CONSTRUCCIÓN DE LAS RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO POR MEDIO DEL PROGRAMA MATEMÁTICO CARMETAL

JOSÉ GABRIEL RICO MÉNDEZ
ELKIN FABIÁN VAQUERO LANDINEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2009

CONSTRUCCIÓN DE LAS RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO POR MEDIO DEL PROGRAMA MATEMÁTICO CARMETAL

JOSÉ GABRIEL RICO MÉNDEZ
ELKIN FABIÁN VAQUERO LANDINEZ

Trabajo para optar el título de:
Licenciados en Matemáticas

Director de proyecto
MARTÍN EDUARDO ACOSTA GEMPELER

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2009

A mis viejitos, ZORAIDA MÉNDEZ y GABRIEL RICO que con su esfuerzo,
dedicación y confianza en mí, pude alcanzar esta meta.
"Son los pilares de mi vida"

A mis hermanos, DIDIER y CLAUDIA que siempre
estuvieron a mi lado para apoyarme.
JOSÉ GABRIEL RICO MÉNDEZ

A mi madre, FLOR LANDINEZ, quien no dudo de mis capacidades,
que con su esfuerzo, colaboración y confianza,
pude alcanzar esta meta.

A mis hermanos, LUZ, EDINSON y ANDRÉS,
por su apoyo y sus consejos que
dieron sentido a mi carrera.
"Los amo"
ELKIN FABIÁN VAQUERO LANDINEZ

AGRADECIMIENTOS

A Dios, que es el guía de nuestras vidas y sin él no habría sido posible alcanzar esta meta.

Al profesor Martín Eduardo Acosta Gempeler, nuestro director de proyecto, que con su paciencia, colaboración y enseñanza, permitió llevar a cabo este trabajo de grado.

A Carolina Gómez, que siempre me apoyó y estuvo a mi lado a lo largo de mi carrera. (José Gabriel Rico)

A nuestros familiares, compañeros y amigos que nos brindaron ayuda durante nuestra carrera universitaria.

A los estudiantes de grado noveno del colegio Roberto García Peña de Girón del año escolar 2008, que fueron indispensables en el desarrollo de este trabajo.

A Cristina Arias, que con su apoyo incondicional me dio ánimo para superar las dificultades que se presentaron en el transcurso de mi carrera. (Elkin Vaquero)

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LSTA DE ANEXOS

RESUMEN

TITULO: CONSTRUCCIÓN DE LAS RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO POR MEDIO DEL PROGRAMA MATEMÁTICO CARMETAL*.

AUTORES: JOSÉ GABRIEL RICO MÉNDEZ, ELKIN FABIÁN VAQUERO LANDINEZ**.

PALABRAS CLAVES: Altura, mediatriz, bisectriz, ortocentro, circuncentro, incentro, lugar geométrico, geometría dinámica, CarMetal.

El uso y la incorporación de las nuevas tecnologías en el sistema educativo han venido incrementando en los últimos años, siendo una herramienta importante en el proceso enseñanza-aprendizaje. Es así como hemos decidido implementarlas en nuestro trabajo de grado.

En este trabajo utilizamos el programa de geometría dinámica CarMetal, el cual permite al alumno la exploración y manipulación directa de las figuras geométricas a partir de su construcción. El propósito del proyecto es que el estudiante por medio de la construcción identifique las propiedades de las rectas y los puntos notables del triángulo, para esto se elaboraron cuatro talleres que fueron desarrollados en las instalaciones de la institución. Se realizó con estudiantes de noveno grado del colegio Roberto García Peña de Girón.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas.
Dir. Martín Eduardo Acosta Gempeler.

SUMARY

TITLE: CONSTRUCTION OF THE STRAIGHT LINES AND NOTABLE POINTS OF THE TRIANGLE BY USING THE MATHEMATICAL CARMETAL PROGRAM*.

AUTHORS: JOSÉ GABRIEL RICO MÉNDEZ, ELKIN FABIÁN VAQUERO LANDINEZ**.

KEY WORDS: Height, mediatriz, biseptriz, orthocenter, circuncenter, uncenter, geometric place, geometric dynamic, CarMetal.

The use and the incorporation of new technologies in the educational system have increased in the last years, being an important tool in the education-learning process. Therefore, we decided to implement them in our project.

In this project we use the CARMETAL program of dynamic geometry, which allows the exploration of the pupil and a direct manipulation of the geometric shapes from their construction. The objective of the project is to help students identify the properties of the straight lines and notable points of the triangle by using the construction. Thus, four workshops were elaborated and developed inside the institution. It was applied to students in nineth grade of the Roberto Garcia Peña school in Giron.

* Project
** Science faculty. Mathematics faculty, Mathematic's degree.
Director. Martin Eduardo Acosta Gempeler.

PRESENTACIÓN

El estudio de la geometría es fundamental en el área de las matemáticas, pero ¿se enseñan todos los temas que la componen? Cuando se habla de triángulos, por ejemplo, sólo se hace referencia a sus clasificaciones, semejanzas, áreas, etc. dejando a un lado la identificación de las rectas notables y sus puntos de intersección, vemos que este es uno de los tantos temas que se omiten en la enseñanza de la geometría, tal vez debido a la variedad de conceptos y al tiempo limitado para abordarlos.

Por otro lado al revisar este tema en varios libros como *Elementos de Geometría: con numerosos ejercicios y geometría del compás de Emiliano Álvarez C.; Geometría: desarrollo axiomático de Ana Berenice Guerrero G.; Elementos de geometría: una introducción de Cecilia Leguizamón de Bernal,* notamos que sólo se hace referencia a la existencia de estas rectas y a sus puntos de intersección, olvidando cada una de las propiedades y características que éstas involucran al ser trazadas.

El propósito de este proyecto es que el estudiante reconozca e identifique estas propiedades por medio del uso de la geometría dinámica bajo el programa CarMetal. Por ejemplo, que el alumno identifique por qué se deben trazar las mediatrices para hallar el centro de la circunferencia circunscrita. Los libros citados anteriormente sólo se limitan a mostrar la definición de mediatriz como la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento y enuncian el teorema: la intersección de las mediatrices del triángulo, es el centro de la circunferencia circunscrita en el triángulo. El concepto de lugar geométrico, necesario para entender por qué las mediatrices se cortan en un sólo punto y que ese punto es el centro del circuncírculo, no se trabaja en este nivel. Esta situación puede deberse a la dificultad de comprender el concepto de lugar geométrico. Las características dinámicas del software permiten la introducción intuitiva del concepto de lugar geométrico, con lo cual es posible recuperar el trabajo matemático de razonamiento y justificación de los teoremas presentados en los libros.

Esto es lo que nos incentiva a la utilización del programa, donde lo que aspiramos es que el estudiante sea el artífice de su propio conocimiento y se dé cuenta de las propiedades geométricas de las figuras que sólo con papel y lápiz no se pueden ver, dándole sentido a lo estipulado en el proyecto del MEN: *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica y Media de Colombia,* donde dice: "Estos programas tienen como principio base el estudio de los componentes fundamentales de las figuras geométricas, las relaciones entre éstos y las propiedades que presentan. A partir de la construcción de figuras geométricas se permite a los alumnos la exploración y manipulación directa y dinámica que conduce a la elaboración de conjeturas".

También nos interesan las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de cada uno de estos conceptos. En particular, se tiene una concepción errónea de lo que es altura de un triángulo; los estudiantes piensan que el triángulo sólo tiene una, la cual aparentemente es la recta vertical que sale del lado donde éste parece apoyarse, así la geometría dinámica ayudará al estudiante a darse cuenta de los errores cometidos al momento de realizar la construcción. Además que el estudiante reconozca lo importante que es el concepto de altura, ya que éste lo podrá utilizar en el momento que necesite encontrar el área de algunas figuras o el volumen de algunos sólidos.

Para el desarrollo de la propuesta se diseñaron cuatro talleres en los cuales los alumnos analizaron, exploraron y construyeron los conceptos de altura, mediatriz, bisectriz, ortocentro, circuncentro e incentro. Los talleres se desarrollaron de manera constructivista, es decir, no se elaboraron guías para las actividades planteadas, ya que las actividades se fueron implantando a través del uso del software.

Con este trabajo queremos responder a preguntas como:

-¿Qué posibilidades ofrece el software al profesor para que pueda intervenir en el proceso de aprendizaje de los estudiantes?

-¿Cómo puede contribuir el uso del software en el aprendizaje de los alumnos?

Nos basaremos en los trabajos realizados por Hernández (2004), ya que en su propuesta busca que el estudiante explore más acerca de los triángulos e identifique las líneas notables y a su vez adjudiquen un significado a los puntos de corte; y Herrera (2000), donde utiliza la geometría dinámica para la enseñanza del tema círculo y circunferencia entre otros.

1. MARCO TEÓRICO

La implementación de las nuevas tecnologías ha venido consolidándose en las distintas áreas de la educación a tal punto que se ha vuelto una herramienta importante al momento de enseñar.

En las matemáticas, el uso de software educativo, en especial el de geometría dinámica ha hecho que los estudiantes a través de la manipulación y la interacción con los objetos geométricos construyan su propio conocimiento; permitiéndoles llegar a un aprendizaje significativo, ya que el alumno con el programa fortalece los conocimientos preexistentes.

Un aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición (AUSUBEL, 1983).

También cabe resaltar que la geometría dinámica es una nueva herramienta de aprendizaje para el alumno, por lo tanto el uso del programa permite que el estudiante asimile nuevos conocimientos con los ya aprendidos. Por asimilación entendemos el proceso mediante el cual la nueva información es vinculada con aspectos relevantes y preexistentes en la estructura cognoscitiva, proceso en que se modifica la información recientemente adquirida y la estructura preexistente (AUSUBEL, 1983), es decir, el principio de asimilación se refiere a la interacción entre el nuevo material que será aprendido y la estructura cognoscitiva existente origina una reorganización de los nuevos y antiguos significados para formar una estructura cognoscitiva diferenciada, esta interacción de la información nueva con las ideas pertinentes que existen en la estructura cognitiva propician su asimilación.

La enseñanza de la geometría ofrece un interesante desarrollo hacia una nueva conceptualización de ésta, como el estudio de las propiedades invariantes de las figuras geométricas. Al permitir la posibilidad de experimentar con una especie de "materialización" de los objetos matemáticos, de sus representaciones y de sus relaciones, los estudiantes pueden vivir un tipo de experimentación matemática que otros ambientes de aprendizaje no proporcionan. Por consiguiente, es natural esperar que los estudiantes que trabajen con un programa de geometría dinámica puedan avanzar en su comprensión y conocimiento de la geometría de una manera distinta a la que seguirían si utilizan medios tradicionales. (MEN, 2004).

1.1 CONCEPTOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS

A. Definición de triángulo:

Es una figura limitada por tres segmentos unidos dos a dos, los tres segmentos que limitan un triángulo se denominan lados y los extremos de los lados vértices.

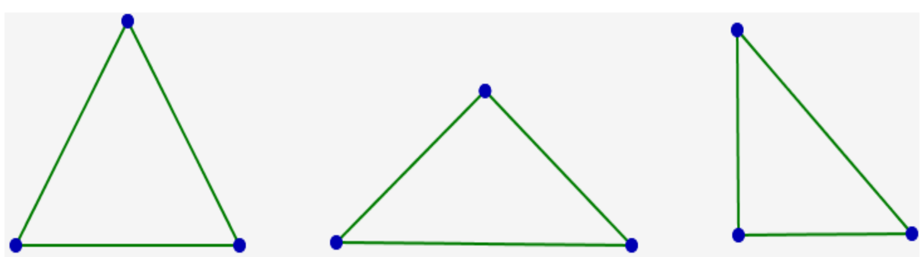

Figura 1. Triángulos

B. Clasificación de los triángulos:

Los triángulos se clasifican de acuerdo a longitud de sus lados como:

ESCALENO: Sus lados tienen longitudes diferentes.

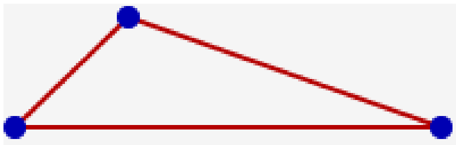

Figura 2. Triángulo escaleno

ISÓSCELES: Tiene dos lados de la misma longitud.

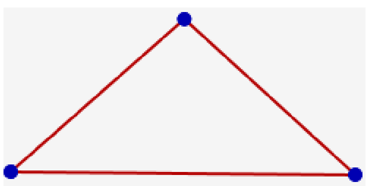

Figura 3. Triángulo isósceles

EQUILATERO: Sus tres lados tienen la misma longitud.

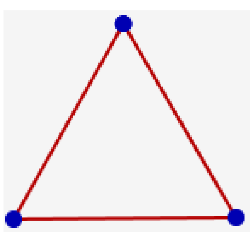

Figura 4. Triángulo equilátero

También se clasifican según sus ángulos interiores como:

ACUTÁNGULO: Todos sus ángulos son agudos.

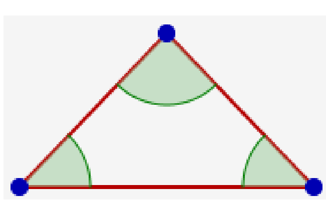

Figura 5. Triángulo acutángulo

OBTUSÁNGULO: Uno de sus ángulos es obtuso.

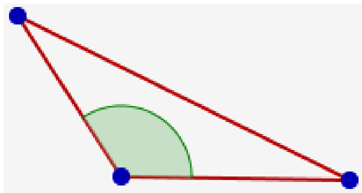

Figura 6. Triángulo obtusángulo

RECTÁNGULO: Tiene un ángulo recto.

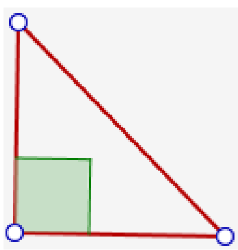

Figura 7. Triángulo rectángulo

C. Rectas perpendiculares:

Se dice que dos rectas son perpendiculares si al intersecarse forman ángulos rectos.

D. Recta tangente a una circunferencia:

Es una recta perpendicular a cualquiera de sus radios y que la toca en un solo punto.

E. Lugar geométrico:

Se denomina lugar geométrico al conjunto de los puntos del plano que cumplen una determinada condición o propiedad.

F. Puntos y rectas notables del triángulo:

En todo triángulo se pueden trazar las siguientes rectas y puntos.

ALTURA: Es la recta perpendicular a uno de los lados del triángulo que pasa por el vértice opuesto. En todo triángulo se pueden trazar tres alturas.

ORTOCENTRO: Es el punto de intersección de las alturas del triángulo.

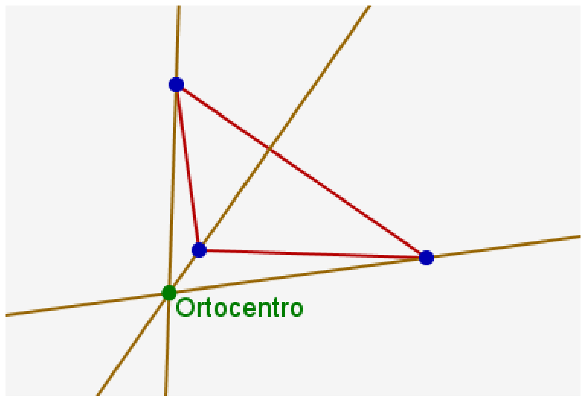

Figura 8. Alturas y ortocentro

MEDIATRIZ: Es la recta perpendicular a uno de los lados del triángulo y pasa por su punto medio. La mediatriz de un segmento se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento. Todo triángulo tiene tres mediatrices.

CIRCUNCENTRO: Es el punto de intersección de las mediatrices y es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

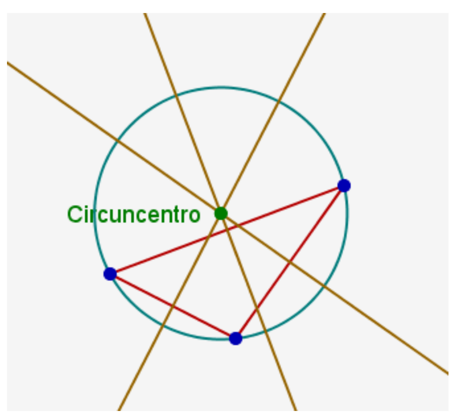

Figura 9. Mediatrices y circuncentro

BISECTRIZ: Es la semirrecta que divide el ángulo de un triángulo en dos ángulos de igual medida. La bisectriz de un ángulo se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados que lo conforman. Todo triángulo tiene tres bisectrices.

INCENTRO: Es el punto de intersección de las bisectrices y es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

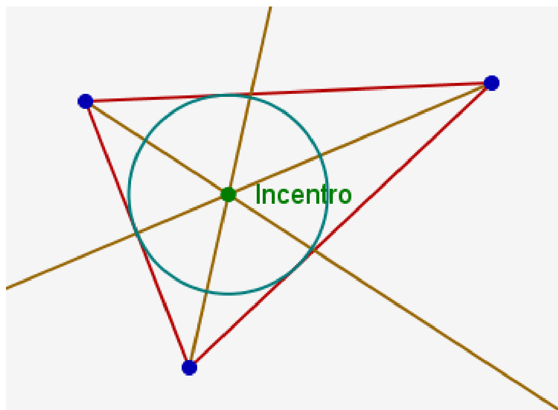

Figura 10. Bisectrices y incentro

MÉTODO DE LUGAR GEOMÉTRICO: Es un método de resolución de problemas de construcción. Cuando un problema se reduce a determinar la posición de un punto:

1. Se define ese punto como punto que cumple dos condiciones.
2. Se considera cada una de las condiciones por separado.

La primera condición da lugar a un lugar geométrico. La segunda condición da lugar a otro lugar geométrico.

3. La intersección de esos dos lugares geométricos es el conjunto de todos los puntos que cumplen las dos condiciones.

1.2 INTRODUCCIÓN AL PROGRAMA CARMETAL

El programa CarMetal deriva de C.a.R.: (Compass and Ruler) es un programa de geometría dinámica desarrollado por René Grothmann, profesor de matemáticas en la universidad católica de Eichstätt (Alemania), en 1989, Grothmann construyó para C.a.R. algoritmos potentes y fiables para manejar los objetos y las relaciones geométricas, lo que permite a su programa elaborar construcciones geométricas muy complejas. Las prestaciones de este programa son muy numerosas: no hay más que desplegar los menús de C.a.R. para darse cuenta de ello. Desde el punto de vista de la interface, René Grothmann ha realizado también un enorme trabajo en lo que se refiere a la interacción propia de la figura (respuestas anticipadas sistemáticas, inversión de video de los objetos de interés, cambio de cursores, etc.,...) lo que permite utilizar también C.a.R. de forma muy cómoda en primaria y en la educación secundaria obligatoria.

CarMetal recoge todas –o casi todas- las prestaciones de C.a.R., proponiendo una aproximación diferente desde el punto de vista de la interface gráfica. No se trata de un simple maquillaje de la aplicación –lo que en sí tendría poco interés– sino de un cambio, a veces importante, en la forma de acceder a las prestaciones.

Esta nueva interface, desarrollada por Eric Hakenholz (profesor de matemáticas), proporciona un acceso directo y efectos inmediatos a un buen número de acciones que necesitaban hasta ahora de pasos intermedios, a menudo materializados por cuadros de diálogos modales. Las construcciones se hacen en CarMetal con la ayuda de una paleta principal y de dos “inspectores”: uno se ocupa de la gestión de las macros y el otro se encarga de las propiedades de los objetos.

Los sistemas operativos con los que se puede ejecutar el programa son: Windows 95/98/NT, Linux (x86), Mac OS, Windows XP. CarMetal se puede utilizar en la educación secundaria obligatoria. Se puede encontrar en varios idiomas, como el Castellano, Inglés, Francés, entre otros. Además es un software gratuito disponible para todos.

Entorno CarMetal

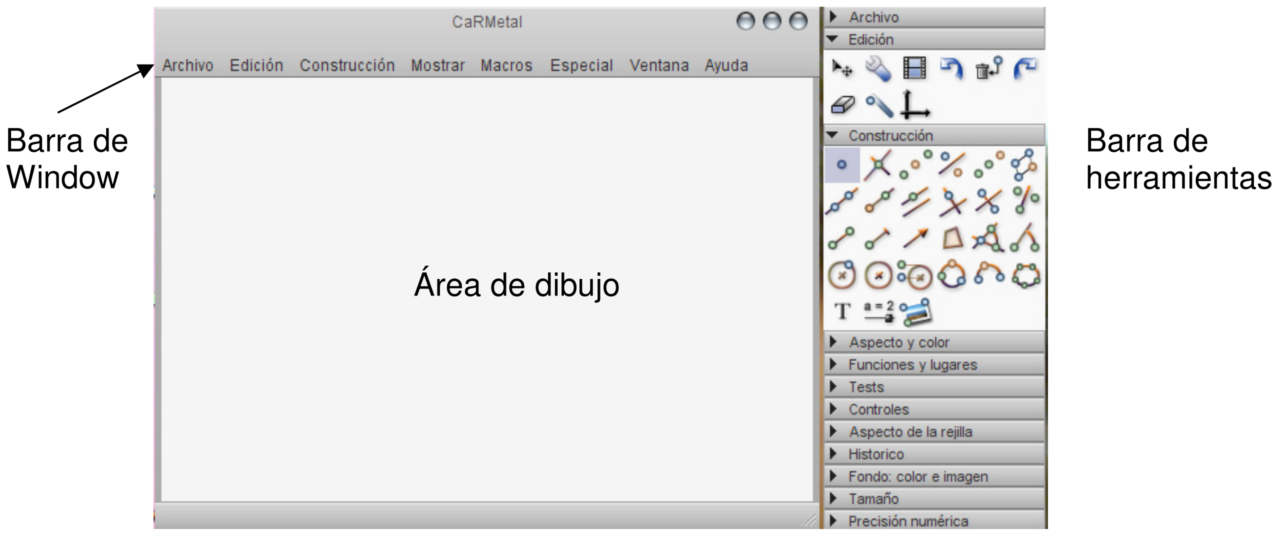

Figura 11. Entorno CarMetal

En la barra de Windows se ubican menús que permiten realizar acciones en el momento de la construcción de cualquier figura. A continuación podemos ver algunas de las funciones que se pueden encontrar en estos menús.

En el menú archivo encontramos:

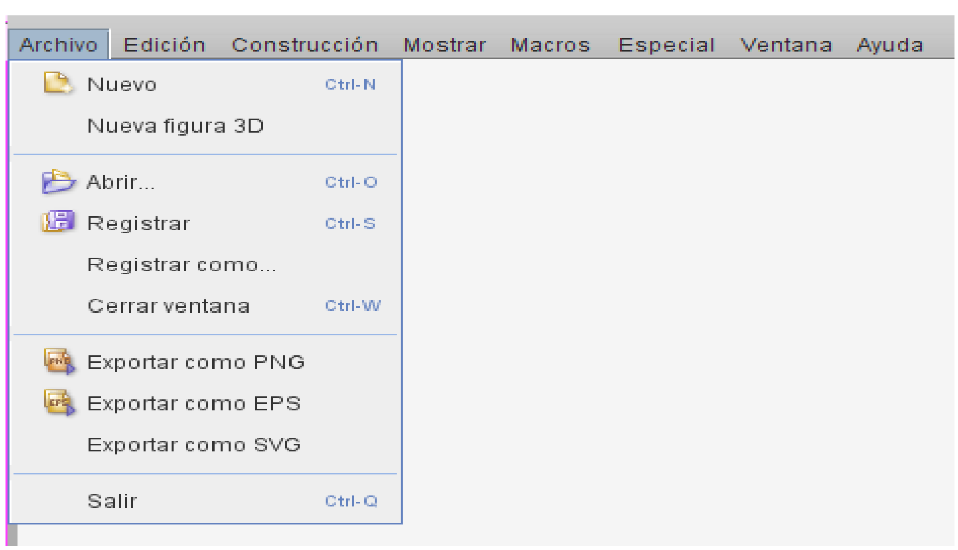

Figura 12. CarMetal; Menú archivo

En el menú edición:

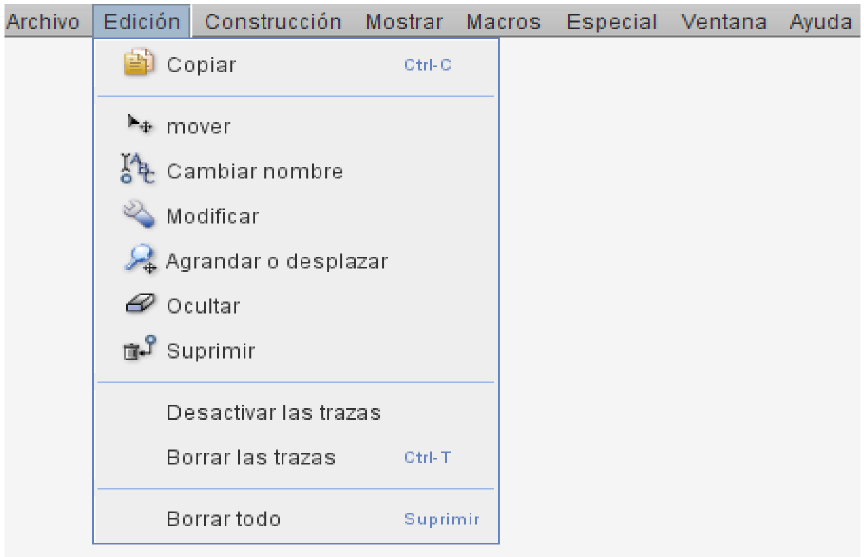

Figura 13. CarMetal; Menú edición

En el menú mostrar:

Figura 14. CarMetal; Menú mostrar

En la barra herramientas se pueden encontrar todas las funciones necesarias para la construcción de cualquier figura geométrica, como por ejemplo, punto, punto medio, rectas, semirrectas, segmentos, rectas paralelas y perpendiculares, circunferencias, ángulos, mediatriz, bisectriz, entre otras, también existen herramientas que permiten modificar el aspecto de las figuras así como los colores, grosor, etc., veamos:

Figura 15. CarMetal; Barra de herramientas

Los programas de geometría dinámica como lo son Regla y Compás, Cabri-Géometrè, GeoGebra, CarMetal, entre otros, se utilizan de la misma manera al momento de realizar alguna figura geométrica, como por ejemplo para trazar una circunferencia se selecciona el icono circunferencia  y se lleva el cursor al área de dibujo, se ubica un primer punto como centro y se le da el tamaño que se desee, como se ve en la siguiente figura:

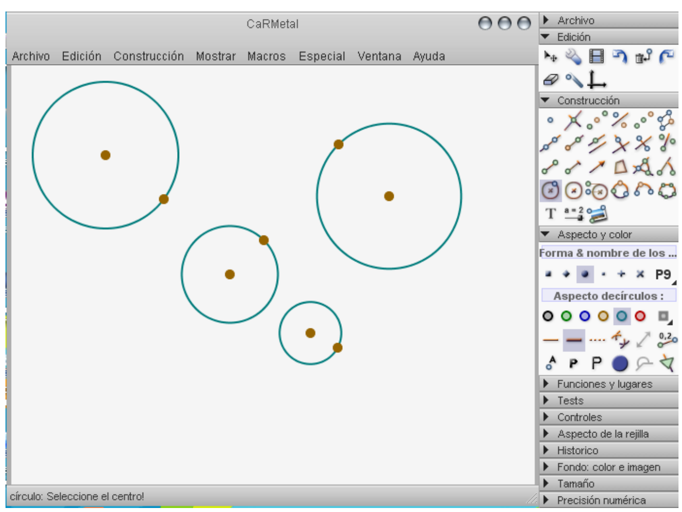

Figura 16. Construcción de circunferencias

Del mismo modo cuando se quieran realizar otras acciones de la barra de herramientas.

2. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

El trabajo se realizó con un grupo de 8 estudiantes de grado noveno del Colegio Roberto García Peña de Girón, esto fue algo ventajoso ya que se conocían algunos aspectos de los alumnos, pues uno de nosotros había realizado el trabajo de grado I con ellos. Se desarrolló en cuatro sesiones, cada sesión con una intensidad horaria de cuatro horas, en las cuales se implementaron cuatro actividades referentes al tema *"rectas y puntos notables del triángulo"*.

En la primera sesión se realizó una prueba diagnóstica y se dio una breve introducción a la utilización y el manejo del software. En la segunda sesión se aplicó la primera actividad en la cual se trabajó en las alturas del triángulo y su punto de intersección. En la tercera sesión se dio paso a la segunda actividad donde se trabajó las mediatrices del triángulo y su punto de intersección. En la cuarta y última sesión se trabajaron las dos actividades restantes, una para las bisectrices del triángulo y su punto de intersección y la otra para la resolución de algunos problemas teniendo en cuenta la aplicación de las actividades anteriores.

2.1 PRIMERA SESIÓN: Prueba diagnóstica

Prueba diagnóstica [1]

Con el fin de reconocer cuales eran los conceptos y presaberes que los estudiantes tenían acerca de la geometría del triángulo y algunas definiciones relacionadas con el tema a desarrollar, se realizó una prueba diagnóstica.

1- Anexo: Prueba diagnóstica

Descripción de la prueba

En el primer ítem preguntamos acerca de la clasificación de los triángulos para ver qué tan claro era este concepto para ellos. En el segundo ítem se preguntó por la definición de radio de una circunferencia y la distancia entre dos puntos, esto pensado para el desarrollo de la actividad 2 que más adelante describiremos. El siguiente ítem, ¿Cuál es la distancia más corta entre una recta y un punto exterior a ella?, fue pensado con el ánimo que los estudiantes reconocieran el concepto de perpendicularidad. El último punto se hizo pensando en la actividad de las bisectrices.

Análisis de la prueba

* Los alumnos manejan muy bien la clasificación de los triángulos, ya que este concepto es usado frecuentemente.

* La mayoría de los estudiantes identifican qué es el radio de una circunferencia cuando tiene un dibujo, pero realmente no saben qué es, es decir, no saben cual es su definición.

* Los alumnos reconocen que la distancia entre dos puntos es la longitud del segmento que los une.

* Los alumnos saben cuando dos rectas son perpendiculares, pero no reconocen que la perpendicularidad se puede utilizar para calcular la distancia más corta entre una recta y un punto exterior a ella.

* El concepto de tangencia no es familiar para los estudiantes.

Reconocimiento del software

Terminada la prueba diagnóstica procedimos a dar una breve introducción sobre el manejo y la utilización del programa CarMetal, en la cual se mostró cómo es el entorno y cómo esta conformado, de tal manera que reconocieran las diferentes acciones que el programa permite realizar.

Seguidamente decidimos que los alumnos utilizaran el programa para reforzar algunos de los conceptos evaluados en la prueba diagnóstica.

El primer ejercicio que realizaron tuvo como objetivo el reconocimiento de la circunferencia como lugar geométrico. Se les pidió que ubicaran un punto A, un punto B y que calcularan la distancia entre éstos. Luego, que ubicaran más puntos de tal manera que la distancia de éstos al punto A, fuese aproximadamente la misma que la del punto A al punto B.

Los estudiantes ubicaron los dos puntos y trazaron el segmento que los une, como el programa permite calcular la longitud de cualquier segmento, ellos procedieron a utilizar esta herramienta. Seguidamente ubicaron otro punto y realizaron el mismo procedimiento. Con la opción de arrastre los alumnos movieron el punto de tal manera que las medidas fuesen aproximadamente iguales, como se ve en la siguiente figura:

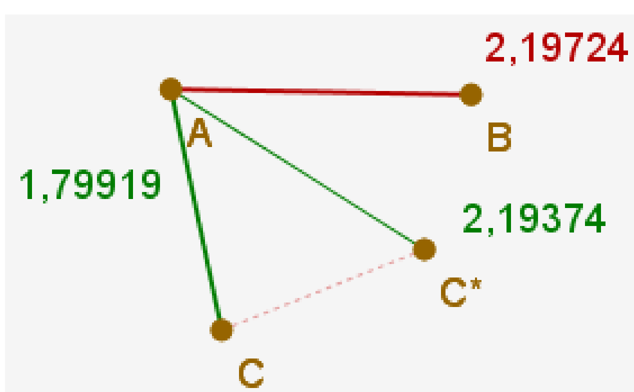

Figura 17. Circunferencia como lugar geométrico 1

Este procedimiento lo hicieron repetitivamente y esto fue a lo que llegaron:

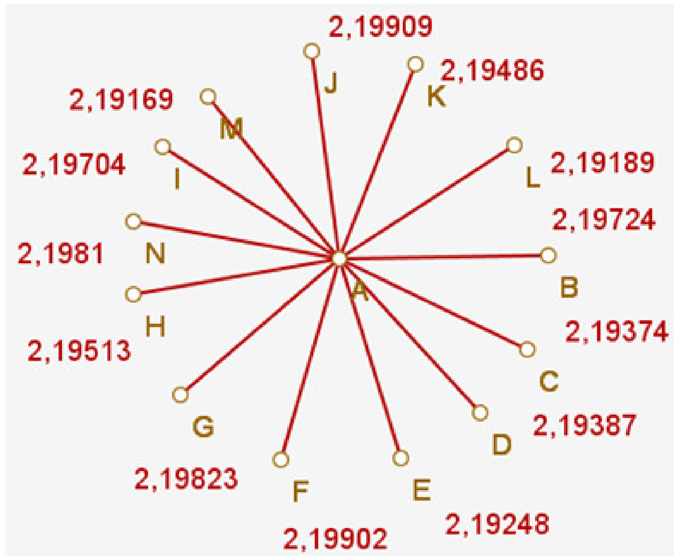

Figura 18. Circunferencia como lugar geométrico 2

Realizado el ejercicio, notaron que si seguían ubicando más puntos, éstos formarían una circunferencia, para confirmar esto construyeron una circunferencia con centro en A y radio AB, la cual les permitió observar que aproximadamente todos estos puntos pertenecían a una misma circunferencia:

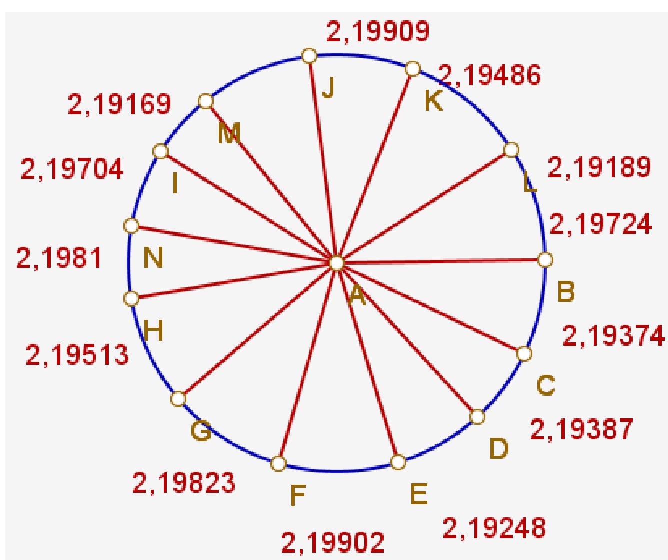

Figura 19. Circunferencia como lugar geométrico 3

Después se realizó el proceso inverso, los estudiantes construyeron una circunferencia y trazaron diferentes radios, confirmando que todos éstos tienen la misma longitud:

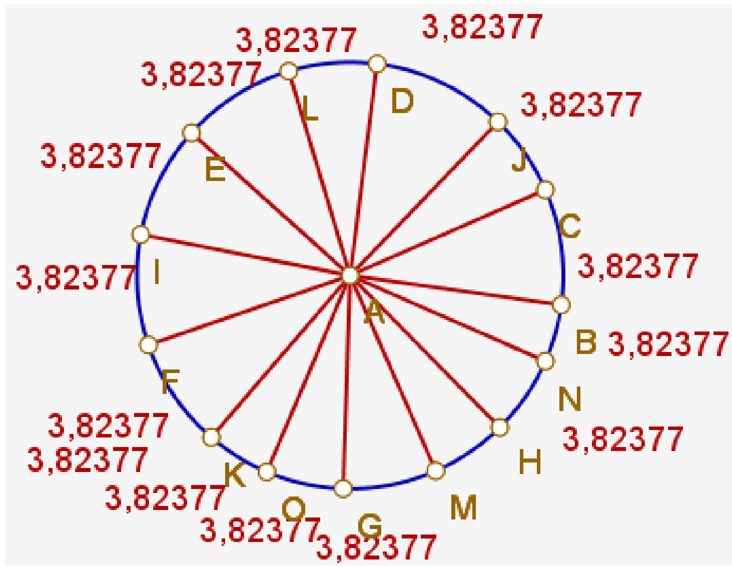

Figura 20. Circunferencia como lugar geométrico 4

De esta manera, los alumnos identificaron la circunferencia como los puntos que están a igual distancia de un punto, definiendo así la circunferencia como lugar geométrico.

En el segundo ejercicio lo que queríamos es que los estudiantes notaran, que para hallar la distancia más corta entre una recta y un punto exterior a ella, se debe trazar una perpendicular a la recta y que pase por el punto.

Se les planteó que trazaran una recta y ubicaran un punto por fuera de ésta. En seguida, se les dijo que ubicaran un punto sobre la recta, que trazaran un segmento desde este punto al punto exterior, y que calcularan su longitud; para luego mover el punto sobre la recta, de tal manera que buscaran donde esta longitud fuese mínima. Al hacer esto observaron que cuando la longitud del segmento era mínima, la recta y el segmento serían perpendiculares (como se ilustra en la figura), esto es precisamente lo que queríamos que dedujeran. Para corroborar lo observado trazaron la perpendicular, verificando que el segmento se encontraba sobre ésta.

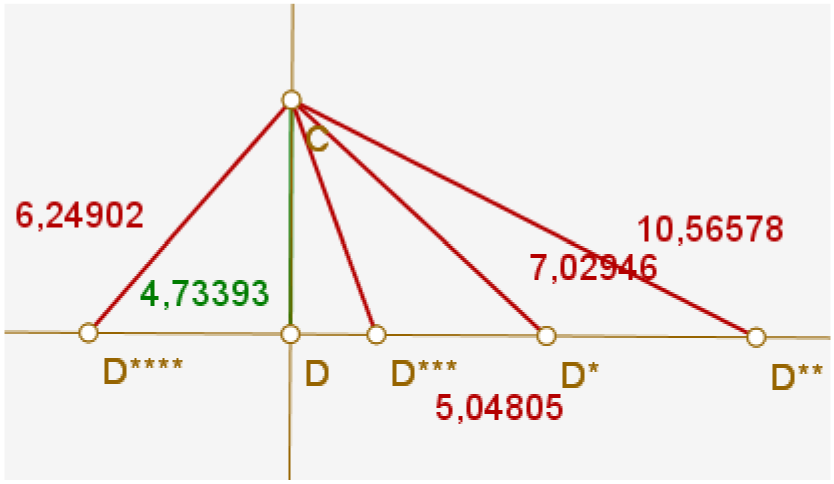

Figura 21. Distancia entre un punto y una recta

Como el concepto de recta tangente a una circunferencia se pensaba utilizar en una de las actividades, optamos por definirlo con ayuda del programa. Para esto se les dio una noción de lo que es una recta secante y una recta tangente a una circunferencia, apoyándonos con un dibujo realizado en el tablero, donde se les mostró:

Figura 22. Recta secante y recta tangente

Posteriormente, se dio paso al uso del programa para llegar a una definición formal de recta tangente a una circunferencia.

Los alumnos bajo nuestra orientación trazaron una circunferencia y situaron dos puntos sobre ésta, dibujando los respectivos radios. Después trazaron una recta que pasara por estos puntos, la cual identificaron como una secante. Ya que el programa permite mover los objetos, pedimos a los estudiantes que llevaran un punto hacia el otro, hasta que pareciera ser uno solo. Como se ve en las siguientes figuras:

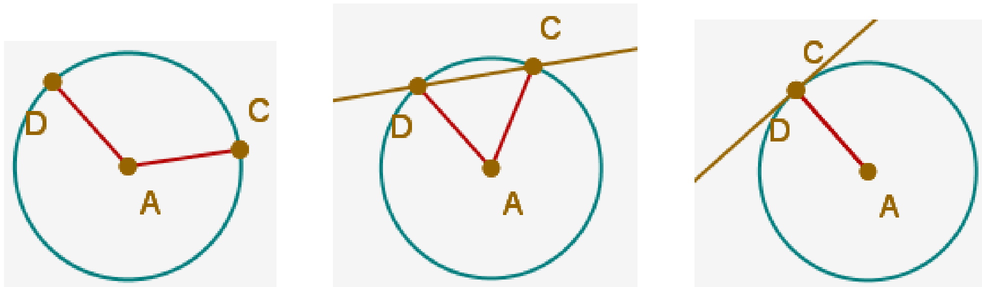

Figura 23. Construcción de recta tangente a una circunferencia

Al hacer esto, los alumnos decían que la recta era tangente, guiándose por lo que veían en el dibujo más no por haber realizado algún tipo de razonamiento, lo que nos llevó a hacerles una pregunta que los condujera a realizar un análisis de la última figura; *"¿Qué relación existe entre la recta y el radio de la circunferencia?"* a lo que contestaron, - *son perpendiculares*- ya habiendo comprendido esto, los estudiantes fueron capaces de darle formalidad a la definición, pues no sólo decían que una recta es tangente a una circunferencia si la toca en un solo punto, sino que también reconocían que esta es perpendicular al radio trazado por este punto.

El siguiente paso fue que construyeran una recta tangente a una circunferencia de tal manera que si la movíamos siempre fuera tangente, lo cual fue algo sencillo para ellos, ya que al realizar la construcción aplicaron la definición correctamente.

2.2 SEGUNDA SESIÓN: Alturas del triángulo

PLANEACIÓN DE LA ACTIVIDAD

Al momento de trazar las alturas del triángulo, vemos que los estudiantes frecuentemente cometen algunos errores: por ejemplo, piensan que la altura es el segmento vertical que sale del lado donde el triángulo parece apoyarse, que el triángulo sólo tiene una altura y que además siempre está dentro del triángulo. Con la ayuda del software podremos enmendar estas dificultades a través de ejercicios que permitirán mostrar a los estudiantes los errores que cometen y a su vez corregirlos.

Con este fin y apoyados en CarMetal, diseñamos un triángulo de tal manera que por medio de la manipulación podamos girarlo, desplazarlo y cambiarlo de clasificación. Veamos la figura:

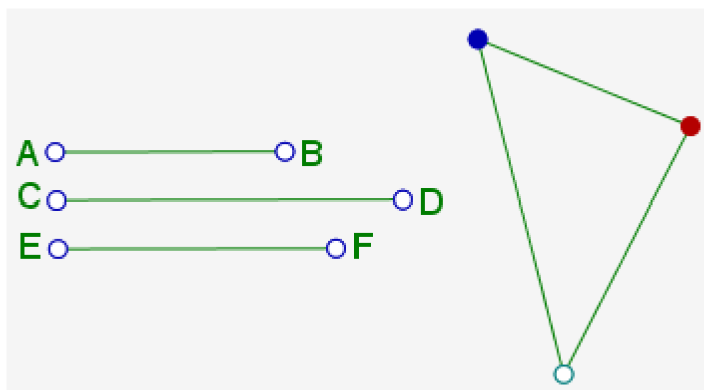

Figura 24. Triángulo modificable

El punto rojo y el punto azul son los que permiten desplazar y girar el triángulo respectivamente sin que cambie la longitud de sus lados y su forma. Para cambiar la clasificación del triángulo, se debe modificar la longitud de los segmentos AB, CD y EF.

La primera dificultad es el hecho de que los alumnos poseen una imagen mental del triángulo y de su altura, como una figura prototípica en la que el triángulo se representa con un lado horizontal (paralelo al borde inferior de la hoja), que corresponde a la base (única), y la altura es un segmento vertical, entre el vértice superior y la base horizontal. Con el fin de llevar a los alumnos a una descripción más geométrica de la altura, utilizaremos la posibilidad de arrastre del software para que precisen la perpendicularidad entre la altura y la base.

Les presentamos un triángulo acutángulo en posición prototípica, es decir, con un lado horizontal, y les vamos a pedir que tracen la altura. Suponemos que trazarán un segmento vertical desde el vértice superior hasta el lado horizontal, basándose en la imagen mental y no en la definición. En ese momento, moveremos el punto que se encuentra sobre el lado horizontal de modo que el segmento ya no sea vertical; pensamos que dirán que éste ya no es la altura del triángulo. Entonces ubicaremos el segmento como lo habían trazado inicialmente con el fin de que analicen la figura y noten que este segmento y el lado horizontal son perpendiculares, lo que los llevará a la definición correcta de altura de un triángulo: "es la recta perpendicular a uno de los lados del triángulo que pasa por el vértice opuesto". Entonces los estudiantes deberán construir la altura como la recta perpendicular a un lado y que pase por el vértice opuesto.

Otra concepción errónea que tienen los estudiantes es creer que el triángulo sólo tiene una altura, pues como se mencionó anteriormente piensan que únicamente tiene una base. El triángulo que utilizaremos podrá ser girado de tal manera que cada uno de sus lados pueda colocarse horizontalmente, permitiendo cuestionar la concepción de una única base y una única altura.

Teniendo en cuenta el primer ejercicio, pediremos que tracen la altura del triángulo. Luego giraremos el triángulo para que sea otro el lado horizontal, y prevemos que para los alumnos la altura trazada dejará de serlo, así que deberán trazar la altura correspondiente a este lado. Del mismo modo pasará cuando giremos el triángulo nuevamente. Con esto notarán que el triángulo tiene tres alturas y además que éstas tienen un punto en común, el ortocentro.

Pensar que las alturas siempre están dentro del triángulo, es la tercera dificultad que se percibe en los estudiantes. Con la ayuda del software podremos modificar un triángulo de tal forma que cambie su clasificación, así cuando tengamos un triángulo obtusángulo con sus alturas trazadas y lo modifiquemos a un triángulo acutángulo, notaremos que estas mismas alturas estarán por dentro, lo que permitirá distinguir a los alumnos, cuándo las alturas están por dentro y cuándo por fuera.

Les presentaremos un triángulo obtusángulo de manera que el lado mayor no esté horizontal, y les pediremos que tracen las alturas. Creemos que a pesar de que conocen la definición de altura no lo harán correctamente, debido a que la clasificación del triángulo es diferente. Suponemos que ubicarán segmentos dentro del triángulo, pues buscarán que las alturas estén en el interior del triángulo, y no utilizarán la perpendicularidad. Entonces les pediremos que utilicen la perpendicularidad para construir las alturas. Pensamos que cuando vean dos de sus alturas por fuera, expresarán que éstas no lo son, por lo que tendremos que hacerles notar que la clasificación de este triángulo es diferente, para esto modificaremos el triángulo de tal forma que vuelva a ser acutángulo, donde podrán observar que al cambiarse de clasificación las alturas volverán a estar por dentro.

Por último trabajaremos con el triángulo rectángulo, donde esperamos que los estudiantes no tengan dificultades al momento de trazar las alturas. Además realizarán un análisis que les permita identificar que la posición del ortocentro cambia de acuerdo a la clasificación del triángulo, es decir, que noten que el ortocentro es un punto interior si el triángulo es acutángulo, que es punto exterior si el triángulo es obtusángulo y si el triángulo es rectángulo está en el vértice del ángulo recto.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

Lo primero que se hizo fue mostrar a los estudiantes el siguiente triángulo:

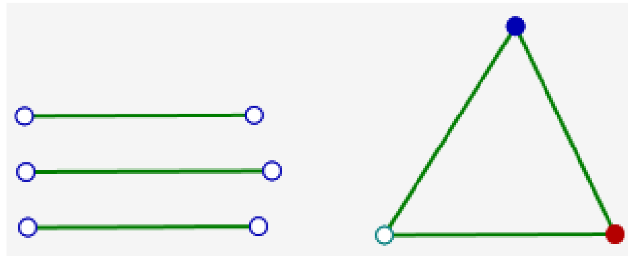

Figura 25. Alturas del triángulo 1

Seguidamente les pedimos que trazaran la altura, para saber qué noción tenían de ésta. Los estudiantes trazaron un segmento que iba desde el vértice superior hasta el lado horizontal. De esta manera notamos, como se esperaba, que no todos[2] tenían la definición clara del concepto de altura, entonces les preguntamos ¿Cuál es la definición de altura de un triángulo? A lo que respondieron *"la altura de un triángulo es un segmento que va desde el vértice superior hasta lado opuesto, es decir hasta la base".* Esto fue lo que hicieron:

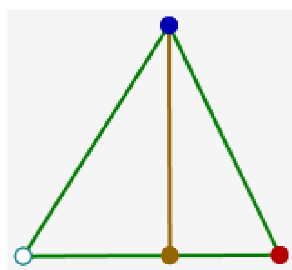

Figura 26. Construcción de las alturas del triángulo 1

A estos estudiantes, les modificamos lo que habían hecho, desplazando el punto que se encontraba sobre la base del triángulo, así:

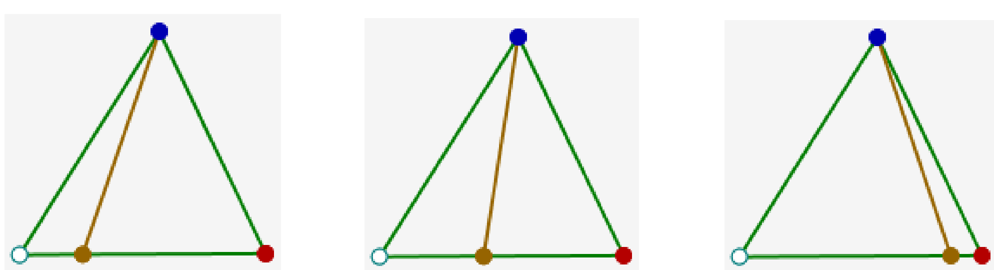

Figura 27. Construcción de las alturas del triángulo 2

2- Sólo dos alumnos trazaron desde el comienzo la altura del triángulo, utilizando la herramienta 'recta perpendicular', los demás trazaron simplemente un segmento 'a ojo'.

Hecho esto se les preguntó que si estas también eran alturas del triángulo. Ellos contestaron que no, a lo que dijimos que por qué no, si estábamos aplicando la definición que habían dado. Entonces ellos dijeron que la altura era la vertical que salía de la base hasta el vértice. Al expresar esto, les dijimos que volvieran a trazar la altura como lo habían hecho en un principio y que hicieran un análisis de esa figura. Realizado el análisis, los estudiantes identificaron que el segmento trazado y el lado horizontal del triángulo eran perpendiculares y que además pasaba por el vértice opuesto a este lado, llegando así a la definición correcta de altura de un triángulo. Luego los alumnos procedieron a aplicar la definición para trazar la altura del triángulo, utilizando la herramienta ‘recta perpendicular’.

Después de que construyeron la altura utilizando la herramienta ‘recta perpendicular’, y para corregir el error que los estudiantes tenían acerca de que el triángulo sólo tiene una base y por ende una sola altura, giramos el triángulo, para poner otro lado horizontal y les preguntamos -¿Ahora, cuál es la altura del triángulo?-. Inmediatamente los estudiantes trazaron la altura respecto a esta base. Seguidamente se les preguntó que si la primera que habían trazado seguía siendo altura, los alumnos dijeron que no, que dejaba de serlo. Entonces giramos nuevamente el triángulo dejándolo en la posición que se encontraba inicialmente y les pedimos que analizaran lo que sucedía. Después de esto, los estudiantes nos dijeron que ambas eran alturas y que si volvíamos a cambiarlo de base se podría trazar otra altura. Con esto notaron que cualquiera de los lados del triángulo podría ser base y por lo tanto se podían trazar tres alturas. Así que procedieron a girar el triángulo hasta poner el tercer lado horizontal, y construyeron la altura correspondiente[3]. Esta es la figura:

3-Los alumnos necesitan de todas maneras poner la base horizontal para trazar la altura.

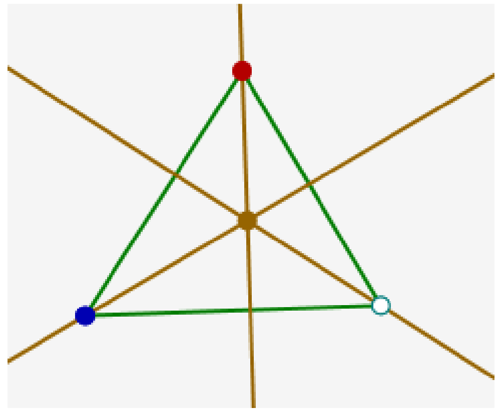

Figura 28. Ortocentro

Los alumnos constataron que las alturas se cortan en un solo punto, y les dijimos que ese punto se llama Ortocentro.

Para ayudarles a superar la concepción de que las alturas están siempre en el interior del triángulo, borramos las alturas del triángulo que teníamos anteriormente y lo modificamos de tal modo que fuese obtusángulo. Veamos la figura:

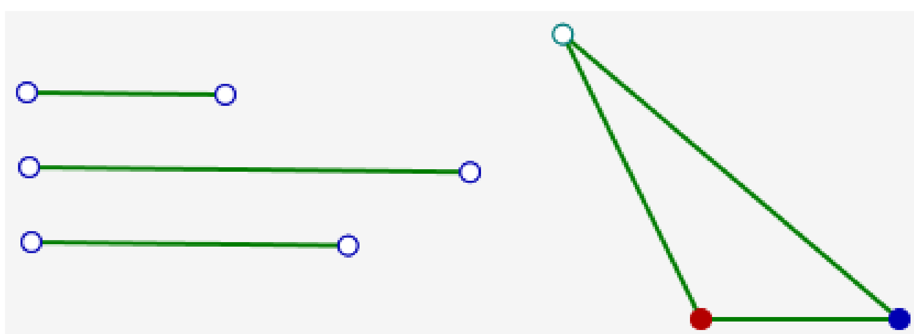

Figura 29. Alturas del triángulo 2

Se les pidió que trazaran las alturas de este nuevo triángulo. Ningún alumno trazó segmentos al interior del triángulo, como habíamos previsto. Todos utilizaron la perpendicularidad.

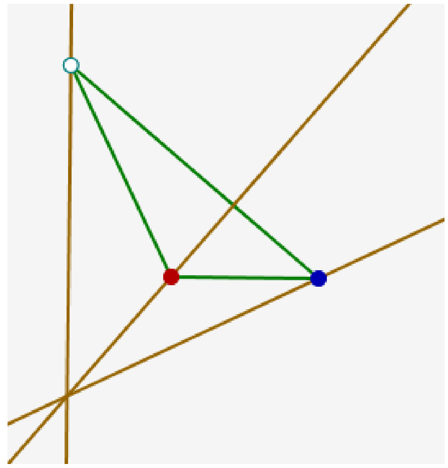

Figura 30. Construcción de las alturas del triángulo 3

Los estudiantes al ver que dos de éstas se encontraban por fuera del triángulo, decían que no eran alturas, que éstas siempre deberían estar por dentro del triángulo. Les preguntamos que por qué, si habían aplicado correctamente la definición para trazarlas. Después de escucharlos, notamos que ellos respondieron de esta manera, porque se estaban basando en el trabajo que habían hecho en el primer triángulo, donde las tres alturas estaban por dentro. Entonces les preguntamos que por qué estas alturas se encontraban por fuera, inmediatamente los alumnos empezaron hacer una comparación entre estos triángulos, fijándose que su clasificación era diferente y que tal vez esta era la razón.

Para confirmar esto, procedimos a modificar el triángulo, de tal manera que este volviera a ser acutángulo. Mostrándoles, que no siempre las alturas van por dentro, que depende de cómo se clasifique el triángulo.

Nuevamente borramos las alturas y modificamos el triángulo de modo que éste fuese rectángulo y tuviera un cateto horizontal. Se les pidió que trazaran las alturas y que sacaran conclusiones acerca de lo realizado.

Los estudiantes observaron que si el triángulo era rectángulo, dos de las alturas estaban sobre sus catetos y que además el punto de intersección de éstas se encontraba en el vértice del ángulo recto. Del mismo modo, concluyeron que si el triángulo era obtusángulo su punto de intersección se encontraba por fuera y si era acutángulo se encontraba por dentro. Como se ilustra a continuación:

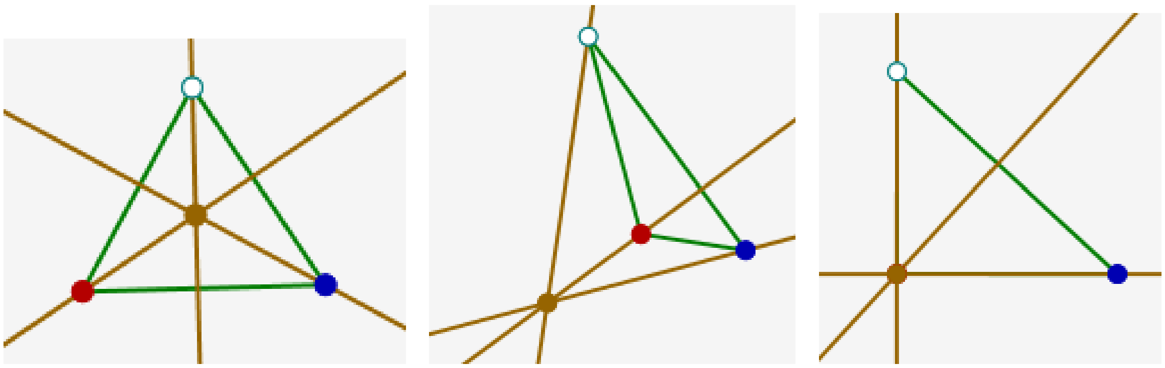

Figura 31. Construcción de las alturas del triángulo 4

Algo importante que se les aclaró a los estudiantes es el uso de la altura como recta y como segmento; les mencionamos que la altura se usa como segmento para hallar el área del triángulo y como recta cuando se quiere analizar las características del ortocentro.

EVALUACIÓN DE LA ACTIVIDAD

Al desarrollarse la actividad nos dimos cuenta que funcionó como lo habíamos previsto, ya que los estudiantes mostraron los errores que usualmente se cometen a la hora de trabajar con las alturas del triángulo.

Cabe destacar que en el primer ejercicio dos de los estudiantes utilizaron la opción de perpendicularidad del programa para trazar la altura del triángulo, mostrando tener claridad en el concepto; además cuando se trazaron las alturas del triángulo obtusángulo todos lo hicieron correctamente, cosa que nos sorprendió pues no lo esperábamos.

La interacción con el software permitió que los alumnos reconocieran sus errores y a su vez ayudó a corregirlos, logrando tener una nueva comprensión de los conceptos geométricos.

2.3 TERCERA SESIÓN: Mediatrices del triángulo

PLANEACIÓN DE LA ACTIVIDAD

El reconocimiento de la mediatriz como lugar geométrico es un concepto que usualmente no es usado en los colegios, por esta razón empleamos una actividad donde los estudiantes con la ayuda del programa lleguen a este concepto. La actividad consiste en construir un triángulo isósceles. Trazaremos un segmento horizontal, de tal manera que éste sea el lado de diferente longitud. ¿Por qué horizontal? Buscando la facilidad para ellos, debido a que los estudiantes están acostumbrados a ver el triángulo apoyado sobre uno de sus lados.

Lo que buscamos es que los estudiantes ubiquen puntos de tal manera que estén a igual distancia de los extremos del segmento dado, donde podrán ver que todos estos puntos conforman una recta, la mediatriz. Con esta actividad los alumnos identificarán la mediatriz como un lugar geométrico y además la utilizarán para construir el triángulo isósceles.

En la mayoría de los colegios cuando se estudian las mediatrices del triángulo y su punto de intersección, sólo les mencionan que este punto es el centro de la circunferencia circunscrita en el triángulo, sin explicarles que ésta se puede trazar porque este punto se encuentra a igual distancia de los vértices del triángulo. Para que los estudiantes tengan un mejor entendimiento acerca de esto, planeamos un ejercicio donde deben trazar una circunferencia que pase por tres puntos no colineales, en el cual, tendrán que buscar un cuarto punto que será el centro de la circunferencia, esperamos que los alumnos hayan comprendido la definición de mediatriz como lugar geométrico, ya que para hacer esto tendrán que utilizarla. Cuando los estudiantes hayan trazado las mediatrices y observen que su punto de intersección (circuncentro) es el centro de la circunferencia que se quiere trazar, les haremos notar que con esos tres puntos podremos construir un triángulo, que las mediatrices trazadas son las mediatrices del triángulo y que además la circunferencia esta circunscrita en él. En el momento que los estudiantes hayan trazado las mediatrices y la circunferencia, moveremos los vértices del triángulo de tal forma que cambie su clasificación, con el fin de que noten que la posición del circuncentro cambia.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

Primero: Construir un triángulo isósceles

Les pedimos que construyeran un triángulo isósceles a partir de un segmento horizontal que les trazamos, de tal manera que éste fuera el lado de diferente longitud. Como los estudiantes estaban familiarizados con la circunferencia, intentaron resolver la actividad utilizándola. Trazaron una circunferencia con centro en uno de los extremos del segmento y de radio la longitud de éste, para luego trazar otro radio y así poder encontrar un triángulo isósceles. Esto fue lo que hicieron:

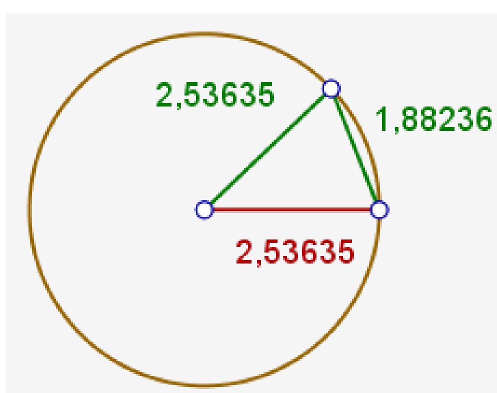

Figura 32. Mediatrices del triángulo 1

Lo que hicieron los alumnos estuvo bien, pero no era lo que se les había pedido, ya que el segmento que les dimos, debía ser el de longitud diferente. Entonces les pedimos que lo intentaran resolver de otra manera.

Vimos que los estudiantes no encontraban la manera de resolver el ejercicio, por lo que decidimos guiarlos para llegar a la solución. Les pedimos que ubicaran un punto y les preguntamos cómo debían ser las distancias de éste a los extremos del segmento. Los alumnos respondieron que estas distancias debían ser iguales para poder construir el triángulo isósceles. Seguidamente trazaron los segmentos y calcularon su longitud y con la opción mover punto, lo trasladaron de tal manera que estas longitudes fuesen aproximadamente iguales:

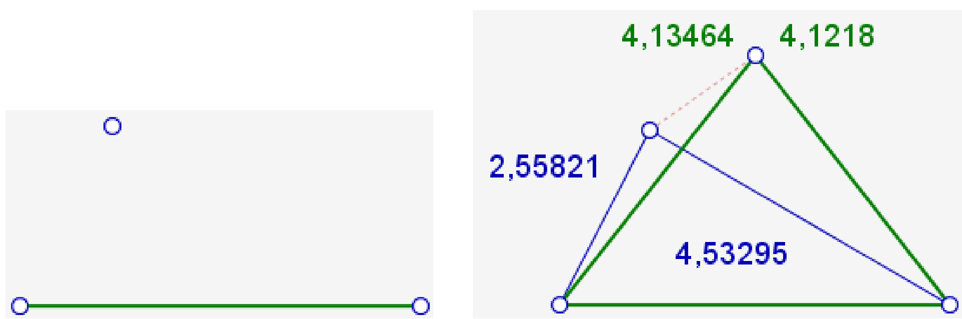

Figura 33. Mediatriz como lugar geométrico 1

Posteriormente les pedimos que siguieran ubicando puntos que cumplieran esta condición, veamos lo que hicieron:

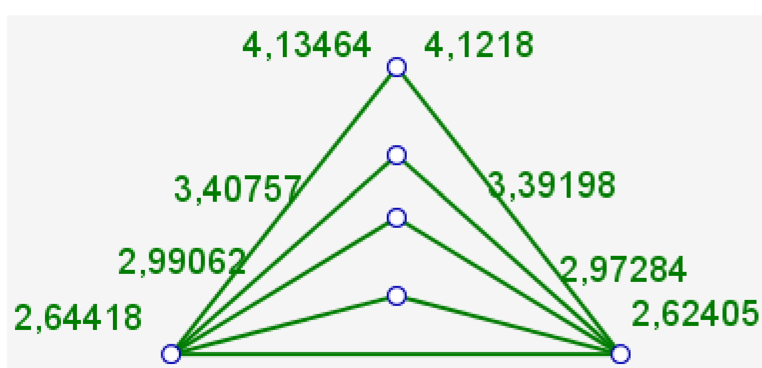

Figura 34. Mediatriz como lugar geométrico 2

Como podemos ver ellos sólo ubicaron puntos arriba del segmento, corroborando lo que mencionamos anteriormente, que los estudiantes sólo ven el triángulo apoyado sobre una base, fue así como les dijimos que ubicaran puntos por debajo del segmento para que se dieran cuenta que el triángulo no siempre va a estar apoyado sobre una base:

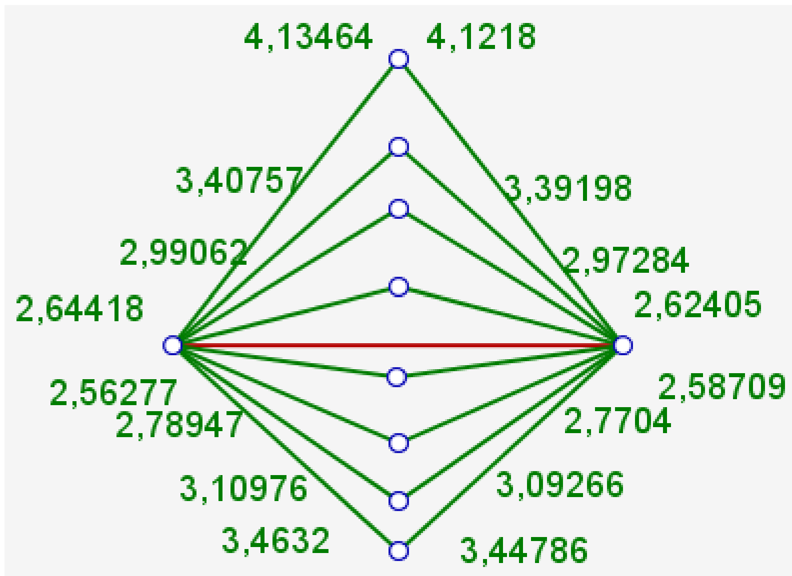

Figura 35. Mediatriz como lugar geométrico 3

En ese momento los estudiantes conjeturaron que pareciera que todos estos puntos se encontraban sobre una misma recta y que además cada punto estaba a igual distancia de los extremos del segmento. Para confirmar lo dicho, trazaron una recta que pasara por dos de estos puntos. Trazada la recta también notaron que ésta era perpendicular al segmento y que lo dividía en dos partes iguales. Esto nos sorprendió, ya que los estudiantes lo hicieron espontáneamente, sin esperar a que nosotros les sugiriéramos hacerlo. Creemos que lo hicieron debido al trabajo que se había hecho anteriormente con las otras actividades, donde les pedíamos que confirmaran las conjeturas que hacían. La siguiente figura ilustra lo realizado por ellos:

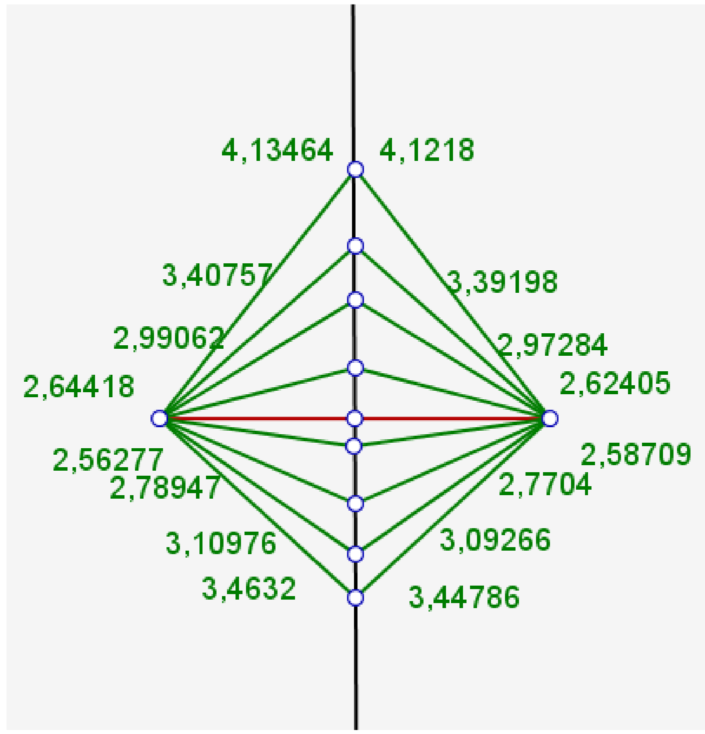

Figura 36. Mediatriz como lugar geométrico 4

Les dijimos que esta recta es la mediatriz del segmento y que se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento, que era lo que ellos habían conjeturado. Los estudiantes borraron lo que habían hecho dejando sólo el segmento y procedieron a trazar la mediatriz, luego ubicaron un punto sobre ésta y trazaron segmentos desde este punto hasta los extremos del segmento, para calcular sus longitudes. Al mover el punto sobre la mediatriz, los estudiantes verificaron que la longitud de los segmentos siempre era igual.

Figura 37. Mediatriz como lugar geométrico 5

Realizado esto les pedimos que procedieran a construir el triángulo isósceles como se les había planteado al principio.

Para la construcción, los estudiantes utilizaron dos maneras diferentes, algunos trazaron una recta perpendicular al segmento por su punto medio y ubicaron un punto sobre la perpendicular tomándolo como el tercer vértice del triángulo. Otros por el contrario, utilizaron la opción mediatriz () que se encuentra en la barra de herramientas del programa. Veamos lo que hicieron:

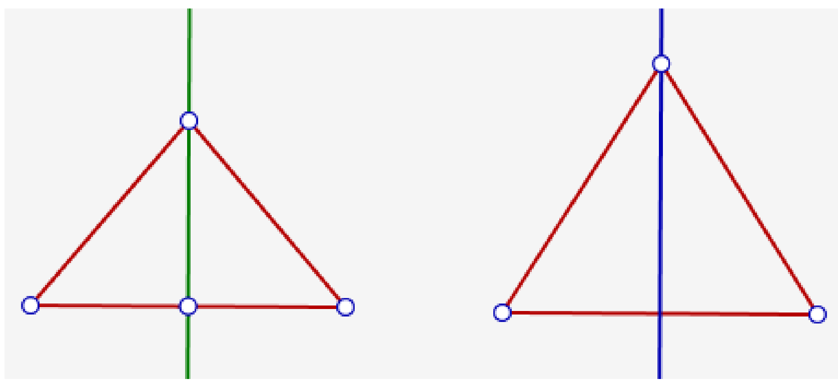

Figura 38. Mediatrices del triángulo 2

Construido el triángulo lo modificamos de tal manera que ellos notaran que por más cambios que se le hicieran éste siempre iba ser isósceles.

Segundo: Construcción del círculo circunscrito

Lo que seguía ahora, era mostrarles que un triángulo tiene tres mediatrices y que su punto de intersección es el centro de la circunferencia circunscrita a él.

Ubicamos tres puntos no colineales y les pedimos a los estudiantes que trazaran una circunferencia que pasara por estos puntos. Al desarrollar el ejercicio no entendían lo que se les pedía, pues para trazar la circunferencia tomaban uno de los tres puntos como centro e intentaban que ésta pasara por los otros dos.

Cuando notamos que no entendían cómo resolver el ejercicio, les aclaramos que los tres puntos debían estar sobre la circunferencia. Cuando entendieron lo que tenían que hacer, los estudiantes identificaron que tenían que ubicar otro punto de tal manera que éste fuese el centro de la circunferencia. Así que comenzaron a trazar circunferencias al tanteo, buscando que éstas pasaran por los tres puntos. Esto fue lo que hicieron:

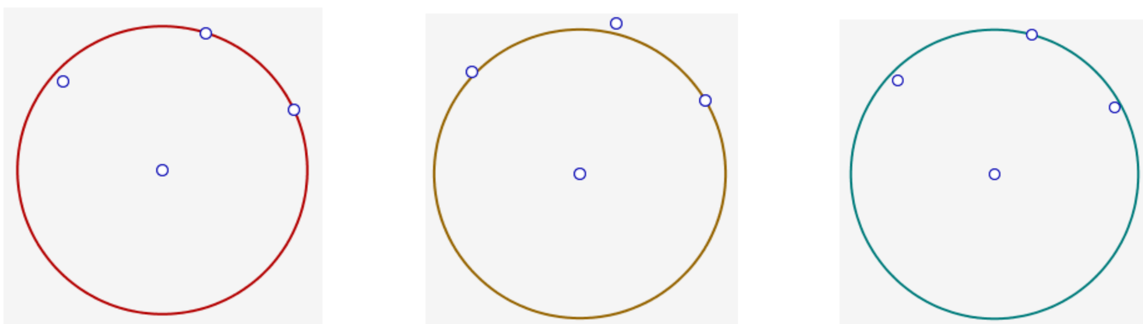

Figura 39. Construcción del circuncírculo 1

Al ver lo que estaban haciendo, les preguntamos a los estudiantes cuáles características tenía el punto que estaban buscando. Después de hacer un análisis, los alumnos reconocieron que el punto debía estar a igual distancia de los puntos dados. Entonces les hicimos otra pregunta -¿Cómo hacemos para ubicar correctamente el punto?-, para ayudarlos con la respuesta, les recordamos lo que se había hecho en el ejercicio anterior para el reconocimiento de la mediatriz, donde identificaron los puntos que están a igual distancia de los extremos de un segmento. De esta manera procedieron a unir dos de los puntos dados con un segmento y luego trazaron la mediatriz, los estudiantes tenían claro que el punto que estaban buscando debía estar sobre la mediatriz, entonces ubicaron un punto sobre ésta para luego trazar una circunferencia con centro en este punto y que pasara por los extremos del segmento, los estudiantes arrastraron el centro de la circunferencia buscando que el tercer punto estuviera sobre la circunferencia, pero sabiendo que esa no era la manera correcta de hacerlo, pues si se movía nuevamente la circunferencia, el punto ya no estaría sobre ésta. Veamos:

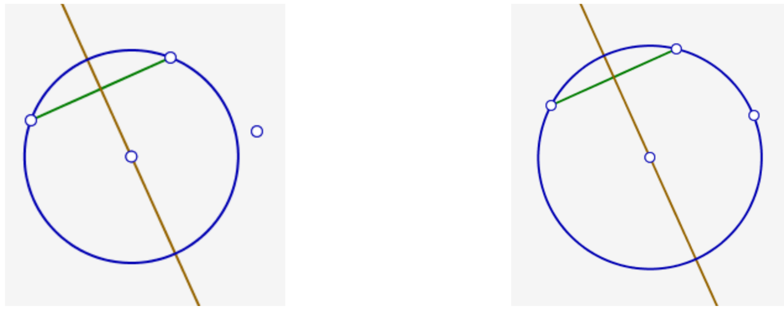

Figura 40. Construcción del circuncírculo 2

En ese momento lo importante era que los estudiantes sabían que debían construir un punto que no pudiera moverse, para que la circunferencia pasara por los tres puntos dados. Para esto, los estudiantes borraron la circunferencia y analizaron lo que habían hecho, preguntándose: "¿Qué pasa si construimos otro segmento y trazamos su mediatriz?", inmediatamente unieron otros dos de los puntos dados con un segmento para trazar la mediatriz correspondiente. Cuando vieron que las dos mediatrices se cortaban en un punto, ellos dedujeron que éste debía ser el centro de la circunferencia y seguidamente procedieron a trazarla:

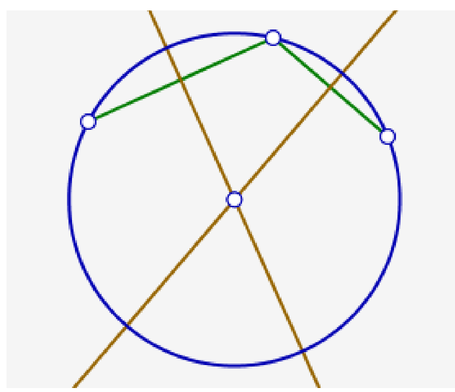

Figura 41. Construcción del circuncírculo 3

Posteriormente los estudiantes trazaron el otro segmento que formaba el triángulo y trazaron su mediatriz. Así los alumnos observaron que el triángulo tiene tres mediatrices, que tienen un punto en común (circuncentro) que está a igual distancia de los vértices del triángulo y que a su vez es el centro de la circunferencia circunscrita en él.

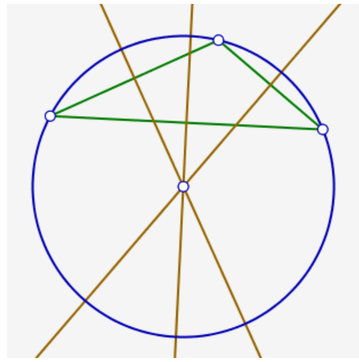

Figura 42. Construcción del circuncírculo 4

Finalmente los estudiantes observaron que el triángulo obtenido era obtusángulo y que el circuncentro se encontraba fuera de éste. Les pedimos que modificaran el triángulo de tal modo que fuese acutángulo, donde notaron que el circuncentro estaba por dentro. Por último concluyeron que en el caso del triángulo rectángulo el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa.

EVALUACIÓN DE LA ACTIVIDAD

La actividad que realizamos sirvió para cumplir los objetivos que habíamos planeado; con la ayuda del software los estudiantes reconocieron la mediatriz como lugar geométrico e identificaron que todo triángulo tiene tres mediatrices; además, reconocieron que el circuncentro está a igual distancia de los vértices del triángulo y es por esta razón que se puede trazar la circunferencia circunscrita.

En el desarrollo de la segunda actividad los alumnos tuvieron dificultades, así que tuvimos que sugerirles que utilizaran la mediatriz para llegar a la solución.

Durante el desarrollo de la actividad se dieron cosas que no teníamos planeadas, que nos permitieron observar cómo el estudiante iba mejorando la utilización del programa, mostrando tener un mejor enfoque al momento de resolver un ejercicio. Por ejemplo, para construir el triángulo isósceles utilizaron la circunferencia y aunque el ejercicio no estuviera bien hecho, mostraron tener claridad en el concepto, ya que reconocían que la distancia del centro a cualquier punto sobre la circunferencia es igual. En la resolución del primer ejercicio, cuando identificaron que todos los puntos parecían conformar una recta, procedieron a verificar trazándola sin esperar que nosotros les sugiriéramos.

Algo bueno para resaltar es el hecho de que uno de los estudiantes afirmara que sólo con trazar dos mediatrices encontrábamos el circuncentro, que no era necesario trazar la otra ya que ésta iba a pasar por este punto.

2.4 CUARTA SESIÓN: Bisectrices del triángulo y problemas de aplicación

BISECTRICES
PLANEACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

La bisectriz de un ángulo es otro concepto que queremos que los estudiantes definan como un lugar geométrico. La tarea que se propone consiste en que tracen una circunferencia tangente a dos rectas secantes en uno de los ángulos que se forman.

Buscamos que los estudiantes ubiquen puntos de tal manera que la distancia a las dos rectas sea aproximadamente igual. Con esto observarán que todos estos puntos conforman una recta, la bisectriz. De esta manera identificarán la bisectriz como el lugar geométrico de los puntos que equidistan a los lados del ángulo y podrán utilizarla para trazar la circunferencia.

De manera similar como sucede con las mediatrices y el circuncentro, las bisectrices de un triángulo y su punto de intersección (incentro), se utilizan para trazar la circunferencia inscrita en el triángulo, pero los estudiantes no entienden que esto se puede hacer porque el incentro está localizado a igual distancia de los lados del triángulo. Con el fin de que los estudiantes comprendan la razón por la cual se puede trazar la circunferencia inscrita en el triángulo, construirán un triángulo (cualquiera) donde deberán trazar una circunferencia tangente a los tres lados, esto obligará a que los estudiantes busquen un punto que esté a igual distancia de los tres lados. Para realizar esta tarea, es necesario que hayan comprendido tres conceptos fundamentales: recta tangente a una circunferencia, distancia entre un punto y una recta y bisectriz de un ángulo, ya que tendrán que utilizarlos para que la circunferencia sea trazada correctamente.

DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES

Primero: Circunferencia tangente a dos rectas secantes

Trazamos dos rectas secantes y pedimos a los alumnos que trazaran una circunferencia tangente a éstas en uno de los ángulos que se formaban.

Al dar el ejercicio, ellos notaron que para trazar la circunferencia tangente a los lados del ángulo, debían ubicar un punto de tal forma que éste estuviera a igual distancia de los lados. Para hacerlo, situaron un punto interior al ángulo y trazaron rectas perpendiculares a los lados del ángulo y que pasaran por este punto. Seguidamente trazaron segmentos desde el punto situado hasta las intersecciones de las rectas perpendiculares con los lados del ángulo y calcularon las longitudes correspondientes. Con la opción *mover punto* lo estudiantes buscaron que estas distancias fueran aproximadamente iguales. Veamos:

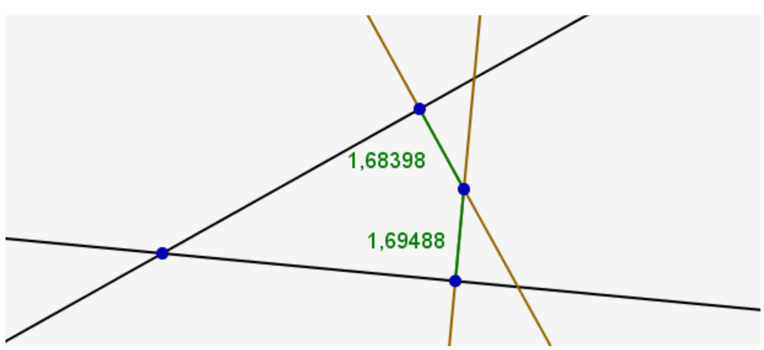

Figura 43. Bisectrices del triángulo

Posteriormente, los alumnos procedieron a construir una circunferencia con centro en el punto situado y de radio la longitud de uno de los segmentos. Observemos lo que hicieron:

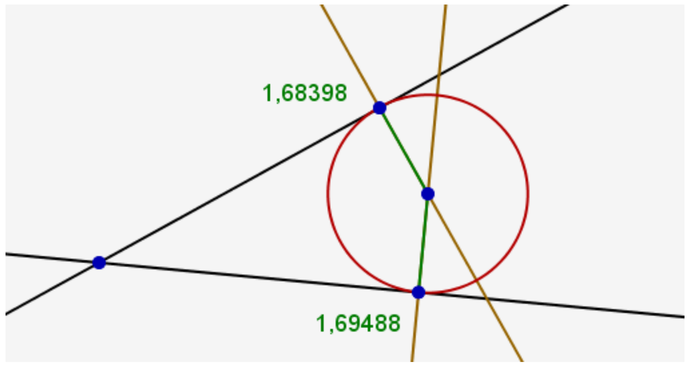

Figura 44. Bisectriz como lugar geométrico 1

Para los estudiantes la construcción estaba hecha de manera correcta, olvidando que la figura debía soportar el arrastre, es decir, que al mover alguno de los puntos, la circunferencia siempre tenía que ser tangente a los lados del ángulo. Con el fin de que el estudiante notara que el ejercicio no era correcto, movimos una de las rectas, de modo que la circunferencia ya no fuera tangente. Después de que los alumnos intentaran buscar una manera de resolver el ejercicio y no encontrarla, les pedimos que ocultaran la circunferencia y las rectas perpendiculares, y que siguieran ubicando más puntos que cumplieran la misma condición del punto inicial.

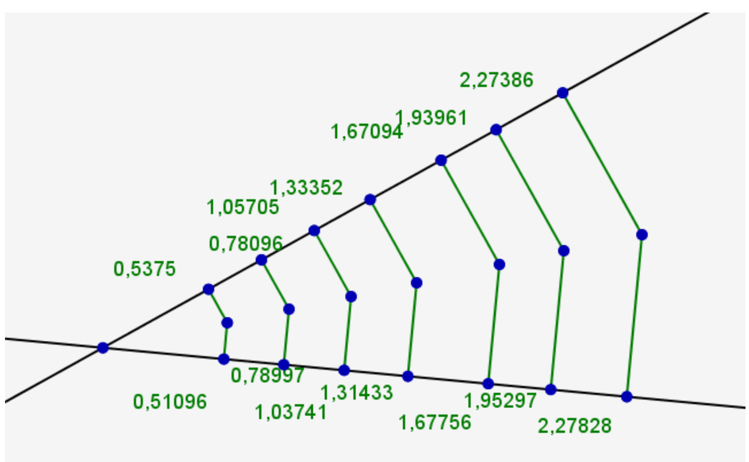

Figura 45. Bisectriz como lugar geométrico 2

Al ver esto los estudiantes inmediatamente dijeron que todos estos puntos que se encontraban a igual distancia de los lados del ángulo conformaban una recta. Para verificar lo dicho procedieron a trazarla. Trazada esta recta, se les pidió que ocultaran los segmentos y que analizaran qué pasaba con el ángulo. Los estudiantes conjeturaron que la recta dividía al ángulo en dos partes iguales, y para corroborar calcularon la medida de cada uno de estos ángulos.

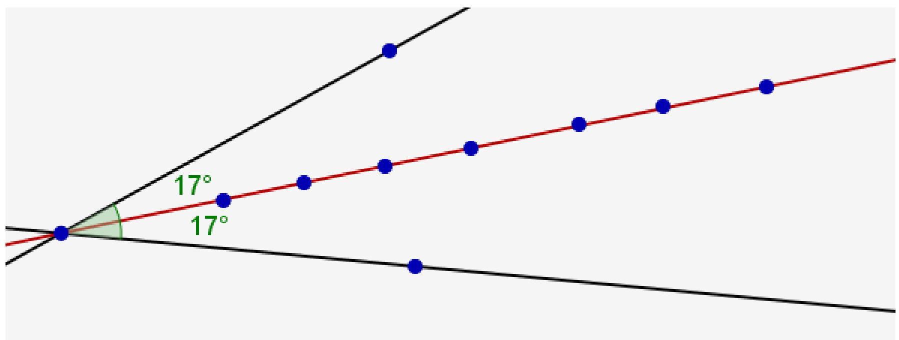

Figura 46. Bisectriz como lugar geométrico 3

Con esto procedimos a decirles a los estudiantes que la recta encontrada recibe el nombre de bisectriz y que se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo y que además biseca el ángulo, cosa que ellos notaron como se describió anteriormente.

Los estudiantes entendieron que para trazar la circunferencia tangente a los lados del ángulo debían trazar la bisectriz, entonces borraron los puntos que habían ubicado y la recta que pasaba por ellos, para luego trazar la bisectriz con la opción que ofrece el programa. Después ubicaron un punto sobre la bisectriz y trazaron las perpendiculares a los lados del ángulo por este punto, seguidamente construyeron una circunferencia con centro el punto sobre la bisectriz hasta la intersección de la recta perpendicular con el lado del ángulo. Al terminar la construcción los alumnos movían cualquier punto y observaban que la circunferencia siempre era tangente. Esto fue lo que hicieron:

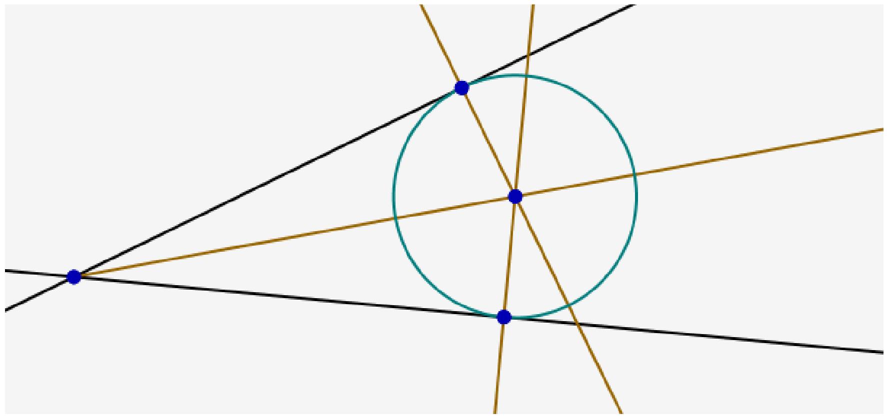

Figura 47. Bisectriz como lugar geométrico 4

Segundo: Construcción del círculo inscrito

El siguiente paso era mostrarles que en un triángulo se pueden trazar tres bisectrices y que éstas tienen un punto en común, el cual es el centro de la circunferencia inscrita en él.

Pedimos a los estudiantes que abrieran un archivo nuevo y que construyeran un triángulo cualquiera, para que luego trazaran una circunferencia tangente a los lados del triángulo.

Luego de construir el triángulo, los estudiantes trazaron la bisectriz de cada ángulo, esto lo hicieron ya que asumían que como al igual que las mediatrices y las alturas, el triángulo también tendría tres bisectrices. Al ver que éstas se cortaban en un punto, decían que éste era el que se encontraba a igual distancia de los lados del triángulo y por tanto sería el centro de la circunferencia que se quería trazar. Como este ejercicio fue parecido al anterior, los alumnos no presentaron ningún inconveniente al momento de resolverlo.

Después de haber trazado las bisectrices del triángulo e identificar su punto de intersección, trazaron las perpendiculares a cada uno de sus lados por este punto. Inmediatamente construyeron la circunferencia con centro en el punto de intersección de las bisectrices hasta el punto de intersección entre uno de los lados del triángulo y la perpendicular correspondiente. Esto se ilustra en la siguiente figura:

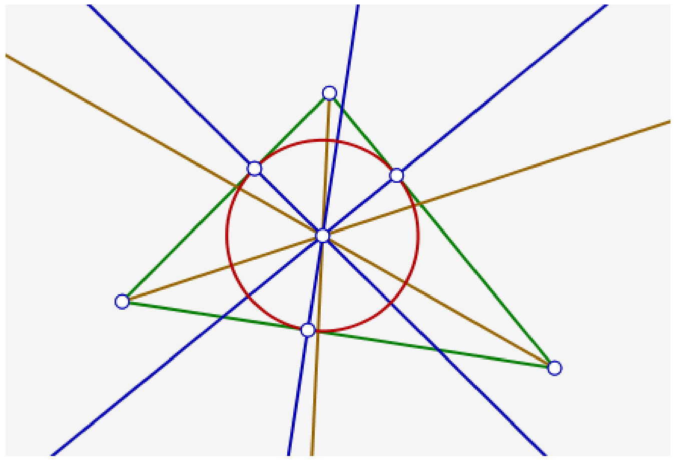

Figura 48. Construcción del incírculo

Hecho esto les mencionamos que el punto de intersección de las bisectrices se llama incentro y que como ellos ya lo habían mencionado, está a igual distancia de los lados del triángulo, y que es por esta razón que se puede trazar la circunferencia inscrita en él.

EVALUACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Llegar a la definición de bisectriz como lugar geométrico y comprender por qué es posible trazar la circunferencia inscrita en el triángulo, fue algo que los estudiantes descubrieron a través del desarrollo de la actividad, lo que nos muestra que la actividad funcionó como lo esperábamos.

El dar solución a las actividades planeadas para esta sesión, permitió observar en los alumnos la utilización de los conceptos que hasta ese momento se habían aprendido, pues no presentaron dificultad alguna, lo que indica que estos ejercicios han sido de gran utilidad al momento de afianzar los conocimientos.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

PLANEACIÓN

La actividad final consiste en resolver dos problemas donde tendrán que aplicar el concepto de mediatriz y bisectriz. Esperamos que no tengan ningún inconveniente al momento de solucionarlos.

DESARROLLO

Para finalizar con esta sesión les dimos a los alumnos los siguientes ejercicios[4] para que resolvieran en el programa:

* En una ciudad pequeña se quiere construir un quiosco que quede a la misma distancia del Palacio Nacional, de la Secretaría de Educación y del Edificio del Congreso, ¿dónde deberán construirlo?

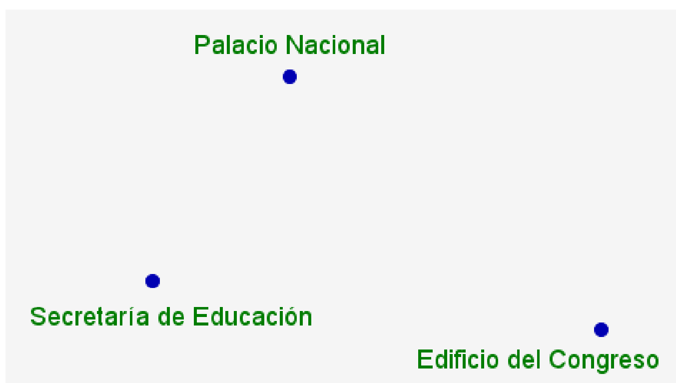

Figura 49. Problema 1

* Se tiene un terreno de forma triangular y se va a construir en él una fuente circular de tal manera que toque los tres lados del terreno y la parte restante se cubrirá de pasto. Dibuja cómo quedaría la fuente en dicho terreno.

4-Tomado de la internet. Recuperado el 15 de noviembre de 2008 de: http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/PLANESCLASE/segundogrado/B4/B4A3.doc

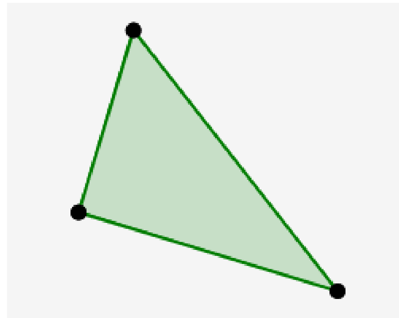

Figura 50. Problema 2

Los estudiantes al analizar lo que se pedía en el primer problema, comprendieron que para resolverlo, debían encontrar el circuncentro del triángulo que se formaba al unir con segmentos los tres lugares de la ciudad.

Luego de haber hallado el circuncentro los alumnos ocultaron los segmentos y las mediatrices trazadas, y con la opción texto nombraron al circuncentro como el quiosco, llegando así a la solución del problema. Observemos:

Figura 51. Solución problema 1

De igual manera identificaron que para resolver el segundo problema, debían construir la circunferencia inscrita en el triángulo.

Los estudiantes trazaron las bisectrices, ubicaron el incentro, trazaron una perpendicular a uno de los lados por este punto y construyeron la circunferencia.

Luego ocultaron las bisectrices y la perpendicular, y procedieron a rellenar la fuente. Veamos lo que hicieron:

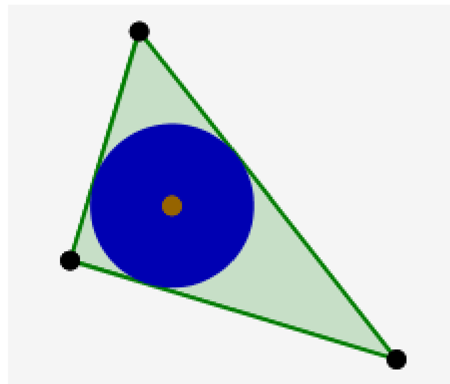

Figura 52. Solución problema 2

EVALUACIÓN

Como habíamos previsto, los estudiantes no tuvieron ningún inconveniente en la solución de los problemas, mostrando tener claridad en los conceptos aprendidos.

3. CONCLUSIONES

Por medio del software pudimos mostrar contraejemplos que permitieron a los estudiantes reconocer las concepciones erróneas que tenían y de este modo lograr corregirlas. Por ejemplo, en el concepto altura de un triángulo, cuando notaron que un triángulo tiene tres alturas; en el momento en que ellos trazaron la altura del triángulo prototípico, creían que ésta era la única, entonces giramos el triángulo que diseñamos en el programa, de modo que otro de sus lados fuera horizontal, esto con el fin que observaran que por este lado era posible trazar otra altura. El girar el triángulo, fue el contraejemplo que ilustró que el triángulo no tiene sólo una altura. Esto permitió que los estudiantes reconocieran que en todo triángulo se pueden trazar tres alturas.

En las clases de matemáticas usualmente se dan las definiciones de los conceptos y luego se plantean ejercicios que implican utilizarlos, nosotros por el contrario planteamos ejercicios donde los estudiantes primero debían descubrir los conceptos y así utilizarlos para llegar a la solución. De esta manera, las actividades planteadas a los alumnos les permitieron reconocer la mediatriz y la bisectriz como lugares geométricos. Por ejemplo, se les pidió que construyeran un triángulo isósceles a partir de un segmento, y la interacción con el software les permitió buscar puntos que estuvieran a igual distancia de los extremos del segmento, y constatar que todos esos puntos están sobre una línea recta que pasa por el punto medio y es perpendicular al segmento. De esta manera identificaron la mediatriz como un lugar geométrico, y la utilizaron para construir el triángulo isósceles.

El identificar la mediatriz como lugar geométrico hizo posible que los estudiantes llegaran a un razonamiento que permitió reconocer por qué es necesario trazar las mediatrices para construir la circunferencia circunscrita al triángulo. Cuando se les pidió que construyeran una circunferencia que pasara por tres puntos no colineales, los estudiantes notaron que el centro de esta circunferencia debía estar a igual distancia de los tres puntos. Lo que hicieron fue unir los puntos dados con segmentos para buscar los puntos equidistantes a sus extremos, aplicando la mediatriz como lugar geométrico; de esta manera se dieron cuenta que la intersección de las mediatrices era el centro de la circunferencia a trazar. Esto muestra cómo el uso del software contribuye a que el estudiante pueda tener un aprendizaje significativo, ya que utilizaron el concepto de mediatriz como lugar geométrico para descubrir otro concepto nuevo, el de la circunferencia circunscrita al triángulo.

El concepto de altura del triángulo que los estudiantes tenían, hacía referencia a una imagen mental y no a una definición formal. Cuando se les pidió que trazaran la altura del triángulo prototípico, los estudiantes trazaron un segmento a ojo que iba desde el vértice superior hasta el lado horizontal, este segmento parecía ser perpendicular, pero ellos no utilizaron la herramienta "recta perpendicular" del programa. El trabajar con el software permitió, a través de la manipulación de la figura, que los estudiantes precisaran la perpendicularidad entre el segmento y el lado horizontal. De esta manera notamos cómo los alumnos modifican los conceptos preexistentes con la información aprendida. Esto posibilita que los estudiantes afiancen los nuevos conocimientos, dando lugar a un aprendizaje significativo.

Podemos concluir entonces, que la posibilidad de manipular las figuras en la pantalla del computador, permite al profesor intervenir para cuestionar las concepciones de los alumnos, sin emitir juicios de valor sobre dichas concepciones. El arrastre continuo de las figuras permite por ejemplo producir contraejemplos que llevan a los alumnos a corregir sus afirmaciones, o permite evidenciar en la pantalla propiedades que los alumnos mismos pueden descubrir.

El dinamismo que ofrece el programa posibilita que los estudiantes pongan en obra sus propias concepciones y busquen medios de verificación, facilitando así un aprendizaje significativo, pues los nuevos conceptos se construyen sobre los preconceptos que los alumnos tienen, bien sea como un complemento de los mismos, o como un concepto contradictorio con los mismos.

4. BIBLIOGRAFÍA

[1] AUSUBEL – NOVAK – HANESIAN. Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo. 2° Ed. TRILLAS. México (1983). Recuperado de http://www.monografias.com/trabajos6/apsi/apsi.shtml.

[2] HERNÁNDEZ MENESES Lyda. Actividades para la enseñanza de las líneas notables del triángulo y sus puntos de intersección. Trabajo de grado, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Bucaramanga, 2004.

[3] HERRERA ORTÍZ Alicia. Enseñando con el Computador. Monografía, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Bucaramanga, 2000.

[4] PRADA APARICIO Claudia. Desarrollo del Pensamiento espacial y Geométrico. Monografía, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Bucaramanga, 2002.

[5] Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemática de la educación Básica y Media de Colombia (2004). Ministerio de Educación Nacional, Bogotá-Colombia.

[6] Plan de Clase (3/4). Recuperado de http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/PLANESCLASE/segundo grado/B4/B4A3.doc

5. ANEXO: PRUEBA DIAGNÓSTICA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II

Nombre: ______________________________ Fecha: _____________

1) Une con una línea el concepto correspondiente a su definición:

• Triángulo Rectángulo	Sus tres lados tienen la misma longitud.
• Triángulo Escaleno	Uno de sus ángulos es obtuso.
• Triángulo Isósceles	Tiene un ángulo recto.
• Triángulo Acutángulo	Todos sus ángulos son agudos.
• Triángulo Equilátero	Tiene dos lados de la misma longitud.
• Triángulo Obtusángulo	Sus lados tienen longitudes diferentes.

2) Cuál es la definición de:

a. Radio de una circunferencia.
b. Distancia entre dos puntos.

3) ¿Cuál es la distancia más corta entre una recta y un punto exterior a ella?

4) ¿Qué es una recta tangente a una circunferencia?

Anexo 1. Prueba diagnóstica