

ESTUDIO DEL RÉGIMEN DE APLICACIÓN DE LA  
ÓPTICA PARAXIAL VERSUS LA ÓPTICA METAXIAL  
CON BASE EN EL CRITERIO DE RAYLEIGH

GERSON JOHAN MARÍN FLÓREZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2012

ESTUDIO DEL RÉGIMEN DE APLICACIÓN DE LA  
ÓPTICA PARAXIAL VERSUS LA ÓPTICA METAXIAL  
CON BASE EN EL CRITERIO DE RAYLEIGH

GERSON JOHAN MARÍN FLÓREZ

Trabajo de Grado para optar al Título de  
Físico

Director

RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARIS  
Doctor en Ciencias Naturales (Física)

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2012

# Índice general

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>9</b>
<b>1. Fundamentos</b>	<b>12</b>
1.1. Teoría del Estigmatismo Riguroso . . . . .	12
1.1.1. Expresión general . . . . .	12
1.1.2. Ovoide de Descartes . . . . .	13
1.1.3. Puntos de Young . . . . .	14
1.2. Estigmatismo Aproximado . . . . .	16
1.3. Principio de Fermat . . . . .	18
1.4. Óptica de Primer Orden Paraxial . . . . .	19
1.4.1. Refracción en un Dioptra Esférico . . . . .	19
1.5. Teoría de Tercer Orden: Aberraciones . . . . .	22
1.6. Óptica Metaxial . . . . .	24
1.6.1. Término de Fase Cuadrático . . . . .	25
1.6.2. Aproximación de Segundo Orden . . . . .	26
1.6.3. Teoremas . . . . .	28
1.7. Criterio del Cuarto de Onda de Rayleigh . . . . .	29
1.8. Criterio de Resolución de Rayleigh . . . . .	31
<b>2. Curvatura de Campo de Petzval</b>	<b>33</b>
2.1. Solución Metaxial . . . . .	34
2.2. Aplicación de la Óptica Metaxial a las esferas de Young . . . . .	36
2.2.1. Régimen Paraxial y Metaxial . . . . .	38

<b>3. Determinación del Régimen Paraxial</b>	<b>43</b>
3.1. Foco imagen aproximado . . . . .	43
3.2. Foco imagen exacto . . . . .	45
3.3. Criterio de resolución de Rayleigh . . . . .	47
<b>4. Determinación del Régimen Metaxial</b>	<b>50</b>
<b>5. Análisis de resultados</b>	<b>53</b>
5.1. Ambigüedades sobre la Región Paraxial . . . . .	54
<b>6. Conclusiones</b>	<b>56</b>

# Índice de figuras

1.1. Sistema Estigmático . . . . .	13
1.2. Cuártica . . . . .	13
1.3. Puntos de Young. La figura (a) muestra la construcción original desarrollada por Young cuando $n'$ es mayor que $n$ . La figura (b) es una representación de los puntos de Young en un sistema óptico centrado, donde $\sigma_o$ es el objeto, $\sigma_i$ es la imagen y $\sigma$ (esfera roja) un dioptro esférico. Las distancias objeto e imagen, $s_o$ y $s_i$ , vienen dadas por $Rn'/n$ y $Rn/n'$ , respectivamente. . . . .	15
1.4. Los ángulos $\alpha_o$ y $\alpha_i$ son, respectivamente, los ángulos que forman los rayos incidente y saliente con el eje óptico. $\overline{AB}$ y $\overline{AB'}$ son los planos frontales de los puntos $A$ y $A'$ , respectivamente. . . . .	17
1.5. Longitud de camino óptico en función de la trayectoria $S$ . Las trayectorias $S_1$ , $S_2$ y $S_3$ son trayectorias estacionarias. . . . .	18
1.6. Refracción en una interfaz esférica. . . . .	20
1.7. Esfera de Referencia Gaussiana $\sigma_G$ , de radio $R_G$ , centrada sobre $A'$ a la salida de los rayos paraxiales. La región paraxial es la sección transversal marcada por el segmento PQ. . . . .	21
1.8. Esferas confocales. En óptica metaxial se pasa de la amplitud del campo sobre $A$ a la amplitud del campo sobre $B$ por una transformación de Fourier. . . . .	26
1.9. Comparación entre una esfera y un paraboloide. . . . .	27
1.10. Imagen coherente por un sistema centrado cualquiera $S$ . Hay una doble conjugación, de los vértices y de los centros de curvatura, entre $A$ y su imagen $A'$ . . . . .	28

1.11. Cambio de la esfera de referencia. La distancia $Q'Q$ es la aberración asociada a la esfera Gaussiana. . . . .	30
1.12. Difracción de una apertura circular. El patrón de Airy es observado cuando $r$ es mucho mayor que $h^2/\lambda$ . . . . .	32
2.1. Todos los rayos que salen de la superficie objeto $\sigma_o$ y apuntan al centro $C$ del dioptrio siguen con la misma dirección y se focalizan en la esfera $\sigma_i$ . $f$ es el foco paraxial y a su vez el foco de la parábola de Petzval. . . . .	34
2.2. Imagen de un objeto plano mediante el enfoque de la óptica metaxial.	35
2.3. Régimen paraxial para las esferas de Young. . . . .	39
2.4. Régimen metaxial para las esferas de Young. . . . .	41
3.1. Aberración esférica debida a la refracción en una sola superficie. $f$ es el foco imagen paraxial. . . . .	44
3.2. Variación del foco imagen $f$ con la altura $h$ . La función de color azul es la expresión exacta (ecuación 3.12), mientras que la función de color violeta es la planteada por la teoría de tercer orden (ecuación 3.6). En $h = 0$ ambas funciones son iguales a 0,7, es decir, coinciden con la teoría paraxial. . . . .	46
3.3. Imagen de un objeto puntual ubicado en el infinito y su patrón de difracción generado por la apertura circular $PS$ . $h_p$ denota el límite máximo de tolerancia para la región paraxial. . . . .	47
4.1. Se asocia un frente de onda esférico para los rayos paraxiales que convergen en $f_p$ y otro para los rayos paraxiales que convergen en $f'$ .	51
5.1. El objetivo $L$ , representado por sus puntos principales $H$ y $H'$ y su foco objeto $F$ , permite obtener sobre el plano $P$ el mismo campo que sobre la esfera $A$ . . . . .	54

# Estudio del Régimen de Aplicación de la Óptica Paraxial versus la Óptica Metaxial con base en el Criterio de Rayleigh\*

Gerson Johan Marín Flórez\*\*

**Palabras Claves:** paraxial, metaxial, régimen, aberración, criterio de Rayleigh.

## RESUMEN

La *óptica paraxial* constituye una aproximación de primer orden en la formación de imágenes, limitando las superficies objeto e imagen a planos. Este enfoque exige que las dimensiones transversales de los sistemas ópticos sean muy pequeñas, pero no indica qué tan pequeñas deben ser.

Para obtener una idea más clara sobre el régimen de aplicación de la óptica paraxial se ha hecho uso del *criterio de resolución de Rayleigh*, la cual permitió obtener cuantitativamente la sección transversal de un sistema óptico simple en función del radio de curvatura del dioptra, conservando la calidad de la imagen. El resultado indicó que el régimen paraxial requiere que las dimensiones transversales de las lentes sean acotadas aproximadamente en 2 órdenes de magnitud por debajo de las dimensiones de sus radios de curvatura.

Por otro lado, la *óptica metaxial* de Bonnet, es una aproximación de segundo orden que limita las superficies objeto e imagen a secciones de esferas. Aplicando la *Regla del cuarto de onda de Rayleigh* para definir su régimen de aplicación, se obtuvo que estas dimensiones son más consecuentes con las verdaderas dimensiones de las secciones transversales de los dispositivos ópticos del mercado, es decir, que las dimensiones transversales de las lentes deben ser de un orden de magnitud menos que sus radios de curvatura.

Por lo tanto, los dispositivos ópticos reales se desenvuelven en un régimen más cercano al régimen metaxial que al paraxial.

---

\*Proyecto de Grado

\*\*Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Rafael Ángel Torres Amaris

# Studying the Application of the Paraxial Optics versus Metaxial Optics based on the Rayleigh criterion<sup>\*\*\*</sup>

Gerson Johan Marín Flórez<sup>\*\*\*\*</sup>

**Key Words:** paraxial, metaxial, regime, aberration, focus, Rayleigh criterion.

## ABSTRACT

*Paraxial optics* constitutes a first order approximation into the images formation, limiting the object surfaces and image to planes. This approach demands the transverse dimensions of the optic systems to be too small, but it doesn't show how small they should be.

To obtain a clearer idea about the application regime of the paraxial optics the use of Rayleigh quarter of wave rule has been used, which allowed obtain quantitatively the transversal section of a simple optic system in function of the dioptrio's radio, maintaining the quality of the image. The result indicates that the paraxial regime requires transversal dimensions of the lens to be approximately 100 times smaller compared to the dimensions of theirs radii of curvature.

On the other hand, the Bonnet's *metaxial optics*, is a second order approximation that limits the object surfaces to sections of spheres. By applying *the rule wave quarter of Rayleigh* to define its application regime, it was obtained that this dimensions were according with the true dimensions of the transverse sections of the optical devices of the market, namely, that the transversal dimensions of the lens should be approximately 10 times smaller compared to the dimensions of theirs radii of curvature.

Hence, the real optical devices operate on a regimen nearest to the paraxial than metaxial.

---

<sup>\*\*\*</sup> Graduation Project

<sup>\*\*\*\*</sup> Faculty of Science. School of Physics. Director: Rafael Ángel Torres Amaris

# INTRODUCCIÓN

En 1841, Carl Friedrich Gauss desarrolló el instrumento teórico fundamental para la formación de imágenes, el cual, durante varias décadas fue el único soporte matemático empleado para el diseño de lentes.

Para diseñar un sistema óptico real, donde las lentes no son suficientemente delgadas, esta propuesta de Gauss constituye solo la base para, mediante técnicas más avanzadas de diseño de lentes, obtener imágenes de alta calidad, pero no perfectas[1]. Cuando un sistema óptico está bien corregido, una onda esférica incidente proveniente de una fuente puntual (punto objeto), emergerá con una forma muy similar a una onda esférica, enfocándose nuevamente en otro punto (punto imagen).

John William Strutt, tercer Barón Rayleigh, en 1807 investigó sobre la cantidad máxima de aberración que puede tolerar un sistema óptico, concluyendo que cuando un sistema sufre de aberraciones esféricas primarias una cantidad tal que el frente de onda en la pupila de salida se sale de la esfera de referencia Gaussiana por menos que  $\lambda/4$ , la intensidad en el foco Gaussiano disminuye menos del 20%, una pérdida que puede usualmente ser tolerada[2].

En el pasado, los diseñadores de lentes han tratado de reducir los efectos de la aberración mediante la combinación de varias lentes esféricas. Cada elemento adicional da algunos grados más de libertad en el diseño, más sin embargo, parte la luz se refleja en cada elemento, reduciendo la intensidad resultante; mientras que tal conjunto de lentes puede, simplemente, ser sustituido por una única lente asférica[3].

Estas lentes asféricas pueden aumentar el rango de la zona focal y requieren menor grosor que las lentes esféricas y cilíndricas convencionales[4]. Aunque se sabe que pueden corregir

cualquier tipo de aberración[5], sus aplicaciones no han sido tan comunes como podría esperarse, y esa es la razón que ha hecho difícil la fabricación de lentes de alta calidad a precios razonables[3]. No obstante, con la demanda creciente de celulares con cámara, esta fabricación de lentes ha aumentado y en el futuro serán mucho más económicas[5].

Por su parte las aberraciones han sido analizadas, primeramente, desde el punto de vista de la óptica geométrica, es decir, representando la imagen con los puntos de intersección de los rayos geométricos con el plano imagen[6]. Cuando se incluyen términos hasta tercer orden, aparecen las cinco *aberraciones primarias*, también conocidas como *aberraciones de Seidel*.

En general, las aberraciones han sido analizadas desde dos puntos de vista: según la teoría geométrica y según la teoría de la difracción. Las primeras fueron desarrolladas por Schwarzschild (1905), Steward (1926) y Nijboer (1943), mientras que las últimas por Conrady (1919), Steward (1925), Picht (1925, 1926), Born (1932, 1938), Zernike (1934), Nijboer (1947), Mahajan (1981, 1982), entre otros[7].

Sin embargo, Born y Wolf [6], consideran que en instrumentos ordinarios, las aberraciones de onda pueden ser mucho mayores que cuarenta o cincuenta veces la longitud de onda, pero para instrumentos usados en trabajos más precisos (tales como telescopios o microscopios), ellas deben ser reducidas a valores mucho más pequeños, del orden de una fracción de longitud de onda.

Diferentes criterios de tolerancia en las aberraciones han sido establecidos para el desarrollo de variados sistemas prácticos, todos basados en el Criterio de Rayleigh, pues coinciden en que la calidad de la imagen se mantiene siempre y cuando la pérdida de la intensidad en el centro del patrón no exceda el 20 % [7].

Por otra parte, la óptica Metaxial, teoría desarrollada por George Bonnet en los años 1975-1978, ofrece un punto de vista original y valioso sobre la formación de imágenes. Mientras que la óptica paraxial no tiene en cuenta las fases del objeto y la imagen, puesto que impone una aproximación de primer orden con respecto a los parámetros de la apertura y las dimensiones laterales de los objetos, la formulación de Bonet sí las considera en

una aproximación de segundo orden[8].

Esta aproximación de las fases al segundo orden permite trabajar con emisores y receptores esféricos (estrictamente hablando son paraboloides), pues lo que importa no es tanto la forma real de los objetos, sino más bien su modo de iluminación (convergente o divergente)[8].

Dado que en el mercado son más comunes las lentes esféricas, la óptica metaxial ha sido desarrollada para emisores y receptores esféricos, limitando su régimen de aplicación a la región en donde las esferas y los paraboloides prácticamente se confunden (régimen metaxial)[8].

Observando este aspecto, ha surgido el interés por determinar qué tan grandes pueden ser las dimensiones transversales de los sistemas ópticos tanto en el régimen paraxial como en el metaxial.

Considerando que el enfoque metaxial, al tener en cuenta las fases de las amplitudes del campo objeto y del campo imagen, ofrece un tratamiento más consecuente con la naturaleza de la propagación de la luz (Principio de Huygens-Fresnel), la hipótesis de este trabajo sugiere que la aberración primaria de curvatura de campo de la *teoría de tercer orden* se manifiesta en una menor proporción en el modelo metaxial que en el modelo paraxial, aun cuando el resultado de la detección del campo en el plano imagen es el mismo para ambos modelos.

Para obtener el régimen de aplicación de cada teoría, se trabajará con un sistema óptico simple, es decir, con un dioptrio esférico. Para el caso del régimen paraxial se aplicará el *criterio de resolución de Rayleigh* sobre el foco imagen conforme los rayos que inciden al dioptrio paralelamente al eje óptico y a una distancia  $h$ , y así determinar su variación máximamente tolerada, a la cual, se le asocia la sección transversal del dioptrio buscada. Mientras que para el régimen metaxial se mantendrá el mismo cálculo paraxial, pero teniendo en cuenta un criterio adicional (justificable porque el modelo metaxial trabaja con distribuciones del campo sobre paraboloides), conocido como *criterio del cuarto de onda de Rayleigh*.

# Capítulo 1

## Fundamentos

### 1.1. Teoría del Estigmatismo Riguroso

El diseño de un sistema formador de imágenes capaz de generar una imagen perfecta solo es posible para el caso de un objeto puntual.

#### 1.1.1. Expresión general

Considérese dos puntos  $A$  y  $A'$ . Si para un cono de rayos procedentes de  $A$ , hay un cono correspondiente de rayos que pasa a través de  $A'$ , se dice que el *sistema es estigmático* para esos dos puntos. Dado que se cumple el *principio de reversibilidad*, el par de puntos se denominan *puntos conjugados* [1].

Esta propiedad conocida como estigmatismo riguroso, es la base sobre la cual se sustenta la teoría de la formación de imágenes. Para que ella se cumpla es necesario que dicho cono de rayos atraviese un sistema óptico  $S$ , como se muestra en la figura (1.1).

En un sistema óptico ideal cada punto de una región tridimensional (espacio objeto) tendrá su respectiva imagen estigmática en el espacio imagen.

Como se puede observar, esta definición considera que cada rayo que une a  $A$  y  $A'$  por una trayectoria diferente a través del sistema óptico  $S$  tiene exáctamente la misma Longitud de Camino Óptico LCO.

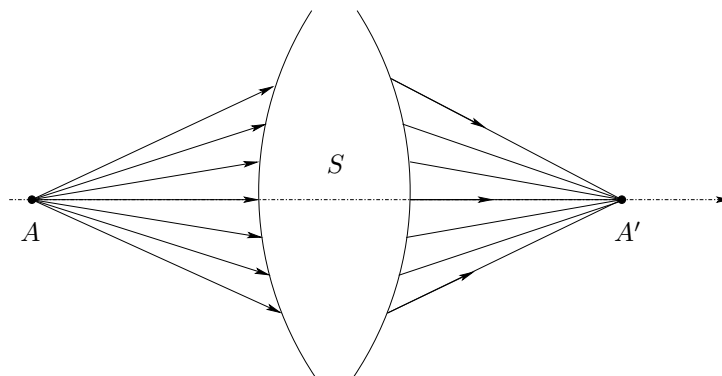


Figura 1.1: Sistema Estigmático

### 1.1.2. Ovoide de Descartes

Si se considera que el sistema  $S$  consta solamente de una superficie  $\sigma$  que separa a dos medios homogéneos de índices de refracción  $n$  y  $n'$  (ver figura 1.2), y se exige que la LCO de cada uno de los rayos que va de  $A$  a  $A'$  (ubicados sobre el eje óptico) sea la misma, se obtiene que la superficie dióptrica corresponde a una cuártica (superficie de cuarto grado) conocida como *Ovoide de Descartes* [1].

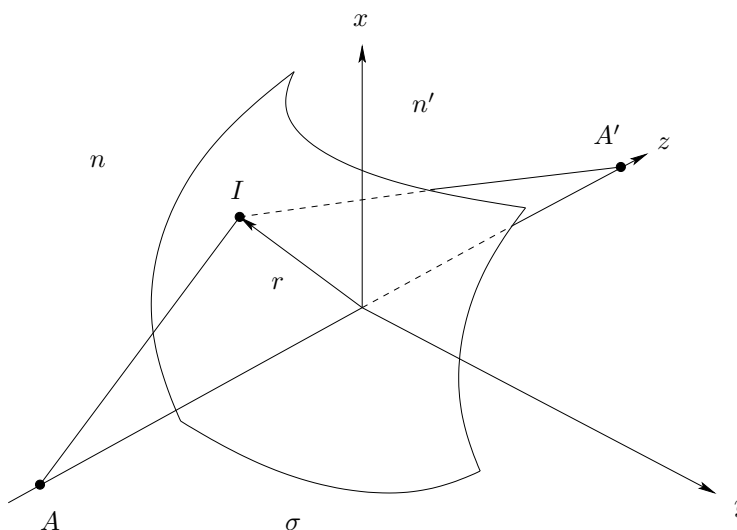


Figura 1.2: Cuártica

Esta superficie  $\sigma$  permite el estigmatismo riguroso entre los puntos  $A$  y  $A'$  cuando estos están ubicados sobre el eje óptico. Sin embargo no está demostrado que esta misma superficie  $\sigma$  no permita el estigmatismo riguroso Resumenpara otro par de puntos distin-

tos de  $A$  y  $A'$ , como sí sucede para las esferas de Young con los puntos conocidos como “Weierstrass”, también llamados “Puntos de Young” (este caso se analizará detenidamente en la siguiente sección).

Las lentes esféricas, que pueden ser hiperbólicas, parabólicas o elipsoidales, son casos degenerados de los ovoides de Descartes. Ellas pueden mejorar grandemente la calidad de las imágenes[5]. Si se adiciona una sola superficie esférica a un sistema óptico centrado, se puede lograr que el sistema adquiera astigmatismo axial. Cuando se adicionan dos superficies esféricas, cualquier sistema óptico centrado puede, en general, satisfacer tanto la condición de astigmatismo axial como la *condición Seno de Abbe*, permitiendo así que el sistema óptico sea aplanético [6].

Otro caso degenerado de los ovoides de Descartes es el dioptrio esférico, donde los puntos estigmaticos son los *Puntos de Young*. Este caso es particularmente importante por su “facilidad” de fabricación y será tratado a continuación.

### 1.1.3. Puntos de Young

Considérese la esfera sólida homogénea  $\sigma$  de índice de refracción  $n'$  envuelta en un medio homogéneo de índice de refracción  $n$ . Sea  $C$  el centro de esta esfera y  $R$  su radio. Si  $S_i$  es un rayo incidente sobre la esfera  $\sigma$  (ver figura 1.3a), se desea conocer el correspondiente rayo refractado. T. Young mostró que el rayo refractado puede ser encontrado mediante la siguiente construcción[11]:

Sean  $\sigma_o$  y  $\sigma_i$  dos esferas cuyos centros están en  $C$  y cuyos radios son respectivamente:

$$R_o = \frac{n'}{n}R \quad y \quad R_i = \frac{n}{n'}R. \quad (1.1)$$

Si  $P_o$  es el punto de intersección entre el rayo  $S_i$  y la esfera  $\sigma_o$ , y  $P_1$  es el punto en que  $\overline{CP_o}$  intercepta a la esfera  $\sigma_i$ , el rayo  $S_i$  será refractado por el dioptrio  $\sigma$  obligándole a pasar por el punto  $P_1$ . Por lo tanto  $\overline{QP_1}$  es el rayo refractado. Si se revisa la construcción de la figura 1.3a se tiene que  $R_o = \overline{CP_o}$ ,  $R_i = \overline{CP_1}$ , y que  $R = \overline{CQ}$ , por lo que se cumple que

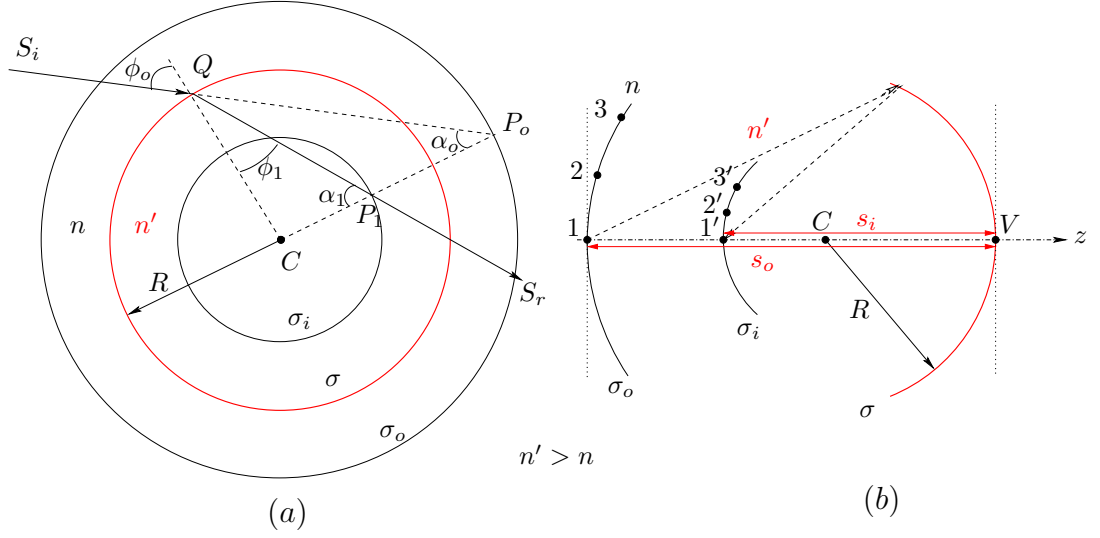


Figura 1.3: Puntos de Young. La figura (a) muestra la construcción original desarrollada por Young cuando  $n'$  es mayor que  $n$ . La figura (b) es una representación de los puntos de Young en un sistema óptico centrado, donde  $\sigma_o$  es el objeto,  $\sigma_i$  es la imagen y  $\sigma$  (esfera roja) un dioptra esférico. Las distancias objeto e imagen,  $s_o$  y  $s_i$ , vienen dadas por  $Rn'/n$  y  $Rn/n'$ , respectivamente.

$$\frac{CQ}{CP_o} = \frac{CP_1}{CQ} = \frac{n}{n'}, \quad (1.2)$$

así que los ángulos  $\widehat{QCP_o}$  y  $\widehat{QCP_1}$  son iguales

$$\widehat{QCP_o} = \widehat{QCP_1}, \quad (1.3)$$

y por lo tanto, los triángulos  $CQP_o$  y  $CP_1Q$  son similares y en consecuencia se satisface

$$\frac{\sin \phi_o}{\sin \phi_1} = \frac{CP_o}{CQ} = \frac{n'}{n}, \quad (1.4)$$

donde  $\phi_o = \angle CQP_o$  y  $\phi_1 = \angle CQP_1$  son los ángulos de incidencia y refracción respectivamente.  $\phi_o$  y  $\phi_1$  satisfacen la *Ley de Refracción*, así que  $\overline{QP_1}$  es, por lo tanto, el rayo refractado.

Esta construcción implica que todos los rayos que divergen desde un punto  $P_o$  sobre  $\sigma_o$  formarán una imagen estigmática (virtual) en el punto  $P_1$  en donde la línea  $\overline{CP_o}$  intercepta a la superficie  $\sigma_i$ . Por lo tanto, “la esfera  $\sigma_i$  es la imagen estigmática de la esfera  $\sigma_o$ , y

*viceversa*”[6].

Al representar los puntos de Young en un sistema óptico centrado (ver figura 1.3b) se puede apreciar claramente que una porción de esfera en calidad de objeto ( $\sigma_o$ ) tiene como imagen estigmática otra sección esférica  $\sigma_i$ , en donde el sistema óptico es un dioptra esférico y las distancias objeto e imagen son  $Rn'/n$  y  $Rn/n'$ , respectivamente. Es decir, cada punto sobre  $\sigma_o$  (1, 2 y 3) tiene su imagen estigmática sobre  $\sigma_i$  (1', 2' y 3').

En el caso,  $n' > n$  (figura 1.3), la imagen es más pequeña que el objeto. Pero cuando  $n > n'$  el radio de la esfera  $\sigma_i$  es más grande que el de la esfera  $\sigma_o$ , lo cual quiere decir que la imagen es más grande que el objeto.

Esta construcción permite obtener imágenes perfectas, donde las distancias objeto e imagen,  $s_o$  y  $s_i$  (ver figura 1.3a), dependen de los índices de refracción.

Si se revisa la construcción de Young (figura 1.3a) se puede notar que los triángulos  $QCP_o$  y  $P_1CQ$  son semejantes, es decir,  $\alpha_o = \phi_1$  y  $\alpha_1 = \phi_o$ , por lo tanto, en semejanza con la ecuación 1.4, se tiene

$$\frac{\sin \alpha_o}{\sin \alpha_1} = \frac{n}{n'} = \text{constante}. \quad (1.5)$$

En la siguiente sección se verá esta expresión corresponde a la condición Seno de Abbe.

## 1.2. Estigmatismo Aproximado

Conservar el estigmatismo en un entorno de  $A$  (ver figura 1.1) es, por lo general imposible[9].

Sin embargo, la noción de aplanetismo indica que es posible conservar un estigmatismo aproximado en torno del punto  $A$  pero en el plano frontal  $\overline{AB}$ , y cuyo plano conjugado es el plano frontal de  $A'$  ( $\overline{A'B'}$ )[9]:

Matemáticamente corresponde a la *Condición Seno de Abbe* y se expresa como

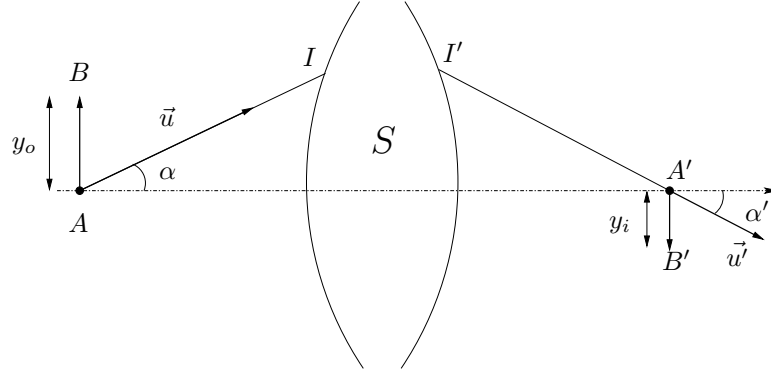


Figura 1.4: Los ángulos  $\alpha_o$  y  $\alpha_i$  son, respectivamente, los ángulos que forman los rayos incidente y saliente con el eje óptico.  $\overline{AB}$  y  $\overline{A'B'}$  son los planos frontales de los puntos  $A$  y  $A'$ , respectivamente.

$$y_o n_o \sin \alpha_o = y_i n_i \sin \alpha_i, \quad (1.6)$$

donde  $n_o$ ,  $y_o$ ,  $\alpha_o$ ,  $n_i$ ,  $y_i$ ,  $\alpha_i$ , representan el índice, la altura y el ángulo respectivamente (ver figura 1.4.

Si el aumento transversal  $M_T = y_i/y_o$  es constante para toda la lente

$$\frac{\sin \alpha_o}{\sin \alpha_i} = \text{constante}, \quad (1.7)$$

y por lo tanto, la condición Seno de Abbe se limita únicamente a los ángulos que forman los rayos entrantes y los salientes del sistema, con el eje óptico.

Se comprende entonces que los puntos de Young cumplen la condición Seno de Abbe, y por lo tanto, son aplanéticos[6].

Esta propiedad de aplanetismo para los Puntos de Young es extraña, ya que, como se acabó de ver, el estigmatismo (para los Puntos de Young) es en realidad entre esferas y no entre planos.

### 1.3. Principio de Fermat

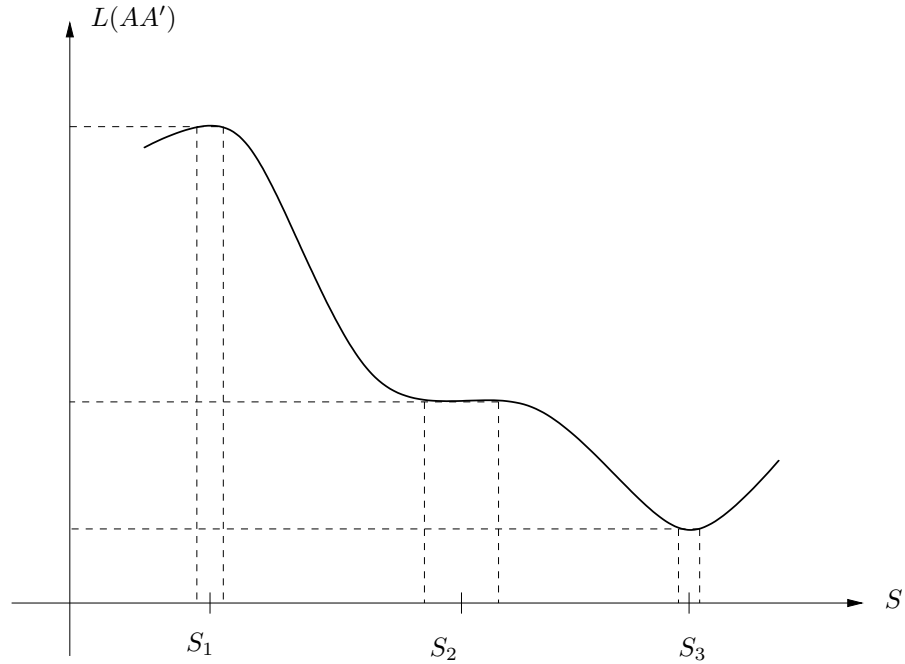


Figura 1.5: Longitud de camino óptico en función de la trayectoria  $S$ . Las trayectorias  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  son trayectorias estacionarias.

Las leyes de la óptica geométrica se pueden derivar del Principio de Fermat[6], el cual se enuncia como sigue:

“Cuando un rayo de luz se transmite de un punto  $A$  a otro punto  $A'$ , deberá recorrer una Longitud de Camino Óptico  $LCO$  que será estacionaria con respecto a las variaciones ( $\delta$ ) de dicho camino”[1]:

$$\delta \int_A^{A'} n(s) ds = 0. \quad (1.8)$$

Como se puede ver en la figura 1.5, hay tres clases de camino estacionario,  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ , ya que para todas ellas se cumple que  $\delta L(AA') = 0$ .

Básicamente, lo que el principio Fermat significa es que la curva de  $LCO$  en función de  $S$  contará con una región ligeramente aplanada cerca de cada punto en el que la pendiente es cero. Estos puntos de pendiente cero corresponden a verdaderas trayectorias que sigue la luz. Dicho de otra manera, la  $LCO$  para la trayectoria verdadera será igual, en primera

aproximación, a la *LCO* de las trayectorias inmediatamente adyacentes a ella[1].

Por lo que la aplicación del Principio de Fermat en la deducción de la relación de conjugación de Gauss ya constituye una aproximación con respecto a la condición de estigmatismo.

## 1.4. Óptica de Primer Orden Paraxial

La óptica paraxial u óptica de Gauss, se basa en la aproximación realizada por Carl F. Gauss en su teoría sobre la formación de imágenes. A continuación se mostrará su construcción ya que su enfoque es fundamental para los propósitos de este trabajo.

### 1.4.1. Refracción en un Dioptrio Esférico

En la figura 1.6 el dioptrio esférico  $\sigma$  centrado en  $C$  separa a dos medios homogéneos de índices de refracción  $n$  y  $n'$ ,  $R$  es el radio del dioptrio e  $I$  es un punto sobre el dioptrio al cual llega el rayo desde el punto objeto  $A$  y sale hasta llegar al punto imagen  $A'$ , las distancias respectivas son  $l_o$  y  $l_i$ . Por su parte,  $s_o$  y  $s_i$  son las distancias objeto e imagen, respectivamente;  $\rho$  es la distancia desde el vértice del dioptrio hasta la coordenada sobre el eje  $z$  del punto  $I$ .  $\theta_i$  y  $\theta_t$  son los ángulos incidente y refractado, respectivamente, mientras que  $\phi$  es el ángulo que forma el radio  $R$  con el eje  $z$ . Todas las cantidades de la figura son positivas.

La *LCO* de un rayo que va de  $A$  a  $A'$ , pasando por  $I$  es

$$L(AA') = nl_o + n'l_i, \quad (1.9)$$

donde  $l_o$  y  $l_i$  se pueden obtener por el teorema del cos de los triángulos  $AIC$  y  $CIA'$ , respectivamente, y vienen dados por

$$l_o = [R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R) \cos \phi]^{1/2} \quad (1.10)$$

$$l_i = [R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R) \cos \phi]^{1/2}. \quad (1.11)$$

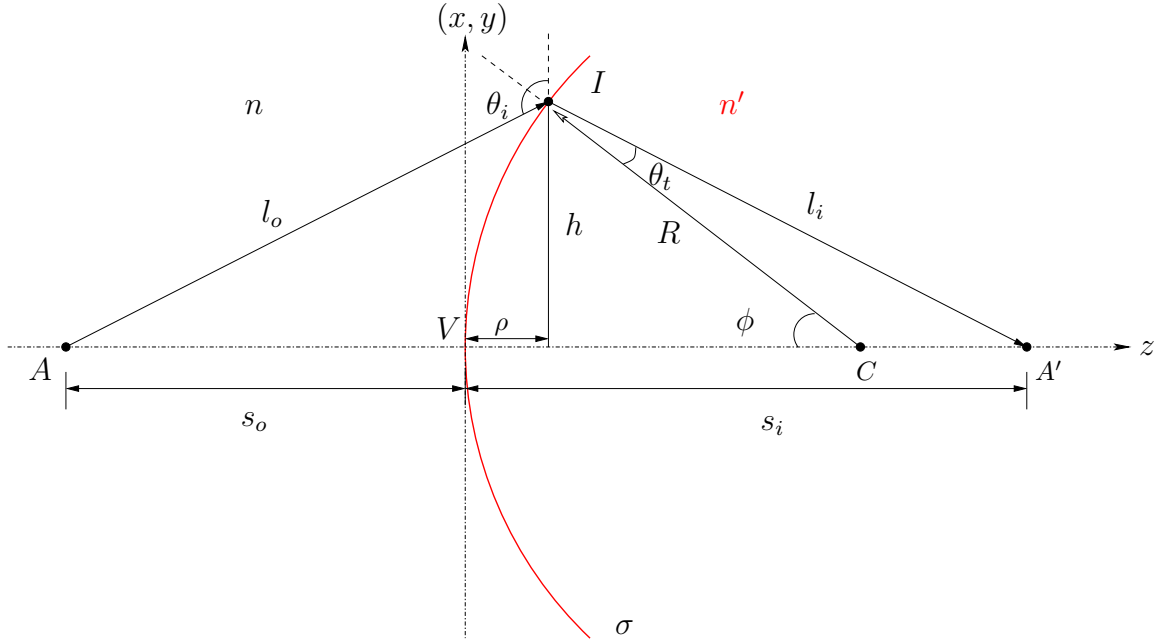


Figura 1.6: Refracción en una interfaz esférica.

El Principio de Fermat no es una condición de estigmatismo, pero los puntos estigmáticos sí cumplen el Principio de Fermat. Aplicándolo respecto a la variable  $\phi$ , es decir,  $\frac{dL(AA')}{d\phi} = 0$ , se obtiene la expresión

$$\frac{n}{l_o} + \frac{n'}{l_i} = \frac{1}{R} \left( \frac{n's_i}{l_i} - \frac{ns_o}{l_o} \right). \quad (1.12)$$

Aunque esta expresión indica la posición exacta  $s_i$  a la cual se forma el punto imagen, hay que notar que  $s_i$  es diferente cada vez que  $I$  se mueve sobre el dioptró, cambiando  $\phi$ . Por lo tanto, el sistema no es estigmático, pues el Principio de Fermat no garantiza el estigmatismo.

Para garantizar invarianza de la distancia imagen  $s_i$  respecto del ángulo  $\phi$ , y lograr que se forme la imagen en  $A'$ , se toma el primer término de la expansión en serie de la función coseno, es decir,  $\cos \phi = 1$ , y se sustituye en las ecuaciones 1.10 y 1.11, obteniéndose que las expresiones anteriores se reducen a

$$l_o \approx s_o \quad y \quad l_i \approx s_i. \quad (1.13)$$

Esta es la aproximación de Gauss, también conocida como *aproximación paraxial*, ya que

toma solamente el primer orden de la expansión en serie de Taylor de las distancias  $l_o$  y  $l_i$ , es decir, los rayos muy cercanos al eje óptico, y por lo tanto, reduce la ecuación 1.12 a

$$\frac{n}{s_o} + \frac{n'}{s_i} = \frac{n' - n}{R}. \quad (1.14)$$

De tal manera que la distancia  $s_i$  depende únicamente de la distancia  $s_o$  y no de la localización del punto I, lo que, en principio, solo es válido para los rayos que están sobre el eje óptico. Sin embargo, se considera que aquellos rayos que están demasiado cerca del eje óptico y que se pueden considerar que se confunden con este eje, determinan una región transversal conocida como *región paraxial*. Los rayos que salen de A y llegan a dioptrio dentro de la región paraxial se denominan *rayos paraxiales*.

“El segmento del frente de onda saliente que corresponde a estos rayos paraxiales es esencialmente esférico y formará una imagen perfecta en su centro A' ubicado en  $s_i$ ” (ver figura 1.7)[1].

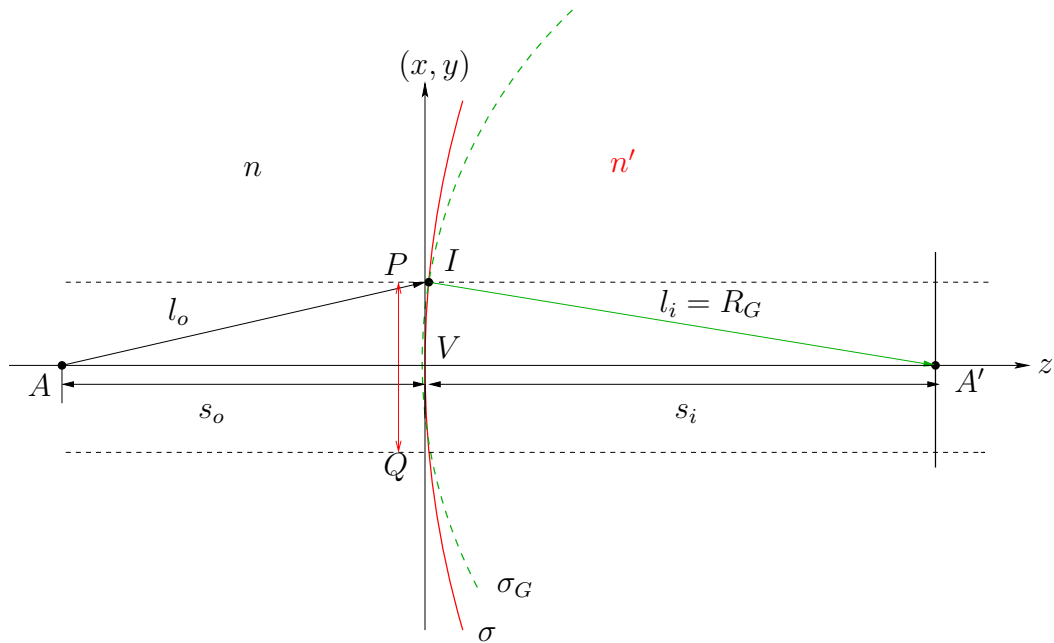


Figura 1.7: Esfera de Referencia Gaussiana  $\sigma_G$ , de radio  $R_G$ , centrada sobre  $A'$  a la salida de los rayos paraxiales. La región paraxial es la sección transversal marcada por el segmento PQ.

Calculando el foco imagen  $f$  (cuando  $s_o \rightarrow \infty$ )

$$f = \frac{n'}{n' - n} R. \quad (1.15)$$

Así que dentro del régimen paraxial el foco imagen será constante y se garantiza que  $A'$  sea la imagen conjugada de  $A$ .

En la región paraxial el dioptrio esférico  $\sigma$  tiende a confundirse con un plano como está indicado por el segmento PQ en la figura 1.7, además, el segmento del frente de onda saliente de cualesquiera de los rayos paraxiales converge necesariamente a su centro ubicado sobre el eje óptico en el *plano imagen*. Si se toma un objeto plano con dimensión transversal lo suficientemente pequeña tal que los rayos de luz que salen de su parte más alejada del eje óptico y pasan por el vértice del dioptrio, por aproximación paraxial, se confundirán con el eje óptico, y por lo tanto, se enfocarán a una distancia axial igual a la de un rayo que viene del punto objeto que cae sobre el eje óptico, pero alejado de dicho eje una distancia tal que se mantiene la aproximación paraxial. De lo cual se concluye que *la imagen se forma sobre un plano*.

## 1.5. Teoría de Tercer Orden: Aberraciones

Cuando se permite que los rayos marginales lleguen al dioptrio, ocurre que el frente de onda asociado a esos rayos, después de que atraviesan el dioptrio, se desvía de la esfera de referencia Gaussiana (esfera centrada sobre el punto imagen Gaussiano), dando origen a las aberraciones monocromáticas.

En las distancias  $l_o$  y  $l_i$  de la figura 1.6 las expresiones senoidales se pueden tomar en ordenes superiores, lo cual brinda el marco teórico mediante el cual se analizan las aberraciones.

En lo que concierne a este trabajo, se analizarán dos aberraciones monocromáticas de las cinco que define la Teoría de Tercer Orden, conocidas como *Aberraciones Primarias* o *Aberraciones de Seidel*.

Para analizar la aberración esférica primaria se trabaja con la Teoría de Tercer Orden,

que procede de la siguiente manera:

A) Si en lugar de tomar hasta el primer orden de la expansión de las funciones *seno* y *coseno*, se toma hasta el segundo orden, es decir (ver figura 1.6):

$$\cos \phi = 1 - \phi^2/2 \quad y \quad \sin \phi = \phi = h/R, \quad (1.16)$$

sustituyendo en  $l_o$  y  $l_i$  de las ecuaciones 1.10 y 1.11, y haciendo una aproximación binomial, dado que las distancias objeto e imagen son mucho más grandes que  $h$ , se llega a

$$l_o^{-1} \approx s_o^{-1} - (s_o + R)h^2/2s_o^3R \quad (1.17)$$

$$l_i^{-1} \approx s_i^{-1} + (s_i - R)h^2/2s_i^3R. \quad (1.18)$$

Nótese que esta aproximación de las funciones *seno* y *coseno* a segundo orden respecto a  $\phi$  es equivalente a realizar una aproximación de tercer orden de  $l_o$  y  $l_i$  respecto a  $s_o$  y  $s_i$ , respectivamente.

B) Se sustituye estas expresiones en la ecuación 1.12, de lo que se obtiene

$$\frac{n}{s_o} - \frac{n(s_o + R)h^2}{2s_o^3R} + \frac{n'}{s_i} + \frac{n(s_i - R)h^2}{2s_i^3R} = \frac{n'}{R} + \frac{n'(s_i - R)h^2}{2s_i^2R} - \frac{n}{R} + \frac{n(s_o + R)h^2}{2s_o^2R}, \quad (1.19)$$

organizando términos e identificando binomios cuadrados perfectos, se llega finalmente a

$$\frac{n}{s_o} + \frac{n'}{s_i} = \frac{n' - n}{R} + h^2 \left[ \frac{n}{2s_o} \left( \frac{1}{s_o} + \frac{1}{R} \right)^2 + \frac{n'}{2s_i} \left( \frac{1}{s_i} - \frac{1}{R} \right)^2 \right]. \quad (1.20)$$

El término adicional con respecto a la fórmula paraxial de la ecuación 1.14, varía aproximadamente como  $h^2$  y es una medida de la desviación respecto a la teoría de primer orden[1], y como se puede apreciar, el término que aparece como factor de  $h^2$  contiene  $s_o^3$  y  $s_i^3$ , y por lo tanto, esta expresión es una aproximación de tercer orden.

Expresando la ec.1.20 en forma algebraica con origen de coordenadas en el vértice del dioptro se tiene que

$$\frac{n'}{s_i} - \frac{n}{s_o} = \frac{n' - n}{R} + h^2 \left[ \frac{n'}{2s_i} \left( \frac{1}{s_i} - \frac{1}{R} \right)^2 - \frac{n}{2s_o} \left( \frac{1}{s_o} - \frac{1}{R} \right)^2 \right]. \quad (1.21)$$

Se hará uso de esta ecuación más adelante para obtener una expresión para el foco imagen en términos de  $h$ .

## 1.6. Óptica Metaxial

Georges Bonnet, de su trabajo en la Teoría de Sistemas Lineales, notó que, de la misma manera como un sistema de transferencia está bien definido cuando su función de transferencia es conocida, la formación de imágenes estará mejor definida si se conoce la amplitud compleja del campo que se mide en el detector, después de que la radiación procedente de una fuente puntual monocromática situada en el objeto, atraviesa el sistema óptico[10].

Para establecer el modelo y obtener esta Función de Transferencia, se ha optado por describir la superficie objeto y la superficie imagen, y todas las superficies que constituyen el sistema óptico en una aproximación de segundo orden [15], mediante esferas osculatrices. Lo que permite conservar de 2 a 4 órdenes de magnitud en las dimensiones transversales con respecto a la aproximación paraxial del modelo de Gauss[10].

La teoría metaxial desarrollada por Bonnet, es una teoría que explica la difracción manteniendo hasta el segundo orden de las variables de abertura de los sistemas y de las dimensiones transversales de los emisores y receptores[8].

Sin embargo, aún cuando es un tratamiento para calcular la difracción, permite además obtener los resultados propios de la óptica geométrica, facilitando por lo tanto la estructura matemática para concebir la óptica física y la óptica de rayos como un mismo fenómeno[10].

El instrumento que permite la compatibilidad entre estos enfoques es, justamente, la concepción de emisores y receptores esféricos [14], los cuales surgen de manera natural cuando se analizan las expresiones matemáticas que describen la difracción de *Fresnel* y de *Fraunhofer*.

### 1.6.1. Término de Fase Cuadrático

Cuando se aplican las aproximaciones de Fresnel y de Fraunhofer al *Principio de Huygens-Fresnel* en coordenadas rectangulares, se obtienen las expresiones matemáticas que describen la difracción de *Fresnel* y de *Fraunhofer*, respectivamente:

$$U_Q(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{ik(x^2+y^2)/2z} \int_{R^2} U_P(x', y') e^{ik(x'^2+y'^2)/2z} e^{-ik(xx'+yy')/z} dx' dy' \quad (1.22)$$

y

$$U_Q(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{ik(x^2+y^2)/2z} \int U_P(x', y') e^{-ik(xx'+yy')/z} dx' dy'. \quad (1.23)$$

Como se puede ver, entre los términos por fuera de la integral, uno es cuadrático. Cuando se calcula la intensidad del campo  $U_B$ , dicho término desaparece, por lo que no ha sido considerado de mucha importancia.

Goodman por su parte lo analiza de una manera inadecuada en la difracción de Fresnel, pues aunque comprende que los términos de fase cuadrática pueden desaparecer de la ecuación (ec. 23) si se considera la distribución de los campos  $U_A$  y  $U_B$  sobre esferas en lugar de planos (lo que permite ver la difracción de Fresnel como una transformación de Fourier que permite encontrar el campo en la esfera  $B$  conociendo el campo en la esfera  $A$  como se muestra en la figura 1.8), prefiere realizar una aproximación de primer orden sobre las esferas para quedarse en la región paraxial [12] y de igual forma, ver la difracción de Fresnel como una transformación de Fourier, pero entre planos.

Una aproximación a primer orden, en principio, necesaria si se trabaja entre planos, pero que elimina esa posibilidad de ver la fase tanto del objeto como de la imagen[8].

En la óptica metaxial, “cualquiera que sea su forma, un emisor (o un receptor) se aproxima por la esfera osculadora en su vértice. Esta esfera es tangente al emisor y su radio de curvatura es el radio de la superficie en su vértice. En realidad, veremos que las aproximaciones que haremos son de tipo parabólico. Sería más riguroso trabajar con

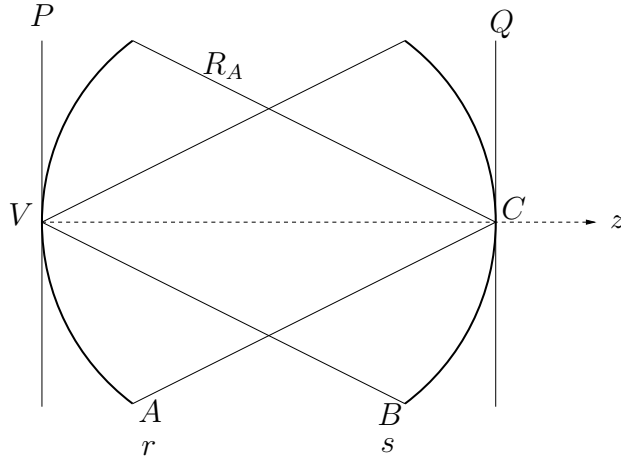


Figura 1.8: Esferas confocales. En óptica metaxial se pasa de la amplitud del campo sobre  $A$  a la amplitud del campo sobre  $B$  por una transformación de Fourier.

emisores y receptores parabólicos, sin embargo los dioptros que se encuentran en óptica son esféricos (en general). Para uniformizar la representación de las superficies, nos parece más conveniente trabajar con esferas que con paraboloides; es equivalente al segundo orden” [8].

### 1.6.2. Aproximación de Segundo Orden

Considérese la esfera  $\sigma_e$  centrada en  $C$  y de radio de  $R$  como se muestra en la figura 1.9a, su ecuación es

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2, \quad (1.24)$$

despejando  $z$  y tomando el signo negativo correspondiente a los valores de  $z$  menores que  $R$ , es decir, el hemisferio que abre hacia la derecha [1]:

$$z = R - (R^2 - x^2 - y^2)^{1/2}, \quad (1.25)$$

al desarrollar en serie binómica se obtiene:

$$z = \frac{h^2}{2R} + \frac{h^4}{2^2 2! R^3} + \frac{3h^6}{2^3 3! R^5} + \dots, \quad (1.26)$$

donde  $h^2 = x^2 + y^2$ , las dimensiones transversales de la esfera.

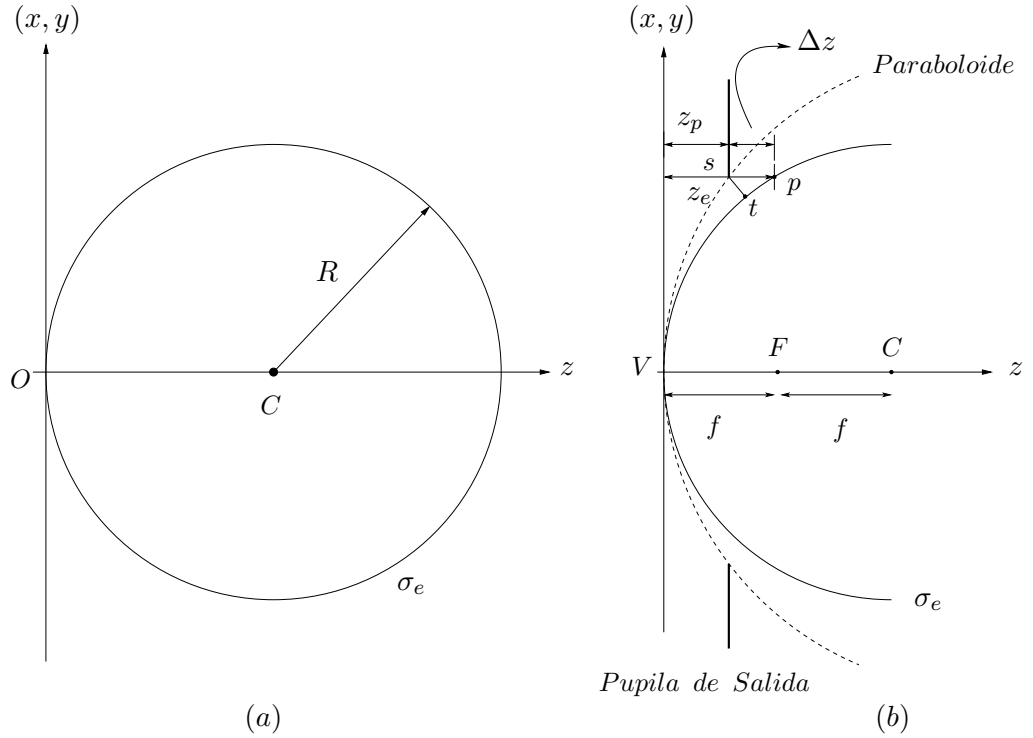


Figura 1.9: Comparación entre una esfera y un paraboloides.

La ecuación de una parábola en el plano  $(z, y)$  con vértice en  $(0, 0)$  y foco  $f$  en  $(f, 0)$  es  $y^2 = 4fz$ . Si se trabaja en el espacio  $(x, y, z)$ , un paraboloides circular cuyo vértice se haya en el origen  $(0, 0, 0)$  y el foco  $f$  en  $(0, 0, f)$  (ver figura 1.9b) se tiene que

$$x^2 + y^2 = 4fz, \quad (1.27)$$

se puede notar que si  $f = R/2$ , entonces  $z = (x^2 + y^2)/2R$ , es decir, la ecuación del paraboloides corresponde con el primer término de la expansión en la ecuación 1.26. Por lo tanto, en una aproximación a segundo orden, una esfera coincide con un paraboloides y la diferencia entre estas dos configuraciones representa la desviación  $\Delta z$  [1].

Cuando  $h$  tiende a cero, esta desviación tiende también a cero pero de una manera más fuerte. En este trabajo el interés consiste en obtener ese valor máximo de  $h$  para el cual la desviación  $\Delta z$  no afecta notablemente la calidad de la imagen.

Expresando la desviación  $\Delta z$  como

$$\Delta z = \left( R - \sqrt{R - h^2} \right) - \frac{h^2}{2R}, \quad (1.28)$$

se llega así a la expresión que se usará para obtener en algunos casos el régimen metaxial.

### 1.6.3. Teoremas

A continuación se enunciarán dos de los teoremas de la óptica metaxial demostrados por G. Bonnet, los cuales serán utilizados en capítulos posteriores.

**Teorema 1: Imagen coherente del campo sobre un emisor esférico** *La amplitud del campo sobre la esfera  $A'$  es la imagen coherente de la amplitud del campo sobre la esfera  $A$  a través de un sistema óptico centrado si, y solamente si, el vértice y el centro de curvatura de  $A'$  son las imágenes paraxiales respectivas del vértice y el centro de curvatura de  $A$ . Si  $g_v$  es el aumento en lateral en los vértices, las amplitudes en los campos sobre  $A$  y  $A'$  son tales que*

$$U_{A'}(r') = \frac{1}{g_v} U \left( \frac{r'}{g_v} \right). \quad (1.29)$$

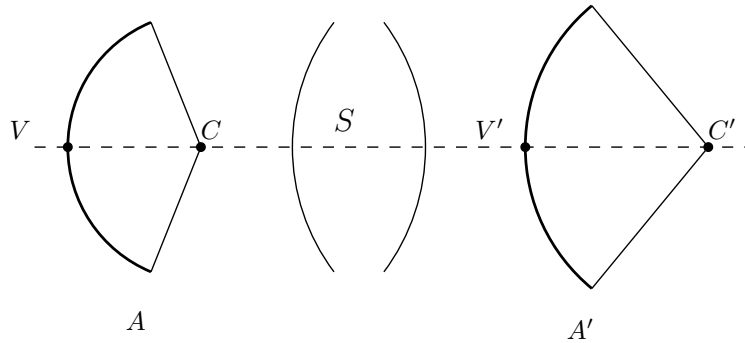


Figura 1.10: Imagen coherente por un sistema centrado cualquiera  $S$ . Hay una doble conjugación, de los vértices y de los centros de curvatura, entre  $A$  y su imagen  $A'$ .

### Teorema 2: Ley de aumento de los radios

*En las condiciones del teorema 1, si  $g_v$  es el aumento lateral en los vértices,  $g_c$  el aumento lateral en los centros de curvatura, si  $n$  y  $n'$  son los índices de los medios objeto*

e imagen, el aumento de los radios de curvatura es

$$g_r = \frac{n}{n'} g_v g_c, \quad (1.30)$$

en donde  $g_v$  y  $g_c$  son

$$g_v = \frac{ns_i}{n's_o} \quad y \quad g_c = \frac{nq_i}{n'q_o}, \quad (1.31)$$

siendo  $s_o$  y  $s_i$  las distancias objeto e imagen, y  $q_o$  y  $q_i$  las distancias del centro de curvatura de objeto y la imagen, al vértice del dioptrio equivalente.

## 1.7. Criterio del Cuarto de Onda de Rayleigh

Rayleigh (1807)[2] investigó la difracción de imágenes en presencia de aberraciones monocromáticas. “Él estudió la formación de imágenes para ondas cilíndricas afectadas por una determinada aberración asimétrica y difractadas en una apertura rectangular; también examinó los efectos del tercer orden de la aberración esférica. Para este último caso, sin embargo, él enfocó sus investigaciones para determinar la intensidad en el centro del patrón solamente, formulando así un importante criterio de tolerancia, conocido en forma extendida como Regla del cuarto de onda de Rayleigh.” [7].

Este criterio afirma que “cuando un sistema sufre de aberración esférica primaria una cantidad tal que el frente de onda en la pupila de salida se sale de la esfera de referencia Gaussiana por menos que un cuarto de onda, la intensidad en el foco Gaussiano disminuye menos del 20 %, una pérdida que puede usualmente ser tolerada” [6] (ver figura 1.11).

El Criterio de Rayleigh constituye una guía básica para la corrección adecuada de un sistema óptico, dado que la distribución de la luz depende no solamente de la deformación máxima sino también de la forma del frente de onda (el tipo de aberración). A este respecto, Maréchal (1947) definió el criterio de tolerancia basado en la intensidad del disco central y no en la desviación del frente de onda de la esfera de referencia gaussiana; el cual expresa que: “un sistema está bien corregido cuando la intensidad normalizada en el foco difractivo es mayor o igual a 0.8”. Este criterio, para el caso de aberraciones pequeñas, es

independientemente del tipo de aberración y la raíz cuadrática media de la desviación del frente de onda de la esfera de referencia centrada en el foco difractivo no debe exceder el valor de  $\lambda/14$ [6].

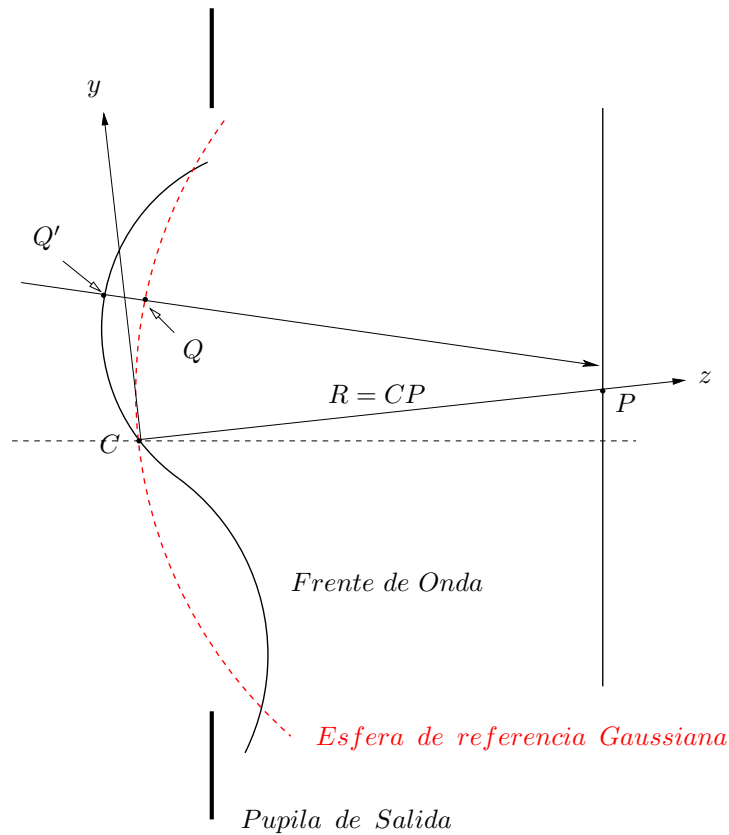


Figura 1.11: Cambio de la esfera de referencia. La distancia  $Q'Q$  es la aberración asociada a la esfera Gaussiana.

Otros autores encontraron que en presencia de aberraciones específicas de una cantidad de  $\lambda/4$ , el valor de la intensidad central toma un valor entre 0,73 y 0,87, la cantidad exacta depende del tipo de aberración[7].

Para el caso específico de la aberración esférica, cuando se exige que la intensidad en el foco difractivo sea de 0,8 se obtiene que la tolerancia en la desviación del frente de onda con respecto a la esfera de referencia debe ser menor que  $0,94\lambda$ [6], es decir, una tolerancia mayor que  $\lambda/4$ .

Dado que en este trabajo se analizan el régimen paraxial y metaxial con base en la aberración esférica primaria, el criterio del cuarto de onda de Rayleigh es suficiente para garantizar que la calidad de la imagen esté dentro de la condición de tolerancia de Maréchal[6].

## 1.8. Criterio de Resolución de Rayleigh

El criterio de resolución de Rayleigh es el criterio generalmente aceptado para la resolución del mínimo detalle, dado que la calidad de la imagen está limitada por la difracción. Él establece que dos discos de Airy son discernibles cuando la separación entre sus centros es mayor o igual a  $h'_1$ , es decir, cuando el primer mínimo de la imagen de un punto de luz coincide con el máximo del siguiente[1].

La intensidad del patrón de difracción de Fraunhofer de una apertura circular es dado por el módulo cuadrado de la transformada de Fourier de la apertura circular, el cual se puede expresar como

$$I(h') = I_o \left| \frac{2J_1\left(\frac{kh}{r}h'\right)}{\frac{kh}{r}h'} \right|^2, \quad (1.32)$$

donde  $J_1$  es la función de Bessel de primera especie y de orden uno.  $h$  es radio de la apertura circular,  $k$  es el número de onda, y  $r$  la magnitud del vector que va desde el centro de la apertura al lugar donde se desea calcular la intensidad. Para el primer cero de esta función de Bessel se tiene que el radio del disco de Airy  $h'_1$  (ver figura 1.12) viene dado por

$$h'_1 = \frac{0,61\lambda r}{h}. \quad (1.33)$$

Esta expresión, como se puede ver, no está en términos del ángulo de resolución como convencionalmente se expresa.

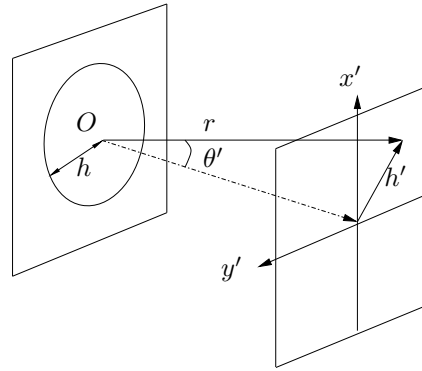


Figura 1.12: Difracción de una apertura circular. El patrón de Airy es observado cuando  $r$  es mucho mayor que  $h^2/\lambda$ .

## Capítulo 2

# Curvatura de Campo de Petzval

Las cinco *aberraciones primarias* (aberración esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo y distorsión), también conocidas como *aberraciones de Seidel* (en honor Ludwig von Seidel), resultan de la diferencia de la *teoría de primer orden* respecto de la *teoría de tercer orden*.

Este capítulo está dedicado a analizar la curvatura de campo de Petzval desde el enfoque metaxial a fin de mostrar que el *teorema de la doble conjugación del dioptró* 1.6.3 es completamente consecuente con dicha Curvatura.

El objetivo de este análisis es simplemente mostrar la ventaja que presenta el enfoque metaxial respecto del enfoque paraxial, para lo cual se hará posteriormente una aplicación a los puntos de Young estudiados en el capítulo 1.

Se tomará como sistema óptico la superficie dióptrica  $\sigma$  de radio  $R$ , la cual, separa a dos medios homogéneos de índices de refracción  $n$  y  $n'$ .

En ausencia de otras aberraciones, si se tiene un objeto con geometría esférica  $\sigma_o$ , su imagen será también una superficie esférica  $\sigma_i$ . Si se aplanan  $\sigma_o$  en el plano  $\sigma_o'$  cada punto imagen se desplaza hacia el dioptró  $\sigma$  a lo largo del correspondiente rayo principal, formando así la superficie parabólica de Petzval  $\Sigma_p$  como se muestra la figura 2.1.

En lugar de intentar aplanar la superficie objeto y la superficie imagen, se podría re-

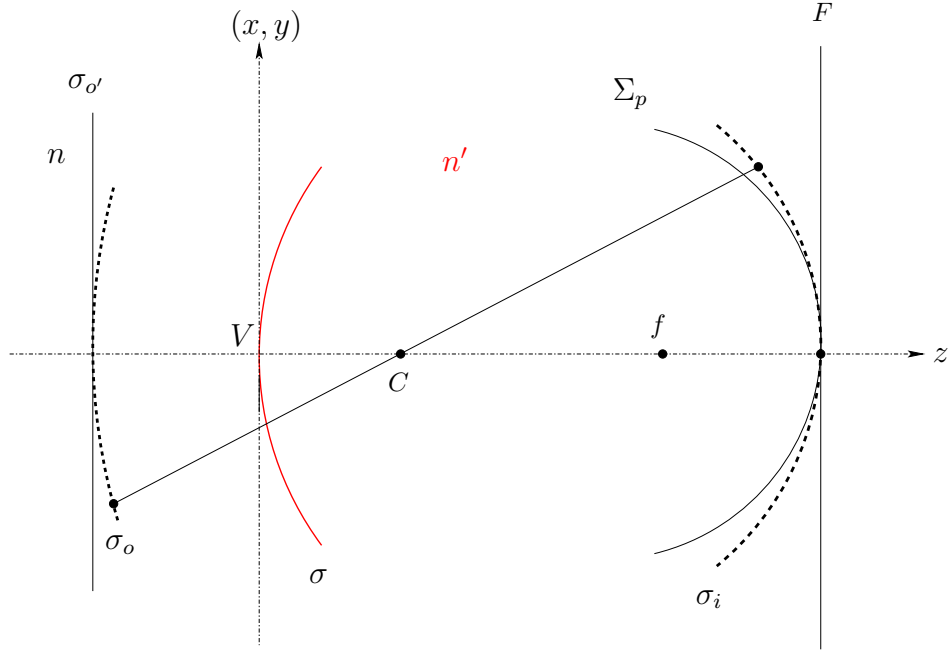


Figura 2.1: Todos los rayos que salen de la superficie objeto  $\sigma_o$  y apuntan al centro  $C$  del dioptrio siguen con la misma dirección y se focalizan en la esfera  $\sigma_i$ .  $f$  es el foco paraxial y a su vez el foco de la parábola de Petzval.

solver el problema de la curvatura simplemente si se curva el detector [1].

A continuación se va a revisar el mismo problema de la figura 2.1 desde el enfoque metaxial, es decir, encontrar la imagen de un objeto plano  $\sigma_o$ .

## 2.1. Solución Metaxial

Para encontrar su imagen hay que hacer uso de los teoremas 1 y 2 de la sección 1.6.3.

Cuando el objeto  $\sigma_o$  es plano (ver figura 2.2) su centro  $S$  está en el infinito sobre el eje óptico, así que su imagen está en el foco imagen paraxial  $f$ .

El vértice de  $\sigma_o$  está a una distancia  $R_A$  del punto  $O$ , y la distancia imagen  $R_{A'}$  se obtiene también con la relación de conjugación de Gauss.

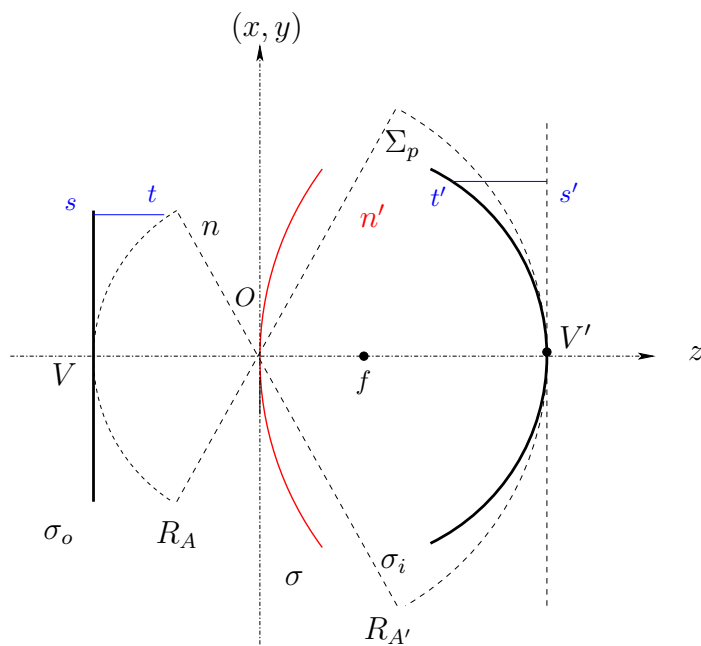


Figura 2.2: Imagen de un objeto plano mediante el enfoque de la óptica metaxial.

Por lo tanto, la imagen coherente de un emisor plano  $\sigma_o$  a través de un dioptrio esférico está sobre una esfera centrada en el foco imagen del sistema.

En realidad, la superficie  $\sigma_i$  no es una esfera, ya que a medida que se consideran puntos del objeto  $\sigma_o$  alejados del eje óptico, es decir rayos marginales, el foco va cambiando, así que los puntos imagen que componen  $\sigma_i$  se van a ir desplazando en sentido contrario al eje  $z$ , formando una superficie parabólica que no es otra que la curvatura de Petzval, pero dado que la óptica metaxial aproxima esferas con paraboloides, se puede considerar, dentro de esta aproximación, que  $\sigma_i$  es una esfera.

Una de las razones por las cuales se hace este análisis es, justamente, mostrar que en el enfoque de la óptica metaxial (si trabajara con paraboloides) la curvatura de campo no representa una aberración, ya que su estructura matemática sería más acorde con la naturaleza en la que se propaga la luz. Sin embargo, dado que la óptica metaxial se ha limitado a trabajar con esferas, habría que definir el régimen en el cual los paraboloides se confunden con esferas, y la región que se sale de este régimen sería la que se consideraría como aberración metaxial.

Hablar de un régimen paraxial y de un régimen metaxial es una consideración meramente teórica, pues en la práctica cuando se detecta el campo en el plano imagen, la aberración de curvatura (al igual que las demás) se manifiesta como una consecuencia propia del sistema óptico empleado. Esta imperfección de la imagen respecto del objeto es una aberración para la teoría paraxial porque no puede ser predicha por sus planteamientos y por lo tanto, no la puede corregir por sí misma; mientras que el enfoque metaxial considera que la distribución del campo imagen está sobre una esfera y por lo tanto, detectar el campo sobre un plano introduce una aberración que no es defecto de la teoría sino debido a que el detector es plano, así que la misma teoría sabe cómo corregir esta aberración hasta cierto punto (régimen metaxial).

En la siguiente sección se mostrará otra aplicación desde la óptica metaxial, en la cual el objeto está sobre una superficie esférica, así como su respectiva imagen conjugada. Es el conocido sistema de las esferas de Young que se ha analizado detalladamente en el capítulo 1. Se presentará aquí la potencia de su método, ya que ello constituye un caso particular en el cual la estructura metaxial permite describir la formación de una superficie imagen rigurosamente estigmática.

## 2.2. Aplicación de la Óptica Metaxial a las esferas de Young

A continuación se mostrará cómo obtener desde la óptica metaxial una de las esferas de Young cuando se conocen la otra esfera y el dioptrio.

Si en la figura 1.3b, el origen de coordenadas se ubica en el vértice del dioptrio, las distancias a la derecha del vértice son positivas y las distancias de la izquierda son negativas. En este sistema de coordenadas la relación de conjugación de Gauss es

$$\frac{n'}{s_i} - \frac{n}{s_o} = \frac{n' - n}{R}. \quad (2.1)$$

Nótese que el radio del dioptrio  $R$  es negativo, entonces  $s_o$  y  $s_i$  vienen dadas por

$$s_o = \frac{n'}{n}R + R \quad y \quad s_i = \frac{n}{n'}R + R, \quad (2.2)$$

y son también negativas.

Considérese como objeto la superficie  $\sigma_o$  cuyo radio de curvatura es  $\frac{n'}{n}R$ , se desea obtener su respectiva imagen coherente

Por el teorema 1 (1.6.3) de la óptica metaxial, la posición del vértice de la esfera imagen  $\sigma_i$  es el conjugado paraxial del vértice de la esfera objeto  $s_o$

$$\frac{n'}{s_i} - \frac{n}{\frac{n'}{n}R + R} = \frac{n' - n}{R}, \quad (2.3)$$

resolviendo, se obtiene que  $s_i = \frac{n}{n'}R + R$ .

Para calcular el centro de la esfera imagen  $R_i$ , nótese que el centro  $C$  de la esfera objeto está a la distancia  $R$  del vértice

$$\frac{n'}{R_i} - \frac{n}{R} = \frac{n' - n}{R}. \quad (2.4)$$

Por tanto, el centro de la esfera imagen es el mismo centro de la esfera objeto y del dioptrio.

Para obtener el aumento del radio de curvatura de acuerdo al teorema 2 (1.6.3)

$$g_r = \frac{n}{n'}g_v g_c = \frac{n}{n'} \left( \frac{n}{n'} \frac{s_i}{s_o} \right) \left( \frac{n}{n'} \frac{R}{R} \right). \quad (2.5)$$

Al reemplazar los valores de  $s_o$  y  $s_i$ , se encuentra que

$$g_r = \frac{n^2}{n'^2}. \quad (2.6)$$

Si se compara con la proporción directa entre los radios de la imagen y el objeto

$$\frac{R_{\sigma_i}}{R_{\sigma_o}} = \frac{nR/n'}{n'R/n} = \frac{n^2}{n'^2}, \quad (2.7)$$

se encuentra que coincide con el teorema 2 de la óptica metaxial.

Como se puede notar a primera vista, la obtención de la esfera imagen por medio de la óptica metaxial es un proceso muy sencillo. Si se intenta hacerlo por medio de la óptica paraxial, se requiere trabajar punto a punto, cambiando en cada punto el sistema de referencia para que el sistema se mantenga centrado, lo que hace más complejo el proceso. Además, si se intenta aplanar el objeto  $\sigma_o$  y se busca la imagen sobre el plano imagen, no solo se percibirá aberración de curvatura sino también aberración comática. Por lo tanto, trabajar con emisores y receptores esféricos tiene una gran ventaja sobre la óptica paraxial en el análisis de las aberraciones.

A continuación se aplicará el criterio de Rayleigh para determinar el régimen paraxial y metaxial de las esferas de Young.

### 2.2.1. Régimen Paraxial y Metaxial

Aún cuando las esferas de Young permite tener imágenes perfectas, cuando se trabaja con sistemas centrados surgen limitaciones debido a que en el caso de la óptica paraxial se requiere que tanto la imagen como el objeto sean planos, mientras la óptica metaxial requiere que la distribución campo en tanto el objeto como la imagen sea paraboloidal. Es así que las esferas de Young van a estar acotadas en ambas configuraciones.

#### Régimen Paraxial

Para la determinación del régimen paraxial de las esferas de Young se tendrá en cuenta que cada superficie,  $\sigma_o$  y  $\sigma_i$ , son frentes de onda, así que se encontrará el límite donde dichas superficies pueden considerarse planas. Para ello se hará uso del criterio de Rayleigh, exigiendo que la separación máxima tanto  $\sigma_o$ , como de  $\sigma_i$  con sus respectivos planos tangentes sea menor o igual a  $\lambda/4$ .

En la región paraxial una esfera se confunde con un paraboloide, por lo que si se trata a  $\sigma_o$  y  $\sigma_i$  como paraboloides con origen de coordenadas en  $V_o$  y  $V_i$ , respectivamente, se

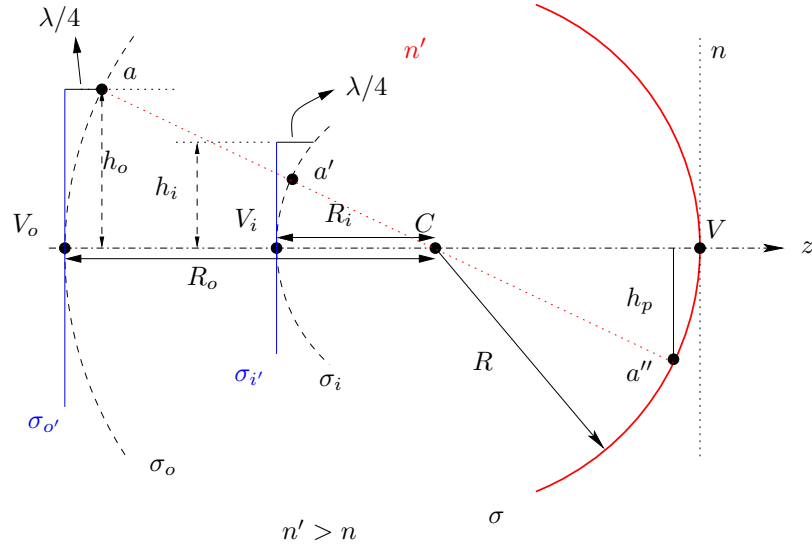


Figura 2.3: Régimen paraxial para las esferas de Young.

tiene que

$$z_o = \frac{h^2}{2R_o} \quad y \quad z_i = \frac{h^2}{2R_i}, \quad (2.8)$$

donde  $h^2$  es la sección transversal  $(x, y)$ . Para encontrar  $h_o$  y  $h_i$  hay que igualar  $z_o$  y  $z_i$  a  $\lambda/4$ , de lo que se obtiene

$$h_o = \sqrt{\frac{R_o \lambda}{2}} \quad y \quad h_i = \sqrt{\frac{R_i \lambda}{2}}, \quad (2.9)$$

y sustituyendo sus respectivos radios,  $R_o = n'R/R$  y  $R_i = nR/n'$

$$h_o = \sqrt{\frac{n'R\lambda}{2n}} \quad y \quad h_i = \sqrt{\frac{nR\lambda}{2n'}}. \quad (2.10)$$

Por supuesto, los valores de  $h_o$  y  $h_i$  son diferentes, sin embargo, obsérvese que para el punto  $a$  ubicado sobre  $\sigma_o$  a la altura  $h_o$ , su imagen estigmática es el punto  $a'$  sobre  $\sigma_i$  y que esta altura es menor que  $h_i$ , por lo tanto la región paraxial está acotada por  $h_o$  y no por  $h_i$ . Si se verifica el aumento lateral se tiene que

$$\frac{h_i}{h_o} = \frac{s_i n}{s_o n'} = \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \quad (2.11)$$

Si se compara este aumento con los valores obtenidos de  $h_o$  y  $h_i$  en la ec. 2.10 se puede apreciar que el valor obtenido para  $h_i$  es ligeramente mayor que el obtenido en 2.11. Por tanto, se considera  $h_o$  como la cota de la región paraxial  $h_p$ .

Para hacerse una idea más cuantitativa de la región paraxial, note que para la longitud de onda  $\lambda$  en el rango visible (del orden de  $10^{-7}$  m), si se considera que el radio es del orden de  $10^{-1}$  m, y despreciando el factor  $\sqrt{n/2n'}$ , dado que es cercano a 1, se tiene que

$$h_p \sim 10^{-4} \text{ m}, \quad (2.12)$$

es decir, mil veces más pequeño que el radio del dioptrio.

## Régimen Metaxial

Como se vio en la sección 2.2., la óptica metaxial a través de los teoremas 1 y 2 (sección 1.6.3) puede determinar perfectamente la superficie de Young  $\sigma_i$  a partir de la superficie  $\sigma_o$ . Sin embargo, como se mostró en la sección 1.6.1. la óptica metaxial aproxima esferas por paraboloides, así que el resultado de la sección 2.2. solo es válido cuando el campo sobre la esfera y el paraboloide son ópticamente indistinguibles, y de acuerdo con el criterio de Rayleigh, ello sucede cuando el frente de onda esférico no se separa del frente de onda paraboloidal por más de  $\lambda/4$ , como se muestra en la figura 2.4.

De acuerdo con la ecuación 1.26,  $\Delta z = \lambda/4$ , por lo tanto se tiene para cada caso

$$\left(R_o - \sqrt{R_o - h^2}\right) - \frac{h^2}{2R_o} = \frac{\lambda}{4} \quad y \quad \left(R_i - \sqrt{R_i - h^2}\right) - \frac{h^2}{2R_i} = \frac{\lambda}{4}, \quad (2.13)$$

resolviendo para  $h$  en ambas ecuaciones se obtiene

$$h_o = \sqrt{R_o \sqrt{2R_o \lambda} - \frac{R_o \lambda}{2}} \quad y \quad h_i = \sqrt{R_i \sqrt{2R_i \lambda} - \frac{R_i \lambda}{2}}, \quad (2.14)$$

y sustituyendo los valores respectivos de  $R_o$  y  $R_i$

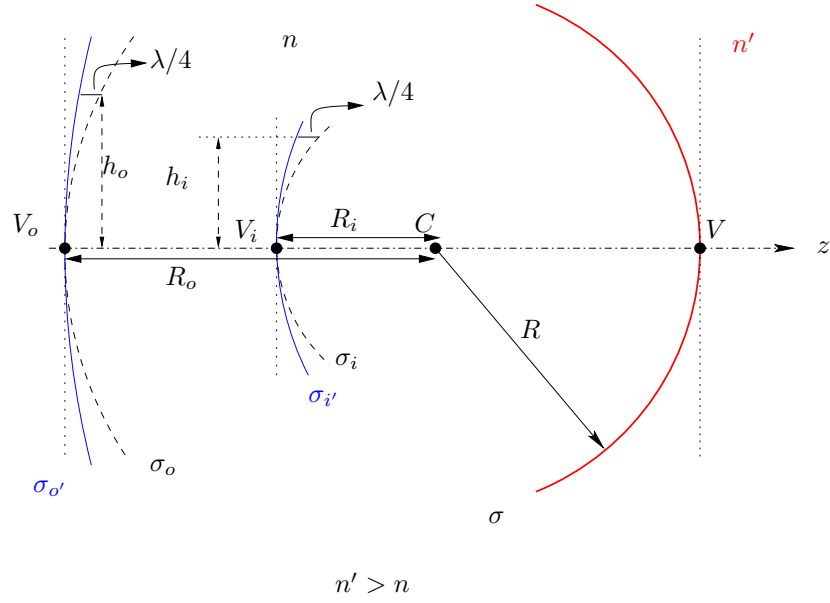


Figura 2.4: Régimen metaxial para las esferas de Young.

$$h_o = \sqrt{\frac{Rn'}{n} \sqrt{\frac{2Rn'\lambda}{n} - \frac{Rn'\lambda}{2n}}} \quad y \quad h_i = \sqrt{\frac{Rn}{n'} \sqrt{\frac{2Rn\lambda}{n'} - \frac{Rn\lambda}{2n'}}}. \quad (2.15)$$

Si  $\lambda \sim 10^{-7}$  m, y  $R \sim 10^{-1}$  m, y despreciando los demás factores como antes, se tiene que la región metaxial  $h_m$

$$h_m \sim 10^{-3} m, \quad (2.16)$$

es decir, cien veces más pequeño que el radio del dioptrio.

Por lo tanto, para las esferas de Young, el régimen metaxial es mayor que el régimen paraxial en un orden de magnitud.

La aberración esférica no ha sido tenida en cuenta para delimitar el régimen de aplicación de cada teoría para la esferas de Young, es decir, que aunque evidentemente el foco varía con  $h$ , ello no afecta en nada el lugar donde se forma la imagen porque dadas las características de los radios de cada esfera se asegura que todos los rayos que salgan de un punto cualquiera de  $\sigma_o$  y lleguen al dioptrio  $\sigma$ , por ley de Snell se refractan focalizándose en el respectivo punto imagen de  $\sigma_i$ .

Es interesante notar que se ha obtenido aproximaciones de la óptica paraxial y de la óptica metaxial para formar imágenes rigurosamente estigmáticas.

# Capítulo 3

## Determinación del Régimen Paraxial

En el capítulo anterior se analizó el régimen paraxial y metaxial para las esferas de Young que tienen la propiedad de ser rigurosamente estigmáticas, ahora se buscará el régimen paraxial y metaxial cuando no se exige estigmatismo riguroso sino aproximado.

La aproximación paraxial limita grandemente las dimensiones de la pupila de entrada y se necesita un criterio óptico para definir el rango transversal en el cual el foco imagen  $f$  se mantiene tolerablemente invariante a medida que los rayos que inciden axialmente se alejan del eje óptico una distancia  $h$ .

Para ello, primero se van a calcular algunas expresiones para tener el foco como función de la altura  $h$  de los rayos marginales, tanto para la aproximación de la teoría de tercer orden como de manera exacta.

### 3.1. Foco imagen aproximado

En la sección 1.5. se estudió el término de aberración primaria obteniéndose la ecuación 1.20. Sin embargo, es útil expresar el término de aberración esférica de la ec.1.20 sólo en términos de la distancia objeto  $s_o$ , para ello se reemplaza la relación de conjugación paraxial en la ec.1.21

$$\frac{n'}{2s_i} \left( \frac{1}{s_i} - \frac{1}{R} \right)^2 - \frac{n}{2s_o} \left( \frac{1}{s_o} - \frac{1}{R} \right)^2 \approx \frac{1}{2} \left( \frac{n}{n'} \right)^2 \left( \frac{1}{s_o} - \frac{1}{R} \right)^2 \left( \frac{n' - n}{n} \right) \left( \frac{n}{R} - \frac{n' + n}{s_o} \right), \quad (3.1)$$

y por lo tanto, la relación de conjugación en la teoría de tercer orden se puede expresar como

$$\frac{n'}{s_i} - \frac{n}{s_o} = \frac{n' - n}{R} + h^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{n'} \right)^2 \left( \frac{1}{s_o} - \frac{1}{R} \right)^2 \left( \frac{n' - n}{n} \right) \left( \frac{n}{R} - \frac{n' + n}{s_o} \right) \right]. \quad (3.2)$$

Si se ubica el objeto en el infinito ( $s_o \rightarrow \infty$ ) los rayos que vienen del objeto incidirán sobre el dioptrio esférico de manera paralela al eje óptico. A medida que la altura  $h$  del rayo incidente aumenta el foco imagen  $f$  se acerca al vértice como se aprecia en la figura 3.1.

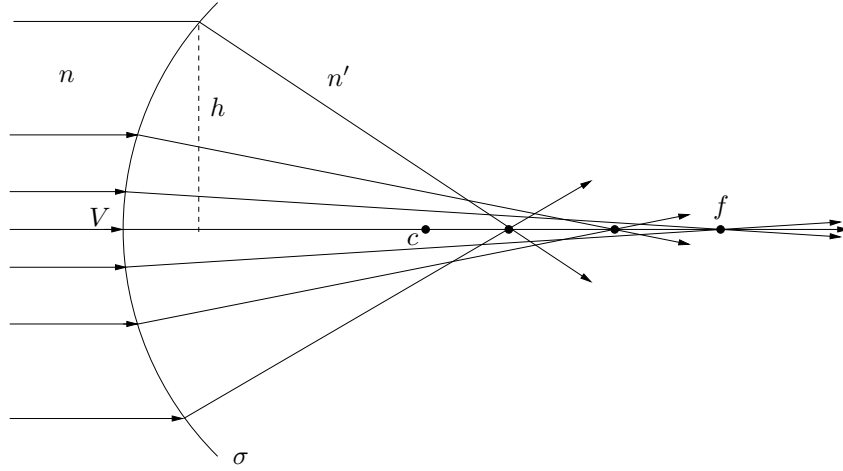


Figura 3.1: Aberración esférica debida a la refracción en una sola superficie.  $f$  es el foco imagen paraxial.

$$\frac{1}{f} = \lim_{s_o \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{n's_o} + \frac{n' - n}{n'R} + \frac{h^2}{2n'} \left( \frac{n}{n'} \right)^2 \left( \frac{1}{s_o} - \frac{1}{R} \right)^2 \left( \frac{n' - n}{n} \right) \left( \frac{n}{R} - \frac{n' + n}{s_o} \right) \right], \quad (3.3)$$

de lo que se obtiene que

$$\frac{1}{f} = \frac{n' - n}{n'R} \left( 1 + \frac{h^2}{2R^2} \left( \frac{n}{n'} \right)^2 \right), \quad (3.4)$$

y dado que  $(n' - n)R/n'$  es el foco paraxial  $f_p$ , la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_p} \left( 1 + \frac{h^2}{2R^2} \left( \frac{n}{n'} \right)^2 \right). \quad (3.5)$$

Cuando  $h$  es muy pequeño la ecuación anterior se puede escribir como

$$f = f_p \left( 1 - \frac{h^2}{2R^2} \left( \frac{n}{n'} \right)^2 \right). \quad (3.6)$$

Cuando  $h \rightarrow 0$  en la expresión anterior el foco imagen tiende al foco paraxial.

Esta expresión es sin embargo una aproximación.

## 3.2. Foco imagen exacto

Pera obtener el foco  $f$  de manera exacta en términos de la altura  $h$  del punto  $I$  se puede proceder de la siguiente manera:

De la figura 1.6, se tiene que

$$\rho = s_i - l_i \cos \theta_i, \quad (3.7)$$

pero también

$$\rho = R - (R^2 - h^2)^{1/2}. \quad (3.8)$$

Igualando las ecuaciones 3.7 y 3.8 y despejando  $l_i$  se tiene

$$l_i = 2(R^2 - h^2)^{1/2}(s_i - R) + s_i^2 - 2s_i R + 2R^2. \quad (3.9)$$

Por otro lado, calculando el foco imagen  $f$  directamente de la ecuación 1.12:

$$\lim_{l_o \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{l_o} + \frac{n'}{l_i} = \frac{1}{R} \left( \frac{n's_i}{l_i} - \frac{ns_o}{l_o} \right) \right] \quad (3.10)$$

$$= [n'R = nf - nl_i] . \quad (3.11)$$

Sustituyendo  $l_i$  de la ecuación 3.9 y organizando:

$$(n'^2 - n^2) f^2 + [2R(n^2 - n'^2) - 2n^2(R^2 - h^2)^{1/2}] f + 2n^2R(R^2 - h^2)^{1/2} - 2n^2R^2 + n'^2R^2 = 0, \quad (3.12)$$

donde se reconoce una ecuación cuadrática con

$$\begin{aligned} a &= n'^2 - n^2, \\ b &= 2R(n^2 - n'^2) - 2n^2(R^2 - h^2)^{1/2} \text{ y} \\ c &= 2n^2R(R^2 - h^2)^{1/2} - 2n^2R^2 + n'^2R^2 . \end{aligned}$$

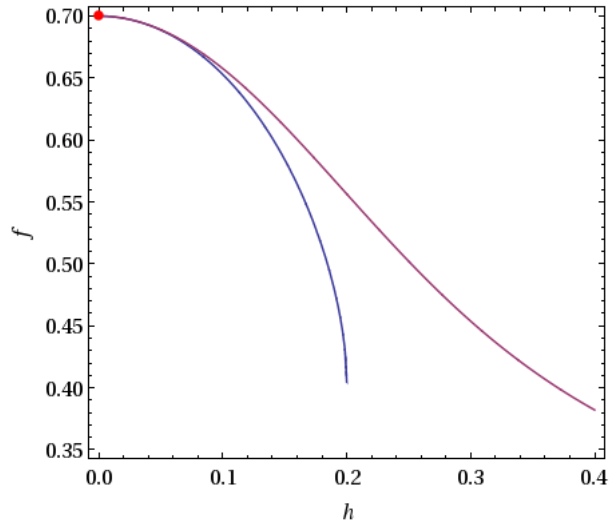


Figura 3.2: Variación del foco imagen  $f$  con la altura  $h$ . La función de color azul es la expresión exacta (ecuación 3.12), mientras que la función de color violeta es la planteada por la teoría de tercer orden (ecuación 3.6). En  $h = 0$  ambas funciones son iguales a 0,7, es decir, coinciden con la teoría paraxial.

Ahora, teniendo estas dos expresiones (ecuaciones 3.6 y 3.12) para la variación del foco imagen respecto a la altura, es necesario comparar dichos resultados; sin embargo, para ello se requiere dar valores a las constantes  $n$ ,  $n'$  y  $R$ .

A modo de ejemplo, para el caso en que las constantes tienen los valores  $n = 1$ ,  $n' = 1,4$  y  $R = 0,2$  m, se tiene la gráfica mostrada en la figura 3.2. Donde se observa que cuando la altura  $h$  del punto  $I$  es cero, en ambas funciones el valor del foco imagen es 0,7 m, coincidiendo exáctamente con el valor obtenido cuando se calcula con la fórmula de conjugación paraxial.

Nótese en la ecuación 3.12 que cuando  $n = n' = 1$ , la expresión se reduce a

$$f = R \left( 1 - \frac{R}{2\sqrt{R^2 - h^2}} \right). \quad (3.13)$$

Forma conocida para el foco de un espejo esférico de radio  $R$ .

### 3.3. Criterio de resolución de Rayleigh

Para encontrar el régimen paraxial es importante primero que todo notar que en el caso límite de una onda convergente perfectamente esférica saliendo de una apertura circular, la óptica geométrica predice que toda la intensidad se concentra en el foco, y es cero en cualquier otra parte, mientras que, de acuerdo con la teoría de difracción de las aberraciones, su imagen consiste de un área central brillante rodeada de anillos oscuros y brillantes (patrón de Airy)[7].

La clave del régimen paraxial es, ante todo, la invarianza del foco imagen. Aunque en esta región no se considera la presencia de aberraciones, la difracción sí limita la calidad de la imagen. Si se considera un objeto puntual ubicado en el infinito los rayos que inciden sobre el dioptrio en la región paraxial serán paralelos al eje óptico y se focalizarán en el foco imagen paraxial  $f_p$  (ver figura 3.3).

Dado que en la práctica la imagen no es un punto sino el disco de Airy (y su patrón), se puede considerar que, en la región paraxial, el foco geométrico puede variar mínimamente del tal forma que los rayos incidentes más alejados del eje óptico cuando lleguen al plano focal  $F$  se encuentren dentro del disco de Airy. Cuando estos rayos lleguen al plano focal a la distancia  $h'_1$  (el radio del disco de Airy) definen el límite paraxial (ver figura 3.3).

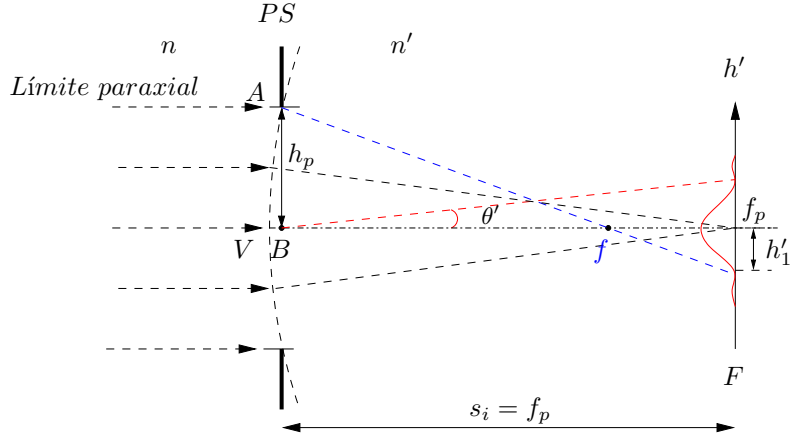


Figura 3.3: Imagen de un objeto puntual ubicado en el infinito y su patrón de difracción generado por la apertura circular  $PS$ .  $h_p$  denota el límite máximo de tolerancia para la región paraxial.

Como se vio en la sección 1.8, el radio del disco de Airy viene dado por  $h'_1 = 0,61\lambda r/h$  (ec. 1.33). En la figura 3.3,  $h$  está representado por  $h_p$ . Note que  $\sin \theta' = h'_1/r$ , por lo tanto, la ecuación 1.33 se puede expresar como

$$\sin \theta' = \frac{0,61\lambda}{h_p}. \quad (3.14)$$

Aquí  $\lambda$  es la longitud de onda en el medio con índice de refracción  $n'$ , y  $\theta$  es muy pequeño dado que se está en la región paraxial, por lo tanto  $\sin \theta' \approx \tan \theta' = h'_1/f_p$ . Sustituyendo en la ecuación anterior

$$h'_1 = \frac{0,61\lambda f_p}{h_p}. \quad (3.15)$$

Ahora, si se considera que la distancia  $\overline{Vf} \simeq \overline{Bf}$  dado que la región paraxial es en la inmediatez del eje óptico, se puede reconocer que se cumple la relación de proporcionalidad dada por

$$\frac{h'_1}{h_p} = \frac{f_p - f}{f}, \quad (3.16)$$

que se puede reescribir como

$$\frac{h'_1}{h_p} = \frac{f_p}{f} - 1, \quad (3.17)$$

sustituyendo la ec.3.6 y la ec.3.15 en 3.17, se tiene que

$$\frac{0,61\lambda f_p}{h_p^2} = \frac{h_p^2}{2R^2} \left(\frac{n}{n'}\right)^2, \quad (3.18)$$

reemplazando el valor del foco paraxial  $f_p = n'R/(n' - n)$  y despejando finalmente  $h_p$

$$h_p = \left(\frac{1,22\lambda n'^3 R^3}{n^2(n' - n)}\right)^{1/4}. \quad (3.19)$$

Para hacerse una idea más cuantitativa el valor de  $h_p$ , tenga en cuenta que  $\lambda$  en el rango visible es del orden de  $10^{-7}$  m, considere que el radio del dioptrio es del orden  $10^{-1}$  m, las demás constantes se pueden obviar salvo  $(n' - n)$ , que es del orden de  $10^{-1}$ , por lo tanto

$$h_p \sim 10^{-3}m, \quad (3.20)$$

es decir, dos órdenes de magnitud menos que el radio del dioptrio.

# Capítulo 4

## Determinación del Régimen

### Metaxial

Para el cálculo de la región paraxial se pudo notar que el foco puede variar una cantidad muy pequeña, si bien no se definió qué tanto, es necesario mencionar que este aspecto es la base para el cálculo del régimen metaxial. A continuación se va a determinar el orden de magnitud de dicha variación y se mostrará su importancia.

Dado que ya se obtuvo  $h_p$  correspondiente al régimen paraxial y que es dos órdenes de magnitud menos que el radio, la ec. 3.6 resulta completamente válida para obtener la posición del foco  $f'$  asociado a  $h_p$

$$f' = f_p \left( 1 - \frac{h_p^2}{2R^2} \left( \frac{n}{n'} \right)^2 \right), \quad (4.1)$$

dado que cuando  $R$  es del orden de  $10^{-1}$ ,  $h_p$  es del orden de  $10^{-3}$ , y por lo tanto se tiene que

$$f' = (0,9999) f_p, \quad (4.2)$$

es decir que, el foco  $f'$  sólo varía aproximadamente hasta la cuarta cifra significativa del foco paraxial  $f_p$ .

Considerando la imagen de la figura 4.1 se puede ver que los rayos que inciden en la frontera de la región paraxial convergen en el foco imagen  $f'$ . A los rayos paraxiales que

inciden axialmente y convergen en  $f_p$  se les puede asociar un frente de onda esférico  $\sigma_{f_p}$  centrado en  $f_p$ , y a los rayos que inciden axialmente en el límite paraxial y convergen en  $f'$  se les puede asociar un frente de onda esférico  $\sigma_{f'}$ .

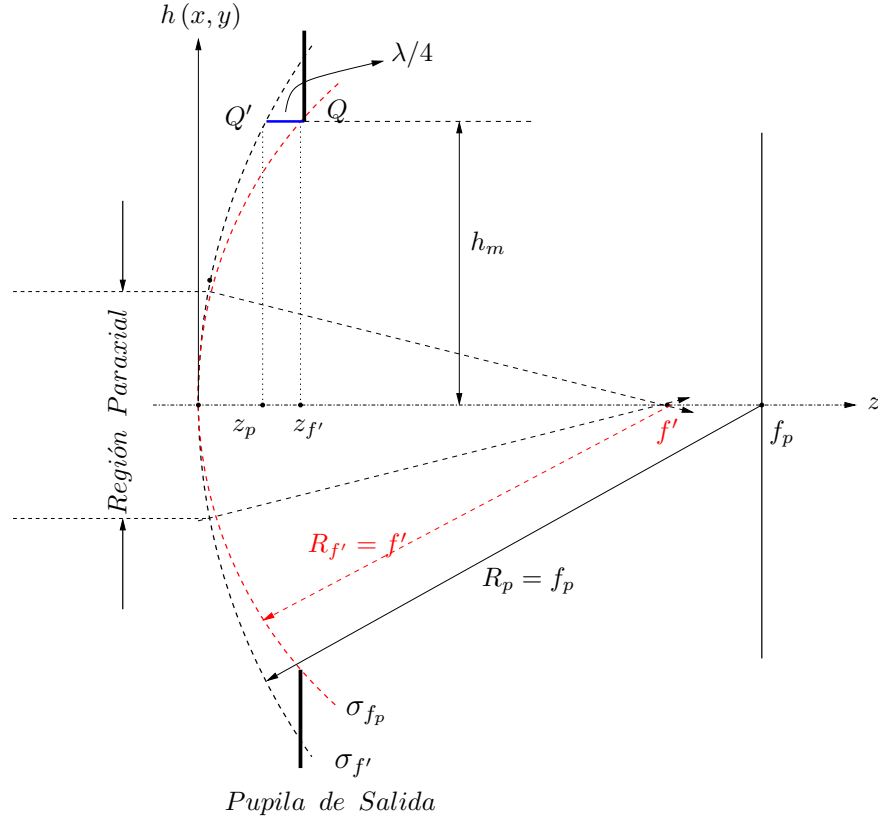


Figura 4.1: Se asocia un frente de onda esférico para los rayos paraxiales que convergen en  $f_p$  y otro para los rayos paraxiales que convergen en  $f'$ .

La aplicación del Criterio de Rayleigh consiste en imponer una restricción sobre la separación máxima de  $\lambda/4$  que puede haber entre el frente de onda esférico asociado a los rayos paraxiales y la superficie del dióptro  $\sigma$  en la pupila de salida, a fin de garantizar que la intensidad en el foco difractivo se mantenga por encima del 80%. Al imponer dicha restricción las dimensiones transversales del dióptro se verán limitadas a la altura  $h_m$  (región metaxial).

La ecuación para cada esfera cuando  $h = h_m$  es

$$z_{f_p} = f_p - \sqrt{f_p^2 - h_m^2} \quad y \quad z_{f'} = f' - \sqrt{f'^2 - h_m^2}. \quad (4.3)$$

Dado que en la región metaxial aún es válido aproximar esferas por paraboloides, se tiene que

$$z_{f_p} = \frac{h_m^2}{2f_p} \quad y \quad z_{f'} = \frac{h_m^2}{2f'} \quad (4.4)$$

Igualando la diferencia entre  $z_{f'}$  y  $z_{f_p}$  a  $\lambda/4$ , es decir

$$z_{f'} - z_{f_p} = \lambda/4 \quad (4.5)$$

y resolviendo para  $h_m$  se tiene

$$h_m = \sqrt{\frac{\lambda}{2} \frac{f' f_p}{(f_p - f')}} \quad (4.6)$$

Como se vio en la ec. 4.2, la diferencia  $f_p - f'$  es del orden de  $10^{-4}m$  cuando  $R$  es del orden de  $10^{-1} m$ , y por lo tanto  $f_p$  y  $f'$  son del orden de las unidades. Así, para el rango visible ( $\lambda \sim 10^{-7}m$ ) se tiene que

$$h_m \sim 10^{-2} m, \quad (4.7)$$

lo cual quiere decir que el régimen metaxial es de un orden de magnitud menos que el radio de curvatura del dioptra esférico y de un orden de magnitud más que el régimen paraxial.

# Capítulo 5

## Análisis de resultados

De acuerdo con los resultados de los capítulos 2, 3 y 4, se puede apreciar que el régimen metaxial, está, por lo general, un orden de magnitud por encima de la región paraxial. Sin embargo, nótese que en caso de las esferas de Young el régimen de aplicación de cada teoría se ve disminuido con respecto a la imposición de invariabilidad del foco imagen, ello se da porque los puntos de Young son puntos rigurosamente estigmáticos y permiten formar imágenes perfectas solamente en esas posiciones de los puntos, pero tan pronto se aleja una distancia mínima de dichos puntos se pierde rápidamente la calidad de la imagen, mientras que en el análisis de la regiones paraxial y metaxial ubicando el objeto en el infinito (capítulos 3 y 4) cada punto objeto en realidad tiene la libertad de ubicarse en cualquier parte sobre el eje óptico y su imagen se formará de acuerdo a esa ubicación; no sucede así con los puntos de Young.

El hecho de que el régimen metaxial sea más amplio que el paraxial implica que el conocimiento del campo  $U$  que se propaga a través del dioptrio esférico, cuando llega al detector está tolerablemente bien conocido sobre una superficie esférica  $A$  tangente al detector (plano  $P$ ) y de amplitud  $U'$ , en donde simplemente se requiere (de acuerdo con el teorema 1 1.6.3) de un objetivo  $L$  cuyo foco objeto coincida con el centro de curvatura de  $A$  (ver figura 5.1). Ahora, si se quiere el aumento sea de 1, entre la amplitud del campo sobre  $A$  y la amplitud del campo sobre  $P$ , el vértice de  $A$  debe confundirse con el punto principal objeto  $H$  del objetivo y  $P$  con el punto principal imagen  $H'$ [8].

Téngase presente que llevar el campo  $U'$  de la esfera  $A$  al plano  $P$ , en el enfoque

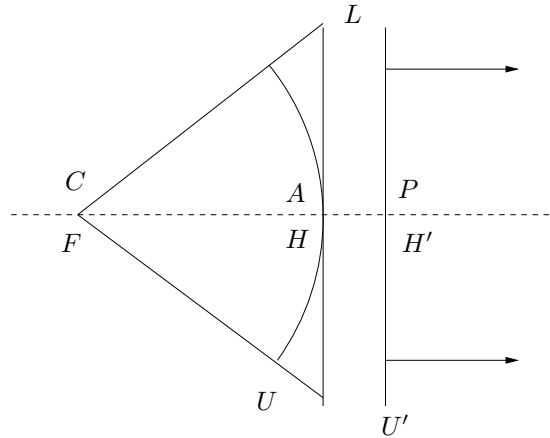


Figura 5.1: El objetivo  $L$ , representado por sus puntos principales  $H$  y  $H'$  y su foco objeto  $F$ , permite obtener sobre el plano  $P$  el mismo campo que sobre la esfera  $A$ .

metaxial, no significa corregir la aberración, como sí sucede en la óptica paraxial.

## 5.1. Ambigüedades sobre la Región Paraxial

En los textos clásicos de óptica, como “ÓPTICA” de Hecht ([1]) o “Introduction to Fourier Optics” de Goodman ([12]), consideran que la región en donde se confunden la esfera y el paraboloides corresponde a la región paraxial:

*“En la región paraxial, es decir, en las inmediaciones del eje central, estas configuraciones serán esencialmente indistinguibles”*[1].

Más sin embargo, el mismo Hecht se ve en la necesidad de aceptar que a pesar de que las conclusiones obtenidas en el estudio de superficies paraboloidales pueden aplicarse a las superficies esféricas en el régimen paraxial, *“cuando se emplee realmente, sin embargo,  $h$  no estará suficientemente limitado y aparecerán aberraciones”*[1].

Lo cual es natural, pues la región paraxial es una aproximación de primer orden, y el término tomado en la expansión binomial en la ecuación 4.3 es de segundo orden, por lo que la exigencia de la aproximación de Gauss es muy fuerte, más fuerte que la exigencia de la aproximación binomial, como se evidenció en los resultados de los capítulos 3 y 4.

A su vez, cuando Goodman analiza las lentes delgadas como una transformación de fase, para simplificar la función de grosor aplica la expansión binomial argumentando que así “*la función de grosor puede ser sustancialmente simplificada si la atención es restringida a porciones del frente de onda que caen cerca del eje de la lente, o equivalentemente, si solamente los rayos paraxiales son considerados*”[12].

Es así que, en concordancia con los resultados obtenidos, en la construcción de lentes se emplean superficies esféricas con una sección transversal que va más allá de la *región paraxial*, es decir que, en realidad, se está trabajando sobre un régimen más amplio al que se debe reconocer como *régimen metaxial*, pero dado que no se es consciente de ello, se recurre a corregir las aberraciones resultantes en el detector plano (aproximación de primer orden), mientras que en el enfoque metaxial se pasa de la distribución del campo sobre una esfera (aproximación de segundo orden) a la distribución del campo sobre el plano por medio de un objetivo como se mencionó en la sección anterior. Por su puesto, cuando la dimensiones transversales de las lentes exceden la región metaxial se evidencian igualmente las aberraciones.

# Capítulo 6

## Conclusiones

-El régimen paraxial de la óptica es demasiado pequeño (dos órdenes de magnitud menos que el radio de curvatura del dioptrio esférico) para ser aplicado en sistemas ópticos reales que no estén corregidos de las aberraciones primarias; mientras que el régimen metaxial se acerca más a las dimensiones de los sistemas ópticos reales (un orden de magnitud menos que el radio de curvatura del dioptrio esférico).

-El acercamiento a la condición de estigmatismo riguroso a través de los Puntos de Young limita aún más tanto el régimen paraxial como el metaxial, pero se mantiene una superioridad, del segundo respecto del primero, de un orden de magnitud.

-Inconscientemente los autores han confundido el régimen paraxial con el metaxial (concepciones teóricas), pero que en realidad, si aprovecha el conocimiento de la fase que ofrece la óptica metaxial, se puede obtener fenómenos de superposición que no son predecibles por la óptica paraxial.

-Se ha logrado obtener expresiones matemáticas para la variación del foco imagen en función de la altura  $h$  a la cual llegan los rayos paralelos al eje óptico que inciden sobre el dioptrio. En el caso de la expresión exacta (solución de la ecuación 3.12), se mostró que cuando los índices de refracción,  $n$  y  $n'$ , son ambos iguales a 1, la expresión se reduce a la ecuación que se emplea para el caso del foco de un espejo esférico.

La expresión matemática (ecuación 3.6) constituye una aproximación de la variación

del foco imagen en función de la altura  $h$ , que se acerca bastante bien a los resultados de la ecuación 3.12 cuando  $h$  es dos órdenes de magnitud menos que el radio del dioptrio. Además por su forma, tiene una gran facilidad de utilización.

-La óptica metaxial describe bastante bien la propagación del campo electromagnético cuando atraviesa un sistema óptico formador de imágenes, ya que permite obtener de manera exacta las Esferas de Young, y de forma aproximada (hasta segundo orden) la curvatura de campo de Petzval.

# Bibliografía

- [1] HECHT, EUGENE, *ÓPTICA*, Addison Wesley Iberoamericana, Madrid, 2002.
- [2] BARON RAYLEIGH, *SCIENTIFIC PAPERS Vol. I*, Cambridge Press, vol.1, pp.428-436, Londres, 1899.
- [3] J.W. MCBRIDE, M. HILL, M. JUNG, *The analysis of the form of aspheric lens surfaces*, Transactions on Engineering Sciences vol 16, WIT Press, Southampton, 1997.
- [4] MIN-KANG, CHAO; SHENG-WEN, CHENG, *Aspheric lens design*, Ultrasonics Symposium, 2000 IEEE , vol.2, pp.1025-1028, Taiwan, 2000.
- [5] YONGJIAN ZHU, FENGJUN CHEN, SHAOHUI YIN, *Studies on Mega-pixel Cell Phone Lenses Based on Aspheric Optics*, Applied Mechanics and Materials Vol. 109, pp.441-444, China, 2012.
- [6] BORN, MAX; WOLF, EMIL, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, Inglaterra, 1959.
- [7] WOLF, EMIL, *The Diffraction Theory of Aberrations*, Cambridge University, Londres, 1951.
- [8] PELLA-FINET, PIERRE, *Lecciones de óptica de Fourier*, Universidad Industrial de Santander, Escuela de Física, Bucaramanga, 2004.
- [9] R. ANNEQUIN Y J. BOUGTIGNY, *ÓPTICA*, Editorial Reverté (Edición en español), España, 1976.
- [10] BONNET, GEORGE, *OPTIQUE METAXIALE (PHENOMENOLOGIE)*, Gessy-Université du Sud, Tolón, 2005.

- [11] PÉREZ, JOSÉ-PHILIPPE, *OPTIQUE Fondemnts et applications*, Dunod, París, 2000.
- [12] GOODMAN, JOSEPH W., *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill Companies, Estados Unidos, 1996.
- [13] PELLA-FINET, PIERRE, *Optique de Fourier. Theorie metaxiale et fractionnaire*, Springer, Francia, 2009.
- [14] TORRES, YESID; TORRES, RAFAEL, *Tratamiento de Señales por Transformación de Fourier fraccionaria (Tesis Doctoral)*, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2008.
- [15] TORRES, YESID; LIZARAZO, ZANDRA, *Encriptación óptica de señales usando la Transformada de Fourier Fraccional (Tesis de Maestría)*, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2004.