

Aplicabilidad de los sistemas generalizados de un grado de libertad en el análisis de un puente viga cajón en construcción por voladizos sucesivos sometido a sismos verticales al variar la relación de alturas de las dovelas cero y final

José Eleazar Diaz Poveda y León Santiago Suárez Rodríguez

Trabajo de Grado para Optar al Título de Ingeniero Civil

Director

José Miguel Benjumea Royero

PhD. en Ingeniería Civil y Ambiental

Codirector

Gustavo Chio Cho

PhD. en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas

Escuela de Ingeniería Civil

Ingeniería Civil

Bucaramanga

2023

### **Agradecimientos**

A nuestros docentes, que han contribuido todos estos años a nuestra formación profesional

A nuestros compañeros que de alguna u otra forma contribuyeron en nuestra educación

A nuestros padres y familia por su apoyo incondicional

A nuestros directores, por acompañarnos y apoyarnos en la realización de este proyecto

**Tabla de Contenido**

	<b>Pág.</b>
Introducción .....	11
1. Objetivos .....	14
1.1 Objetivo General .....	14
1.2 Objetivos Específicos.....	14
2. Metodología .....	15
2.1. Descripción y Dimensiones de los Puentes Estudiados .....	15
2.2 Modelamiento del Puente en el Software Midas Civil .....	17
2.3 Análisis Multimodal Espectral.....	19
2.3.1 Espectro de Aceleración Horizontal .....	19
2.3.2 Espectro de Aceleración Vertical.....	21
2.4 Análisis Mediante Sistemas Generalizados de Un Grado de Libertad .....	23
2.4.1 Funciones de Forma.....	26
2.4.2 Nivel de Exactitud.....	27
3. Resultados y Análisis .....	28
3.1 Análisis Dinámico Multimodal Espectral.....	28
3.1.1 Descripción de los Modos de Vibración Principales (X, Y, Rz) .....	28
3.1.2 Modos de Vibración Verticales .....	30
3.1.3 Masa del Voladizo .....	34
3.1.4 Rigidez Vertical del Voladizo.....	35
3.1.5 Formas Modales Verticales.....	36
3.1.6 Respuestas Sísmicas Máximas.....	37

3.2. Análisis Dinámico Mediante el Método de Sistemas Generalizados de Un Grado de Libertad ..... 39

3.2.1 Periodos de la Estructura ..... 39

3.2.2 Respuestas Sísmicas Máximas..... 40

3.3 Comparación de los Resultados Obtenidos por Ambos Métodos..... 41

4. Conclusiones ..... 48

Referencias Bibliográficas ..... 50

Apéndices..... 53

**Lista de Tablas**

	<b>Pág.</b>
Tabla 1 Parámetros sísmicos usados en la construcción del espectro horizontal .....	20
Tabla 2 Respuestas sísmicas máximas calculadas para los sistemas generalizados de un grado de libertad. ....	40
Tabla 3 Diferencias entre la respuesta sísmica obtenida del análisis simplificado y las del análisis multimodal espectral con 30 primeros modos de vibración (izquierda) y con el primer modo de vibración vertical (derecha). ....	42
Tabla 4 Error cuadrático medio entre las formas modales y las funciones de forma .....	46

**Lista de Figuras**

	<b>Pág.</b>
Figura 1 Sección transversal de la viga con relación $h_a/h_c = 2.85$ .....	15
Figura 2 Sección transversal de la pila .....	16
Figura 3 Etapas de construcción estudiadas.....	18
Figura 4 Espectros de aceleración horizontal .....	20
Figura 5 Razón V/H simplificada propuesta por Bozorgnia y Campbell para rocas y suelos rígidos .....	22
Figura 6 Espectro de aceleración vertical de diseño propuesto por Bozorgnia y Campbell.....	22
Figura 7 Espectro de aceleración vertical para los estados de construcción del puente .....	23
Figura 8 Idealización del puente como viga en voladizo.....	24
Figura 9 Porcentaje de participación de masa del primer modo en el eje X (longitudinal), Y (transversal) y rotacional a lo largo del eje Z según el avance del voladizo para cada relación $h_a/h_c$ .....	29
Figura 10 Periodos del primer modo en el eje X (a), Y (b) y Rz (c) .....	30
Figura 11 Forma modal típica del primer (izquierda), segundo (centro) y tercer (derecha) modo de vibración vertical en los avances del 25%, 50%, 75% y 100% .....	31
Figura 12 Porcentaje de participación de masa de los tres primeros modos de vibración verticales según el avance del voladizo para las tres relaciones de $h_a/h_c$ .....	33
Figura 13 Periodos de vibración asociados al primer, segundo y tercer modo de vibración vertical .....	34
Figura 14 Variación de la masa del voladizo en función de la relación $h_a/h_c$ y del avance del voladizo.....	34

Figura 15 Rigidez de la viga del puente completo(a) y empotrado(b) según el avance del voladizo ..... 35

Figura 16 Formas modales del primer modo vertical de cada avance del voladizo y relacion  $h_a/h_c$  ..... 37

Figura 17 Respuestas máximas obtenidas mediante el análisis multimodal espectral para cada avance del voladizo..... 39

Figura 18 Periodos contra avance para cada función de forma ..... 40

Figura 19 Comparación de las formas modales normalizadas del puente completo con las funciones de forma usadas en los avances del 100% (a), 75% (b), 50% (c) y 25% (d) ..... 45

**Lista de Apéndices**

	<b>pág.</b>
Apéndice A. Sección transversal de las relaciones $h_a/h_c$ Inferior y Superior .....	53
Apéndice B. Regresiones polinómicas para la obtención de los parámetros $m(x)$ e $I(x)$ requeridos por el método de sistemas generalizados de un grado de libertad .....	54
Apéndice C. Periodos y porcentajes de participación de masa de los avances y relaciones $h_a/h_c$ estudiados.....	55
Apéndice D. Respuestas máximas obtenidas con el método multimodal espectral .....	62
Apéndice E. Eigenvectores del primer modo vertical de las tres relaciones $h_a/h_c$ analizadas .....	64
Apéndice F. Formas modales típicas de los primeros modos X, Y y Rz.....	66
Apéndice G. Porcentajes de diferencias para la condición de empotramiento perfecto en el análisis multimodal espectral.....	68

### Resumen

**Título:** Aplicabilidad de los sistemas generalizados de un grado de libertad en el análisis de un puente viga cajón en construcción por voladizos sucesivos sometido a sismos verticales al variar la relación de alturas de las dovelas cero y final\*

**Autor:** José Eleazar Diaz Poveda y León Santiago Suárez Rodríguez\*\*

**Palabras Clave:** Puente viga cajón, componente vertical sísmica, relación de alturas, etapas de construcción, análisis multimodal espectral, sistemas generalizados de un grado de libertad.

**Descripción:** La aplicación de los sistemas generalizados de un grado de libertad para estimar la respuesta sísmica máxima de un puente viga cajón en construcción ha sido estudiada con anterioridad, donde se ha demostrado que se pueden obtener niveles de exactitud aceptables. Por tal motivo, con esta investigación se busca ampliar el estudio de la aplicabilidad de dicho método, estudiando la afectación al variar la relación entre las alturas de la viga en la dovela cero ( $h_a$ ) y en la dovela final ( $h_c$ ). Se seleccionaron tres relaciones  $h_a/h_c$ , para la estructura: la relación inicial, igual a 2.85, y una relación superior (3.95) e inferior (2.37). El impacto de estas relaciones se analizó en cuatro etapas de construcción (25%, 50%, 75% y 100% de avance del voladizo), primero mediante un análisis multimodal espectral para posteriormente ser comparados con el análisis simplificado. Los resultados mostraron que la relación  $h_a/h_c$  afecta a la aplicabilidad del método simplificado en función del porcentaje de participación de masa en el primer modo de vibración vertical, observándose mayor participación de masa al aumentar la relación  $h_a/h_c$  en los avances del 25% y 50%, mientras que en los avances del 75% y 100% se observó lo contrario. Por lo tanto, a mayor participación de masa en el primero modo de vibración, la influencia de los modos superiores es menor, siendo posible obtener buenas exactitudes (porcentajes de diferencia menores al 15%) tanto al tener en cuenta solo el primer modo vertical, como al tener en cuenta los 30 primeros.

---

\* Trabajo de Grado.

\*\* Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería Civil. Director: Jose Miguel Benjumea Royero. PhD. en Ingeniería Civil y Ambiental. Codirector: Gustavo Chio Cho. PhD. en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos.

### Abstract

**Title:** Applicability of the generalized single degree of freedom systems method in the analysis of a box girder bridge under construction by progressive cantilevers subjected to vertical seism by varying the heights ratio of the zero and final segments\*

**Author(s):** José Eleazar Diaz Poveda & León Santiago Suárez Rodríguez \*\*

**Key Words:** Box girder bridge, vertical seismic component, height ratio, construction stages, multimodal spectral analysis, generalized single degree of freedom systems.

**Description** The application of the generalized single degree of freedom systems (GSDOFS) method to estimate the maximum seismic responses of a box girder bridge under construction and subjected to vertical ground motion has been studied previously. A past study showed that acceptable accuracy levels could be obtained. For this reason, this research seeks to expand the study of the applicability of said method by analyzing the impact of varying the girder height ratio ( $h_a/h_c$ ), which is the ratio between the girder height at the zero ( $h_a$ ) and final ( $h_c$ ) segments. Three  $h_a/h_c$  ratios were selected for the structure: the ratio studied in the past study, equal to 2.85, an upper (3.95) and lower (2.37) value. The impact of these ratios on the seismic response of the girder was analyzed in four construction stages (25%, 50%, 75%, and 100% of cantilever advance). The response was first calculated by a multimodal spectral analysis and then compared with the results from the GSDOFS method. The results showed that the  $h_a/h_c$  ratio affects the applicability of the GSDOFS method through the mass participation percentage in the first vertical vibration mode, observing better mass participation at a higher  $h_a/h_c$  ratio in advances of 25% and 50%, while in advances of 75% and 100% the opposite was observed. Therefore, the greater the mass participation in the first vertical modes, the lower the influence of higher modes, making it possible to obtain good accuracies (differences less than 15%), both taking into account only the first vertical mode or the 30 first modes in the multimodal spectral analysis.

---

\* Degree Work

\*\*Physicomechanical Engineering, Civil Engineering School. Director: Jose Miguel Benjumea Royero. PhD. in Civil and Environmental Engineering. Co-director: Gustavo Chio Cho. PhD. in Engineering of Roads, Canals and Ports.

## Introducción

En Colombia en los últimos años han sido ampliamente usados los puentes tipo viga cajón en concreto preesforzado construidos por el método de voladizos sucesivos, esto debido a que respecto a las otras tipologías de puentes estos presentan ventajas constructivas, económicas y estéticas (Escobar, 2022; Santos Durán et al., 2022). El proceso constructivo de este tipo de puentes es complejo debido a los múltiples efectos que surgen derivados de la construcción, donde la resistencia y rigidez del puente cambia con cada etapa constructiva y con el comportamiento de los materiales dependientes del tiempo e influencias ambientales. Además, en puentes de múltiples luces, antes de que se finalice el cierre de los voladizos en la mitad de la luz, el puente presentará un estado desfavorable con la máxima longitud y peso mientras aún no se ha alcanzado redundancia estructural. Por esto es importante que todas estas interacciones y el proceso constructivo sean considerados en el análisis estructural (Lucko & de la Garza, 2003).

Además de estas interacciones que influyen en la rigidez y resistencia del puente, normalmente en el análisis y diseño sísmico se suele ignorar los efectos de la componente vertical sísmica, esto debido a la falta de recomendaciones consistentes de los códigos y normas de diseño (Wibowo & Sritharan, 2022). Comúnmente, normas de diseño a nivel internacional y nacional, dentro de las cuales está la NSR-10 (Título A - Requisitos Generales de Diseño y Construcción Sismo Resistente, 2010), no traen recomendaciones para la componente vertical sísmica o sugieren construir un espectro vertical multiplicando el espectro de diseño horizontal por un factor, generalmente igual a  $2/3$  (Jara Díaz et al., 2022), que surgió de una de las primeras investigaciones donde se evaluó el cociente entre el pico de aceleración de la componente vertical y horizontal (V/H) de 33 registros sísmicos en Estados Unidos (Newmark et al., 1973). Sin embargo, registros

actuales de sismos de campo cercano refutan esta asunción, y muestran que es normal que la máxima aceleración vertical supere la máxima aceleración horizontal (Jara Díaz et al., 2022).

Estudios como el de Foutch (1997) muestran con datos de sismo de regiones de campo cercano que los movimientos verticales pueden ser considerablemente mayores que los horizontales y la combinación de ambos pueden ser tres veces más grande que el valor asumido para diseño. Shresta (2009) muestra que la relación V/H de algunos sismos alrededor del mundo es mayor a la unidad y en determinados casos se obtienen relaciones mayores a 2 y 3, como en el sismo de Imperial Valley en 1979 en Estados Unidos, donde se obtuvo una relación V/H de 3.77. En Colombia, estudios como el de Benjumea et al. (2022) muestran que el uso del valor de  $V/H = 2/3$  para estimar el espectro de aceleración vertical no es aceptable, puesto que, la relación de V/H cambia sustancialmente con el periodo de la estructura. Otros estudios muestran que la regla de cálculo de la magnitud de la componente vertical como  $2/3$  de la componente horizontal es excedida en sismos de gran magnitud con epicentro cercano, en cambio para grandes distancias epicentrales, esta regla es conservadora y produce valores mayores a los de espectros obtenidos de registros sísmicos (Jara Díaz et al., 2022).

Teniendo en cuenta el amplio uso de la tipología de puentes viga cajón en Colombia y la alta influencia de la componente vertical sísmica, con el fin de ampliar lo investigado por Arias (2021), este proyecto de investigación busca evaluar la exactitud del método de sistemas generalizados de un grado libertad en el análisis de puentes viga cajón sometidos a la acción de la componente vertical sísmica durante su construcción. Para esto se introdujo la variable  $h_a/h_c$ , que corresponde a la relación de alturas de la viga sobre la unión viga-pila ( $h_a$ ) y sobre el estribo de apoyo ( $h_c$ ). Con la variación de la relación  $h_a/h_c$  se busca determinar cómo se ve afectado el nivel exactitud del método de sistemas generalizados de un grado de libertad en el análisis de un puente

viga cajón en cuatro etapas constructivas (25%, 50%, 75% y 100%) al comparar los resultados obtenidos con los de un análisis multimodal espectral realizado en el software Midas Civil.

## 1. Objetivos

### 1.1 Objetivo General

Evaluar la exactitud del método de sistemas generalizados de un grado de libertad en la estimación de la respuesta dinámica de un puente viga cajón durante su construcción por voladizos sucesivos y bajo la acción de la componente vertical de un sismo al variar la relación de alturas de la viga sobre la pila de apoyo ( $h_a$ ) y sobre el estribo ( $h_c$ ).

### 1.2 Objetivos Específicos

- Evaluar las respuestas máximas de fuerza cortante, momento flector y desplazamiento vertical al variar la relación de la altura  $h_a/h_c$  de un puente viga cajón durante construcción y bajo la acción de la componente vertical sísmica, mediante el método de sistemas generalizados de un solo grado de libertad.
- Calcular las respuestas máximas de fuerza cortante, momento flector y desplazamiento vertical al variar la relación de la altura  $h_a/h_c$  de un puente viga cajón durante construcción y bajo la acción de la componente vertical sísmica, mediante el método multimodal modal espectral.
- Comparar las respuestas máximas de desplazamiento vertical, fuerza cortante y momento flector debido al efecto sísmico, obtenidas con los métodos mencionados con anterioridad al variar la relación de la altura de la viga sobre la pila de apoyo y sobre el estribo.

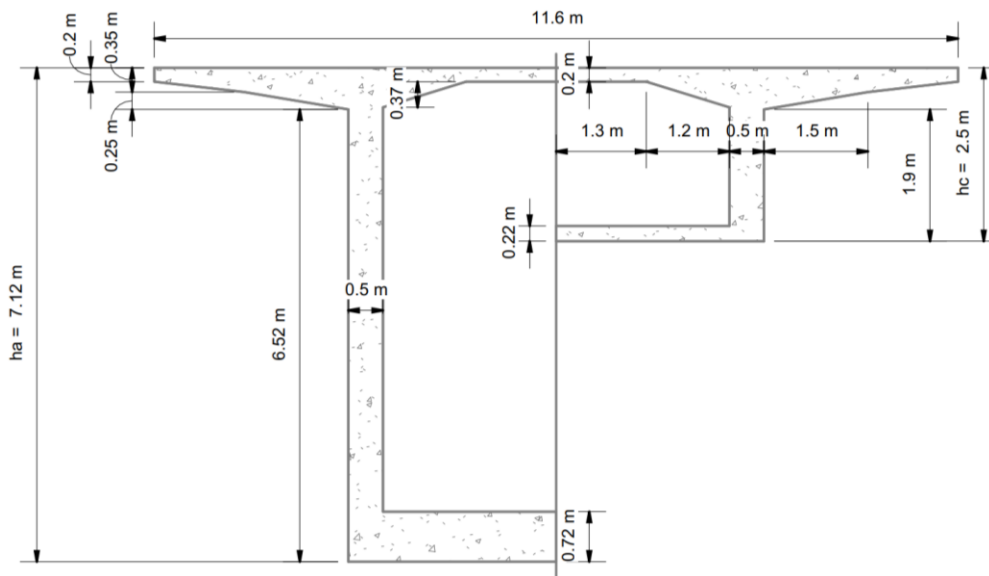
## 2. Metodología

### 2.1. Descripción y Dimensiones de los Puentes Estudiados

Como base para el desarrollo de este proyecto se tomó el puente estudiado por Castro (2021) y Arias (2021). Este es un puente tipo viga cajón de sección unicelular construido por voladizos sucesivos en concreto postensado, cuenta con dos luces simétricas de 74 m de longitud y un ancho constante de 11.6 m. La sección transversal de la viga posee una altura y espesor de losa inferior que varían a lo largo de la longitud del puente de forma parabólica, iniciando con una altura de 7.12 m ( $h_a$ ) y un espesor de 0.72 m en la unión viga-pila y finalizando con una altura de 2.5 m ( $h_c$ ) y un espesor de 0.22 m en el apoyo sobre el estribo. La pila es de sección transversal rectangular hueca de 4.0x6.0x0.5 m con una altura de 19 m. En las Figuras 1 y 2 se muestran las dimensiones de la viga y pila del puente.

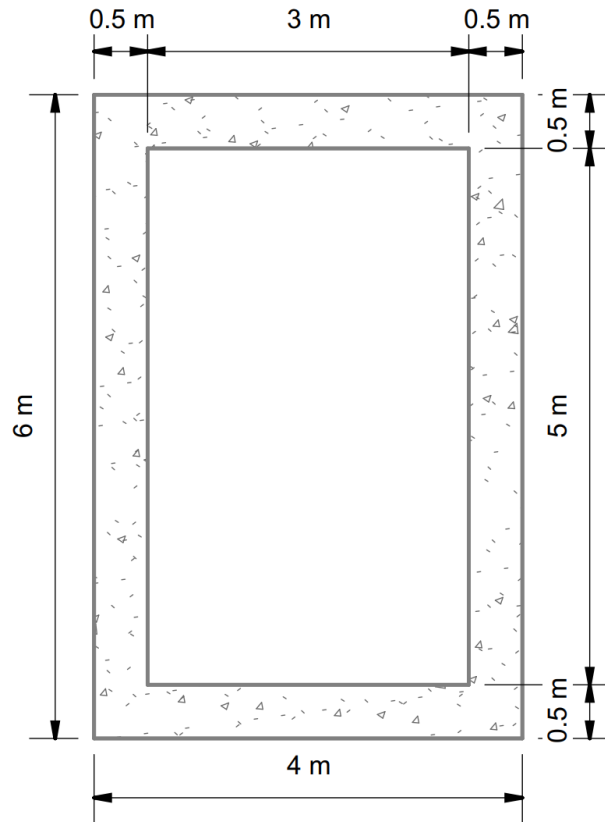
**Figura 1**

*Sección transversal de la viga con relación  $h_a/h_c = 2.85$*



**Figura 2**

*Sección transversal de la pila*



La relación  $h_a/h_c$  del puente base tiene un valor de 2.85 (7.12 m/2.5 m). Para la obtención de las otras dos relaciones  $h_a/h_c$  se tomó la altura  $h_c$  del puente base como constante con un valor de 2.5 m, de esto modo solo se varió la altura  $h_a$  y el espesor de losa inferior. La variación de estos parámetros se hizo en base al análisis de 28 puentes viga cajón construidos en Colombia, las consideraciones de Barras et al. (2007) para el pre-diseño de secciones viga cajón unicelulares y el estudio Bravo et al. (2021) sobre las configuraciones de puentes viga cajón unicelulares en Colombia. A partir de esto se obtuvo para la relación inferior una altura  $h_a=5.92$  m ( $L/25$ ) con una relación  $h_a/h_c=2.37$ , y para la relación superior una altura  $h_a=9.87$  m ( $L/15$ ) con una relación  $h_a/h_c=3.95$ , donde  $L$  es la longitud del vano principal que tiene un valor de 148 m (tomado como la

longitud total del puente, al ser un puente de dos luces). Para los espesores de la losa inferior en la unión de la viga-pila se obtuvo un valor de 0.8 m para la viga con  $h_a/h_c=2.37$  y de 0.64 m para la viga con  $h_a/h_c=3.95$ . En la zona de apoyo sobre el estribo el espesor de losa inferior fue de 0.2 m. En las Figura A1 y A2 del Anexo A se muestra las dimensiones de la sección transversal de la viga para las relaciones  $h_a/h_c$  superior e inferior.

## 2.2 Modelamiento del Puente en el Software Midas Civil

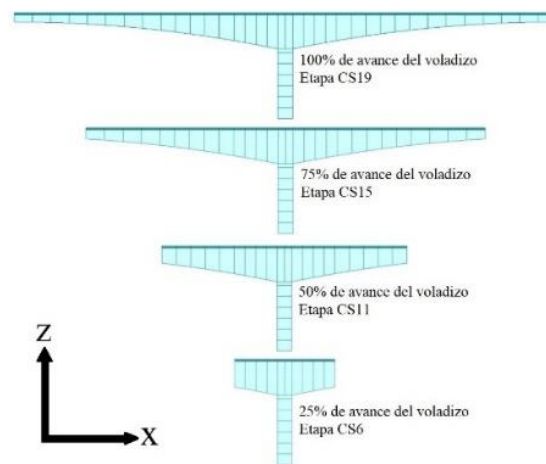
Los puentes fueron modelados en el software Midas Civil (2022) empleando elementos tipo *Beam* (elemento longitudinal formado por dos nodos, cada uno de 6 grados de libertad) para la pila y la viga. Las secciones transversales de cada dovela fueron creadas individualmente mediante la opción *Tapered* (elementos de sección variable), ingresando las dimensiones de la sección transversal de inicio y final de cada dovela. En las tres relaciones  $h_a/h_c$  se mantuvo un apoyo de empotramiento perfecto en la base de la pila y unión rígida en la conexión viga-pila.

Los materiales y demás consideraciones del modelamiento se mantuvieron iguales en las tres relaciones  $h_a/h_c$  a las usadas por Arias (2021), para que de esta forma la única variable a cambiar fuera la relación  $h_a/h_c$ . Dichas propiedades son: concreto de resistencia máxima a la compresión ( $f'_c$ ) de 42 MPa con módulo de elasticidad de 30348 MPa para la viga y concreto de  $f'_c=35$  MPa con módulo de elasticidad de 27704 MPa para la pila. Ambos concretos limitados al rango lineal-elástico, con peso específico de 24 kN/m<sup>3</sup> y coeficiente de Poisson de 0.2. Los efectos ocasionados por la fluencia y la retracción del concreto de la viga y la pila se modelaron según lo establecido por el Comité Euro-Internacional du Betón (1993), modelo que está disponible en el software usado. Se asumió cemento de endurecimiento rápido y una humedad relativa del ambiente (RH) de 78%.

El análisis del proceso constructivo consta de 20 etapas definidas con las siglas CS (Construction Stage) y el número de etapa correspondiente. Siendo la construcción de la pila CS1, con duración de 100 días. La construcción de las dovelas a ambos lados de la pila sin considerar las de cierre corresponden a las etapas entre CS2 y CS19, cada una con una duración de 7 días. La etapa final CS20 consiste en la construcción de las dovelas de cierre. Para la presente investigación se analizó hasta la etapa CS19, puesto que se necesitaba que el puente se mantuviera en voladizo. Los avances del 25%, 50%, 75% y 100% corresponden a las etapas constructivas CS6, CS11, CS15 y CS19 respectivamente (Figura 3).

**Figura 3**

*Etapas de construcción estudiadas*



Para las etapas constructivas se tienen en cuenta el peso propio de los elementos (SW), el peso del carro de avance (FT) y el peso del concreto fresco en el carro de avance (WC). Se decidió ignorar el presfuerzo de la estructura para las tres relaciones  $h_a/h_c$  con el fin de que estuvieran en las mismas condiciones y con la justificación de que Arias (2021) demostró que la influencia de esta carga en la respuesta dinámica era mínima y podía ser ignorada.

La carga del carro de avance consiste en una carga vertical de 490.3 kN aplicada con una excentricidad de 2.5 m, generando un momento flector de 1225.8 kN-m al alrededor del eje transversal del puente (eje Y) situados al final de cada dovela. De la misma manera se modela la carga WC la cual varía dependiendo del peso de la dovela.

### **2.3 Análisis Multimodal Espectral**

Con el fin de asegurar un porcentaje de participación de masa modal mayor al 90%, se analizaron los 30 primeros modos de vibración mediante un análisis modal (EigenValue) en cada avance del voladizo y para cada relación  $h_a/h_c$ . A su vez, se realizó el análisis multimodal espectral teniendo en cuenta únicamente el primer modo de vibración vertical, esto con el fin de evaluar la afectación de los modos superiores en la exactitud del método de sistemas generalizados al comparar la respuesta sísmica obtenida por ambos métodos. El coeficiente de amortiguamiento viscoso fue tomado del 5% como se recomienda en el CCP-14 (Norma Colombiana de Diseño de Puentes) (Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica., 2014).

#### ***2.3.1 Espectro de Aceleración Horizontal***

En el análisis de las tres relaciones  $h_a/h_c$  se usó el mismo espectro de aceleración vertical que se obtuvo mediante el espectro de aceleración horizontal. Este espectro horizontal fue construido siguiendo el artículo 3.10.4 de la norma CCP-14 (Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica., 2014). Los parámetros necesarios para construir el espectro fueron obtenidos teniendo en cuenta la ubicación y diseños del puente de la relación  $h_a/h_c$  intermedia (2.85), que se encuentra ubicado en la vía que comunica a Santa Fe de Antioquia con Cañasgordas, Colombia. Se asume un perfil de suelo tipo C. Los demás parámetros usados para construir el espectro de aceleración horizontal se encuentran en la Tabla 1.

**Tabla 1**

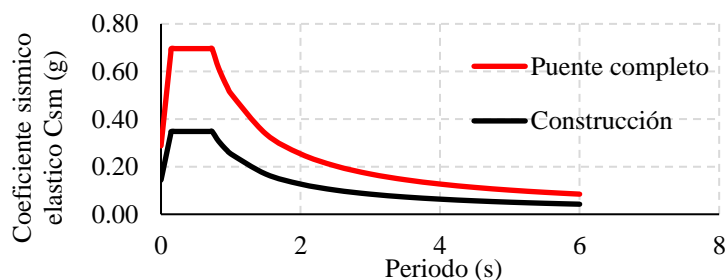
*Parámetros sísmicos usados en la construcción del espectro horizontal*

<b>PGA:</b> Coeficiente de aceleración pico efectiva	0.25
<b>Ss:</b> Coeficiente de aceleración de respuesta horizontal para un periodo de 0.2s	0.6
<b>S1:</b> Coeficiente de aceleración de respuesta horizontal para un periodo de 1s.	0.35
<b>Fpga:</b> Factor de sitio para un periodo nulo en el espectro de respuesta de aceleraciones.	1.15
<b>Fa:</b> Factor de sitio para intervalos de periodos cortos en el espectro de respuesta de aceleraciones	1.16
<b>Fv:</b> Factor de sitio para intervalos de periodos largos en el espectro de respuesta de aceleraciones	1.45
<b>As:</b> Coeficiente de aceleración pico del suelo modificado por factores de sitio para periodos cortos	0.29
<b>Ads:</b> Coeficiente de aceleración de respuesta espectral horizontal para un periodo de 0.2s	0.7
<b>Sd1:</b> Coeficiente de aceleración de respuesta espectral horizontal para un periodo de 1s	0.51

Puesto que el puente se analiza durante su proceso constructivo, el espectro horizontal se modificó para esta condición siguiendo el artículo 3.10.10 del CCP-14 (Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica., 2014), donde se establece que, para el cálculo de fuerzas y desplazamientos elásticos, el coeficiente de respuesta sísmica en puentes construidos por etapas puede reducirse por un factor no mayor a dos (2). Para la presente investigación se decidió utilizar el valor de dos (2) para mantener lo establecido por Arias (Arias, 2021). En la Figura 4 se muestra el espectro de aceleración horizontal para construcción y cuando el puente está completo.

**Figura 4**

*Espectros de aceleración horizontal*



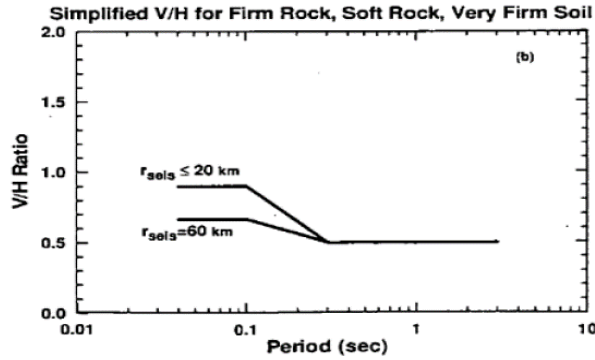
### ***2.3.2 Espectro de Aceleración Vertical***

Para la obtención del espectro vertical, es común construirlo a partir del espectro horizontal utilizando un valor de  $V/H = 2/3$ , que es adoptado incluso por las normas y códigos de diseño actuales como el reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente (NSR-10) (Titulo A - Requisitos Generales de Diseño y Construcción Sismo Resistente, 2010). Sin embargo, el uso de  $V/H=2/3$  para estimar siempre la componente vertical no es correcto, debido a que estudios de contexto nacional e internacional muestran que se supera dicho valor (Jara Díaz et al., 2022) (Benjumea et al., 2022).

Por tal motivo se optó por la metodología propuesta por Bozorgnia y Campbell (2004), que también fue usada por Arias (2021). De esta forma, el espectro vertical también es construido en base al coeficiente de aceleración horizontal ( $C_{sm}$ ) pero usando las relaciones  $V/H$  que se presentan en la Figura 5. Dicha relación se obtiene mediante la distancia a la fuente (menores a 20 km o iguales a 60 km) y el periodo de vibración vertical. Debido a que la influencia de la componente vertical es despreciable en distancias mayores a 50 km (Wibowo & Sritharan, 2022), para el análisis se usó el caso de distancias menores a 20 km.

**Figura 5**

*Razón V/H simplificada propuesta por Bozorgnia y Campbell para rocas y suelos rígidos*

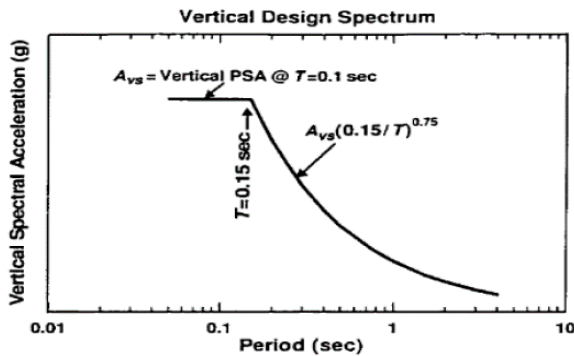


*Nota: tomado de (Bozorgnia & Campbell, 2004)*

Posteriormente se obtiene la relación V/H a usar, para un periodo de 0.1 s, este valor se multiplica por el valor del coeficiente sísmico elástico  $C_{sm}$  del espectro en construcción que corresponde a un periodo de 0.1 s y de esta manera se obtiene la amplitud máxima ( $A_{vs}$ ) como se observa en la Figura 6. Ya con este valor se construye el espectro vertical donde para periodos menores a 0.15 segundos se usa el valor de  $A_{vs}$  ya obtenido, y para periodos mayores la ecuación que se muestra en la Figura 6. El espectro vertical obtenido y usado se presenta en la Figura 7.

**Figura 6**

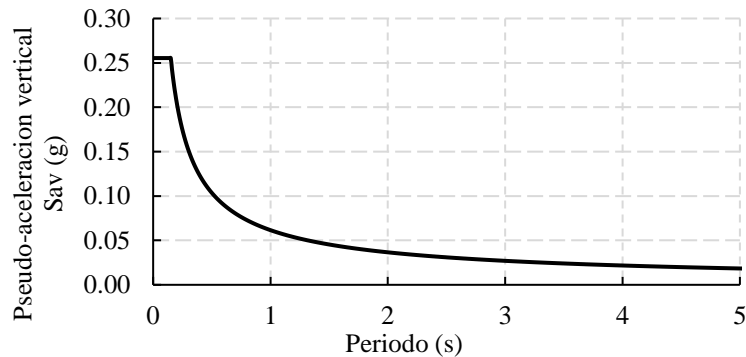
*Espectro de aceleración vertical de diseño propuesto por Bozorgnia y Campbell*



*Nota: tomado de (Bozorgnia & Campbell, 2004)*

**Figura 7**

*Espectro de aceleración vertical para los estados de construcción del puente*



#### **2.4 Análisis Mediante Sistemas Generalizados de Un Grado de Libertad**

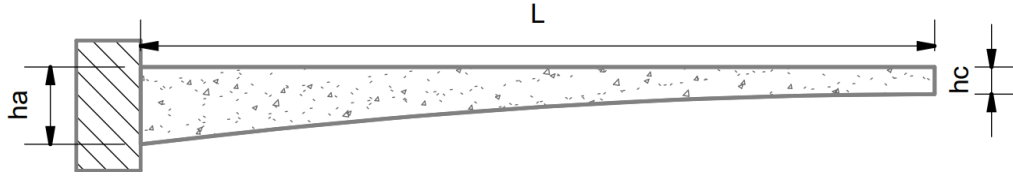
El análisis por el método de sistemas generalizados trata sistemas complejos como sistemas de un solo grado de libertad (método o análisis simplificado). En el caso del sistema que se está analizando, que es un sistema con masa y flexibilidad distribuida, el método proporciona resultados aproximados para la frecuencia fundamental de vibración, mediante la restricción de las deflexiones a una función de forma  $\psi(x)$  que se aproxima al modo fundamental (Anil K. Chopra, 2012).

Para realizar el análisis simplificado de la estructura mediante este método, el puente se idealizó teniendo en cuenta que este es construido mediante el método de voladizos sucesivos de forma simétrica a cada lado de la pila, por lo que la forma más adecuada para la idealización es una viga en voladizo empotrada perfectamente en la unión viga pila (Figura 8).

Mediante el análisis por este método se evaluó las mismas etapas de construcción consideradas en el análisis multimodal, y para la implementación de este se usó el software Matlab (2022) y el espectro de aceleración vertical definido anteriormente (Figura 7).

**Figura 8**

*Idealización del puente como viga en voladizo*



Para implementar el método, primeramente, los desplazamientos en todas las ubicaciones se definen en función de la coordenada generalizada  $z(t)$  mediante la función de forma  $\psi(x)$  (ecuación 1).

$$u(x, t) = \psi(x)z(t) \quad (1)$$

La ecuación de movimiento del sistema generalizado está dada por la ecuación 2, donde  $\tilde{m}$ ,  $\tilde{k}$  y  $-\tilde{L}\ddot{u}_g(t)$  son respectivamente la masa, la rigidez y la fuerza excitadora generalizada y están definidas por las ecuaciones 3, 4 y 5.

$$\tilde{m}\ddot{z} + \tilde{k}z = -\tilde{L}\ddot{u}_g(t) \quad (2)$$

$$\tilde{m} = \int_0^L m(x)[\psi(x)]^2 dx \quad (3)$$

$$\tilde{k} = \int_0^L EI(x)[\psi''(x)]^2 dx \quad (4)$$

$$\tilde{L} = \int_0^L m(x)\psi(x)dx \quad (5)$$

Una vez ya determinadas las propiedades generalizadas de masa y rigidez, la frecuencia natural del sistema está dada por la siguiente ecuación:

$$\omega_n^2 = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} \quad (6)$$

El valor máximo del desplazamiento generalizado se obtiene mediante la ecuación 7, donde  $D$  y  $A$  corresponden a las ordenadas de deformación y pseudo-aceleración del espectro de diseño (Figura 7) para un periodo  $T_n = 2\pi/\omega_n$ , y  $\tilde{\Gamma}$  está dado por la ecuación 8:

$$z_o = \tilde{\Gamma}D = \frac{\tilde{\Gamma}}{\omega_n^2}A \quad (7)$$

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\tilde{L}}{\tilde{m}} \quad (8)$$

Una vez determinado el desplazamiento generalizado máximo, se obtienen los desplazamientos máximos en cualquier punto mediante la siguiente ecuación:

$$u_o(x) = \tilde{\Gamma}D\psi(x) = z_o\psi(x) \quad (9)$$

La fuerza cortante y momento flector en la base están dados por las ecuaciones 10 y 11, y  $\tilde{L}^\theta$  está definido en la ecuación 12:

$$V_{bo} = \tilde{L}\tilde{\Gamma}A \quad (10)$$

$$M_{bo} = \tilde{L}^\theta\tilde{\Gamma}A \quad (11)$$

$$\tilde{L}^\theta = \int_0^L xm(x)\psi(x)dx \quad (12)$$

Para la obtención de las funciones de masa  $m(x)$  e inercia  $I(x)$  que están presentes en la mayoría de las ecuaciones se usó los valores de área e inercia de cada dovela a lo largo de la longitud obtenidos en el software Midas Civil (2022) para así calcular una regresión polinómica que se ajustara a estos valores. En el anexo B se encuentra estas regresiones polinómicas para cada relación de  $h_a/h_c$ .

#### **2.4.1 Funciones de Forma**

Para la implementación del método de sistemas generalizados de un grado de libertad se utilizaron las tres funciones de formas usadas por Arias (2021), esto con el objetivo de observar cómo la respuesta estructural es afectada por este parámetro, y así determinar cuál función de forma proporciona el mayor nivel de exactitud para cada relación de  $h_a/h_c$ .

La función  $f_1$  (ecuación 13) corresponde a la forma modal planteada por De La Cruz (2018) para una viga en voladizo de sección transversal constante y en su apoyo empotrada perfectamente. La función  $f_2$  se extrae del libro de Chopra (2012) (Ecuación 16) puesto que Arias (2021) encontró

que esta presentaba buenas aproximaciones de periodo para una viga en voladizo de sección variable empotrada en su apoyo. La función  $f_3$  (Ecuación 17) se escoge debido a que presenta semejanza con las formas modales correspondientes al primer modo de vibración en las cuatro etapas constructivas del puente (Arias, 2021). En las ecuaciones,  $L$  es la longitud de la viga y  $j$  corresponde al modo de vibración que se va a evaluar, que en este caso es el primer modo de vibración ( $j=1$ ).

$$f_1 = \frac{1}{2} \left[ \left( \cos \left( \frac{\beta x}{L} \right) - \cosh \left( \frac{\beta x}{L} \right) \right) + D \left( \sin \left( \frac{\beta x}{L} \right) - \sinh \left( \frac{\beta x}{L} \right) \right) \right] \quad (13)$$

$$\beta \cong \left( j - \frac{1}{2} \right) \pi \quad (14)$$

$$D = \frac{-\cos(\beta) - \cosh(\beta)}{\sin(\beta) + \sinh(\beta)} \quad (15)$$

$$f_2 = 1 - \cos \left( \frac{\pi}{2L} x \right) \quad (16)$$

$$f_3 = x^2 \quad (17)$$

#### **2.4.2 Nivel de Exactitud**

Para el cálculo del nivel de exactitud o porcentaje de diferencia (ecuación 18) del método de sistemas generalizados se tomaron como valores exactos los obtenidos del análisis multimodal espectral en el software Midas Civil (VE) y como valores aproximados los correspondientes al análisis por los sistemas generalizados (VA). Nótese que, si el porcentaje de diferencia es positivo,

significa que el análisis aproximado sobrestima la respuesta sísmica del puente, en cambio sí es negativo, subestima la respuesta sísmica del puente (Arias, 2021).

$$\% \text{ Diferencia} = \left( \frac{VA - VE}{VE} \right) \times 100\% \quad (18)$$

### 3. Resultados y Análisis

#### 3.1 Análisis Dinámico Multimodal Espectral

##### 3.1.1 Descripción de los Modos de Vibración Principales (X, Y, Rz)

Para el primer modo de vibración longitudinal (eje X) del puente (Figura 9 (a)) los porcentajes de participación de masa disminuyen con el aumento del avance del voladizo y con la reducción de la relación  $h_a/h_c$  (Figura 9 (a)). En el caso del primer modo de vibración transversal (eje Y) del puente los porcentajes de masa aumentan con el avance del voladizo (Figura 9 (b)), llegando a un máximo que en el caso de la relación superior de  $h_a/h_c$  (3.95) se alcanza en el avance del 75% y en las dos restantes (2.37 y 2.85) en el 50%, después de esto los porcentajes disminuyen. En general los porcentajes de las tres relaciones  $h_a/h_c$  son similares entre sí hasta el avance del 50%, y para todos los casos de avance y relación  $h_a/h_c$  la participación de masa siempre es superior al 75%.

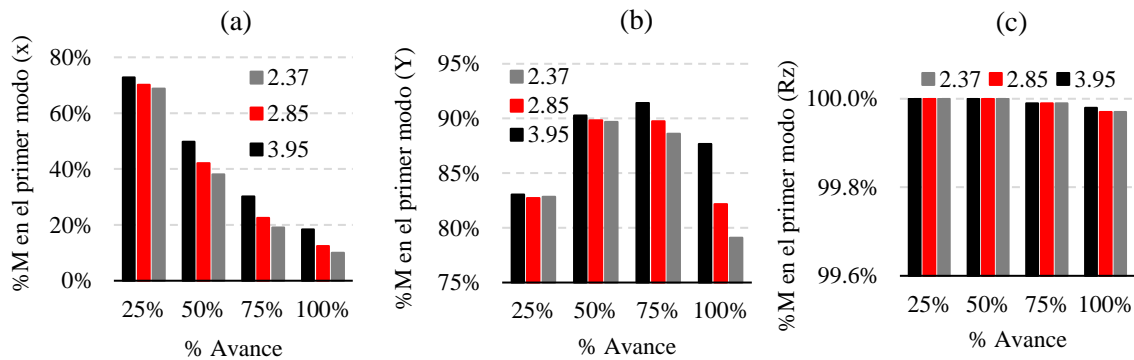
En el primer modo de vibración rotacional a lo largo del eje vertical o Rz (torsional para la columna) los porcentajes de masa (Figura 9 (c)) se mantienen relativamente constantes y cercanos al 100%.

Para el primer modo de vibración rotacional alrededor del eje Y (Ry), la participación de masa aumenta para todas las relaciones  $h_a/h_c$  con el avance del voladizo, y es mayor entre menor sea la relación  $h_a/h_c$ , caso contrario sucede con la participación de masa en el primer modo

rotacional alrededor del eje X (Rx), esta disminuye a medida que aumenta el avance del voladizo y en general presenta leves diferencias (entre 0.65% y 3.5%) entre los porcentajes de participación de cada relación de  $h_a/h_c$  para cada avance. Las gráficas de dichas participaciones de masas se pueden encontrar en el anexo C. Los modos rotacionales alrededor del eje Y (Ry) y alrededor del eje X (Rx) coinciden con el modo en X y Y respectivamente.

**Figura 9**

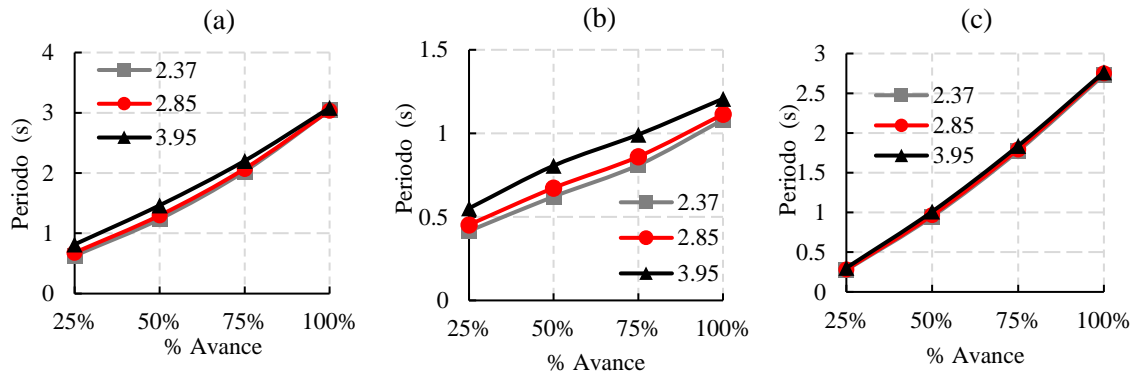
*Porcentaje de participación de masa del primer modo en el eje X (longitudinal), Y (transversal) y rotacional a lo largo del eje Z según el avance del voladizo para cada relación  $h_a/h_c$*



En cuanto a los periodos de los modos descritos, en dirección X (Figura 10 (a)) aumentan con el avance de la construcción del voladizo y llegan a valores similares (3 s) en el avance del 100%. En la dirección Y (Figura 10 (b)), aumentan con la relación  $h_a/h_c$  y con el avance del voladizo. Los periodos del modo Rz (Figura 10 (c)) aumentan con el avance del voladizo y en las tres relaciones  $h_a/h_c$  se presentan valores similares entre sí, siendo ligeramente mayores (1-9%) entre mayor es la relación  $h_a/h_c$ . Las formas modales típicas de los primeros modos en X, Y y Rz se muestran en el anexo F.

**Figura 10**

*Periodos del primer modo en el eje X (a), Y (b) y Rz (c)*

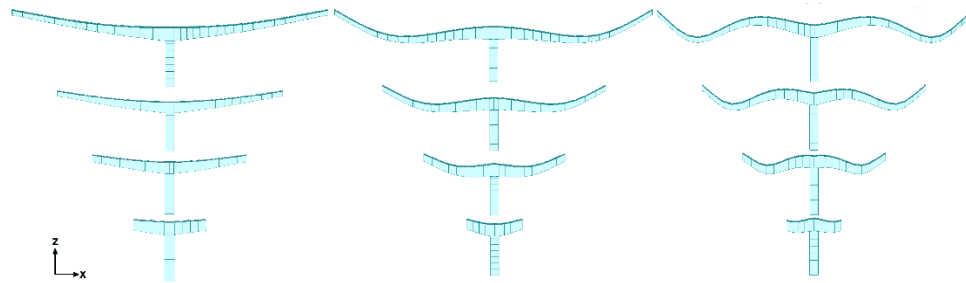


### 3.1.2 Modos de Vibración Verticales

En la Figura 11 se muestra la forma modal típica para las tres relaciones  $h_a/h_c$  del primer, segundo y tercer modo de vibración vertical para los avances del 25%, 50%, 75% y 100% del voladizo. La figura de la izquierda corresponde a la forma modal del primer modo de vibración vertical, como se observa en esta, para todos los avances ambos voladizos presentan una forma similar a la de la deflexión de una viga empotrada en su apoyo sometida a una carga vertical en el extremo libre. La figura central corresponde a la forma modal del segundo modo de vibración vertical para cada avance del voladizo, esta tiene una forma similar a la de una U a cada lado del voladizo. Finalmente, la figura de la derecha corresponde a la forma modal del tercer modo de vibración vertical, en esta la viga presenta una forma modal en forma de S a cada lado del voladizo para cada avance.

**Figura 11**

*Forma modal típica del primer (izquierda), segundo (centro) y tercer (derecha) modo de vibración vertical en los avances del 25%, 50%, 75% y 100%*



Como se observa en la Figura 12, en el caso del primer modo de vibración vertical para todas las relaciones  $h_a/h_c$ , el porcentaje de participación de masa modal es alto (mayor al 70%) en la etapa inicial de la construcción del voladizo, sin embargo, este decae hasta aproximadamente 40% antes del cierre del voladizo. Para los avances del 25% y 50%, entre mayor es la relación  $h_a/h_c$  mayor es el porcentaje de participación de masa; en cambio, en los avances del 75% y 100% del voladizo ocurre lo contrario, es decir, entre menor sea la relación de  $h_a/h_c$  mayor es el porcentaje de participación. También se observa que el porcentaje de participación de masa disminuye a medida que aumenta el avance del voladizo, lo que indica que los modos de vibración verticales superiores tienen mayor influencia en la respuesta dinámica a medida que aumenta el avance del voladizo.

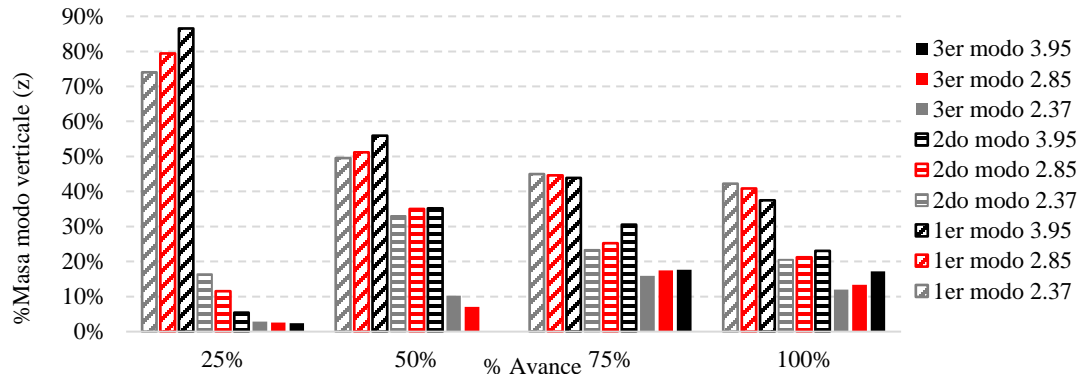
Se observa que la etapa correspondiente al 25% de avance del voladizo tiene los porcentajes de participación de masa más altos en el primer modo de vibración vertical para las tres relaciones  $h_a/h_c$ , con más del 70% de participación de masa. Esto sugiere que con el análisis de los sistemas generalizados podría obtenerse resultados bastante aproximados debido a la baja influencia de los modos superiores sobre la estructura en esta etapa.

En el caso del segundo modo de vibración vertical, este comienza con bajos porcentajes de participación de masa (entre 5.45% y 16.40%) que aumentan a medida que incrementa el avance del voladizo, siendo máxima en el 50% de avance del voladizo y luego disminuyen hasta completar el avance del 100%. También se observa que en el avance del 25%, entre menor sea la relación de  $h_a/h_c$  mayor es la participación de masa; en cambio, en los demás avances del voladizo ocurre lo contrario, entre mayor sea la relación de  $h_a/h_c$  mayor es la participación de masa. Respecto al primer modo de vibración se puede evidenciar que el segundo modo adquiere mayor relevancia en la respuesta de la estructura a medida que aumenta el avance del voladizo, puesto que mientras la participación de masa del primer modo disminuye, la del segundo aumenta hasta el 50% de avance del voladizo.

Para el tercer modo de vibración vertical, el porcentaje de participación de masa aumenta a medida que se incrementa el avance del voladizo para las relaciones  $h_a/h_c$  de 2.37 y 2.85 hasta el 75% de avance; en cambio para la relación de  $h_a/h_c = 3.95$ , el porcentaje de participación de masa disminuye hasta el avance del 50% y luego aumenta hasta el avance del 75%, después de este la participación de masa disminuye para todas las relaciones  $h_a/h_c$ . También se observa que en los avances del voladizo del 25% y 50%, entre menor sea la relación de  $h_a/h_c$  mayor es la participación de masa, en cambio en los avances del 75% y 100% entre mayor sea la relación de  $h_a/h_c$  mayor es el porcentaje de participación de masa.

**Figura 12**

*Porcentaje de participación de masa de los tres primeros modos de vibración verticales según el avance del voladizo para las tres relaciones de  $h_a/h_c$ .*



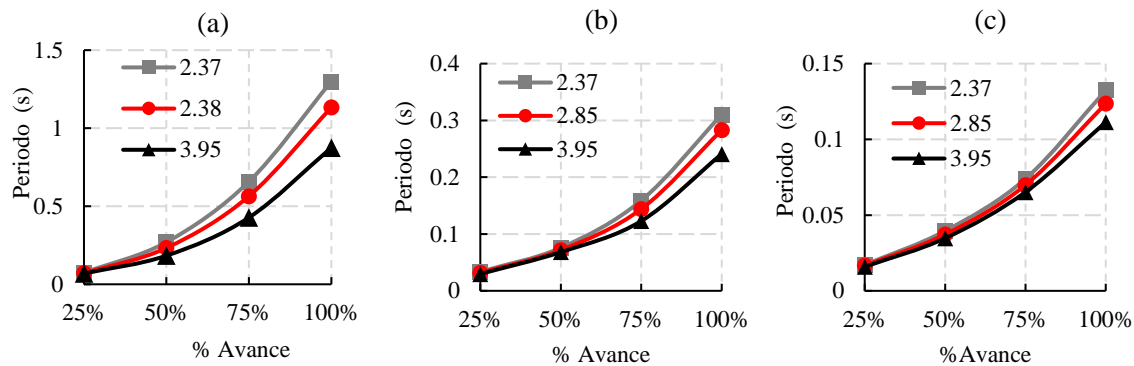
Como se observa en la Figura 13, los periodos para los tres modos de vibración y para las tres relaciones  $h_a/h_c$  aumentan con el avance del voladizo, y a medida que disminuye la relación  $h_a/h_c$  también, lo que concuerda con la masa y rigidez de los puentes, puesto que el puente de la relación  $h_a/h_c$  de 3.95 a pesar de ser el puente con mayor masa (Figura 14) presenta el menor periodo al ser el puente con mayor rigidez flexional.

Se observa que los periodos para el primer modo de vibración vertical (Figura 13 (a)) comienzan siendo cortos (entre 0.068 s y 0.074 s) en el avance del 25% y luego aumentan, por lo que, la etapa del 25% respecto a las demás etapas de construcción, es más sensible a presentar mayores aceleraciones verticales, debido a que los periodos que se presentan corresponden a mayores aceleraciones en el espectro vertical (Figura 7). Esto también sucede en el segundo y tercer modo de vibración; en el segundo modo (Figura 13 (b)) se presentarán periodos cortos y altas aceleraciones verticales en las etapas del 25%, 50% y 75% de avance del voladizo para las relaciones  $h_a/h_c$  de 2.85 y 3.95, y en las etapas del 25%, 50% para la relación de  $h_a/h_c$  de 2.37. En el tercer modo (Figura 13 (c)) para todos los avances y relaciones  $h_a/h_c$  se presentan periodos

cortos, por lo que se tendrán aceleraciones sísmicas altas y consecuentemente una respuesta estructural sísmica mayor.

**Figura 13**

*Periodos de vibración asociados al primer (a), segundo (b) y tercer (c) modo de vibración vertical*

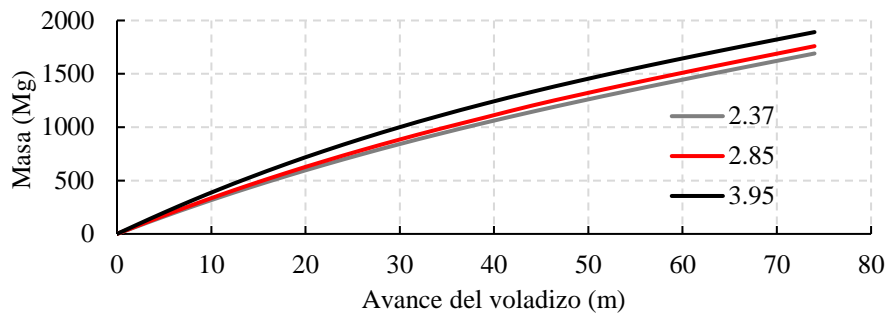


**3.1.3 Masa del Voladizo**

En la Figura 14 se muestra la masa del voladizo en mega gramos a medida que aumenta su longitud para las tres relaciones  $h_a/h_c$ . La masa es mayor a mayor relación  $h_a/h_c$  debido a que al mantenerse constante la altura  $h_c$  en las tres relaciones  $h_a/h_c$  y aumentar la altura  $h_a$ , aumenta la relación  $h_a/h_c$ , el área de las secciones transversales a lo largo del voladizo y consecuentemente la masa del voladizo.

**Figura 14**

*Variación de la masa del voladizo en función de la relación  $h_a/h_c$  y del avance del voladizo*

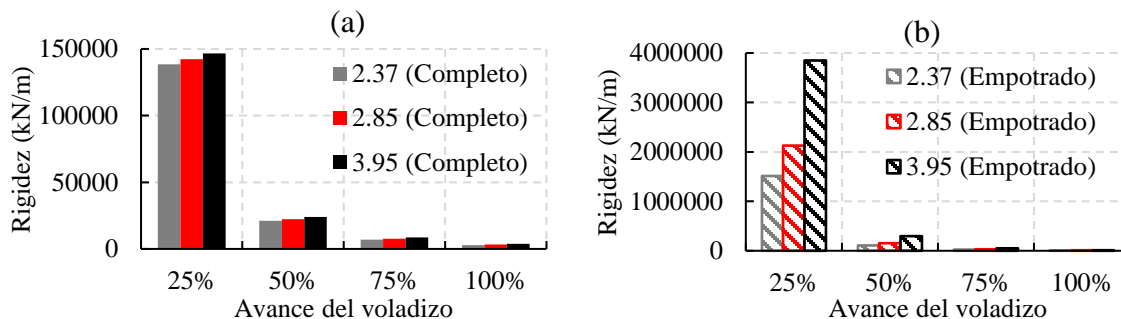


**3.1.4 Rigidez Vertical del Voladizo**

En Figura 15 (a) se muestra la rigidez del voladizo del puente (completo) para cada avance del voladizo y relación  $h_a/h_c$ . Entre mayor es la relación  $h_a/h_c$ , mayor es la rigidez flexional de la viga por el aumento del momento de inercia. También, como era de esperarse, a medida que aumenta el avance del voladizo disminuye la rigidez, debido a que aumenta la longitud del voladizo y la estructura es más flexible. En la Figura 15 (b) se muestra la rigidez del voladizo idealizado (empotrado en la unión de la viga y la pila) para cada avance del voladizo y relación  $h_a/h_c$ . El comportamiento es similar al caso en el que se considera el puente completo (Figura 15 (a)), sin embargo, los valores de rigidez de la viga son mucho mayores debido a que al ser un modelo idealizado, con rigidez infinita en su apoyo, su rigidez no se ve afectada por la rigidez de la pila como en el caso anterior (completo).

**Figura 15**

*Rigidez de la viga del puente completo(a) y empotrado(b) según el avance del voladizo*



### 3.1.5 Formas Modales Verticales

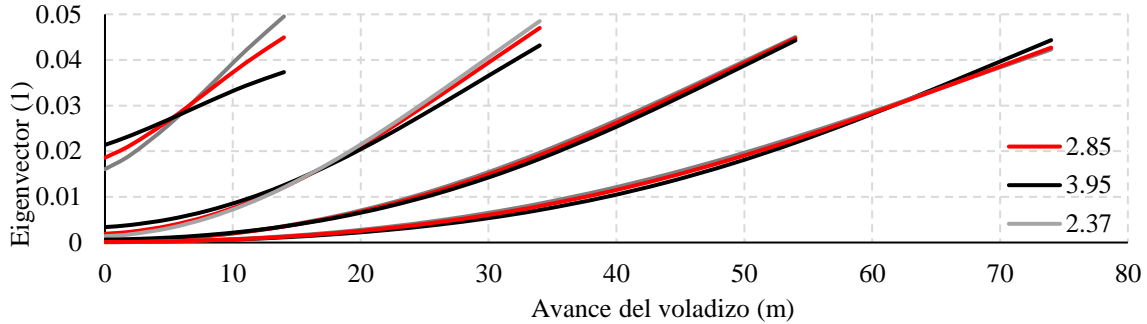
En todos los casos de avance de construcción del voladizo y para las tres relaciones  $h_a/h_c$  en la unión viga-pila, el desplazamiento modal no es cero (Figura 16), puesto que la pila no es infinitamente rígida axialmente y a flexión. Este desplazamiento disminuye a medida que aumenta el avance de construcción del voladizo, y disminuye a medida que disminuye la relación de  $h_a/h_c$ . Esto se debe a la normalización de los modos según la masa, puesto que, en etapas iniciales de la construcción, el voladizo presenta menor masa dando mayores valores de desplazamiento modal, y en la etapa final del voladizo al estar completo presenta mayor masa y los valores de desplazamiento modal normalizado son menores.

Las formas modales del primer modo vertical de cada relación  $h_a/h_c$  para los avances del 100% y 75% (Figura 16) se mantienen similares entre sí, sobre todo en el avance del 75% con algunos pequeños cambios en la concavidad de la curva de la forma modal, siendo algo más pronunciada entre mayor es la relación  $h_a/h_c$ . En el caso de los avances del 50% y 25% (Figura 16) se presentan diferencias más notorias entre las formas modales de cada relación  $h_a/h_c$ , siendo mayores los valores de los eigenvectores a medida que la relación  $h_a/h_c$  decrece.

Estas similitudes y diferencias que se presentan en las formas modales pueden deberse a los porcentajes de participación de masa del primer modo vertical y a la rigidez vertical de la viga. Puesto que en avances como el 75%, la rigidez y participación de masa del primer modo vertical, presenta valores similares entre las tres relaciones  $h_a/h_c$  al igual que las formas modales. Luego en el avance del 25%, la rigidez y la participación de masa en las tres relaciones  $h_a/h_c$  difieren más entre si a comparación de los siguientes avances.

**Figura 16**

*Formas modales del primer modo vertical de cada avance del voladizo y relación  $h_a/h_c$*



### 3.1.6 Respuestas Sísmicas Máximas

Las respuestas sísmicas obtenidas en el análisis multimodal espectral mediante el software Midas Civil, para los 30 primeros modos de vibración y para el primer modo de vibración vertical corresponden al momento flector y fuerza cortante en la unión viga-pila y el desplazamiento en el extremo libre del voladizo. Las respuestas se calcularon para cada porcentaje de avance del voladizo y relación  $h_a/h_c$ .

La Figura 17 presenta la respuesta sísmica obtenida, (a) el momento flector, (b) la fuerza cortante y (c) el desplazamiento en el extremo libre del voladizo. La respuesta se muestra para cada avance y relación  $h_a/h_c$  teniendo en cuenta los 30 primeros modos de vibración (30m) y el primer modo de vibración vertical (1m). Para las relaciones  $h_a/h_c$  de 2.37 y 2.85, el momento flector aumenta desde el avance del 25% del voladizo hasta el avance del 100%, sin embargo, para la relación de  $h_a/h_c$  de 3.95, el momento flector aumenta desde el avance del 25% hasta el avance del 75% y luego disminuye levemente (1.85%) en el avance del 100%. Teniendo en cuenta el primer modo de vibración vertical (1m) para todas las relaciones  $h_a/h_c$ , se observa en la Figura 17 (a) que el momento flector aumenta desde el avance del 25% hasta el 50% y luego disminuye hasta el

avance del 100%, esto debido a la mayor influencia de los modos superiores en estas etapas de avance del voladizo.

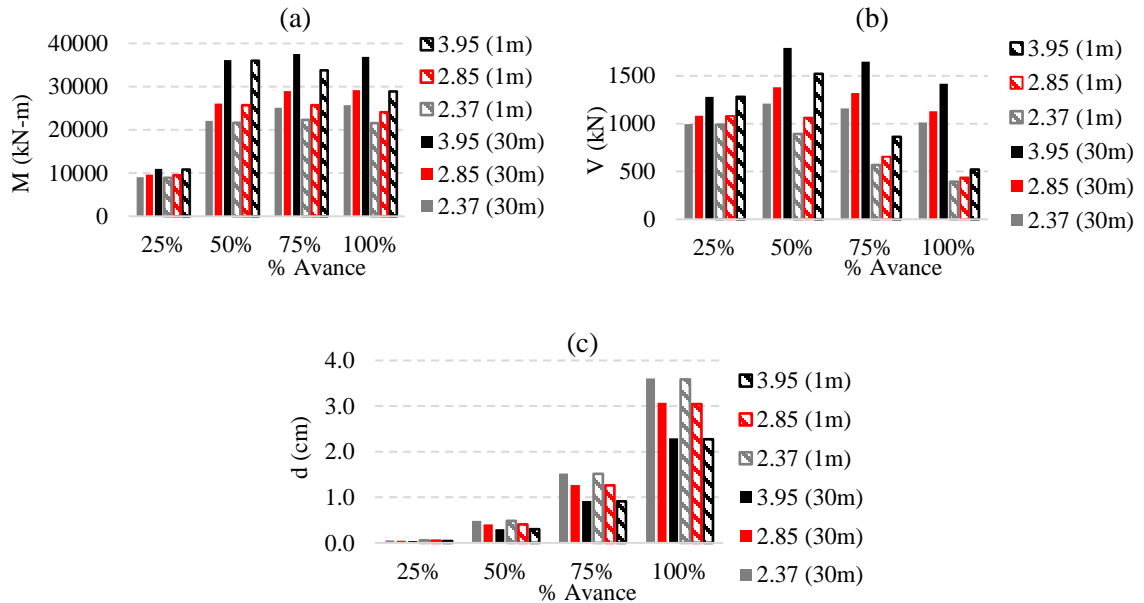
También se observa (Figura 17 (a)) para ambos casos (30 modos y 1 modo) que entre mayor sea la relación de  $h_a/h_c$ , mayor es el momento flector presentado en cada etapa constructiva, puesto que entre mayor sea la relación mayor es la masa que presenta la estructura y por lo tanto sus fuerzas.

En el caso de la fuerza cortante, como se ve en la Figura 17 (b), teniendo en cuenta los 30 primeros modos de vibración (30m), la fuerza cortante aumenta desde el avance del 25% del voladizo hasta el avance del 50%, luego desciende hasta el avance del 100%. Para el primer modo vertical (1m), en la relación de  $h_a/h_c$  de 3.95 se observa en la Figura 17 (b) que la fuerza cortante aumenta desde el avance del 25% del voladizo hasta el 50% y luego disminuye hasta el avance del 100%. En los demás casos de  $h_a/h_c$ , la fuerza cortante para el primer modo disminuye desde el avance del 25% del voladizo hasta el avance del 100%.

En el caso del desplazamiento vertical en el extremo libre del voladizo (Figura 17 (c)) teniendo en cuenta los 30 primeros modos de vibración (30m) o el primer modo vertical (1m), el desplazamiento siempre aumenta con el avance del voladizo. También, a medida que aumenta la relación  $h_a/h_c$  disminuye el desplazamiento vertical, esto es porque la estructura presenta una mayor rigidez flexional cuando la longitud del voladizo es corta y la sección transversal es mayor.

**Figura 17**

*Respuestas máximas obtenidas mediante el análisis multimodal espectral para cada avance del voladizo.*



### 3.2. Análisis Dinámico Mediante el Método de Sistemas Generalizados de Un Grado de Libertad

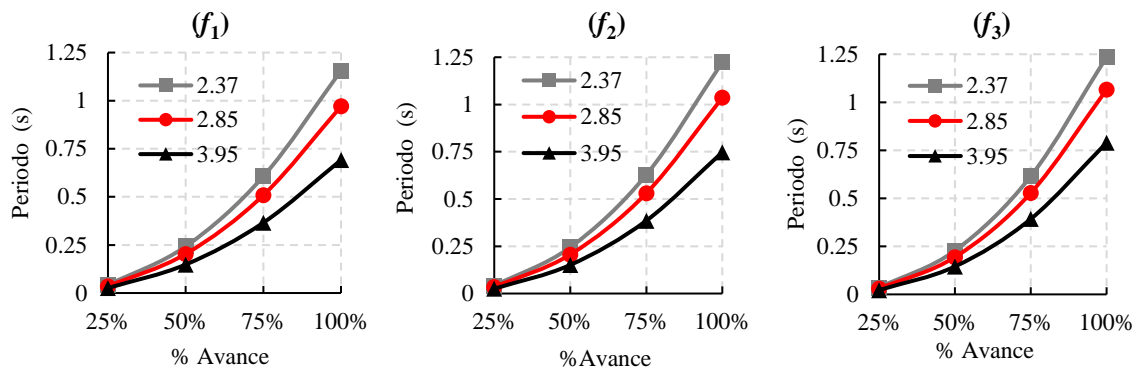
#### 3.2.1 Periodos de la Estructura

Como se observa en la Figura 18, los periodos del primer modo de vibración vertical para el análisis de sistemas generalizados siguen un comportamiento similar a los obtenidos en el análisis multimodal espectral (Figura 13 (a)), donde los periodos aumentan a medida que aumenta el porcentaje de avance del voladizo y a medida que disminuye la relación  $h_a/h_c$ . Estos periodos son relativamente cortos y luego aumentan con el avance del voladizo, por lo que, el avance del 25% estará asociado a mayores aceleraciones verticales. La principal diferencia entre los periodos calculados con método de sistemas generalizados y los obtenidos en el análisis con el software Midas Civil, es que los periodos del análisis simplificado son más cortos (4-15% en el avance del

75%, 6%-21% en los avances del 50% y 100%, 43%-68% para el avance del 25%) respecto a los del análisis computacional. Esto debido a que, el modelo idealizado presenta una mayor rigidez flexional (Figura 15) y consecuentemente menores periodos.

**Figura 18**

*Periodos contra avance para cada función de forma*



**3.2.2 Respuestas Sísmicas Máximas**

A continuación, se presentan las respuestas máximas obtenidas con los sistemas generalizados de un grado de libertad para las tres funciones de forma ( $f_1$  a  $f_3$ ), las tres relaciones  $h_a/h_c$  y para los cuatro avances del voladizo (Tabla 2).

**Tabla 2**

*Respuestas sísmicas máximas calculadas para los sistemas generalizados de un grado de libertad.*

Relación $h_a/h_c = 3.95$									
Avance	$f_1$			$f_2$			$f_3$		
	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)
100%	39570.30	768.81	1.63	36182.58	691.85	1.82	33417.05	628.26	2.03
75%	39266.19	1043.09	0.73	36618.89	957.90	0.80	34788.00	895.20	0.85
50%	36918.76	1535.08	0.23	35649.52	1461.01	0.24	34619.42	1396.72	0.23
25%	7794.08	772.29	0.01	7591.45	742.20	0.01	7337.17	706.77	0.01
Relación $h_a/h_c = 2.85$									
Avance	$f_1$			$f_2$			$f_3$		

	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)
100%	29809.91	572.43	2.45	27555.87	521.13	2.70	25992.56	483.61	2.91
75%	28852.15	758.83	1.09	27141.56	703.30	1.17	26271.14	669.94	1.21
50%	26658.83	1102.09	0.34	25625.85	1044.47	0.35	25882.35	1038.76	0.34
25%	6813.66	673.85	0.01	6637.88	647.79	0.01	6416.77	617.04	0.01
<b>Relación <math>h_a/h_c = 2.37</math></b>									
Avance	$f_1$			$f_2$			$f_3$		
	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)
100%	25515.14	488.55	3.04	23748.60	447.92	3.31	22715.08	421.56	3.48
75%	24475.01	642.07	1.36	23152.32	598.48	1.44	22687.65	577.23	1.46
50%	22379.34	923.73	0.43	21594.26	878.85	0.44	22017.77	882.41	0.42
25%	6465.39	639.06	0.02	6298.96	614.40	0.02	6089.48	585.28	0.01

### 3.3 Comparación de los Resultados Obtenidos por Ambos Métodos

Para la comparación de los resultados obtenidos por ambos métodos, se tomó que los porcentajes de diferencias absolutos menores al 15% indicaban un buen ajuste entre los dos enfoques usados. Como se observa en la Tabla 3, se comprueba que a pesar de que el avance del 25% del voladizo presente los mayores porcentajes de participación de masa en el primer modo de vibración vertical, la exactitud en este avance para todas las funciones de forma y relaciones  $h_a/h_c$  es baja. Este resultado coincide con lo reportado por Arias (2021).

La comparación del momento flector máximo entre el análisis simplificado y el modal espectral (30 primeros modos), muestra que la función  $f_1$  da las menores diferencias en los avances de 75% y 100% para las relaciones  $h_a/h_c$  de 2.37 y 2.85. Para el caso del avance del 50% voladizo, las menores diferencias se lograron con la función  $f_3$  para las relaciones  $h_a/h_c$  de 2.37 y 2.85. Además, para la relación de  $h_a/h_c$  de 3.95, las diferencias más bajas se obtuvieron con la función  $f_2$ .

En cuanto a los desplazamientos (Tabla 3), los porcentajes de diferencia entre los resultados obtenidos al tener en cuenta los 30 primeros modos o el primer modo vertical son similares. Esto es debido a que el desplazamiento no es significativamente afectado por los modos

superiores como las demás respuestas (Figura 17(c)). La función de forma que proporciona las menores diferencias para las tres relaciones  $h_a/h_c$  y para los porcentajes de avance del 100% y 75% (que son los avances críticos para el desplazamiento) es la función  $f_3$ , estando las diferencias máximas por debajo de 12%.

Con las tres funciones de forma en general no se presentan exactitudes aceptables de fuerza cortante para ningún avance del voladizo ni relación  $h_a/h_c$  al incluir los 30 primeros modos de vibración. Al igual que Arias (2021), esto se puede explicar para las tres relaciones  $h_a/h_c$  por la distribución de porcentajes de participación de masa, puesto que, los modos de vibración superiores toman un mayor porcentaje de participación a medida que aumenta el avance de la construcción del voladizo, y consecuentemente presentan una mayor influencia en la respuesta estructural dinámica del puente. Estos modos además presentan periodos más cortos, lo que está asociado a mayores aceleraciones verticales y como consecuencia mayores fuerzas.

**Tabla 3**

*Diferencias entre la respuesta sísmica obtenida del análisis simplificado y las del análisis multimodal espectral con 30 primeros modos de vibración (izquierda) y con el primer modo de vibración vertical (derecha).*

Avance	30 primeros modos									Primer modo vertical								
	Relación $h_a/h_c = 3.95$									Relación $h_a/h_c = 3.95$								
	$f_1$			$f_2$			$f_3$			$f_1$			$f_2$			$f_3$		
	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$
100%	7 %	-46%	-29%	-2%	-51%	-21%	-9%	-56%	-12%	37%	48%	-28%	25%	33%	-20%	16%	21%	-11%
75%	5 %	-37%	-20%	-2%	-42%	-13%	-7%	-46%	-8%	16%	21%	-19%	8 %	11%	-13%	3 %	4 %	-7%
50%	2 %	-14%	-24%	-1%	-18%	-20%	-4%	-22%	-23%	2 %	1 %	-24%	-1%	-4%	-20%	-4%	-8%	-23%
25%	-29%	-40%	-83%	-31%	-42%	-83%	-33%	-45%	-87%	-28%	-40%	-83%	-30%	-42%	-83%	-32%	-45%	-87%
	Relación $h_a/h_c = 2.85$									Relación $h_a/h_c = 2.85$								
Avance	$f_1$			$f_2$			$f_3$			$f_1$			$f_2$			$f_3$		

	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$
100%	2 %	-49%	-20%	-6%	-54%	-12%	-11%	-57%	-5%	24%	31%	-20%	15%	19%	-12%	8 %	11%	-5%
75%	0 %	-43%	-14%	-6%	-47%	-8%	-9%	-49%	-5%	12%	16%	-13%	6 %	8 %	-7%	2 %	2 %	-4%
50%	2 %	-20%	-15%	-2%	-24%	-12%	-1%	-25%	-16%	4 %	4 %	-15%	0 %	-2%	-12%	1 %	-2%	-15%
25%	-29%	-38%	-73%	-31%	-40%	-73%	-33%	-43%	-79%	-29%	-38%	-73%	-30%	-40%	-73%	-33%	-43%	-79%
Relación $h_a/h_c = 2.37$									Relación $h_a/h_c = 2.37$									
Avance	$f_1$			$f_2$			$f_3$			$f_1$			$f_2$			$f_3$		
	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$
100%	-1%	-52%	-16%	-8%	-56%	-8%	-12%	-58%	-3%	18%	24%	-15%	10%	14%	-8%	5 %	7 %	-3%
75%	-3%	-45%	-11%	-8%	-48%	-5%	-10%	-50%	-4%	10%	13%	-10%	4 %	5 %	-5%	2 %	2 %	-4%
50%	1 %	-24%	-12%	-2%	-27%	-9%	0 %	-27%	-14%	3 %	4 %	-12%	0 %	-1%	-9%	2 %	-1%	-14%
25%	-28%	-36%	-66%	-30%	-38%	-67%	-33%	-41%	-74%	-28%	-35%	-66%	-30%	-38%	-66%	-32%	-41%	-74%

Como se observa en la tabla 3 (primer modo vertical), se comprueba que, teniendo en cuenta las respuestas obtenidas en el primer modo de vibración vertical, la función de forma que presenta las menores diferencias para los avances del 50%, 75% y 100% en las tres relaciones  $h_a/h_c$  es  $f_3$ , exceptuando el avance del 100% para la relación  $h_a/h_c$  de 3.95 que presenta bajas exactitudes con las tres funciones de forma. La función  $f_1$ , a comparación de las otras dos, presenta las peores exactitudes para las tres relaciones y los cuatro avances. Estos resultados coinciden con lo reportado por Arias (2021).

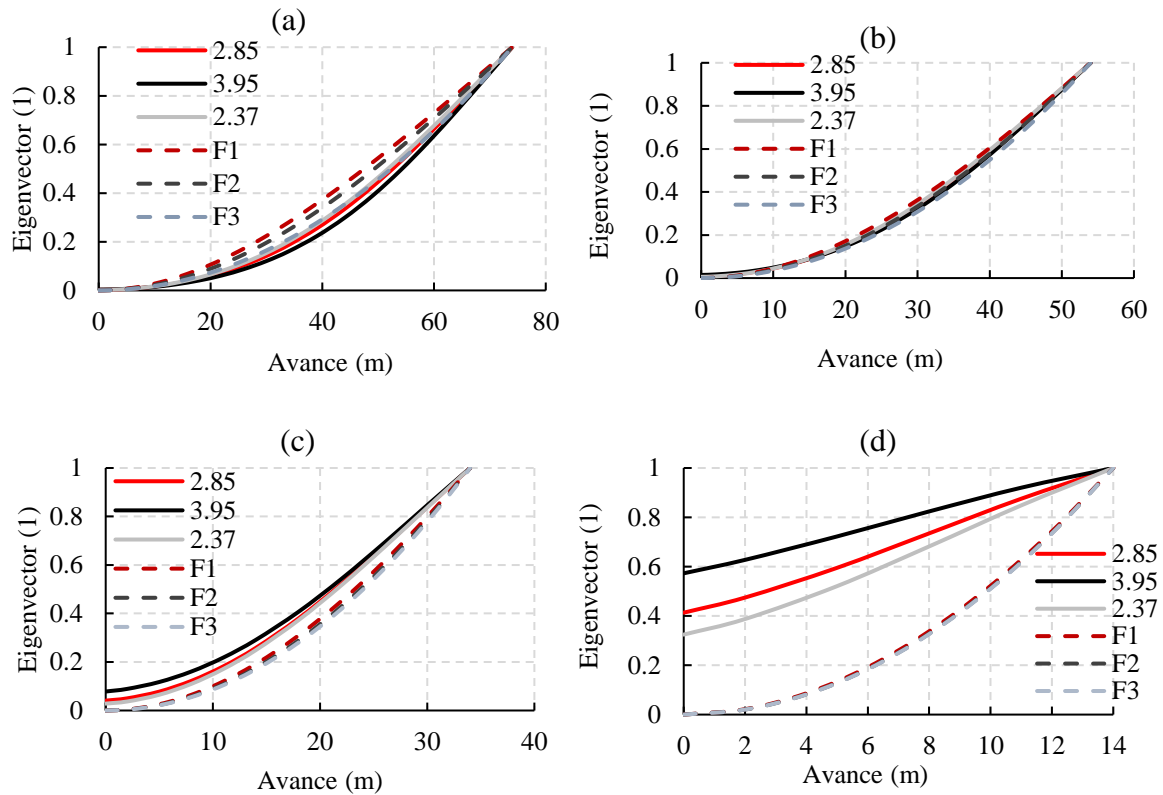
También se observa que en la Tabla 3 (primer modo vertical), los avances del 50% y 75% son los que presentan mejores exactitudes con cualquier función de forma y en las tres relaciones  $h_a/h_c$ , siendo mejores los casos de fuerza cortante y el momento flector para el avance del 50% y del desplazamiento para el avance del 75%. Por lo tanto, para el primer modo de vibración vertical, dependiendo de la función elegida, del porcentaje de avance y de la relación  $h_a/h_c$  se tienen respuestas sísmicas máximas aceptables (diferencias menores a 15%) teniendo en cuenta la simplificación del análisis.

Al comparar las formas modales normalizadas del puente completo obtenidas de Midas Civil y las funciones de forma usadas en el método simplificado (Figura 19), se observa que para el avance del 25% (Figura 19 (d)), las formas modales de las tres relaciones  $h_a/h_c$  se encuentran alejadas de las funciones de forma, lo que podría explicar los resultados presentados en la Tabla 3. En los avances del 25%, 50% y 100% (Figura 19 y Tabla 4), a medida que la relación  $h_a/h_c$  crece, la forma modal se aleja más de las funciones de forma usadas en este trabajo, lo que explicaría las bajas exactitudes para la relación  $h_a/h_c = 3.95$  en el avance del 100%.

Las formas modales y las funciones de forma muestran mayor coincidencia para el avance del 75% del voladizo, y es justamente este avance en donde se presentaron en general los mejores resultados para las tres respuestas (momento, cortante y desplazamiento) teniendo en cuenta el primer modo vertical. Para los avances del 50% y 100% (Figura 19 (b) y (d)) también se observa cierta similitud entre las formas modales de las tres relaciones  $h_a/h_c$  y de las funciones forma.

**Figura 19**

*Comparación de las formas modales normalizadas del puente completo con las funciones de forma usadas en los avances del 100% (a), 75% (b), 50% (c) y 25% (d)*



Debido a que, en algunos avances del voladizo no se logra visualizar la cercanía entre las formas modales obtenidas del modelo computacional y las funciones de forma, se decidió calcular el error cuadrático medio entre estas para cada relación  $h_a/h_c$ . Los errores (Tabla 4) muestran que en el avance del 100% la forma modal de la función  $f_3$  es la de menor error cuadrático medio en todas las relaciones  $h_a/h_c$ ; para el avance del 75% es la función  $f_2$  y para los avances del 50% y 25% es la función  $f_1$ . Por lo tanto, pareciera existir una fuerte correlación entre la forma modal y la exactitud del método sobre todo al analizar el caso del avance del 25%, en donde se obtienen las peores exactitudes y a su vez las funciones de forma también se alejan de las formas modales

para las tres relaciones  $h_a/h_c$ . Sin embargo, en casos como el avance del 75%, donde el menor error cuadrático medio se obtiene con  $f_2$ , las menores diferencias entre las respuestas máximas de ambos métodos (Tabla 3, primer modo vertical) se obtienen con  $f_3$ . Esto último puede deberse a que la función de forma no es el único parámetro que afecta al método, puesto que se está idealizando un sistema de infinitos grados de libertad como un sistema de un solo grado de libertad, y varios factores (rigidez de la pila, materiales dependientes del tiempo, etapas constructivas) no se tuvieron en cuenta.

**Tabla 4**

*Error cuadrático medio entre las formas modales y las funciones de forma*

Avance	Relación $h_a/h_c = 3.95$			Relación $h_a/h_c = 2.85$			Relación $h_a/h_c = 2.37$		
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
100%	0.0818	0.0613	0.0305	0.0615	0.0409	0.0128	0.0512	0.0306	0.0094
75%	0.0234	0.0095	0.0159	0.0160	0.0066	0.0208	0.0111	0.0097	0.0254
50%	0.0834	0.0945	0.0996	0.0550	0.0670	0.0726	0.0472	0.0596	0.0654
25%	0.4765	0.4806	0.4813	0.3668	0.3711	0.3718	0.3043	0.3087	0.3095

Siguiendo el enfoque de Arias (2021), se construyeron modelos en el programa Midas Civil de la mitad de la viga del puente, siendo esta empotrada en la unión viga-pila para los cuatro avances y las tres relaciones  $h_a/h_c$ . Las cargas y condiciones se mantuvieron iguales a las del modelo completo y se obtuvieron las respuestas máximas presentadas en la Tabla D2 del anexo D. Posteriormente se comparó con los resultados del análisis simplificado obteniendo las exactitudes para el primer modo de vibración vertical y para los 30 primeros modos (anexo G). Se observó que las exactitudes para el avance del 25%, y concretamente para el momento flector y el cortante mejoraron considerablemente en las tres relaciones  $h_a/h_c$ , pues pasaron de 31%, en promedio, a 12% para el momento flector y de 40% a 6% para el cortante. Nuevamente se observó en estas comparaciones que en las tres relaciones  $h_a/h_c$ , para el primer modo vertical y según el avance, la

función  $f_3$  y  $f_2$  son las que brindan mejores exactitudes, exceptuando el avance del 25% donde es la función  $f_1$ . En los 30 primeros modos no se tiene una función específica que proporcione las mejores exactitudes, puesto que, dependiendo del avance, de la respuesta sísmica y de la relación  $h_a/h_c$  los mejores resultados se obtienen con una u otra función. En general, en el avance del 25% es nuevamente la función  $f_1$  la que proporciona los mejores resultados en las tres relaciones  $h_a/h_c$ . Esto concuerda con el primer modo vertical, debido a que este avance es el que más porcentaje de participación de masa presenta, por lo que las exactitudes para los 30 primeros modos se mantienen casi iguales a las del primer modo.

A su vez, también se tienen algunas mejoras en las exactitudes para las tres relaciones  $h_a/h_c$  en cuanto al cortante y desplazamiento en el avance del 50% con la función  $f_1$  en los 30 primeros modos de vibración (pasando de 19% en promedio a 6%). Sin embargo, en los siguientes avances es justamente el cortante donde menos exactitud se obtiene con cualquier función. Estos cambios en las exactitudes demuestran la afectación de la rigidez de la unión viga-pila en la aplicación de los sistemas generalizados de un grado de libertad.

#### 4. Conclusiones

Las principales conclusiones obtenidas a partir de los resultados presentados en este trabajo son:

Independientemente de la relación  $h_a/h_c$ , la aplicabilidad de los sistemas generalizados de un grado de libertad en el análisis sísmico de un puente viga cajón se ve afectada por la función de forma usada, del avance del voladizo en estudio, del número de modos de vibración considerados y de la rigidez de la unión viga-pila. Siendo el avance del voladizo el factor que más pesa, puesto que, dependiendo de este, los modos superiores y la rigidez de la unión viga-pila influyen en mayor o menor grado.

La aplicabilidad del método simplificado se ve afectada por la relación  $h_a/h_c$  a través de los porcentajes de participación de masa en el primer modo de vibración vertical. Para las relaciones  $h_a/h_c$  usadas en el presente estudio, a mayor relación  $h_a/h_c$  se presentó mayor participación de masa en el primer modo vertical cuando los avances del voladizo no sobrepasaban 50%, y lo contrario para avances superiores al 50%. Siendo menor la influencia de los modos superiores a mayor relación  $h_a/h_c$  en avances menores o iguales al 50%, obteniendo de esta forma mejores exactitudes al tener en cuenta más modos en la respuesta sísmica.

El nivel de exactitud del método simplificado es altamente dependiente de la función de forma. Esto debido a que en avances como el del 25% que presentan alto porcentaje de participación de masa en el primer modo de vibración vertical (mayores al 70% para las tres relaciones de  $h_a/h_c$ ) deberían obtenerse altos niveles de exactitud al considerar los 30 primeros modos de vibración. Sin embargo, las funciones de forma escogidas difieren considerablemente (error cuadrático medio entre 0.30 y 0.48) de la forma modal real, lo que conlleva a que se presenten exactitudes bajas en la estimación de las fuerzas y desplazamientos sísmicos.

La rigidez de la unión viga-pila influyó significativamente en el nivel de exactitud del método simplificado en el avance del 25%, puesto que en las tres funciones de forma usadas esta se tomó como infinitamente rígida y para las tres relaciones  $h_a/h_c$  se obtuvo bajas exactitudes en el puente completo. En cambio, en la condición de empotramiento, la exactitud mejoró en esta etapa. Por lo que, se cree que la selección de una función de forma adecuada que contemple la rigidez de la unión viga-pila brindará mejores resultados en etapas tempranas de avance del voladizo teniendo en cuenta el puente completo.

Una función de forma adecuada es aplicable a distintas relaciones  $h_a/h_c$  si las formas modales de las diferentes relaciones  $h_a/h_c$  son similares, como sucede en el avance del 75% con la función  $f_3$ .

Es posible obtener buenas exactitudes mediante el método simplificado para las respuestas de momento flector y desplazamiento, puesto que los modos superiores afectan en menor grado a dichas respuestas. Para el caso de la fuerza cortante, el método simplificado arroja diferencias mayores al 15% en comparación con las obtenidas del análisis modal espectral.

### Referencias Bibliográficas

- Anil K. Chopra. (2012). *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering* (4th, illustr ed.). Pearson Education.
- Arias, C. (2021). Aplicabilidad de los Sistemas Generalizados de un Solos Grado de Libertad en el Análisis de un Puente Durante Construcción por Voladizos Sucesivos Sometido a Sismos Verticales. *Universidad Industrial de Santander*.
- Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica. (2014). Seccion 3: Cargas Y Factores De Carga. *Norma Colombiana de Diseño de Puentes, CCP 14, 3, 140*.
- Barras, P., de Matteis, D., Derais, J.-F., Duviard, M., Guillot, D., Lacombe, J.-M., Lacoste, G., Lecointre, D., Ojeda, V., Paillusseau, P., & Reinhard, J.-M. (2007). *Prestressed concrete bridges built using the cantilever method*.
- Benjumea, J. M., Chio Cho, G., Fernández W., A., & Ardila, J. A. (2022). Acceleration Amplitude of the Vertical Component of Colombian Earthquakes. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, 32(1), 83–97. <https://doi.org/10.18359/rcin.5817>
- Bozorgnia, Y., & Campbell, K. W. (2004). The vertical-to-horizontal response spectral ratio and tentative procedures for developing simplified V/H and vertical design spectra. *Journal of Earthquake Engineering*, 8(2), 175–207. <https://doi.org/10.1080/13632460409350486>
- Bravo, J., Benjumea, J., & Consuegra, F. A. (2021). Parametric Study to Estimate Seismic Displacement Demands of Balanced Cantilever Bridges in Service and Construction Conditions. In *fib Symposium 2021 - Concrete Structures: New Trends for Eco-Efficiency and PerformanceAt: Lisbon, Portugal* (pp. 995–1004).

- Castro, S. A. (2021). Respuesta Elástica de un Puente Viga Cajón Bajo la Acción Combinada de Movimientos Sísmicos Verticales y Horizontales Durante Construcción y Servicio. *Universidad Industrial de Santander*, 1(69), 5–24.
- Comite Euro-International Du Beton. (1993). *CEB-FIP Model Code 90*. 213/214, 460.
- de La Cruz, C. (2018). *Análisis De La Respuesta Dinámica De Los Esfuerzos De Empotramiento En Una Viga En Cantiliver*.
- Escobar, S. (2022). *Puentes de concreto de viga cajón híbridos con paredes en celosía*.
- Foutch, D. (1997). *A Note on the Occurrence and Effects of Vertical Earthquake Ground Motion*.
- Jara Díaz, M., Hernández Barrios, H., & Álvarez Mosqueda, O. (2022). Efecto del Componente Sísmico Vertical en Puentes. *Revista de Ingeniería Sísmica*, 108, 79–107.  
<https://doi.org/10.18867/ris.108.602>
- Lucko, G., & de la Garza, J. M. (2003). *Constructability Considerations for Balanced Cantilever Construction*. <https://doi.org/10.1061/ASCE1084-068020038:147>
- MATLAB* (9.13.0.2080170 (R2022b)). (2022). The MathWorks Inc.
- MIDAS CIVIL* (1.2). (2022). MIDAS information technology co. Ltd.
- Titulo A - Requisitos Generales de Diseño y Construcción Sismo Resistente, Ministerio de Ambiente Vivienda y Desarrollo Territorial 1 (2010).
- Newmark, N. M., Blume, J. A., & Kapur, K. K. (1973). Seismic design spectra for nuclear power plants. *Journal of Power Division*, 99(2), 287–303.
- Santos Durán, C., Díaz Durán, E., & Benjumea Royero, J. (2022). *Comparación de la respuesta estructural de un puente viga cajón de voladizos sucesivos durante construcción y en servicio en tres escenarios de humedad relativa de Colombia*.  
<https://doi.org/10.17981/ingecuc.18.1.2022.05>

Shrestha, B. (2009). Hazard Management for Sustainable Development. In *Nepal International Seminar*.

Wibowo, H., & Sritharan, S. (2022). Effects of vertical ground acceleration on the seismic moment demand of bridge superstructure connections. *Engineering Structures*, 253(December 2021), 113820. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113820>

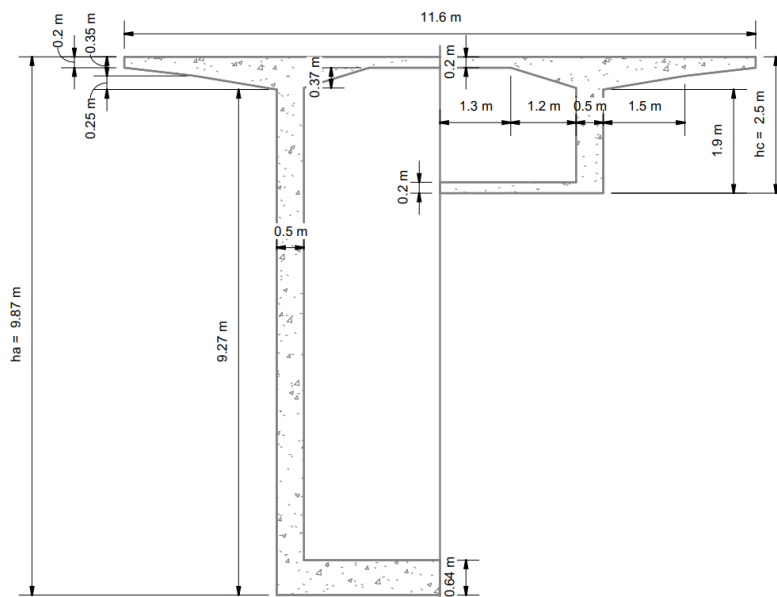
Apéndices

**Apéndice A.** Sección transversal de las relaciones  $h_a/h_c$  inferior y superior

A continuación, se muestra en las Figuras A1 y A2 las dimensiones obtenidas para las relaciones  $h_a/h_c$  inferior y superior en base al análisis de alturas de diferentes puentes en Colombia.

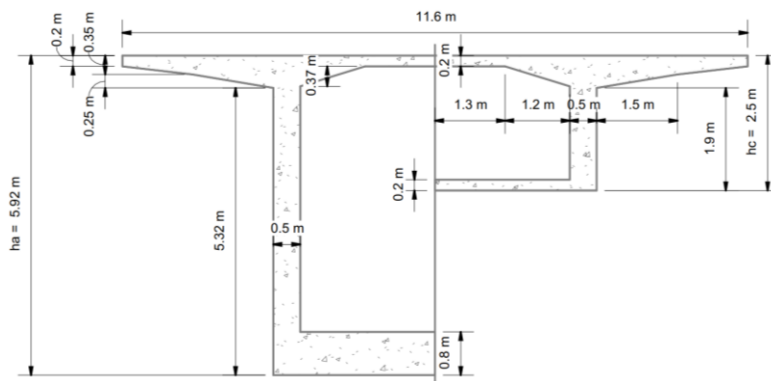
**Figura A1**

*Sección transversal para la relación superior  $h_a/h_c = 3.95$ .*



**Figura A2**

*Sección transversal para la relación inferior  $h_a/h_c = 2.37$ .*



**Apéndice B.** Regresiones polinómicas para la obtención de los parámetros  $m(x)$  e  $I(x)$  requeridos por el método de sistemas generalizados de un grado de libertad

Para encontrar las respuestas máximas mediante los sistemas generalizados de un grado de libertad era necesario tener los datos de como varia el área y la inercia a lo largo de la viga de las tres relaciones  $h_a/h_c$ , por lo tanto, estos datos se obtuvieron al inicio y final de cada dovela mediante el software Midas Civil, y posteriormente con estos se sacaron regresiones polinómicas para obtener ecuaciones que fueron usadas en el método simplificado.

**Tabla B1**

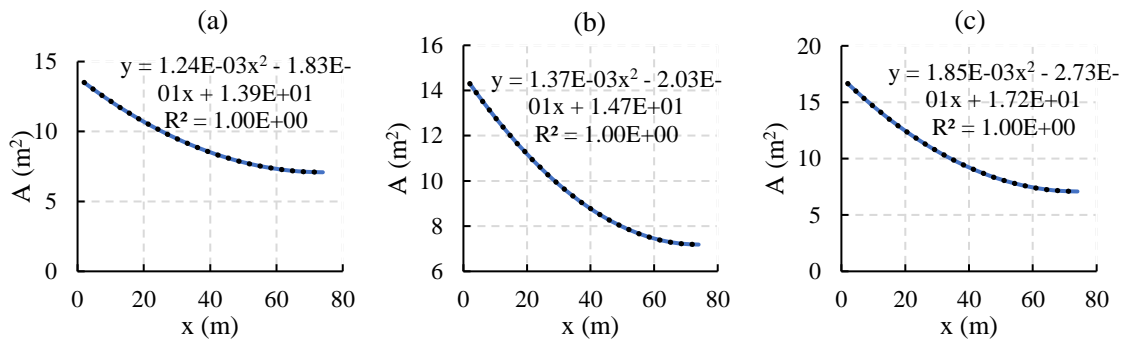
*Áreas e inercias de las dovelas para las tres relaciones de  $h_a/h_c$*

X (m)	L. dovela (m)	$h_a/h_c$ 2.37			$h_a/h_c$ 2.85		$h_a/h_c$ 3.95	
		CS	Área (m <sup>2</sup> )	Inercia (m <sup>4</sup> )	Área (m <sup>2</sup> )	Inercia (m <sup>4</sup> )	Área (m <sup>2</sup> )	Inercia (m <sup>4</sup> )
0	-	-	13.504	71.22	14.304	107.779	16.654	228.758
2	2	2	13.504	71.22	14.304	107.779	16.654	228.758
5	3	3	12.98	62.391	13.723	93.09	15.873	193.4
8	3	4	12.479	54.589	13.167	80.254	15.125	162.982
11	3	5	11.999	47.712	12.635	69.069	14.411	136.911
14	3	6	11.542	41.665	12.128	59.351	13.73	114.652
18	4	7	10.968	34.746	11.491	48.391	12.873	90.077
22	4	8	10.433	28.964	10.898	39.393	12.076	70.423
26	4	9	9.937	24.158	10.348	32.049	11.337	54.828
30	4	10	9.482	20.184	9.843	26.091	10.658	42.554
34	4	11	9.065	16.916	9.382	21.29	10.038	32.977
39	5	12	8.601	13.662	8.866	16.616	9.345	24.007
44	5	13	8.199	11.164	8.42	13.121	8.745	17.601
49	5	14	7.858	9.276	8.042	10.546	8.238	13.102
54	5	15	7.579	7.88	7.733	8.689	7.822	10.01
59	5	16	7.363	6.884	7.493	7.394	7.499	7.949
64	5	17	7.208	6.219	7.321	6.546	7.269	6.652

69	5	18	7.115	5.839	7.218	6.067	7.13	5.941
74	5	19	7.084	5.715	7.184	5.912	7.084	5.715

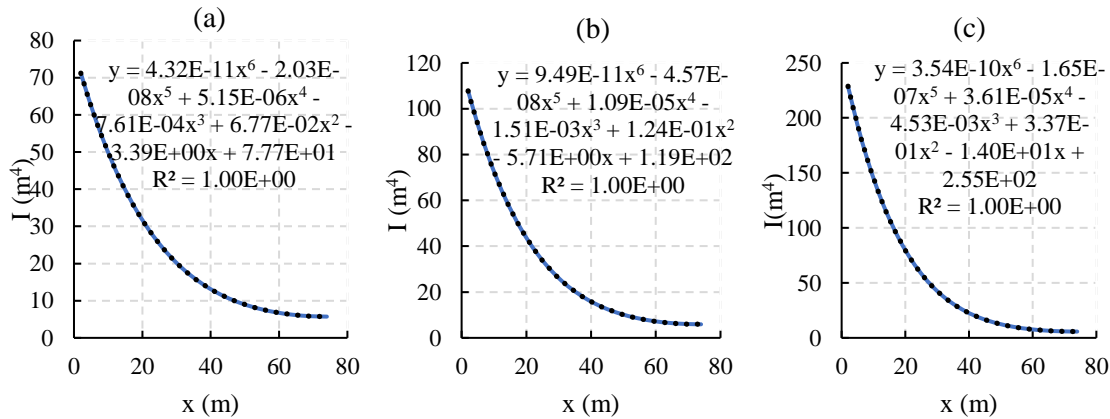
**Figura B1**

Regresión polinómica para la ecuación del área de la viga de las tres relaciones  $h_a/h_c$ , 2.37 (a), 2.85 (b) y 3.95 (c).



**Figura B2**

Regresión polinómica para la ecuación de inercia de la viga de las tres relaciones  $h_a/h_c$ , 2.37 (a), 2.85 (b) y 3.95 (c).



**Apéndice C.** Periodos y porcentajes de participación de masa de los avances y relaciones  $h_a/h_c$  estudiados

A continuación, se presentan los periodos de cada uno de los 30 modos estudiados y a su vez el porcentaje de masa en dirección vertical (eje Z) de cada uno además de la sumatoria total, teniendo que todos los avances y en todas las relaciones se supera el 90% de participación.

**Tabla C1**

*Periodos y porcentaje de participación de masa en dirección vertical para el avance del 25% y 50% de la relación  $h_a/h_c$  de 2.37.*

modo	$h_a/h_c$ 2.37					
	Avance del 25%			Avance del 50%		
	periodo (s)	TRAN-Z		periodo (s)	TRAN-Z	
	MASS(%)	SUM(%)		MASS(%)	SUM(%)	
1	0.62842	0	0	1.23663	0	0
2	0.41545	0	0	0.94796	0	0
3	0.27556	0	0	0.6216	0	0
4	0.11636	0	0	0.28726	0	0
5	0.07407	73.99	73.99	0.26979	49.58	49.58
6	0.04148	0	73.99	0.13455	0	49.58
7	0.03347	16.4	90.39	0.07768	0	49.58
8	0.03205	0	90.39	0.07581	32.98	82.56
9	0.03068	0	90.39	0.0595	0	82.56
10	0.01883	0	90.39	0.04196	0	82.56
11	0.018	0	90.39	0.03953	10.25	92.81
12	0.01713	2.82	93.21	0.03596	0.07	92.89
13	0.01601	0	93.21	0.03585	0	92.89
14	0.01497	0	93.21	0.03465	0	92.89
15	0.01347	1.68	94.89	0.03014	0	92.89
16	0.01277	0	94.89	0.02616	0	92.89
17	0.01054	0	94.89	0.02382	2.3	95.18
18	0.01043	2.28	97.17	0.02133	0	95.18
19	0.01027	0	97.17	0.02077	0	95.18
20	0.01022	0	97.17	0.01885	0	95.18
21	0.0092	0	97.17	0.01703	0	95.18
22	0.00914	0	97.17	0.01698	0.75	95.93
23	0.00867	0	97.17	0.01597	0	95.93
24	0.00815	0.77	97.94	0.0153	0	95.93
25	0.00802	0	97.94	0.01489	0.5	96.43
26	0.00772	0	97.94	0.01421	0	96.43
27	0.00754	0.01	97.95	0.01415	0	96.43
28	0.00754	0	97.95	0.01317	0	96.43
29	0.00741	0	97.95	0.0131	0.59	97.02
30	0.00711	0	97.95	0.01196	0	97.02

**Tabla C2**

*Periodos y porcentaje de participación de masa en dirección vertical para el avance del 75% y*

*100% de la relación  $h_a/h_c$  de 2.37.*

$h_a/h_c$ 2.37						
modo	Avance del 75%			Avance del 100%		
	periodo (s)	TRAN-Z		periodo (s)	TRAN-Z	
		MASS(%)	SUM(%)		MASS(%)	SUM(%)
1	2.02921	0	0	3.04	0	0
2	1.77222	0	0	2.7305	0	0
3	0.81018	0	0	1.3002	42.24	42.24
4	0.65751	44.99	44.99	1.0809	0	42.24
5	0.43279	0	44.99	0.6161	0	42.24
6	0.28623	0	44.99	0.4424	0	42.24
7	0.19076	0	44.99	0.3475	0	42.24
8	0.15905	23.35	68.35	0.3102	20.49	62.73
9	0.12806	0	68.35	0.2248	0	62.73
10	0.07555	0	68.35	0.1476	0	62.73
11	0.07403	0	68.35	0.1323	12	74.74
12	0.07389	15.92	84.26	0.1241	0	74.74
13	0.0557	1.23	85.49	0.0805	0	74.74
14	0.04919	0	85.49	0.0794	0	74.74
15	0.046	6.97	92.46	0.0786	9.46	84.2
16	0.04287	0	92.46	0.0724	0.76	84.96
17	0.04124	0	92.46	0.0589	0	84.96
18	0.0358	0	92.46	0.0536	6.72	91.68
19	0.03531	0	92.46	0.0512	0	91.68
20	0.03268	2.65	95.11	0.0449	0	91.68
21	0.03039	0	95.11	0.0447	0	91.68
22	0.02922	0	95.11	0.0408	0	91.68
23	0.02787	0	95.11	0.0397	3.06	94.74
24	0.02439	0	95.11	0.0372	0	94.74
25	0.02416	1.02	96.14	0.0354	0	94.74
26	0.0215	0.01	96.15	0.0327	0	94.74
27	0.02119	0	96.15	0.0313	1.11	95.85
28	0.02098	0	96.15	0.0306	0	95.85
29	0.01937	0.57	96.72	0.0282	0.19	96.04
30	0.0187	0	96.72	0.0279	0	96.04

**Tabla C3**

*Periodos y porcentaje de participación de masa en dirección vertical para el avance del 25% y 50% de la relación  $h_a/h_c$  de 2.85.*

h <sub>a</sub> /h <sub>c</sub> 2.85						
modo	Avance del 25%			Avance del 50%		
	periodo (s)	TRAN-Z		periodo (s)	TRAN-Z	
		MASS(%)	SUM(%)		MASS(%)	SUM(%)
1	0.6799	0	0	1.29779	0	0
2	0.4528	0	0	0.96667	0	0
3	0.28292	0	0	0.67326	0	0
4	0.11318	0	0	0.27678	0	0
5	0.07066	79.41	79.41	0.23292	51.17	51.17
6	0.04301	0	79.41	0.13411	0	51.17
7	0.03189	11.56	90.97	0.0718	34.98	86.15
8	0.0316	0	90.97	0.0697	0	86.15
9	0.03158	0	90.97	0.06034	0	86.15
10	0.01885	0	90.97	0.0434	0	86.15
11	0.01731	0	90.97	0.03723	7.11	93.25
12	0.01668	2.59	93.57	0.03586	0	93.25
13	0.01605	0	93.57	0.03553	0.66	93.92
14	0.01531	0	93.57	0.03478	0	93.92
15	0.01343	0	93.57	0.028	0	93.92
16	0.01267	1.93	95.49	0.02701	0	93.92
17	0.01085	0	95.49	0.022	1.67	95.59
18	0.0103	0	95.49	0.02153	0	95.59
19	0.01024	0	95.49	0.02116	0	95.59
20	0.0101	2	97.5	0.01774	0	95.59
21	0.00959	0	97.5	0.01753	0	95.59
22	0.00887	0	97.5	0.01595	0	95.59
23	0.00868	0	97.5	0.01586	0.41	95.99
24	0.0085	0	97.5	0.01578	0	95.99
25	0.00797	0	97.5	0.01479	0.66	96.65
26	0.00786	0	97.5	0.0147	0	96.65
27	0.00783	0.57	98.07	0.01375	0	96.65
28	0.00775	0	98.07	0.01324	0	96.65
29	0.0073	0.07	98.14	0.01252	0	96.65
30	0.0067	0	98.14	0.01232	0.74	97.4

**Tabla C4**

*Periodos y porcentaje de participación de masa en dirección vertical para el avance del 75% y 100% de la relación  $h_a/h_c$  de 2.85.*

h <sub>a</sub> /h <sub>c</sub> 2.85						
modo	Avance del 75%			Avance del 100%		
	periodo (s)	TRAN-Z		periodo (s)	TRAN-Z	
		MASS(%)	SUM(%)		MASS(%)	SUM(%)
1	2.07131	0	0	3.03852	0	0
2	1.79583	0	0	2.75341	0	0
3	0.86078	0	0	1.13318	40.88	40.88
4	0.56449	44.58	44.58	1.11411	0	40.88
5	0.41673	0	44.58	0.59279	0	40.88
6	0.28826	0	44.58	0.45695	0	40.88
7	0.17473	0	44.58	0.32959	0	40.88
8	0.14403	25.25	69.83	0.28291	21.18	62.06
9	0.12843	0	69.83	0.22506	0	62.06
10	0.07462	0	69.83	0.13837	0	62.06
11	0.0698	17.44	87.27	0.12467	0	62.06
12	0.06925	0	87.27	0.12359	13.38	75.44
13	0.0553	0.65	87.92	0.08126	0	75.44
14	0.05001	0	87.92	0.07646	8.65	84.09
15	0.04362	5.95	93.87	0.07453	0	84.09
16	0.04273	0	93.87	0.07039	2.84	86.93
17	0.03979	0	93.87	0.05957	0	86.93
18	0.03636	0	93.87	0.05155	6.25	93.18
19	0.03538	0	93.87	0.0482	0	93.18
20	0.0307	1.82	95.69	0.04561	0	93.18
21	0.03015	0	95.69	0.04455	0	93.18
22	0.02995	0	95.69	0.04228	0	93.18
23	0.02603	0	95.69	0.03798	2.34	95.52
24	0.02508	0	95.69	0.03624	0	95.52
25	0.02263	0.74	96.43	0.03559	0	95.52
26	0.0216	0	96.43	0.03204	0	95.52
27	0.02149	0.05	96.47	0.03122	0	95.52
28	0.01988	0	96.47	0.03012	0.57	96.09
29	0.01928	0	96.47	0.02799	0.38	96.47
30	0.01823	0.46	96.93	0.027	0	96.47

**Tabla C5**

*Periodos y porcentaje de participación de masa en dirección vertical para el avance del 25% y*

*50% de la relación  $h_a/h_c$  de 3.95.*

h <sub>a</sub> /h <sub>c</sub> 3.95						
modo	Avance del 25%			Avance del 50%		
	periodo (s)	TRAN-Z		periodo (s)	TRAN-Z	
		MASS(%)	SUM(%)		MASS(%)	SUM(%)
1	0.81635	0	0	1.46485	0	0
2	0.55125	0	0	1.01134	0	0
3	0.30268	0	0	0.80651	0	0
4	0.10938	0	0	0.26178	0	0
5	0.06893	86.52	86.52	0.18346	55.93	55.93
6	0.0462	0	86.52	0.13416	0	55.93
7	0.03412	0	86.52	0.0682	35.22	91.16
8	0.03086	0	86.52	0.06281	0	91.16
9	0.02972	5.45	91.96	0.05809	0	91.16
10	0.02105	0	91.96	0.04646	0	91.16
11	0.01616	0	91.96	0.03872	0	91.16
12	0.0161	0	91.96	0.03474	0.05	91.21
13	0.0159	2.44	94.4	0.03377	0	91.21
14	0.01557	0	94.4	0.03301	3.99	95.2
15	0.01491	0	94.4	0.02921	0	95.2
16	0.01232	0	94.4	0.02449	0	95.2
17	0.01166	2.21	96.62	0.02349	0	95.2
18	0.01085	0	96.62	0.02107	0	95.2
19	0.01046	0	96.62	0.01951	0	95.2
20	0.00988	0	96.62	0.01932	0.99	96.19
21	0.00976	1.28	97.89	0.01713	0	96.19
22	0.00972	0	97.89	0.01635	0	96.19
23	0.00912	0	97.89	0.0155	0	96.19
24	0.009	0	97.89	0.01524	0.03	96.22
25	0.00895	0	97.89	0.01517	0	96.22
26	0.00808	0	97.89	0.01517	0	96.22
27	0.00773	0	97.89	0.0139	0	96.22
28	0.0076	0.37	98.27	0.01382	0.97	97.18
29	0.00722	0	98.27	0.01256	0	97.18
30	0.00679	0.17	98.43	0.01251	0	97.18

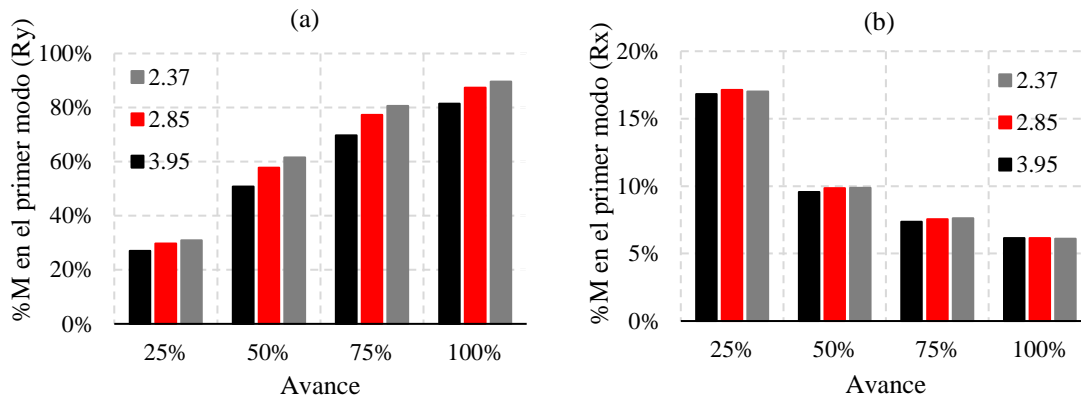
**Tabla C6**

*Periodos y porcentaje de participación de masa en dirección vertical para el avance del 75% y 100% de la relación  $h_a/h_c$  de 3.95.*

h <sub>a</sub> /h <sub>c</sub> 3.95						
modo	Avance del 75%			Avance del 100%		
	periodo (s)	TRAN-Z		periodo (s)	TRAN-Z	
		MASS(%)	SUM(%)		MASS(%)	SUM(%)
1	2.20283	0	0	3.08236	0	0
2	1.83715	0	0	2.76623	0	0
3	0.99282	0	0	1.20693	0	0
4	0.42747	43.84	43.84	0.87535	37.49	37.49
5	0.3926	0	43.84	0.55438	0	37.49
6	0.28946	0	43.84	0.47827	0	37.49
7	0.14795	0	43.84	0.2986	0	37.49
8	0.1295	0	43.84	0.24103	23.03	60.52
9	0.12286	30.54	74.39	0.22474	0	60.52
10	0.07639	0	74.39	0.12587	0	60.52
11	0.06515	17.69	92.08	0.12365	0	60.52
12	0.0594	0	92.08	0.11134	17.25	77.77
13	0.05349	0	92.08	0.08296	0	77.77
14	0.05215	0	92.08	0.07451	8.42	86.19
15	0.04587	0	92.08	0.06706	0	86.19
16	0.0395	3.51	95.58	0.06581	4.59	90.78
17	0.03872	0	95.58	0.06117	0	90.78
18	0.03565	0	95.58	0.04843	4.43	95.21
19	0.03446	0	95.58	0.04735	0	95.21
20	0.0318	0	95.58	0.04548	0	95.21
21	0.02952	0	95.58	0.0444	0	95.21
22	0.02751	0.82	96.4	0.04347	0	95.21
23	0.02681	0	96.4	0.03815	0	95.21
24	0.02316	0	96.4	0.03519	1.25	96.46
25	0.02315	0	96.4	0.03382	0	96.46
26	0.02146	0.13	96.54	0.03273	0	96.46
27	0.02073	0	96.54	0.03036	0	96.46
28	0.02025	0.4	96.93	0.029	0.01	96.47
29	0.01853	0	96.93	0.02847	0	96.47
30	0.01787	0	96.93	0.02669	0.54	97.02

**Figura C1**

*Porcentaje de participación de masa del primer modo alrededor del eje Y o Ry (a) y alrededor del eje X o Rx (b)*



**Apéndice D. Respuestas máximas obtenidas con el método multimodal espectral**

Las respuestas máximas obtenidas mediante el análisis multimodal espectral para el modelo completo y la condición de empotramiento perfecto de cortante y momento flector en la unión viga-pila y el desplazamiento máximo al final del voladizo de cada avance y relación se encuentran en las siguientes tablas.

**Tabla D1**

*Respuestas máximas de cortante y momento en la unión viga-pila y desplazamiento máximo al final del voladizo para las tres relaciones  $h_a/h_c$  y los cuatro avances del voladizo.*

Relación $h_a/h_c = 3.95$						
Avance	30 modos			1 modo		
	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)
100%	36852.3	1418.0	2.30	28889.4	521.0	2.3
75%	37548.8	1649.4	0.92	33750.3	860.3	0.9
50%	36138.8	1791.4	0.30	36035.1	1519.7	0.3
25%	10948.4	1281.2	0.04	10824.4	1279.5	0.04

Relación $h_a/h_c = 2.85$						
Avance	30 modos			1 modo		
	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)
100%	29194.5	1129.6	3.07	24054.6	437.4	3.0
75%	28993.1	1321.2	1.27	25717.7	654.0	1.3
50%	26073.7	1379.0	0.40	25723.2	1063.3	0.4
25%	9642.5	1084.1	0.05	9530.0	1080.9	0.05

Relación $h_a/h_c = 2.37$						
Avance	30 modos			1 modo		
	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)
100%	25701.9	1013.8	3.61	21563.0	394.6	3.6
75%	25105.0	1158.9	1.52	22288.4	568.0	1.5
50%	22100.7	1210.8	0.48	21646.0	890.4	0.5
25%	9030.3	995.2	0.05	8939.9	988.8	0.05

**Tabla D2**

*Respuestas máximas del análisis multimodal espectral de media viga en la condición de empotramiento perfecto, para las tres relaciones  $h_a/h_c$  y los cuatro avances del voladizo.*

Relación $h_a/h_c = 3.95$						
Avance	E. Perfecto - 30 modos			E. Perfecto - 1 modo		
	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)
100%	35392.8	1141.7	2.3	28600.5	512.5	2.25
75%	35693.6	1303.5	0.88	32791.1	819.1	0.88
50%	33591.6	1500.7	0.26	33177.5	1294.3	0.26
25%	8845.8	800.3	0.01	8838.8	728.4	0.01

Relación $h_a/h_c = 2.85$						
Avance	E. Perfecto - 30 modos			E. Perfecto - 1 modo		
	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)
100%	28227.9	939.6	3.1	23731.2	430.3	3.08
75%	27748.4	1077.1	1.26	25149.1	633.1	1.26
50%	24814.5	1158.5	0.38	24401.9	969.2	0.38
25%	7506.2	717	0.02	7500.3	667.9	0.02

Relación $h_a/h_c = 2.37$						
Avance	E. Perfecto - 30 modos			E. Perfecto - 1 modo		
	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)	M (kN-m)	V (kN)	$\delta$ (cm)
100%	25230.2	862.5	3.6	21489.8	392.3	3.57

75%	24515	989	1.5	22078.1	558.8	1.49
50%	21336.7	1025.5	0.46	20922.1	837.7	0.46
25%	7044	689.6	0.03	7037.1	645.5	0.03

**Apéndice E.** Eigenvectores del primer modo vertical de las tres relaciones  $h_a/h_c$  analizadas

Se presentan los valores de eigenvectores usados para realizar las gráficas de la forma modal del primer modo de vibración vertical de cada uno de los avances y relaciones  $h_a/h_c$ .

**Tabla E1**

*Eigenvectores del primer modo vertical de las tres relaciones  $h_a/h_c$  para el avance del 100%.*

Avance - 100%				
Nodo	Distancia (m)	EigenVector - $h_a/h_c$ 3.94	EigenVector - $h_a/h_c$ -2.85	EigenVector - $h_a/h_c$ -2.37
44	74	0.04434	0.04271	0.04231
42	69	0.03848	0.03753	0.03739
40	64	0.03267	0.03239	0.03249
38	59	0.02708	0.02737	0.02770
36	54	0.02189	0.02261	0.02311
34	49	0.01725	0.01823	0.01883
32	44	0.01324	0.01430	0.01493
30	39	0.00988	0.01088	0.01149
28	34	0.00713	0.00799	0.00853
26	30	0.00535	0.00606	0.00651
24	26	0.00389	0.00444	0.00480
22	22	0.00273	0.00311	0.00338
20	18	0.00182	0.00206	0.00224
18	14	0.00114	0.00126	0.00137
16	11	0.00076	0.00081	0.00087
14	8	0.00048	0.00048	0.00050
12	5	0.00029	0.00025	0.00025
4	2	0.00019	0.00013	0.00011
3	0	0.00016	0.00009	0.00007

**Tabla E2**

*Eigenvectores del primer modo vertical de las tres relaciones  $h_a/h_c$  para el avance del 75%.*

Avance - 75%				
Nodo	Distancia (m)	EigenVector - $h_a/h_c$ 3.94	EigenVector - $h_a/h_c$ -2.85	EigenVector - $h_a/h_c$ -2.37
36	54	0.044286	0.044747	0.045009
34	49	0.037382	0.038023	0.038395
32	44	0.03057	0.031366	0.031839
30	39	0.024135	0.024999	0.025531
28	34	0.018331	0.019146	0.019676
26	30	0.014258	0.014958	0.015442
24	26	0.01074	0.011276	0.011681
22	22	0.007789	0.008136	0.00844
20	18	0.005394	0.00555	0.005744
18	14	0.003531	0.003512	0.0036
16	11	0.00246	0.002332	0.002351
14	8	0.001651	0.001439	0.001401
12	5	0.001086	0.00082	0.000742
4	2	0.000748	0.000459	0.000362
3	0	0.00064	0.000355	0.000258

**Tabla E3**

*Eigenvectores del primer modo vertical de las tres relaciones  $h_a/h_c$  para el avance del 50%.*

Avance - 50%				
Nodo	Distancia (m)	EigenVector - $h_a/h_c$ 3.94	EigenVector - $h_a/h_c$ -2.85	EigenVector - $h_a/h_c$ -2.37
28	34	0.043186	0.047012	0.048511
26	30	0.036558	0.03943	0.040596
24	26	0.029868	0.031825	0.032675
22	22	0.023441	0.024521	0.025059
20	18	0.01759	0.017859	0.018088
18	14	0.012567	0.012129	0.012069
16	11	0.009452	0.00858	0.00833
14	8	0.006946	0.005744	0.005341
12	5	0.005075	0.003661	0.003156
4	2	0.003845	0.002352	0.001805
3	0	0.003382	0.001913	0.001377

**Tabla E4**

*Eigenvectores del primer modo vertical de las tres relaciones  $h_a/h_c$  para el avance del 25%.*

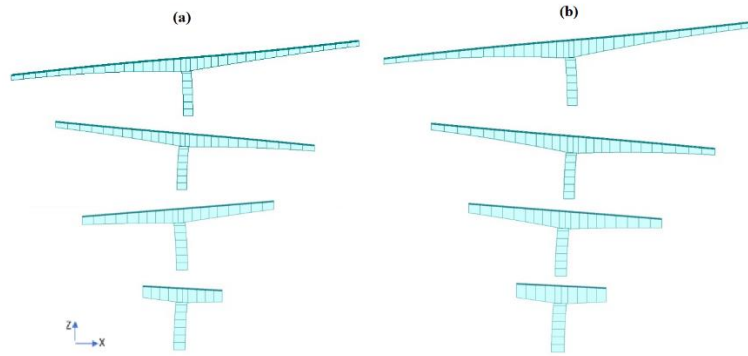
Avance - 25%				
Nodo	Distancia (m)	EigenVector - $h_a/h_c$ 3.94	EigenVector - $h_a/h_c$ -2.85	EigenVector - $h_a/h_c$ -2.37
18	14	0.037328	0.0449413	0.0495384
16	11	0.034342	0.0393418	0.042028
14	8	0.030754	0.0330288	0.0337874
12	5	0.026968	0.026751	0.0258106
4	2	0.023422	0.0213314	0.0192
3	0	0.021386	0.0185759	0.0160698

**Apéndice F.** Formas modales típicas de los primeros modos X, Y y Rz

Las formas modales de los avances del voladizo del primer modo en X para las relaciones  $h_a/h_c$  de 2.37 y 2.85 se presentan en la Figura F.1, en el caso de la relación  $h_a/h_c$  de 3.95 la forma modal tiene el mismo comportamiento a la de 2.85. Las formas modales de los avances del voladizo del primer modo en Y para las tres relaciones  $h_a/h_c$  tienen el mismo comportamiento como la que se presenta en la Figura F.2. Finalmente, en la Figura F.3 se presentan las formas modales de los avances del voladizo para las relaciones  $h_a/h_c$  de 2.37 y 3.95, en el caso de 2.85 el comportamiento es el contrario al de las formas modales de 2.37.

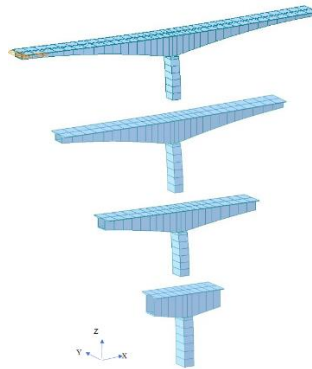
**Figura F1**

*Formas modales del primer modo en X para la relación  $h_a/h_c$  de 2.37 (a) y 2.85 (b)*



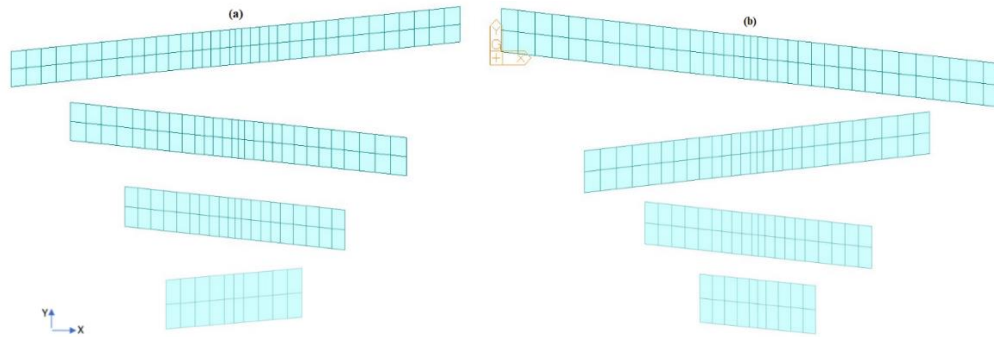
**Figura F2**

*Formas modales del primer modo en Y para la relación  $h_a/h_c$  de 3.95.*



**Figura F3**

*Formas modales del primer modo torsional (Rz) para la relación  $h_a/h_c$  de 237 (a) y 3.95 (b)*



**Apéndice G.** Porcentajes de diferencias para la condición de empotramiento perfecto en el análisis multimodal espectral.

A continuación, se presentan los porcentajes de diferencia obtenidos al comparar el método simplificado con el análisis multimodal espectral, ahora en la condición de empotramiento perfecto de la viga, teniendo en cuenta únicamente el primer modo de vibración vertical y también al tener en cuenta los 30 primeros modos de vibración.

**Tabla G1**

*Diferencias del análisis simplificado con el análisis multimodal espectral para el primer modo de vibración vertical en la condición de empotramiento perfecto.*

Relación $h_a/h_c = 3.95$									
Avance	$f_1$			$f_2$			$f_3$		
	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$
100%	38%	50%	-27%	27%	35%	-19%	17%	23%	-10%
75%	20%	27%	-16%	12%	17%	-9%	6%	9%	-4%
50%	11%	19%	-12%	7%	13%	-8%	4%	8%	-11%
25%	-12%	6%	-51%	-14%	2%	-52%	-17%	-3%	-62%
Relación $h_a/h_c = 2.85$									
Avance	$f_1$			$f_2$			$f_3$		

	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$
100%	26%	33%	-20%	16%	21%	-12%	10%	12%	-6%
75%	15%	20%	-13%	8%	11%	-7%	4%	6%	-4%
50%	9%	14%	-9%	5%	8%	-6%	6%	7%	-9%
25%	-9%	1%	-43%	-11%	-3%	-44%	-14%	-8%	-56%

Relación  $h_a/h_c = 2.37$

Avance	$f_1$			$f_2$			$f_3$		
	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$
100%	19%	25%	-15%	11%	14%	-7%	6%	7%	-2%
75%	11%	15%	-9%	5%	7%	-4%	3%	3%	-2%
50%	7%	10%	-7%	3%	5%	-4%	5%	5%	-9%
25%	-8%	-1%	-38%	-10%	-5%	-40%	-13%	-9%	-53%

**Tabla G2**

*Diferencias del análisis simplificado con el análisis multimodal espectral para los 30 primeros modos de vibración en la condición de empotramiento perfecto.*

Relación $h_a/h_c = 3.95$									
Avance	$f_1$			$f_2$			$f_3$		
	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$
100%	12%	-33%	-28%	2%	-39%	-20%	-6%	-45%	-10%
75%	10%	-20%	-17%	3%	-27%	-10%	-3%	-31%	-4%
50%	10%	2%	-13%	6%	-3%	-8%	3%	-7%	-11%
25%	-12%	-3%	-51%	-14%	-7%	-52%	-17%	-12%	-62%

Relación  $h_a/h_c = 2.85$

Avance	$f_1$			$f_2$			$f_3$		
	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$
100%	6%	-39%	-21%	-2%	-45%	-13%	-8%	-49%	-6%
75%	4%	-30%	-13%	-2%	-35%	-7%	-5%	-38%	-4%
50%	7%	-5%	-9%	3%	-10%	-6%	4%	-10%	-9%
25%	-9%	-6%	-43%	-12%	-10%	-44%	-15%	-14%	-56%

Relación  $h_a/h_c = 2.37$

Avance	$f_1$			$f_2$			$f_3$		
	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$	M	V	$\delta$
100%	1%	-43%	-15%	-6%	-48%	-8%	-10%	-51%	-3%
75%	0%	-35%	-10%	-6%	-39%	-4%	-7%	-42%	-3%
50%	5%	-10%	-7%	1%	-14%	-4%	3%	-14%	-9%
25%	-8%	-7%	-38%	-11%	-11%	-40%	-14%	-15%	-53%