ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

BEATRIZ ROJAS GARCÍA

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2005

ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

BEATRIZ ROJAS GARCÍA

Trabajo de grado presentado como
requisito parcial para optar al título de
Licenciada en Matemáticas

Director
RAFAEL ISAACS GIRALDO

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bucaramanga
2005

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a:

Mis padres: Guillermina García y Nepo Rojas, por el apoyo económico y moral dado en todo momento.

Al profesor Rafael Isaacs, por su importante colaboración y apoyo que me brindó para la realización de este trabajo ya que sin él no hubiese sido posible.

A mis compañeros en especial a Diana, Luisa y Andrea quienes me acompañaron a lo largo de la licenciatura y me brindaron su apoyo y que gracias a ese apoyo de una u otra manera contribuyeron a la realización de este trabajo.

TITLE: STRUCTURE OF DISCRETE DYNAMIC SYSTEMS *
AUTHOR: BEATRIZ ROJAS GARCÍA**

KEY WORDS:

Discrete Dynamic System
Invariant set
Morphism
Connectedness
Mathematical Induction

DESCRIPTION

The study of discrete dynamic systems has got great relevance in the last years. It has been so important than around this topic there have been published many articles, books and there have been performed several regional and international congresses. Its treatment is generally achieved from a topologic point of view and it is directed to study themes such as chaos theory, fractals and their applications. This work carefully analyzes some algebraic aspects of discrete dynamic systems.

It has been divided into four chapters. The first one is dedicated to remember some concepts and set theory properties, which will be used in this work development. Then, in the second chapter it is worked with sub algebra (invariant and strongly invariant sets) and the morphisms among these structures. Moreover, it is defined the direct sum and product among discrete dynamic systems. The third chapter is dedicated to the connectedness of discrete dynamic systems. Finally, in the fourth chapter it is visualized the mathematical induction, which is a clue tool to analyze some properties of connected discrete dynamic systems.

---

*Thesis
** FACULTY OF SCIENCES, LICENTIATE IN MATHEMATICS.
DIRECTOR RAFAEL ISAACS GIRALDO.

TITULO: ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS*
AUTOR: BEATRIZ ROJAS GARCÍA**

PALABRAS CLAVES:

Sistema dinámico discreto
Conjuntos Invariantes
Morfismo
Conexidad
Inducción Matemática

DESCRIPCIÓN

El estudio de los sistemas dinámicos discretos en los últimos años ha tomado gran importancia, tanto que alrededor de éstos se publican muchos artículos y libros y se realizan numerables congresos académicos regionales e internacionales; su tratamiento se lleva a cabo generalmente desde un punto de vista topológico y va dirigido a estudiar temas como la teoría del caos, fractales y aplicaciones. Este trabajo analiza algunos aspectos algebraicos de los sistemas dinámicos discretos.

Se ha dividido en cuatro capítulos: el primero de ellos está dedicado a recordar algunas conceptos y algunas propiedades de la teoría de conjuntos, las cuales se utilizaran en el desarrollo de este trabajo; en el segundo capítulo se trabaja con las sub-álgebras (conjuntos invariantes y fuertemente invariantes) y los morfismos entre estas estructuras, además se define el producto y suma directa entre sistemas dinámicos discretos; el tercer capítulo esta dedicado a la conexidad de los sistemas dinámicos discretos; en el cuarto y último capítulo se visualiza la inducción matemática, herramienta clave para analizar algunas propiedades de sistemas dinámicos discretos conexos.

---

*Monografía
** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS. DIRECTOR RAFAEL ISAACS GIRALDO.

Contenido

Notación

$f[X]$	: imagen directa de un conjunto.
$f^{-1}[X]$	: imagen inversa de un conjunto.
$f(x)$	: imagen de un elemento por medio de f.
f^{-1}	: función inversa a f.
$\mathbb{E}$	: sistema dinámico discreto.
$CFI(\mathbb{E})$	: conjunto fuertemente invariante de $\mathbb{E}$.
$CFI^{*}(\mathbb{E})$	: conjunto fuertemente invariante no vacío de $\mathbb{E}$.
$CI(\mathbb{E})$	: conjunto invariante de $\mathbb{E}$.
$CI^{*}(\mathbb{E})$	: conjunto invariante no vacío de $\mathbb{E}$.
$Endo(\mathbb{E})$	: conjunto de morfismos de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{E}$.
$\bigoplus$	: suma directa.
$\prod$	: producto directo.

Introducción

El estudio de los sistemas dinámicos discretos en los últimos años ha tomado gran importancia, tanto que alrededor de éstos se publican muchos artículos y libros y se realizan numerables congresos académicos regionales e internacionales; su tratamiento se lleva a cabo generalmente desde un punto de vista topológico y va dirigido a estudiar temas como la teoría del caos, fractales y aplicaciones. En este trabajo queremos analizar sólo algunos de los aspectos algebraicos de los sistemas dinámicos discretos.

Desde el punto de vista del álgebra universal los sistemas dinámicos discretos son simplemente un conjunto junto con una operación unaria, que es una función del conjunto en sí mismo. Estas estructuras son las más sencillas que se pueden estudiar con algún interés (o las $0 - arias$ que solo tienen constantes, las cuales no son de interés), por tal razón no es raro que objetos matemáticos muy elementales aparezcan de manera natural como sistemas dinámicos discretos, estos son : los naturales, los enteros y $\mathbb{Z}_n$. Nuestro interés es mostrar el papel que juegan estos sistemas elementales dentro de la categoría de los sistemas dinámicos discretos.

El trabajo se ha dividido en cuatro capítulos de la siguiente manera:

El primer capítulo está dedicado a recordar algunas definiciones y propiedades de teoría de conjuntos y a fijar la notación. En el segundo capítulo se entra ya en el tema, y se estudia las sub-algebras (conjuntos invariantes y fuertemente invariantes), también se estudian los morfismos entre estas estructuras, así como el producto y suma directa de los sistemas dinámicos, que son formas de construir nuevos sistemas dinámicos. El tercer capítulo está dedicado fundamentalmente a la conexidad de los sistemas dinámicos discretos, concepto topológico que se estudia de manera algebraica basados en el estudio de las subálgebras. Se presentan los naturales con la función siguiente de Peano como un sistema dinámico discreto conexo.

En el cuarto y último capítulo se visualiza la inducción matemática, ésta nos permitirá estudiar los sistemas dinámicos discretos conexos elementales: los naturales, los enteros y $\mathbb{Z}_n$. Se ha evitado utilizarlos anteriormente en la construcción que se hace, para resaltar que con el lenguaje establecido, estos sistemas se pueden caracterizar de manera sencilla y coherente.

Este estudio presenta desde otro punto de vista, temas que se tratan en las matemáticas elementales, algo que además de poder ser útil desde una mirada pedagógica, eventualmente podría ser de interés para la propia matemática.

Capítulo 1

Preliminares

Empezamos recordando algunas proposiciones de la teoría de conjuntos que nos serán de gran ayuda para nuestro propósito.

Propiedades básicas

Definición 1. *Sean A, B, C, D conjuntos, $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ funciones, se define $f \times g : A \times C \longrightarrow B \times D$ así: $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ para todo $x \in A, y \in C$.*

Definición 2. *Sean A, B conjuntos, $f : A \longrightarrow B$ una función, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$; se define:*

1. $f[X] = \{f(x) \in B \mid x \in X\}$.

2. $f^{-1}[Y] = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$.

Proposición 1.1. *Sean A, B conjuntos, $f : A \longrightarrow B$ una función, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$ se tiene que:*

1. $X \subseteq f^{-1}\big[f[X]\big]$.

2. $f^{-1}[f[X]] \subseteq X$, *si f es uno a uno.*

3. $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$.

4. $Y \subseteq f[f^{-1}[Y]]$, *si* f *es sobre.*

Proposición 1.2. *Sean* X, Y *conjuntos* $f : X \longrightarrow Y$ *una función,* $\{A_i\}_{i\in I}$ *una colección de subconjuntos de* X, $\{B_i\}_{i\in I}$ *una colección de subconjuntos de* Y *se tiene:*

1. $f[\bigcup_{i\in I} A_i] = \bigcup_{i\in I} f[A_i]$;

2. $f^{-1}[\bigcup_{i\in I} B_i] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i]$;

3. $f[\bigcap_{i\in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i\in I} f[A_i]$;

4. $f^{-1}[\bigcap_{i\in I} B_i] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[B_i]$;

5. *si* f *es biyección se tiene que* $f[\bigcap_{i\in I} A_i] = \bigcap_{i\in I} f[A_i]$.

Proposición 1.3. *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *una función,* $A \subseteq X, B \subseteq X$, *si* f *es biyección entonces* $f[A - B] = f[A] - f[B]$.

Proposición 1.4. ***Principio de Palomar***

Sean A *y* B *conjuntos finitos con igual número de elementos,* $f : A \longrightarrow B$ *función, si* f *es sobre entonces* f *es uno a uno.*

1.1. Operaciones generalizadas y tipo de álgebra

En las materias de álgebra moderna de la licenciatura se estudian algunas estructuras algebraicas, especialmente grupos, anillos y campos. El álgebra universal generaliza el concepto de estructura algebraica y las técnicas para estudiarlas. Para definir un álgebra en este sentido, necesitamos primero ampliar el concepto de operación.

Definición 3. *Sea* A *un conjunto, una* ***operación*** n*-aria o de ariedad* n *es una función* $f : A^n \longrightarrow A$*; además se dice que:*

1. f *es una operación unuaria,* $n = 1$, *si* f *esta definida de* A *en* A,

2. *f es una operación binaria, $n = 2$, si f esta definida de $A \times A$ en A,*

3. *Las constantes son operaciones de ariedad 0 (operación nula).*

Al referirnos a una operación $n - aria$ está implícito que se cumple el axioma de clausura para esta operación.

Definición 4. *Un álgebra es una estructura en la cual interviene un conjunto, una o varias operaciones de la misma o de diferente ariedad.*

Definición 5. *Un tipo τ es una sucesión no vacía finita de naturales $\mathcal{T} = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$, $k \geq 1$. Un **álgebra** de tipo $\mathcal{T}$ se entiende como una pareja (A, F), donde A es un conjunto no vacío y $F = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ donde cada f_i es una operación de ariedad n_i en A.*

Ejemplos de álgebras

Veamos cómo, ciertas estructuras que se estudian en la licenciatura, corresponden a esta noción general de álgebra.

Ejemplo 1. Los **grupos** son álgebras de tipo $\langle 2, 1, 0 \rangle$, es decir con tres operaciones una binaria, una unuaria (el inverso) y una operación nula (el módulo), donde se cumplen las siguientes igualdades:

i) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

ii) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$;

iii) $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Ejemplo 2. Los monoides son álgebras de tipo $\langle 2, 0 \rangle$, es decir dos operaciones: una binaria y una operación nula (el módulo) que cumple:

i) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

ii) $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Los grupos también se pueden considerar como álgebras de tipo $\langle 2, 0 \rangle$ con un axioma adicional.

Ejemplo 3. Los semigrupos son álgebras de tipo $\langle 2 \rangle$, es decir con una única operación binaria que cumple:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Los monoides y los grupos también se pueden considerar como álgebras de tipo $\langle 2 \rangle$ con ciertos axiomas adicionales.

Ejemplo 4. Los anillos son álgebras de tipo $\langle 2, 2, 1, 0 \rangle$, es decir con cuatro operaciones: dos binarias (la suma y el producto), una unuaria (inverso de la suma) y una nula (el módulo de la suma), en donde se cumplen ciertos axiomas:

i) Con $+, -, 0$ se forma un grupo conmutativo.

ii) Con $\cdot$ se forma un semigrupo.

iii)
- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$;
- $(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.

Álgebras del mismo tipo se pueden comparar por medio de morfismos y permiten además construcciones como el producto. Por otra parte, el estudio de las subálgebras (subconjuntos que con las operaciones forman una estructura del mismo tipo) es generalmente muy revelador.

Capítulo 2

Fundamentos algebraicos

Los sistemas dinámicos discretos son álgebras de tipo $\langle 1\rangle$, esto es, conjuntos con una operación unaria, es decir una función del conjunto en sí mismo. Desde este punto de vista del álgebra universal, son las estructuras más sencillas que podemos encontrar y esto tal vez explica que desde el punto de vista algebraico, poco se estudian.

Nuestro estudio se fundamenta en observaciones sobre las subálgebras, que llamamos conjuntos invariantes, y cierta clase de subálgebras, los conjuntos fuertemente invariantes.

2.1. Conjuntos invariantes y conjuntos fuertemente invariantes

Definición 6. *Un* ***sistema dinámico discreto*** $\mathbb{E}$ *es una estructura algebraica compuesta por una pareja* $\mathbb{E} = (E, f)$ *donde* E *es un conjunto y* $f : E \longrightarrow E$ *es una función. En este contexto, siendo* $X \subseteq E$ *diremos además que:*

i) X *es un* ***conjunto invariante*** *(brevemente un* CI*) si* $f[X] \subseteq X$.

ii) X *es un* ***conjunto fuertemente invariante*** *(brevemente un* CFI*) si*

$f[X] = X$.

La familia de CI de $\mathbb{E}$ la notaremos $CI(\mathbb{E})$ y la familia de CFI de $\mathbb{E}$ la notaremos $CFI(\mathbb{E})$, cuando nos refiramos a los $CFI(\mathbb{E})$ y $CI(\mathbb{E})$ no vacíos lo notaremos $CFI^*(\mathbb{E})$ y $CI^*(\mathbb{E})$ respectivamente. Es claro que los conjuntos fuertemente invariantes de un sistema dinámico discreto $\mathbb{E}$ son conjuntos invariantes de $\mathbb{E}$; es decir $CFI(\mathbb{E}) \subseteq CI(\mathbb{E})$.

Ejemplos

Los sistemas dinámicos discretos son todas las álgebras de tipo $\langle 1 \rangle$, como no se exige ningún axioma tendremos infinidad de ejemplos. Veamos algunos:

Ejemplo 5. Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto, donde $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y f esta definida así: $f(1) = 5,\ f(2) = 4,\ f(3) = 3,\ f(4) = 4,\ f(5) = 2$.

Tenemos que:

$CI(\mathbb{E}) = \{\{3\},\ \{4\},\ \{2, 4\},\ \{3, 4\},\ \{2, 3, 4\},\ \{2, 4, 5\},\ \{1, 2, 4\},\ \{2, 3, 4\},\ E,\ \emptyset\}$

y

$CFI(\mathbb{E}) = \{\{3, 4\},\ \{4\},\ \{3\},\ E,\ \emptyset\}$.

Ejemplo 6. Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto, donde $E = \mathbb{Z}_5$ y $f(x) = x^3 + 2$, veamos quienes son los $CFI(\mathbb{E})$ y $CI(\mathbb{E})$.

$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, en este caso los $CI(\mathbb{E})$ coincide con los $CFI(\mathbb{E})$ y son: $\{0, 2\},\ \{1, 3, 4\},\ E$ y $\emptyset$. Esto también lo podemos ver en la Figura 2.1.

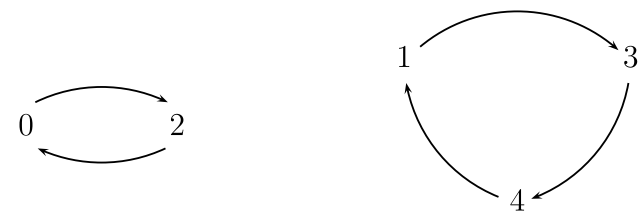


Figura 2.1: $(\mathbb{Z}_5, f),\ f(x) = x^3 + 2$.

Ejemplos favoritos

Queremos mostrar algunos ejemplos de sistemas dinámicos discretos que se trabajan en diferentes instancias desde la infancia: $(\mathbb{N}, s)$, $(\mathbb{Z}, s)$ y $(\mathbb{Z}_n, s)$, donde s es la función siguiente de Peano $s(n) = n + 1$. Esta función que está definida inicialmente para el conjunto de los números naturales, también está definida en el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ y en las clases residuales módulo m es decir $\mathbb{Z}_m$.

Ejemplo 7. Sea $\mathbb{E} = (\mathbb{N}, s)$ el sistema dinámico discreto donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los naturales y s es la función "siguiente" de Peano,

$$s(n) = n + 1$$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots$$

Figura 2.2: $(\mathbb{N}, s)$.

Este sistema no contiene ningún conjunto fuertemente invariante finito no vacío, además tiene la propiedad que si asignamos 0 a cualquier elemento de otro sistema dinámico discreto $\mathbb{F} = (F, g)$, digamos $x_0 \in F$ siempre existe un único morfismo $\Gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{F}$ tal que $\Gamma(0) = x_0$, esto se demostrará en el capítulo 4.

Ejemplo 8. Sea $\mathbb{E} = (\mathbb{Z}, s)$ un sistema dinámico discreto, donde $s(z) = z + 1$, $z \in \mathbb{Z}$.

$$\cdots \longrightarrow -2 \longrightarrow -1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \cdots$$

Figura 2.3: $(\mathbb{Z}, s)$.

Al igual que $(\mathbb{N}, s)$, este sistema no posee ningún conjunto fuertemente invariante como se ve en la Figura 2.3.

Ejemplo 9. Sea $(\mathbb{Z}_n, s)$ un sistema dinámico discreto, donde s es la función siguiente de Peano, $s(m) = m + 1$, $m \in \mathbb{Z}_n$.

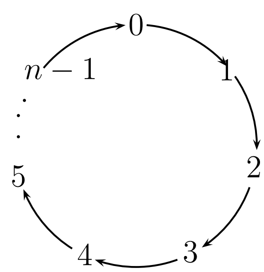


Figura 2.4: $(\mathbb{Z}_n, s)$

.

En este sistema los $CFI(\mathbb{E})$ coinciden con los $CI(\mathbb{E})$ y son: $\{\emptyset, \mathbb{Z}_n\}$.

En general cuando nos refiramos a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_m$ como sistemas dinámicos se sobrentiende, mientras no se especifique lo contrario, que la función que actúa es precisamente s.

Operaciones conjuntistas entre conjuntos invariantes

Las familias de los conjuntos fuertemente invariantes y los conjuntos invariantes son cerradas para la unión, en cambio la intersección solo es cerrada en los conjuntos invariantes; esto se verá en las siguientes proposiciones.

Proposición 2.1. *Sea $\mathbb{E}$ un sistema dinámico discreto.*

i) La unión de conjuntos fuertemente invariantes de $\mathbb{E}$ es un conjunto fuertemente invariante de $\mathbb{E}$.

ii) La unión de conjuntos invariantes de $\mathbb{E}$ es un conjunto invariante de $\mathbb{E}$.

Demostración.

i) Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una colección arbitraria de conjuntos fuertemente invariantes de $\mathbb{E}$, debemos ver que:

$$f\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \bigcup_{i\in I} A_i$$

sabemos que

$$f\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \bigcup_{i\in I} f[A_i] \tag{2.1}$$

como cada A_i es un conjunto fuertemente invariante de $\mathbb{E}$ entonces:

$$f[A_i] = A_i$$

por tanto

$$\bigcup_{i\in I} f[A_i] = \bigcup_{i\in I} A_i \tag{2.2}$$

de 2.1 y 2.2 tenemos que

$$f\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

ii) La demostración es análoga a la de la parte i), por ello la omitimos.

□

Proposición 2.2. *Sea $\mathbb{E}$ un sistema dinámico discreto, la intersección cualesquiera de conjuntos invariantes de $\mathbb{E}$ es un conjunto invariante.*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una colección arbitraria de conjuntos invariantes de $\mathbb{E}$, debemos ver que:

$$f\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right] \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i.$$

Sabemos que

$$f\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right] \subseteq \bigcap_{i\in I} f[A_i] \tag{2.3}$$

como cada A_i es un conjunto invariante de $\mathbb{E}$ entonces:

$$f[A_i] \subseteq A_i$$

por lo tanto

$$\bigcap_{i\in I} f[A_i] \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i \tag{2.4}$$

de (2.3) y (2.4) tenemos que

$$f\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right] \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i.$$

□

La intersección arbitraria de conjuntos fuertemente invariantes de un sistema dinámico discreto $\mathbb{E}$ no siempre es un conjunto fuertemente invariante, esto lo podemos ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 10. Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto, donde $E = \{\mathbb{N} \cup \mathbb{N} \times \{*\} \cup \mathbb{N} \times \{\star\}\}$ y $f : E \longrightarrow E$ definida así:

$$\begin{aligned} f(n) &= n+1 \\ f(n,*) &= \begin{cases} n-1, & \text{si } n \neq 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases} \\ f(n,\star) &= \begin{cases} n-1, & \text{si } n \neq 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Sea $B = \{\mathbb{N} \cup \mathbb{N} \times \{*\}\}$ y $C = \{\mathbb{N} \cup \mathbb{N} \times \{\star\}\}$, como se puede ver en la Figura 2.5, B y C son conjuntos fuertemente invariantes de $\mathbb{E}$, $B \cap C = \mathbb{N}$, pero $(\mathbb{N}, f)$ no es un conjunto fuertemente invariante.

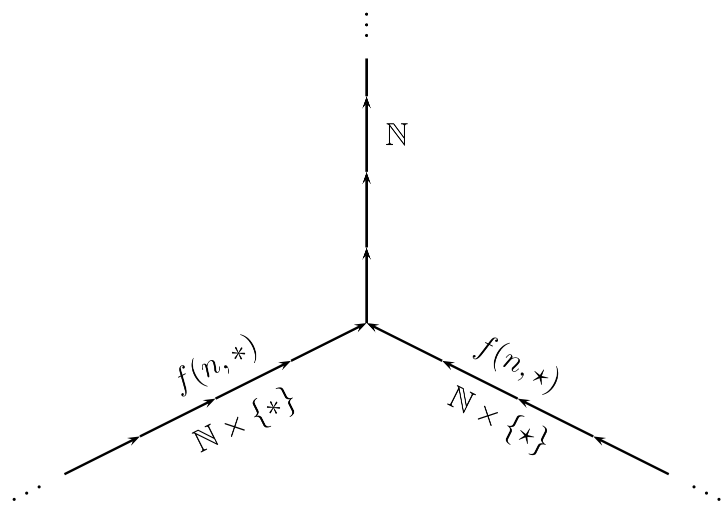


Figura 2.5: $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\cup\{*\}\times\mathbb{N}\cup\{\star\}, f)$.

Proposición 2.3. $A \in CI(\mathbb{E}) \Longleftrightarrow (\forall(a \in A \Longrightarrow f(a) \in A))$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Si $A \in CI(\mathbb{E})$ tenemos que $f(A) \subseteq A$; luego $\forall a \in A,\ f(a) \subseteq A$ entonces $f(a) \in A$.

$\Leftarrow$) Veamos que $f(A) \subseteq A$.

Sea $y \in f(A)$ entonces para algún $a \in A$ se tiene $f(a) = y$ pero como $\forall a \in A,\ f(a) \in A$ entonces $y \in A$; luego $f(A) \subseteq A$ por tanto $A \in CI(\mathbb{E})$. $\square$

Proposición 2.4. *Sea* $\mathbb{E} = (E, f)$ *un sistema dinámico discreto con* f *sobre,* $A \in CFI(\mathbb{E})$ *si y solo si* $(\forall a(a \in A \Longleftrightarrow f(a) \in A))$.

Demostración. La demostración es muy similar a la anterior por eso la omitimos. $\square$

La imagen directa y la imagen inversa de conjuntos invariantes y fuertemente invariantes de un sistema dinámico discreto $\mathbb{E}$, son conjuntos invariantes y fuertemente invariantes de $\mathbb{E}$ respectivamente, es decir:

- Si $A \in CFI(\mathbb{E})$ entonces $f[A] \in CFI(\mathbb{E})$.
- Si $A \in CI(\mathbb{E})$ entonces $f[A] \in CI(\mathbb{E})$.
- Si $A \in CFI(\mathbb{E})$ entonces $f^{-1}[A] \in CFI(\mathbb{E})$.
- Si $A \in CI(\mathbb{E})$ entonces $f^{-1}[A] \in CI(\mathbb{E})$.

Se vio que los naturales con la función siguiente de Peano no contiene ningún conjunto fuertemente invariante, es decir que $CFI(\mathbb{N}, s) = \{\emptyset\}$, sin embargo en los sistemas dinámicos discretos finitos existen conjuntos fuertemente invariantes diferentes de vacío, esto lo enunciamos en la siguiente proposición.

Proposición 2.5. *Si $\mathbb{E}$ es un sistema dinámico discreto finito, entonces $CFI(\mathbb{E}) \neq \{\emptyset\}$.*

Demostración. Los $CI^*(\mathbb{E})$ están ordenados por la inclusión, como E es finito entonces existen CI minimales no vacíos, sea A uno de ellos $A \neq \emptyset$, es decir que $f(A) \subseteq A$, pero como $f(A) \in CI(\mathbb{E})$, $f(A) \neq \emptyset$ y A es minimal entonces $f(A) = A$, luego $A \in CFI(\mathbb{E})$. $\square$

2.2. Órbitas

Definición 7. *Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto, si $x_0 \in E$ llamaremos la **órbita** de x_0, la cual notaremos $\vec{x}_0$, al menor conjunto invariante de $\mathbb{E}$ que contiene a x_0; es decir*

$$\vec{x}_0 = \bigcap \{A \mid A \in CI(\mathbb{E}), x_0 \in A\}.$$

La órbita de un elemento de un sistema dinámico discreto $\mathbb{E}$, siempre será diferente de vacío, esto es porque $x_0 \in \vec{x}_0$ y además por la Proposición 2.2 la intersección de conjuntos invariantes de $\mathbb{E}$ es un conjunto invariante.

Proposición 2.6. *Sea $\mathbb{E}$ un sistema dinámico discreto, si $A \in CI(\mathbb{E})$ y $x \in (A - f[A])$ entonces $A - \{x\} \in CI(\mathbb{E})$.*

Demostración. Debemos ver que

$$f[A - \{x\}] \subseteq A - \{x\}.$$

Sabemos que $A - \{x\} \subseteq A$ entonces

$$f[A - \{x\}] \subseteq f[A],$$

como $A \in CI(\mathbb{E})$ se tiene:

$$f[A - \{x\}] \subseteq A.$$

Como $x \notin f[A] \Longrightarrow x \notin f[A - \{x\}]$ por lo tanto

$$f[A - \{x\}] \subseteq A - \{x\}.$$

$\square$

Proposición 2.7. *Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto, si $a \in E$, se tiene que $\vec{a} - f[\vec{a}] = \emptyset$ ó $\vec{a} - f[\vec{a}] = \{a\}$.*

Demostración. Supongamos que existe $y \in (\vec{a} - f[\vec{a}]),\ y \neq a$, por la Proposición 2.6 tenemos que $\vec{a} - \{y\} \in CI(\mathbb{E})$.

Como $a \in \vec{a}$ y $a \neq y$ entonces $a \in (\vec{a} - \{y\})$, lo cual significa que $\vec{a}$ no es el menor $CI(\mathbb{E})$ que contiene a a, absurdo. Luego si $\vec{a} - f[\vec{a}]$ no es vacío entonces se debe tener que $\vec{a} - f[\vec{a}] = \{a\}$. $\square$

De esta proposición se deduce que en un sistema dinámico discreto todo elemento de $\vec{x}_0$ o es "sucesor" de otro elemento de $\vec{x}_0$ ó es x_0.

Corolario 2.1. *Si $x \in \vec{x}_0$ entonces $x = x_0$ ó $x \in f[\vec{x}_0]$, es decir que existe $y \in \vec{x}_0$ tal que $f(y) = x$.*

Proposición 2.8. *Sea $\mathbb{E}$ un sistema dinámico discreto, si $a \neq b$ y $\vec{a} = \vec{b}$ entonces $\vec{a}$ es un $CFI(\mathbb{E})$.*

Demostración. Como $\vec{a} = \vec{b}$ entonces $\vec{a} - f[\vec{a}] = \vec{b} - f[\vec{b}]$, si $\vec{a} - f[\vec{a}]$ es no vacía, por la Proposición 2.8 tenemos que $\vec{a} - f[\vec{a}] = \{a\}$ y $\vec{b} - f[\vec{b}] = \{b\}$, luego $a = b$, imposible entonces $\vec{a} - f[\vec{a}] = \emptyset$, por lo tanto $\vec{a} \in CFI(\mathbb{E})$. $\square$

Si $A \in CFI(\mathbb{E})$ tal vez podríamos pensar que al restringir f a A se tendrá una biyección, pero esto no siempre ocurre, para lograr que $f \downarrow_A$ sea biyección es necesario que el conjunto A sea finito. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 11. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ f(n) = [|\frac{n}{2}|]$, recordemos que $[|x|]$, es la parte entera de un real y esta definida como el mayor entero igual o menor que x.

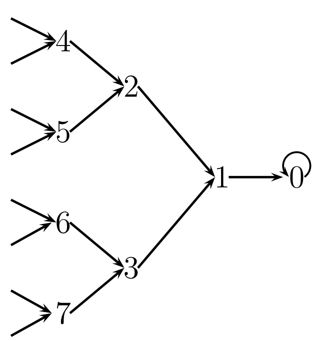


Figura 2.6: $(\mathbb{N}, f), \quad f(n) = [|\frac{n}{2}|]$

Los naturales bajo esta función es un conjunto fuertemente invariante pero no se puede hacer ninguna restricción a un conjunto $A \subseteq \mathbb{N},\ A$ no finito tal que $f \downarrow_A$ sea biyección.

Proposición 2.9. *Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto, $A \subseteq E$, si A es finito y $A \in CFI(\mathbb{E})$ entonces $f \downarrow_A$ es biyección.*

Demostración. Debemos ver que $f \downarrow_A$ es uno a uno y sobre.

i) Como $f[A] = A$, entonces $f \downarrow_A$ es sobre.

ii) Por ser A finito, A sobre y por el principio de Palomar (Proposición 1.4 del Capítulo 1) tenemos que el conjunto A bajo la función f es uno a uno, es decir que $f \downarrow_A$ es uno a uno.

de i) y ii) se tiene que $f \downarrow_A$ es biyección. $\square$

2.3. Morfismos

Definición 8. *Sean $\mathbb{E} = (E, f)$ y $\mathbb{F} = (F, g)$ sistemas dinámicos discretos; $\Gamma : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ función, se dirá que Γ es un **morfismo** si y sólo si $\Gamma f = g\Gamma$; es decir que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[d, "g"] \\ E \arrow[r, "\Gamma"'] & F \end{tikzcd}$$

Definición 9. *Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto, $\Gamma : E \longrightarrow E$ morfismo, se llamara **endomorfismo** al conjunto de todos los morfismos de E en E y lo notaremos $Endo(\mathbb{E})$.*

Propiedades de los morfismos

Proposición 2.10. *Sean $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ sistemas dinámicos discretos; si $\Gamma : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ y $\Delta : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{G}$ son morfismos entonces $\Delta\Gamma : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{G}$ es un morfismo.*

Demostración. Sea $\mathbb{E} = (E, f)$, $\mathbb{F} = (F, g)$ y $\mathbb{G} = (G, h)$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "g"'] & G \arrow[d, "h"'] \\ E \arrow[r, "\Gamma"'] & F \arrow[r, "\Delta"'] & G \end{tikzcd}$$

Debemos ver que $(\Delta\Gamma)f = h(\Delta\Gamma)$.

Como Γ y Δ son morfismos tenemos que $\Gamma f = g\Gamma$ y $\Delta g = h\Delta$.

$$\begin{aligned} (\Delta\Gamma)f &= \Delta(\Gamma f) && \text{por ser la composición de funciones asociativa} \\ &= \Delta(g\Gamma) && \text{por ser } \Gamma \text{ morfismo} \\ &= (\Delta g)\Gamma && \text{por ser la composición de funciones asociativa} \\ &= (h\Delta)\Gamma && \text{por ser } \Delta \text{ morfismo} \\ &= h(\Delta\Gamma). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.11. *La función idéntica es un morfismo*

De las Proposiciones 2.10 y 2.11 podemos asegurar que los sistemas dinámicos discretos con estos morfismos forman una categoría, razón que nos permite adoptar la terminología propia de éstas, por ejemplo podremos hablar de isomorfismos.

Definición 10. *Sea* $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ *sistemas dinámicos discretos y* $\Gamma : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ *un morfismo, se dice que* Γ *es un* ***isomorfismo*** *si y solo si* Γ *es una biyección.*

Cuando para dos sistemas dinámicos discretos $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ existe el isomorfismo $\Gamma : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$, se dice que el sistema dinámico discreto $\mathbb{E}$ es isomorfo al sistema dinámico discreto $\mathbb{F}$ y se representa $\mathbb{E} \cong \mathbb{F}$.

Proposición 2.12. *Sean* $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ *sistemas dinámicos discretos, si* $\Gamma : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ *es un isomorfismo entonces* $\Gamma^{-1} : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E}$ *es un morfismo.*

Demostración. Debemos ver que $\Gamma^{-1}g = f\Gamma^{-1}$

$$
\begin{aligned}
\Gamma f &= \Gamma g && \text{Por ser } \Gamma \text{ morfismo} \\
\Gamma^{-1}\Gamma f &= \Gamma^{-1}g\Gamma && \text{operando a ambos lado por } \Gamma^{-1} \\
f &= \Gamma^{-1}g\Gamma && \\
f\Gamma^{-1} &= \Gamma^{-1}g\Gamma\Gamma^{-1} && \text{operando a ambos lado por } \Gamma^{-1} \\
f\Gamma^{-1} &= \Gamma^{-1}g. &&
\end{aligned}
$$

□

Proposición 2.13. *Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ sistemas dinámicos discretos, si Γ es un morfismo de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{F}$, entonces $\phi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$, donde $\phi = \Gamma f$ es un morfismo de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{F}$.*

Demostración. Veamos que $\phi f = g\phi$:

$\phi f \overset{\text{def}\phi}{=} \Gamma f f$ como Γ es morfismo tenemos que: $\phi f = g\Gamma f = g\phi$, por lo tanto ϕ es morfismo. □

Definición 11. *Sean $\mathbb{E} = (E, f)$, $\mathbb{F} = (F, g)$ sistemas dinámicos discretos, el conjunto de todos los morfismos de E en F forman con ϕ un sistema dinámico discreto, donde $\phi(\Gamma) = \Gamma f$. Cuando $E = F$ se tiene el sistema dinámico discreto $(Endo(\mathbb{E}), \phi)$.*

Hasta el momento hemos visto algunas propiedades de los morfismos en los sistemas dinámicos discretos, propiedades que no están relacionadas con los conjuntos invariantes de éstos, a continuación enunciaremos unas propiedades con sus respectivas demostraciones que relacionan los morfismos de los sistemas dinámicos discretos con sus conjuntos invariantes.

Proposición 2.14. *Sean $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ sistemas dinámicos discretos, Γ un morfismo de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{F}$ se tiene que:*

1. *Si $A \in CFI(\mathbb{E})$ entonces $\Gamma[A] \in CFI(\mathbb{F})$.*

2. *Si* $A \in CI(\mathbb{E})$ *entonces* $\Gamma[A] \in CI(\mathbb{F})$.

3. *Si* $B \in CI(\mathbb{F})$ *entonces* $\Gamma^{-1}[B] \in CI(\mathbb{E})$.

Demostración.

1. Como $A \in CFI$ de $\mathbb{E} \Longrightarrow f[A] = A$

   $\Longrightarrow \Gamma[f[A]] = \Gamma[A]$

   $\Longrightarrow (\Gamma f)[A] = \Gamma[A]$ Por definición de composición de funciones

   $\Longrightarrow (g\Gamma)[A] = \Gamma[A]$ Por ser Γ morfismo

   $\Longrightarrow g[\Gamma[A]] = \Gamma[A]$ Por definición de composición de funciones

   $\Longrightarrow \Gamma[A] \in CFI(\mathbb{F})$.

2. La demostración es análoga a 1 y por lo tanto lo omitimos.

3. Si $x \in \Gamma^{-1}[B]$ existe $\Gamma(x) \in B$, como $B \in CI(\mathbb{F})$ entonces $g(\Gamma(x)) \in B$ pero por ser Γ morfismo $g(\Gamma(x)) = \Gamma(f(x)) \in B$ por tanto $f(x) \in \Gamma^{-1}[B]$.

□

La imagen inversa por un morfismo de un CFI no necesariamente es un CFI (se le deja al lector encontrar un ejemplo). Esto se puede garantizar cuando se tiene un isomorfismo.

Proposición 2.15. *Sean* $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ *sistemas dinámicos discretos,* $\Gamma : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ *un isomorfismo, si* $B \in CFI(\mathbb{F})$ *entonces* $\Gamma^{-1}[B] \in CFI(\mathbb{E})$.

Demostración. Aplíquese la Proposición 2.14 a Γ^{-1}. □

Corolario 2.2. *Sean* $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ *sistemas dinámicos discretos, si* $\mathbb{E} \cong \mathbb{F}$ *entonces el número de conjuntos invariantes de* $\mathbb{E}$ *es igual al número de conjuntos invariantes de* $\mathbb{F}$.

Los morfismos también se comportan muy bien con las órbitas:

Proposición 2.16. *Sean* $\mathbb{E} = (E, f)$, $\mathbb{F}$ *sistemas dinámicos discretos,* $\Gamma : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ *un morfismo*

$$\forall x_0 \in E \text{ se tiene que } \Gamma[\vec{x}_0] = \overrightarrow{\Gamma(x_0)}.$$

Demostración.

i) $\Gamma(x_0) \in \Gamma[\vec{x}_0]$ porque $x_0 \in \vec{x}_0$; por la Proposición 2.14 tenemos que $\Gamma[\vec{x}_0] \in CI(\mathbb{F})$ y como $\overrightarrow{\Gamma(x_0)}$ es el menor $CI(\mathbb{F})$ que contiene a $\Gamma(x_0)$ se tiene que:

$$\overrightarrow{\Gamma(x_0)} \subseteq \Gamma[\vec{x}_0].$$

ii) Sea $\mathfrak{L} = \{A \in CI(\mathbb{E}) \mid x \in A\}$ y $\mathfrak{M} = \{B \in CI(\mathbb{E}) \mid \Gamma(x) \in B\}$

$$\Gamma[\vec{x}_0] = \Gamma[\bigcap_{A \in \mathfrak{L}} A] \subseteq \bigcap_{A \in \mathfrak{L}} \Gamma[A] \tag{2.5}$$

como $B \in CI(\mathbb{F})$ y Γ es morfismo entonces $\Gamma^{-1}[B] \in CI(\mathbb{E})$, es decir que $\Gamma^{-1}[B] \in \mathfrak{L}$; pero como $\Gamma\Gamma^{-1}[B] \subseteq B$, $\forall B \in \mathfrak{L}$ entonces existe $A \in \mathfrak{L}$ tal que $\Gamma[A] \subseteq B$, luego

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{L}} \Gamma[A] \subseteq \bigcap_{B \in \mathfrak{M}} B = \overrightarrow{\Gamma(x_0)} \tag{2.6}$$

por tanto de (2.5) y (2.6) se tiene:

$$\Gamma[\vec{x}_0] \subseteq \bigcap_{B \in \mathfrak{M}} B = \overrightarrow{\Gamma(x_0)}$$

de i) y ii) se concluye que $\Gamma[\vec{x}_0] = \overrightarrow{\Gamma(x_0)}$. □

2.4. Producto directo y suma directa

Como ya hemos dicho, los sistemas dinámicos discretos forman una categoría y por ello podemos hablar de algunas de sus construcciones; en este caso nos referimos al producto directo y suma directa.

Definición 12. *Sea* $\mathbb{E} = (E, f)$ *y* $\mathbb{F} = (F, g)$ *sistemas dinámicos discretos, se define el producto directo como:* $\mathbb{E} \times \mathbb{F} = (E \times F, f \times g)$*, además* $\pi_1 : \mathbb{E} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E}$ *y* $\pi_2 : \mathbb{E} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ *son las* ***proyecciones*** *de* $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ *en* $\mathbb{E}$ *y* $\mathbb{F}$ *respectivamente, donde para cada* $(x, y) \in E \times F$*, por definición* $\pi_1(x, y) = x$ *y* $\pi_2(x, y) = y$*.*

Es muy fácil ver que π_1 y π_2 son morfismos.

Definición 13. *Sea* $\mathbb{E} = (E, f)$ *y* $\mathbb{F} = (F, g)$ *sistemas dinámicos discretos se define la suma que notaremos* $\mathbb{E} \bigoplus \mathbb{F}$ *y las inclusiones naturales* $\mu_1 : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \bigoplus \mathbb{F}$ $\mu_2 : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E} \bigoplus \mathbb{F}$ *así:*

i) Si $\mathbb{E} \cap \mathbb{F} = \emptyset$ $\mathbb{E} \bigoplus \mathbb{F} = (E \cup F, h)$ *donde* h *esta definida así:*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & si\ x \in E, \\ g(x), & si\ x \in F \end{cases}$$

además $\mu_1(x) = x, \ \forall x \in E$ *y* $\mu_2(y) = y, \ \forall y \in F$*.*

ii) Si $\mathbb{E} \cap \mathbb{F} \neq \emptyset$ *se define de la siguiente manera:* $\mathbb{E} \bigoplus \mathbb{F} = (E \times \{0\} \cup F \times \{1\}, h)$*, donde para todo* $x \in E$ *y para todo* $y \in F$*se tiene que* $h(x, 0) = (f(x), 0)$ *y* $h(y, 1) = (g(y), 1)$*, además* $\mu_1(x) = (x, 0), \ \forall x \in E$ *y* $\mu_2(y) = (y, 1), \ \forall y \in F$*.*

Ejemplos

Ejemplo 12. Calcular $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Solución.
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$
$f = s \times s$ actúa como se aprecia en la figura 2.7:

Figura 2.7: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 13. Calcular $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

Solución.

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}$

$f = s \times s$ actúa de la siguiente manera:

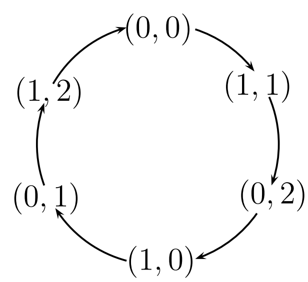


Figura 2.8: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

Ejemplo 14. Calcular $\mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2$.

Solución.

$E = \mathbb{Z}_2 \times \{0\} \cup \mathbb{Z}_2 \times \{1\} = \{(0,0),(1,0)\},\ \{(0,1),(1,1)\}$

así $\mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2 = (E, f)$ donde $f : E \longrightarrow E$ actúa de la siguiente manera:

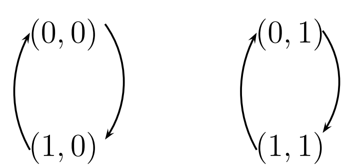


Figura 2.9: $\mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2$.

Observando las gráficas de los ejemplos 12, 13 y 14 nos podemos dar cuenta que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2$. Para no pensar que esto es general el lector debe comprobar que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ (ejemplo 14) no es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_3$.

Estas definiciones de suma y producto directo las podemos ampliar para una colección de sistemas dinámicos discretos:

Definición 14. *Sea* $\mathbb{E}_i = \{(E_i, f_i)\}_{i \in I}$ *una colección de sistemas dinámicos discretos se define el Producto directo como:*

$$\prod \mathbb{E}_i = \prod_{i \in I} (E_i, f_i) = \left(\prod E_i, f_i \right)$$

donde f *esta definida por*

$$f(x_i) = (f_i(x_i))_{i \in I}$$

para cada $x = (x_i)_{i \in I} \ \in \prod E_i$.

Definición 15. *Sea* $\mathbb{E}_i = \{(E_i, f_i)\}_{i \in I}$ *una colección de sistemas dinámicos discretos se define la suma directa así:*

$$\bigoplus \mathbb{E}_{i \in I} = \bigoplus (E_i, f_i)_{i \in I} = \left(\bigcup E_i \times \{i\}, f \right)$$

donde $f(x_i, i) = (f_i(x), i)$ *con* $x \in E_i$.

Nótese que si los E_i son disjuntos $\bigoplus E_i \cong (\bigcup E_i, f)$ donde para cada $x \in A_i$, $f(x) = f_i(x)$.

Las siguientes dos propiedades son propiedades universales para el producto directo y la suma directa de sistemas dinámicos discretos, solo trabajaremos con dos sistemas, pero se pueden generalizar para una colección de sistemas dinámicos discretos:

Proposición 2.17. *Sean* $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ *y* $\mathbb{H}$ *sistemas dinámicos discretos y* $\rho_1 : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{E}$, $\rho_2 : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{F}$, *morfismos entonces existe un único morfismo* $\Gamma : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{E} \times \mathbb{F}$, *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{E} & \\
\mathbb{E}\times\mathbb{F} \arrow[u, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"] & \mathbb{H} \arrow[ul, "\rho_1"'] \arrow[l, dashed, "\Gamma"] \arrow[dl, "\rho_2"] \\
\mathbb{F} &
\end{tikzcd}
$$

es decir que $\pi_1\Gamma = \rho_1$ *y* $\pi_2\Gamma = \rho_2$.

Demostración. Sea $\Gamma(d) = (\rho_1(d), \rho_2(d))$, pars todo d, $d \in H$.

Veamos que $\Gamma h = (f \times g)\Gamma$, $\forall d \in H$.

$\Gamma h(d) = (\rho_1(h(d)), \rho_2(h(d)))$, tenemos que $\rho_1 h = f\rho_1$ y $\rho_2 h = g\rho_2$ puesto que ρ_1 y ρ_2 son morfismos por lo tanto se tiene que $(\rho_1(h(d)), \rho_2(h(d))) = (f\rho_1(d), g\rho_2(d))) = (f \times g)(\rho_1(d), \rho_2(d))$ (esto es por la Definición 1 del Capítulo 1) luego tendremos que $(f \times g)(\rho_1(d), \rho_2(d)) = (f \times g)\Gamma(d)$, por lo tanto Γ es morfismo. $\square$

Proposición 2.18. *Sean* $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ *y* $\mathbb{H}$ *sistemas dinámicos discretos, si* $\eta_1 : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{H}$, $\eta_2 : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{H}$ *morfismos entonces existe un único morfismo* $\Gamma : \mathbb{E} \bigoplus \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{H}$, *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \arrow[d, "\mu_1"] \arrow[dr, "\eta_1"] & \\
\mathbb{E}\bigoplus\mathbb{F} \arrow[r, dashed, "\Gamma"] & \mathbb{H} \\
\mathbb{F} \arrow[u, "\mu_2"] \arrow[ur, "\eta_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

es decir que $\Gamma\mu_1 = \eta_1$ *y* $\Gamma\mu_2 = \eta_2$.

Demostración. Es similar a la de la Proposición 2.17. $\square$

A continuación nos haremos una pregunta referente a lo que hemos venido trabajando en este capítulo y que es de gran importancia: dados dos sistemas dinámicos discretos $\mathbb{E} = (E, f)$ y $\mathbb{F} = (F, g)$, $A \subseteq E$, $\Psi : A \longrightarrow F$ ¿existe una extensión de Ψ tal que sea morfismo? en otras palabras existe una función $\Gamma : E \longrightarrow F$ morfismo, tal que $\Gamma \downarrow_A = \Psi$ ¿si existe es único?

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 15. $f : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_3, \quad f(n) = n + 1,\ n \in \mathbb{Z}_6$, además sea $A = \{1\}$

$\Psi : A \longrightarrow Z_3,\ \Psi(1) = 2.$

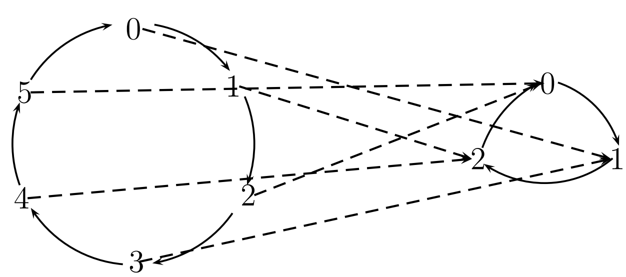


Figura 2.10: $\Gamma : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_3$.

En este ejemplo vemos que el morfismo existe, ¿tendrá algo que ver que el máximo común divisor entre 6 y 3 es diferente de 1 y que las funciones sean biyecciones? Podríamos pensar que entre $(\mathbb{Z}_n, f)$ y $(\mathbb{Z}_m, f)$ existe el morfismo siempre y cuando que m y n no sean primos relativos y que las funciones sean biyecciones y claro, para que Γ sea función el dominio debe ser mayor o igual que el recorrido.

Por ahora dejamos la inquietud pero en el capítulo 4 trabajaremos para dar las condiciones suficientes y necesarias para que en ciertos casos el morfismo exista.

2.5. Ejercicios

Las demostraciones de las siguientes proposiciones las dejamos al lector.

Proposición 2.19. *Sean* $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ *sistemas dinámicos discretos, se tiene que:*

i) $\mathbb{N} \bigoplus \mathbb{N} \cong (\mathbb{N}, 2n)$;

ii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{N}$;

iii) $\mathbb{E} \bigoplus \mathbb{F} \cong \mathbb{F} \bigoplus \mathbb{E}$;

iv) $\mathbb{E} \times \mathbb{F} \cong \mathbb{F} \times \mathbb{E}$.

Proposición 2.20. *Sean* $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{E}'$ *y* $\mathbb{F}'$ *sistemas dinámicos discretos, si* $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}'$ *y* $\mathbb{F} \cong \mathbb{F}'$ *entonces* $\mathbb{E} \times \mathbb{F} \cong \mathbb{E}' \times \mathbb{F}'$.

Proposición 2.21. *Sea* $\mathbb{E} = (E, f)$ *un sistema dinámico discreto,* $\{A_i\}_{i \in I}$ *una partición de* $CI(\mathbb{E})$, *si* $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ *entonces* $\bigoplus (A_i, f \downarrow_{A_i}) = \mathbb{E}$.

Capítulo 3

Conexidad

Intuitivamente ser conexo significa estar formado por una solo pieza; en topología este concepto es uno de los que se asimila más fácilmente, allí se define basado en los conjuntos abiertos; en este capítulo pretendemos ver la conexidad de los sistemas dinámicos discretos basándonos en los conjuntos invariantes.

Definición 16. *Sea $\mathbb{E}$ un sistema dinámico discreto, $\mathbb{E}$ es* ***conexo*** *si y sólo si no hay en $\mathbb{E}$ conjuntos invariantes no vacíos disjuntos, es decir si $A, B \in CI^*(\mathbb{E})$ entonces $A \cap B \neq \emptyset$.*

De la anterior definición podemos decir que en un sistema dinámico discreto $\mathbb{E}$ conexo, si A y B son conjuntos invariantes de $\mathbb{E}$ y $A \cap B = \emptyset$ entonces $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$; además el sistema dinámico $(\vec{x}, f)$ siempre es conexo.

La definición de conexidad se puede ver en términos de las órbitas de los elementos de un sistema dinámico discreto $\mathbb{E}$ de la siguiente manera :

Proposición 3.1. *Sea $\mathbb{E}$ un sistema dinámico discreto, $\mathbb{E}$ es* ***conexo*** *si y solo si $\forall x, y \in E,\ \vec{x} \cap \vec{y} \neq \emptyset$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Por definición de órbita tenemos que $\vec{x}, \vec{y} \in CI(\mathbb{E})$, como $\mathbb{E}$ es conexo entonces $\forall x, y \in E$ se tiene que $\vec{x} \cap \vec{y} \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$) Sean $A, B \in CI^*(\mathbb{E})$. Tomemos $x \in A$ y $y \in B$, por la hipótesis tenemos que $\vec{x} \cap \vec{y} \neq \emptyset$ entonces $A \cap B \neq \emptyset$, por tanto $\mathbb{E}$ es conexo.

$\square$

En el Capítulo 2 vimos algunos ejemplos de sistemas dinámicos discretos como $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_n$, una propiedad que no se mencionó es que estos tres sistemas dinámicos bajo la función "siguiente" siempre son conexos.

Ejemplo 16. Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto, donde $E = \mathbb{Z}_7$ y $f(x) = x^4 + 3$. Analizar la conexidad de $\mathbb{E}$.

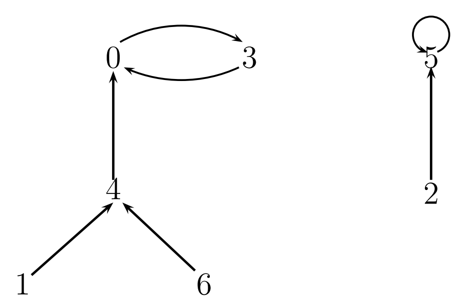


Figura 3.1: $(\mathbb{Z}_7, f)$, $f(x) = x^4 + 3$.

Como podemos observar en la Figura 3.1 los conjuntos $A = \{0, 1, 3, 4, 6\}$ y $B = \{2, 5\}$ son conjuntos invariantes puesto que $f[A] \subset A$ y $f[B] \subset B$; pero $A \cap B = \emptyset$ por lo tanto $\mathbb{E}$ es no conexo.

Ejemplo 17. Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto, donde $E = \mathbb{Z}_7$ y $f(x) = x^3 + 3$. Analizar la conexidad de $\mathbb{E}$.

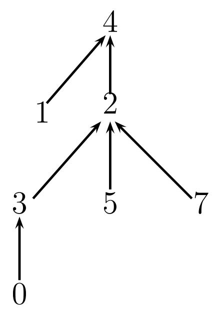
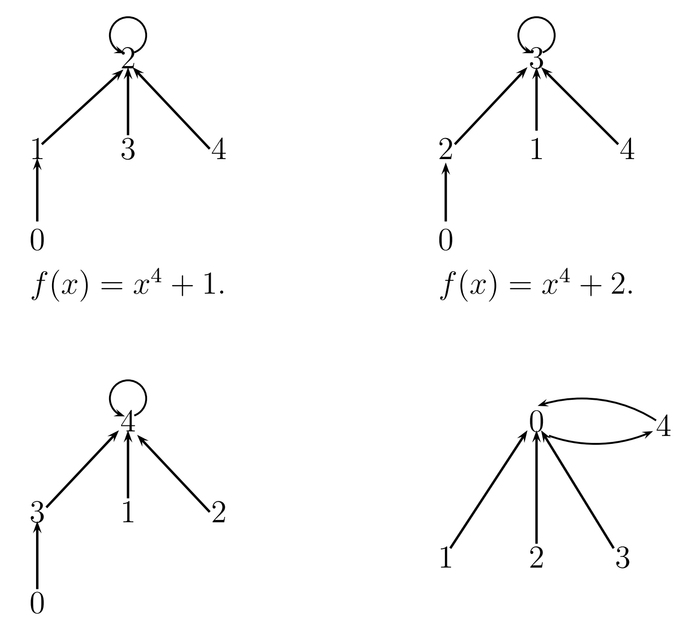


Figura 3.2: $(\mathbb{Z}_7, f),\ f(x) = x^3 + 3$.

Como podemos ver en la Figura 3.2, para cualquier par de conjuntos invariantes no vacíos de $\mathbb{E}$, su intersección es no vacía, por tanto este sistema es conexo.

Ejemplo 18. Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto, donde $E = \mathbb{Z}_5$ y $f(n) = n^4 + a,\ a \neq 0$. Analizar la conexidad de $\mathbb{E}$, cuando a toma los valores de 1, 2, 3 y 4.



$f(x) = x^4 + 1$. $f(x) = x^4 + 2$.

$f(x) = x^4 + 3$. $f(x) = x^4 + 4$.

Figura 3.3: $(\mathbb{Z}_5, f),\ f(x) = x^4 + a$.

Como se ve en la Figura 3.3 para cualquier par de conjuntos invariantes de $\mathbb{E}$, no vacíos la intersección es no vacía, por lo tanto $\mathbb{E}$ siempre es conexo; además cuando a toma el valor de 1, 2 o 3, estas estructuras son isomorfas.

¿En cualquier sistema dinámico discreto $\mathbb{E} = (E, f)$, donde f es biyección y $\mathbb{E}$ es conexo, se tiene que el único conjunto fuertemente invariante no vacío de $\mathbb{E}$ es E?

En el Ejemplo 11 del Capítulo 2 se trabajó con el sistema dinámico discreto conexo $\mathbb{E} = (\mathbb{N}, f)$, donde $f = [|\frac{n}{2}|]$, en esté ejemplo el único CFI finito diferente de vacío es el conjunto cuyo único elemento es el cero, sin embargo hay CFI no vacíos diferentes de E pero infinitos, por ejemplo $\{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$, la siguiente propiedad generaliza este resultado.

Proposición 3.2. *Si $\mathbb{E}$ es un sistema dinámico discreto conexo entonces a lo más hay un conjunto finito fuertemente invariante no vacío.*

Demostración. Supongamos que existen dos conjuntos finitos fuertemente invariantes.

Sean $A, B \in CFI^*(\mathbb{E}),\ A \neq B$, entonces $f[A] = A$ y $f[B] = B$, como A y B son conjuntos finitos, por la proposición 2.9 del capítulo 2, $f_{\downarrow A}$ y $f_{\downarrow B}$ son biyecciones sobre A y B respectivamente, por tanto $f[A - B] = f[A] - f[B] = A - B$

Tendremos entonces que $A - B \in CFI(\mathbb{E})$, luego $A - B \in CFI(\mathbb{E}),\ A \in CFI(\mathbb{E})$, pero $(A - B) \cap B = \emptyset$. Absurdo puesto que $\mathbb{E}$ es conexo; entonces a lo más hay un $CFI^*(\mathbb{E})$ finito. $\square$

3.1. Funciones uno a uno pero no sobre

Lema 3.1. *Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto, si f es uno a uno y $x_o \in E - f[E]$ entonces para todo y en E se tiene que $\vec{y} - \vec{x}_0 \in CI(\mathbb{E})$.*

Demostración. Por la definición de órbita y por la Proposición 2.1 del Capítulo 2 se tiene que $\vec{x}_0 \cup \vec{y} \in CI(\mathbb{E})$, además por teoría de conjuntos tenemos que:

$$\vec{x}_0 \cup \vec{y} = (\vec{x}_0 - \vec{y}) \cap (\vec{x}_0 \cap \vec{y}) \cup (\vec{y} - \vec{x}_0)$$

supongamos que $\vec{y} - \vec{x}_0 \notin CI$ de $\mathbb{E}$, es decir $f[\vec{y} - \vec{x}_0] \nsubseteq \vec{y} - \vec{x}_0$ por lo tanto se tendría que:

$$f[\vec{y} - \vec{x}_0] \cap (\vec{x}_0 - \vec{y}) \neq \emptyset, \ \vee, \ f[\vec{y} - \vec{x}_0] \cap (\vec{x}_0 \cap \vec{y}) \neq \emptyset$$

i) Si $f[\vec{y} - \vec{x}_0] \cap (\vec{x}_0 - \vec{y}) \neq \emptyset$ entonces $\exists y \in (\vec{y} - \vec{x}_0)$ tal que$f(y) \in (\vec{x}_0 - \vec{y})$ es decir que $y \in \vec{y}$ y $f(y) \notin \vec{y}$ imposible.

ii) Si $f[\vec{y} - \vec{x}_0] \cap (\vec{x}_0 \cap \vec{y}) \neq \emptyset$ entonces existe $x \in (\vec{y} - \vec{x}_0)$ tal que $f(x) \in (\vec{x}_0 \cap \vec{y})$, es decir que $f(x) \in \vec{x}_0$ y $f(x) \in \vec{y}$.

   Si $f(x) \notin f[\vec{x}_0]$ entonces $f(x) = x_0$ (esto es por la Proposición 2.7 del Capítulo 2), pero esto no puede ser porque contradice que $x_0 \notin f[E]$, por lo tanto $f(x) \in f[\vec{x}_0]$, pero $x \notin \vec{x}_0$, lo cual implicaría que f no sea uno a uno.

por lo tanto de i) y ii) se tiene que $\vec{y} - \vec{x}_0 \in CI(\mathbb{E})$. □

Proposición 3.3. *Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto conexo, si f es uno a uno pero no sobre existe un único $x_0 \in E - f[E]$ con $\vec{x}_0 = E$.*

Demostración. Como f no es sobre entonces existe $x_0 \in E - f(E)$. Veamos que $\vec{x}_0 = E$.

i) Por la definición de órbita tenemos que $\vec{x}_0 \subseteq E$.

ii) Como $\mathbb{E}$ es conexo y por el Lema 3.1 tenemos que $\forall y \in E, \ \vec{y} - \vec{x}_0 = \emptyset$ (ya que $\vec{y} - \vec{x}_0$ es un CI disjunto de $\vec{x}_0$) entonces $y \in \vec{x}_0$, es decir que $E \subseteq \vec{x}_0$.

Luego de i) y ii) tenemos que $E = \vec{x}_0$.

Veamos que es x_0 es único: supongamos que existe $y_0 \in E - f[E]$, como $E = \vec{x}_0$ entonces $y_0 \in \vec{x}_0 - f[\vec{x}_0]$ pero por la Proposición 2.7 del Capítulo 2 se tiene que $y_0 = x_0$. □

Proposición 3.4. *Sean* $\mathbb{E} = (E, f)$ *y* $\mathbb{F} = (F, g)$ *sistemas dinámicos discretos,* $\Gamma : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ *un morfismo; si* $\mathbb{E}$ *es conexo entonces* $\mathbb{G} = (\Gamma[E], g)$ *es un sistema dinámico discreto conexo.*

Demostración. Sean $A,\ B \in CI^*(\mathbb{G})$ entonces por la Proposición 2.14 del Capítulo 2 tenemos que:
$\Gamma^{-1}[A]$ y $\Gamma^{-1}[B]\ \in CI(\mathbb{E})$ no vacíos; como $\mathbb{E}$ es conexo entonces

$$\Gamma^{-1}[A] \cap \Gamma^{-1}[B] \neq \emptyset$$

como la función inversa respeta operaciones tenemos:

$$\Gamma^{-1}[A \cap B] \neq \emptyset$$

luego existe $z \in E$ tal que $\Gamma f[z] \in A \cap B$, es decir que $A \cap B \neq \emptyset$, por lo tanto $\mathbb{G}$ es conexo. □

Podríamos llegar a pensar que la suma y el producto directo de sistemas dinámicos discretos conexos es conexo respectivamente, pero la manera como se define la suma directa en los sistemas dinámicos discretos, (Definición 15 del Capítulo 2) es imposible que sea conexa; mientras que el producto directo de sistemas dinámicos discretos conexos no necesariamente es conexo, esto se puede ver en los Ejemplos 12 y 13 del Capítulo 2, recordemos que el sistema dinámico discreto $\mathbb{Z}_n$ siempre es conexo, pero $\mathbb{E} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no es conexo, mientras que $\mathbb{E} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ es conexo.

Definición 17. *Sea* $\mathbb{E} = (E, f)$ *un sistema dinámico discreto,* $A \in CI(\mathbb{E})$*,* A *es conexo si el sistema dinámico discreto* $\mathbb{A} = (A, f\downarrow_A)$ *es conexo.*

Proposición 3.5. *Sea $\mathbb{E}$ un sistema dinámico discreto conexo, si $A \in CI(\mathbb{E})$ entonces A es conexo.*

Corolario 3.1. *Sea $\mathbb{E}$ un sistema dinámico discreto si $A, B \in CI^*(\mathbb{E})$ entonces $A \cap B$ es conexo.*

En topología la intersección de dos conexos sólo es conexa en algunos espacios topológicos, en los sistemas dinámicos discretos la intersección de dos conexos no vacíos siempre es conexa. Para la unión se tiene el mismo resultado que en topología.

Proposición 3.6. *Sean $\mathbb{E}$ un sistema dinámico discreto, $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos invariantes conexos de $\mathbb{E}$, si $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ entonces se tiene que $\bigcup_{i\in I} A_i$ es conexo.*

Demostración. Sean $x, y \in \bigcup_{i\in I} A_i$, luego existen A_i, A_j conjuntos invariantes conexos tales que $x \in A_i$ y $y \in A_j$, como $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ existe $u \in \bigcap_{i\in I} A_i$ además como A_i, A_j son conjuntos invariantes conexos, se tiene que $\vec{x} \cap \vec{u} \neq \emptyset$, y $\vec{y} \cap \vec{u} \neq \emptyset$, es decir que tanto existe $u_0 \in \vec{x} \cap \vec{u}$ y $u_1 \in \vec{y} \cap \vec{u}$; por la definición de órbita tenemos que:

$$\vec{u}_0 \subseteq \vec{x} \cap \vec{u} \text{ y } \vec{u}_1 \subseteq \vec{y} \cap \vec{u}, \tag{3.1}$$

luego obtenemos que $u_0, u_1 \in \vec{u}$ entonces $\vec{u}_0 \cap \vec{u}_1 \neq \emptyset$, o sea que existe $z \in \vec{u}_0 \cap \vec{u}_1$, es decir que $z \in \vec{u}_0$ y $z \in \vec{u}_1$, esto significa que $z \in \vec{x}$ y $z \in \vec{y}$ (por (3.1)), por tanto $z \in \vec{x} \cap \vec{y}$, es decir que $\vec{x} \cap \vec{y} \neq \emptyset$, luego $\bigcup_{i\in I} A_i$ es conexa. □

Definición 18. *Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto, $x \in E$. La* ***componente conexa*** *de x es el mayor conjunto conexo que contiene a x, (que existe por la Proposición 3.6).*

Proposición 3.7. *Todo sistema dinámico discreto $\mathbb{E}$, es la suma directa de sus componentes conexas.*

Demostración. Veamos que dos componentes conexas de un sistema dinámico discreto son iguales o son disjuntas. Sean C_x y C_y componentes conexas, si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ entonces por la Proposición 3.6 tenemos que $C_x \cup C_y$ es conexo, por la definición de componente tenemos que $C_x = C_y$.

Luego se tiene que las componentes conexas de $\mathbb{E}$ forman una partición de E, sea $\{A_i\}_{i \in I}$ esta partición, sea $\mathbb{A}_i = (A_i, f_i \downarrow_A)$ por la definición de suma directa (Definición 15 del Capítulo 2) tenemos que $\bigoplus \mathbb{A}_i = \mathbb{E}$. $\square$

Capítulo 4

Inducción matemática

Hay dos tipos fundamentales de sistemas dinámicos discretos conexos: cuando f es uno a uno y no sobre se obtiene una única estructura que es isomorfa a los naturales con la función siguiente; cuando f es uno a uno y sobre se obtienen los ciclos que son isomorfos a $\mathbb{Z}_n$ y el propio $\mathbb{Z}$, es decir los mismos enteros. Estos dos tipos de sistemas cumplen alguna forma de inducción matemática.

La órbita de un elemento es el menor conjunto invariante que contiene al elemento, es claro que si un CI contiene a x_0 entonces contiene a $\vec{x}_0$. Este resultado lleva a que se cumpla de alguna forma la inducción matemática, la cual enunciamos a continuación.

Proposición 4.1. ***Inducción matemática para las órbitas***
Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ *un sistema dinámico discreto,* $x_0 \in E, \quad A \subseteq E$ *si se tiene que:*

i) $x_0 \in A$*;*

ii) $x \in A \Longrightarrow f(x) \in A$*;*

entonces $\vec{x}_0 \subseteq A$*.*

Demostración. De la condición ii), por la Proposición 2.3 del Capítulo 2 tenemos que $A \in CI(\mathbb{E})$. Por la condición i) $x_0 \in A$ y por la definición de órbita, $\vec{x}_0$ es el $CI(\mathbb{E})$ más pequeño que contiene a x_0, por lo tanto $\vec{x}_0 \subseteq A$. $\square$

La siguiente proposición es una aplicación inmediata del principio de inducción para las órbitas de un sistema dinámico (Proposición 4.1), realmente otra versión de éste.

Proposición 4.2. *Sean $\mathbb{E} = (E, f), \mathbb{F} = (F, g)$ sistemas dinámicos discretos, si $\Gamma : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ es un morfismo tal que $\Gamma(x_0)$ es punto fijo de g, es decir que $g\Gamma(x_0) = \Gamma(x_0)$ entonces $\forall x \in \vec{x}_0$ se tiene que $\Gamma(x) = \Gamma(x_0)$.*

Demostración. Sea $A = \{x \in \vec{x}_0 \mid \Gamma(x) = \Gamma(x_0)\}$

i) $x_0 \in A$ puesto que $\Gamma(x_0) = \Gamma(x_0)$.

ii) Veamos que si $x \in A$ entonces $f(x) \in A$.

Como Γ es morfismo se tiene que $\Gamma f(x) = g\Gamma(x)$, pero por hipótesis tenemos que $x \in A$ entonces $\Gamma f(x) = g\Gamma(x_0)$, pero como por hipótesis tenemos que $g\Gamma(x_0) = \Gamma(x_0)$ entonces $\Gamma f(x) = \Gamma(x_0)$ por lo tanto $f(x) \in A$.

de i) y ii) se concluye que se cumple $\forall x \in \vec{x}_0$, $\Gamma(x) = \Gamma(x_0)$. $\square$

De la inducción matemática surge las definiciones recursivas, esto es, definir para los elementos de un conjunto en función de uno de ellos y de una ley que determina el siguiente en términos del anterior o los anteriores. Por ejemplo, el concepto de potenciación lo podemos definir recursivamente de la siguiente manera, para todo $a \in \mathbb{R}$ se define: $a^1 = a$ y para todo $n \geq 2$, $a^n = a^{n-1}a$, es decir que $a^2 = a^{2-1}a = a^1a = aa, a^3 = a^{3-1}a = a^2a = aaa$, así sucesivamente. Otro ejemplo de definición recursiva es el factorial de un número natural, el cual es el producto del mismo número por todos sus anteriores, se define $0! =: 1$, $1! = 1(1-1)! = 1 * 0! = 1 * 1 = 1$, $2! = 2(2-1)! = 2 * 1! = 2$, $3! = 3(3-1)! = 3 * 2! = 6, \ldots n! = n(n-1)!$.

Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos las definiciones recursivas son formas de ampliar una función a un morfismo (Proposición 4.3). La Proposición 3.3 del Capítulo 3 se refiere a unos sistemas dinámicos conexos $\mathbb{E} = (E, f)$ muy especiales donde f es uno a uno pero no sobre, en este tipo de estructuras la posibilidad de extender una función sobre el único $x_0 \in E - f[E]$ se garantiza por la siguiente proposición.

Proposición 4.3. *Sean $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico conexo, f uno a uno y no sobre y $x_0 \in E - f[E]$. Para todo sistema dinámico discreto $\mathbb{F} = (F, g)$ y para todo y_0 en F existe un único morfismo $\Gamma : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ tal que $\Gamma(x_0) = y_0$.*

Demostración. Sea $\Gamma = \overrightarrow{(x_0, y_0)}$ la órbita de (x_0, y_0) en el sistema dinámico discreto $\mathbb{E}\times\mathbb{F}$, veamos que Γ es una función de E en F, para ello definamos el siguiente conjunto:

$$A = \{x \in E \mid \forall y_1, y_2 \in F,\ (x, y_1) \in \Gamma \wedge (x, y_2) \in \Gamma \Longrightarrow y_1 = y_2\}$$

i) Demostremos que $x_0 \in A$, nótese que $(x_0, y) \in \Gamma$ si y solo si, $y = y_0$ ó existe $(x, z) \in \Gamma$ tal que $(f \times g)(x, z) = (x_0, y)$, es decir $f(x) = x_0$ y $y = g(z)$ pero esto no se puede dar puesto que $x_0 \in E - f[E]$ por lo tanto $y = y_0$.

   Ahora sea $(x_0, y_1) \in \Gamma$ y $(x_0, y_2) \in \Gamma$, por lo anterior tenemos que $y_1 = y_0$ y $y_2 = y_0$, por lo tanto se tiene que $y_1 = y_2$; por lo tanto se tiene que $x_0 \in A$.

ii) Veamos que si $x \in A$ entonces $f(x) \in A$.

   Sea $(f(x), y_1) \in \Gamma$ y $(f(x), y_2) \in \Gamma$, como $f(x) \neq x_0$ entonces existen $z_1, z_2 \in F$ tal que $(f(x), y_1) = (f(x), g(z_1))$ y $(f(x), y_2) = (f(x), g(z_2))$ donde $z_1, z_2 \in F$; como f es uno a uno se tiene que:

   $(x, z_1) \in \Gamma$ y $(x, z_2) \in \Gamma$, como $x \in A$ entonces $z_1 = z_2 \Longrightarrow g(z_1) = g(z_2) \Longrightarrow y_1 = y_2$. por lo tanto $f(x) \in A$.

de i) y ii) se tiene que Γ esta bien definida $\forall x \in E$; es decir Γ es una función y siempre que $(x, y) \in \Gamma$ decimos que $\Gamma(x) = y$.

Por la construcción Γ es morfismo: si $(x, f(x)) \in \Gamma$, aplicando $f \times g$ tenemos $(f(x), g(\Gamma(x))) \in \Gamma$, es decir que $\Gamma f(x) = g(\Gamma(x))$.

Ahora demostremos que Γ es único, para ello supongamos que existe $\Lambda : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ morfismo tal que $\Lambda(x_0) = y_0$.

Sea $A = \{x \in E \mid \Lambda(x) = \Gamma(x)\}$

i) $x_0 \in A$, puesto que $\Lambda(x_0) = y_0$ y $\Gamma(x_0) = y_0$, por lo tanto $\Lambda(x_0) = \Gamma(x_0)$.

ii) Veamos que cuando $x \in A$ se tiene que $f(x) \in A$.

$x \in A \Longrightarrow \Lambda(x) = \Gamma(x) \Longrightarrow g\Lambda(x) = g\Gamma(x)$ por ser Λ y Γ morfismos se tiene que: $\Lambda f(x) = \Gamma f(x)$

de i) y ii) tenemos que $\Gamma(x)$ es único. □

Corolario 4.1. *Sean $\mathbb{E} = (E, f)$ y $\mathbb{F} = (F, g)$ sistemas dinámicos discretos conexos tal que f y g son uno a uno, pero no sobre, entonces $\mathbb{E} \cong \mathbb{F}$, además el isomorfismo es único.*

Los naturales con la función siguiente de Peano, es uno a uno pero no sobre, entonces se tiene que cualquier estructura $\mathbb{E} = (E, f)$ conexa, tal que f sea uno a uno pero no sobre es isomorfa a los naturales con la función siguiente, es decir que $(\mathbb{N}, s) \cong (E, f)$; al restringir el recorrido de Γ a la órbita de x_0 se tiene que $\Gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \vec{x_0}$ es sobre. Además cuando la órbita de x_0 es infinita $\Gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \vec{x_0}$ es uno a uno, por lo tanto para cualquier x que pertenezca a la órbita , la imagen de x es diferente de x_0.

Proposición 4.4. *Sea $(\vec{x_0}, f)$ un sistema dinámico discreto, si $\vec{x_0}$ es infinito, entonces para todo $x \in \vec{x_0}$, $f(x) \neq x_0$.*

La siguiente proposición nos garantizará que en un sistema dinámico discreto $\mathbb{E} = (E, f)$ conexo, con f uno a uno pero no sobre cumple con los *axiomas de Peano.*

Proposición 4.5. *Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto conexo, f uno a uno y no sobre , x_0 el único elemento de $E - f[E]$ se tiene que:*

1. $x_0 \in E$
2. $\forall x \in E,\ x \neq x_0\ \exists y$ *tal que* $f(y) = x$.
3. *Si* $x,\ y \in E;\quad f(x) = f(y)$ *entonces* $x = y$.
4. *Sea* $A \subseteq E$ *tal que:*

   i) $x_0 \in A$;

   ii) $x \in E,\ \forall a \in A$ *se tiene que* $f[a] \in A$

   entonces $A = E$.

Proposición 4.6. *Los items 1, 2 y 3 están en la hipótesis, el cuarto item es la proposición 4.1 donde* $\mathbb{E} = \vec{x}_0$.

$\mathbb{N}$ cumple la propiedad de ser libre dentro de los sistemas dinámicos discretos sobre un conjunto de un solo elemento, cuando el conjunto tiene varios elementos la propiedad de ser libre la tiene la suma directa de los naturales, para comodidad los elementos de la suma $\bigoplus_{i \in I}(\mathbb{N}, s)$ los notaremos (n, i), entonces se cumple la siguiente propiedad:

Proposición 4.7. *Dada una función* $e : I \longrightarrow E$, *en un sistema dinámico discreto* $\mathbb{E} = (E, f)$, *existe un único morfismo* $\Gamma : \bigoplus_{i \in I}(\mathbb{N}, s) \longrightarrow (E, f)$ *tal que* $\Gamma(0, i) = e(i)$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "e"] \arrow[d] & (E,f) \\ \bigoplus_{i\in I}(\mathbb{N},s) \arrow[ur, "\Gamma"] & \end{tikzcd}$$

Este morfismo ésta definido por $\Gamma(n,i) = f^n(e(i))$. *Además* $\bigoplus(\mathbb{N},s)$ *es el único sistema dinámico que cumple esta propiedad salvo isomorfismos.*

La composición de una función consigo misma de un elemento x , la podemos ver como una definición recursiva, la cual nos ayudara a definir los morfismos que hay entre dos sistemas dinámicos siempre y cuando estos existan; al conjunto de estas composiciones la llamaremos las iteraciones de x, bajo la función f, y se define:

$$f^0(x) = x$$
$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f(x)}_{n \text{ veces}}$$

En este sentido podemos ver la órbita finita de un elemento como el conjunto de todas sus iteraciones, es decir:

$$\vec{x} = \{f^n(x), \mid x \in \mathbb{N}\} = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x)\}$$

y se tiene el morfismo natural $\Gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \vec{x}_0$, definido por $\Gamma(n) = f^n(x_0)$.

En la siguiente proposición recopilamos lo que hemos trabajado hasta el momento. Por ello su demostración se omite.

Proposición 4.8. *En un sistema dinámico discreto* $\mathbb{E} = (E,f)$, *los siguientes enunciados son equivalente.*

i) Existe un $x_0 \in E$ *tal que* $E = \vec{x}_0$ *y* E *es infinito.*

ii) $\mathbb{E}$ *es conexo,* f *es uno a uno pero no sobre.*

iii) $(E, f) \cong (\mathbb{N}, s)$.

iv) *existe* $x_0 \in E - f[E]$ *tal que para todo sistema dinámico discreto* $\mathbb{F} = (F, g)$*, para todo* y_0 *en* F *existe un único morfismo* $\Gamma : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ *tal que* $\Gamma(x_0) = y_0$*.*

4.1. Ciclos

Definición 19. *Se llamara un* ***ciclo*** *a un sistema dinámico discreto* $\mathbb{E} = (E, f)$ *conexo donde* f *es biyección.*

Proposición 4.9. *Si* $\mathbb{E}$ *es un ciclo y existe* $X \in CFI(\mathbb{E})$ *con* $X \neq \emptyset$ *entonces* $X = E$*.*

Demostración. Como $\mathbb{E}$ es un ciclo se tiene que $\mathbb{E}$ es un sistema dinámico discreto conexo, por la Proposición 3.2 del Capítulo 3, tenemos que a lo más existe un conjunto fuertemente invariante diferente de vacío en $\mathbb{E}$, como $X \in CFI(\mathbb{E})$ entonces tenemos que $E = X$. □

Corolario 4.2. ***Principio de inducción matemática***

Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ *un ciclo,* $x_0 \in E$*,* $A \subseteq E$ *si se tiene que:*

i) $x_0 \in A$*;*

ii) $x \in A$ *si y solo si* $f(x) \in A$

entonces $A = E$*.*

Demostración. Por la condición ii) y por la Proposición 2.4, del Capítulo 2 se tiene que $A \in CFI(\mathbb{E})$, por la Proposición 4.9 tenemos que $A = E$. □

Los ciclos se clasifican en finitos e infinitos; en los ciclos finitos los conjuntos fuertemente invariantes coinciden con los conjuntos invariantes, además la órbita de cualquier elemento del ciclo es todo el ciclo. En los ciclos finitos el principio de inducción matemática (Corolario 4.2) se cumple con la condición i) y con la implicación de ii), es decir si $x \in A$ entonces $f(x) \in A$, con esto se garantiza que $A = E$.

Proposición 4.10. *Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto, si $x_0 \in E$ tal que $\vec{x}_0 - f[\vec{x}_0] = \emptyset$ entonces $\vec{x}_0$ es finito y f es biyección de $\vec{x}_0$ en $\vec{x}_0$.*

Demostración. Si $\vec{x}_0$ es infinito se tiene que para todo $x \in \vec{x}_0$, $f(x) \neq x_0$, por lo tanto $\vec{x}_0 \notin f[\vec{x}_0]$ entonces $\vec{x}_0 \neq f[\vec{x}_0]$, es decir que $\vec{x}_0 - f[\vec{x}_0] \neq \emptyset$, absurdo; luego se tiene que $\vec{x}_0$ es finito.

Como $\vec{x}_0$ es finito y es un conjunto fuertemente invariante de $\mathbb{E}$ (ya que $\vec{x}_0 - f[\vec{x}_0] = \emptyset$), entonces por la Proposición 2.9 del Capítulo 2, tenemos que f es una biyección. □

La Proposición 4.10 nos sirve para enunciar la siguiente caracterización de los ciclos finitos.

Proposición 4.11. *Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto conexo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *$\mathbb{E}$ es ciclo finito;*

ii) *para todo x, $x \in E$ se tiene que $\vec{x} \in CFI(\mathbb{E})$;*

iii) *para todo x, $x \in E$ se tiene que $\vec{x} = E$;*

iv) $CFI(\mathbb{E}) = CI(\mathbb{E}) = \{E, \emptyset\}$.

Demostración. **i)⇒ii)** Si $\mathbb{E}$ es ciclo entonces para todo $x \in E$ tenemos que $f \downarrow_{\vec{x}}$ es uno a uno y por tanto biyección de $\vec{x}$ en $f[\vec{x}]$, pero por definición $f[\vec{x}] \subseteq \vec{x}$ y como son conjuntos finitos $f[\vec{x}] = \vec{x}$ luego $\vec{x} \in CFI(\mathbb{E})$.

ii)⇒iii) Sean $x, y \in E$ como $\vec{x}, \vec{y} \in CFI(\mathbb{E})$ entonces por la Proposición 4.10 f es permutación de $\vec{x} \cup \vec{y}$ y siendo así aplicando Proposición 1.3:

$$f[\vec{x} - \vec{y}] = f[\vec{x}] - f[\vec{y}] = \vec{x} - \vec{y}$$

Lo que significa que $(\vec{x} - \vec{y}) \in CFI(\mathbb{E})$, pero por ser $\mathbb{E}$ conexo $(\vec{x} - \vec{y}) = \emptyset$ y se deduce que $y \in \vec{x}$, por tanto $\vec{x} = E$.

iii)⇒iv) Es inmediato.

iv)⇒i) Si $CI(\mathbb{E}) = \{E, \emptyset\}$ para todo $x \in E$ se tiene que $\vec{x} = E$ y también $f(\vec{x}) = E$ así $\vec{x} - f[\vec{x}] = \emptyset$ y podemos aplicar la Proposición 4.10 obteniendo que $\vec{x} = E$ es finito y f es biyección por tanto $\mathbb{E}$ es ciclo finito.

□

Morfismos entre ciclos finitos

Entre los naturales con la función siguiente de Peano y los ciclos finitos de n elementos, dado x_0 un elemento del ciclo, existe un único morfismo Γ, tal que $\Gamma(0) = x_0$, veremos que la imagen inversa de x_0 son los múltiplos del número de elementos del ciclo, es decir $\Gamma^{-1}(x_0) = n\mathbb{N}$, y además que $f^n(x_0) = x_0$,$f^{2n}(x_0) = f^n f^n(x_0) = x_0$, así sucesivamente. Con esto resolveremos para el caso de los ciclos finitos la pregunta planteada en el Capítulo 2 referente a la existencia de un morfismo entre dos sistemas dinámicos discretos.

Proposición 4.12. *Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un ciclo finito de n elementos, para todo $x \in E$ se tiene que:*

i) *n es el menor entero positivo tal que $f^n(x) = x$;*

ii) *$f^k(x) = x$ si y solo si n divide a k.*

Demostración. **i)** Como $\vec{x} = E$ y $\vec{x} \in CFI(\mathbb{E})$ existe $k > 0$ tal que $f^k(x) = x$, k no puede ser menor que $n-1$ pues si así fuera $\{x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\}$ sería un CFI que no está en $\{E, \emptyset\}$. Sea k_0 el menor elemento de A donde $A = \{k > 0 \mid f^k(x) = x\}$, entonces $E = \{x, f(x), \ldots, f^{k_0-1}(x)\}$ y como f es 1-1 entonces $k_0 = n$.

ii) $\Rightarrow$) Si $f^k(x) = x$ con $k > 0$ entonces dividamos k entre n. Tenemos que $k = tn + r$; con $0 \leq r < n$. Como $f^k(x) = x$ entonces $f^{tn+r}(x) = x$ entonces $f^r f^{tn}(x) = x$ y por i) sabemos que $f^{tn}(x) = x$ entonces $f^r(x) = x$, pero como n es el mínimo elemento de A que cumple que $f^k(x) = x$ y $0 \leq r < n$, entonces se debe tener que $r = 0$, o sea que n divide a k.

$\Leftarrow$) Se sigue inmediatamente de i).

$\square$

Corolario 4.3. *Sea E un ciclo finito de n elementos, $f^i(x_0) = f^j(x_0)$, con $i > j$, si y solo si n divide a $i - j$.*

Proposición 4.13. *Sean $\mathbb{E} = (E, f)$ y $\mathbb{F} = (F, g)$ ciclos finitos de n y m elementos respectivamente, si m divide a n y $x_0 \in E$, $y_0 \in F$ entonces $\Gamma : \vec{x}_0 \longrightarrow \vec{y}_0$ definido por:*

$$\Gamma(f^i(x_0)) = g^i(y_0)$$

es morfismo entre $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$, además es el único que envía a x_0 en y_0.

Demostración. veamos que Γ esta bien definida:

si $f^i(x_0) = f^j(x_0)$ por el Corolario 4.3 tenemos que n divide a $i - j$ y como m divide a n entonces m divide a $i - j$ por lo tanto $g^i(y_0) = g^j(y_0)$, que es morfismo es inmediato, la unicidad se demuestra aplicando inducción matemática. $\square$

Proposición 4.14. *Sea* $(\vec{x}_0, f)$ *y* $(\vec{y}_0, g)$ *ciclos finitos con* n *y* m *elementos respectivamente, si existe* $\Gamma : \vec{x}_0 \longrightarrow \vec{y}_0$ *morfismo entonces* m *divide a* n*.*

Demostración. Entre los naturales y la órbita de un elemento de un sistema dinámico existe un único morfismo Γ tal que $\Gamma(0) = x_0$, sea $\Gamma_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \vec{x}_0$ y $\Gamma_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \vec{y}_0$ los morfismos que existen entre los naturales y las órbitas de x_0 y y_0; Γ esta definido de $\vec{x}_0$ en $\vec{y}_0$, es decir $\Gamma : \vec{x}_0 \longrightarrow \vec{y}_0$, como se ve en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{N} \arrow[dl, "\Gamma_1"'] \arrow[dr, "\Gamma_2"] & \\ \vec{x}_0 \arrow[rr, "\Gamma"'] & & \vec{y}_0 \end{tikzcd}$$

tenemos que:

$$\Gamma^{-1}[\vec{x}_0] = \{x \in \mathbb{N} \mid \Gamma_1(x) = x_0\} = n\mathbb{N}$$
$$\Gamma^{-1}[\vec{y}_0] = \{x \in \mathbb{N} \mid \Gamma_2(y) = y_0\} = m\mathbb{N}$$

$\Gamma^{-1}(x_0) \subseteq (\Gamma_1^{-1}\Gamma^{-1})(y_0) = (\Gamma\Gamma_1)^{-1}(y_0) = \Gamma_2(y_0)$ entonces $\Gamma_1^{-1}(x_0) \subseteq \Gamma_2(y_0)$, entonces $n\mathbb{N} \subseteq m\mathbb{N}$ por teoría de conjuntos tenemos que m divide a n. $\square$

Todos los ciclos finitos de igual número de elementos son equivalentes es decir que son isomorfos; además como $\mathbb{Z}_n$ es conexa se tiene que $\mathbb{Z}_n$ es un ciclo finito, por tanto $\mathbb{Z}_n$ es isomorfa a cualquier ciclo de n elementos.

Corolario 4.4. *Sea* C_n *un ciclo finito y* $\mathbb{Z}_n$ *un sistema dinámico discreto entonces* $C_n \cong \mathbb{Z}_n$*.*

En el Capítulo 2, definimos endomorfismo de un sistema dinámico discreto $\mathbb{E} = (E, f)$ como el conjunto de todos los morfismos de E en E, (que notamos $Endo(\mathbb{E})$), además vimos que $\phi(\Gamma) = \Gamma f$ donde Γ es un morfismo, forma un sistema dinámico discreto con $Endo(E)$, es decir que $(Endo(E), \phi)$ es un sistema dinámico discreto, ahora veamos que si E es un ciclo entonces $(Endo(E), \phi)$ es ciclo, esto lo enunciamos a continuación.

Proposición 4.15. *Sea $\mathbb{E}$ un ciclo, $(Endo(\mathbb{E}), \phi)$ es un ciclo isomorfo a $\mathbb{E}$.*

Demostración. Sea $x_0 \in E$, para todo $y \in E$, existe un único morfismo $\Gamma \in Endo(\mathbb{E})$ tal que $\Gamma(x_0) = y$.

1. Si $y = x_0$, entonces $\Gamma = Id$, veamos que es único.

   Sea $\Gamma \in Endo(\mathbb{E})$ tal que $\Gamma(x_0) = x_0$ y $A = \{x \in E \mid \Gamma(x) = x\}$,

   claramente $x_0 \in A$ puesto que $\Gamma(x_0) = x_0$.

   Ahora veamos que $x \in A$ si y solo si $f(x) \in A$,

   i) si $x \in A$ entonces $\Gamma(x) = x$, operando con f (f es biyección puesto que $\mathbb{E}$ es ciclo), tenemos que $f\Gamma(x) = f(x)$, luego por ser Γ morfismo se tiene que $\Gamma f(x) = f(x)$, es decir que $f(x) \in A$.

   ii) Si $f(x) \in A$ entonces $\Gamma f(x) = f(x)$ operando con f^{-1} (f es biyección) tenemos que $\Gamma(x) = x$, es decir que $x \in A$.

2. Supongamos que existe un morfismo $\Gamma \in Endo(\mathbb{E})$ tal que $\Gamma(x_0) = y$, veamos que existe un único $\Gamma' \in Endo(\mathbb{E})$ tal que $\Gamma'(x_0) = f(y)$.

   Sea $\Gamma' = \Gamma f$, entonces $\Gamma'(x_0) = \Gamma f(x_0) = f\Gamma(x_0) = f(y)$.

   Ahora miremos que es único, supongamos que existe $\Gamma''(x_0) = f(y)$, sea $A = \{x \in E \mid \Gamma''(x) = \Gamma f(x)\}$.

   i) Es claro que $x_0 \in A$ ya que $\Gamma''(x_0) = f(y) = f\Gamma(x_0) = \Gamma f(x_0)$.

ii) Tenemos que ver que $x \in A$ si y solo si $f(x) \in A$.

Si $x \in A$ tenemos que $\Gamma''(x) = \Gamma f(x)$ operando con f (f es biyección) tenemos que $\Gamma'' f(x) = \Gamma f(f(x))$, es decir que $f(x) \in A$.

Si $f(x) \in A$ tenemos que $\Gamma'' f(x) = \Gamma f(f(x))$ operando por f^{-1} (f es biyección) tenemos que $\Gamma''(x) = \Gamma f(x)$, es decir $x \in A$.

Sea $\Psi : \mathbb{E} \longrightarrow Endo(\mathbb{E})$ tal que para cada $y \in E$ se tiene que $\Gamma(x_0) = y$.

Es claro que Ψ es biyección, veamos que es morfismo.

$\Psi(y) = \Gamma$ si y solo si $\Gamma(x_0) = y$.

$\Psi(f(y)) = \Gamma'$ si y solo si $\Gamma'(x_0) = f(y) = f(\Gamma(x_0)) = \Gamma f(x_0) = \phi(\Gamma)x_0$ entonces $\Gamma' = \phi\Gamma$.

Por lo tanto Ψ es un morfismo biyectivo entre (E, f) y $(Endo(E), \phi)$, es decir que $(E, f) \cong (Endo(E), \phi)$, ahora como $\mathbb{E}$ es un ciclo entonces se tiene que $(Endo(\mathbb{E}), \phi)$ es un ciclo.

□

Los Endomorfismos de un sistema dinámico discreto $\mathbb{E}$ conmutan, esto lo enunciamos en la siguiente proposición.

Proposición 4.16. *Sea* $\mathbb{E}$ *un sistema dinámico discreto, si* $\Gamma,\ \Delta \in Endo(\mathbb{E})$ *entonces* $\Gamma\Delta = \Delta\Gamma$.

Demostración. Sea $A = \{\Gamma \in Endo(\mathbb{E}) \mid \Delta\Gamma = \Gamma\Delta\}$

i) $A \neq \emptyset$ puesto que $f \in A$.

ii) Veamos que $\Gamma \in A$ si y solo si $\phi(\Gamma) \in A$.

Si $\Gamma \in A$ entonces $\Delta\Gamma = \Gamma\Delta$ operando a ambos lados de la igualdad por f se tiene que $(\Delta\Gamma)f = (\Gamma\Delta)f$, como la composición de funciones es asociativa tenemos que $\Delta(\Gamma f) = \Gamma(\Delta f) = \Gamma(f\Delta)$ ya que Δ es morfismo, luego $\Delta(\Gamma f) = (\Gamma f)\Delta$ por lo tanto $\Gamma f \in A$ es decir que $\phi(\Gamma) \in A$.

Si $\phi(\Gamma) \in A$ entonces por definición de ϕ se tiene que $\Gamma f \in A$ entonces $\Delta(\Gamma f) = (\Gamma f)\Delta$, por ser la composición de funciones tenemos $(\Delta\Gamma)f = (\Gamma f)\Delta = (f\Gamma)\Delta$, ya que Γ es morfismo, por lo tanto $(\Delta\Gamma)f = f(\Gamma\Delta)$ entonces $\Delta\Gamma = \Gamma\Delta$es decir que $\Gamma \in A$.

Por lo tanto tenemos que $\Gamma \in A$ si y solo si $\phi(\Gamma) \in A$

Por i) y ii) se tiene que $A = Endo(\mathbb{E})$. $\square$

4.2. Órbitas finitas

Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto conexo finito, existen dos posibilidades: que f sea biyección o que f no sea uno a uno, cuando f es biyección se habla de ciclos, si f **no** es uno a uno entonces este sistema esta formado por un ciclo y una cola, este ciclo es el único $CFI^*(\mathbb{E})$ que existe en $\mathbb{E}$ y que se enuncio en la Proposición 3.2 del Capítulo 3.

Definición 20. *Sea $\mathbb{E} = (E, f)$ un sistema dinámico discreto conexo finito,donde f no es uno a uno, se llamará **cola** de $\mathbb{E}$ a los $x \in E$ tales que x no pertenece al ciclo de $\mathbb{E}$.*

Definición 21. *En un sistema dinámico discreto un **cuasiciclo** es una órbita finita que no es ciclo.*

Ya vimos cuales son las condiciones suficientes y necesarias para que exista un morfismo entre dos ciclos, veamos ahora que condiciones se necesitan para cuando se trabajan con cuasiciclos.

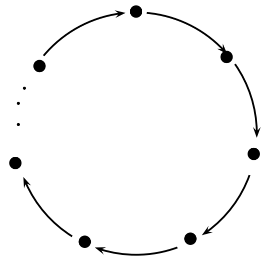


Figura 4.1: Ciclo

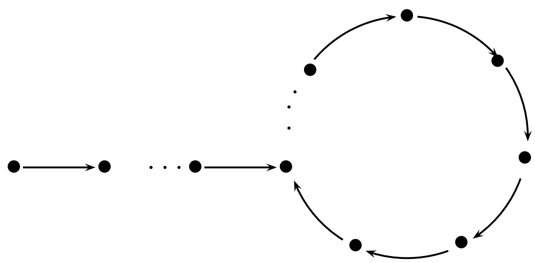


Figura 4.2: Cuasiciclo

Proposición 4.17. *Sea (E, f) es un cuasiciclo con ciclo de m elementos y cola de k elementos $x_0 \in E - f[E]$, $f^i(x_0) = f^j(x_0)$ si y solo si m divide a $i - j$ con $i, j > k$.*

Proposición 4.18. *Sean $(\vec{x}_0, f)$ y $(\vec{y}_0, g)$ dos cuasiciclos, p y q el número de elementos de las colas de $\vec{x}_0$ y $\vec{y}_0$ respectivamente, n y m el número de elementos de los ciclos que contienen $\vec{x}_0$ y $\vec{y}_0$ respectivamente, existe $\Gamma : \vec{x}_0 \longrightarrow \vec{y}_0$ morfismo si y solo si p es mayor que q y m divide a n. Además tal morfismo es único.*

Demostración. Sea $\Gamma : \vec{x}_0 \longrightarrow \vec{y}_0$ definida así: $\Gamma(f^i(x_0)) = g^i(y_0)$. Veamos que esta bien definida: si $f^i(x_0) = f^j(y_0)$ entonces por la Proposición 4.17 tenemos que n divide a $i - j$, con $i, j \geq p$, como m divide a n se tiene que m divide a $i - j$ con $i, j \geq q$ entonces $g^i(y_0) = g^j(y_0)$, por tanto $\Gamma(f^i(x_0)) = \Gamma(f^j(y_0))$. Claramente Γ es morfismo. Supongamos ahora que existe el morfismo $\Delta : \vec{x}_0 \longrightarrow \vec{y}_0$, para que sea morfismo debe cumplirse $\Delta(f^i(x_0)) = g^i(y_0)$. Es claro que $p \geq q$, pues de lo contrario Δ no es función, por la Proposición 4.14 se tiene que m divide a n. Así: $\Gamma = \Delta$. $\square$

Proposición 4.19. *Sea $\mathbb{E} = (\vec{x}_0, f)$ un cuasiciclo, $(Endo(\mathbb{E}), \phi)$ es un cuasiciclo e* *isomorfo a* $\mathbb{E}$*.*

Demostración. La demostración es muy similar a la de la Proposición 4.15, por eso la omitimos. $\square$

Bibliografía

[1] STANLEY, Burris, H.P, Sankappanavar *A course in Universal Algebra.* Springer-Verlag, New York, 1981.

[2] MUÑOS QUEVEDO, Jose M. *Introducción a la teoría de conjuntos.* Bogotá, 1993.

[3] ISAACS Rafael, *Estructuras elementales* En: revista de integración. Departamento de Matemáticas UIS. Vol. 3 No 2. Julio-Diciembre (1985).

[4] ISAACS Rafael, *Documentos sin publicación*, profesor de la escuela de matemáticas.

[5] HOLOMGREN Richard, *A fir ist course in discrete dinamical sistems.* Second edition, New York, Berlin, 1991.