

Desarrollo de Modelos Matemáticos de Orden Fraccionario para la Descripción de la Dinámica
de Sistemas Electromecánicos

Andrés F. Perdomo Morales y Nicolas B. Malagón.

Trabajo de Grado para Optar al Título de Ingenieros Electrónicos

Director

Ph.D. Carlos Rodrigo Correa Cely

Profesor

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas

Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica de Telecomunicaciones

Ingeniería Electrónica

Bucaramanga

2025

Dedicatoria

A mi familia, por ser el pilar fundamental en cada etapa de mi vida. En especial, dedico este trabajo a mis padres, Ubadel Borja y Martha Malagón, y a mi hermano, Sebastián Borja. También, a la memoria de mi nono materno, Ciro Malagón, quien, aunque no estuvo presente durante mi carrera, su ejemplo de esfuerzo y sabiduría siempre guía mis pasos. Y a mi nona paterna, Odilia Mejía, quien con su amor y apoyo incondicional ha sido una fuente de fortaleza y motivación.

-Nicolas Borja Malagón

Dedico este trabajo de grado a mis padres, Gloria Morales y Álvaro Perdomo, a mi hermanita Sandra Carolina, a mi tía Clara Morales y a mi tío Christian Ferreira, quienes siempre me brindaron un apoyo incondicional, motivación constante y una confianza infinita a lo largo de este gran viaje, que hoy culmina con alegría y satisfacción. En especial, dedico este logro a mi madre, Gloria Morales, quien me enseñó el valor de los pequeños detalles y momentos que surgen en la vida, así como la importancia de la autodisciplina en cada aspecto de mi camino. Este trabajo es para ustedes, con gratitud y amor eterno.

-Andrés Felipe Perdomo Morales

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas que hicieron posible este logro, acompañándome y apoyándome durante este desafiante camino. A mis padres, Ubadel Borja y Martha Malagón, por su amor infinito, sus enseñanzas y su apoyo inquebrantable. Este logro es también suyo. A mi hermano, Sebastián Borja, por ser un ejemplo de perseverancia y una fuente constante de inspiración. A mi compañero de trabajo de grado, Andrés Felipe Perdomo, por su dedicación, compromiso y trabajo en equipo, que fueron clave para culminar este proyecto. A Paula Granados, quien estuvo conmigo desde el inicio de mi carrera y fue mi pareja durante los últimos cuatro años, tu compañía, apoyo incondicional y motivación constante hicieron este camino mucho más llevadero. A todos mis compañeros de carrera, así como a aquellos de otras carreras, quienes compartieron conmigo aprendizajes, retos y momentos inolvidables a lo largo de estos años. También quiero recordar a aquellos que, por diversas razones, no lograron culminar esta etapa, pero que dejaron una huella imborrable en nuestro camino compartido.

-Nicolas Borja Malagón

Mis más sinceros agradecimientos son para todas las personas que hicieron posible este logro, acompañándome y apoyándome durante este desafiante camino. A mis grandes amigos y compañeros del grupo de investigación ERA: Johan Vanegas, Diego Calderón, John Jairo, Jairo Sánchez, Edson Rey, Esteban Bohórquez y Artur Álvarez, quienes fueron protagonistas de innumerables momentos de risas y alegría que aportaron felicidad a mi vida universitaria. Gracias a ustedes, siempre encontré motivación para culminar este gran trabajo. A mi gran amigo y compañero de trabajo de grado, Nicolás Borja Malagón, por sus valiosos consejos, su particular manera de comprender las cosas, sus enseñanzas, y su admirable dedicación, compromiso y espíritu de trabajo en equipo, que fueron fundamentales para la realización de este proyecto.

-Andrés Felipe Perdomo Morales

Tabla de contenido

Introducción.....	10
1. Objetivos	11
1.1. Objetivo General.....	11
1.2. Objetivos Específicos.....	11
2. Metodología	12
2.1. Descripción Metodológica.....	12
3. Fundamentos Teóricos.....	13
3.1. Conceptos Previos.....	13
4. Problema Directo.....	15
5. Solución del Problema.....	16
5.1. Ecuaciones	16
5.2. Modelado del Problema	23
5.2.1. Operadores fraccionarios.....	23
5.2.2. Inclusión operador fraccionario	24
6. Resultados	25
6.1. Simulación del Modelo Convencional y Fraccionario Circuito RLC	26
6.2. Simulación del Modelo Convencional y Fraccionario del Micrófono Capacitivo.....	32
7. Recomendaciones.....	35
8. Conclusiones.....	37
Referencias	38

Lista de Figuras

Figura 1	Etapas del desarrollo metodológico.....	12
Figura 2	Solución ED 2do Orden RLC.....	28
Figura 3	Efecto de Memoria del Circuito RLC.....	29
Figura 4	Efecto de Memoria Con Paso de Integración Grande del Circuito RLC	30
Figura 5	Efecto de Memoria con Paso de Integración mediano del Circuito RLC	31
Figura 6	Efecto de Memoria con Paso de Integración Pequeño del Circuito RLC	31
Figura 7	Solución Micrófono Capacitivo Modelo Convencional	33
Figura 8	Efecto de Memoria Persistente en la Solución de la Carga del Micrófono Capacitivo	34
Figura 9	Efecto de Memoria Persistente en la Solución Mecánica del Micrófono Capacitivo ...	35

Glosario

Adimensionar: Proceso de transformar ecuaciones matemáticas para eliminar unidades físicas, simplificando su análisis y comparación.

Ángulo de Fase (ϕ): Diferencia angular entre dos señales oscilantes, comúnmente entre el voltaje y la corriente en un circuito.

Amortiguamiento Viscoso: Fenómeno que reduce la amplitud de oscilaciones en un sistema dinámico debido a la disipación de energía por fricción o resistencia interna.

Circuito RLC: Circuito eléctrico compuesto por una resistencia (R), una inductancia (L) y una capacitancia (C), utilizado comúnmente para estudiar fenómenos de oscilación y amortiguamiento.

Condiciones Iniciales: Valores específicos de las variables de un sistema dinámico en el instante inicial, necesarios para resolver ecuaciones diferenciales.

Condiciones Iniciales Fraccionarias: Configuración matemática necesaria para resolver ecuaciones fraccionarias, ajustando parámetros iniciales para reflejar memoria persistente.

Derivada de Caputo: Definición específica de derivada fraccionaria que permite trabajar con condiciones iniciales expresadas en términos de derivadas convencionales, ideal para aplicaciones en sistemas dinámicos.

Derivada Fraccionaria: Operador matemático que generaliza el concepto de derivada a órdenes no enteros, proporcionando una herramienta versátil para modelar fenómenos con memoria.

Ecuaciones de Hamilton: Herramienta matemática derivada de las ecuaciones de Lagrange, utilizada para describir sistemas dinámicos en términos de coordenadas generalizadas y sus momentos conjugados.

Ecuaciones Diferenciales de Orden Fraccionario: Extensión de las ecuaciones diferenciales convencionales donde las derivadas tienen órdenes no enteros, utilizadas para modelar dinámicas complejas.

Energía Cinética y Potencial: Energía asociada al movimiento y a la posición de los elementos de un sistema dinámico, respectivamente, utilizadas para modelar su comportamiento.

Energía de Disipación: Energía perdida en un sistema dinámico debido a efectos como fricción o resistencia eléctrica, contribuyendo al amortiguamiento.

Frecuencia de Resonancia: Frecuencia en la cual un sistema oscilante responde con máxima amplitud debido a la coincidencia entre la frecuencia natural del sistema y la frecuencia externa aplicada.

Memoria Persistente: Característica de ciertos sistemas dinámicos que depende del historial completo de estados pasados para determinar su comportamiento actual.

Método de Euler-Lagrange: Técnica para derivar ecuaciones diferenciales a partir de funciones que describen energías de sistemas físicos.

Método de Integración Implícito: Algoritmo numérico que calcula soluciones de ecuaciones diferenciales considerando iterativamente valores dependientes de los estados futuros del sistema.

Método de Producto Implícito: Algoritmo numérico para resolver ecuaciones diferenciales, especialmente útil en sistemas fraccionarios.

Método de Runge-Kutta: Método numérico iterativo para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, aplicable en cálculo entero y fraccionario.

Método Numérico de Garrappa: Algoritmo desarrollado por Roberto Garrappa para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias con alta precisión, basado en integración de producto implícito.

Micrófono Capacitivo: Dispositivo electromecánico que convierte variaciones de presión sonora en señales eléctricas mediante cambios en la capacitancia entre sus placas paralelas.

Operador de Caputo: Definición de derivada fraccionaria que se enfoca en calcular derivadas no enteras utilizando condiciones iniciales expresadas en términos de derivadas clásicas, facilitando su aplicación en sistemas físicos y dinámicos.

Operador de Riemann-Liouville: Definición de derivada fraccionaria que utiliza integrales definidas, siendo útil para sistemas con dependencias históricas de estado.

Transformada Rápida de Fourier (FFT): Herramienta matemática que permite calcular transformadas de Fourier de manera eficiente, utilizada para analizar señales en el dominio de la frecuencia.

Viscoelasticidad: Propiedad de los materiales que presentan una combinación de comportamiento viscoso (flujo) y elástico (deformación reversible) bajo una carga aplicada.

Zeta (ζ): Parámetro que representa el coeficiente de amortiguamiento relativo en sistemas dinámicos, influenciando su respuesta oscilatoria.

Resumen

Título: Desarrollo de Modelos Matemáticos de Orden Fraccionario Para la Descripción de la Dinámica de Sistemas Electromecánicos

Autor: Andrés F. Perdomo Morales, Nicolas B. Malagón **

Palabras Clave: Cálculo fraccionario, definición de Caputo, integración de producto implícito, ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, modelado de sistemas dinámicos

Descripción: Durante mucho tiempo, el modelado de sistemas mecánicos, eléctricos y electromecánicos ha sido fundamental para anticipar con precisión el comportamiento dinámico de estos sistemas. Aunque los modelos convencionales, basados en ecuaciones diferenciales de orden entero, son ampliamente utilizados para predecir su dinámica, presentan limitaciones al intentar capturar comportamientos no lineales y dinámicas con efectos de memoria o viscoelasticidad. Este trabajo propone la creación de modelos más precisos para describir la dinámica de sistemas electromecánicos complejos mediante el uso de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. En particular, se explora el uso del cálculo fraccionario, aplicando la definición de Caputo, para modelar de manera detallada un circuito RLC y un micrófono capacitivo. Este enfoque permite representar con mayor fidelidad las propiedades dinámicas de estos sistemas. La relevancia de este estudio radica en mejorar la precisión y el realismo de los modelos mediante un método numérico de integración de producto implícito de tipo rectangular de primer orden, lo cual reduce las limitaciones y errores en las predicciones observadas en los modelos convencionales.

*Trabajo de grado

** Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. Programa académico. Director: Carlos Rodrigo Correa Cely. PhD. Ingeniería Química

Abstract

Title: Development of Fractional Order Mathematical Models for the Description of Electromechanical System Dynamics*

Author(s): Andrés F. Perdomo, Nicolas B. Malagón¹

Key Words: Fractional calculus, Caputo definition, implicit product integration, fractional-order differential equations, dynamic systems modeling.

Description: For a long time, the modeling of mechanical, electrical, and electromechanical systems has been essential for accurately predicting their dynamic behavior. While conventional models based on integer-order differential equations are widely used for this purpose, they face limitations in capturing nonlinear behaviors, memory effects, and viscoelasticity. This project aims to develop more accurate models to describe the dynamics of complex electromechanical systems by employing fractional-order differential equations. Specifically, fractional calculus, using the Caputo definition, is applied to model an RLC circuit and a capacitive microphone in detail. This approach enables a more faithful representation of the dynamic properties of these systems. The significance of this study lies in enhancing the accuracy and realism of these models through a first-order implicit rectangular product integration method, which mitigates the limitations and prediction errors commonly observed in conventional models.

* Degree Work.

¹Faculty of Physical and Mechanical Engineering. Electric, Electronic and Telecommunications School. Director. Carlos Rodrigo Correa Cely. PhD. Chemical Engineering.

Introducción

El estudio de los comportamientos dinámicos de diferentes sistemas presentes en diversas áreas de la ingeniería es de vital importancia para la comprensión de su comportamiento ante diferentes estímulos. El modelado matemático que se realiza a estos sistemas debe captar con precisión sus dinámicas complejas como su amortiguamiento. Sin embargo, el modelado hecho a partir del cálculo entero puede presentar limitaciones durante su solución general, al no considerar ordenes fraccionarios desprecia la memoria matemática al ser inexistente en este tipo de cálculo, este problema se ha abordado en el pasado haciendo uso del cálculo fraccionario, usando la definición de Caputo y el método numérico ABC que también es fraccional (Baleanu et al., 2019), esto debido a que en el cálculo fraccionario si hay presente una memoria matemática implícita en la propia definición. En este proyecto de grado se hace uso del método de Euler-Lagrange para modelar el sistema del micrófono capacitivo, incluyendo el adimensionamiento de todas las variables presentes en las ecuaciones obtenidas, esto debido a que matemáticamente no se tiene una interpretación física de las unidades de orden fraccional. Los sistemas a modelar son dos, el primero es un circuito RLC ideal que es netamente de naturaleza eléctrica y el segundo es un micrófono capacitivo que posee dos naturalezas, la eléctrica y la mecánica, esto debido al movimiento presentado en las placas del capacitor, estos dos modelos se abordan teóricamente tanto con el cálculo entero como el fraccionario, iniciando con un modelado matemático, solución y simulación, haciendo uso del software MATLAB y del método numérico desarrollado por (Garrappa R., 2018), la particularidad de la definición fraccional de Caputo es que nos permite trabajar con condiciones iniciales de valor entero, caso contrario a la mayoría de las definiciones de derivada fraccionaria existentes en las cuales se hace necesario poseer condiciones iniciales fraccionarias para

obtener su solución, es por esta razón que la hemos seleccionado, además también nos permite hacer una comparativa con los resultados obtenidos en (Baleanu et al., 2019).

1. Objetivos

1.1. Objetivo General

1.1.1. Desarrollar y resolver modelos de sistemas dinámicos electromecánicos basados en el cálculo fraccionario, utilizando algoritmos numéricos con el apoyo del software MATLAB

1.2. Objetivos Específicos

1.2.1. Diseñar un prototipo del sistema del micrófono capacitivo que será sometido a un proceso de modelado utilizando tanto el cálculo convencional como el cálculo fraccionario para su análisis

1.2.2. Implementar la definición de derivada fraccionaria de Caputo, así como el método numérico desarrollado por Roberto Garrappa, en el análisis del circuito RLC y el sistema electromecánico correspondiente al micrófono capacitivo

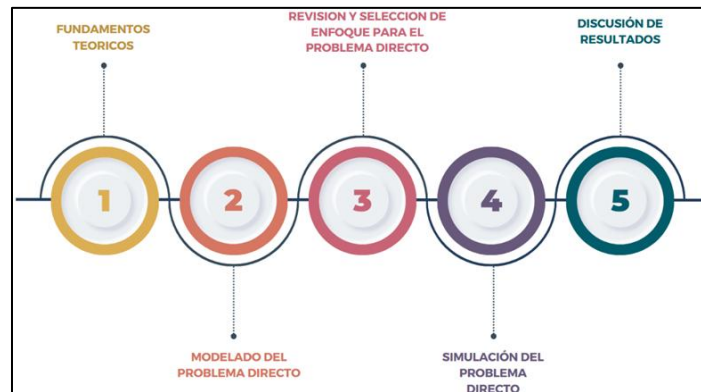
1.2.3. Realizar un análisis comparativo de los resultados obtenidos a través del modelado convencional y el modelado fraccionario en nuestro sistema electromecánico

2. Metodología

La metodología propuesta para el desarrollo del presente proyecto consiste en cinco etapas las cuales están descritas en la **Figura 1**

Figura 1

Etapas del desarrollo metodológico



Nota. Todas las imágenes de este documento se pueden ver en mejor calidad en el siguiente [enlace](#).

2.1. Descripción Metodológica

Como anteriormente se mencionó, las cinco etapas propuestas para el desarrollo de este proyecto de investigación fueron necesarias para abordar de manera ordenada, clara y concisa el problema planteado, ya que este requería un análisis profundo de varios conceptos teóricos y herramientas computacionales para su solución definitiva. Cada etapa, desde el relativo conceptual hasta la implementación del algoritmo de resolución numérica fueron diseñadas con el objetivo de lograr la máxima comprensión en la captación del fenómeno de memoria persistentes en nuestro sistema eléctrico y electromecánico.

3. Fundamentos Teóricos

En esta sección se presentan y analizan los conceptos teóricos que sustentan el desarrollo del presente proyecto. Dichos fundamentos son esenciales para comprender las dinámicas eléctricas y mecánicas presentes en los modelos analizados. Se el método de modelado de sistemas dinámico de Euler-Lagrange, indispensable para describir el comportamiento de los circuitos analizados, también se presenta la definición de derivada e integral del cálculo entero, necesarias para comprender las ecuaciones que representan matemáticamente las interacciones en sistemas eléctricos y mecánicos, finalmente, se introduce el cálculo fraccionario, en específico la definición de Caputo, que permite modelar sistemas haciendo uso de la memoria y efectos de herencia propios del cálculo fraccional, proporcionando una herramienta versátil y precisa para la descripción y análisis de sistemas reales en este caso el micrófono capacitivo.

3.1. Conceptos Previos

3.1.1. Derivada

La derivada de una función en un punto mide la tasa de cambio instantáneo de la función respecto a su variable independiente. Formalmente, se define como el límite del cociente incremental cuando el incremento tiende a cero, lo que permite determinar la pendiente de la curva en ese punto. (Stewart, 2015)

3.1.2. Integral

La integral de una función representa la acumulación de cantidades, interpretándose en el caso de funciones continuas como el área bajo la curva en un intervalo específico. La integral definida suma de manera infinitesimal los valores de la función, constituyendo el proceso inverso a la derivación. (Apostol, 2001)

3.1.3. Cálculo Fraccionario

El cálculo fraccionario extiende los conceptos clásicos de derivación e integración a órdenes no enteros (fraccionarios). Esto permite modelar procesos que exhiben comportamientos de memoria y herencia, lo que resulta útil en la descripción de sistemas dinámicos complejos donde los modelos de orden entero no son suficientes. (Podlubny, 1999)

3.1.4. Capacitancia

La capacitancia es la propiedad de un sistema eléctrico que determina su capacidad para almacenar carga. Se define como la razón entre la carga eléctrica almacenada y la diferencia de potencial aplicada, y depende de la geometría del sistema y del medio dieléctrico entre los conductores. (Serway & Jewett, 2014)

3.1.5. Micrófono Capacitivo

Un micrófono capacitivo es un dispositivo electromecánico que convierte las variaciones de presión sonora en señales eléctricas. Su funcionamiento se basa en la variación de la capacitancia entre dos placas –una fija y otra móvil (o membrana)–, donde el movimiento de la membrana provocado por las ondas sonoras altera la distancia entre las placas y, por ende, la capacitancia del sistema. (Ballou, 2015)

3.1.6. Sistemas Dinámicos

Los sistemas dinámicos son aquellos cuyo estado evoluciona en el tiempo de acuerdo con un conjunto de reglas o leyes, habitualmente expresadas mediante ecuaciones diferenciales. Estos sistemas permiten modelar y analizar fenómenos en los que el tiempo es un factor esencial, abarcando campos como la física, la biología, la economía, entre otros. (Strogatz, 2015)

3.1.7. Modelo de Sistemas Acoplados

El modelo de sistemas acoplados describe la interacción simultánea entre dos o más subsistemas que se influyen mutuamente. En el contexto de un micrófono capacitivo, se estudia el acoplamiento entre el sistema mecánico (movimiento de la membrana) y el sistema eléctrico

(variación de la capacitancia), modelándose mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales interrelacionadas. (Meirovitch, 2001)

3.1.8. Ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange proporcionan una formulación de la mecánica clásica basada en el principio de mínima acción. A partir de la función lagrangiana (definida como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial), estas ecuaciones permiten derivar las ecuaciones de movimiento para sistemas con o sin restricciones, facilitando la descripción de sistemas complejos. (Goldstein, Poole, & Safko, 2002)

3.1.9. MATLAB y Resolución Numérica

MATLAB es un entorno de programación y un lenguaje de alto nivel utilizado ampliamente en el ámbito de la ingeniería y la ciencia para la resolución numérica de problemas matemáticos. Este entorno facilita la simulación y la solución de sistemas de ecuaciones, incluidas las ecuaciones diferenciales de orden entero y fraccionario, mediante una gran variedad de funciones y herramientas especializadas. (Attaway, 2013).

4. Problema Directo

En este capítulo se presenta el proceso de modelado y simulación del comportamiento dinámico del circuito RLC y del micrófono capacitivo. El análisis comienza con una revisión de dos apartados principales: en el primero, se presentan las ecuaciones diferenciales clásicas de segundo orden que modelan ambos sistemas, obtenidas mediante el método de Euler-Lagrange. Estas ecuaciones serán posteriormente extendidas y reformuladas en términos de sus equivalentes adimensionales, proporcionando una representación más general y adecuada para su análisis gráfico. En el segundo apartado, se aborda la definición formal del cálculo fraccionario según la formulación de Caputo, integrando este operador en las ecuaciones diferenciales previamente adimensionadas de ambos sistemas dinámicos. Esto permitirá destacar la

relevancia del cálculo fraccionario en el modelado y análisis de estos sistemas. Finalmente, se llevará a cabo la solución de las ecuaciones diferenciales de cada modelo mediante un método numérico de integración de producto implícito, específicamente de tipo rectangular de primer orden usando el algoritmo de Roberto Garrapa. Este procedimiento permitirá comparar gráficamente, en un contexto sin unidades, la resolución de las ecuaciones diferenciales para ambos sistemas bajo el enfoque clásico de cálculo entero y el enfoque de cálculo fraccionario. Con ello, se espera resaltar las diferencias y beneficios del uso del cálculo fraccionario en el modelado de sistemas dinámicos.

5. Solución del Problema

5.1. Ecuaciones

Para realizar un estudio matemático riguroso, se optó por un análisis dinámico basado en términos de la energía asociadas a los sistemas dinámicos en estudio. Este enfoque se fundamenta en el uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange, un método robusto que permite derivar las ecuaciones de movimiento mediante la diferencia entre las energías cinética y potencial del sistema. La aplicación de este método no solo garantiza una descripción precisa del comportamiento dinámico, sino que también facilita el modelado tanto del circuito RLC como del micrófono capacitivo, sentando las bases para su posterior análisis y simulación. Para usar Euler-Lagrange, es necesario definir la coordenada generalizada del sistema. En este caso, la carga q se considera la coordenada generalizada para el circuito RLC, mientras que, para el micrófono capacitivo, las coordenadas generalizadas están dadas por q y x , ya que describen completamente el estado dinámico del circuito. A partir de esta elección, se establecen las expresiones para la energía cinética, la energía potencial y la disipación de energía, las cuales permiten construir la ecuación de Lagrange para el sistema

$$K = \frac{1}{2} L \dot{q}^2$$

(1)

$$U = \frac{1}{2C} q^2 \quad (2)$$

$$D = \frac{1}{2} R \dot{q}^2 \quad (3)$$

Para formular el modelo utilizando el formalismo de Euler-Lagrange, es necesario definir la coordenada generalizada del sistema. En este caso, la carga q se considera la coordenada generalizada, ya que describe completamente el estado dinámico del circuito. A partir de esta elección, se establecen las expresiones para la energía cinética, la energía potencial y la disipación de energía, las cuales permiten construir la ecuación de Lagrange para el sistema.

Posteriormente, tras determinar las expresiones correspondientes a la energía cinética, la energía potencial y las pérdidas o disipaciones de energía presentes en el circuito RLC, se procede al cálculo de la función lagrangiana del sistema. Este procedimiento permite formular una representación matemática del modelo. A partir de la función lagrangiana obtenida, se deriva la siguiente ecuación diferencial que describe el comportamiento del circuito:

$$L_c = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 - \frac{1}{2C} q^2 \quad (4)$$

Finalmente, los términos obtenidos se sustituyen en la ecuación (5), a la correspondiente ecuación de Lagrange, para formular la ecuación diferencial completa que describe el comportamiento dinámico del sistema.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_c}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L_c}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = V \quad (5)$$

Obteniendo así el primer modelo dinámico clásico del circuito RLC.

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = V \quad (6)$$

De esta manera, se obtiene una ecuación clásica que conserva su interpretación física. En esta ecuación, el término dependiente es la carga $q(t)$, mientras que la capacitancia está representada por la constante C y la tensión por la constante V . Para proceder con el adimensionalización de la ecuación (6), se realizó una serie de transformaciones algebraicas con el objetivo de eliminar las unidades físicas y obtener un sistema sin dimensiones. Este procedimiento permite identificar parámetros característicos del sistema, facilitar la comparación con otros modelos y preparar la ecuación diferencial para su formulación en términos del operador de Caputo, asegurando coherencia en el análisis de dinámicas fraccionarias:

$$\tilde{q} = \frac{q}{q_o}; \quad \tilde{V} = \frac{V}{V_o}; \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_o} \quad (7)$$

Utilizando los tres arreglos algebraicos presentados se logra finalmente adimensionar el sistema dinámico del circuito RLC. Este proceso permite obtener una representación matemática sin unidades físicas, facilitando su análisis para una mayor comprensión del procedimiento, es importante destacar los siguientes aspectos: \tilde{q} es la variable adimensional asociada a la carga; \tilde{V} , a la tensión adimensional. q_o y V_o representan la carga característica o inicial y la tensión característica o inicial respectivamente. Finalmente, \tilde{t} y t_o que corresponden a la variables adimensional y característico o inicial del tiempo.

Al utilizar las magnitudes características $t_o = \sqrt{LC}$ y $W_o = 1/\sqrt{LC}$, se obtiene la forma adimensional de la ecuación diferencial de segundo orden presentada en la ecuación (8). Este paso transforma la ecuación clásica en un modelo adimensional, facilitando su análisis y preparación para la inclusión del operador de Caputo.

$$\frac{d^2\tilde{q}}{d\tilde{t}^2} + 2\zeta \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}} + \tilde{q} = \tilde{V} \quad (8)$$

$$\ddot{\tilde{q}} + 2\zeta\dot{\tilde{q}} + \tilde{q} = \tilde{V}$$

De esta manera, se obtiene la ecuación diferencial convencional del circuito RLC en su forma adimensional, donde el coeficiente de amortiguamiento se expresa como $\zeta = R\sqrt{C/L}$.

Hasta este punto, se ha revisado detalladamente la metodología aplicada para derivar tanto la ecuación diferencial clásica (sin adimensionar) como su forma adimensional para nuestro primer modelo dinámico. Este mismo enfoque se aplica al modelado del micrófono capacitivo. En el caso del micrófono capacitivo, se utiliza nuevamente el método de Euler- Lagrange para obtener la ecuación dinámica base. Posteriormente, se lleva a cabo el proceso de adimensionar empleando variables adimensionales como herramienta para realizar los arreglos algebraicos necesarios y derivar la ecuación final en su forma adimensional. A continuación, se presentan los pasos específicos y los procesos utilizados para la obtención de las ecuaciones del micrófono capacitivo.

Al realizar el análisis de energías presentes en el circuito capacitivo obtenemos lo siguiente:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x} + \frac{1}{2}L\dot{q} \quad (9)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2\epsilon A}(x_0 - x)q^2 \quad (10)$$

$$D = \frac{1}{2}B\dot{x}^2 + \frac{1}{2}R\dot{q}^2 \quad (11)$$

De las ecuaciones obtenidas, se puede observar que las características mecánicas del sistema están reflejadas en cada una de ellas. En particular, al examinar la ecuación de la energía potencial, el término $(1/2\varepsilon A)(x_o - x)q^2$ representa la energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor, donde $x_o - x$ corresponde a la variación en la distancia entre las placas del capacitor. Este término refleja cómo la distancia entre las placas influye en la capacitancia y, por ende, en la cantidad de carga q almacenada en el sistema. La carga se ve afectada por los movimientos de las placas, generando una interacción entre las fuerzas eléctricas y mecánicas. Es importante destacar que la variación en la distancia entre las placas altera el sistema, dado que introduce una retroalimentación entre los aspectos eléctricos y mecánicos, realizando la resta de energía cinética y potencial obtenemos el lagrangiano L_c

$$L_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2\varepsilon A}(x_o - x)q^2 \quad (12)$$

Finalmente, se procede a aplicar el método descrito en la ecuación (4), pero en este caso, adaptado para el sistema de ecuaciones diferenciales que describe tanto el análisis mecánico como el eléctrico del modelo. Como resultado, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_c}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L_c}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = V \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_c}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L_c}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = f \end{cases} \quad (13)$$

Llevando a cabo las derivadas enteras y parciales se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{(x_o - x)}{\varepsilon A}q = V \\ m\ddot{x} + B\dot{x} + kx - \frac{q^2}{2\varepsilon A} = -f \end{cases} \quad (14)$$

De esta manera, se ha obtenido el sistema de ecuaciones diferenciales en su forma convencional, es decir, de orden entero y sin adimensionar, empleando las ecuaciones de Euler-

Lagrange. Como se mencionó anteriormente, este sistema de ecuaciones diferenciales refleja las dinámicas eléctricas y mecánicas del modelo. Por esta razón, el proceso de adimensionar resulta más complejo, ya que las variables adimensionales y características propuestas deben mantener una correlación adecuada entre las variables dependientes $q(t)$ y $x(t)$. Para lograr adimensionar el sistema de manera completa y consistente, se proponen las siguientes variables adimensionales:

$$\tilde{q} = \frac{t_o^2}{q_o} \ddot{q}; \quad \tilde{q} = \frac{t_o}{q_o} \dot{q}; \quad \tilde{q} = \frac{q}{q_o}; \quad q_o = V_o \frac{\epsilon A}{x_o - x}; \quad \tilde{V} = \frac{V}{V_o} \quad (15)$$

La primera ecuación del sistema adimensional corresponde a la parte mecánica, la cual incluye principalmente los términos asociados a la masa, el amortiguamiento viscoso, la constante de elasticidad y la fuerza ejercida sobre el sistema. En esta ecuación, la variable dependiente es el desplazamiento $x(t)$, que describe la posición relativa de las placas del capacitor en función del tiempo adimensional. Tras realizar las operaciones y modificaciones algebraicas necesarias para adimensionar el sistema, se obtiene finalmente la siguiente ecuación:

$$\tilde{\ddot{x}} + B \frac{1}{k \sqrt{\frac{m}{k}}} \tilde{\dot{x}} + \tilde{x} = -\tilde{f} \quad (16)$$

Usando propiedades de radicales podemos simplificar la ecuación (16) al ingresar la constante k a la raíz cuadrada.

$$\tilde{\ddot{x}} + \frac{B}{\sqrt{mk}} \tilde{\dot{x}} + \tilde{x} = -\tilde{f} \quad (17)$$

Ahora hemos obtenido la ecuación diferencial en su forma adimensional. Además, se observa que $\zeta_m = (1/2B)\sqrt{mk}$ donde ζ_m representa la constante de amortiguamiento para el sistema mecánico, esto resulta en la siguiente ecuación.

$$\ddot{\tilde{x}} + \frac{1}{2\zeta_m}\dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = -\tilde{f} \quad (18)$$

Para culminar el adimensionamiento del sistema se aplica la misma mecánica para eliminar las unidades a la ecuación que modela la parte eléctrica del micrófono capacitivo. Como anteriormente se había calculado un ζ_m esto quiere decir que para la parte eléctrica se obtendrá un ζ_e correspondiente.

$$\ddot{\tilde{q}} + 2\zeta_e\dot{\tilde{q}} + \tilde{q} = \tilde{V} \quad (19)$$

donde $\zeta_e = (R/2)\sqrt{\varepsilon A/L(x_0 - x)}$, esto es posible gracias a la analogía fuerza-torque voltaje (Giraldo Buitrago & Giraldo Suárez, 2009, p. 30) que existe, pudiendo cambiar la naturaleza de las ecuaciones por medio de unas relaciones bien definidas entre la resistencia, la inductancia y la capacitancia, con respecto a la masa, la constante del resorte y el coeficiente de amortiguamiento viscoso, las cuales son, $R = 1/B$, $L = 1/k$, $C = m$.

Con estas últimas relaciones podemos modificar las ecuaciones presentadas en (14) con la finalidad de adimensionar de manera correcta las ecuaciones dinámicas del micrófono capacitivo, obteniendo las siguientes ecuaciones.

$$t_0 = \sqrt{m/k} \quad (20)$$

$$q_0 = \frac{A\varepsilon}{x_0 - x}V_0 \quad (21)$$

$$\zeta = \sqrt{mk}/2B \quad (22)$$

Al incluir la ecuaciones de la (20) a la (22) en la ecuación (14), se obtiene la ecuación (23), que deriva en la ecuación (19) con un valor de ζ dado por la ecuación (22).

$$\ddot{\tilde{q}} + \frac{\sqrt{mk}}{B}\dot{\tilde{q}} + \tilde{q} = \tilde{V} \quad (23)$$

El modelo completo del micrófono capacitivo se presenta en la ecuación (25), donde se aprecian las dos ecuaciones que describen el sistema:

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{q}} + 2\zeta_e\dot{\tilde{q}} + \tilde{q} = \tilde{V} \\ \ddot{\tilde{x}} + \frac{1}{2\zeta_m}\dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = -\tilde{f} \end{cases} \quad (24)$$

5.2. Modelado del Problema

5.2.1. Operadores fraccionarios

El cálculo fraccionario generaliza el cálculo diferencial al considerar órdenes de derivada no enteros. Esta idea amplió significativamente el campo de las matemáticas, aunque su desarrollo formal se consolidó mucho tiempo después. Actualmente, se reconoce como un enfoque valioso para describir procesos con memoria y modelar sistemas complejos en diversas disciplinas.

Existen varias definiciones de la derivada fraccionaria, siendo las más utilizadas las de Riemann-Liouville y Caputo, las cuales abordaremos en este texto, estas dos aproximaciones son ampliamente utilizadas debido a sus características específicas y adaptabilidad en diferentes contextos. La derivada fraccionaria según Riemann-Liouville se define como una generalización del operador diferencial clásico, que incorpora información

histórica de la función $f(t)$ mediante una integral definida en el intervalo $[a, t]$.

Matemáticamente, se expresa como:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^t (t-u)^{n-\alpha-1} f(u) du \quad (25)$$

donde $\alpha > 0$ es el orden fraccionario, $n = [\alpha]$, y $\Gamma(\cdot)$ representa la función gamma. Este enfoque tiene la ventaja de ofrecer un marco general para describir fenómenos con memoria y dependencia histórica, lo cual es esencial en ciertos modelos físicos y matemáticos. Sin embargo, presenta dificultades en la interpretación de las condiciones iniciales, ya que estas suelen estar definidas como integrales de la función, lo que puede ser menos intuitivo en aplicaciones prácticas (Podlubny, 1999); Por otro lado, la definición de Caputo reformula el concepto de derivada fraccionaria para trabajar con las derivadas clásicas de la función. Su expresión es:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-u)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(u) du \quad (26)$$

donde $(d/dx)^n f(u)$ es la derivada entera de orden n , una de las principales ventajas de esta definición es la facilidad para establecer condiciones iniciales en términos de las derivadas estándar, lo que resulta particularmente útil en problemas de sistemas dinámicos y aplicaciones en ingeniería (Garrappa, 2020). Como este caso en el cual estamos desarrollando un modelo dinámico de un circuito RLC y un micrófono capacitivo, es por este motivo que hemos optado por el operador de Caputo en lugar del operador de Riemann-Liouville.

5.2.2. Inclusión operador fraccionario

Para el modelo del circuito RLC se toma la ecuación que modela su comportamiento y se modifica el operador de derivada diferencial por el de derivada fraccionaria de Caputo, estableciendo los límites del orden de las derivadas fraccionarias de la siguiente manera:

$${}^C D_k^{\alpha_2} \tilde{q} + 2\zeta ({}^C D_k^{\alpha_1} \tilde{q}) + \tilde{q} = \tilde{v} \quad (27)$$

El rango de valores que pueden tener tanto α_1 como α_2 está definido por el orden de la derivada entera, entonces:

$$0 < \alpha_1 < 1 \quad (28)$$

$$1 < \alpha_2 < 2$$

Este mismo procedimiento se aplica al modelo del micrófono capacitivo, obteniendo las siguientes ecuaciones:

$${}^C D_k^{\alpha_2} \tilde{x} + \frac{1}{2\zeta} ({}^C D_k^{\alpha_1} \tilde{x}) + \tilde{x} = -\tilde{f} \quad (29)$$

$${}^C D_k^{\alpha_2} \tilde{q} + 2\zeta ({}^C D_k^{\alpha_1} \tilde{q}) + \tilde{q} = \tilde{v} \quad (30)$$

El orden para el sistema de ecuaciones (29) y (30) que modelan el micrófono capacitivo también se rige por los límites de la ecuación (28).

6. Resultados

Esta sección tiene como objetivo presentar de forma clara y concisa el procedimiento llevado a cabo para realizar las simulaciones de las ecuaciones diferenciales de manera convencional y fraccionaria. Para ello, se varió el orden de la derivada utilizando un método numérico de integración de producto implícito de tipo rectangular de primer orden, el cual fue mencionado previamente en la introducción de este documento. Este método numérico está implementado en el algoritmo matemático desarrollado por Roberto Garrappa, que incluye otros métodos numéricos dentro de su sintaxis. Sin embargo, el método de producto implícito de primer orden es particularmente relevante debido a que la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias mediante métodos numéricos representa un mayor uso de la capacidad de

cómputo. La necesidad de una alta capacidad de cómputo se debe a que, para observar los efectos de memoria persistente en sistemas reales que dependen de su historia pasada, es necesario variar el orden de la ecuación diferencial en un rango que excluya órdenes enteros. Este enfoque asegura que el algoritmo sea preciso y adecuado para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias, manteniendo un costo computacional de $N \log N^2$.

Esto se logra gracias a la aplicación de la transformada rápida de Fourier (**FFT**), que reduce el costo computacional común de N^2 , donde N representa los puntos del vector tiempo al evaluar las soluciones. El proceso de resolución comenzará con un apartado dedicado a las ecuaciones diferenciales adimensionales del circuito RLC y del micrófono capacitivo. En esta etapa, dichas ecuaciones se resolverán mediante cálculo de orden entero, extrayendo la función solución correspondiente a cada ejemplo. Posteriormente, se realizará un análisis gráfico que facilite la comprensión de los efectos de memoria no capturados al utilizar cálculo convencional.

Cabe destacar que el trabajo se desarrollará utilizando datos numéricos para simplificar la interpretación de los resultados gráficos. En el siguiente apartado, se abordarán las ecuaciones diferenciales adimensionales con órdenes fraccionarios, utilizando la definición de Caputo previamente implementada en el algoritmo de Roberto Garrappa. Además, se desarrollará un algoritmo computacional complementario que permitirá capturar el cambio en el gráfico de la derivada puntual en un momento específico, lo cual contribuirá a visualizar de manera más clara el fenómeno de memoria. Este procedimiento se aplicará tanto a las soluciones obtenidas mediante cálculo convencional como a las generadas por la resolución fraccionaria.

6.1. Simulación del Modelo Convencional y Fraccionario Circuito RLC

Recordando la ecuación que modela el circuito RLC de forma adimensional, presentada en la ecuación (8), donde se define un ζ (zeta) de la forma específica:

$$\zeta = R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (31)$$

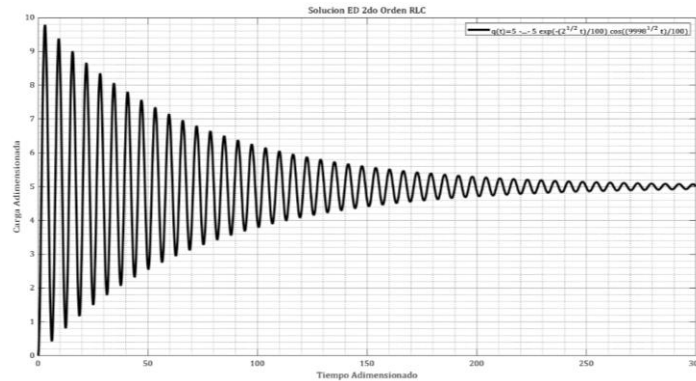
Para calcular ζ se tomaron los valores $R = 100\Omega$, $C = 20pF$ y $L = 1mH$. Con estos parámetros, se obtuvo $\zeta = 3.1622$. A partir de este resultado, se define la siguiente ecuación diferencial, que será utilizada para la simulación de forma convencional con el software MATLAB:

$$\ddot{\tilde{q}} + 6.3245\dot{\tilde{q}} + \tilde{q} = \tilde{V} \quad (32)$$

La primera simulación se realiza con $\tilde{V} = 5$ en su forma adimensional y con las condiciones iniciales $\tilde{q}(\tilde{t}) = 0$ y $(d\tilde{q}(\tilde{t})/d\tilde{t}) = 0$. De esta manera, se obtiene la solución analítica $\tilde{q}(\tilde{t})$, que describe el comportamiento de la carga adimensional a lo largo del tiempo adimensional.

$$\tilde{q}(\tilde{t}) = e^{-\tilde{t}(\sqrt{10}+3)} \left(\frac{5\sqrt{10}}{6} - \frac{5}{2} \right) - e^{-\tilde{t}(\sqrt{10}-3)} \left(\frac{5\sqrt{10}}{6} + \frac{5}{2} \right) + 5 \quad (33)$$

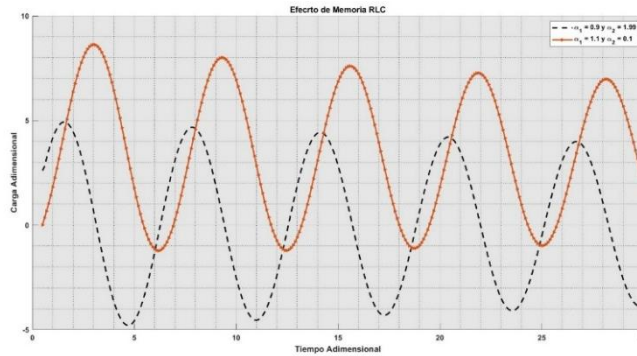
La ecuación presentada en (33) representa, como se mencionó anteriormente, la solución analítica del circuito RLC en su forma adimensional. Al graficar esta solución, se obtiene una representación que muestra únicamente datos numéricos sin unidades físicas, ya que al no tener unidades permite centrarse en el comportamiento general del sistema al visualizar solamente datos.

Figura 2*Solución ED 2do Orden RLC*

La **Figura 2** muestra el gráfico de la solución de la ecuación (33). En ella, se verifica que las condiciones iniciales, $\tilde{q}(\tilde{t}) = 0$, se cumplen adecuadamente. Hasta este punto, se ha resuelto una ecuación diferencial convencional. Sin embargo, no es posible observar los efectos de memoria presentes en la evolución del circuito, ya que el cálculo diferencial clásico solo considera el estado actual y sus derivadas de orden entero, sin incorporar la influencia del historial del sistema, el efecto de memoria es una característica inherente de los sistemas dinámicos modelados con ecuaciones diferenciales fraccionarias. Se debe a la naturaleza no local de las derivadas fraccionarias, las cuales incorporan información de estados pasados en la evolución presente del sistema.

En contraste, cuando se utilizan ecuaciones diferenciales de orden entero mediante métodos convencionales, este efecto de memoria no se manifiesta, ya que la evolución del sistema se basa únicamente en valores instantáneos de las variables y sus derivadas en puntos específicos. Por lo tanto, el cálculo diferencial clásico no permite captar la influencia de estados previos en la dinámica del circuito.

Figura 3
Efecto de Memoria del Circuito RLC



La **Figura 3** ilustra la simulación del fenómeno de memoria, en la cual se incluye una marca que delimita el rango donde dicho fenómeno de la memoria durante la solución debería manifestarse al variar las derivadas fraccionarias en función de un paso de evolución h . Para observar los efectos de memoria, se utiliza la ecuación (27) que es equivalente a la ecuación (32) pero adaptada mediante el operador de Caputo. De esta forma, obtenemos la siguiente expresión:

$${}^C D_k^{\alpha_2} \tilde{q} + 6.3245({}^C D_k^{\alpha_1} \tilde{q}) + \tilde{q} = \tilde{v} \quad (34)$$

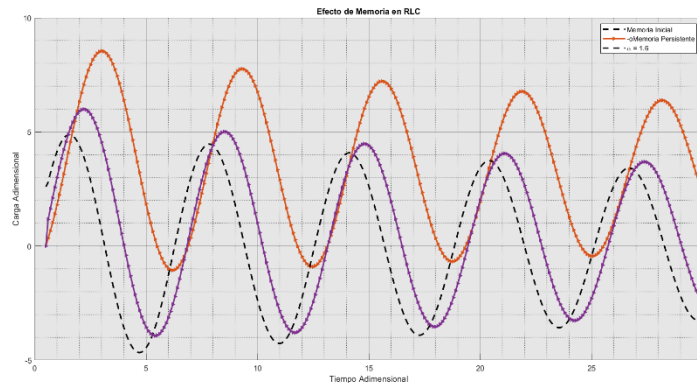
A continuación, procedemos a variar α_1 y α_2 dentro del rango adecuado, como se mencionó en el apartado de modelado del problema. Esta variación se realiza en función del paso de integración h , con el propósito de observar los efectos de memoria en el tiempo adimensional. Inicialmente, se utiliza un paso de integración $h = 0.4$, disminuyéndolo gradualmente hasta $h = 0.01$. Este proceso se aplica directamente en el método numérico general, que combina el esquema de Runge-Kutta con el método de Euler. Al disminuir el paso de integración, se incrementa la precisión en la captura de los efectos de memoria del sistema, esto debido a que durante la simulación el rango de α_1 y α_2 se desplazan en sus rangos

gradualmente. Sin embargo, es importante aclarar que, al disminuir h , o formalmente al hacer que $h \rightarrow 0$, la memoria del sistema presenta el siguiente comportamiento:

$$\mathbf{Memoria} = \lim_{h \rightarrow 0} h = \infty \quad (35)$$

en la ecuación (35) se establece que matemáticamente y no físicamente la memoria del sistema tiende a ser infinita cuando $h \rightarrow 0$. Esto provoca una saturación y un aumento significativo en el costo computacional. Por lo tanto, es crucial seleccionar un valor de h de forma empírica que sea suficientemente preciso sin comprometer la estabilidad ni la eficiencia de la resolución numérica. Para este caso el efecto de memoria se analiza utilizando un procesador Intel Core i7-9750H (6 núcleos) con una frecuencia base de 2.60 GHz y una frecuencia máxima de 4.50 GHz. Bajo estas condiciones de hardware, el comportamiento de la memoria y el costo computacional asociado se visualizan de la siguiente forma:

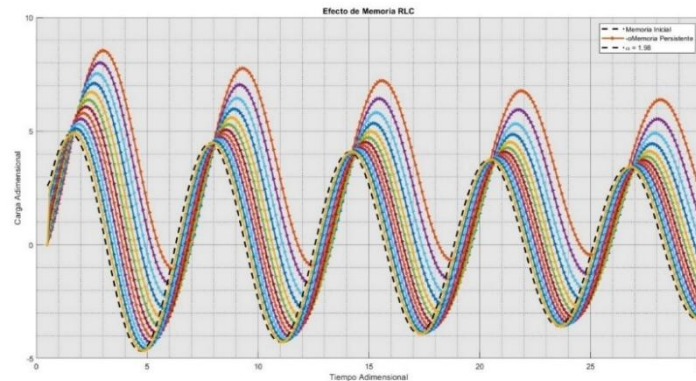
Figura 4
Efecto de Memoria Con Paso de Integración Grande del Circuito RLC



La **Figura 4** ilustra el efecto de memoria utilizando un paso de integración grande. En estas condiciones, el fenómeno de memoria no se captura correctamente, debido a que el paso de integración es un valor grande lo que afecta la precisión y la representación adecuada del comportamiento del sistema.

Figura 5

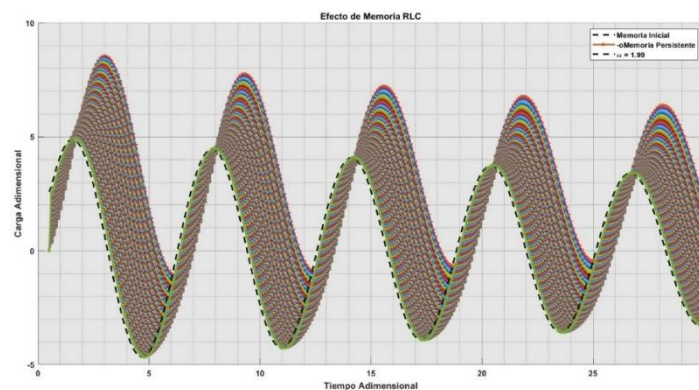
Efecto de Memoria con Paso de Integración mediano del Circuito RLC



La **Figura 5** captura de manera más precisa el fenómeno de memoria persistente presente en el circuito RLC, el cual no puede visualizarse utilizando una resolución de tipo entero. El consumo de recursos es mayor debido a la información almacenada sobre la historia del sistema a lo largo del tiempo adimensional. Esto permite calcular con precisión cada paso del proceso iterativo $i + 1$ de las soluciones. Para finalizar, se presentará una gráfica que muestra aproximadamente el **98%** de la historia capturada del sistema, lograda al utilizar un paso de integración de $h = 0.01$.

Figura 6

Efecto de Memoria con Paso de Integración Pequeño del Circuito RLC



Se ha capturado la mayoría de los fenómenos de memoria presentes en el modelo matemático. En este contexto, el orden de la derivada alcanza $\alpha_2 = 1.99$, sin llegar al valor entero de 2, mientras que el orden α_1 itera hasta 0.99.

6.2. Simulación del Modelo Convencional y Fraccionario del Micrófono Capacitivo

Para abordar la resolución del sistema correspondiente al micrófono capacitivo, retomamos el sistema de ecuaciones presentado en (24).

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{q}} + 2\zeta_e \dot{\tilde{q}} + \tilde{q} = \tilde{V} \\ \ddot{\tilde{x}} + \frac{1}{2\zeta_m} \dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = -\tilde{f} \end{cases} \quad (36)$$

En este análisis, identificamos las constantes ζ_e y ζ_m , que deben definirse. Para ello, asignamos valores generalizados y cercanos a las condiciones reales de un sistema de este tipo. Los parámetros utilizados son; $R = 100\Omega$, $C = 20pF$ y $L = 1mH$, $A = 63.62 * 10^{-6}$, $x_0 - x = 20\mu m$, $\tilde{V} = 5$, $\varepsilon = 8.854 * 10^{-12}$, $B = 0.01$, $m = 0.0005$, $k = 1$, algunas de las rutinas de simulación con variaciones en los valores se encuentran en el apartado de anexos. Para los efectos de simulación, aplicamos un pulso en la fuerza externa adimensional que ingresa al micrófono, definido como $\tilde{f} = 2.32 * 10^{-6} \delta(t - 0.01)$. Este estímulo genera un pulso en la posición 0.01 del tiempo adimensional dentro del sistema electromecánico, específicamente en la ecuación que describe la mecánica de desplazamiento. Con estos parámetros y condiciones, derivamos el sistema de ecuaciones adimensionales para su simulación mediante cálculo entero.

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{q}} + 0.0168\dot{\tilde{q}} + \tilde{q} = \tilde{5} \\ \ddot{\tilde{x}} + 0.4472\dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = -2.32 * 10^{-6} \delta(t - 0.01) \end{cases} \quad (37)$$

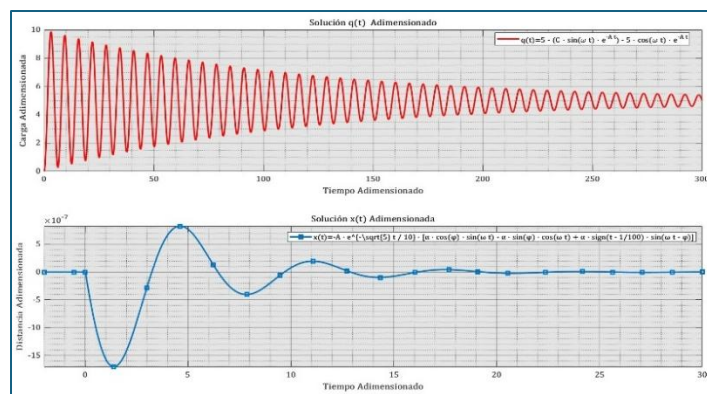
Al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente al micrófono capacitivo en MATLAB, obtenemos un vector solución y un vector tiempo, al graficarlos se extrae una función de manera analítica de la solución. Por lo tanto, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tilde{q}(\tilde{t}) &= 5 - C \sin(\omega\tilde{t})e^{-A\tilde{t}} - 5 \cos(\omega\tilde{t})e^{-A\tilde{t}} \\ \tilde{x}(\tilde{t}) &= -Ae^{-\frac{\sqrt{5}}{10}\tilde{t}} \left[\alpha \cos(\varphi) \sin(\omega\tilde{t}) \cos(\omega\tilde{t}) + \alpha \operatorname{sign}\left(\tilde{t} - \frac{1}{100}\right) \sin(\omega\tilde{t} - \varphi) \right] \end{aligned} \quad (38)$$

Las constantes cuyos valores no se han especificado previamente se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C &\approx 8.6739 * 10^{-18}; A \approx 8.3892 * 10^{-3}; \omega \approx 0.99 \\ \alpha &\approx 9.7686; A \approx 1.2210 * 10^{-7}; \omega \approx \frac{\sqrt{95}}{10}; \varphi = 9.7467 \end{aligned} \quad (39)$$

Figura 7
Solución Micrófono Capacitivo Modelo Convencional



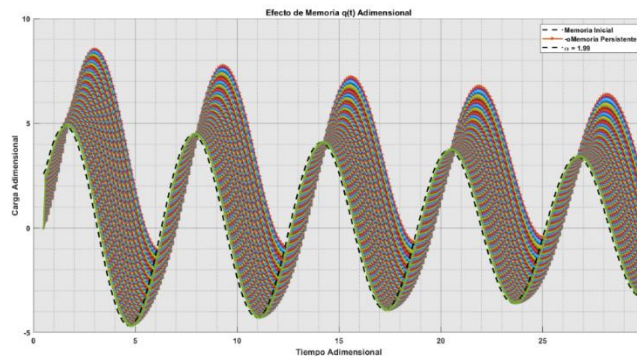
Al analizar la gráfica correspondiente a la solución de la parte mecánica $\tilde{x}(t)$ que se encuentra en la **Figura 7**, se observa que el impulso de Dirac, aplicado en el tiempo adimensional $\tilde{t} = 0.01$, actúa como fuerza externa que induce un movimiento en las placas paralelas del capacitor. Este comportamiento provoca que las placas se desplacen, reduciendo la distancia $x_0 - x$ hasta cero antes de regresar a su posición inicial. $\tilde{x} = 0$, que corresponde a una distancia de $x_0 - x = 20\mu\text{m}$ en nuestro caso. Adicionalmente, La solución del sistema de ecuaciones diferenciales es consistente con las condiciones iniciales, ya que la carga adimensional en el instante propuesto es de la misma magnitud. Posteriormente, se observa un incremento en la carga adimensional, seguido por un ajuste gradual hacia un estado estable. Este comportamiento

refleja la dinámica esperada del sistema, la cual es evidenciada en los resultados del estudio (Baleanu, D., Sajjadi, S. S., Jajarmi, A., &Asad, J.H., 2019). confirmando la validez de los resultados obtenidos.

Para analizar los efectos de memoria asociados a las naturalezas regentes del sistema dinámico, se resuelve nuevamente el sistema presentado en la ecuación(14), incorporando el operador de Caputo. En este enfoque, se utilizan los valores de ζ_m y ζ_e previamente calculados. Esto permite obtener soluciones que reflejan la memoria persistente del sistema, proporcionando una visión más completa de su dinámica.

$$\begin{aligned} & {}^C D_k^{\alpha_2} \ddot{q} + {}^C D_k^{\alpha_1} 0.0168 \dot{q} + \tilde{q} = \tilde{5} \\ & {}^C D_k^{\alpha_2} \tilde{x} + 0.4472 ({}^C D_k^{\alpha_1} \tilde{x}) + \tilde{x} = -2.32 * 10^{-6} \delta(t - 0.01) \end{aligned} \tag{40}$$

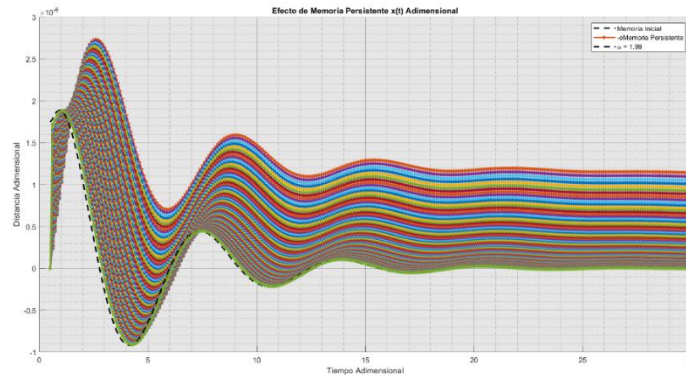
Figura 8
Efecto de Memoria Persistente en la Solución de la Carga del Micrófono Capacitivo



En la **Figura 8** muestra los efectos de memoria en la resolución numérica de la variable eléctrica $q(t)$, con un paso de integración $h = 0.01$. Se ha hecho variar tanto α_1 como α_2 dentro de sus respectivos intervalos, excluyendo valores enteros. Este sistema presenta mayor complejidad computacional porque incluye la historia del sistema para calcular la solución, correlacionándola con la dinámica mecánica.

Figura 9

Efecto de Memoria Persistente en la Solución Mecánica del Micrófono Capacitivo



De forma similar a los efectos de memoria captados en la parte eléctrica, se realiza el análisis para la parte mecánica, como se muestra en la **Figura 9**.

7. Recomendaciones

Se recomienda comparar el comportamiento observado en la simulación del modelo fraccionario del micrófono capacitivo con el comportamiento de un prototipo físico del mismo, con el fin de corroborar de una manera certera la fidelidad del comportamiento dinámico del sistema fraccionario.

Se recomienda el uso del modelado fraccionario en sistemas dinámicos con mayor complejidad, que ameriten una mayor precisión para su posterior control, para evitar un alto consumo de cómputo.

Aunque se usó el código de Roberto Garrappa, se recomienda probar otros métodos numéricos para sistemas de ecuaciones diferenciales fraccionarias, para hacer un análisis profundo en los tiempos de solución y consumo de recursos, no necesariamente desarrollados en Matlab.

Usar diferentes definiciones de derivada fraccionaria para el desarrollo de los sistemas analizados, todo encaminado a comparar resultados buscando siempre la mayor similitud con el comportamiento real de los sistemas.

8. Conclusiones

Los modelos presentados, contruidos con el operador de Caputo, tienen un comportamiento similar al convencional cuando α_1 y α_2 tienden a valores enteros. Sin embargo, los modelos fraccionarios conservan las variaciones de los órdenes no enteros, conocidas como historia pasada del sistema.

El proceso de adimensionamiento de los sistemas es una transformación importante en la construcción de modelos fraccionarios, para evitar la aparición de unidades “extrañas”, las cuales actualmente carecen de una interpretación física, y esto puede llevar a confusiones o malas interpretaciones de los resultados de estas derivadas.

El cálculo fraccionario en la resolución de ecuaciones diferenciales evidencia un alto consumo computacional. Por ello, se recomienda contar con un hardware similar o superior al mencionado en este documento para obtener resultados más precisos en menor tiempo.

El uso de un método numérico como la integración de producto implícito rectangular de primer orden combinado con el método Runge-Kutta y el método de Euler logra converger a una solución precisa dado el número de puntos en el espacio de evaluación de las soluciones históricas de un sistema dinámico.

Es primordial usar la definición de Caputo del cálculo fraccionario para un enfoque realista, ya que la resolución de ecuaciones diferenciales requiere condiciones iniciales con sentido físico, propias de sistemas dinámicos de orden entero.

Referencias

- Apostol, T. M. (2001). *Cálculo, Volumen 1: Una introducción al cálculo con álgebra y trigonometría* (2.^a ed.). Reverté.
- Attaway, S. (2013). *MATLAB: A Practical Introduction to Programming and Problem Solving* (4.^a ed.). Elsevier.
- Ballou, G. (Ed.). (2015). *Handbook for Sound Engineers* (5.^a ed.). Focal Press.
- Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. (2002). *Classical Mechanics* (3.^a ed.). Addison-Wesley.
- Meirovitch, L. (2001). *Fundamentals of Vibrations* (2.^a ed.). McGraw-Hill.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations* (Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198). Academic Press.
- Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2014). *Física para ciencias e ingeniería* (9.^a ed.). Cengage Learning.
- Strogatz, S. H. (2015). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (2.^a ed.). Westview Press.
- Stewart, J. (2015). *Cálculo: Trascendentes tempranas* (7.^a ed.). Cengage Learning.
- Rendón Roldán, J. (2018). Aplicaciones del cálculo fraccional en modelamiento y control de sistemas dinámicos electromecánicos.
- Garrappa, R. (2018). Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial. *Mathematics*, 6(2), 16. <https://doi.org/10.3390/math6020016>
- Baleanu, D., Sajjadi, S. S., Jajarmi, A., & Asad, J. H. (2019). New features of the fractional Euler-Lagrange equations for a physical system within non-singular derivative operator. *The European Physical Journal Plus*, 134(4). <https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12561-x>
- Jiménez, L. M., Cruz-Duarte, J. M., Escalante-Martínez, J. E., & Rosales-García, J. J. (2021). Analytical and experimental study for mechanical vibrations of a two-coupled spring masses system via Caputo-based derivatives. *Mathematical Methods In The Applied Sciences*. <https://doi.org/10.1002/mma.7421>
- Giraldo Buitrago, D., & Giraldo Suárez, E. (2009). *Sistemas dinámicos*. Universidad Tecnológica de Pereira.
- Albadarneh, R. B., Batiha, I., Alomari, A. K., & Tahat, N. (2021). Numerical approach for approximating the Caputo fractional-order derivative operator. *AIMS Mathematics*, 6(11), 12743-12756. <https://doi.org/10.3934/math.2021735>
- Jajarmi, A., Baleanu, D., Sajjadi, S. S., & Asad, J. H. (2019). A New Feature of the Fractional Euler-Lagrange Equations for a Coupled Oscillator Using a Nonsingular Operator Approach. *Frontiers In Physics*, 7. <https://doi.org/10.3389/fphy.2019.00196>