

**DISCOS DELGADOS RELATIVISTAS CON HALO Y CAMPO
MAGNÉTICO**

DIEGO ALEJANDRO BALLÉN DAZA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA**

2012

**DISCOS DELGADOS RELATIVISTAS CON HALO Y CAMPO
MAGNÉTICO**

DIEGO ALEJANDRO BALLÉN DAZA

Trabajo de Grado para optar el título de Físico

Director:

Guillermo A. González V., Ph. D.

Co-Director:

Antonio C. Gutiérrez P., Ph. D.

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA**

2012

*“Una onza de acción vale más que
una tonelada de teoría.”
(Engels)*

*Para Ab-ba que me sienta en sus
piernas y me alienta desde los cielos.*

*A mi madre, la dueña de mis sueños,
“... cuando tras larga ausencia regreso,
ella me espera, me abraza como a un niño
y me besa con pasión...”*

*Cuando supe que debía escribir este trabajo
y comencé a gestarlo, pensé en ti.
“... y tomado de tu mano, inicié mi aprendizaje
en la vida. Ahora, casi todo lo que soy y lo que
tengo, se lo debo a tu ejemplo de tenacidad y valor.
Por haber sido siempre el más sublime y
respetable hombre, esta obra es tuya, Papá...”*

Agradecimientos

Quiero agradecer a aquellos que de una u otra forma han hecho parte de este trabajo. A mi profesor y director Guillermo A. González V. Ph.D., por haber depositado su confianza en mi, por su paciencia, guía y sabiduría. A mi amigo y codirector Antonio C. Gutiérrez P. Ph.D., por su invaluable aporte y corrección a este trabajo, producto de su excepcional talento. A mi ángel, mi Nancy, por ser incondicional y omnipresente; por ser la más dulce compañía en cada una de las noches de estos cien días en que permanecí sumergido en la elaboración de este trabajo. A mi siempre pequeño hermano Sebastián, porque somos conductor y pasajero del mismo triciclo. A la Dra. Claudia Moreno, por aceptar este humilde trabajo y haberme mostrado la belleza de las calles y las noches tapatías en Tlaquepaque y Guadalajara. Al Grupo de Relatividad y Gravitación de la Universidad Nacional de Córdoba, por haberme recibido en La Cumbre, Argentina; lugar donde nació la idea de este trabajo. A todos mis amigos y profesores del GIRG y de la escuela de Física, en especial a Liliana (*Lila*), Christian (*Chacaltaya Boy*), Andrés (*Chiquis*), John Hadder (*El Neutrino*), Fernando, Oscar, Rafa, Luis N., Yeinzon, Daniel, Gabriel, Fransol y Jerson; porque siempre hubo tiempo para echarnos –al menos– una “polita”, en medio de tanto que había por hacer.

Índice general

1. Introducción	17
1.1. Naturaleza e Importancia del Problema	17
1.2. Estado General del Tema	19
1.3. Propósito y Organización del Trabajo de Investigación	20
2. Modelo de Discos con Halos y Campos Magnéticos en Relatividad General	22
2.1. Preliminares	22
2.2. Ecuaciones de Campo de Einstein-Maxwell y Soluciones Discoidales	23
2.3. Solución a las Ecuaciones de Campo de Einstein-Maxwell	26
2.3.1. Halo	26
2.3.2. Disco Delgado	29
3. Análisis del Contenido Físico del Modelo	32
3.1. Preliminares	32
3.2. Contenido del modelo en un Sistema de Referencia Localmente Minkowskiano	33
3.2.1. Halo	33
3.2.2. Disco Delgado	36
3.2.3. Campo magnético	37
3.3. Solución para la función métrica ψ	38
4. Aplicación al Modelo de Discos de Kuzmin-Toomre	40
4.1. Preliminares	40

ÍNDICE GENERAL

4.2. Solución de la Ecuación de Laplace	41
4.3. Masa Total del Modelo	42
4.4. Aplicación para $n=0$	44
4.4.1. Halo	44
4.4.2. Disco Delgado	46
4.5. Aplicación para $n=1$	51
4.5.1. Halo	51
4.5.2. Disco Delgado	52
Conclusiones Generales	58
Apéndices	61
A. Equivalencia entre la solución trivial de vacío y la métrica de Mikowski	61
B. Demostración de $e^{-\psi}$ como solución de la ecuación de Laplace	63
C. Teorema de comparación del límite para la convergencia de las masas	65
Bibliografía	66

Índice de figuras

4.1. Método de “desplazamiento, corte y reflexión”	42
4.2. Gráfica de la densidad volumétrica de energía en función de las coordenadas \tilde{r} y \tilde{z} para el modelo $n = 0$ de la ecuación (4.9).	45
4.3. Modelo $n = 0$. Gráfica de la ecuación (4.13), densidad superficial de energía $\tilde{\sigma}$ en función del radio \tilde{r} , para diferentes valores de la constante \tilde{C}_0 . Comenzando por la curva inferior hasta la superior, los valores de esta constante son $\tilde{C}_0 = 0,1; 1; 3; 6; 10; 20; 40; 80; 3000$	47
4.4. Modelo $n = 0$. Gráfica de la ecuación (4.19), densidad superficial de corriente $I^{(1)}$ en función del radio \tilde{r} , para $\lambda = 10$ y diferentes valores de la constante C_0 . Comenzando por la curva superior hasta la inferior, los valores de $\tilde{C}_0 = 1; 1,5; 2; 3; 5$	49
4.5. Gráfica de la coordenada \tilde{z} en función de \tilde{r} , que muestra las líneas de campo magnético para el modelo $n = 0$ de la ecuación (4.28), con $\tilde{C} = 100$. El disco se muestra de perfil y está representado por la línea roja horizontal en $\tilde{z} = 0$	50
4.6. Modelo $n = 1$. Gráfica de la densidad volumétrica de energía $\tilde{\rho}$ en función de la coordenada \tilde{z} y de la coordenada radial \tilde{r} , descrita en la ecuación (4.34), con las constantes $\tilde{C}_0 = \tilde{C}_1 = 2$	52
4.7. Modelo $n = 1$. Gráfica de la densidad superficial de energía $\tilde{\sigma}$ en función del radio \tilde{r} descrita en la ecuación (4.36). Las constantes $d = 10$ y $\tilde{C}_0 = 10$ permanecen invariables. Comenzando por la curva superior hasta la inferior, los valores de la constante $\tilde{C}_1 = 1, 5, 10, 20, 50, 100$	54

4.8. Modelo $n = 1$. Gráfica de la densidad superficial de energía $\tilde{\sigma}$ en función del radio \tilde{r} descrita en la ecuación (4.36). Las constantes $d = 10$ y $\tilde{C}_1 = 10$ permanecen invariables. Comenzando por la curva inferior hasta la superior, los valores de la constante $\tilde{C}_0 = 1, 5, 10, 20, 50, 100$	54
4.9. Modelo $n = 1$. Gráfica de la densidad superficial de energía $\tilde{\sigma}$ en función del radio \tilde{r} descrita en la ecuación (4.36). Las constantes $\tilde{C}_1 = 10$ y $\tilde{C}_0 = 10$ permanecen invariables. Comenzando por la curva inferior hasta la superior, los valores de la constante $d = 1, 5, 10, 20, 50, 100$	55
4.10. Modelo $n = 1$. Gráfica de la ecuación (4.39), densidad superficial de corriente $I^{(1)}$ en función del radio \tilde{r} , para $\Lambda = 10$ $\tilde{C}_0 = 1$ y diferentes valores de la constante C_1 . Comenzando por la curva inferior hasta la superior, los valores de $\tilde{C}_1 = 2; 10; 5; 3$	56
4.11. Modelo $n = 1$. Gráfica de la ecuación (4.39), densidad superficial de corriente $I^{(1)}$ en función del radio \tilde{r} , para $\Lambda = 10$ $\tilde{C}_1 = 1$ y diferentes valores de la constante C_0 . Comenzando por la curva con el pico inferior hasta el superior, los valores de $\tilde{C}_0 = 0,5; 1; 2; 5$	56
4.12. Gráfica de la coordenada \tilde{z} en función de \tilde{r} , que muestra las líneas de campo magnético para el modelo $n = 1$ de la ecuación (4.50), con $\epsilon = 5000$ y $\kappa = 2$. El disco se muestra de perfil y está representado por la línea roja horizontal en $\tilde{z} = 0$	57

Resumen

TÍTULO: DISCOS DELGADOS RELATIVISTAS CON HALO Y CAMPO MAGNÉTICO.¹

AUTOR: Diego Alejandro Ballén Daza²

PALABRAS CLAVE: Relatividad General, Ecuaciones de Einstein-Maxwell, Soluciones Exactas, Discos Relativistas, Espacio-tiempos Conformestáticos, Tensor de energía-momentum.

Descripción:

Se presenta una nueva familia de soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell, las cuales describen un sistema constituido por un disco infinitamente delgado, de polvo, axialmente simétrico, rodeado por un halo esferoidal de materia y en presencia de campos magnéticos. Con el fin de construir tal modelo, se consideran soluciones axialmente simétricas y se supone un cuadripotencial sólo con la componente magnética en la dirección acimutal. Dado que el elemento de línea utilizado describe un espacio-tiempo conformestático, el tensor métrico está caracterizado sólo por una función métrica, la cual presenta una discontinuidad en su primera derivada normal a través de un disco delgado. Con esto, se encuentran el tensor energía-momentum y el cuadvivector corriente del modelo, los cuales se expresan en términos del potencial vector y de la función métrica. Para reducir tal sistema, se propone una relación entre dichas funciones, de tal manera que se encuentra una solución para la función métrica, equivalente a la ecuación de Laplace para un problema con simetría axial. El análisis físico se realiza a partir de las soluciones obtenidas, determinando sus componentes con respecto a un sistema de referencia local y verificando el cumplimiento de las condiciones de energía usuales. Finalmente, se procede a mostrar el comportamiento del cuadvivector corriente y un perfil de densidades de energía para cada componente del sistema. Por último, se encuentran las componentes del tensor electromagnético, las líneas de campo magnético y la masa total del modelo.

¹Trabajo de Grado

²Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Guillermo A. González V., Ph.D. Codirector: Antonio C. Gutiérrez P., Ph.D.

Abstract

TITLE: DISCOS DELGADOS RELATIVISTAS CON HALO Y CAMPO MAGNÉTICO¹.

AUTHOR: Diego Alejandro Ballén Daza²

KEY WORDS: General Relativity, Einstein-Maxwell equations, exact solutions, relativistic disks, conformastatic spacetimes.

Description:

It is presented a new family of exact solutions of the Einstein-Maxwell's field equations, which describes a system consisting by an infinitely thin dust disk, axially symmetric, surrounded by a spheroidal halo in presence of magnetic fields. In order to construct such a model, are considered axially symmetric solutions and assumes a cuadripotencial only with magnetic component in the azimuthal direction. Since the element line used describes a conformastatic spacetime, the metric tensor is characterized just by one metric function, which presents a discontinuity in its normal first derivative through a thin disk. Then, the energy-momentum tensor and the current four-vector are found, which are expressed in terms of the vector potential and the metric function. In order to reduce such a system, is proposed a relationship between said functions, so that a solution is found for the metric function equivalent to Laplace's equation for a problem with axial symmetry. The phenomenological analysis is performed from the solutions obtained by determining its components with respect to a local reference system and verifying compliance of the usual energy conditions. Finally, we proceed to use all formalism constructed to particular case of Kuzmin-Toomre disks, by showing the behavior of the four-current density and energy profile for each system component. In addition, the magnetic field components and the estimated mass of the total model are found.

¹Degree work

²Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Advisor: Guillermo A. González V., Ph.D. Coadvisor: Antonio C. Gutiérrez P., Ph.D.

Notación

Los índices griegos representarán cualquiera de los números $\{0, 1, 2, 3\}$ y los índices latinos el espacio tridimensional, $\{1, 2, 3\}$. La derivada parcial $\partial_\nu A^\mu$ se denotará por $A^\mu_{,\nu}$ y la derivada covariante $\nabla_\nu A^\mu$ por $A^\mu_{;\nu}$. La signatura del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ será $(-, +, +, +)$, de tal manera que los símbolos de Christoffel están dados por

$$\Gamma^\mu_{\nu\alpha} = \frac{1}{2}g^{\mu\gamma}(g_{\gamma\nu,\alpha} + g_{\alpha\gamma,\nu} - g_{\nu\alpha,\gamma}), \quad (1)$$

y las componentes de los tensores de Riemann y Ricci por

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\gamma_{\nu\beta}\Gamma^\mu_{\gamma\alpha} - \Gamma^\gamma_{\nu\alpha}\Gamma^\mu_{\gamma\beta}, \quad (2)$$

$$R_{\nu\beta} = R^\mu_{\nu\mu\beta}, \quad (3)$$

respectivamente.

Adicionalmente, el “salto” a través del plano $z = 0$ de un campo tensorial $X_{\mu\nu}$ se denota como

$$[X_{\mu\nu}] = X_{\mu\nu}^+|_{z=0} - X_{\mu\nu}^-|_{z=0}, \quad (4)$$

donde los superíndices $+$ y $-$ representan las zonas superior e inferior al plano $z = 0$.

Asi mismo, si el tensor presenta el símbolo “ $\hat{}$ ”, indica que está multiplicado por el término

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}, \quad (5)$$

lo cual se hace con el fin de facilitar el cálculo de su derivada covariante. Por último, un tensor que presente índices encerrados entre paréntesis $X_{(\mu)(\nu)}$, significa que está definido en una base ortonormal de vectores o tétrada local.

Introducción

1.1. Naturaleza e Importancia del Problema

El estudio de estructuras discoidales de materia autogravitante en Relatividad General, adquiere gran importancia a partir de evidencia observacional, la cual demuestra que dichas distribuciones de energía son frecuentes y diversas en objetos y fenómenos astrofísicos. También se ha observado que algunos de los cuerpos celestes que describen éstas configuraciones discoidales, poseen fuertes campos magnéticos que influyen en su dinámica y comportamiento. Por otro lado, es indudable que aunque en estas distribuciones, la mayor parte de la energía se concentra en un disco, también existe una región del espacio que envuelve dicho disco e igualmente está compuesta de materia; tal región es conocida como *halo*.

La construcción de modelos matemáticos que describan estructuras como las comentadas anteriormente, se puede llevar a cabo a partir de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell. No obstante, aunque existe literatura con cientos de soluciones exactas simples conocidas, algunos de estos métodos conducen a soluciones sin una interpretación física clara, o pueden llevar a soluciones que dependan de muchos parámetros sin un significado físico concreto.

Ahora bien, con el objetivo de describir a través de modelos matemáticos los efectos gravitacionales de sistemas como los mencionados, se puede considerar la gravitación Newtoniana, en donde una de sus expresiones es la conocida Ecuación de Poisson, la cual indica que el Laplaciano del potencial gravitatorio es directamente proporcional a la densidad de

materia ρ en una determinada región. Sin embargo, cuando se considera que la propia geometría del espacio-tiempo se ve afectada por la presencia de un objeto masivo, el concepto de espacio deja de ser absoluto y por tanto también la noción de densidad; es decir, la densidad de masa ρ no puede servir de parámetro de interacción gravitatoria entre dos cuerpos.

Con base en lo anterior, resulta necesario prescindir del término ρ , y sustituirlo por un objeto geométrico-matemático que permanezca invariante ante las transformaciones de Lorentz. Dicho objeto fue definido por Albert Einstein en su Teoría General de la Relatividad y recibe el nombre de *Tensor de Energía-Momentum* [1].

La Relatividad General ha sido la teoría gravitatoria que cuenta con mayor aceptación por la comunidad científica, debido a que consigue describir, mediante la curvatura del espacio-tiempo, la interacción del campo gravitatorio con el contenido energético de la fuente que lo genera. Esto lo logra a través de las conocidas Ecuaciones de Campo de Einstein, cuyas soluciones nos permiten comprender de mejor forma algunos fenómenos astrofísicos, los cuales se logran describir a través de modelos matemáticos. Aunque los modelos relativistas de discos delgados aún son altamente ideales, pueden por ejemplo representar discos de materia sin presión —conocidos como discos de polvo—, los cuales se analizan como cierto tipo de estrellas y galaxias en equilibrio termodinámico. También se utilizan para describir fenómenos puramente relativistas [2] como la superposición de discos de acreción alrededor de agujeros negros [3, 4, 5] o la formación de discos circumestelares.

En particular, los modelos con presencia de campos magnéticos pueden describir estrellas de neutrones, binarias, enanas blancas, púlsares y magnetares, además de aportar gran información acerca de la formación, evolución y dinámica de las galaxias. Esto es debido a que dichos campos magnéticos se gestaron desde la nube primigenia que originó las galaxias y allí se perpetuaron. Por lo anterior, se dice que las líneas de fuerza magnética están “congeladas” en el polvo [6]. Entre las diferentes funciones que puede desempeñar el campo magnético en la astrofísica, está por ejemplo el hecho de que en una enana blanca, su radio pueda cambiar significativamente, incluso cuando una pequeña cantidad de energía magnética está presente [7]. También como ejemplo, se pueden considerar las nebulosas y los núcleos activos de discos galácticos que son lo suficientemente calientes como para ser parcial o totalmente ionizados, y su alta conductividad permite que la corriente fluya libremente. Debido a esto, la presencia de campos magnéticos logra una fuerte influencia en la estructura y evolución de estos cuerpos celestes [8].

Actualmente, la descripción más aceptada de la distribución de masa en un objeto astrofísico –como una galaxia–, es que la mayoría de su energía se concentra en un disco delgado con un bulbo central, mientras que la contribución restante proviene de un halo esferoidal de materia bariónica (gas interestelar, estrellas viejas marrones, enanas rojas, entre otros) y quizá de materia oscura [9]. Sin embargo, la hipótesis de que la materia oscura es neutra, que no interactúa electromagnéticamente, que no absorbe ni emite luz y que sólo interactúa gravitacionalmente con el resto de la materia, es la mejor hipótesis que tenemos de ella. En otras palabras, todas las componentes materiales y electromagnéticas de un objeto astrofísico, sin discriminar su composición, contribuyen al campo gravitacional y sus efectos. En esto radica el principal objeto del presente trabajo.

1.2. Estado General del Tema

Durante las últimas décadas, la investigación de configuraciones discoidales de materia autogravitante ha sido llevada a cabo por diferentes autores. La mayoría aborda el problema mediante la consecución de soluciones axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein y –en menor medida– de las ecuaciones de Einstein-Maxwell. Debido a ello, se ha suscitado una gran variedad de trabajos.

Los primeros intentos de modelar sistemas discoidales en Relatividad General, fueron llevados a cabo por Bonnor y Sackfield [10] y en seguida por Morgan y Morgan [11, 12], hace ya cuatro décadas. A partir de esto, diferentes autores han conseguido varios tipos de soluciones exactas correspondientes, en primera instancia, a discos delgados estáticos [13 - 21] y estacionarios [22 - 25].

Posteriormente, con el fin de acercarse a un sistema galáctico, se buscó modelar discos estáticos y superponerlos con un agujero negro central [26 - 35]; Vogt y Letelier consideraron discos de fluido perfecto cargado como fuentes de espacio-tiempo [36] y Ujevic y Letelier estudiaron la estabilidad de estos discos delgados mediante perturbaciones de primer orden en el tensor energía-momentum [37]. Discos delgados con borde interno son considerados por González, Gutiérrez-Piñeres y Viña-Cervantes [38] y también fue construido un modelo de discos con soporte de esfuerzo en la dirección radial por García-Reyes y González [39]. Una propuesta de discos delgados finitos cargados fue presentada por González, Gutiérrez-Piñeres y Ospina [40], y una familia infinita de discos magnetizados tipo Morgan-Morgan por

Gutiérrez-Piñeres y González [41]. Además, se aportaron familias de soluciones exactas para fuentes discoidales en espacio-tiempos estacionarios con campos magnéticos [42] y discos relativistas como fuentes de la métrica de Kerr-Newman [43].

Estudios referentes y cercanos al presente trabajo, fueron llevados a cabo por P. Letelier, quien aportó estudios como discos de fluido perfecto con halo [44], y campos magnetostáticos axialmente simétricos [6], entre otros estudios no menos importantes.

De modo que a pesar de que el estudio y modelado de discos simples, discos con campos electromagnéticos y discos con halos se ha llevado a cabo en las anteriores citas, no hay trabajo publicado en Relatividad General que considere conjuntamente todas estas características y construya modelos de discos delgados axialmente simétricos, inmersos en un halo y con presencia de campos magnéticos, siendo ésta última idea el propósito y la motivación del presente trabajo de investigación.

1.3. Propósito y Organización del Trabajo de Investigación

El objetivo central del presente Trabajo de Grado es la construcción –a partir de soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell– de un modelo relativista que represente un sistema compuesto por un disco delgado, axialmente simétrico, con presencia de campo magnético e inmerso en un halo. Además, que dicho modelo cumpla con las condiciones de un sistema físico real y que su comportamiento sea coherente y se aproxime a lo evidenciado en las observaciones.

En el Capítulo 2 se muestra que lo anterior se lleva a cabo considerando soluciones axialmente simétricas de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell e introduciendo una discontinuidad finita en las primeras derivadas del tensor métrico y del potencial electromagnético a través del plano $z = 0$. Es decir, a través de un disco ubicado en dicho plano, el cual es infinitamente delgado. Así mismo, se mostrará que dichas discontinuidades pueden representarse mediante una función de Heaviside o función escalón unitario de tal forma que, dado que el tensor de curvatura es lineal en las segundas derivadas del tensor métrico y cuadrático en las primeras derivadas, el tensor de curvatura contendrá términos proporcionales a la distribución delta de Dirac con soporte en el plano $z = 0$.

Adicionalmente, en este capítulo se presenta el procedimiento general aplicado a modelos de discos delgados en Relatividad General por medio del formalismo necesario para el tratamiento de campos tensoriales. Finalmente, se estudiarán soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell para un elemento de línea conformestático con campo magnético, a partir de los cuales se obtendrán el tensor energía-momentum y la densidad de corriente.

En el Capítulo 3 se estudian las propiedades físicas del modelo, lo cual se lleva a cabo mediante un análisis detallado de la distribución de materia y su interacción, a través del tensor energía-momentum visto desde un sistema de referencia localmente Minkowskiano. Esto se hace con el objetivo de encontrar una ecuación de estado que describa la densidad de materia en función de los esfuerzos principales a los que está sujeto el sistema. No obstante, dichos resultados deben ser sometidos a las condiciones de energía usuales, con el fin de encontrar coherencia entre los resultados y los conceptos de la física. Posteriormente, se encuentra una solución para la función métrica, ya que todas las variables físicas estarán dadas en términos de ella.

En el Capítulo 4, a manera de ejercicio, se aplica todo el formalismo construido hasta el momento a un caso particular de discos. Inicialmente se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales que se genera para el potencial métrico y la componente magnética del cuadripotencial, expresándolo en términos de una función auxiliar que a la vez es solución de la ecuación de Laplace. Esta solución es la aportada por Kuzmin y Toomre [45, 46] en la creación de modelos de discos galácticos en mecánica Newtoniana. Así como se indica en el capítulo 2, la estructura discoidal se genera introduciendo una discontinuidad en la primera derivada con respecto al eje z de dicha solución. Se muestra además que ésta discontinuidad se puede obtener reflejando la solución dada a través del plano, de tal manera que describa una distribución superficial discoidal de materia. Tal discontinuidad da el carácter esferoidal del halo, el cual describe un perfil de densidad volumétrica de energía. Adicional a esto, se calcula el valor de la masa total del modelo, el cual se lleva a cabo bajo estrictas condiciones. Finalmente, se estudia el comportamiento del campo magnético, mediante el estudio de la densidad de corriente y un esquema de líneas de campo magnético, en función de los diferentes parámetros de la solución propuesta.

Modelo de Discos con Halos y Campos Magnéticos en Relatividad General

2.1. Preliminares

En el presente capítulo se introduce al formalismo general que lleva a la construcción de modelos que describen una distribución de energía en forma discoidal, axialmente simétrica y rodeada por un halo esferoidal constituido por materia. Esto se lleva a cabo solucionando apropiadamente las ecuaciones de Einstein, las cuales constituyen la base del aparato predictivo de la Teoría General de la Relatividad.

Einstein en su teoría, indica que el campo gravitatorio está identificado con las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el cual describe la distancia espacio-temporal entre dos sucesos infinitesimalmente juntos. Es decir, la geometría del espacio-tiempo está estrechamente relacionada con la distribución de la masa y la energía de un sistema. La información acerca de dicha distribución se encuentra en el tensor de energía-momentum $T_{\mu\nu}$, el cual también puede llegar a tener datos referentes a la energía electromagnética de dicho sistema. De este modo, en el presente capítulo se asume que la energía total del modelo no sólo es aportada por la materia, sino que además cuenta con una cantidad de energía magnética, la cual es una indudable característica de sistemas asrofísicos reales.

2.2. Ecuaciones de Campo de Einstein-Maxwell y Soluciones Discoidales

Con el objetivo de encontrar soluciones a las ecuaciones de Einstein-Maxwell interpretables como discos delgados y axialmente simétricos, se debe elegir un elemento de línea que permita obtener soluciones exactas simples, de tal manera que se puedan analizar las propiedades físicas de los modelos obtenidos. Este elemento de línea escrito en coordenadas cilíndricas $x^a = (t, \varphi, r, z)$ se puede expresar como,

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi} (r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2), \quad (2.1)$$

donde ψ es función de las coordenadas r y z únicamente. La coordenada φ varía en el intervalo usual $[0, 2\pi)$, la coordenada radial lo hace entre $(0, \infty)$ y z entre $(-\infty, \infty)$. Este elemento de línea describe una métrica estática y su parte espacial es conformalmente plana. Es por esto, que este tipo de métricas se conocen en la literatura como métricas conformestáticas [47].

Ahora, se asumirá que en el espacio-tiempo existe un disco delgado que se encuentra en el plano $z = 0$, de tal manera que las componentes del tensor métrico son funciones simétricas de z ; es decir,

$$g_{\mu\nu}(r, z) = g_{\mu\nu}(r, -z), \quad (2.2)$$

de modo que para $z \neq 0$,

$$g_{\mu\nu,z}(r, z) = -g_{\mu\nu,z}(r, -z). \quad (2.3)$$

Por tanto, el campo gravitacional, es decir, el tensor métrico es continuo en $z = 0$, lo cual se puede escribir como¹,

$$[g_{\mu\nu}] = g_{\mu\nu}^+|_{z=0^+} - g_{\mu\nu}^-|_{z=0^-} = 0, \quad (2.4)$$

mientras que las discontinuidades en las primeras derivadas del tensor métrico se caracterizarán por un nuevo tensor denominado $b_{\mu\nu}$, definido a través de la relación,

$$b_{\mu\nu} = [g_{\mu\nu,z}] = 2g_{\mu\nu,z}|_{z=0^+}, \quad (2.5)$$

¹Ver: Notación, Ec. 4, pág. 14

donde se ha utilizado la antisimetría de reflexión con respecto al plano $z = 0$.

Ahora bien, con base en su continuidad, el tensor métrico puede ser definido a través de una aproximación distribucional [48] de la forma,

$$g_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^D = g_{\mu\nu}^+ \Theta(z) + g_{\mu\nu}^- \{1 - \Theta(z)\}, \quad (2.6)$$

siendo $\Theta(z)$ la función de Heaviside definida según,

$$\Theta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ \frac{1}{2}, & z = 0 \\ 0, & z < 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Por tanto, el tensor de Ricci¹ se podrá escribir como la suma de una parte distribucional y otra en términos de las primeras derivadas del tensor métrico; es decir,

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^+ \Theta(z) + R_{\mu\nu}^- \{1 - \Theta(z)\} + H_{\mu\nu} \delta(z), \quad (2.8)$$

siendo $\delta(z)$ la distribución de Dirac con soporte en la hipersuperficie $z = 0$. En otras palabras, a pesar que los términos $R_{\mu\nu}^\pm$ representan el tensor de Ricci en las regiones $z < 0$ y $z > 0$, es decir, las zonas donde se encuentra el halo, también es necesario caracterizarlo en la región donde se encuentra el disco, lo cual se hace en términos de las discontinuidades en las primeras derivadas del tensor métrico (ver Ec. 2.5); esto es,

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (b^z{}_\mu \delta_\nu^z + b^z{}_\nu \delta_\mu^z - b^\alpha{}_\alpha \delta_\mu^z \delta_\nu^z - g^{zz} b_{\mu\nu}), \quad (2.9)$$

donde todas las cantidades son evaluadas en $z = 0^+$. De igual modo, haciendo uso de la continuidad del potencial electromagnético A_μ , se pueden escribir

$$A_\mu = (A_\mu)^D, \quad (2.10)$$

$$A_{\mu,\nu} = (A_{\mu,\nu})^D, \quad (2.11)$$

$$F^{\mu\nu} = (F^{\mu\nu})^D, \quad (2.12)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = (F^{\mu\nu}{}_{,\nu})^D + [F^{\mu\nu}] n_\nu \delta(z), \quad (2.13)$$

donde n_ν es un vector unitario en dirección normal al disco y $F^{\mu\nu}$ es el tensor de Faraday o tensor de campo electromagnético que se define en su forma covariante como,

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}, \quad (2.14)$$

¹Ver: Notación, Ec. 3, pág. 14

que a su vez está dado en términos del potencial electromagnético A_μ . Ahora, con el fin de considerar únicamente campos magnéticos en el modelo, se impondrá una particularidad en este potencial, de modo que sólo tenga la componente del campo magnético. Es decir, este cuadvectores se puede expresar como $A_\mu = (0, A, 0, 0)$, en donde A es el potencial vector y es función de las coordenadas r y z . Cabe mencionar que las últimas dos componentes del cuadripotencial son nulas debido a la simetría axial del sistema.

Ya establecidas las condiciones para la existencia de un disco delgado en el plano $z = 0$, es necesario resolver el sistema de ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell, que en unidades geometrizadas, es decir, con $c = G = \mu_0 = \epsilon_0 = 1$, se puede expresar como

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.15a)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi J^\mu, \quad (2.15b)$$

donde J^μ es el cuadvectores densidad de corriente, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momentum y $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.16)$$

con R como el escalar de Ricci.

Ahora bien, con base en las ecuaciones (2.8) y (2.13) se deduce, que tanto el tensor de energía-momentum como la densidad de corriente total del sistema, se pueden expresar como,

$$T_{\mu\nu} = (T_{\mu\nu})^D + Q_{\mu\nu}\delta(z), \quad (2.17)$$

$$J^\mu = (J^\mu)^D + I^\mu\delta(z), \quad (2.18)$$

donde $Q_{\mu\nu}$ y I^μ son el tensor energía-momentum y la densidad de corriente asociados con la superficie en $z = 0$, y los $(T_{\mu\nu})^D$ y $(J^\mu)^D$ son los asociados al halo. Se puede probar fácilmente, mediante las anteriores dos expresiones, que las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell (2.15), son equivalentes al siguiente sistema de ecuaciones,

$$8\pi T_{\mu\nu}^\pm = R_{\mu\nu}^\pm - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^\pm, \quad (2.19a)$$

$$F_{\pm}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi J_{\pm}^\mu, \quad (2.19b)$$

$$8\pi Q_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}H, \quad (2.19c)$$

$$[F^{\mu\nu}]n_\nu = 4\pi I^\mu. \quad (2.19d)$$

Es preciso notar que la ecuaciones (2.19a) y (2.19b) están asociadas a la descripción del halo, mientras que las expresiones en (2.19c) y (2.19d) corresponden al disco.

2.3. Solución a las Ecuaciones de Campo de Einstein-Maxwell

2.3.1. Halo

Como se ha dicho en anteriores líneas, los procedimientos para encontrar el tensor de energía-momentum y la densidad de corriente para el halo se basan prácticamente en solucionar las ecuaciones (2.19a) y (2.19b). Precisamente, la expresión (2.19a) es la que determina las componentes no nulas del tensor de Einstein. Allí se encuentra que la única solución de vacío para dicho tensor es cuando la función métrica es constante, es decir, $\psi = cte$, lo cual se puede demostrar que es equivalente a estar en el espacio-tiempo de Minkowski¹, donde no hay fuentes de campo gravitacional. De este modo, el modelo introduce de forma natural la existencia de un halo.

Tensor de Energía-Momentum

Como se ha insinuado antes, se considerará que el tensor energía-momentum se puede expresar como

$$T_{\mu\nu}^{\pm} = T_{\mu\nu}^m + T_{\mu\nu}^{em}, \quad (2.20)$$

en donde el primer miembro del término de la derecha hace referencia al contenido material (m) y el segundo miembro al contenido electromagnético (em) del halo. Éste último siendo el tensor de energía-momentum del campo electromagnético definido como

$$T_{\mu\nu}^{em} = \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\lambda} F^{\alpha\lambda} \right], \quad (2.21)$$

donde la componente T_{00} corresponde a la densidad de energía del campo electromagnético, las componentes $T_{0i} = T_{i0}$ corresponden a la densidad de momentum y las componentes espaciales T_{ij} dan cuenta del flujo de la componente i de momentum a través de una superficie perpendicular al eje x^j , asociadas a un sistema de referencia local.

Ahora, con el fin de describir el contenido material del halo se calculará el tensor $T_{\mu\nu}^m$ de la ecuación (2.20), ya que los términos $T_{\mu\nu}^{\pm}$ y $T_{\mu\nu}^{em}$ están dados por las expresiones (2.19a) y (2.21) respectivamente; es decir,

¹Ver Apéndice A

$$8\pi T_{00}^m = e^{4\psi} (2\nabla^2\psi - \nabla\psi \cdot \nabla\psi) - \frac{e^{6\psi}}{r^2} (\nabla A \cdot \nabla A), \quad (2.22a)$$

$$8\pi T_{11}^m = r^2 (\nabla\psi \cdot \nabla\psi) - e^{2\psi} (\nabla A \cdot \nabla A), \quad (2.22b)$$

$$8\pi T_{22}^m = \psi_{,z}^2 - \psi_{,r}^2 - \frac{e^{2\psi}}{r^2} (A_{,r}^2 - A_{,z}^2), \quad (2.22c)$$

$$8\pi T_{33}^m = \psi_{,r}^2 - \psi_{,z}^2 - \frac{e^{2\psi}}{r^2} (A_{,z}^2 - A_{,r}^2), \quad (2.22d)$$

$$8\pi T_{32}^m = T_{23}^m = -2 \left(\psi_{,z}\psi_{,r} + \frac{e^{2\psi}}{r^2} A_{,z}A_{,r} \right). \quad (2.22e)$$

Debido a que todas las componentes del anterior tensor están dadas en términos de las primeras derivadas del potencial electromagnético A y de la función métrica ψ , se puede simplificar su solución si se propone una relación entre estas dos funciones. Dicha relación se realiza a través de un *ansatz*¹, el cual se puede expresar como,

$$A_{,r} = \pm kre^{-\psi}\psi_{,z}, \quad (2.23a)$$

$$A_{,z} = \mp kre^{-\psi}\psi_{,r}, \quad (2.23b)$$

donde k es una constante. La condición de integrabilidad de las expresiones (2.23) está garantizada por,

$$\nabla^2\psi = \nabla\psi \cdot \nabla\psi \quad (2.24)$$

Como es evidente, la ecuación diferencial (2.24) permite encontrar una solución para la función métrica ψ , la cual será estudiada en profundidad en la sección 3.3.

Tiene sentido que si usamos el *ansatz* dado en (2.23) sobre las expresiones en (2.22), se encontrará una forma más reducida y simple de expresar el contenido material del tensor de

¹Solución estimada a una o varias ecuaciones iniciales que describen un problema físico o matemático, la cual es legitimada por los resultados obtenidos. Algunas veces dicha solución contiene parámetros que pueden ser actualizados luego de la evaluación de la calidad del resultado, este proceso de prueba y ajuste se puede realizar iterativamente hasta alcanzar un nivel de precisión deseado.

energía-momentum del halo, lo cual resulta en,

$$8\pi T_{00}^{\pm} = e^{4\psi} [2\nabla^2\psi - (k^2 - 1) \nabla\psi \cdot \nabla\psi], \quad (2.25a)$$

$$8\pi T_{11}^{\pm} = r^2 (1 - k^2) \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (2.25b)$$

$$8\pi T_{22}^{\pm} = (1 - k^2) (\psi_{,z}^2 - \psi_{,r}^2), \quad (2.25c)$$

$$8\pi T_{33}^{\pm} = (1 - k^2) (\psi_{,r}^2 - \psi_{,z}^2), \quad (2.25d)$$

$$8\pi T_{32}^{\pm} = 8\pi T_{23}^{\pm} = -2(1 - k^2) (\psi_{,z}\psi_{,r}), \quad (2.25e)$$

en donde todas las demás componentes del tensor son nulas.

Densidad de Corriente

La relación entre el cuadvivector corriente y el tensor de campo electromagnético está dada por la expresión (2.19b), la cual proviene de la formulación de las ecuaciones de Maxwell en forma tensorial. Se puede mostrar que dicha ecuación puede ser expresada como¹

$$\widehat{F}_{\pm,\nu}^{\mu\nu} = 4\pi \widehat{J}_{\pm}^{\mu}, \quad (2.26)$$

con lo cual se obtiene la única componente no nula

$$\widehat{J}_{\pm}^1 = -\frac{1}{4\pi r} e^{2\psi} \left[2(\psi_{,r}A_{,r} + \psi_{,z}A_{,z}) + A_{,rr} + A_{,zz} - \frac{A_{,r}}{r} \right]. \quad (2.27)$$

Así mismo, se usarán las expresiones en (2.23) para obtener una forma más reducida de la densidad de corriente. Con esto, se encuentra que

$$\widehat{J}_{\pm}^1 = 0, \quad (2.28)$$

es decir, el modelo muestra que la densidad de carga es cero y las corrientes son nulas en la región del halo. Este resultado se puede considerar razonable y físicamente aceptable. Esto merece un análisis. En Astrofísica el término **HI** es la notación que recibe el hidrógeno neutro, el cual es un gas compuesto básicamente de átomos de hidrógeno creados en el Big Bang. En general, es la componente más abundante en las galaxias y es el responsable de la formación de estrellas, magnétares, púlsares y otros objetos astrofísicos. El **HI** se condensa en las regiones más frías y densas del medio interestelar llamadas nubes moleculares, que

¹Ver: Notación, Ec. 5, pág. 14

son las zonas más frías de la galaxia y se consideran las regiones ideales para el nacimiento de una estrella. Estas nubes moleculares acumulan típicamente el 80 % de la masa del medio interestelar y constituye la más fría, densa y neutra de sus fases. Debido a lo extensas que son las regiones donde se encuentran las nubes moleculares, se puede considerar que una galaxia es eléctricamente neutra [49].

2.3.2. Disco Delgado

Se considera que la fuente discoidal de energía es infinitamente delgada, axialmente simétrica y de extensión infinita. Para estudiar el comportamiento del tensor energía-momentum y la densidad de corriente asociados al disco se deben resolver las ecuaciones (2.19c) y (2.19d) respectivamente.

Tensor superficial de energía-momentum

Antes de encontrar el tensor de energía-momentum del disco, se debe encontrar el tensor $Q_{\mu\nu}$. Para esto, se debe recordar que el tensor de Ricci asociado a la superficie en el plano $z = 0$, está dado por la expresión (2.9). Con esto se obtiene que,

$$8\pi Q^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}[(b^\mu{}_\alpha n_\nu - b^\mu{}_\nu n_\alpha) n^\alpha + (b^\alpha{}_\nu n_\alpha - b^\alpha{}_\alpha n_\nu) n^\mu - \delta^\mu{}_\nu (b^\gamma{}_\alpha n_\gamma - b^\gamma{}_\gamma n_\alpha) n^\alpha], \quad (2.29)$$

donde $b_{\mu\nu}$ está definido en (2.5) y es el tensor que caracteriza las discontinuidades en el tensor métrico. Sus componentes están dadas por,

$$b_{00} = -4e^{2\psi} \psi_{,z}, \quad (2.30a)$$

$$b_{11} = -4r^2 e^{-2\psi} \psi_{,z}, \quad (2.30b)$$

$$b_{22} = -4e^{-2\psi} \psi_{,z}, \quad (2.30c)$$

$$b_{33} = -4e^{-2\psi} \psi_{,z}, \quad (2.30d)$$

de tal manera que sustituyéndolas en la ecuación (2.29), se obtiene que la única componente no nula del tensor $Q_{\mu\nu}$ es

$$Q_{00} = \frac{e^{4\psi} \psi_{,z}}{2\pi}. \quad (2.31)$$

Sin embargo, este tensor todavía describe una distribución volumétrica de energía, y debido a que el disco es infinitamente delgado, es pertinente hacer uso del tensor superficial de energía-momentum $S_{\mu\nu}$. Este se puede obtener mediante la relación dada por

$$S_{\mu\nu} = \int E_{\mu\nu} ds_n = \sqrt{g_{zz}} Q_{\mu\nu} \quad (2.32)$$

donde $E_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu}\delta(z)$ y $ds_n = \sqrt{g_{zz}} dz$ es la medida física de longitud en dirección normal al disco. Es decir, el “verdadero” tensor de energía-momentum del disco es $S_{\mu\nu}$. Con esto, se obtiene que la única componente no nula es,

$$S_{00} = \frac{e^{3\psi}\psi_{,z}}{2\pi}, \quad (2.33)$$

es decir, la componente que describe la densidad superficial de materia. En principio, si este tensor de energía-momentum tiene presiones de igual magnitud y no hay transferencias de calor entre las partículas que lo constituyen o, por lo menos, son despreciables, se puede decir que describe un *fluido perfecto* [50], pero específicamente, se está hablando de un material de *polvo*, puesto que, dichas presiones, las cuales describen rozamientos, viscosidades o fricciones entre las partículas, son nulas. Por ejemplo, usando valores estimados de las dimensiones de nuestra galaxia –la Vía Láctea– y el número aproximado de estrellas que la componen, se puede calcular el camino libre medio de una estrella antes de colisionar con otra [51]. Teniendo esto, se encuentra que el intervalo de colisión es del orden de 10^{19} años, es decir, un factor 10^9 más grande que la edad de nuestra galaxia. Evidentemente, la colisión entre estrellas es un fenómeno poco frecuente y absolutamente irrelevante en la dinámica de la galaxia [9].

Densidad Superficial de Corriente

Ahora se encontrará la densidad superficial de corriente para el disco. Para esto, se resuelve la ecuación (2.19d) en donde el término n_ν hace referencia a un vector unitario normal al disco y es equivalente a δ_ν^z ; es decir, el salto en el tensor electromagnético¹ se puede escribir como,

$$n_\nu [F^{\mu\nu}] = [F^{\mu z}]. \quad (2.34)$$

Con esto, se puede encontrar que la densidad de corriente asociada al disco presenta una sola componente en la dirección azimutal; esto es,

$$I^1 = \frac{e^{4\psi}}{2\pi r^2} A_{,z}|_{z=0^+}. \quad (2.35)$$

¹Ver: Notación, Ec. 4, pág. 14

Como el objetivo es expresar los tensores de energía-momentum y las densidades de corriente del halo y del disco en términos de la función métrica, entonces usamos el ansatz de la expresión (2.23). Con esto, finalmente se encuentra que,

$$I^1 = -k \frac{e^{3\psi}}{2\pi r} \psi_{,r} |_{z=0^+}. \quad (2.36)$$

El anterior resultado muestra que la densidad de carga del cuadrivector corriente es nula; sin embargo, existe una componente de corriente en la dirección acimutal diferente de cero.

Análisis del Contenido Físico del Modelo

3.1. Preliminares

Es sabido que la relatividad especial es válida localmente, es decir, en el espacio-tiempo de Minkowski. Sin embargo, de acuerdo con el Principio de Equivalencia [52], en la relatividad general no es posible diferenciar, mediante la realización de experimentos locales, un sistema de referencia acelerado de un campo gravitacional. Dicho geoméricamente, en relatividad general la variedad del espacio-tiempo puede tener curvatura [53] y por tanto, para realizar un experimento en donde se consideren campos gravitacionales, se deben introducir referenciales de observadores locales que dependan de su posición en el espacio-tiempo. De esta manera, se tienen campos de tétradas ortonormales o tétradas locales en una variedad curva. La geometría de la variedad determinará el movimiento, introduciendo aceleraciones de naturaleza gravitacional o inercial [54].

De acuerdo con lo anterior, las expresiones para el tensor energía-momentum y el cuadvectores corriente en (2.25) y (2.28) para el halo, y en (2.33) y (2.36) para el disco, aún no muestran una solución totalmente interpretable. Para esto, se debe hacer una transformación adecuada que permita analizar detalladamente el comportamiento físico del modelo, lo cual se logra mediante una tétrada de vectores ortonormal que ubicará al observador en una posición local.

Una vez el tensor energía-momentum es visto desde dicha posición local o “clásica”, es razonable pensar que la noción de densidad de materia debe ser un valor estrictamente positivo. Adicionalmente, dicha materia debe fluir a lo largo de un vector tipo tiempo dentro del cono de luz, con lo cual se garantizaría que la energía no fluya a una velocidad superlumínica. Éstas y otras restricciones están resumidas en las *condiciones de energía* [55], estudiadas al final de la sección 3.2.1.

3.2. Contenido del modelo en un Sistema de Referencia Localmente Minkowskiano

Como se ha mencionado, el Sistema de Referencia Localmente Minkowskiano (**SRL**) está definido mediante una base ortonormal de vectores o tétrada local. Esto significa, que debe satisfacer las relaciones,

$$g_{\mu\nu}e^\mu_{(\alpha)}e^\nu_{(\beta)} = \eta_{(\alpha)(\beta)}, \quad (3.1)$$

donde $\eta_{(\alpha)(\beta)}$ es la métrica del espacio-tiempo Minkowskiano.

Para este caso, se considerará la tétrada del “Observador Localmente Estático” [56], u observador en reposo con respecto al infinito, dado por,

$$e^\mu_{(0)} = e^{-\psi}\delta_0^\mu, \quad (3.2a)$$

$$e^\mu_{(1)} = \frac{e^\psi}{r}\delta_1^\mu, \quad (3.2b)$$

$$e^\mu_{(2)} = e^\psi\delta_2^\mu, \quad (3.2c)$$

$$e^\mu_{(3)} = e^\psi\delta_3^\mu, \quad (3.2d)$$

donde $e^\mu_{(0)}$ es la cuadrivelocidad.

3.2.1. Halo

Tensor Energía-Momentum

El análisis del contenido físico del tensor energía-momentum del halo, se hace a partir de una transformación que permita determinar sus componentes con respecto a un observador local usando la tétrada en (3.2). Es decir,

$${}^m T_{(\xi)(\lambda)} = T_{\mu\nu}^m e^\mu_{(\xi)}e^\nu_{(\lambda)}, \quad (3.3)$$

lo cual se aplica en las expresiones (2.25) y se obtiene

$$8\pi T_{(0)(0)}^{\pm m} = e^{2\psi} [2\bar{\nabla}^2\psi - (k^2 + 1) \nabla\psi \cdot \nabla\psi], \quad (3.4a)$$

$$8\pi T_{(1)(1)}^{\pm m} = e^{2\psi} (1 - k^2) \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (3.4b)$$

$$8\pi T_{(2)(2)}^{\pm m} = e^{2\psi} (1 - k^2) (\psi_{,z}^2 - \psi_{,r}^2), \quad (3.4c)$$

$$8\pi T_{(3)(3)}^{\pm m} = e^{2\psi} (1 - k^2) (\psi_{,r}^2 - \psi_{,z}^2), \quad (3.4d)$$

$$8\pi T_{(3)(2)}^{\pm m} = 8\pi T_{(2)(3)}^{\pm m} = -2e^{2\psi} (1 - k^2) (\psi_{,z}\psi_{,r}). \quad (3.4e)$$

Ahora, con el fin de encontrar las expresiones para los esfuerzos principales, el tensor de energía-momentum se debe diagonalizar. Es decir, ya establecida una ubicación en un **SRL**, la diagonalización del tensor energía-momentum permite realizar una rotación apropiada dentro del **SRL**, de tal manera que las variables físicas se puedan apreciar directamente. Para esto, se resuelve el problema de los valores propios para el tensor en (3.4) y se encuentran sus correspondientes vectores propios dados por

$$V^{(\mu)}_{\hat{0}} = e^{-\psi} (1, 0, 0, 0), \quad (3.5a)$$

$$V^{(\mu)}_{\hat{1}} = \frac{e^{\psi}}{r} (0, 1, 0, 0), \quad (3.5b)$$

$$V^{(\mu)}_{\hat{2}} = \frac{e^{\psi}}{\sqrt{\Omega^2 + 1}} (0, 0, -\Omega, 1), \quad (3.5c)$$

$$V^{(\mu)}_{\hat{3}} = \frac{e^{\psi}}{\sqrt{\Omega^2 + 1}} (0, 0, 1, \Omega), \quad (3.5d)$$

donde

$$\Omega = \frac{\psi_{,r}}{\psi_{,z}}. \quad (3.6)$$

Por último, se expresará el tensor de energía-momentum diagonalizado, usando los vectores propios en (3.5) siguiendo la transformación dada por

$$T_{\hat{\alpha}\hat{\kappa}}^m = T_{(\xi)(\lambda)}^m V_{\hat{\alpha}}^{(\xi)} V_{\hat{\kappa}}^{(\lambda)}. \quad (3.7)$$

Antes de dar una expresión definitiva, se tendrá en cuenta la ecuación dada en (2.24), la cual garantiza la condición de integrabilidad del ansatz en (2.23). Con esto, la expresión

final para el contenido material del tensor de energía-momentum del halo es

$$\rho = T_{\hat{0}\hat{0}}^m = (8\pi)^{-1} e^{2\psi} (1 - k^2) \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (3.8a)$$

$$P_1 = T_{\hat{1}\hat{1}}^m = (8\pi)^{-1} e^{2\psi} (1 - k^2) \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (3.8b)$$

$$P_2 = T_{\hat{2}\hat{2}}^m = (8\pi)^{-1} e^{2\psi} (1 - k^2) \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (3.8c)$$

$$P_3 = T_{\hat{3}\hat{3}}^m = -(8\pi)^{-1} e^{2\psi} (1 - k^2) \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (3.8d)$$

donde ρ es la densidad de materia volumétrica del halo y P_1, P_2 y P_3 son las presiones o esfuerzos principales.

Ecuación de estado y condiciones de energía

En general, los objetos y fenómenos astrofísicos como estrellas, púlsares, galaxias, halos e incluso el universo, entre otros, se suelen modelar como un fluido. La ecuación de estado $P = P(\rho)$, donde P es la presión promedio, es aquella expresión que determina el tipo de fluido. A partir de las expresiones dadas en (3.8), se encuentra que la ecuación de estado para el halo se puede escribir como

$$P = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} = \frac{\rho}{3}, \quad (3.9)$$

la cual describe radiación. A pesar de estar tratando con energía en forma de materia, es análogo a la teoría electromagnética de Maxwell, la cual dice que la radiación ejerce una presión sobre un hipotético recipiente cuyas paredes están constituidas por osciladores eléctricos que irradian energía y que a la vez también la absorben, de modo que el resultado final es equilibrio.

Por otra parte, en el contexto de la relatividad general, es razonable esperar que el tensor de energía-momentum satisfaga ciertas condiciones, tales como la positividad de la densidad de energía, el dominio de ésta densidad sobre la presión y las restricciones de velocidad sobre el flujo de dicha energía. Estos requerimientos equivalen a exigir que se cumplan las siguientes desigualdades [55, 57]:

$$\rho \geq 0, \quad (3.10a)$$

$$|\rho| \geq |P_i|, \quad (3.10b)$$

$$\rho + P_i \geq 0, \quad (3.10c)$$

$$\rho + P_1 + P_2 + P_3 \geq 0, \quad (3.10d)$$

donde $i = 1, 2, 3$. De la condición (3.10a), obtenemos una restricción sobre la constante k , tal que,

$$-1 < k < 1, \quad (3.11)$$

y las restantes condiciones se satisfacen a sí mismas de manera trivial.

3.2.2. Disco Delgado

Tensor energía-momentum

Partiendo de la ecuación general para la densidad superficial de energía asociada al disco (ver Ec. 2.33), se seguirá un procedimiento similar al del halo, es decir, se usará la tétrada ortonormal para expresar la densidad superficial en un **SRL**. De tal manera que se seguirá la transformación dada por,

$$S_{(\xi)(\lambda)} = S_{\mu\nu} e^{\mu}_{(\xi)} e^{\nu}_{(\lambda)}, \quad (3.12)$$

es decir, la única componente no nula del tensor energía-momentum asociada al disco, observada desde un **SRL**, se expresa como,

$$\sigma = S_{(0)(0)} = \frac{e^{\psi} \psi_{,z}}{2\pi}. \quad (3.13)$$

Densidad superficial de corriente

Ahora, se llevará a cabo el análisis de la densidad superficial de corriente en un **SRL**. No obstante, esta cantidad física (ver Ec. 2.36) está expresada a través de un tensor contravariante, por lo cual, es necesario hacer una transformación tal que,

$$e^{\mu}_{(\xi)} \rightarrow e^{(\lambda)}_{\nu}, \quad (3.14)$$

en donde

$$e^{(\lambda)}_{\nu} = \eta^{(\lambda)(\xi)} g_{\mu\nu} e^{\mu}_{(\xi)}. \quad (3.15)$$

Por tanto, la densidad superficial se halla a través de

$$I^{(\mu)} = I^{\nu} e^{(\mu)}_{\nu}, \quad (3.16)$$

es decir, teniendo en cuenta que ya se había encontrado que este cuadvivector sólo tiene una componente, se encuentra que

$$I^{(1)} = -k \frac{e^{2\psi}}{2\pi} \psi_{,r}. \quad (3.17)$$

3.2.3. Campo magnético

Para estudiar de manera más amplia el comportamiento del potencial magnético, es necesario hallar el tensor de Faraday o tensor electromagnético, definido inicialmente en la ecuación (2.14), para obtener las componentes del campo magnético; es decir,

$$F_{(\alpha)(\beta)} = F_{\mu\nu} e^{\mu}_{(\alpha)} e^{\nu}_{(\beta)}, \quad (3.18)$$

donde sus componentes no nulas están dadas por

$$F_{(1)(2)} = -kre^{\psi}\psi_{,z}, \quad (3.19a)$$

$$F_{(1)(3)} = kre^{\psi}\psi_{,r}, \quad (3.19b)$$

$$F_{(2)(1)} = kre^{\psi}\psi_{,z}, \quad (3.19c)$$

$$F_{(3)(1)} = -kre^{\psi}\psi_{,r}. \quad (3.19d)$$

Por tanto, teniendo en cuenta que

$$B_{(\alpha)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{(\alpha)(\mu)(\nu)} F^{(\mu)(\nu)}, \quad (3.20)$$

donde ε es el símbolo de Levi-Chivita, se pueden encontrar las componentes del vector campo magnético; es decir

$$\mathbf{B} = B_{(r)}\hat{e}_r + B_{(z)}\hat{e}_z + B_{(\varphi)}\hat{e}_{\varphi}, \quad (3.21)$$

donde

$$B_{(r)} = -\frac{e^{2\psi}A_{,z}}{r}, \quad (3.22a)$$

$$B_{(z)} = \frac{e^{2\psi}A_{,r}}{r}, \quad (3.22b)$$

$$B_{(\varphi)} = 0. \quad (3.22c)$$

Ahora, a partir de la cuadrivelocidad dada en (3.2a), las componentes de la aceleración con respecto a la tétrada ortonormal son

$$a_{(r)} = e^{\psi}\psi_{,r}, \quad (3.23a)$$

$$a_{(z)} = e^{\psi}\psi_{,z}, \quad (3.23b)$$

tal que, usando el ansatz en (2.23), se obtiene

$$kB_{(r)} = a_{(r)}, \quad (3.24a)$$

$$kB_{(z)} = a_{(z)} \quad (3.24b)$$

lo que conduce a concluir que el campo gravitatorio y el campo magnético están alineados. Para encontrar las líneas de campo magnético, se debe resolver la ecuación diferencial,

$$\frac{dz}{B_{(z)}} = \frac{dr}{B_{(r)}}. \quad (3.25)$$

Si se sustituyen las expresiones (3.21) en lo anterior, la ecuación (3.25) puede reescribirse como,

$$dA = A_{,r} dr + A_{,z} dz = 0, \quad (3.26)$$

es decir, las líneas de campo magnético describen superficies equipotenciales.

3.3. Solución para la función métrica ψ

Ahora que se tienen expresiones concretas para la densidad volumétrica de energía del halo en (3.8a) y para las densidades superficiales de energía y corriente del disco en (3.13) y (3.17) respectivamente, se debe tener en cuenta que todas ellas están dadas únicamente en términos de la función métrica $\psi(r, z)$, y por tanto, resulta conveniente encontrar una solución para dicha función.

Ahora bien, en la sección 2.3 se introdujo un ansatz o solución aproximada (ver Ec. 2.23), el cual relaciona el potencial vector A y la función métrica ψ , y busca reducir el número de variables, para así facilitar el cálculo de los tensores de energía-momentum y los cuadvectores corriente. Incluso, debido a su uso, se encontró que el modelo del halo describía una densidad de corriente nula (ver Ec. 2.28). Este ansatz está compuesto por dos ecuaciones diferenciales, las cuales deben cumplir una condición de integrabilidad. Se señaló que dicha condición está garantizada por la expresión en (2.24).

Como se mencionó en la sección (2.3), dicha expresión permite encontrar una solución sobre la función métrica ψ , mediante el uso de un factor integrante¹. Con esto, la ecuación (2.24) se puede expresar como

$$\nabla^2(e^{-\psi}) = 0, \quad (3.27)$$

la cual se puede apreciar que es equivalente a la ecuación de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$.

Naturalmente, la ecuación de Laplace permanecerá inalterada si a su solución se le adiciona una constante arbitraria, es decir,

$$e^{-\psi} = 1 - \Phi, \quad (3.28)$$

¹Ver Apéndice A.

a partir de lo cual se deduce además que

$$\nabla\psi = \frac{1}{1-\Phi} \nabla\Phi, \quad (3.29a)$$

$$\psi_{,r} = \frac{1}{1-\Phi} \Phi_{,r}, \quad (3.29b)$$

$$\psi_{,z} = \frac{1}{1-\Phi} \Phi_{,z}. \quad (3.29c)$$

Como resultado final, se sustituirá lo anterior en las expresiones para las densidades de energía y de corriente del halo y del disco, es decir, para las ecuaciones (3.8a), (3.13) y (3.17). Se recuerda además, el resultado obtenido para la densidad de corriente del halo en la ecuación (2.28). Con esto obtenemos finalmente,

$$\rho = \frac{1-k^2}{(\Phi-1)^4} \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi, \quad (3.30)$$

$$\hat{J}^1 = 0, \quad (3.31)$$

$$\sigma = \frac{1}{2\pi(\Phi-1)^2} \Phi_{,z}, \quad (3.32)$$

$$I^{(1)} = -\frac{k}{2\pi(1-\Phi)^3} \Phi_{,r}, \quad (3.33)$$

donde las ecuaciones (3.30) y (3.31) corresponden a la descripción del halo, mientras que (3.32) y (3.33) a la del disco.

Aplicación al Modelo de Discos de Kuzmin-Toomre

4.1. Preliminares

Una manera simple de construir expresiones que relacionen la densidad de energía y el potencial gravitatorio, y que a su vez representen configuraciones discoidales, es empleando el método de las imágenes, el cual es habitualmente usado para resolver problemas en electrostática. El primero que usó este método en el contexto de la gravedad Newtoniana fue Kuzmin [45], pero quien llevó a cabo una generalización fue Toomre [46], por lo cual, el método finalmente se dió a conocer como el modelo clásico de Kuzmin-Toomre.

Con base en dicho método se generará la discontinuidad directamente en la primera derivada de la función auxiliar Φ , que a su vez es solución para la función métrica ψ . Es decir, generar la discontinuidad en la primera derivada de nuestra solución para el potencial gravitatorio, implica también hacerlo para la primera derivada del tensor métrico. A partir de dicha solución para el potencial gravitatorio, la cual también es solución de la ecuación de Laplace, se expresarán e ilustrarán todos los resultados; es decir, el perfil volumérico y superficial de energía y toda la información posible con respecto al campo magnético. Es de esperarse que a partir de un perfil que describa la densidad de energía del modelo, se pueda hallar una expresión general para la masa total del sistema. No obstante, esto sólo es posible bajo ciertas condiciones, ya que el concepto de masa total en relatividad general no es trivial.

4.2. Solución de la Ecuación de Laplace

A partir de los resultados obtenidos en el capítulo anterior, es decir, las expresiones (3.30) a (3.33), se puede apreciar que todas las variables físicas están dadas en términos de la función Φ , la cual se tiene certeza que es una solución de la ecuación de Laplace, según (3.28). Con base en la geometría de la fuente, sería razonable expresar la función Φ como una solución de la ecuación de Laplace para un problema con simetría axial. Dicha solución está dada por

$$\Phi_n(R, \theta) = - \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta), \quad (4.1)$$

donde C_l son constantes y $P_l(\cos\theta)$ son los polinomios de Legendre [58]. Además,

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad (4.2)$$

donde r es la coordenada radial y z es la coordenada perpendicular al plano donde se encuentra ubicado el disco.

Hacia el final del capítulo anterior —cuando se encontró que una solución a la ecuación de Laplace podía serlo también para la función métrica—, se adicionó una constante a dicha solución (Ver Ec. 3.28). El objetivo de ello es garantizar un espacio-tiempo asintóticamente plano, es decir, que su curvatura tienda a anularse a grandes distancias respecto a la región central, con lo que allí se vuelve indistinguible del espacio-tiempo de Minkowski. En otras palabras, si en la ecuación (4.1), R tiende al infinito, la solución a la ecuación de Laplace Φ tiende a cero. Ahora, regresando a la ecuación (3.28), si Φ es cero, se garantiza que la función métrica ψ , es decir, el potencial gravitatorio, también es cero.

Como se puede apreciar, la función (4.1) contiene términos de una expansión multipolar; así, es natural que los términos aumenten cada vez que el índice n de la sumatoria crece. Sin embargo, es preciso aclarar que cada resultado que se obtiene para Φ_n con un determinado valor para n , es una solución exacta completamente diferente de otra. En otras palabras, en nuestro modelo sería erróneo creer que, en cuanto se van encontrando resultados con cada vez más términos multipolares, una solución determinada se va “refinando” cada vez más, lo cual sucede comunmente en otros problemas.

Una de las características claves del modelo, la cual se estudió en el capítulo 2¹, es la discontinuidad en la primera derivada con respecto a z que presenta el potencial gravitacional.

¹Ver página 23

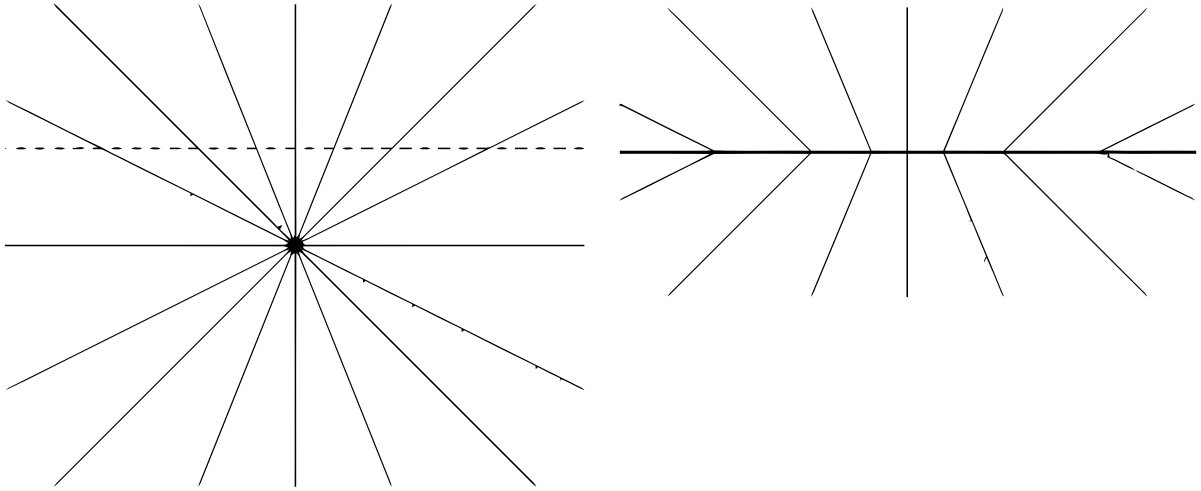


Figura 4.1: Método de “desplazamiento, corte y reflexión”.

Sin embargo, la solución a la ecuación de Laplace dada en (4.1) y todas sus derivadas, son continuas. Por tanto, con el fin de generar dicha discontinuidad en la primera derivada, se hará una reflexión de la solución dada con respecto al plano. Para esto, se implementa un método conocido como “desplazamiento, corte y reflexión”, el cual fue implementado por primera vez por Kuzmin y Toomre en gravedad Newtoniana. Este procedimiento es matemáticamente equivalente a hacer la transformación dada por

$$z \longrightarrow |z| + d, \quad (4.3)$$

donde d es una constante definidamente positiva.

4.3. Masa Total del Modelo

La definición de masa en relatividad general es más compleja de lo que se espera. De hecho, la relatividad general no ofrece un concepto global, pero si algunas definiciones, las cuales son aplicables bajo diferentes circunstancias. La razón principal de esto es que “la energía del campo gravitacional” no hace parte del tensor energía-momentum; en su lugar, lo que puede ser identificado como la contribución del campo gravitacional a una energía total, hace parte del tensor de Einstein. En otras palabras, “la energía del campo gravitacional” no puede ser localizada.

El problema radica en la concepción de un sistema aislado en relatividad general. El campo gravitacional contiene una energía, la cual interactúa con su alrededor, contribuyendo a la curvatura del espacio-tiempo. Pero esta curvatura es un campo gravitatorio que también contiene energía. Es decir, en la relatividad general, el campo gravitacional sufre una retroalimentación permanente con su alrededor, lo que impide que un sistema sea aislado.

¿Como definir entonces el concepto de masa total para una distribución discoidal en relatividad general? La respuesta está en considerar un espacio-tiempo asintóticamente plano; es decir, un espacio-tiempo en el que la materia de nuestra estructura discoidal esté distribuida en una región compacta, lo cual hace que a grandes distancias del disco que curva dicho espacio-tiempo, la forma geométrica parezca la de un espacio-tiempo plano o de Minkowski, donde el campo gravitatorio se anula, lo cual se logra apartir de la ecuación (3.28). Por esta razón, en la relatividad general los espacio-tiempos asintóticamente planos representan idealmente sistemas aislados [59].

Una definición que provee satisfactoriamente la noción de masa total para espacio-tiempos estacionarios y asintóticamente planos, es ofrecida por Komar [55]. Esta definición se expresa como,

$$M = 2 \int_{\Sigma} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) n^{\mu} \xi^{\nu}_{(t)} \sqrt{h} d^3y, \quad (4.4)$$

donde n^{μ} es el vector unitario perpendicular a la hipersuperficie, $\xi^{\nu}_{(t)}$ es el vector de Killing tipo tiempo, h es el determinante de la parte espacial del tensor métrico y d^3y es el elemento de volumen. Como se espera, la masa de un sistema debe tener un valor finito, es decir, la integral que la define, debe converger. Adicionalmente, debido a la complejidad de solucionar analíticamente las expresiones para la masa en los modelos $n > 0$, se hace uso del Teorema del criterio de comparación del límite [60], el cual permite verificar que si la integral que describe la masa para el modelo $n = 0$ converge, entonces la integral para cualquier otro modelo también converge¹.

¹Ver Apéndice C

4.4. Aplicación para $n=0$

Con base en la solución expresada en la ecuación (4.1), la primera familia de soluciones se da para el primer término de la expansión, es decir $n = 0$. Con esto, se tiene que,

$$\Phi_0 = -\frac{C_0}{R}, \quad (4.5a)$$

$$\Phi_{0,r} = r \frac{C_0}{R^3}, \quad (4.5b)$$

$$\Phi_{0,z} = z \frac{C_0}{R^3}. \quad (4.5c)$$

De lo anterior, se encuentra además que

$$\nabla\Phi_0 \cdot \nabla\Phi_0 = \frac{C_0^2}{R^4}, \quad (4.6)$$

donde el producto interior $\nabla R \cdot \nabla R = 1$.

4.4.1. Halo

Densidad Volumétrica de Energía del Halo

Partiendo de lo anterior y sustituyendo las ecuaciones (4.5a) y (4.6) en la expresión para la densidad volumétrica de materia del halo, dada al final del capítulo 3 en (3.30), se obtiene,

$$\rho = \frac{(1 - k^2)C_0^2}{(C_0 + R)^4}, \quad (4.7)$$

donde se hace la transformación dada en la expresión (4.3), es decir, $R = \sqrt{r^2 + (|z| + d)^2}$, la cual da el carácter de esferoidal al halo. Ahora, con el fin de normalizar la ecuación (4.7), ésta se expresará en unidades adimensionales, es decir,

$$\rho = \frac{\rho_0}{(1 + \tilde{R})^4}, \quad (4.8)$$

donde $\tilde{R} = R/C_0$ y $\rho_0 = (1 - k^2)/C_0^2$ es la densidad volumétrica de materia cuando $\tilde{R} = 0$. Por tanto, la expresión final para la densidad volumétrica de energía del halo, se escribe como

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{(1 + \tilde{R})^4}, \quad (4.9)$$

donde $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$.

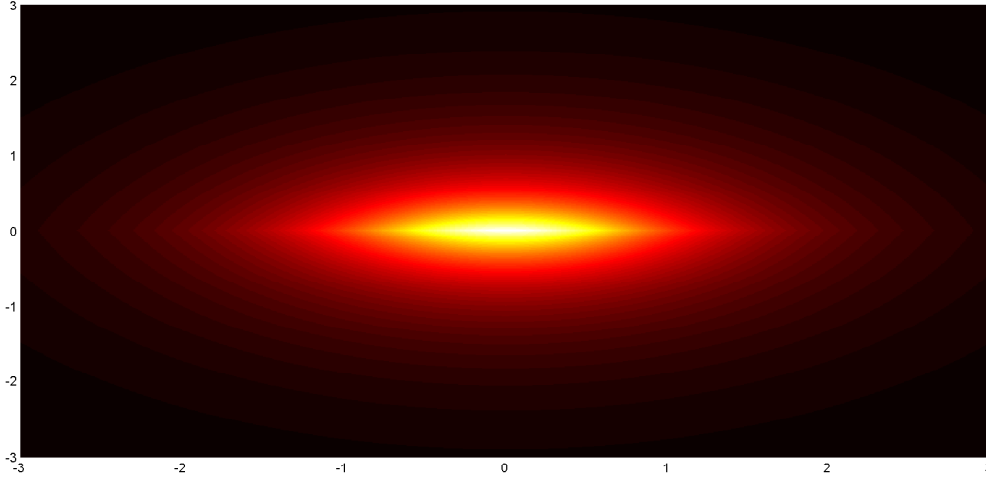


Figura 4.2: Gráfica de la densidad volumétrica de energía en función de las coordenadas \tilde{r} y \tilde{z} para el modelo $n = 0$ de la ecuación (4.9).

El comportamiento de la ecuación (4.9) se ilustra en la Figura 4.2, donde se muestra el perfil del disco en $z = 0$, rodeado del halo. El color amarillo en el centro, indica las zonas donde la densidad volumétrica de energía tiene su valor máximo y por tanto, el campo gravitacional es más intenso. Las zonas rojas y naranjas corresponden a las zonas en que el campo gravitacional decae conforme las coordenadas \tilde{r} y \tilde{z} crecen en magnitud. Finalmente, los tonos oscuros representan las zonas donde el campo gravitacional es más débil.

Masa del Halo

A partir de la integral dada en (4.4) para el cálculo de la masa, se tiene que para el caso de la densidad volumétrica de materia, el vector normal está dado por $n^\mu = e^\mu_{(0)}$, el vector de Killing por $\xi^\nu_{(t)} = e^\nu e^\nu_{(0)}$, el Jacobiano por $h = r^2 e^{6\psi}$, el diferencial de volumen por $d^3y = dr d\varphi dz$ y $T_{\mu\nu} = T_{00}^{\pm m}$ de la ecuación (2.25a). Por tanto, dicha integral se reduce a

$$M_H = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (\Phi_{,z}^2 + \Phi_{,r}^2) r dr dz d\varphi, \quad (4.10)$$

donde se ha hecho uso de las ecuaciones (3.28) y (3.29) para expresar la masa en términos de la solución de la ecuación de Laplace. Teniendo en cuenta el primer término de la expansión

para dicha solución, y sus primeras derivadas dadas en (4.5), se obtiene

$$M_{H_0} = \frac{4\pi(1 - k^2)C_0^2}{d}. \quad (4.11)$$

4.4.2. Disco Delgado

Densidad Superficial de Energía del Disco

A partir de la solución general para el potencial gravitatorio expresada en (4.1) y considerando el primer término de la expansión y su derivada con respecto a z en (4.5a) y (4.5b) respectivamente, se sustituyen tales expresiones en la ecuación para la densidad superficial de materia del disco que se encontró en (3.32); es decir,

$$\sigma = \frac{C_0 d}{2\pi R(C_0 + R)^2}, \quad (4.12)$$

con $R = \sqrt{r^2 + (|z| + d)^2}$.

Así mismo, para encontrar una expresión normalizada, adimensional y además reducir el número de constantes de ajuste, se hacen las sustituciones $\tilde{r} = r/d$ y $\tilde{C}_0 = C_0/d$, de tal manera que se obtiene finalmente

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}^2 + 1}} \left[\frac{\tilde{C}_0 + 1}{\tilde{C}_0 + \sqrt{\tilde{r}^2 + 1}} \right]^2, \quad (4.13)$$

con $\tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_0$, donde

$$\sigma_0 = \frac{C_0}{2\pi(C_0 + d)^2}, \quad (4.14)$$

es el valor de densidad superficial de energía cuando $\tilde{r} = 0$. Todas las anteriores expresiones están evaluadas en $z = 0^+$.

La Figura 4.3 muestra el comportamiento de la ecuación (4.13), la cual se expresa en unidades adimensionales. El origen representa el centro del disco, donde la densidad superficial de energía es máxima; sin embargo, su valor decrece rápidamente conforme la coordenada radial se incrementa.

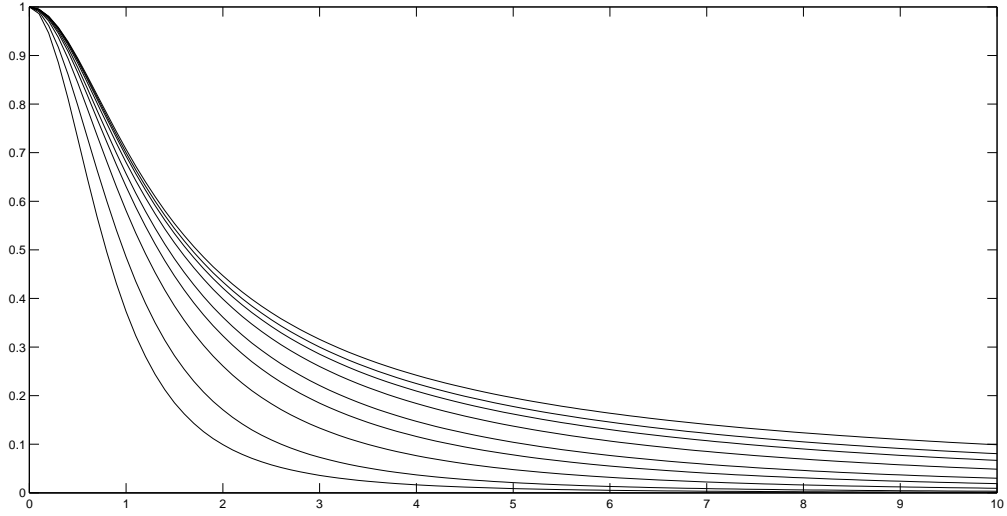


Figura 4.3: Modelo $n = 0$. Gráfica de la ecuación (4.13), densidad superficial de energía $\tilde{\sigma}$ en función del radio \tilde{r} , para diferentes valores de la constante \tilde{C}_0 . Comenzando por la curva inferior hasta la superior, los valores de esta constante son $\tilde{C}_0 = 0,1; 1; 3; 6; 10; 20; 40; 80; 3000$.

Masa del Disco

Siguiendo un proceso similar al del halo, no obstante teniendo presente que en coordenadas cilíndricas el diferencial de área está dado por $d^3y = drd\varphi dz$ y $T_{\mu\nu} = e^\psi S_{\mu\nu}\delta(z)$, se tiene que para el caso de la densidad superficial de energía, la ecuación (4.4) se reduce a

$$M_D = \int_d^\infty \left(\frac{\Phi_{,z}}{1 - \Phi} \right) r_0 dr_0, \quad (4.15)$$

la cual está evaluada en $z = 0$. Además, se ha hecho la sustitución $r_0^2 = R^2 + d^2$. Con esto, se puede encontrar una expresión final para la masa del disco, sustituyendo las ecuaciones de (4.5) en (4.15):

$$M_{D_0} = \ln \left(1 + \frac{C_0}{d} \right). \quad (4.16)$$

Con lo anterior, la masa total del modelo para $n = 0$ se expresa como,

$$M_T = \frac{4\pi(1 - k^2)C_0^2}{d} + \ln \left(1 + \frac{C_0}{d} \right). \quad (4.17)$$

Densidad de corriente

Como se encontró en la ecuación (3.33), la densidad de corriente que describe el modelo muestra densidad de carga nula y únicamente una componente en la dirección azimutal. Considerando las expresiones dadas en (4.5a) y (4.5b), la densidad de corriente adopta la forma,

$$I^{(1)} = -\frac{k}{2\pi} \frac{rC_0}{(R + C_0)^3}, \quad (4.18)$$

donde $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. Ahora se aplicará la transformación $z \rightarrow |z| + d$, con d como un valor constante y definitivamente positivo; es decir,

$$I^{(1)} = \lambda \frac{\tilde{C}_0 \tilde{r}}{(\sqrt{\tilde{r}^2 + 1} + \tilde{C}_0)^3}, \quad (4.19)$$

donde $\lambda = -k/2\pi d$, $\tilde{C}_0 = C_0/d$, $\tilde{r} = r/d$ y todas las cantidades están evaluadas en $z = 0^+$. El dominio de la constante k se indica en la ecuación (3.11). La ecuación (4.19) se ilustra en la Figura 4.4, la cual muestra que en el centro de la estructura discoidal las corrientes son nulas, sin embargo alcanzan un máximo cerca de él y vuelven a desvanecer conforme la coordenada radial crece. Este pico se debe a que el campo magnético es más intenso en esta región del disco; no obstante, su interpretación física no es clara.

Campo Magnético

A partir del ansatz dado en (2.23) y de las expresiones para la solución del potencial gravitatorio dadas en (4.5), las primeras derivadas del potencial magnético se pueden escribir como

$$A_{,z} = -k \frac{C_0 r^2}{R^3}, \quad (4.20a)$$

$$A_{,r} = -k C_0 z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right). \quad (4.20b)$$

Por otro lado, el potencial magnético en una forma general, se expresa como

$$A(r, z) = \int A_{,r} dr + f(z), \quad (4.21)$$

donde $f(z)$ es una función que depende únicamente de z ; es decir sustituyendo (4.20b) en lo anterior, se tiene que,

$$A(r, z) = -k \frac{C_0 z}{R} + f(z), \quad (4.22)$$

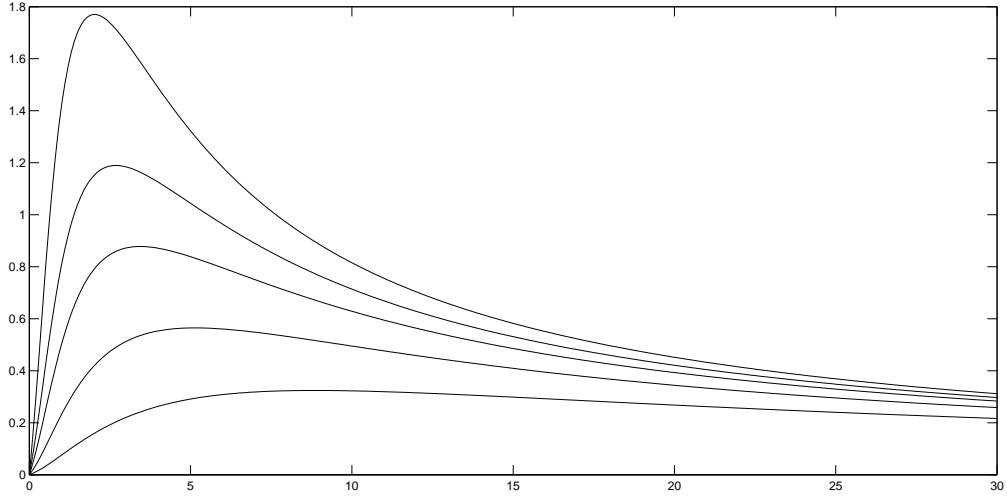


Figura 4.4: Modelo $n = 0$. Gráfica de la ecuación (4.19), densidad superficial de corriente $I^{(1)}$ en función del radio \tilde{r} , para $\lambda = 10$ y diferentes valores de la constante C_0 . Comenzando por la curva superior hasta la inferior, los valores de $\tilde{C}_0 = 1; 1,5; 2; 3; 5$.

lo cual se deriva con respecto a la coordenada z y se iguala a la expresión (4.20a); es decir

$$-k \frac{C_0 r^2}{R^3} = -k \frac{C_0 r^2}{R^3} + f'(z), \quad (4.23)$$

en donde se evidencia que

$$f(z) = cte. \quad (4.24)$$

Por tanto, dado que para nuestro caso sólo son importantes las primeras derivadas del potencial magnético, la expresión (4.22) se puede escribir como

$$A(r, z) = -k \frac{C_0 z}{R}, \quad (4.25)$$

donde se hace la transformación $z \rightarrow |z| + d$, la cual genera una discontinuidad en la primera derivada del potencial magnético a través del disco en el plano $z = 0$; es decir

$$A(r, z) = -k \frac{C_0(|z| + d)}{\sqrt{r^2 + (|z| + d)^2}}. \quad (4.26)$$

De acuerdo a la ecuación (3.26), se puede afirmar que la ecuación final para el potencial magnético en (4.26), describe superficies equipotenciales; es decir, se pueden igualar a una constante,

$$C_A = -k \frac{C_0(|z| + d)}{\sqrt{r^2 + (|z| + d)^2}}, \quad (4.27)$$

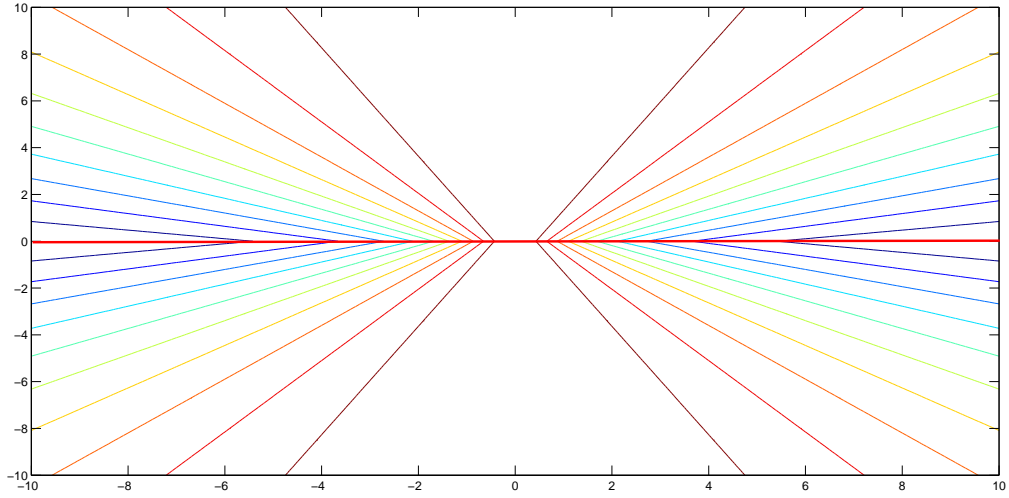


Figura 4.5: Gráfica de la coordenada \tilde{z} en función de \tilde{r} , que muestra las líneas de campo magnético para el modelo $n = 0$ de la ecuación (4.28), con $\tilde{C} = 100$. El disco se muestra de perfil y está representado por la línea roja horizontal en $\tilde{z} = 0$.

donde C_A es una constante. Con esto, se puede encontrar una expresión final para las líneas de campo magnético; es decir,

$$\tilde{r} = (|\tilde{z}| + 1) \sqrt{\tilde{C} - 1}, \quad (4.28)$$

donde $\tilde{r} = r/d$, $\tilde{z} = z/d$ y $\tilde{C} = kC_0/C_A$.

Se puede apreciar que la ecuación (4.28) describe una recta; es decir, para el modelo $n = 0$, las líneas de campo magnético del modelo describen líneas rectas. Esto se puede observar en la Figura 4.5, donde han sido graficados los contornos de las superficies equipotenciales dados por la ecuación (4.27), que es equivalente a las rectas de la ecuación (4.28).

4.5. Aplicación para n=1

Con base en la solución expresada en la ecuación (4.1), la segunda familia de soluciones se da para los dos primeros términos de la expansión. Así mismo, el segundo término del polinomio de Legendre está dado por

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta = \frac{z}{R}, \quad (4.29)$$

con lo que se obtiene,

$$\Phi_1 = -\frac{C_0}{R} - \frac{C_1 z}{R^3}, \quad (4.30a)$$

$$\Phi_{1,r} = \frac{C_0 r}{R^3} + \frac{3C_1 z r}{R^5}, \quad (4.30b)$$

$$\Phi_{1,z} = \frac{C_0 z - C_1}{R^3} + \frac{3C_1 z^2}{R^5}. \quad (4.30c)$$

De lo anterior, se encuentra además que

$$\nabla\Phi_0 \cdot \nabla\Phi_0 = \frac{R^4 C_0^2 + 4C_0 C_1 z R^2 + R^2 C_1^2 + 3C_1^2 z^2}{R^8}, \quad (4.31)$$

donde $R = \sqrt{r^2 + z^2}$.

4.5.1. Halo

Densidad Volumétrica de energía

Partiendo de lo anterior y sustituyendo las ecuaciones (4.39a) y (4.40) en la expresión para la densidad volumétrica de materia del halo, dada al final del capítulo 3 en (3.21), se obtiene

$$\rho = \frac{(1 - k^2)\tilde{R}^4 \left(\tilde{R}^4 \tilde{C}_0^2 + 4\tilde{C}_0 \tilde{C}_1 (|\tilde{z}| + 1)\tilde{R}^2 + \tilde{R}^2 \tilde{C}_1^2 + 3\tilde{C}_1^2 (|\tilde{z}| + 1)^2 \right)}{d^2 \left(\tilde{C}_1 (|\tilde{z}| + 1) + \tilde{C}_0 \tilde{R}^2 + \tilde{R}^3 \right)^4}, \quad (4.32)$$

donde $\tilde{R} = R/d$, $\tilde{C}_0 = C_0/d$, $\tilde{z} = z/d$, $\tilde{r} = r/d$ y $\tilde{C}_1 = C_1/d^2$. Además, se ha hecho la transformación dada en (4.3), la cual da el carácter esferoidal al halo. Ahora, con el fin de normalizar la ecuación (4.32), ésta se expresará en unidades adimensionales; es decir,

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (4.33)$$

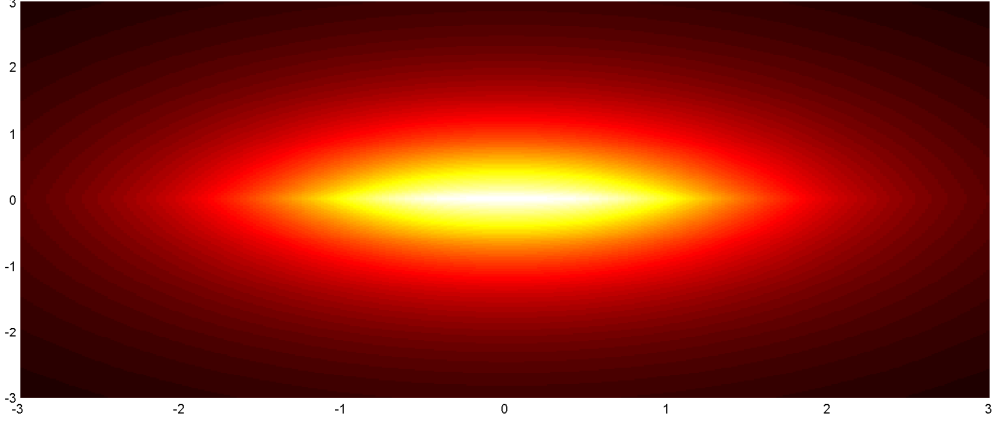


Figura 4.6: Modelo $n = 1$. Gráfica de la densidad volumétrica de energía $\tilde{\rho}$ en función de la coordenada \tilde{z} y de la coordenada radial \tilde{r} , descrita en la ecuación (4.34), con las constantes $\tilde{C}_0 = \tilde{C}_1 = 2$

donde ρ_0 es la densidad volumétrica de materia cuando $\tilde{r} = 0$ y $\tilde{z} = 0$. Por tanto, la expresión final para la densidad volumétrica de energía del halo, se escribe como,

$$\tilde{\rho} = \frac{(\tilde{C}_0 + \tilde{C}_1 + 1)^4 \tilde{R}^4 \left(\tilde{R}^4 \tilde{C}_0^2 + 4\tilde{C}_0 \tilde{C}_1 (|\tilde{z}| + 1) \tilde{R}^2 + \tilde{R}^2 \tilde{C}_1^2 + 3\tilde{C}_1^2 (|\tilde{z}| + 1)^2 \right)}{(\tilde{C}_0^2 + \tilde{C}_1^2) \left(\tilde{C}_1 (|\tilde{z}| + 1) + \tilde{C}_0 \tilde{R}^2 + \tilde{R}^3 \right)^4}, \quad (4.34)$$

El comportamiento de la ecuación (4.34) se ilustra en la Figura 4.6, donde se muestra el perfil del disco en $z = 0$, rodeado del halo. El color amarillo en el centro, indica las zonas donde la densidad volumétrica de energía tiene su valor máximo y por tanto, el campo gravitacional es más intenso. Las zonas rojas y naranjas corresponden a las zonas en que el campo gravitacional decae conforme las coordenadas \tilde{r} y \tilde{z} crecen en magnitud. Finalmente, los tonos oscuros representan las zonas donde el campo gravitacional es más débil.

4.5.2. Disco Delgado

Densidad Superficial de energía

A partir de la solución general para el potencial gravitatorio expresada en (4.1) y considerando los dos primeros términos de la expansión y sus derivadas con respecto a z , dados

en (4.30a) y (4.30c) respectivamente, se sustituyen tales expresiones en la ecuación para la densidad superficial de materia del disco que se encontró en (3.32); es decir,

$$\sigma = \frac{C_0(|z| + 1) - C_1 + 3C_1(|z| + 1)^2/R^2}{2\pi(C_0R^2 - C_1(|z| + 1)R^3)}, \quad (4.35)$$

con $R = \sqrt{r^2 + (|z| + d)^2}$.

Asi mismo, para encontrar una expresión normalizada, adimensional y además reducir el número de constantes de ajuste, se hacen las sustituciones $\tilde{r} = r/d$, $\tilde{C}_1 = C_1/d$ y $\tilde{C}_0 = C_0/d$, de tal manera que se obtiene finalmente

$$\tilde{\sigma} = \frac{\left((\tilde{C}_0d - \tilde{C}_1)\tilde{r}^2 + \tilde{C}_0d + 2\tilde{C}_1\right) \left(\tilde{C}_0d + \tilde{C}_1 + d\right)^2 \sqrt{\tilde{r}^2 + 1}}{\left(\tilde{C}_0d + 2\tilde{C}_1\right) \left(\tilde{C}_0d(\tilde{r}^2 + 1) + \tilde{C}_1 + d(\tilde{r}^2 + 1)^{3/2}\right)^2}, \quad (4.36)$$

con $\tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_0$, donde

$$\sigma_0 = \frac{\tilde{C}_0d + 2\tilde{C}_1}{2\pi(\tilde{C}_0 + \tilde{C}_1 + d)^2}, \quad (4.37)$$

es el valor de densidad superficial de energía cuando $\tilde{r} = 0$. Todas las anteriores expresiones están evaluadas en $z = 0^+$. Como se puede apreciar, la ecuación (4.36) depende de las constantes \tilde{C}_0 , \tilde{C}_1 y d . Las figuras 4.7, 4.8 y 4.9 muestran el comportamiento de la densidad de energía del disco para diferentes valores de cada una de estas constantes. Todas las figuras, muestran un máximo en el centro del disco, el cual desvanece conforme la coordenada radial incrementa.

Densidad de corriente

A partir de la ecuación (3.33), y considerando las expresiones dadas en (4.30a) y (4.30b), la densidad de corriente para el modelo $n = 1$ adopta la forma,

$$I^{(1)} = -\frac{k}{2\pi} \frac{(rC_0R^2 + 3C_1zr)R^4}{(R^3 + C_0R^2 + C_1z)^3}, \quad (4.38)$$

donde $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. Ahora se aplicará la transformación $z \rightarrow |z| + d$, con d como un valor constante y definitivamente positivo; es decir,

$$I^{(1)} = \Lambda \frac{(\tilde{C}_0\tilde{r}^3 + C_0\tilde{r} + 3\tilde{C}_1\tilde{r})(\tilde{r}^2 + 1)^2}{((\tilde{r}^2 + 1)^{3/2} + \tilde{C}_0(\tilde{r}^2 + 1) + \tilde{C}_1)^3}, \quad (4.39)$$

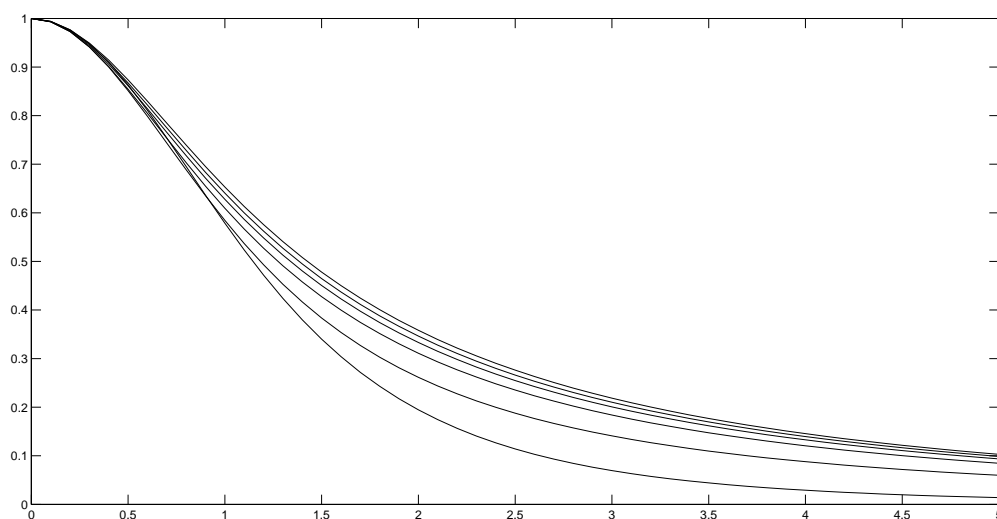


Figura 4.7: Modelo $n = 1$. Gráfica de la densidad superficial de energía $\tilde{\sigma}$ en función del radio \tilde{r} descrita en la ecuación (4.36). Las constantes $d = 10$ y $\tilde{C}_0 = 10$ permanecen invariables. Comenzando por la curva superior hasta la inferior, los valores de la constante $\tilde{C}_1 = 1, 5, 10, 20, 50, 100$.

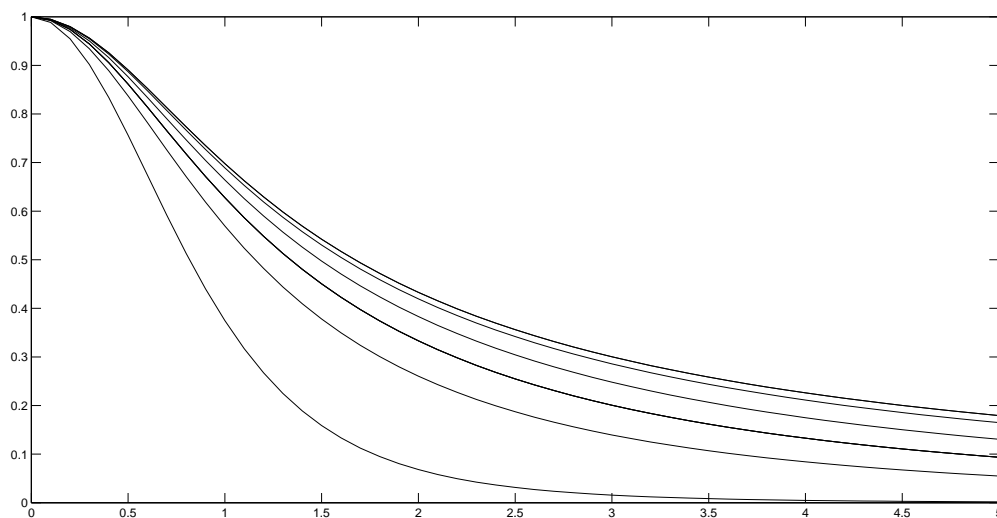


Figura 4.8: Modelo $n = 1$. Gráfica de la densidad superficial de energía $\tilde{\sigma}$ en función del radio \tilde{r} descrita en la ecuación (4.36). Las constantes $d = 10$ y $\tilde{C}_1 = 10$ permanecen invariables. Comenzando por la curva inferior hasta la superior, los valores de la constante $\tilde{C}_0 = 1, 5, 10, 20, 50, 100$.

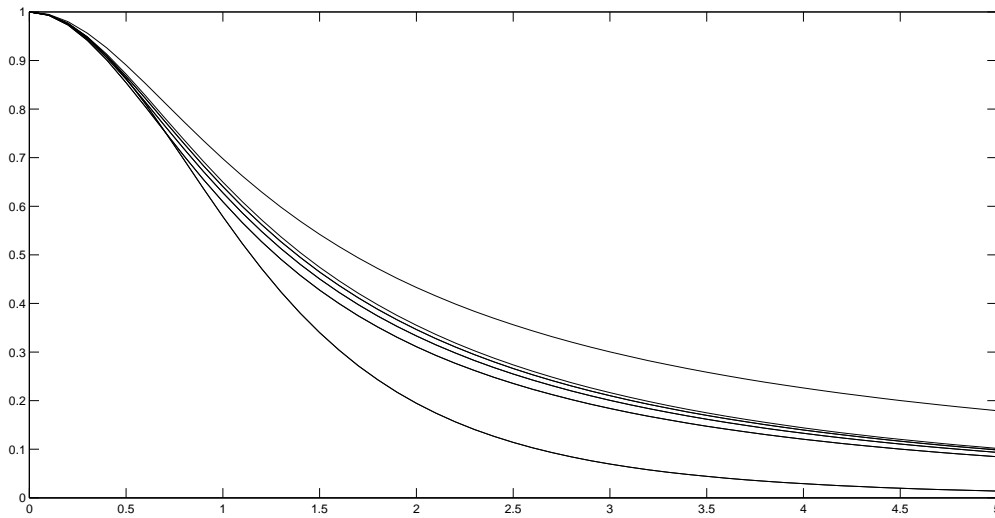


Figura 4.9: Modelo $n = 1$. Gráfica de la densidad superficial de energía $\tilde{\sigma}$ en función del radio \tilde{r} descrita en la ecuación (4.36). Las constantes $\tilde{C}_1 = 10$ y $\tilde{C}_0 = 10$ permanecen invariables. Comenzando por la curva inferior hasta la superior, los valores de la constante $d = 1, 5, 10, 20, 50, 100$.

donde $\Lambda = k/2\pi d$, $\tilde{C}_0 = C_0/d$, $\tilde{C}_1 = C_1/d^2$, $\tilde{r} = r/d$ y todas las cantidades están evaluadas en $z = 0^+$. El dominio de la constante k se indica en la ecuación (3.11). El comportamiento de la ecuación (4.39) se ilustra en las Figuras 4.10 y 4.11, para diferentes valores de las constantes \tilde{C}_0 y \tilde{C}_1 respectivamente. El pico que estas gráficas muestran, coincide con la intensidad del campo magnético mostrado en la Figura 4.12. En esta región, una corriente sobre el disco tiene una dirección azimutal, constatando la regla de la mano derecha para la ubicación y dirección del campo magnético.

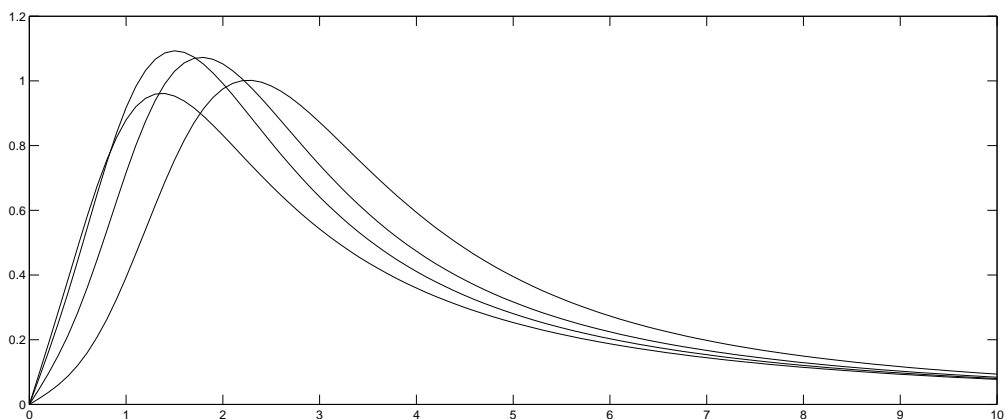


Figura 4.10: Modelo $n = 1$. Gráfica de la ecuación (4.39), densidad superficial de corriente $I^{(1)}$ en función del radio \tilde{r} , para $\Lambda = 10$ $\tilde{C}_0 = 1$ y diferentes valores de la constante C_1 . Comenzando por la curva inferior hasta la superior, los valores de $\tilde{C}_1 = 2; 10; 5; 3$.

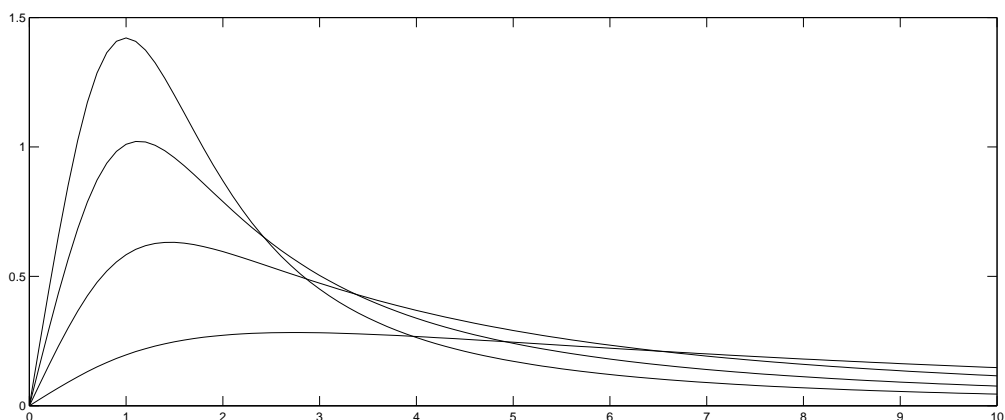


Figura 4.11: Modelo $n = 1$. Gráfica de la ecuación (4.39), densidad superficial de corriente $I^{(1)}$ en función del radio \tilde{r} , para $\Lambda = 10$ $\tilde{C}_1 = 1$ y diferentes valores de la constante C_0 . Comenzando por la curva con el pico inferior hasta el superior, los valores de $\tilde{C}_0 = 0,5; 1; 2; 5$.

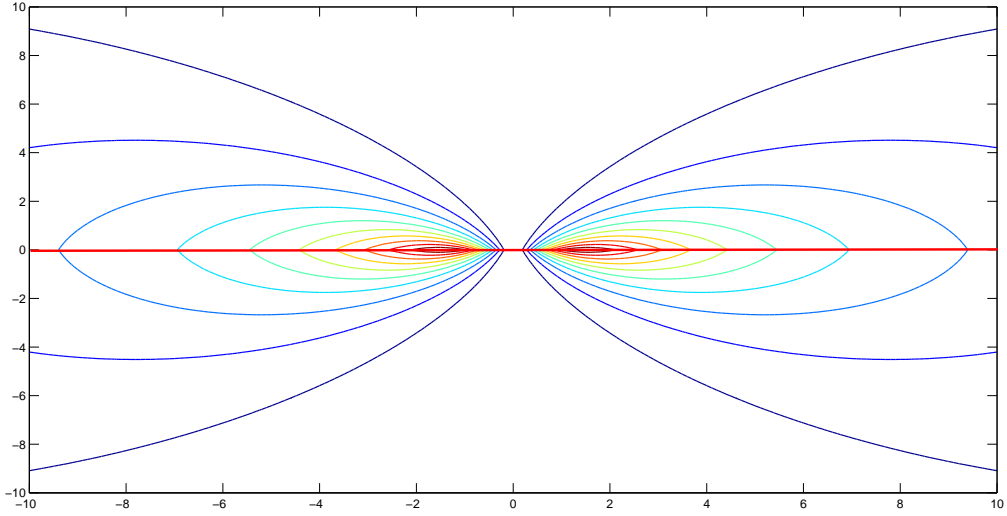


Figura 4.12: Gráfica de la coordenada \tilde{z} en función de \tilde{r} , que muestra las líneas de campo magnético para el modelo $n = 1$ de la ecuación (4.50), con $\epsilon = 5000$ y $\kappa = 2$. El disco se muestra de perfil y está representado por la línea roja horizontal en $\tilde{z} = 0$.

Líneas de Campo Magnético

Siguiendo un proceso similar al del modelo para $n = 0$ (en donde se encontró que la ecuación final para el potencial magnético describe superficies equipotenciales), para este caso el potencial magnético adquiere la forma

$$A(r, z) = \frac{k\tilde{C}_1\tilde{r}^2}{\tilde{R}^3} - \frac{kC_0(|z| + 1)}{\tilde{R}} = C_B, \quad (4.40)$$

donde $\tilde{r} = r/d$, $\tilde{C}_1 = C_1/d$, $\tilde{z} = z/d$ y $\tilde{R} = R/d$ y C_B es una constante. Con esto, se puede encontrar una expresión final para las líneas de campo magnético; es decir,

$$\tilde{R}^3 = \epsilon\tilde{r}^2 - \kappa(|\tilde{z}| + 1)\tilde{R}^2, \quad (4.41)$$

donde $\epsilon = k\tilde{C}_1/C_B$ y $\kappa = kC_0/C_B$. El modelo $n = 1$ muestra un comportamiento más general, el cual es analizado en la Figura 4.12, donde las líneas de campo magnético son curvas y evidencian una mayor intensidad en la región donde existe la única componente de la densidad de corriente.

Conclusiones Generales

Se obtuvo una nueva familia de infinitas soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell, para un espacio-tiempo estático y axialmente simétrico. Dichas soluciones describen una familia de sistemas constituidos por un disco delgado, rodeado de un halo esferoidal de materia y en presencia de campos magnéticos. Las soluciones a las ecuaciones de campo se obtuvieron mediante el uso de una solución estimada o *ansatz*, el cual relaciona el potencial electromagnético con el potencial métrico, permitiendo obtener expresiones generales para el tensor energía-momentum y el cuadvivector corriente, tanto para el halo como para el disco, dadas en las ecuaciones (3.30), (3.31) y (3.32), (3.33), respectivamente.

A partir de las expresiones para el tensor energía-momentum, se estudió el comportamiento físico del modelo, verificando el cumplimiento de las condiciones de energía, es decir, la positividad de la densidad de energía, el dominio de ésta densidad sobre la presión y el flujo de dicha energía a lo largo de un vector tipo tiempo dentro del cono de luz; ésto último, con el fin de garantizar que la energía no fluya con una velocidad superior a la de la luz.

A partir de la introducción del campo magnético al modelo, se encontró que la densidad de carga del halo y del disco es nula, lo cual está de acuerdo con la evidencia observacional, que muestra en general, que las galaxias y otros objetos astrofísicos son esencialmente neutros.

A partir del tensor energía-momentum, se encontró que el contenido material del disco describe *polvo*, es decir, que las presiones son nulas. Lo anterior se sustenta a partir del hecho de que las colisiones dentro de una galaxia, por ejemplo, son un fenómeno irrelevante.

A pesar de que las soluciones determinan que la extensión del disco es infinita, las densidades de energía volumétrica y superficial, muestran un comportamiento adecuado; es decir, su valor máximo se encuentra en el centro del sistema y se desvanece rápidamente conforme

la distancia desde el centro aumenta, lo que permite observar una región central definida en la cual existe una mayor concentración de masa. Además, se encontró que la integral que permite hallar ésta masa, converge; es decir, que la masa descrita por el modelo es finita. Todo lo anterior, se logra garantizando que la solución describa un espacio-tiempo asintóticamente plano. Finalmente, el modelo muestra que las líneas de campo magnético son paralelas a las líneas de campo gravitacional.

El estudio de estas estructuras discoidales en relatividad general, sigue planteándose sobre condiciones suficientemente ideales como para considerarlas un referente para constatar directamente con las observaciones. No obstante, en el presente trabajo se procuró *construir sobre los construido* por otros autores, avanzando en cuanto a las características conjuntas de objetos astrofísicos, tales como la indudable presencia de un halo y de campos magnéticos, arrojando resultados coherentes y físicamente interpretables. En conclusión, en el presente trabajo se logró dar un paso más en el largo camino hacia la construcción de modelos relativistas de discos, que puedan llegar a describir fielmente el comportamiento de un objeto o fenómeno astrofísico.

Los resultados obtenidos en el marco del desarrollo del presente Trabajo de Investigación, han sido presentados en los eventos que se listan a continuación:

- *Diego A. Ballén-Daza*, Guillermo A. González y Antonio C. Gutiérrez-Piñeres. *Modelos relativistas de discos axialmente simétricos en presencia de un halo con campo magnético*. Presentado en XXIV Congreso Nacional de Física, Bogotá D.C - Colombia, Octubre 6, 2011.
ISBN: 978-958-99225-0-7.
- *Diego A. Ballén-Daza*, Guillermo A. González y Antonio C. Gutiérrez-Piñeres. *Relativistic Dust Thin Disks Embedded in a Halo with Magnetic Fields*. Presentado en IV International Meeting on Gravitation and Cosmology, Guadalajara, Jalisco, México. 23 de Mayo de 2012.
- *Diego A. Ballén-Daza*, Guillermo A. González y Antonio C. Gutiérrez-Piñeres. *Discos relativistas con halo y campo magnético*. Aceptado para presentación en la modalidad de charla oral en el III Congreso Colombiano de Astronomía y Astrofísica, Bucaramanga, Colombia, del 5 al 8 de noviembre de 2012.

Apéndices

Equivalencia entre la solución trivial de vacío y la métrica de Mikowski

Con el fin de encontrar una solución de vacío para la función métrica ψ , se define la métrica conformestática tildada en coordenadas cilíndricas, dada por

$$d\tilde{s}^2 = -e^{2\psi} d\tilde{t}^2 + e^{-2\psi} (\tilde{r}^2 d\tilde{\varphi}^2 + d\tilde{r}^2 + d\tilde{z}^2). \quad (\text{A.1})$$

Además, se recuerda que la métrica de Minkowski se escribe,

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (\text{A.2})$$

Con esto, se puede partir de la invarianza, puesto que la distancia entre dos sucesos en el espacio-tiempo de Minkowski, es equivalente al vacío, donde no existe campo gravitacional; es decir,

$$d\tilde{s}^2 = ds^2. \quad (\text{A.3})$$

Lo anterior implica que,

$$e^\psi d\tilde{t} = dt, \quad (\text{A.4})$$

$$e^{-\psi} d\tilde{z} = dz, \quad (\text{A.5})$$

$$e^{-\psi} d\tilde{r} = dr, \quad (\text{A.6})$$

$$e^{-\psi} \tilde{r} d\tilde{\varphi} = r d\varphi. \quad (\text{A.7})$$

Ahora, si se considera que la función métrica,

$$\psi = cte, \tag{A.8}$$

y se integra la ecuación (A.6), se obtiene que,

$$\int e^{-\psi} d\tilde{r} = \int dr, \tag{A.9}$$

$$e^{-\psi} \tilde{r} = r, \tag{A.10}$$

lo cual se sustituye en la expresión (A.8); es decir,

$$d\tilde{\varphi} = d\varphi, \tag{A.11}$$

donde las ecuaciones (A.4), (A.5), (A.6) y (A.11) son las ecuaciones de transformación.

Demostración de $e^{-\psi}$ como solución de la ecuación de Laplace

Con el fin de encontrar una solución para el potencial métrico en términos de una solución ya conocida, se parte de la ecuación diferencial parcial no lineal dada por

$$\nabla^2\psi = \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (\text{B.1})$$

la cual se puede reescribir como

$$\nabla^2\psi - \nabla\psi \cdot \nabla\psi = 0. \quad (\text{B.2})$$

Ahora, dado que el Laplaciano en coordenadas cilíndricas es,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (\text{B.3})$$

y teniendo en cuenta que $\psi = \psi(r, z)$, es decir, el espacio-tiempo es axialmente simétrico, la ecuación (B.2) se puede escribir como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2 = 0. \quad (\text{B.4})$$

Multiplicando la anterior expresión por el factor integrante $e^{-\psi}$, se obtiene que

$$e^{-\psi} \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + e^{-\psi} \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + e^{-\psi} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - e^{-\psi} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \right)^2 - e^{-\psi} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2 = 0, \quad (\text{B.5})$$

Ahora, agrupando algunos términos, la anterior ecuación se puede escribir como

$$-\frac{1}{r} \left(e^{-\psi} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \left(e^{-\psi} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \right)^2 - e^{-\psi} \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} \right) + \left(e^{-\psi} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2 - e^{-\psi} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (\text{B.6})$$

Tanto el segundo como el tercer término de la ecuación (B.6) se pueden expresar como la derivada de un producto; esto es,

$$-\frac{1}{r} \left(e^{-\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(-e^{-\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-e^{-\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0, \quad (\text{B.7})$$

donde nuevamente se asocian el segundo y tercer término, como el resultado de la derivada de un producto; es decir,

$$-\frac{1}{r} \left(e^{-\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial e^{-\psi}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial e^{-\psi}}{\partial z} \right) = 0, \quad (\text{B.8})$$

con lo que finalmente se puede llegar a que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(e^{-\psi})}{\partial r} + \frac{\partial^2(e^{-\psi})}{\partial r^2} + \frac{\partial^2(e^{-\psi})}{\partial z^2} = 0, \quad (\text{B.9})$$

es decir,

$$\nabla^2(e^{-\psi}) = 0, \quad (\text{B.10})$$

lo que es equivalente a la ecuación de Laplace.

Teorema de comparación del límite para la convergencia de las masas

Teorema 1 *Si dos integrales propias $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b g(x)dx$ existen para cada $b \geq a$, siendo $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$, y si*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c, \quad \text{donde } c \neq 0, \quad (\text{C.1})$$

entonces las integrales $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_a^\infty g(x)dx$, o ambas convergen o ambas divergen.

El integrando general para la masa del disco está dado por (Ver Ec. 4.15),

$$f_n = \frac{\Phi_{n,z}}{1 - \Phi_n}, \quad (\text{C.2})$$

es decir, se debe demostrar que,

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = c, \quad (\text{C.3})$$

con $c \neq 0$ y $r_0^2 = R^2 + d^2$. Para calcular f_n y f_{n+1} , se hace uso de la solución dada en (4.1), la cual se evalúa en $z = 0^+$; es decir,

$$\Phi_n|_{z=0^+} = - \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{r_0^{l+1}} P_l(d/r_0), \quad (\text{C.4})$$

$$\Phi_{n,z}|_{z=0^+} = - \sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{r_0^{l+2}} P_{l+1}(d/r_0), \quad (\text{C.5})$$

Con lo anterior, se pueden escribir las funciones f_n y f_{n+1} , las cuales se expresan como

$$f_n = \frac{\sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{r_0^{l+2}} P_{l+1}(d/r_0)}{1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{r_0^{l+1}} P_l(d/r_0)}, \quad (\text{C.6})$$

$$f_{n+1} = \frac{\sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{r_0^{l+2}} P_{l+1}(d/r_0) + \frac{C_{n+1}(n+2)}{r_0^{n+3}} P_{n+2}(d/r_0)}{1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{r_0^{l+1}} P_l(d/r_0) + \frac{C_{n+1}}{r_0^{n+2}} P_{n+1}(d/r_0)}, \quad (\text{C.7})$$

y por tanto, se puede calcular la relación

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \left[1 + \frac{\frac{C_{l+1}(l+2)}{r_0^{l+3}} P_{l+2}(d/r_0)}{\sum_{l=0}^n \frac{C_l(l+1)}{r_0^{l+2}} P_{l+1}(d/r_0)} \right] \left[\frac{1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{r_0^{l+1}} P_l(d/r_0)}{1 + \sum_{l=0}^n \frac{C_l}{r_0^{l+1}} P_l(d/r_0) + \frac{C_{l+1}}{r_0^{l+2}} P_{l+1}(d/r_0)} \right] \quad (\text{C.8})$$

Ahora, con el fin de calcular (C.3), se analiza el comportamiento de la ecuación (C.8) en el límite cuando $r_0 \rightarrow \infty$; es decir,

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1. \quad (\text{C.9})$$

En conclusión, ya que se logró demostrar que la masa del disco para el modelo $n = 0$ converge, entonces con base en el Teorema de comparación del límite, se puede afirmar que para cualquier n , la masa también converge. Un procedimiento similar se puede llevar a cabo para la masa del halo.

Bibliografía

- [1] A. Einstein, *Relativity: the special and general theory*, (1920).
- [2] M. Rees, *Black Holes and Relativistic Stars*. Edited by R. Wald University o Chicago Press, Chicago, p 79, (1998).
- [3] L. Lindblom, *Astrophys. J.*, **208**, 873 (1976).
- [4] C. Struck, *Physics Reports*, 321, **1** (1999).
- [5] J.B. Hartle y D.H. Sharp, *Astrophys. J.*, **147**, 317 (1967).
- [6] P. S. Letelier. *Phys.Rev. D* **60**, 104042, (1999).
- [7] S.L. Shapiro y S.A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*, Chapter 7, J. Wiley, New York, (1983).
- [8] S.S. Balbus y J.F. Hawley, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 1 (1998).
- [9] J. Binney, S. Tremaine, *Galactic Dynamics*. 2nd ed. Princeton University Press, (2008).
- [10] W. A. Bonnor y Sackfield, *Comm. Math. Phys.* **8**, 338 (1968).
- [11] T. Morgan y L. Morgan, *Phys. Rev.***183**, 1097 (1969).
- [12] L. Morgan y T. Morgan, *Phys. Rev. D.***2**, 2756 (1970).
- [13] B. H. Voorhees, *Phys. Rev. D***5**, 2413 (1972).
- [14] D. Lynden-Bell y S. Pineault, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **185**, 679 (1978).

- [15] A. Chamorro, R. Gregory, y J. M. Stewart, Proc. R. Soc. London **A413**, 251 (1987).
- [16] P. S. Letelier y S. R. Oliveira, J. Math. Phys. **28**, 165 (1987).
- [17] J. P. S. Lemos, Class. Quantum Grav. **6**, 1219 (1989).
- [18] J. Bičák, D. Lynden-Bell, y J. Katz, Phys. Rev. D**47**, 4334 (1993).
- [19] J. Bičák, D. Lynden-Bell, y C. Pichon, Mon. Not. R. Astron. Soc. **265**, 126 (1993).
- [20] G. A. González y P. S. Letelier, Class. Quantum Grav. **16**, 479 (1999).
- [21] G. A. González y O. A. Espitia, Phys. Rev. D**68**, 104028 (2003).
- [22] D. Lynden-Bell y S. Pineault, Mon. Not. R. Astron. Soc. **185**, 695 (1978).
- [23] J. Bičák y T. Ledvinka, Phys. Rev. Lett. **71**, 1669 (1993).
- [24] C. Pichon y D. Lynden-Bell, Mon. Not. R. Astron. Soc. **280**, 1007 (1996).
- [25] G. A. González y P. S. Letelier, Phys. Rev. D**62**, 064025 (2000).
- [26] J. P. S. Lemos y P. S. Letelier, Class. Quantum Grav. **10**, L75 (1993).
- [27] J. P. S. Lemos y P. S. Letelier, Phys. Rev. D**49**, 5135 (1994).
- [28] J. P. S. Lemos y P. S. Letelier, Int. J. Mod. Phys. D**5**, 53 (1996).
- [29] P. S. Letelier y A. Wang, J. Math. Phys. **36**, 3023 (1995).
- [30] O. Semerák y M. Záček, Class. Quantum Grav. **17**, 1613 (2000).
- [31] O. Semerák, Class. Quantum Grav. **19**, 3829 (2002).
- [32] M. Záček y O. Semerák, Czech. J. Phys. **52**, 19 (2002).
- [33] O. Semerák, Class. Quantum Grav. **20**, 1613 (2003).
- [34] O. Semerák, Class. Quantum Grav. **21**, 2203 (2004).
- [35] V. Karas, J-M. Hué y O. Semerák, Class. Quantum Grav. **21**, R1 (2004).
- [36] D. Vogt y P. S. Letelier, Phys. Rev. D **70**, 064003 (2004).
- [37] M. Ujevic y P. S. Letelier, Phys. Rev. D **70**, 084015 (2004).

BIBLIOGRAFÍA

- [38] G. A. González, A.C. Gutierrez-Piñeres y V. M. Viña-Cervantes, *Phys.Rev. D* **79**: 124048, 2009.
- [39] G. García-Reyes y G. A. González, *Phys. Rev D* **70**, 104005 (2004)
- [40] G. A. González, A.C. Gutierrez-Piñeres y P. Ospina, *Phys. Rev. D* **78**, 064058 (2008).
- [41] A.C. Gutierrez-Piñeres y G. A. González, *International Journal of Theoretical Physics*, **51**, 1737 - 1753, (2012).
- [42] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, and M. McCallum, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, England, (2003).
- [43] J. Bičák y T. Ledvinka. *Phys. Rev. Lett*, **71**, (1993).
- [44] D. Vogt y P. S. Letelier, *Phys. Rev. D* **68**, 084010 (2003).
- [45] G. Kuzmin, *Astron.Zh.*,**33**, 27, (1956).
- [46] A. Toomre, *ApJ*, **138**, 385, (1963).
- [47] L. Synge, *Relativity, the General Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1966).
- [48] A. Papapetrou y A. Hamouni, *Surface layers of matter in general relativity, Ann. Ins. Henri Poincaré* **9**, 179-188 (1968).
- [49] A. R. Choudhuri, *Astrophysics for Physicists*, Cambridge University Press, Cambridge, England, (2010).
- [50] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology*, John Wiley & Sons, Inc., (1072).
- [51] F. Rief, *Fundamentals of statistical and thermal physics*, McGraw-Hill, (1965).
- [52] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, England, (1984).
- [53] M. Freedman, *The Topology of 4-dimensional manifolds*, Princeton University Press, (1982).
- [54] G. González-Martín, *Geometría Física*, (2010).

BIBLIOGRAFÍA

- [55] R. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago y Londres, (1984).
- [56] J. Katz, J. Bičák y Lynden-Bell D., *Class. Quantum Grav.* **21**, R1-R51 (2004).
- [57] E. Poisson, *A relativist's toolkit*, Cambridge University Press, Cambridge, England, (2004).
- [58] G. Arfken and H. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, New York, (2005).
- [59] C. Misner, K. Thorne and J. Wheeler, *Gravitation*, Freeman and Company., (1970)
- [60] T. M. Apostol, *Calculus*, Reverté S.A., (1965)