman la base buscada.

Como $A \neq B$ y A, B y C están alineados, se cumple que

$$r \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \end{pmatrix} = 2.$$

Luego, el sistema 2,3 tiene solución única que se calcula considerando a

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

y resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} \alpha_1 a_0 + \alpha_2 b_0 &= c_0 \\ \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1 &= c_1 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}, \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}.$$

Entonces, las coordenadas del punto D en la referencia $\{A, B; C\}$ son $[\beta_0, \beta_1]$ con $(d_0, , d_1) = \beta_0\alpha_1(a_0, a_1) + \beta_1\alpha_2(b_0, b_1)$. Ahora, como

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a_0 & \alpha_2 b_0 \\ \alpha_1 a_1 & \alpha_2 b_1 \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2 \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

β_0, β_1 son las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} d_0 &= \beta_0\alpha_1 a_0 + \beta_1\alpha_2 b_0 \\ d_1 &= \beta_0\alpha_1 a_1 + \beta_1\alpha_2 b_1 \end{aligned}$$

de donde,

$$\beta_0 = \frac{\begin{vmatrix} d_0 & \alpha_2 b_0 \\ d_1 & \alpha_2 b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 a_0 & \alpha_2 b_0 \\ \alpha_1 a_1 & \alpha_2 b_1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}\alpha_1, \tag{2.4}$$

$$\beta_1 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 a_0 & d_0 \\ \alpha_1 a_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 a_0 & \alpha_2 b_0 \\ \alpha_1 a_1 & \alpha_2 b_1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}\alpha_2. \tag{2.5}$$

Teniendo en cuenta estos valores, queda

$$[A, B : C, D] = \frac{\beta_1}{\beta_0} = \frac{\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}. \tag{2.6}$$

Observación 2.4. Sean $A, B, C, D \in \mathbb{P}^1_R$, con $A = [a_0, a_1]$, $B = [b_0, b_1]$, $C = [c_0, c_1]$ y $D = [d_0, d_1]$ las coordenadas de los puntos en alguna referencia de $\mathbb{P}^1_R$. La razón doble

de A, B, C y D es

$$[A,B,C,D] = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}.$$

Proposición 2.12. *Sean $\{A,B,C\}$ y $\{D,E,F\}$ dos referencias proyectivas, entonces existe una única proyectividad algebraica lineal que transforma una referencia en la otra.*

Demostración. Inicialmente observe la existencia de la proyectividad algebraica, sean $\{A,B,C\}$ y $\{D,E,F\}$ dos referencias proyectivas, donde $A = [a_0, a_1]$, $B = [b_0, b_1]$, $C = [c_0, c_1]$, $D = [d_0, d_1]$, $E = [e_0, e_1]$ y $F = [f_0, f_1]$, tales que

$$(c_0, c_1) = (a_0, a_1) + (b_0, b_1),$$

$$(f_0, f_1) = (d_0, d_1) + (e_0, e_1).$$

Sean $M = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} d_0 & e_0 \\ d_1 & e_1 \end{pmatrix}$. Como A y B son fuertemente independientes, al igual que D y E, se tiene que $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \in R^*$ y $\begin{vmatrix} d_0 & e_0 \\ d_1 & e_1 \end{vmatrix} \in R^*$. Note que $det(NM^{-1}) \in R^*$, luego, por la proposición 2.8, la aplicación $\psi_{NM^{-1}}$ está bien definida, y además envía una referencia en la otra. En efecto:

$$\begin{aligned} \psi_{NM^{-1}}([a_0,a_1]) =& \frac{1}{a_0b_1 - a_1b_0} \begin{pmatrix} d_0 & e_0 \\ d_1 & e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & -b_0 \\ -a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{a_0b_1 - a_1b_0} \begin{pmatrix} d_0 & e_0 \\ d_1 & e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1a_0 - b_0a_1 \\ -a_1a_0 + a_0a_1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} d_0 & e_0 \\ d_1 & e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De manera análoga se prueba que a B lo envía a E, y a C lo envía a F.

Ahora, para probar la unicidad, sean ψ_{M_1} y ψ_{M_2} tales que envían referencias en refe-

rencias, entonces $M_1 M_2^{-1}$ deja invariante los puntos de la referencia, luego se identifica con la identidad, entonces $M_1 = M_2$. □

La siguiente proposición aparece sin demostración en [10], puede ser verificada con la prueba aquí sugerida.

Proposición 2.13. *Sea $\Phi : \mathbb{P}^1_R \longrightarrow \mathbb{P}^1_R$ una proyectividad algebraica τ-semilineal, se tiene que*

$$[\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C), \Phi(D)] = \tau[A, B, C, D]$$

para todos los $A, B, C, D \in \mathbb{P}^1_R$ fuertemente independientes dos a dos.

Demostración. Considere $\{A, B, C\}$ una referencia proyectiva, y sea $[A, B, C, D] = \lambda$ entonces D tiene coordenadas $[1, \lambda]$ en la referencia, luego $\Phi(D)$ tendra coordenadas $[1, \tau(\lambda)]$ en la referencia $\{\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C)\}$, y por tanto

$$[\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C), \Phi(D)] = \tau(\lambda).$$

□

Definición 2.9. Se dice que cuatro puntos $A, B, C, D \in \mathbb{P}^1_R$ forman una cuaterna armónica en $\mathbb{P}^1_R$, si

$$[A, B, C, D] = -1.$$

El siguiente lema muestra ejemplos de cuaternas armónicas, y será usado para demostrar el Teorema de Staudt.

Lema 2.2. *Considere $\mathbb{P}^1_R$, se cumplen las siguientes afirmaciones*

1. *$\forall \alpha, \beta \in R$ con $\{\alpha, \beta\} \bigcap \{0, 1\} = \emptyset$ y $\alpha \neq \pm\beta$, entonces*

$$\left[[1, \alpha], [1, \beta], [0, 1], \left[1, \frac{\alpha + \beta}{2}\right]\right] = -1.$$

2. *$\forall \alpha \in R \setminus \{0, 1\}$ se tiene que*

$$\left[[1, 0], [1, \alpha], [0, 1], \left[1, \frac{\alpha}{2}\right]\right] = -1.$$

3. *$\forall \alpha, \beta \in R \setminus \{0, 1\}$ con $\alpha \neq \pm\beta$, luego*

$$[[1, \alpha], [1, \beta], [1, 0], [\alpha + \beta, 2\alpha\beta]] = -1.$$

Demostración. 1.

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \dfrac{\alpha+\beta}{2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta & \dfrac{\alpha+\beta}{2} \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-\alpha\right)1}{1\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-\beta\right)} = \frac{\frac{\beta-\alpha}{2}}{\frac{\alpha-\beta}{2}} = -1.$$

2.

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \dfrac{\alpha}{2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \dfrac{\alpha}{2} \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)1}{\frac{\alpha}{2}-\alpha} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{-\alpha}{2}} = -1.$$

3.

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha+\beta \\ \alpha & 2\alpha\beta \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & \alpha+\beta \\ \beta & 2\alpha\beta \end{vmatrix}} = \frac{(2\alpha\beta-\alpha^2-\alpha\beta)(-\beta)}{(-\alpha)(2\alpha\beta-\beta^2-\alpha\beta)} = \frac{-\alpha\beta(\beta-\alpha)}{-\alpha\beta(\alpha-\beta)} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha-\beta} = -1.$$

□

Definición 2.10. Sea Φ una correspondencia $\Phi : \mathbb{P}^1_R \longrightarrow \mathbb{P}^1_R$, decimos que Φ es una proyectividad de Staudt si Φ es biyectiva, transforma pares fuertemente independientes en pares fuertemente independientes y conserva cuaternas armónicas.

Teorema 2.11 (Teorema de Staudt)**.** Φ *es una proyectividad de Staudt si y sólo si es una proyectividad algebraica.*

Demostración. Sea Φ una proyectividad de Staudt, y considere $\{A, B, C\}$ una referencia proyectiva en $\mathbb{P}^1_R$, que por la proposición 2.7 se tiene que A, B y C son fuertemente independientes dos a dos, entonces como Φ es una proyectividad de Staudt se tiene que $\Phi(A), \Phi(B)$ y $\Phi(C)$ son fuertemente independientes dos a dos, es decir $\{\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C)\}$ es una referencia proyectiva. Ahora para cada $\lambda \in R \setminus \{0, 1\}$, defina $X_\lambda = [x, y]$ al único punto tal que,

$$(x, y) = (a_0, a_1) + \lambda(b_o, b_1),$$

y $A = [a_0, a_1]$, $B = [b_0, b_1]$ y $C = [c_0, c_1]$, como $\mathcal{R}$ es una referencia, se tiene que

$$(c_0, c_1) = (a_0, a_1) + (b_0, b_1).$$

Luego, se tiene que en $\mathcal{R}$, $X_\lambda = [1, \lambda]$, por lo tanto,

$$[A, B, C, X_\lambda] = \lambda,$$

entonces, defina $\tau : R \longrightarrow R$, con $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$ y para $\lambda \notin \{0, 1\}$, se tiene que $\tau(\lambda) = [\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C), \Phi(X_\lambda)]$.

1. Observe que τ está bien definida, sean $[x', y'] = \Phi(X_\lambda)$, $[a'_0, a'_1] = \Phi(A)$, $[b'_0, b'_1] = \Phi(B)$ y $[c'_0, c'_1] = \Phi(C)$, con $(a'_0, a'_1) + (b'_0, b'_1) = (c'_0, c'_1)$, si $\alpha, \beta \in R$ con

   $$(x', y') = \alpha(a'_0, a'_1) + \beta(b'_0, b'_1),$$

   $\alpha \neq 0$ porqué $\Phi(X_\lambda)$ y $\Phi(B)$ son fuertemente independientes, ya que Φ es una proyectividad de Staudt y X_λ y B son fuertemente independientes. Si α no es invertible, entonces es divisor de cero, luego, existe $\alpha' \neq 0$ tal que $\alpha\alpha' = 0$, entonces

   $$\begin{aligned} \alpha'(x', y') =& \alpha'\alpha(a'_0, a'_1) + \alpha'\beta(b'_0, b'_1) \\ \alpha'(x', y') =& \alpha'\beta(b'_0, b'_1) \end{aligned}$$

   considere,

   $$\begin{aligned} \alpha'\beta \begin{vmatrix} x' & y' \\ b'_0 & b'_1 \end{vmatrix} =& \alpha' \begin{vmatrix} x' & y' \\ \beta b'_0 & \beta b'_1 \end{vmatrix} \\ =& \alpha'(x'\beta b'_1 - y'\beta b'_0) \\ =& x'\alpha' y' - y'\alpha' x' \\ =& 0. \end{aligned}$$

   Lo cual contradice que $\Phi(X_\lambda)$ y $\Phi(B)$ son fuertemente independientes y $\alpha'\beta \neq 0$, porque $\Phi(X_\lambda) \in \mathbb{P}^1_R$, así tenemos que la razón doble de

   $$[\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C), \Phi(X_\lambda)] = \frac{\beta}{\alpha}$$

está bien definida.

2. Sean $\lambda, \mu \in R$, tales que $\tau(\lambda) = \tau(\mu)$, entonces $[1, \tau(\lambda)] = [1, \tau(\mu)]$, luego, $\Phi([1, \tau(\lambda)]) = \Phi([1, \tau(\mu)])$, y como Φ es biyectiva entonces $\lambda = \mu$.

3. τ es sobreyectiva, ya qué Φ lo es, al igual que τ un automorfismo de anillos.

4. τ es un homomorfismo de anillos. En efecto, note incialmente que $\tau\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\tau(\alpha)}{2}$. Por el ítem 2 del Lema 2.2, para $\alpha \neq 0, 1$ se tiene que

$$\left[[1,0],[1,\alpha],[0,1],\left[1,\frac{\alpha}{2}\right]\right] = -1$$

y como Φ es una proyectividad de Staudt, entonces

$$\left[\Phi([1,0]),\Phi([1,\alpha]),\Phi([0,1]),\Phi\left(\left[1,\frac{\alpha}{2}\right]\right)\right] = -1.$$

En la referencia $\mathcal{R}'$, se tiene que

$$\left[[1,0],[1,\tau(\alpha)],[0,1],\left[1,\tau\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right] = -1.$$

Esto es,

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \tau\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \tau(\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \tau(\alpha) & \tau\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{vmatrix}} = \frac{\tau\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 1}{1 \cdot \left(\tau\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tau(\alpha)\right)} = -1.$$

Luego,

$$\tau\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\tau(\alpha)}{2}.$$

Ahora, observe que $\tau(\alpha + \beta) = \tau(\alpha) + \tau(\beta)$. Si $\alpha = \beta$ se aplica el ítem anterior. Si $\alpha \neq \beta$, entonces por el ítem 1 del Lema 2.2, se tiene que

$$\left[[1,\alpha],[1,\beta],[0,1],\left[1,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\right] = -1.$$

Como Φ es una proyectividad de Staudt, entonces

$$\left[\Phi([1,\alpha]),\Phi([1,\beta]),\Phi([0,1]),\Phi\left(\left[1,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\right)\right] = -1$$

y en la referencia $\mathcal{R}'$,

$$\left[[1,\tau(\alpha)],[1,\tau(\beta)],[0,1],\left[1,\tau\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]\right]=-1.$$

Esto es,

$$\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ \tau(\alpha) & \tau(\frac{\alpha+\beta}{2})\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\ \tau(\beta) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0\\ \tau(\alpha) & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1\\ \tau(\beta) & \tau(\frac{\alpha+\beta}{2})\end{vmatrix}}=\frac{\tau(\frac{\alpha+\beta}{2})-\tau(\alpha)}{\tau(\frac{\alpha+\beta}{2})-\tau(\beta)}=-1.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\tau\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\tau(\alpha)=&-\tau\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\tau(\beta)\\ 2\tau\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=&\tau(\alpha)+\tau(\beta)\\ \tau(\alpha+\beta)=&\tau(\alpha)+\tau(\beta).\end{aligned}$$

Observe que $\tau(\alpha^2)=(\tau(\alpha))^2$. Para $\alpha,\beta\in R\setminus\{0,1\}$ con $\alpha\neq\pm\beta$, entonces por ítem 3 del Lema 2,2, se tiene que

$$[[1,\alpha],[1,\beta],[1,0],[\alpha+\beta,2\alpha\beta]]=-1.$$

Considere $\beta=1-\alpha$ y $\alpha\neq\dfrac{1}{2}$

$$[[1,\alpha],[1,1-\alpha],[1,0],[1,2\alpha(1-\alpha)]]=-1.$$

Aplicando Φ, obteniendo que

$$[[1,\tau(\alpha)],[1,\tau(1-\alpha)],[1,0],[1,\tau(2\alpha(1-\alpha))]]=-1.$$

Como $\tau\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ y como τ es inyectiva entonces para $\alpha\neq\dfrac{1}{2}$, se tiene que $\tau(\alpha)\neq\dfrac{1}{2}$, y razonando como antes para $\tau(\alpha)$, se tiene que

$$[[1,\tau(\alpha)],[1,1-\tau(\alpha)],[1,0],[1,\tau(2\alpha(1-\alpha))]]=$$

$$=[[1,\tau(\alpha)],[1,\tau(1-\alpha)],[1,0],[1,2\tau(\alpha)(1-\alpha))]]=-1$$

y por lo tanto

$$\tau(2\alpha(1-\alpha)) = 2\tau(\alpha)(1-\tau(\alpha))$$

entonces $\tau(\alpha^2) = (\tau(\alpha))^2$, en particular, $\tau\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \left(\tau\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$. Observe que $\tau(\alpha\beta) = \tau(\alpha)\tau(\beta)$.

En efecto, considere

$$\tau((\alpha+\beta)^2) = \tau(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2) = \tau(\alpha^2)+\tau(2\alpha\beta)+\tau(\beta^2) = \tau(\alpha^2)+2\tau(\alpha\beta)+\tau(\beta^2)$$

y

$$(\tau(\alpha+\beta))^2 = (\tau(\alpha)+\tau(\beta))^2 = \tau(\alpha)^2+2\tau(\alpha)\tau(\beta)+\tau(\beta)^2 = \tau(\alpha^2)+2\tau(\alpha)\tau(\beta)+\tau(\beta^2).$$

Por el ítem anterior, $(\tau(\alpha+\beta))^2 = \tau((\alpha+\beta)^2)$, entonces se obtiene que

$$2\tau(\alpha\beta) = 2\tau(\alpha)\tau(\beta)$$

luego

$$\tau(\alpha\beta) = \tau(\alpha)\tau(\beta).$$

De esta manera, Φ es una proyectividad algebraica τ-semilineal que transforma la referencia $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$.

□

Lema 2.3. *Sea τ el automorfismo del Teorema 2,11, entonces, es independiente de la elección de la referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{A, B, C\}$.*

Demostración. En efecto, sean $\mathcal{R}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ dos referencias en $\mathbb{P}^1_R$, sea π la proyectividad algebraica tal que $\pi(A_i) = A_i'$, $\pi(B_i) = B_i'$ y $\pi(C_i) = C_i'$ para $i = 1, 2$. Si P es un punto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, con coordenadas $[x_0, x_1]$ y $[t_0, t_1]$ en las referencias $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ y $\pi(P)$ tiene coordenadas $[y_0, y_1]$ y $[z_0, z_1]$ en las referencias $\mathcal{R}_1' = \{A_1', B_1', C_1'\}$ y $\mathcal{R}_2' = \{A_2', B_2', C_2'\}$. Se verifica que si los automorfismos asociados a π en las dos parejas de referencias son τ y σ

$$[y_0, y_1] = \pi[x_0, x_1] = [\tau(x_0), \tau(x_1)]$$

y

$$[z_0, z_1] = \pi[t_0, t_1] = [\sigma(t_0), \sigma(t_1)].$$

Sea ψ_M y ψ_N las proyectividades algebraicas que pasan de $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ y de $\mathcal{R}_2'$ a $\mathcal{R}_1'$ respectivamente, se tiene que

$$\rho\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\mu\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

con $\rho, \mu \in \mathbb{K}^*$, aplicando σ a la primera de las ecuaciones y sustituyendo las y y z en la segunda se obtiene

$$\sigma(\rho)\begin{pmatrix} \sigma(t_0) \\ \sigma(t_1) \end{pmatrix} = \sigma(M)\begin{pmatrix} \sigma(x_0) \\ \sigma(x_1) \end{pmatrix}$$

$$\mu\begin{pmatrix} \tau(x_0) \\ \tau(x_1) \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} \sigma(t_0) \\ \sigma(t_1) \end{pmatrix}$$

multiplicando la primera ecuación por N a izquierda y la segunda ecuación por $\sigma(p)$, sustituyendo y agrupando los factores de proporcionalidad

$$\lambda\begin{pmatrix} \tau(x_0) \\ \tau(x_1) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \sigma(x_0) \\ \sigma(x_1) \end{pmatrix}$$

con $\lambda = \lambda([x_0, x_1])$ variable según el punto y $P = N\sigma(M)$. Como τ y σ son automorfismos, se tiene que $\sigma(1) = \tau(1) = 1$ y $\sigma(0) = \tau(0) = 0$, luego si

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

se tiene que sustituyendo la ecuación anterior por $[x_0, x_1] = [1, 0]$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda([1,0])\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $a = \lambda([1, 0])$ y $c = 0$. De manera similar se reemplaza en la ecuación para los puntos $[0, 1]$ y $[1, 1]$, obteniendo que $d = \lambda([0, 1])$, $b = 0$, y $\lambda([1, 0]) = \lambda([1, 1]) = \lambda([0, 1])$; por lo tanto, tome

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y evaluando la ecuación en $[y_0, y_1]$, se obtiene que

$$\lambda([y_0, y_1]) \begin{pmatrix} \tau(y_0) \\ \tau(y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(y_0) \\ \sigma(y_1) \end{pmatrix}$$

como $\tau(1) = \sigma(1) = 1$, entonces $\lambda([1, y]) = 1 \ \forall y \in R$, luego $\tau(y) = \sigma(y) \ \forall y \in R$. □

Nota 2.5. Generalmente a las proyectividades de Staudt o proyectividades algebraicas se le conocen simplemente como proyectividades.

2.3. ESTRUCTURA DE VARIEDAD DIFERENCIABLE BIDIMENSIONAL

En esta sección se logra demostrar que la recta proyectiva sobre cualquiera de las $\mathbb{R}$-álgebras bidimensionales $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}$ y $\mathbb{D}$ tiene estructura de variedad diferenciable bidimensional, siguiendo [11]. Por ello, cuando se refiera al anillo R se entenderá como una $\mathbb{R}$-álgebra bidimensional.

Nota 2.6. Observe que en el caso de álgebras bidimensionales los elementos no complementables son:

1. Caso $\mathbb{C}$, únicamente $(0, 0)$.
2. Caso $\mathbb{P}$, $(\lambda_1 + \lambda_1 j, \lambda_2 + \lambda_2 j)$ y $(\lambda_1 - \lambda_1 j, \lambda_1 - \lambda_1 j)$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
3. Caso $\mathbb{D}$, $(\lambda_1 \varepsilon, \lambda_2 \varepsilon)$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, se obtiene que una pareja (z_1, z_2) es complementable si y sólo $z_1 \in R^*$ o $z_2 \in R^*$ o $z_1 - z_2 \in R^*$.

Proposición 2.14. *Sean $\{P_1, P_2, P_3\}$ una referencia de $\mathbb{P}^1_R$, $U_1 = \{X \in \mathbb{P}^1_R : X$ y P_2 son fuertemente independientes$\}$, $U_2 = \{X \in \mathbb{P}^1_R : X$ y P_1 son fuertemente independientes$\}$ y $U_3 = \{X \in \mathbb{P}^1_R : X$ y P_3 son fuertemente independientes$\}$. Se tiene que $\mathbb{P}^1_R = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ y las aplicaciones*

$$\varphi_1 : U_1 \subset \mathbb{P}^1_R \longrightarrow R \simeq \mathbb{R}^2$$
$$[x_0, x_1] \longmapsto \frac{x_1}{x_0}$$

$$\varphi_2 : U_2 \subset \mathbb{P}^1_R \longrightarrow R \simeq \mathbb{R}^2$$
$$[x_0, x_1] \longmapsto \frac{x_0}{x_1}$$

$$\varphi_3 : U_3 \subset \mathbb{P}^1_R \longrightarrow R \simeq \mathbb{R}^2$$
$$[x_0, x_1] \longmapsto \frac{x_0}{x_1 - x_0}$$

están bien definidas y son biyectivas.

Demostración. Observe que si $X = [x_0, x_1]$ en la referencia $\{P_1, P_2, P_3\}$, luego, si X y P_2 son fuertemente independientes, se tiene que

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = x_0 \in R^*$$

es decir, $U_1 = \{[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1_R : x_0 \in R^*\}$. Así mismo, se obtiene que $U_2 = \{[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1_R : x_1 \in R^*\}$ y $U_3 = \{[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1_R : x_0 - x_1 \in R^*\}$.

1. $\mathbb{P}^1_R = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ debido a la nota anterior.

2. Note que φ_1 está bien definida. En efecto, sean $[x_0, x_1] = [x'_0, x'_1]$ con $[x_0, x_1], [x'_0, x'_1] \in U_1$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tal que $(x_0, x_1) = \alpha(x'_0, x'_1)$, por lo tanto

$$\varphi_1([x_0, x_1]) = \frac{x_1}{x_0} = \frac{\alpha x'_1}{\alpha x'_0} = \frac{x'_1}{x'_0} = \varphi_1([x'_0, x'_1]).$$

   De manera similar se prueba que φ_2 y φ_3 están bien definidas.

3. Inyectividad. Observe que la aplicación φ_3 es inyecta. Sean $[x_0, x_1], [y_0, y_1] \in U_3$

tales que $\varphi_3([x_0, x_1]) = \varphi_3([y_0, y_1])$ si y sólo si $\dfrac{x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y_0}{y_1 - y_0}$, entonces

$$\begin{aligned}
[x_0, x_1] &= \left[\frac{x_0}{x_1 - x_0}, \frac{x_1}{x_1 - x_0}\right] \\
&= \left[\frac{y_0}{y_1 - y_0}, 1 + \frac{x_0}{x_1 - x_0}\right] \\
&= \left[\frac{y_0}{y_1 - y_0}, 1 + \frac{y_0}{y_1 - y_0}\right] \\
&= \left[\frac{y_0}{y_1 - y_0}, \frac{y_1}{y_1 - y_0}\right] = [y_0, y_1].
\end{aligned}$$

Análogamente, se prueba que φ_1 y φ_2 son inyectivas.

4. Se probará la sobreyectividad de φ_1. Inicialmente observe que si $[x_0, x_1] \in U_1$, entonces $[x_0, x_1] = [1, x_1 x_0^{-1}]$. Es decir, sea $z \in R$, entonces existe $[1, z] \in U_1$ tal que $\varphi_1([1, z]) = z$.

□

Proposición 2.15. *La familia de subconjuntos*

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq \mathbb{P}^1_R : \varphi_1(U \cap U_i) \text{ es un abierto en } \mathbb{R}^2, i = 1, 2, 3\}$$

define una topología sobre $\mathbb{P}^1_R$. Con esa topología, $\mathbb{P}^1_R$ es Hausdorff y tiene una base numerable.

Demostración. 1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ y $\mathbb{P}^1_R \in \mathcal{T}$, por la Proposición 2,14 se tiene que $\varphi_i(\emptyset \cap U_i) = \varphi_i(\emptyset) = \emptyset,\ i = 1, 2, 3$ y $\varphi_i(\mathbb{P}^1_R \cap U_i) = \varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^2,\ i = 1, 2, 3$.

2. Sean $U_\alpha \in \mathcal{T}$ con $\alpha \in I$, es trivial que $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ pertenece a $\mathcal{T}$, ya que $\varphi_i(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \cap U_i) = \bigcup_{\alpha \in I} \varphi_i(U_\alpha \cap U_i)$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$, análogamente si I es finito $\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

Las propiedades de ser Hausdorff y tener una base numerable se desprenden directamente de la topología usual $\mathbb{R}^2$. □

Proposición 2.16. *Las aplicaciones φ_1, φ_2 y φ_3 anteriores, dotan a $\mathbb{P}^1_R$ de estructura de variedad diferenciable bidimensional.*

Demostración. Observe que $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)_{i=1}^3\}$ es un atlas analítico de dimensión 2 en el espacio topológico $(\mathbb{P}^1_R, \mathcal{T})$.

Es trivial que las aplicaciones $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^2$ son homeomorfismos debido a la definición de la topología dada sobre $\mathbb{P}^1_R$ y $\{U_i\}_{i=1}^3$ es un recubrimiento abierto de $\mathbb{P}^1_R$. Por lo tanto, solo falta ver que para todo $i, j \in \{1, 2, 3\},\ i \neq j$

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^2$$

es una aplicación analítica. Sean $i = 1$ y $j = 2$, los demás casos son análogos. Note que la aplicación

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^2$$

es analítica.

$z = (x, y) = yx^{-1} \in \varphi_1(U_1 \cap U_2) \subseteq \mathbb{R}^2 \simeq R$ si y sólo si $z \in R^*$, entonces $\varphi_2(\varphi_1^{-1}(z)) = \varphi_2([1, z]) = \dfrac{1}{z}$, por lo tanto $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es analítica. □

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] AROCA, Juan Manuel y BERMEJO, María Josefa., *Geometría Proyectiva*. Publicaciones Universidad de Valladolid, (2009).

[2] ATIYAH, Michael y . *Introduction to Commutative Algebra*. University of Oxford. Taylor and Francis Group, (1969).

[3] DONEDDU, A., *Complementos de geometría algebraica*, J. 35, 38-68, (1980).

[4] FORTUNA, Elisabetta y FRIGERIO, Roberto *Projective Geometry*, Springer, (2016).

[5] GRANADOS, Claudia. y OLAYA, Wilson. *Anillos totales de fracciones y anillos de Hermite*. Ciencia en Desarrollo, 11(2), 125-134, (2020).

[6] GRANADOS, Claudia. y OLAYA, Wilson. *Kálgebras finitas conmutativas con unidad*, Ingeniería y Ciencia, vol. 12, no. 24, 31-49, (2016).

[7] GRANADOS, Claudia. *Álgebras finitas sobre un cuerpo. La recta proyectiva*, Tesis doctoral, Dep. Análisis Mat., álgebra, geometría y topología. Universidad de Valladolid, Valladolid, (2015).

[8] HAVLICEK, Hans y LIST, Klaus. *A three-dimensional Laguerre geometry and its visualization*, In proceedinhs-Dresden Symposium geometry: constructive and dinematic. Institut fur geometrie TU Dresden, Dresden pp. 122-129, (2003).

[9] LEZAMA, Oswaldo. *Cuadernos de Álgebra, No. 2: Anillos*. Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, (2014).

[10] MAZUELAS, Santiago. *Tesis doctoral: Interpretación proyectiva de las geometrías métricas, equiformes e inversivas*. Universidad de Valladolid, (2008).

[11] MAZUELAS, Santiago. *Rectas proyectivas sobre* **R**-*álgebras bidimensionales y cuádricas en el espacio proyectivo*, Boletin de la sociedad Puig Adam, **80**, pp 57-76, (2008).

[12] MCDONALD, Bernard. *Linear algebra over conmutative rings*, Marcel Dekker, INC, New York, (1984).

[13] RODRÍGUEZ, Sanjurjo y RUIZ, Sancho, *Geometría Proyectiva*, Addison Wesley. Universidad Complutense de Madrid, (1998).

[14] WRIGHT, Lillian. *Rings of quotients and localization*, Tesis Máster de artes en Matemáticas. College of Arts and Sciences, Texas, (1974).

BIBLIOGRAFÍA

AROCA, Juan Manuel y BERMEJO, María Josefa., *Geometría Proyectiva*. Publicaciones Universidad de Valladolid, (2009).

ATIYAH, Michael y . *Introduction to Commutative Algebra*. University of Oxford. Taylor and Francis Group, (1969).

GRANADOS, Claudia. y OLAYA, Wilson. *Anillos totales de fracciones y anillos de Hermite*. Ciencia en Desarrollo, 11(2), 125-134, (2020).

GRANADOS, Claudia. *Álgebras finitas sobre un cuerpo. La recta proyectiva*, Tesis doctoral, Dep. Análisis Mat., álgebra, geometría y topología. Universidad de Valladolid, Valladolid, (2015).

LEZAMA, Oswaldo. *Cuadernos de Álgebra, No. 2: Anillos*. Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, (2014).

MAZUELAS, Santiago. *Tesis doctoral: Interpretación proyectiva de las geometrías métricas, equiformes e inversivas*. Universidad de Valladolid, (2008).

MAZUELAS, Santiago. *Rectas proyectivas sobre* $\mathbf{R}$*-álgebras bidimensionales y cuádricas en el espacio proyectivo*, Boletin de la sociedad Puig Adam, **80**, pp 57-76, (2008).

MCDONALD, Bernard. *Linear algebra over conmutative rings*, Marcel Dekker, INC, New York, (1984).