Diseño de un aula virtual de aprendizaje con el concepto de derivada y sus aplicaciones en situaciones de modelación.

Anderson Jhoan Serna Vega

Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciado en Matemáticas

Directora:
Shirley Johanna Toloza Peña
Magister en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bucaramanga
2023

Dedicatoria

A mi madre, Sandra, quien ha sido mi fortaleza y apoyo incondicional en cada momento de mi vida, siendo siempre la clave del éxito que he tenido, tengo y pueda tener.

A mis hermanos, Jherson y Wilmar, quienes son mi motivación para salir adelante y de quienes deseo ser siempre un ejemplo.

A mi pareja, Shaira, quien, sin importar la distancia, me alienta día tras día, motivándome en cada momento difícil de mi vida, demostrándome su amor y lealtad.

A quien quise como un padre, Henry Castañeda; y a quien quise como un hermano, Jhon Esneider, los cuales, aunque se encuentren en el cielo, siempre estarán presentes en mi mente y corazón.

Este logro es por y para ustedes, gracias por todo lo brindado.

Agradecimientos

Primeramente, a Dios, pues es por su gracia y voluntad que he culminado cada una de las fases de este proyecto.

A mi núcleo familiar, por motivarme, ser mi apoyo incondicional, y estar siempre para mí.

A mis amigos y seres queridos, quienes me han acompañado y brindado diferentes momentos especiales en el transcurrir de mi vida.

A mi amigo y profesor José Vergel, quien inculcó y despertó en mí el interés por esta hermosa carrera, apoyándome, aconsejándome y motivándome a no rendirme.

A mis tíos Diego, Yaleisy y Mayerly por el apoyo económico brindado a lo largo de mi carrera profesional.

A mi tío Darwin, por siempre escucharme, aconsejarme y ayudarme en los diferentes momentos de incertidumbre.

A todos y cada uno de los profesores que aportaron en mi crecimiento intelectual y estructura como persona y futuro profesional, en especial a mi directora, Shirley Toloza, por la paciencia, dedicación y acompañamiento en este trabajo.

A la selección de Futsal UIS, por darme una familia más, por brindarme esos espacios en los que dejaba de lado todos los problemas, y solo era feliz jugando a la pelota con cada uno de los hermanos que me brindó esta selección.

A las Residencias Universitarias UIS y cada uno de sus integrantes, por darme la oportunidad de culminar mis estudios en este bello edificio y por acogerme como un integrante más de esta hermosa familia.

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

RESUMEN

TÍTULO: DISEÑO DE UN AULA VIRTUAL DE APRENDIZAJE CON EL CONCEPTO DE DERIVADA Y SUS APLICACIONES EN SITUACIONES DE MODELACIÓN

AUTOR: ANDERSON JHOAN SERNA VEGA

PALABRAS CLAVE: AULA VIRTUAL DE APRENDIZAJE, AVA, TECNOLOGÍA, MODELACIÓN, DERIVADA.

DESCRIPCIÓN:

En el siguiente informe se expondrán los beneficios observados en el diseño e implementación de un aula virtual de aprendizaje (Moodle, plataforma utilizada en la Universidad Industrial de Santander), con el concepto de derivada y sus aplicaciones en situaciones de modelación a estudiantes de primer semestre de Ingeniería. La plataforma de Moodle, fue utilizada para la producción de unidades de aprendizaje mediante el uso de TICs.

Para lograr el objetivo, se utilizaron elementos teóricos de la modelación matemática, la derivada desde una perspectiva histórica, el apoyo de la tecnología y sus beneficios, y, por último, el pensamiento matemático, específicamente el pensamiento variacional. Así mismo, se realizó una revisión bibliográfica a nivel local, nacional e internacional, sobre la influencia de la tecnología y la utilización de ambientes virtuales de aprendizaje en la enseñanza y aprendizaje de la derivada.

Por otro lado, tras reflexionar sobre la experiencia de la práctica en docencia, se obtiene como resultado que el Aula Virtual de Aprendizaje junto a diferentes herramientas digitales, propician al buen desarrollo de la clase, además de influenciar de manera positiva en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la derivada, puesto que se permite una interacción con el movimiento y la variación de los fenómenos, siendo esta la esencia de la derivada y, por ende, del cálculo diferencial.

ABSTRACT

TITLE: DESIGN OF A VIRTUAL LEARNING CLASSROOM WITH THE CONCEPT OF DERIVATIVE AND ITS APPLICATIONS IN MODELING SITUATIONS

AUTHOR: ANDERSON JHOAN SERNA VEGA

KEYWORDS: VIRTUAL LEARNING CLASSROOM, AVA, TECHNOLOGY, MODELING, DERIVATIVE.

DESCRIPTION:

The following report will present the benefits observed in the design and implementation of a virtual learning classroom (Moodle, platform used at the Universidad Industrial de Santander), with the concept of derivative and its applications in modeling situations to first semester engineering students. The Moodle platform was used for the production of learning units through the use of ICTs.

To achieve the objective, theoretical elements of mathematical modeling, the derivative from a historical perspective, the support of technology and its benefits, and finally, mathematical thinking, specifically variational thinking, were used. Likewise, a bibliographic review was made at local, national and international levels, on the influence of technology and the use of virtual learning environments in the teaching and learning of the derivative.

On the other hand, after reflecting on the experience of the teaching practice, it is obtained as a result that the Virtual Learning Classroom together with different digital tools, favor the good development of the class, in addition to positively influence the teaching and learning processes of the derivative, since it allows an interaction with the movement and variation of the phenomena, being this the essence of the derivative and, therefore, of differential calculus.

1. Planteamiento del problema

La asignatura de cálculo diferencial es cursada en los primeros semestres académicos de educación superior (François Pluvinage 2012, citado por Roa, Parada y Fiallo, 2012) en carreras como: Ingeniería Civil, Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Electrónica, Ingeniería Industrial, Ingeniería Mecánica, entre otras. También hace parte del ciclo básico de carreras afines a la ciencia como Matemáticas, Física, Química, etc.

El concepto de derivada es uno de los temas tratados en cálculo diferencial, pero en este curso no solo se estudia este objeto matemático, sino también otros conceptos que esta tiene como fundamentos, tales como las propiedades de los números reales, funciones reales, límites, continuidad, todo llevando a encapsular el concepto de derivada.

En esa misma línea, uno de los problemas más sobresalientes en la educación superior, es el aprendizaje de la derivada (Cervantes-Salazar, Camarena-Gallardo, Pinet-Plasencia, 2008). Los ejercicios repetitivos son causa de lo anterior, pues estos radican en encontrar la función derivada de una expresión algebraica (Mercapide, 2018). En consecuencia, los estudiantes quedan con la noción de que la derivación no es más que reglas de derivación o recta tangente, lo que genera una nula apreciación de los conceptos teóricos (Berry y Nyman, 2003 citados por Pereyra y Herrera, 2020). Esto último se da, ya que al ser algo operacional y mecánico, adquieren mucha facilidad en aplicar estas reglas y no en la comprensión de dicho concepto.

Según Pereyra y Herrara (2020), una gran variedad de investigadores de la Educación Matemática, analizaron el concepto de la derivada de una función, coincidiendo en que los estudiantes presentan inconvenientes en la apropiación y comprensión de dicho concepto. Las dificultades se pueden presentar por diversos factores, tales como el hecho de que, al ser su primer semestre en una universidad, trae consigo dificultades que ralentiza el proceso de enseñanza y aprendizaje. Entre esas dificultades, se puede mencionar las malas bases con la que estos vienen a enfrentarse a la educación superior, teniendo así un rendimiento regular o muy bajo en sus primeros semestres universitarios. Por otro lado, un factor de mucha importancia es lo mecánico que pueden ser los ejercicios inmersos en la enseñanza del cálculo diferencial, ya que se basan en procesos netamente algebraicos. Apoyando lo anterior, Zúñiga (2007) menciona que es muy habitual que el desarrollo de habilidades algebraicas sea el enfoque de la enseñanza del cálculo diferencial.

Debido al aprendizaje y apropiación del concepto de la derivada por medio de una metodología tradicional, se evidencia entre muchos alumnos un predominio con lo que respecta a los procedimientos para hallar la derivada de una función y no en lo verdaderamente importante, el aprendizaje de la esencia misma de dicho objeto matemático (Artigue, 1995 citado por Mercapide, 2018).

Podemos analizar entonces que el problema también se viene dando por la poca adaptación del docente para con sus estudiantes. Ahora bien, Amaro (2012) citado por Lugo (2016), menciona que:

> "El docente debe pasar de transmisor de información a guía del proceso de aprendizaje, convertirse en un motivador y facilitador de recursos, diseñador de nuevos entornos de aprendizaje con TIC, adaptador y productor de materiales en distintos formatos, y evaluador de los procesos que se desarrollan en estos nuevos entornos" (p. 118).

Podemos resaltar entonces algo muy relevante, y es el hecho de que el docente debe aprovechar la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de distintos objetos matemáticos, puesto que los libros no muestran el dinamismo de los conceptos y objetos matemáticos propios del cálculo, y mucho más importante de lo que no muestran los libros, es lo que puede ofrecer la tecnología, a la enseñanza y el aprendizaje de la derivada.

Tall, (2009) citado por Villa-Ochoa, González-Gómez y Carmona-Mesa (2018), resalta lo importante que son las reproducciones de efectos visuales del cálculo, utilizando applets (software) y aquellos aspectos dinámicos de la matemática. Por ende, es importante y necesario el uso de la tecnología, puesto que investigaciones como la de Habre y Abboud (2006), en la cual se evidencia una comprensión de la derivada por parte de los alumnos (Pereyra y Herrara, 2020) gracias a la mediación a través de un software para la enseñanza del concepto. Lo anterior se pudo evidenciar en las entrevistas realizadas a los estudiantes y en el desempeño de las respuestas dadas en los exámenes los cuales contenían preguntas muy específicas.

Además, las tecnologías digitales como GeoGebra, nos ofrecen simulaciones, las cuales dan respuestas empíricas que son utilizadas para dar una respuesta formal y matemática a situaciones problema. En otras palabras, las simulaciones nos ayudan a explorar problemas matemáticos ilustrándonos lo que viene siendo la resolución de dicho problema, el cual, en algunas ocasiones, se va dando por ensayo y error como una estrategia de solución de problemas. Por lo general, los estudiantes se deben enfrentar a la pregunta: ¿Cómo explico matemáticamente lo hecho y visto en la simulación?

Algunas simulaciones muestran el uso de la derivada en la realidad y estas permiten que los estudiantes tengan un mejor aprendizaje, ya que se puede explorar, analizar e interactuar con la situación (Cervantes-Salazar, Camarena-Gallardo, Pinet-Plasencia, 2008).

Las situaciones involucradas en las simulaciones pueden ser de modelación matemática, como sugiere PISA (Programme for International Student Assessment) y el ICMI. Por otro lado, Blum (2002) citado por Cervantes-Salazar, Camarena-Gallardo, Pinet-Plasencia, (2008) menciona que, aprovechar las didácticas de modelación y aplicaciones matemáticas mejora el aprendizaje de las matemáticas, aprovechando la motivación del estudiante en el hecho de que pueda identificar aquellas situaciones prototípicas de la derivada en su cotidianeidad.

Los docentes, aplican matemática mediante la modelación, presentando a sus estudiantes la utilidad de esta (Villa-Ochoa, González-Gómez y Carmona-Mesa, 2018). Por lo tanto, despierta el interés de los estudiantes, trayendo como beneficio el hecho de que la propuesta didáctica tenga cierto potencial (Cervantes-Salazar, Camarena-Gallardo, Pinet-Plasencia, 2008).

1.1.Pregunta

¿Qué beneficios genera el uso de un aula virtual de aprendizaje con los conceptos de derivada y aplicación de la derivada en estudiantes de Ingeniería, utilizando situaciones de modelación matemática?

1.2.Objetivo general

Diseñar, implementar e identificar los beneficios que genera un aula virtual de aprendizaje con los conceptos de derivada y aplicaciones de la derivada en estudiantes de Ingeniería en el que se utiliza situaciones de modelación matemática.

1.2.1. Objetivos específicos

- Diseñar un aula virtual de aprendizaje con los conceptos de derivada y aplicaciones de la derivada que propicie el interés y participación en estudiantes de Ingeniería.
- Implementar el aula virtual de aprendizaje utilizando sus diferentes herramientas digitales.
- Utilizar tecnológicas digitales como el Applet de GeoGebra, videos explicativos, Website, entre otros.
- Identificar los beneficios que genera el aula virtual de aprendizaje utilizando sus diferentes herramientas digitales.

2. Antecedentes

En el siguiente apartado se presentarán las diferentes investigaciones internacionales, nacionales y locales relacionadas con la problemática abarcada en este informe.

2.1.Antecedentes internacionales

Guilcapi (2021), llevó a cabo la investigación de *Aula virtual para reforzar el aprendizaje del cálculo de derivadas* en Quito – Ecuador. Tuvo como población a los diferentes estudiantes que se encontraban cursando la asignatura de cálculo diferencial, escogiendo como muestra a una cantidad de 20 alumnos. A través de su estudio, diseñó un aula virtual en la plataforma conocida como Moodle, esto, con la finalidad de fortalecer el aprendizaje de los diferentes temas inmersos en la derivada, con el apoyo de las diferentes herramientas ofrecidas por las TIC. La metodología utilizada en esta investigación tuvo una orientación mixta ya que combina tanto el enfoque cualitativo como el cuantitativo con la finalidad de ser lo más exacto posible en el momento de interpretar los datos obtenidos. Los resultados obtenidos fueron, por un lado, ayudar en la disminución de estudiantes que desertaban de la carrera, y, por otro lado, el aumento del interés por parte del estudiante, el cual no era logrado por lo tradicionalista que eran los métodos de enseñanza.

Por otro lado, López (2021) en la investigación titulada *Impacto del uso de ovas diseñados para la enseñanza de la derivada en ingeniería civil* realizada en el Estado de Michoacán – México, con un total de 34 alumnos los cuales se encontraban cursando el primer semestre de Ingeniería Civil, buscaba diseñar OVAs para poder contribuir en el aprendizaje de las derivadas a los estudiantes que se encuentran cursando cálculo diferencial. En esta investigación, se tuvo un enfoque cualitativo, teniendo en cuenta la observación participativa la cual permite tener una mejor interacción social entre los entes implicados. Se obtuvieron resultados satisfactorios, puesto que, en un principio, se realizó una prueba en la cual aprobaron un 26% y reprobaron un 74% de los estudiantes, pero luego de la implementación de los OVAs, en total, un 82% de estudiantes aprobaron la prueba y solo un 18% la reprobaron. Adicionalmente, se obtuvo una intervención más eficaz por parte de los alumnos, los cuales manifestaron un mayor grado de autonomía a la hora de obtener su propio conocimiento.

2.2.Antecedentes nacionales

Torrijos y Rubiano (2011), presentan la investigación *Análisis del rendimiento académico en un curso de cálculo diferencial usando como herramienta el aula virtual,* en la cual se veían inmersos los temas de límites y continuidad, derivación, derivada y aplicación de la derivada (siendo estos últimos tres los de nuestro interés). Para dicha investigación, se tuvo en cuenta a estudiantes que se encontraban en programas académicos de ingeniería, de los cuales había dos grupos, uno experimental y otro de control. Se tuvo como objetivo determinar y analizar el impacto y alcance que se produce en los diferentes estudiantes universitarios que se encuentran cursando la asignatura de cálculo diferencial después de implementar un ambiente virtual de aprendizaje. Se utilizó una metodología mixta puesto que se tienen en cuenta datos cualitativos y cuantitativos, proporcionando una investigación no experimental, sino exploratoria. Por medio de recursos de aprendizaje como lo fueron documentos y videos disponibles en internet y que eran de libre acceso, escogidos cuidadosamente en cada uno de los temas implicados en la derivada y aplicación de esta, se obtuvo como resultado que un ambiente de aula virtual utilizado como trabajo complementario, proporciona una mejora en el rendimiento de los estudiantes, teniendo en cuenta la calidad de los recursos que se empleen.

Por su parte, Gutiérrez, Buitrago y Ariza (2015), en la investigación *Diseño de un OVA como mediador pedagógico para la enseñanza de la derivada*, se propusieron diseñar un OVA, con la finalidad de enriquecer y favorecer los diferentes procesos de enseñanza-aprendizaje inmersos en la derivada. Se muestra la metodología de diseño que utilizaron, para la cual, se tuvo en cuenta el ciclo de desarrollo de un software educativo.

Dicho ciclo es cerrado, teniendo presente: Las necesidades y problemas, un respectivo análisis, una programación, pruebas, implementación, modificaciones para obtener nuevas versiones, y, por último, una retroalimentación para luego llegar a donde se empezó. Gracias a la creación de un software educativo, en el cual se integraban resúmenes de lo visto en clase, imágenes ilustrativas, videos, hipertextos, ejercicios, y ejemplos concretos y análogos, siendo todos estos manipulables por los estudiantes, y junto a un aprendizaje memorístico con lo que respecta a las fórmulas, teoremas y definiciones, se evidenció que el OVA, permite que los estudiantes estudien a su propio ritmo de forma sincrónica o asincrónica el tema de interés generando así un aprendizaje independiente.

Por otro lado, se recalcó que es de suma importancia saber los impedimentos que se tienen a la hora de aprender matemáticas puesto que se pueden apoyar las diferentes actividades y recursos expuestos en el desarrollo del OVA. Por ejemplo, un obstáculo para el aprendizaje de la derivada es el hecho de que los estudiantes consideran tener buenas bases para dicho tema, cosa que no termina siendo así.

2.3. Locales

Fiallo y Parada (2018), presentan un diseño curricular titulado *Estudio dinámico del cambio y de la variación*, el cual se basa en un curso de inducción a la Formación Matemática Universitaria, dicho curso es de Precálculo y es mediado por GeoGebra. El propósito primordial fue desarrollar el pensamiento variacional. Lo que motivó a los autores para la creación de este libro, fue el hecho de que el estudio individual de los contenidos expuestos en programas (los cuales tienen como objetivo potenciar el aprendizaje de estos) no suelen ser eficientes. La metodología que se utilizó fue la de resolución de problemas, con ayuda de la tecnología e involucrando diferentes procesos matemáticos; lo anterior con el fin de promover el aprendizaje significativo y proporcionar bases contundentes para que así, el estudiante pueda comprender aquellos conceptos fundamentales vistos en la asignatura de Cálculo diferencial.

Se concluye que es sumamente importante no continuar con una metodología tradicional sino utilizar y aprovechar los diferentes artefactos digitales en la enseñanza, puesto que permite observar de manera directa el movimiento y la variación de los fenómenos, siendo esto la esencia misma del cálculo.

Todos estos trabajos utilizados como antecedentes son de interés para la investigación puesto que se relaciona con algunos de los ejes centrales, tales como la derivada y la tecnología (Aulas virtuales de aprendizaje).

En las investigaciones se evidencia un mejoramiento en el interés por parte del estudiante, generando espacios de aprendizaje autónomos e individuales, algo que juega un papel muy importante, ya que estos tienden a despreciar la matemática por su complejidad. Lo anterior se ve reflejado en el desempeño académico por parte de los estudiantes, teniendo una mejor apropiación del objeto matemático (derivada), y disminuyendo la deserción que se presenta en los primeros niveles universitarios.

3. Marco Teórico

En esta capitulo se presentarán los distintos elementos teóricos en los que se apoya este trabajo, siendo de gran relevancia la perspectiva histórica de la derivada, el pensamiento variacional, la modelación matemática y el apoyo de las tecnologías digitales.

3.1. Perspectiva histórica de la derivada

La derivada y el concepto de esta, se remonta desde las épocas de las antiguas civilizaciones como lo era la griega. La idea de la recta tangente a la curva dada en la antigua Grecia se redujo por completo a lo sintético (nada de álgebra o expresiones propias del cálculo simbólico), centrando la atención principalmente en los círculos y las rectas, aunque con la llegada de Arquímedes y posteriormente Apolonio entre los siglos IV y II a.C. se extendió la idea a las cónicas. Sin embargo, a pesar de que estas ideas están íntimamente ligadas al concepto de derivada, este término no se empezó a usar sino hasta la llegada del siglo XVII.

Agregando a lo anterior, se pudieron identificar cuatro problemas fundamentales los cuales, junto a su solución, motivaron el desarrollo del cálculo y sentaron las bases de lo que conocemos como derivada. Estos problemas son:

- La velocidad: Matematización del movimiento.
- Recta tangente: Obtener la recta tangente a una curva dada.
- Área bajo una curva: Problema de las cuadraturas.
- Máximos y mínimos: Encontrar el valor bien sea máximo o mínimo de una cantidad.

3.1.1. Derivada como pendiente de la recta tangente

Como se mencionó anteriormente, la derivada como pendiente de la recta tangente motivó el desarrollo del cálculo diferencial. Diferentes autores como lo fueron Euclides, Cavalieri, Descartes y Fermat aportaron desde su punto de vista un poco sobre la noción de tangente.

Euclides (323 a.C – 285 a.C): Como dicho problema era asociado a la geometría, Euclides lo aborda teniendo en cuenta que debía encontrar la recta tangente a un círculo, en un punto dado de este, estableciendo que una recta era tangente a un círculo, siempre y cuando por más prolongada que fuera esta, solo lo tocaría en un punto mas no la cortaría (Euclides 1970, p. 750, citado por Vega, 2019).

Tiempo después, da la solución de cómo trazar dicha recta. La recta perpendicular al diámetro ubicada en alguno de los extremos de este, cae fuera del círculo; siendo esta recta única (Euclides 1970, p. 760, citado por Vega, 2019).

Cavalieri (1598 – 1647): Andersen (1985) citado por Vega (2019) proporciona la siguiente definición, la cual es un fragmento tomado de Cavalieri.

> "Yo digo que una línea recta toca una curva situada en el mismo plano que la línea cuando ésta encuentra la curva o bien en un punto o a lo largo de una línea y cuando la curva está o bien completamente a un lado de la línea (en el caso cuando el encuentro es un punto) o no tiene parte al otro lado de ésta (en el caso cuando el encuentro es un segmento)" (p. 294).

Dada esta definición, Cavalieri introduce el concepto de regula, que se puede entender como aquella dirección de una recta. Además, la regula era tomada como referencia de las proporciones entre una figura y otra, o en su defecto, se tomaba como referencia de las relaciones que existen en las figuras y sus planos o segmentos inscritos. Cabe aclarar, que puede haber más de una regula y pueden ser parte de la figura en cuestión, siendo uno de sus lados o ejes.

Ahora bien, si se traza una recta paralela a la regula de una figura plana, uno y solo uno de los siguientes casos se puede dar

1. La recta toca la curva.
2. La recta no toca ni corta la figura.
3. La recta toca en un segmento completo a la figura.

Podemos entonces concluir que la noción que tenía Cavalieri era diferente respecto a las concepciones que se podían evidenciar en las de Euclides, puesto que para Euclides era fundamental la unicidad y para Cavalieri no.

Descartes (1596 - 1650): Utilizó un procedimiento netamente algebraico, pues afrontó este problema a través de la fabricación de lo que hoy conocemos como recta normal. Suzuki (2005), citado por Vega (2019), suministra el siguiente enunciado, el cual fue establecido por Descartes.

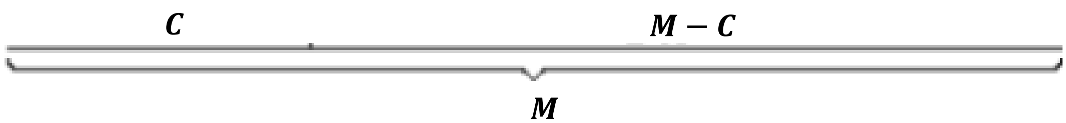
> "Encontrar una circunferencia tangente en un punto C a una curva dada. Esto se hace igualando circunferencia y curva y obligando a que sólo se corten en un punto. Ya que la recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio, como decía Euclides, esta recta es fácil de calcular".

Fermat (1606 – 1665): El procedimiento de Fermat, basaba en lo que conocemos como máximos y mínimos, donde la importancia de dicho proceso radicaba en proporcionar un incremento a una cantidad que se puede entender como la variable independiente (Vega, 2019). Dicho incremento era denotado por la letra E que posiblemente era relacionado o tomado como lo que hoy conocemos como épsilon. El proceso consiste en lo siguiente: Sea c el término a maximizar, y £ una cantidad infinitamente pequeña. Se reemplaza "c", por "$c + £$", por lo que el máximo o mínimo ya se encuentra en potencias de c y £, por lo que las dos expresiones son aproximadamente iguales. Posteriormente se harán las operaciones permitidas como reducciones, para luego dividir todo por una misma potencia de £, con la intención de que por lo menos un término no contenga a £, por último, se toma a $£ = 0$ por lo que se desprecian aquellas cantidades que contengan a £, y se igualan las expresiones. Al operar las expresiones y hacer los respectivos despejes, dará el valor de c, al reemplazarlo en la expresión original, nos dará el máximo o mínimo según corresponda, y más que darnos el máximo o mínimo, se puede evidenciar la esencia misma de la derivada.

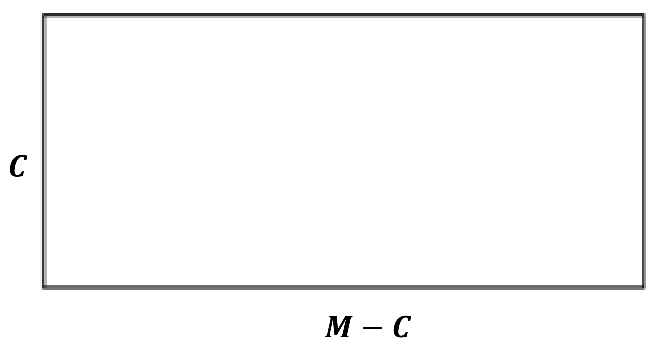
Para entender un poco mejor el método de Fermat, veamos un ejemplo en el que se vea inmerso lo mencionado anteriormente:

Ejemplo: Dado un segmento, divídalo en dos partes, de modo que, el resultado de la multiplicación de las dos longitudes, sea el mayor.

Sea M la longitud total del segmento, C la longitud desde donde inicia el segmento hasta donde se debe dividir y $M - C$ la longitud restante, así como se muestra a continuación:



Por lo tanto, la pregunta en cuestión es ¿Para qué valor de $\boldsymbol{C}$ el producto $\boldsymbol{C(M - C)}$ es máximo? Lo que también podría entenderse como ¿Dónde debe cortarse el segmento para que el rectángulo de base $\boldsymbol{M - C}$ y altura $\boldsymbol{C}$ tenga el área máxima?



Recordemos que, en primera instancia, $\boldsymbol{C}$ es prácticamente igual a $\boldsymbol{C} + £$, puesto que £ es una cantidad infinitamente pequeña, por tanto $\boldsymbol{C \sim C + £}$**,** entonces:

$$\boldsymbol{C(M - C)} \sim (\boldsymbol{C} + £)(\boldsymbol{M} - (\boldsymbol{C} + £))$$

$$\boldsymbol{C(M - C)} \sim (\boldsymbol{C} + £)(\boldsymbol{M - C} - £)$$

$$\boldsymbol{CM - C^2 \sim CM - C^2 - C}£ + \boldsymbol{M}£ - \boldsymbol{C}£ + £^{\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{CM - C^2 \sim CM - C^2 - 2C}£ + \boldsymbol{M}£ + £^{\mathbf{2}}$$

Haciendo las respectivas reducciones con los términos iguales a cada lado, tenemos:

$$\mathbf{0} \sim -\,\boldsymbol{2C}£ + \boldsymbol{M}£ + £^{\mathbf{2}}$$

Dividimos a cada lado por una misma potencia de £, que en este caso es $£^1 = £$, por lo tanto, tendríamos:

$$\frac{\mathbf{0}}{£} = \frac{-\boldsymbol{2C}£ + \boldsymbol{M}£ + £^{\mathbf{2}}}{£}$$

$$\frac{\mathbf{0}}{£} = \frac{-\boldsymbol{2C}£}{£} + \frac{\boldsymbol{M}£}{£} + \frac{£^{\mathbf{2}}}{£}$$

$$\mathbf{0} \sim -\,\boldsymbol{2C} + \boldsymbol{M} + £$$

Tomemos $£ = 0$:

$$\mathbf{0} \sim -\,\boldsymbol{2C} + \boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{2C} = \boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{M}}{\mathbf{2}}$$

Tomando entonces a $\boldsymbol{C}$ como la mitad de la longitud del segmento $\boldsymbol{M}$ dado, tenemos que el producto $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{C})$ es el mayor.

Del mismo modo, autores como Newton y Leibniz juegan un papel muy importante en lo que corresponde al cálculo pues fueron ellos quienes dieron a conocer lo que hoy conocemos como derivadas e integrales, demostrando que estos conceptos tienen una relación inversa. Estos dos autores, proporcionaron varias de las reglas que hoy en día utilizamos para hallar las derivadas.

Por un lado, Newton, publica en el año 1687 un documento titulado *Principios matemáticos de la filosofía natural*, en donde se ve inmerso el acercamiento que tuvo este al cálculo por medio de tres momentos. Partiendo de ideas físicas, establece e interpreta el cálculo de las siguientes maneras:

1. Primer momento: Por medio de su obra titulada De Analysi la cual fue escrita en el año 1669 pero publicada en 1711, lo presenta en términos de infinitesimales.
2. Segundo momento: *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum* es la obra donde se ven inmersas lo que él denominada Fluentes y Fluxiones (lo que hoy conocemos como derivadas). Dicha obra fue compuesta en el año 1671 pero publicada en el año 1736, presenta mediante fluxiones el cálculo.
3. Tercer momento: En su investigación de las cuadraturas titulada *De Quadratura Curvarum*, escrita en 1676 pero la publica en 1704, y es acá donde presenta mediante razones primeras y últimas al cálculo.

Por otro lado, y al mismo tiempo, Leibniz trabaja en el cálculo partiendo de ideas filosóficas para la interpretación del mismo, a diferencia de Newton, el cual partía de ideas físicas. En lo trabajado por Leibniz sobre el cálculo, se pueden evidenciar tres ideas fundamentales:

1. Idea N°1: Esta idea trataba sobre el apropiado lenguaje simbólico y operacional, para que los diferentes procesos como lo son el razonamiento y la argumentación, se pudiesen expresar por medio de fórmulas y símbolos. Cabe recalcar que las notaciones más

utilizadas en el ámbito matemático tanto en el cálculo diferencial como en el integral, fueron las propuestas por Leibniz. La derivada como $\frac{dy}{dx}$ y la integral como $\int$.

2. Idea N°2: Leibniz determinaba cuadraturas y tangentes por medio del cálculo infinitesimal, en donde concluye que el cálculo de las mismas eran operaciones inversas (Teorema fundamental del cálculo). Dicho cálculo era por medio de ordenadas (sumas y diferencias).
3. Idea N°3: Leibniz utiliza el triángulo característico para poder adentrarse al cálculo diferencial. Dicho triangulo se caracterizaba por tener los lados infinitamente pequeños. Gracias al uso de este, se podía encontrar la derivada de cualquier función sin utilizar el concepto de límite.

Vega (2019), menciona que las diferentes investigaciones de Newton y Leibniz y sus discípulos, fueron de gran importancia para el análisis de la derivada pues incluyeron cantidades infinitesimales (que en algunas ocasiones eran conocidas como números evanescentes), pues aportan a otros autores los cuales dan paso al concepto de límite, dando un significado nuevo al método analítico.

3.1.2. Derivada como límite

Es Cauchy a quien le debemos lo relacionado con la teoría de límites. Luego de concretar las nociones de cantidad constante y variable, Cauchy, define la noción de límite. Es en 1823 que Cauchy, partiendo de los números Reales, incluye el concepto de límite, junto a la definición de función, teniendo como fundamentos estos tres conceptos en su propuesta de análisis matemático. Cauchy (1994) citado por Vega (2019) define el límite de la siguiente manera:

> Cuando los valores sucesivos atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acabará por diferir de éste tan poco como se quiera, este último se llamará el límite de todas las demás. (p. 76)

Esto, es lo que cambia la concepción de lo que era un infinitésimo, pues era visto como una variable y no como aquel número constante pero infinitamente pequeño. Cauchy continuó con trabajos de otros autores sobre cocientes de las variaciones (incrementos) de las variables, definiendo la derivada como el límite de estos, a su vez, mostró sus diferentes características. Presentó el teorema del valor medio y sus aplicaciones a la aproximación de funciones por polinomios.

3.1.3. Derivada como razón de cambio

Según Cardona (2012), los diferentes conceptos que ayudan a interpretar la derivada como razón de cambio, son: Razón, proporción, proporcionalidad entre cantidades (magnitudes), función lineal (o de proporcionalidad), función afín, razón de cambio y razón de cambio instantánea (derivada).

La derivada vista como razón de cambio, posibilita calcular el cambio de una magnitud en relación con otra. En el cálculo diferencial, se presenta como un cociente incremental, en donde se evidencia el cambio que hay en una variable (y), con respecto a otra (x). Dicho cambio es generado por la diferencia de dos magnitudes (final e inicial).

La razón de cambio es denotada por $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ lo cual hace referencia a lo que conocemos como la pendiente (denotada generalmente por $\boldsymbol{m}$) de la recta implicada. De tal manera que, para encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos involucrados, se debe calcular la razón de cambio (promedio) (Larson & Hostetler 2006, citados por Montoya y Díaz, 2018).

Por todo lo mencionado anteriormente, podemos entonces concluir que la derivada se puede ver de tres maneras, siendo estas:

1. Derivada como pendiente de la recta tangente a una curva
2. Derivada como límite
3. Derivada como razón de cambio

3.2. Pensamiento Variacional

El pensamiento matemático se ha visto influenciado por los diferentes momentos de historia de la matemática, como lo fue la tradición griega y medieval, el desarrollo de la física, de la misma matemática, de la teoría de la probabilidad y el cálculo diferencial e integral, por lo que este tuvo la necesidad de ser dividido en cinco pensamientos, los cuales son: numérico y sistemas numéricos, espacial y sistemas geométricos, métrico y sistemas de medidas, aleatorio y sistemas de datos, y por último, variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Ahora bien, los Estándares Básicos de Competencias (2006), mencionan respecto al pensamiento variacional que:

> “El pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos” (p. 66).

Por otro lado, el pensamiento variacional se definió como una manera propia de razonamiento coordinada con definiciones matemáticas dinámicas (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003, citados por Montoya y Díaz, 2018). A modo de ejemplo: la función (intención de cuantificar lo que nos rodea), la derivada (modo en el que varían las cosas), integral (estilo como se acumulan las cosas) y ecuaciones diferenciales (relación entre las cosas) (Vahos, 2016, citado por Montoya y Díaz, 2018).

Existe una estrecha relación entre el pensamiento variacional y la covariación entre diferentes cantidades de magnitud, pues es la segunda el objeto de la primera. Entendiendo la covariación como la que relaciona las diferentes variaciones que se puedan dar entre dos o más cantidades.

Vasco (2002), en el congreso internacional "*Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*" proporciona el siguiente ejemplo:

> El profesor sostiene una pelota de caucho en cada mano, y la lanza al aire alternativamente, sin hacer malabares. El estudiante trata de percibir la variación de cada una en el tiempo, y luego la covariación de una con otra. Nota que la una se mueve mientras la otra está quieta. Puede reproducir mentalmente el movimiento que hace el profesor, lanzar las pelotas al mismo ritmo, a la misma altura que él y hasta se animaría a hacerlo con dos pelotas reales. Algo tiene que estar pensando para poderlo hacer. Algún modelo imaginativo tiene que tener en la cabeza para poder imitarlo. Trata de precisarlo verbalmente. Trata de pintar unos ejes de coordenadas y de escribir unas ecuaciones.

Según Montoya y Díaz (2018), en el pensamiento variacional se pueden evidenciar tres momentos los cuales lo caracterizan.

- Primer momento: Se pueden evidenciar aquellos elementos que pueden estar expuestos a cambios, como también aquellos que no y por ende permanecen constantes.
- Segundo momento: Se establecen, producen o componen aquellos modelos mentales necesarios para la reproducción de las covariaciones que el sujeto haya encontrado.
- Tercer momento: Es donde se evalúan los modelos propuestos pues se comparan con los resultados obtenidos y con los procesos que se están modelando, para luego corregir el modelo o eliminarlo e iniciar nuevamente.

Por lo anterior, podemos afirmar que la modelación es el propósito fundamental de este pensamiento. Vasco (2002), afirma que, para poder dar solución a un problema de nuestro interés, primero se debe construir un modelo del escenario en el cual las variables covaríen de manera similar a la situación problemática, y para esto, es indispensable accionar al pensamiento variacional.

Por tal razón, es importante mencionar aquellas fases o momentos que se pueden dar en el pensamiento variacional, pues en este se incluye la modelación. Vasco (2002), plantea estos momentos que permiten un buen escenario para la modelación:

- Identificación de patrones que cambian: ¿Qué varía y qué no?
- Elección o fundación del modelo mental.
- Aplicación del modelo.
- Contrastar el proceso modelado con los resultados obtenidos.
- Evaluación del modelo.

Cabe recalcar que dichas fases o momentos no necesariamente deben ser secuenciales, estas pueden tomar el orden que mejor se adecue a la situación, lo que puede generar espacios de retroalimentación entre cada una de las fases. Ahora bien, existen otras fases o momentos que se pueden dar solo si existe el apoyo de la tecnología. Dichas fases son:

- Planteamiento simbólico.
- Realizar cálculos desde la formulación.
- Contrastar el proceso modelado con los resultados obtenidos.
- Rediseñar el modelo.

3.3. Modelación

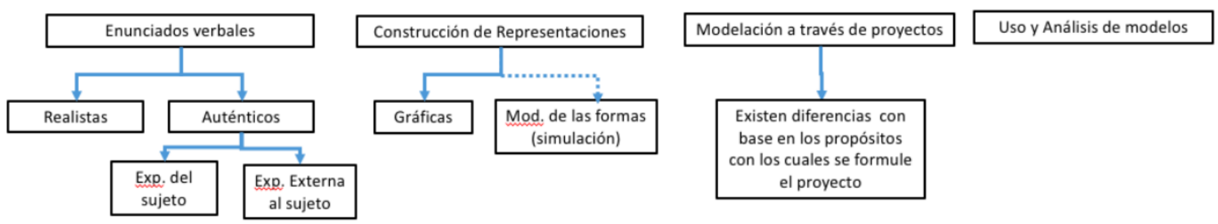
La modelación es comprendida de diferentes maneras por la gran variedad de autores que han trabajado en esta. Ahora bien, una definición amplia de la misma es la relación que existe entre la matemática y la realidad (mundo extra-matemático). Generalmente, en la literatura internacional, se toma la modelación como la adquisición y evaluación de modelos matemáticos con el fin de dar solución a lo extra-matemático.

Para autores como Julie y Mudaly, la modelación es considerada como un contenido, pues esta se toma como un objeto de enseñanza y aprendizaje, donde más que un ejercicio, se le debe presentar al estudiante un problema de su cotidianeidad. Villa-Ochoa et al. (2017), mencionan que la modelación puede entenderse como un método de articulación entre dos entes, uno nombrado modelo (matemáticas) que es de utilidad para ejercer en otro nombrado lo modelado (mundo real). Es esta definición en las que también diferentes autores se recogen.

Es importante utilizar la modelación puesto que esta promueve el interés de los estudiantes, generando así una participación más activa en aquellas actividades necesarias para el aprendizaje. Además, es una parte esencial que debería implementarse en los diferentes cursos de ingeniería que contengan matemática, pues esta permite a los alumnos desarrollar habilidades y prepara a los mismo en los posibles problemas que se le puedan presentar en su quehacer laboral, por otro lado, permite al estudiante desenvolverse de manera idónea en las diferentes comunidades en las que está y podría estar envuelto, por ejemplo, la comunidad profesional. Adicional a lo anterior, podrá dar respuesta de forma eficiente desde su situación como estudiante hasta en su ámbito profesional (Erazo, Escobar, Bravo y Villa-Ochoa, 2018).

Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona (2017) ofrecen una lista de tareas inmersas en la modelación, en donde se examinan y estudian los enunciados con los cuales se muestran dichas tareas, reconociendo el contexto inmerso en las mismas. Esta clasificación se da debido a la cooperación y contribución de profesores e investigadores que pertenecen a la RECOMEM (Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática). Las tareas de modelación, son un grupo de escritos, enunciados, escenarios, guías o indicaciones que coordinan para "dar vida" a la modelación en la vida escolar diaria. (Villa-Ochoa et al, 2017).

Figura 1 Tipos de tarea de modelación.
Fuente: Villa-Ochoa, Yepes, Sánchez-Cardona (2017)



El orden en el que se presentan los tipos de tareas son los expuestos por estos autores, por lo que se debe tener en cuenta que los tipos de tareas son: enunciados verbales, construcción de representaciones, modelación a través de proyecto, y uso y análisis de datos.

Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona (2017) mencionan que cada modo de realizar modelación, toma cuerpo (se concreta) en una tarea o escenario y en un entorno de clase. Es por eso que es de suma importancia escoger el tipo de tarea, pues esta debe ser la más apropiada para la actividad que se desea realizar, ya que de esto depende los alcances y logros que se puedan obtener de la misma.

Schunn (2008, citado por Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona, 2017) expresa que el tipo de tarea (y el diseño de la misma) a implementar en el aula, debe estar ligado con los objetivos propuestos para la clase y las particularidades de los alumnos. Es por tal razón que para esta investigación se utilizará la tarea de construcción de representaciones, haciendo uso de las representaciones gráficas y las simulaciones.

El tipo de tarea de construcción de representaciones y la práctica de la misma, implican la utilización de herramientas tecnológicas lo que genera el aprendizaje significativo de un objeto matemático. Asimismo, los estudiantes al manipular las diferentes representaciones y simulaciones pueden realizar procesos de razonamiento, abriendo paso a que este conjeture. Los alumnos (de manera igual que en las otras tareas), reconocen magnitudes que permanecen constantes o que varían, enfocándose en lo que es para ellos importante, de manera tal que puedan componer otras representaciones que los lleven a modelar las cantidades y su relación.

3.4. La tecnología y sus beneficios en la enseñanza

Las TIC (Tecnologías de la información y las comunicaciones), promueven cambios en la educación tradicional puesto que estas son tomadas como un componente que incorpora y modifica el sistema escolar, a partir de la acción y la praxis pedagógica (Gutiérrez, Buitrago y Ariza, 2017).

La tecnología puede ser utilizada por los estudiantes para explorar, analizar y tener una respuesta implícita del problema al que se está enfrentando. Los diferentes applets (como, por ejemplo, GeoGebra), no se utilizan para que el estudiante sea experto en este, sino para que interactúe con él, pruebe, vea, utilice deducciones hechas, se equivoque, mueva, etc.

La matemática al caracterizarse en sí por su rigurosidad y, al ser en su mayoría muy demostrativa, suele ser de difícil entendimiento para los alumnos. Es acá donde la tecnología y los applets juegan un papel importante pues estos dan la oportunidad de que haya una participación más activa puesto que los alumnos tienen la posibilidad de interactuar con el objeto matemático.

Además, se puede utilizar cuando el estudiante tenga problemas a la hora de entender y resolver un problema, y no comprenda lo que está haciendo.

Es importante la inclusión de las TIC en las metodologías implementadas (en el transcurso de las clases) para la enseñanza y aprendizaje, pues son estas las que ofrecen herramientas de apoyo para dichos procesos (Gutiérrez, Buitrago y Ariza, 2017).

López (2013, guiada por el trabajo realizado por Marques Graells, 2000) menciona diferentes ventajas del uso de las TICs desde la perspectiva de los diferentes entes implicados en la misma, o sea, desde la perspectiva del estudiante, del profesor, del proceso de enseñanza-aprendizaje, y del centro educativo.

1. Alumno: Frecuentemente estos aprenden en menos tiempo del que se utiliza en una clase tradicional, puesto que esta clase les resulta atractiva. Poseen acceso a diferentes medios educativos y a ambientes de aprendizaje, lo que facilita la colaboración entre compañeros.
2. Docente: Obtiene recursos educativos para el desarrollo de la clase, facilitando la enseñanza del objeto matemático impartido. Se da una constante actualización profesional, liberándolo de los trabajos tradicionales los cuales terminan siendo monótonos y repetitivos. Se puede dar cierta facilidad en el momento de evaluar a los alumnos.
3. Proceso de enseñanza-aprendizaje: De cierta manera, en este apartado se ven implicadas las ventajas antes mencionadas, pues se habla sobre el interés y motivación por parte del estudiante, lo que ocasiona una mayor comunicación con el docente. Se da un desarrollo de la iniciativa, generando una actividad e interacción continua. Se genera un aprendizaje cooperativo, en el cual también se aprende de los errores cometidos.

4. Centro educativo: Se da un mejoramiento de la gestión de los centros y por ende la difusión de los mismos. Los métodos de aprendizaje virtual disminuyen el valor de la educación y acerca la enseñanza a más hombres y mujeres.

De lo anterior podemos concluir que no es solo el estudiante quien se ve beneficiado por el uso de la tecnología en su formación, sino todos aquellos entes que de una u otra manera se ven implicados en la educación. Ahora bien, como los más involucrados en esto son el profesor y el estudiante, cabe recalcar que los medios ofrecidos por las TIC, posibilitan que el profesor sea participante de la instauración de ambientes formativos en donde es necesario la interacción multidireccional de los integrantes, ampliando de esta manera la construcción de los aprendizajes (Castro, Guzmán y Casado, 2007).

4. Metodología

En este capítulo se presenta las fases del trabajo realizado. Inicialmente con una descripción del curso, como se realiza en la actualidad, posteriormente el diseño del curso en la plataforma de Moodle, finalmente se describe cómo se pretende aplicar y los instrumentos de recolección.

4.1. Aspectos generales del curso

En la Universidad Industrial de Santander, el curso de Cálculo I o Cálculo diferencial se desarrolla en 60 horas semestrales (4 horas por semana). Cada clase se considera de dos horas y hace referencia a una sección del libro guía Cálculo de una variable trascendente tempranas (Zill y Wright, 2011).

Para el desarrollo del curso se propone un cronograma de ejercicios indicados, que el profesor puede decidir si los reduce o amplia según las necesidades y características del curso. La derivada se presenta inicialmente bajo su interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente, posteriormente se proporcionan de diferentes maneras las fórmulas de derivación, para finalizar con las aplicaciones de la derivada.

4.1.1. Población

La selección de los estudiantes no es aleatoria, son estudiantes que inician por primera vez el curso de cálculo diferencial, estos estudiantes pertenecen al programa de Ingeniería Mecánica en la Universidad Industrial de Santander. Por lo general, estos estudiantes ya han tenido un acercamiento con tecnologías digitales y uso de software de geometría dinámica GeoGebra. Además de contar con un usuario y contraseña de la plataforma Moodle proporcionada por el Centro para el Desarrollo de la Docencia en UIS (CEDEUIS).

4.2. Aspectos metodológicos específicos

En este trabajo se diseñó el curso de cálculo diferencial en el aula virtual de aprendizaje oficial de la Universidad Industrial de Santander (https://tic.uis.edu.co/ava/login/index_ingreso.php), considerando los elementos teóricos expuestos anteriormente. En total se pretenden desarrollar dos temáticas importantes: Derivadas y Aplicaciones de la Derivada.

En el apartado de Aplicaciones de la derivada se plantearon los problemas de modelación matemática mediante simulaciones, que permitieron a los estudiantes poder ver la derivada bajo su interpretación geométrica y su interpretación aplicativa. A continuación, abordaremos el diseño del curso en la plataforma Moodle con las pestañas que muestran las temáticas importantes a utilizar.

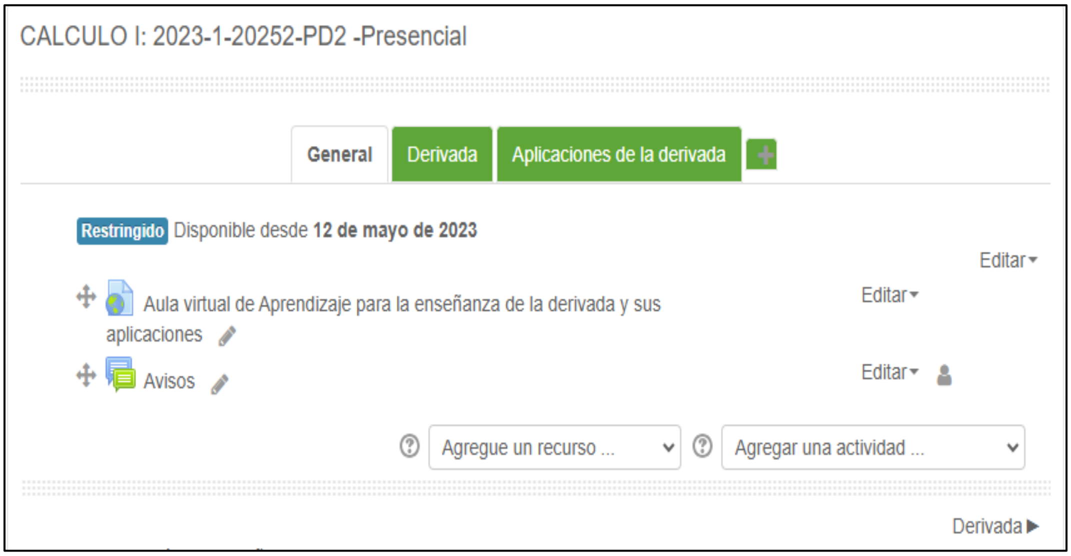
Con el apoyo del Centro para el Desarrollo de la Docencia de la UIS (CEDEUIS), en el que personal calificado ayuda a mantener esta plataforma haciendo uso de las TIC, de manera interactiva, se diseñó un curso de cálculo diferencial en el aula virtual de aprendizaje oficial de la Universidad Industrial de Santander (https://tic.uis.edu.co/ava/login/index_ingreso.php), en el cual se desarrollaron las temáticas de derivadas y aplicaciones de la derivada.

Cabe aclarar que el Aula Virtual de Aprendizaje, se implementó de manera presencial en las horas de clase. A excepción de la sección Derivada y la sección de Regla de la constante, potencia, suma y resta, pues en estas se trabajó tanto de manera presencial como virtual, siendo esta última, de manera autónoma por parte del estudiante.

4.2.1. Diseño general del Aula Virtual de Aprendizaje

A continuación, se observará el diseño del curso en la plataforma Moodle, haciendo referencia a las pestañas utilizadas para las temáticas. Cuando los estudiantes ingresaban al Moodle y posteriormente al curso, se encontraban con lo siguiente (ver Figura 2).

Figura 2 Vista general del curso de Moodle

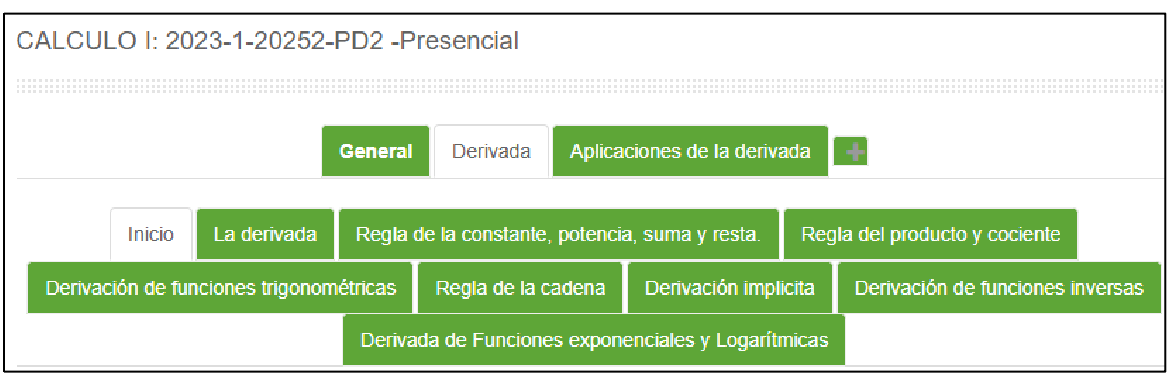


Donde también encontraron un video en el cual se hacía una breve pero concisa presentación de lo que se deseaba realizar. Dicho video puede observarse en: https://view.genial.ly/6444038a66068000113cfd2f/video-presentation-trabajo-de-grado-ava.

4.2.2. Diseño del apartado de Derivada

Posteriormente, al ingresar al apartado de **Derivada**, se encontraron con todas aquellas secciones en las que se trabajaron a lo largo del curso, mostrándose de la siguiente manera (ver Figura 3).

Figura 3 Vista de la pestaña de Derivada



A continuación, se dará a conocer el diseño de cada sección que pertenece al apartado **Derivada**.

4.2.3. Diseño de la sección La derivada

En esta sección del aula virtual de aprendizaje, se mencionó a modo de repaso, lo que se vio sobre la pendiente de la recta tangente, y el cómo se hallaba teniendo en cuenta el paso a paso. Esto con la finalidad de poder introducir al tema de la derivada. En el AVA, se podía observar de la siguiente manera (ver Figura 4).

Figura 4 Repaso de la pendiente de la recta tangente

En la sección anterior, se vió lo relacionado con la recta tangente como pendiente. Se dijo que si teníamos la función $y = f(x)$ la cual era contina en un punto a, entonces si $m = lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe, entonces la recta tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente m, donde m también se denomina pendiente de la curva $y = f(x)$ en $(a, f(a))$. Para hallar dicha pendiente utilizabamos los siguientes pasos:

1). Evaluar $f(a)$ y $f(a+h)$

2). Evaluar la diferencia $f(a+h) - f(a)$

3). Simplificar el cociente diferencial $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

4). Calcular el límite del cociente diferencial $lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Posteriormente, se introdujo al tema de la derivada, donde también se expuso un paso a paso para hallar la derivada mediante la definición de límite como se muestra en la Figura 5. Además, se presentó un ejemplo, el cual se derivó con los pasos indicados en la Figura 4.

Figura 5 Teoría y ejemplo de la derivada

El tipo de límite que calculamos para hallar la pendiente de la recta tangente a una función en un punto, se da en muchas aplicaciones de varias disciplinas. Estas aplicaciones incluyen la velocidad y la aceleración en física, las funciones de ganancia marginal en los negocios y las tasas de crecimiento en biología. Este límite se da con tanta frecuencia que damos a este valor un nombre especial: La derivada, la cual es denotada de diferentes maneras, por ejemplo, $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$. Por otro lado, el proceso para encontrar una derivada se denomina diferenciación.

En otras palabras y de manera general, el límite del cociente de la diferencia, define una función: una función que se deriva de la función original $y = f(x)$. Esta nueva función se denomina función derivada, o simplemente la derivada, de f y se denota (entre otras maneras) por f'. Entonces, la derivada de una función está dada por $f'(x) = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, siempre y cuando el límite exista.

Al igual que cuando hallabamos la pendiente de la recta tangente, hay unos pasos a seguir los cuales pueden ser de utilidad cuando se quiere hallar la derivada mediante la definición de límite.

1). Evaluar $f(x)$ y $f(x+h)$

2). Evaluar la diferencia $f(x+h) - f(x)$

3). Simplificar el cociente diferencial $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

4). Calcular el límite del cociente diferencial $lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Tomemos a $f(x) = x^2 + 3$ y sigamos el paso a paso anterior

1). $f(x) = x^2 + 3$ y $f(x+h) = (x+h)^2 + 3 = x^2 + 2xh + h^2 + 3$

2). $f(x+h) - f(x) = (x^2 + 2xh + h^2 + 3) - (x^2 + 3) = x^2 + 2xh + h^2 + 3 - x^2 - 3 = 2xh + h^2$

3). $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$

4). $lim_{h\to 0} 2x + h = 2x + 0 = 2x$

Por todo lo anterior, podemos decir que la derivada de $f(x) = x^2 + 3$ es $f'(x) = 2x$

Por último, utilizando las herramientas que nos proporciona el AVA, se compartieron construcciones hechas en el Applet de GeoGebra, además de una encuesta y un video referente al tema tratado (ver Figura 6).

Figura 6 Herramientas utilizadas en la sección de La derivada

Interpretación Geométrica de la derivada
La derivada interpretada como un límite
Encuesta sobre la derivada
Ayuda audiovisual de la derivada

La construcción de GeoGebra llamada "Interpretación Geométrica de la derivada" puede ser vista en https://www.geogebra.org/m/vguzbjpr. Por otro lado, la construcción llamada "La derivada interpretada como un límite” puede ser observada en https://www.geogebra.org/classic/xfngsznq.

4.2.4. Diseño de la sección Regla de la constante, potencia, suma y resta

Para esta sección, se expusieron ejemplos de lo que sucede con la derivada de una constante, de una potencia, de sumas y de restas de funciones, con la finalidad de que los estudiantes analizaran dichos ejemplos y generalizaran lo sucedido en cada uno de los casos por medio de una encuesta. A continuación, se mostrarán los ejemplos de cada una de las reglas de derivación que se expusieron en el aula virtual de aprendizaje (ver Figura 7, 8 y 9).

Figura 7 Ejemplo sobre la regla de la constante

Tomemos a $f(x) = c$ y recordemos que por definición, tenemos que $f\,'(x) = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, ahora bien, al ser una función constante, tenemos que $f(x+h) = f(x) = c$ por lo que $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$. En consecuencia, tendríamos que $f\,'(x) = lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = lim_{h\to 0}0 = 0$.
Ejemplos:
Sea $f(x) = 7, g(x) = 22, h(x) = e$, por lo mencionado anteriormente, concluimos que
$f\,'(x) = 0, g\,'(x) = 0, h\,'(x) = 0$.

Figura 8 Ejemplo sobre la regla de la potencia

Cuando hablamos de funciones potencia, hablamos de aquellas funciones en las cuales su base varía pero su potencia se mantiene constante, como por ejemplo $f(x) = x^2$ y $h(x) = x^3$. Si queremos hallar sus derivadas, entonces:

$f\,'(x) = lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}$
$= lim_{h\to 0}2x + h$. Por lo tanto, $f\,'(x) = 2x$

por otro lado, $h\,'(x) = lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$
$= lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = lim_{h\to 0}3x^2 + 3xh + h^2$. Por lo tanto, $h\,'(x) = 3x^2$

Si tuviesemos otras funciones como por ejemplo $i(x) = x^{22}$ y $j(x) = x^{100}$ sus derivadas serían $i\,'(x) = 22x^{21}$ y $j\,'(x) = 100x^{99}$

Figura 9 Ejemplo sobre la regla de la suma y resta

Cuando hablamos de esta regla, nos referimos a las sumas y/o restas que se pueden dar entre funciones. ¿Cómo sería la derivada de dichas sumas o restas de funciones? Veamos:

Sea $n(x) = x^{10}$, $m(x) = x$, y $b(x) = n(x) + m(x) = x^{10} + x$ por lo visto en el apartado anterior, sabemos que $n´(x) = 10x^9$ y $m´(x) = 1$ por lo que su la derivada de $b(x) = b´(x) = 10x^9 + 1$

En el caso de la resta, tendríamos: Sea $t(x) = 4$, $w(x) = x^5$, y $a(x) = t(x) + w(x) = 4 - x^5$ por lo visto en el apartado anterior, sabemos que $t´(x) = 0$ y $w´(x) = 5x^4$ por lo que su la derivada de $a(x) = a´(x) = 0 - 5x^4 = -5x^4$

Si tuviesemos alguna combinación como por ejemplo: $f(x) = x$, $g(x) = 72$, $h(x) = x^{\frac{1}{2}}$ y $c(x) = f(x) - g(x) - h(x) = x - 72 - x^{\frac{1}{2}}$, de la misma manera tendriamos que $f´(x) = 1$, $g´(x) = 0$, $h´(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ por lo que la derivada de $c(x) = c´(x) = 1 - 0 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

Se utilizaron tres herramientas del AVA: en primer lugar, una encuesta, con la finalidad de que los estudiantes escribieran las generalizaciones. En segundo lugar, una ayuda audiovisual para que complementaran lo expuesto en el Aula. Por último, una tarea en la que debían subir la resolución de algunos ejercicios indicados del libro guía (ver Figura 10).

Figura 10 Herramientas utilizadas en la sección de Regla de la constante, potencia, suma y resta

Encuesta sobre las diferentes reglas de derivación

Ayuda audiovisual de las diferentes reglas de derivación

Ejercicios a resolver

4.2.5. Diseño de la sección Regla del producto y del cociente

Para esta sección, respecto a la regla del producto, de manera sencilla y utilizando un contraejemplo, se mostró a los estudiantes el por qué la derivada de un producto no es el producto de las derivadas (ver Figura 11). Se les proporcionó la regla y algunos ejemplos teniendo en cuenta las diferentes combinaciones que se podían dar.

Figura 11 Teoría y ejemplos sobre la Regla del producto

Ya que examinamos las reglas básicas, podemos empezar a ver algunas de las reglas más avanzadas. La primera examina la derivada del producto de dos funciones. Aunque podría ser tentador asumir que la derivada del producto es el producto de las derivadas, de forma similar a las reglas de la suma y la diferencia, la regla del producto no sigue este patrón. Para ver por qué no podemos utilizarlo, analicemos el siguiente ejemplo:

La función $f(x) = x^2$ podemos tomarla también como $f(x) = x.x$, y sabemos que la derivada de x es 1, y si siguiese ese patrón, tendríamos que $f'(x) = 1.1 = 1$, cosa que es totalmente errónea, puesto que la derivada de x^2 es $2x$.

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables, entonces:

$\frac{d}{dx}(f(x).g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)).g(x) + f(x).\frac{d}{dx}(g(x))$

Eso es, si $h(x) = f(x).g(x)$, entonces $h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

Esto significa que la derivada de un producto de dos funciones es: La derivada de la primera función multiplicada por la segunda sin derivar, más la primera función sin derivar multiplicada por la derivada de la segunda función.

Veamos que pasa cuando tenemos una función constante multiplicando a otra función no constante. Sea $n(x) = 7$, $m(x) = x^4$ y $i(x) = n(x).m(x)$, por la definición anterior tendríamos que

$i'(x) = 0.x^4 + 7.4x^3 = 0 + 7.4x^3 = 28x^3$

Si tuviesemos funciones tales como $j(x) = 3x^4$, $p(x) = 3x$, $q(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$ sus derivadas serían $j'(x) = 12x^3$, $p'(x) = 3$, $q'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

¿Y cuándo tenemos que derivar la multiplicación de dos funciones no constantes? Se realiza el proceso antes mencionado. Por ejemplo, sea $h(x) = (x^2 + 2).(3x^3 + 5x)$, hallemos $h'(x)$:

$h'(x) = (2x)(3x^3 + 5x) + (x^2 + 2).(9x^2 + 5)$, resolviendo las multiplicaciones y simplificando tenemos $h'(x) = 15x^4 + 3x^2 - 10$.

Si quisiesemos comprobarlo de otra manera, podemos ver que $h(x) = (x^2 + 2).(3x^3 + 5x)$, y si efectuamos esa multiplicación nos da que $h(x) = 3x^5 + x^3 - 10x$ y en consecuencia $h'(x) = 15x^4 + 3x^2 - 10$.

Respecto a la regla del cociente, al igual que en la regla del producto, mediante un ejemplo se refutó la idea de que la derivada de un cociente no es el cociente de las derivadas (ver Figura 12). También se proporcionó la regla que nos ayuda a derivar dichas funciones, además de emplearla en un problema aplicativo.

Figura 12 Teoría y ejemplo sobre la Regla del cociente

Después de haber desarrollado y practicado la regla del producto, ahora consideraremos la diferenciación de cocientes de funciones. Como veremos la derivada del cociente no es el cociente de las derivadas, de igual manera, podemos tomar a $f(x) = x^4$ como $f(x) = \frac{x^5}{x}$, si la derivada del cociente fuese el cociente de las derivadas, tendríamos que $f´(x) = \frac{5x^4}{1} = 5x^4$, y nuevamente, sabemos que esto es erróneo, puesto que si $f(x) = x^4$, entonces $f´(x) = 4x^3$.

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables, entonces:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(f(x)).g(x) - f(x).\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

Eso es, si $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, entonces $h´(x) = \frac{f´(x).g(x) - f(x).g´(x)}{(g(x))^2}$

Tomando como primera función a la que está en el numerador y como segunda a la del denominador, esto significa que la derivada del cociente de dos funciones es: La derivada de la primera función multiplicada por la segunda sin derivar, menos la primera función sin derivar multiplicada por la derivada de la segunda función, todo sobre la segunda elevada al cuadrado.

Veamos un ejemplo aplicativo: La posición de un objeto en un eje de coordenadas en el tiempo t viene dado por $h(t) = \frac{t}{t^2+1)}$, ¿Cuál es la velocidad inicial del objeto?

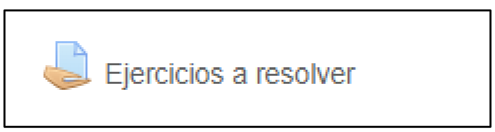
Recordemos que $v(0) = h´(0)$, por lo tanto, debemos hallar $h´(t)$ y luego evaluarla en $t = 0$, entonces:

$h(t) = \frac{1.(t^2+1) - t.(2t)}{(t^2+1)^2} = \frac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$. Ahora bien, evaluando en $t = 0$, tendríamos:

$h(t) = \frac{1-0^2}{(0^2+1)^2} = \frac{1}{1} = 1$, por lo tanto la velocidad inicial $= v(0) = 1$

La herramienta utilizada para esta sección, solo fue la de la tarea dirigida a los estudiantes (ver Figura 13), puesto que, para la ayuda audiovisual, esta se proporcionó en la sección anterior, por tal razón en la Figura 10, el nombre del video es "Ayuda audiovisual de las diferentes reglas de derivación".

Figura 13 Herramienta utilizada en la Regla del producto y cociente



4.2.6. Diseño de la sección Derivación de funciones trigonométricas

En este apartado se expusieron las derivadas de la función coseno y tangente, complementando en la clase con la función seno. La derivada de la función coseno se hace mediante la definición de límite, completando con su interpretación geométrica proporcionada por el Applet de GeoGebra (ver Figura 14).

Figura 14 Derivada de la función coseno

Comenzamos nuestra exploración de las derivadas de las funciones trigonométricas con la función coseno utilizando la fórmula para hacer una estimación razonable de su derivada. Recordemos que la derivada de una función $f(x) = f´(x) = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. La derivada de $f(x) = cos(x)$ sería entonces:

$f´(x) = lim_{h\to 0}\frac{cos(x+h)-cos(x)}{h}$. Recordemos que $cos(x+h) = cos(x).cos(h) - sen(x).sen(h)$ por lo

tanto, $f´(x) = lim_{h\to 0}\frac{cos(x).cos(h)-sen(x).sen(h)-cos(x)}{h}$. Ahora bien, como $h \to 0$, $cos(h) = 1$, entonces

$f´(x) = lim_{h\to 0}\frac{cos(x)-sen(x).sen(h)-cos(x)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{-sen(x).sen(h)}{h} = lim_{h\to 0} - sen(x).\ \frac{sen(h)}{h}$. En el

corte anterior vimos que $lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h} = 1$, por lo tanto $f´(x) = -sen(x)$

Revisa el archivo de GeoGebra llamado "Representación geométrica de la derivada de la función coseno" y mira el comportamiento de la derivada de coseno, escribe la función $y = -sen(x)$ y mira que el rastro de la función coseno pasa por encima de la gráfica de $y = -sen(x)$.

Función Seno

Para la función seno, la clave es reemplazar $sen(x+h)$ por $sen(x).cos(h) + sen(h).cos(x)$ y de igual manera que en la función coseno, se debe agrupar de una manera adecuada y conveniente. Revisa el archivo de GeoGebra llamado "Interpretación geométrica de la derivada de la función seno" y mira el comportamiento de la derivada de seno.

Para la derivada de la función tangente, se deja de lado la definición de límite y se utiliza convenientemente la igualdad que tiene la función tangente con las funciones seno y coseno. Luego de haber hallado la derivada de la función $tan\ (x)$, se proporciona un ejemplo, resaltando el hecho de podemos hallar funciones, las cuales son composiciones entre funciones trigonométricas y exponenciales, trigonométricas y constantes, etc. Además de que se pueden aplicar las diferentes reglas vistas anteriormente, como lo son las de la suma, resta, potencia, producto, etc. (ver Figura 15).

Figura 15 Derivada de la función tangente y ejemplos

Para la derivada de esta función y las demás funciones trigonométricas, se puede hallar de manera más sencilla, sin necesidad de utilizar la definición de límite, sino utilizando la regla del cociente. Veamos:

$f(x) = tang(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$, por la regla del cociente tenemos que:

$f´(x) = \frac{cos(x).cos(x) - sen(x).(-sen(x))}{(cos(x))^2} = \frac{(cos(x))^2 + (sen(x))^2}{(cos(x))^2}$. Por la identidad pitagórica trigonométrica sabemos que $(cos(x))^2 + (sen(x))^2 = 1$, por lo tanto $f´(x) = \frac{1}{(cos(x))^2} = (sec(x))^2$

Queda como tarea hallar la derivada de las demás funciones trigonométricas. En el archivo de GeoGebra llamado "Representación geométrica de la derivada de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante" mira el comportamiento de la derivada de seno. Cuando abres el documento aparece la de tangente, si deseas ver las otras, solo modifica la función por la función trigonométrica que desees ver.

Ahora bien, también hay funciones en las que se ven inmersas funciones trigonométricas y otras funciones, como las constantes, y las de potencia, veamos algunos ejemplos:

Sea $m(x) = 7sen(x) + 9x$, $n(x) = 4x^3 tang(x)$ y $h(x) = \frac{x^2}{cos(x)}$, hallemos sus derivadas:

$m´(x) = 7cos(x) + 9$

$n´(x) = 12x^2 tang(x) + 4x^3 (sec(x))^2$

$h´(x) = \frac{2x.cos(x) - x^2(-sen(x))}{(cos(x))^2} = \frac{2x.cos(x) + x^2 sen(x)}{(cos(x))^2}$

Para esta sección, mediante las herramientas que ofrece el Aula, se proporcionaron las diferentes construcciones para las funciones trigonométricas y sus derivadas. Al igual que en las anteriores secciones, se proporcionó una ayuda audiovisual y se dejó una tarea, en la cual debían subir la derivada de función $sen(x)$, además de las otras funciones trigonométricas no halladas en la clase (ver Figura 16).

Figura 16 Herramientas utilizadas en la sección de Derivad de funciones trigonométricas

- Representación geométrica de la derivada de la función coseno
- Interpretación geométrica de la función seno
- Representación geométrica de la Funciones trigonométricas tangente, cotangente, secante y cosecante
- Derivadas de las funciones seno, cotangente, secante y cosecante.
- Ayuda audiovisual de las derivadas de funciones trigonométricas

4.2.7. Diseño de la sección Regla de la cadena

En este apartado, se introdujo el tema, mostrando aquellas funciones las cuales no son tan fáciles de derivar con las técnicas que teníamos hasta el momento, pues resultaba un proceso tedioso y extenso. Por tal razón, se dieron algunas estrategias de resolución (ver Figura 17).

Figura 17 Teoría y estrategias de resolución sobre le Regla de la cadena

Hasta el momento hemos visto las técnicas de diferenciación de funciones básicas, $(x^n, funcionestrigonométricas, etc)$, así como sumas, restas, multiplicaciones, divisiones e inclusive múltiplos constantes de estas funciones. Sin embargo, estas técnicas no permiten diferenciar composiciones de funciones, como $f(x) = cos(4x^2)$ o $g(x) = \sqrt[3]{7x^2 - 2}$. En esta sección aprenderemos a cómo derivar este tipo de funciones.

Cuando nos topamos con una función la cual se ve expresada como una composición de dos, tres o hasta más funciones, podríamos emplear aquellas técnicas vistas anteriormente. Aunque, emplear estas técnicas para ajustar una función dada en fracciones más sencillas que podamos diferenciar puede resultar tedioso. Por ejemplo $f(x) = (x^2+1)^2$, en este caso, en un poco sencillo puesto que podemos tomar a $f(x) = (x^2+1)(x^2+1)$ y podríamos derivarla gracias a la regla del producto. Pero en caso tal tuviesemos la función $f(x) = (x^2+1)^9$, el derivar esta función con lo que tenemos hasta el momento, resulta muy complicado y con un proceso demasiado extenso. Para tales funciones, utilizamos la regla de la cadena, que establece que la derivada de una función compuesta es la derivada de la función exterior evaluada en la función interior por la derivada de la función interior.

Si $n \in R$ y $u = g(x)$ es diferenciable en x, entonces:

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}.\, g\acute{}(x)$$

Estrategias para la resolución de problemas :Aplicar la regla de la cadena

1. Para diferenciar $h(x) = f(g(x))$, se recomienda empezar identificando a $f(x)$ y $g(x)$
2. Calcule $f\acute{}(x)$ y evalue en $g(x)$ y así obtendrá $f\acute{}(g(x))$
3. Halle $g\acute{}(x)$
4. Escriba $h\acute{}(x) = f\acute{}(g(x)).\, g\acute{}(x)$

Cuando se aplica la regla de la cadena a la composición de dos o más funciones, hay que tener en cuenta que se trabaja desde la función exterior hacia dentro. También es útil recordar que la derivada de la composición de dos funciones puede considerarse que tiene dos partes, la derivada de la composición de tres funciones tiene tres partes y así sucesivamente. Además, recuerde que nunca evaluamos una derivada en una derivada.

Al igual que en las otras secciones, se expusieron algunos ejemplos, en los que se veía empleado lo expresado. Además de unos ejercicios de aplicación, los cuales harían en el transcurso de la clase (ver Figura 18).

Figura 18 Ejemplos sobre la Regla de la cadena

Veamos algunos ejemplos: Sea $h(x) = (4x^3 + 7x^2 - 5x + 2)^7$. En este tipo de funciones, en la que se ve implicada la regla de la potencia en la regla de la cadena, debemos analizar las funciones implicadas. Podemos observar dos, las cuales son $f(x) = x^7$ y $g(x) = 4x^3 + 7x^2 - 5x + 2$ por lo que $h(x) = f(g(x))$. Como se mencionaba anteriormente se debe empezar desde la función exterior e ir adentrando y que si la función a derivar era una composición de dos funciones, su derivada tiene dos parte. Vea entonces que la derivada siguiendo los pasos anteriormente mencionados, sería:

1. $f(x) = x^7$ y $g(x) = 4x^3 + 7x^2 - 5x + 2$
2. $f´(x) = 7x^6$ por lo que $f´(g(x)) = 7(4x^3 + 7x^2 - 5x + 2)^6$
3. $g´(x) = 3.4x^2 + 2.7x - 5 + 0 = 12x^2 + 14x - 5$
4. $h´(x) = f´(g(x)).\, g´(x) = 7(4x^3 + 7x^2 - 5x + 2)^6.\,(12x^2 + 14x - 5)$

¿Y cuando tenemos una composición de 3 o más funciones? Veamos la función $h(x) = cos^9(\sqrt[3]{x})$. Reescribiendo la función, tenemos que $h(x) = (cos(x^{\frac{1}{3}}))^9$. Analizando la función, podemos ver 3 funciones, siendo: $f(x) = x^9$, $g(x) = cos(x)$ y $m(x) = x^{\frac{1}{3}}$, tendríamos entonces que $h(x) = f(g(m(x)))$. Como es una composición de 3 funciones, la función derivada resultante tendrá 3 partes. Recuerde que empezamos de afuera hacia adentro, por lo que la derivada sería: $h´(x) = 9(cos(x^{\frac{1}{3}}))^8.\,(-sen(x^{\frac{1}{3}}).\,(\frac{1}{3}.\,x^{-\frac{2}{3}})$. Y reescribiendo la función tendríamos: $h´(x) = -3(cos(x^{\frac{1}{3}}))^8.\,(sen(x^{\frac{1}{3}}).\,(x^{-\frac{2}{3}})$

Ejercicios de aplicación a realizar

1. El volumen de un globo esférico de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. El radio es una función del tiempo t y aumenta a razón constante de $5pulg/min$. ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de V con respecto a r?
2. Suponga que un globo esférico se infla a razón constante $\frac{dV}{dt} = 10pulg^3/min$. ¿A qué ritmo aumenta su radio cuando $r = 2pulg$?

En las herramientas utilizadas, adicional a la ayuda audiovisual y la tarea para resolver en casa, se les proporcionó un URL (https://www.geogebra.org/m/e3bapd7f), el cual los dirigía hacia la actividad que debían resolver en la clase sobre la Regla de la cadena (ver Figura 19).

Figura 19 Herramientas utilizadas en la sección de Regla de la cadena

Ayuda audiovisual de la regla de la cadena

Actividad GeoGebra sobre la regla de la cadena

Ejercicios de aplicación

4.2.8. Diseño de la sección Derivación implícita

En esta sección, se dio claridad sobre las funciones expresadas de manera implícita y funciones expresadas de manera explícita. Además, al igual que en la regla de la cadena, se dieron estrategias de resolución, para que así el estudiante mantuviera un orden en el paso a paso que se realizaba a la hora de resolver este tipo de derivación (ver Figura 20).

Figura 20 Teoría y estrategias de resolución sobre la Derivación implícita

Para iniciar esta sección, debemos saber cuándo hablamos de una función expresada de manera implícita o de manera explícita. Si la variable dependiente y, es una función de la variable independiente x, expresamos y en términos de x. Si este es el caso, decimos que y es una función explícita de x, Por ejemplo, cuando escribimos la ecuación $y = x^4 + 1$, estamos definiendo y explícitamente en términos de x. Por otro lado, si la relación entre la función y y la variable x, se expresa mediante una ecuación en la que y no se expresa completamente en términos de x, decimos que la ecuación define a y implícitamente en términos de x. Por ejemplo, la ecuación $y - x^4 = 1$, define la función $y = x^4 + 1$ implícitamente.

Como pudimos observar, existe la posibilidad de pasar una función - ecuación que está de forma implícita a explícita, aunque esto en algunas ocasiones no termina siendo fácil y otras veces termina siendo imposible. Es ahí cuando la derivación implicita entra en acción, pues nos permite derivar aquellas ecuaciones que no están de manera explícita. La diferenciación implícita nos permite encontrar las pendientes de las tangentes a curvas que claramente no son funciones (ya que no pasan la prueba de la línea vertical). Estamos utilizando la idea de que partes de y son funciones que satisfacen la ecuación dada, pero que y no es en realidad una función de x.

Estrategias para la resolución de problemas: Diferenciación implícita

Si la función o ecuación proporcionada está de manera implícita, utilice los siguientes pasos para para hallar su derivada:

1. Halle la derivada de ambos lados de la ecuación. Tenga en cuenta que y es una función de x. Por lo tanto, mientras que $\frac{d}{dx}cos(x) = -sen(x)$, $\frac{d}{dx}cos(y) = -sen(y).\frac{dy}{dx}$ porque debemos utilizar la regla de la cadena para diferenciar $sen(y)$ con respecto x.
2. Reescriba la ecuación de tal manera que todos los términos que contengan $\frac{dy}{dx}$ estén a la izquierda y todos los términos que no contengan $\frac{dy}{dx}$ estén a la derecha. En realidad, no tiene mucha importancia si lo deja a la derecha o izquierda, se dice lo anterior más que todo por estética. Lo importante es que estén separados, que los que contienen $\frac{dy}{dx}$ estén en un lado de la ecuación y los que no al otro lado.
3. Factorice $\frac{dy}{dx}$.
4. Despeje de tal manera que $\frac{dy}{dx}$ quede solo. Siempre tendrá que pasar a dividir lo que está multiplicando a $\frac{dy}{dx}$.

También se dieron ejemplos en los que se siguieron y emplearon las estrategias de resolución de la Figura 20, esto con la finalidad de que, en problemas posteriores, no tuvieran inconvenientes a la hora de solucionarlos (ver Figura 21).

Figura 21 Ejemplos sobre la Derivación implícita

Supongamos que y se define implícitamente por la ecuación $y^4 + x^4 = 16$, calcule $\frac{dy}{dx}$

$\frac{d}{dx}(y^4 + x^4) = \frac{d}{dx}(16)$	Derivamos a ambos lados
$\frac{d}{dx}(y^4) + \frac{d}{dx}(x^4) = \frac{d}{dx}(16)$	Aplicamos la regla de derivación de la suma
$4y^3\frac{dy}{dx} + 4x^3 = 0$	Hallamos las respectivas derivadas, recordando lo del paso 1.
$4y^3\frac{dy}{dx} = -4x^3$	Aplicamos el paso 2.
$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3}{4y^3}$	No fue necesario el paso 3, simplemente se despejó (cuarto paso).
$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{y^3}$	Reescribimos la función simplificando.

Veamos otro ejemplo en el que simplemente resulta imposible despejar la variable y por más que intetemos, no podríamos reescribir la función de manera explícita.

La ecuación que describe la curva conocida como folium (u hoja) de Descartes, es $y^3 + x^3 - 3xy = 0$. Hallemos $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{d}{dx}(y^3 + x^3 - 3xy) = \frac{d}{dx}(0)$$
$$\frac{d}{dx}(y^3) + \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(3xy) = \frac{d}{dx}(0)$$
$$3y^2\frac{dy}{dx} + 3x^2 - 3(1.y + x.1\frac{dy}{dx}) = 0$$
$$3y^2\frac{dy}{dx} + 3x^2 - 3y - 3x\frac{dy}{dx} = 0$$
$$3y^2\frac{dy}{dx} - 3x\frac{dy}{dx} = 3y - 3x^2$$
$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 3x) = 3y - 3x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y-3x^2}{3y^2-3x}$$

En el aula también fue planteado un problema para su posterior resolución en la clase. Dicho problema trataba sobre la ecuación lemniscata la cual debía ser modelada a través del software de GeoGebra (ver Figura 22).

Figura 22 Problema sobre la ecuación lemniscata

Ejercicio a realizar

La gráfica de la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ se denomina ecuación lemniscata.

- Modele mediante una gráfica, la ecuación lemniscata.
- Encuentre los puntos sobre la gráfica que corresponden a $x = 1$.
- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica en cada punto encontrado en el inciso anterior.
- Encuentre los puntos sobre la gráfica en los que la tangente es horizontal.

En las herramientas utilizadas, se proporcionó el espacio donde debían subir la solución del problema de la ecuación lemniscata. Además, se proporcionaros ayudas audiovisuales, en donde una de ellas, era sobre la ecuación lemniscata (ver Figura 23). Cabe aclarar que dicho video podían verlo en casa y después de la clase.

Figura 23 Herramientas utilizadas en la sección de Derivación implícita

Ayuda audiovisual de la derivación implícita

Solución del ejercicio a resolver

Derivación de la ecuación lemniscata.

4.2.9. Diseño de la sección Derivación de funciones inversas

En esta sección se inició mencionando algunos aspectos sobre las funciones inversas que se habían visto anteriormente en clases del primero corte académico, además de complementar con otras definiciones. También se estableció la relación de derivación que tiene una función y su inversa (ver Figura 24).

Figura 24 Teoría y ejemplo sobre la Derivación de funciones inversas

En los inicios de este curso hablábamos sobre las funciones inversas y algunas de sus características. Mecionabamos que para que una función inversa existiera, la función debía ser uno a uno, o sea, pasar la prueba de la recta horizontal. Ahora bien, con lo que respecta a las funciones inversas, también debemos tener en cuenta:

1. Sea f una función continua uno a uno sobre su dominio X. Entonces f^{-1} es continua sobre su dominio.
2. Sea f una función continua y creciente sobre un intervalo $[a, b]$. Entonces f^{-1} existe y es continua y creciente sobre $[f(a), f(b)]$
3. Suponga que f es una función diferenciable sobre un intervalo abierto (a, b). Si $f'(x) > 0$ sobre el intervalo o $f'(x) < 0$ sobre el intervalo, entonces f es uno a uno. Además, f^{-1} es diferenciable para toda x en el rango de f.

Una función f y su inversa f^{-1}, guardan varias relaciones, como por ejemplo que intercambiaban su dominio y su rango, además de que la gráfica f^{-1} se obtenía reflejando a f sobre la recta $y = x$. Adentrándonos a las derivadas, estas también guardan una relación. Dicha relación es que: $\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. Veamos un ejemplo:

Sea $f(x) = x^2 + 2$ y $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$, y queremos hallar $\frac{d}{dx}(f^{-1}(x))$. Por fenifinicón tenemos que $\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ y sabemos que $f'(x) = 2x$, por lo que $\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$.

Posteriormente, se involucró con las funciones trigonométricas y las derivaras de sus inversas. En el Aula, se proporcionaron las derivadas de las funciones $sen^{-1}(x)$ y $tan^{-1}(x)$, trabajándose en la clase con algunas otras funciones trigonométricas inversas (ver Figura 25).

Figura 25 Derivadas de la función seno y tangente inverso

Veamos la importancia que tiene la derivación implícita a la hora de hallar la derivada de alguna función trigonométrica inversa: Empecemos por la función $sen(x)$, por lo que debemos hallar $\frac{d}{dx}(sen^{-1}(x))$. Tenemos la función $y = sen^{-1}(x)$, y reescribiéndola tendríamos que $sen(y) = x$. Derivemos implicitamente:

$$sen(y) = x$$

$$\frac{d}{dx}sen(y) = \frac{d}{dx}x$$

$$cos(y)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos(y)}$$

Ahora bien, lo que debemos hacer es dejar a $cos(y)$ en término de x. Recordemos la identidad trigonómetrica que nos dice que $cos^2(y) + sen^2(y) = 1$ y despejando tenemos que $cos(y) = \sqrt{1 - sen^2(y)}$. Por último, antes de empezar a derivar, dijimos que $sen(y) = x$, po lo que $sen^2(y) = x^2$ y en conclusión tendríamos que $\frac{d}{dx}(sen^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Hallemos la derivada de $y = tang^{-1}(x)$. Reescribiendo la función tenemos que $tang(y) = x$ entonces:

$$tang(y) = x$$

$$\frac{d}{dx}(tang(y)) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$sec^2(y)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec^2(y)}$$

Recordemos la identidad trigonométrica que nos relaciona estas dos funciones, la cual nos dice que $sec^2(y) = 1 + tang^2(y)$. Por lo que $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+tang^2(y)}$. En un principio mencionamos que $tang(y) = x)$ entonces $1 + tang^2(y) = 1 + x^2)$. En conclusión tendriamos que $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

También se proporcionó una imagen en la que se encontraba las diferentes derivadas de funciones trigonométricas inversas compuestas. Además de un ejemplo en el que se debía utilizar la regla de la cadena para dar solución (ver Figura 26).

Figura 26 Derivada de funciones trigonométricas inversas
Fuente: Zill y Wright (2011).

Ahora bien, podemos tener funciones de tipo $y = sen^{-1}(3x^3)$ y para hallar su derivada debemos utilizar la regla de la cadena. Tengamos en cuenta lo expuesto en la siguiente imágen para hallar la derivada de la función mencionada.

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cos^{-1}u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \tag{14}$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cot^{-1}u = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\csc^{-1}u = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}. \tag{16}$$

Recuerde que para (14), $|u| < 1$ y en (16), $|u| > 1$

Como $y = sen^{-1}(3x^3)$, $u = 3x^3$. Las derivadas serían: $\frac{d}{dx}(sen^{-1}(u)) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ y $\frac{du}{dx} = 9x^2$ por lo que

$\frac{d}{dx}(sen^{-1}(3x^3)) = \frac{1}{\sqrt{1-(3x^3)^2}}.9x^2 = \frac{9x^2}{\sqrt{1-9x^6}}$

En las herramientas, se proporcionaron ayudas audiovisuales, de lo expuesto en el aula virtual. Además, se les proporcionó el espacio en el que debían subir las derivadas de las funciones trigonométricas inversas que no se hicieron en el transcurso de la clase, además, de algunos ejercicios a consideración de cada uno de ellos, tomados del libro guía (ver Figura 27).

Figura 27 Herramientas utilizadas en la sección de Derivación de funciones inversas

- Ayuda audiovisual de las derivadas de funciones inversas
- Ayuda audiovisual de las derivadas de funciones trigonométricas inversas
- Derivada de las funciones trigonométricas inversas
- Ejercicios a su consideración

4.2.10. Diseño de la sección Derivada de funciones exponenciales y logarítmicas

Para el inicio de esta sección, se empezó hablando sobre las funciones exponenciales y sus derivadas, donde nuevamente se abarcaría mediante la definición de límite. En la clase, se encaminó dicho límite de tal manera que pudiésemos llegar a la derivada de la función exponencial e^x. En el AVA, se compartió una tabla con diferentes aproximaciones de dicho límite (ver Figura 28).

Figura 28 Introducción al tema de la derivada de funciones exponenciales

Recordemos que anteriormente, cuando hablabamos de funciones exponenciales, dabamos ciertas características que debían cumplirse. Tales como que si $f(x) = b^x$, entonces, $b > 0$ y $b \neq 1$ con $x \in \mathbb{R}$.

En primera instancia, debemos mediante la definición límite, hallar la derivada de las funciones exponenciales, para posteriormente hablar de la función exponencial natural, la cual denotabamos por $f(x) = e^x$, donde e es la constante conocida como ***euler***. Ahora bien, nuestra tarea, es averiguar $\frac{d}{dx}(e^x)$.

Algunas aproximaciones de $lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$, tomando valores comprendidos entre dos y tres, son los siguientes:

b	$\frac{b^{-0,00001}-1}{-0,00001} < B'(0) < \frac{b^{0,00001}-1}{0,00001}$	b	$\frac{b^{-0,00001}-1}{-0,00001} < B'(0) < \frac{b^{0,00001}-1}{0,00001}$
2	$0,693145 < B'(0) < 0,69315$	2,7183	$1,000002 < B'(0) < 1,000012$
2,7	$0,993247 < B'(0) < 0,993257$	2,719	$1,000259 < B'(0) < 1,000269$
2,71	$0,996944 < B'(0) < 0,996954$	2,72	$1,000627 < B'(0) < 1,000637$
2,718	$0,999891 < B'(0) < 0,999901$	2,8	$1,029614 < B'(0) < 1,029625$
2,7182	$0,999965 < B'(0) < 0,999975$	3	$1,098606 < B'(0) < 1,098618$

Posteriormente, se recalca que habíamos hallado una función para la cual se cumplía que $f(x) = f'(x)$. Aemás se dan algunas generalizaciones de lo hallado para finalmente proporcionar algunos ejemplos (ver Figura 29).

Figura 29 Generalizaciones y ejemplos de la derivada de funciones exponenciales

Teniendo en cuenta la demostración de $\frac{d}{dx}(e^x)$, la cual concluye con que $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$, hemos encontrado otra función para la cual se cumple que $f(x) = f'(x)$. Y como vimos anteriormente, cuando tenemos una función multiplicada por una constante, entonces: $\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$, por lo que si tenemos a $c \neq 0$ tendríamos que otra función para la cual se cumple que $f(x) = f'(x)$ es ce^x.

En conclusión tengamos en cuenta que si: $f(x) = e^x$ entonces

1. $f'(x) = e^x$
2. Y en general: $\frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = e^{g(x)}.\, g'(x)$

Por otro lado si: $f(x) = b^x$ entonces

1. $f'(x) = b^x.\, (Lnb)$
2. Y en general: $\frac{d}{dx}(b^{g(x)}) = b^{g(x)}.\, (Lnb).\, g'(x)$

Esto último se da por la relación que tiene una dicha función y su inversa, $e^{Lnb} = b$, por lo que $b^x = (e^{Lnb})^x = e^{x(Lnb)}$, entonces:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^{x(Lnb)}) = e^{x(Lnb)}.\, \frac{d}{dx}(x(Lnb)) = e^{x(Lnb)}.\, (Lnb)$$

Veamos unos ejemplos:

Sea $h(x) = 22^{x^2}$, teniendo en cuenta lo visto anteriormente, su derivada sería:

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(22^{x^2}) = 22^{x^2}.\, (Ln22).\, \frac{d}{dx}(x^2) = 22^{x^2}.\, (Ln22).\, (2x) = 2x(Ln22)22^{x^2}$$

Sea $m(x) = e^{\frac{2}{3}x}$, teniendo en cuenta lo anterior, su derivada sería:

$$m'(x) = \frac{d}{dx}(e^{\frac{2}{3}x}) = e^{\frac{2}{3}x}.\, \frac{d}{dx}(\tfrac{2}{3}x) = e^{\frac{2}{3}x}.\, (\tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{3}e^{\frac{2}{3}x}$$

Continuando en la misma sección, respecto al tema de derivadas de funciones logarítmicas, se empezó haciendo un análisis de la función $y = \text{Ln}(x)$, y el cómo podíamos hallar su derivada. Acá, gracias a lo ya visto en la sección sobre la derivada de funciones exponenciales y la derivación implícita, se logró proporcionar la demostración sobre dicha derivada. Además, se proporcionó una gráfica de la función y su derivada, para indirectamente ir induciendo a los estudiantes en temas que se verían en clases posteriores (ver Figura 30).

Figura 30 Introducción al tema de la derivada de funciones logarítmicas

Ahora que tenemos ya hemos vista la derivada de la función exponencial natural, podemos con ayuda de la diferenciación implícita, calcular la derivada de su inversa, la función de logaritmo natural. Veamos:

Sea $y = Lnx$, con $x \in (0, \infty)$. Reescribiendo la función, tenemos que $e^y = e^{Lnx} = x$, entonces:

$$e^y = x$$

$$\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(x)$$

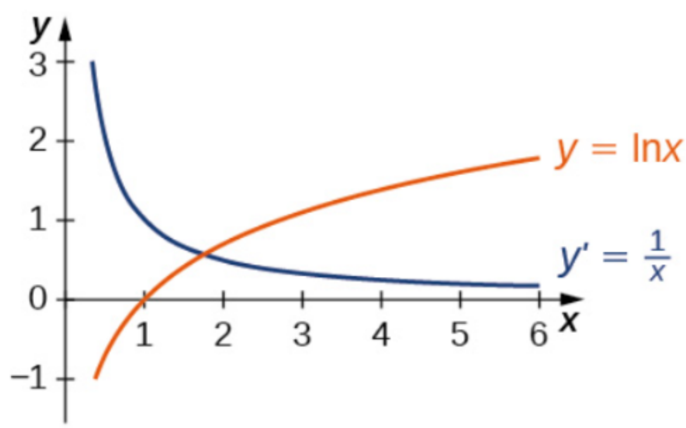
$$e^y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$$

Como $e^y = x$, concluimos que $\frac{d}{dx}(Lnx) = \frac{1}{x}$.

De igual manera, podemos hallar la derivada de $f(x) = Log_b x$, con $b > 0, b \neq 1$ y $x \in (0, \infty)$.

En la siguiente imágen se puede apreciar que la función $y = Lnx$ es creciente en $(0, \infty)$. Por otro lado, su derivada $y´ = \frac{1}{x}$ es mayor que cero en $(0, \infty)$. Este aspecto será de gran relevancia para la siguiente sección que será vista más adelante, en los criterios de las derivadas.



Luego, se proporcionan diferentes generalizaciones sobre lo visto en la clase hasta el momento sobre la derivación de funciones logarítmicas, además de algunos ejemplos en los que se empleaba las generalizaciones dadas (ver Figura 31).

Figura 31 Generalizaciones y ejemplos de la derivada de funciones logarítmicas

Podemos concluir que si: $f(x) = Lnx$ entonces

1. $f´(x) = \frac{1}{x}$
2. Y en general: $\frac{d}{dx}(Ln(g(x))) = \frac{1}{g(x)} . g´(x) = \frac{g´(x)}{g(x)}$.

Por otro lado si: $f(x) = Log_b x$ entonces

1. $f´(x) = \frac{1}{x(Lnb)}$
2. Y en general: $\frac{d}{dx}(Log_b(g(x)) = \frac{1}{g(x).(Lnb)} . g´(x) = \frac{g´(x)}{g(x).(Lnb)}$

Veamos ejemplos de lo expuesto:

Sea $h(x) = Ln\sqrt{x}$, teniendo en cuenta lo visto anteriormente, su derivada sería:

$$h´(x) = \frac{d}{dx}(Ln\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} . \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} . \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

Sea $m(x) = Log_4(x^3 - 3)$, teniendo en cuenta lo anterior, su derivada sería:

$$m´(x) = \frac{d}{dx}(Log_4(x^3 - 3)) = \frac{1}{(x^3-3).(Ln4)} . \frac{d}{dx}(x^3 - 3) = \frac{3x^2}{x^3Ln4 - 3Ln4}$$

Por último, mediante las herramientas del AVA, se proporcionó una ayuda audiovisual sobre el tema de esta sección, además de un espacio para que los estudiantes subieran la solución de algunos ejercicios tomados del libro guía (ver Figura 32).

Figura 32 Herramientas utilizadas en la sección de Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas

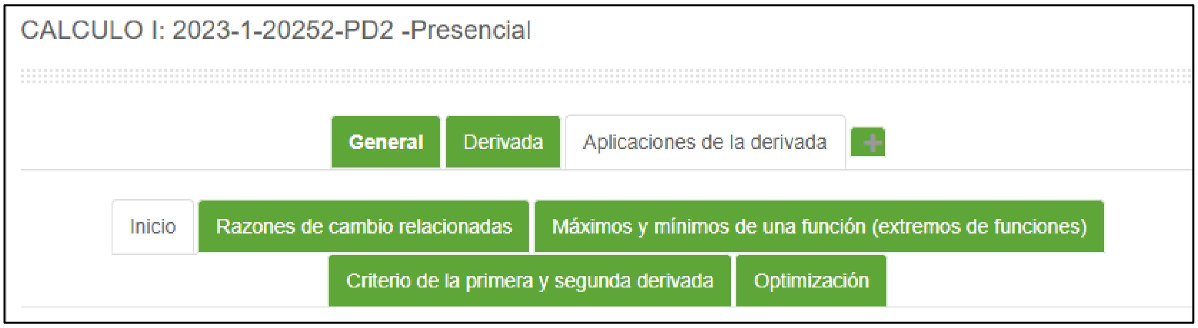
Ayuda audiovisual de las derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas

Ejercicios a resolver

4.2.11. Diseño del apartado Aplicaciones de la derivada

De igual manera que en el apartado de **Derivada**, para el apartado de **Aplicaciones de la derivada**, a los estudiantes, se les mostró de la siguiente manera (ver Figura 33).

Figura 33 Vista de la pestaña de Aplicaciones de la derivada



En la sección de "Inicio" del apartado de **Derivada** y el apartado de **Aplicaciones de la derivada**, se hizo una introducción de lo que es la derivada y las aplicaciones de la derivada respectivamente. A continuación, se hablará sobre el contenido de las secciones que componían a la pestaña de Aplicaciones de la derivada.

4.2.12. *Diseño de la sección Razones de cambio relacionadas*

En esta sección, se hizo una breve introducción y al igual que en otros apartados, se dieron estrategias de resolución de problemas de optimización, para que el estudiante pudiera tener un mejor desempeño a la hora de enfrentarse a este tipo de problemas (Ver Figura 34).

Figura 34 Introducción y estrategias de resolución sobre problemas de razones de cambio relacionadas

Se ha visto que para las magnitudes que varían en el tiempo, las tasas a las que estas magnitudes varían están dadas por las derivadas. Si dos magnitudes relacionadas varían en el tiempo, las tasas a las que varían las magnitudes están relacionadas. Por ejemplo, si un globo se està llenando de aire, el radio y el volumen del globo varían (aumentan). En este apartado, consideramos varios ejemplos o situaciones en las que magnitudes se encuentran relacionadas y están variando. Estudiaremos cómo hallar la relación entre las tasas de cambio de estas magnitudes. En general, una razón de cambio con el tiempo es la respuesta a la pregunta: ¿cuán rápido cambia la cantidad?

Estratégias de resolución de problemas de razones de cambio relacionadas

1. Asigne símbolos a todas las variables que intervienen en el problema. Haga un bosquejo (dibujo) del problema presente.
2. Indique, en función de las variables, la información que se da y lo que debe hallar.
3. Construya un modelo que represente el problema planteado, relacionando las variables introducidas en el paso 1.
4. Utilizando la regla de la cadena, diferencie ambos lados del modelo hallado en el paso 3. Esta nueva ecuación relacionará las derivadas.
5. Sustituya todos los valores conocidos en la ecuación del paso 4, y luego resuelva la tasa de cambio desconocida.

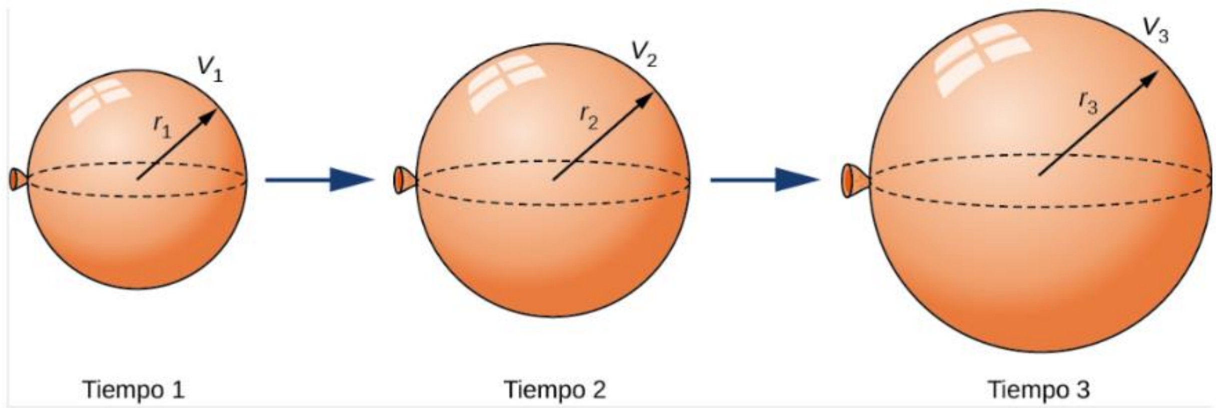
Tenga en cuenta que al solucionar un problema de tasas relacionadas, es de gran importancia no sustituir los valores conocidos demasiado pronto. Por ejemplo, si el valor de una cantidad cambiante se sustituye en una ecuación antes de diferenciar ambos lados de la ecuación, entonces esa cantidad se comportará como una constante y su derivada no aparecerá en la nueva ecuación hallada en el paso 4.

En muchas aplicaciones del mundo real, las cantidades relacionadas cambian con respecto al tiempo. Por ejemplo, si volvemos a considerar el ejemplo del globo, podemos decir que la tasa de cambio del volumen V está relacionada con la tasa de cambio del radio r, En este caso, decimos que $\frac{dV}{dt}$ y $\frac{dr}{dt}$ son tasas relacionadas porque V está relacionada con r. Veamos:

Para dar continuidad a lo anterior, se expone en el AVA diferentes problemas con su respectiva solución, empezando con el problema del globo, el cual va acompañado de una imagen el cual modela el problema planteado mediante los diferentes instantes (ver Figura 35).

Figura 35 Ejemplo del globo esférico

Un globo esférico se está llenando de aire a un ritmo constante de $5\frac{cm^3}{s}$, ¿Qué tan rápido aumenta el radio cuando el radio es $2cm$?



El volumen de una esfera de radio r centímetros está dado por: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 cm^3$

El globo está aumentando con respecto al tiempo su volumen y su radio puesto que se está llenando de aire. Por lo tanto, t segundos después de comenzar a llenar el globo con aire, el volumen de aire en el globo es: $V(t) = \frac{4}{3}\pi(r(t))^3 cm^3$.

Diferenciando ambos lados de esta ecuación con respecto al tiempo y aplicando la regla de la cadena, vemos que la tasa de cambio del volumen está relacionada con la tasa de cambio del radio mediante la ecuación: $V'(t) = \frac{4}{3}\pi 3(r(t))^2 . r'(t) = 4\pi(r(t))^2 . r'(t)$.

El globo se está llenando de aire a una velocidad constante de $5\frac{cm^3}{s}$, por lo que $V'(t) = 5\frac{cm^3}{s}$, entonces: $5 = 4\pi(r(t))^2 . r'(t)$ por lo tanto $r'(t) = \frac{5}{4\pi(r(t))^2}\frac{cm}{s}$

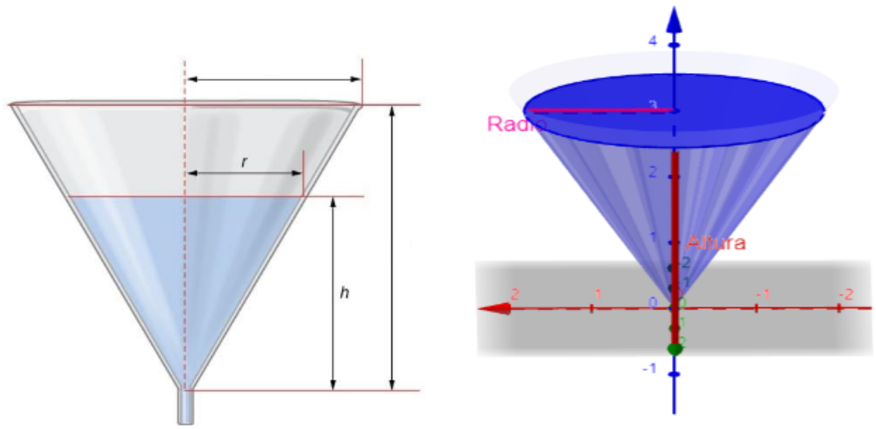
¿Qué tan rápido aumenta el radio cuando el radio es $2cm$? $r'(t) = \frac{5}{4\pi(2)^2}\frac{cm}{s} = \frac{5}{16\pi}\frac{cm}{s}$

Otro problema expuesto en el Aula Virtual, fue el del embudo con el drenaje de agua (ver Figura 36). Este problema fue modelo mediante unas imágenes y también una simulación mediante un recurso de GeoGebra, el cual puede ser visto en https://www.geogebra.org/m/P5kDZme7.

Figura 36 Ejemplo sobre el embudo y drenaje de agua

Problema del embudo y el drenaje de agua

El agua sale por el fondo de un embudo en forma de cono a una tasa de $0,03\frac{cm^3}{s}$. La altura del embudo es de $3cm$ y el radio en la parte superior del embudo es $2cm$ ¿A qué tasa cambia la altura del agua en el embudo cuando la altura del agua es $\frac{1}{2}cm$?



El volumen de agua en el cono està dado por: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

En la figura, podemos evidenciar que tenemos lo que se conoce como triángulos semejantes. Por lo tanto, la relación de los lados de los dos triángulos es la misma. Por tanto, $\frac{r}{h} = \frac{2}{3}$ lo que implica que $r = \frac{2h}{3}$. Reemplazando dicho valor en la ecuaciòn tendrìamos que $V = \frac{1}{3}\pi(\frac{2h}{3})^2 h = \frac{4\pi}{27}h^3$ y diferenciando a ambos lados respecto al tiempo tendríamos que $\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{9}h^2\frac{dh}{dt}$. Como $\frac{dV}{dt} = -0,03\frac{cm^3}{s}$ y $h = \frac{1}{2}cm$, entonces $-0,03 = \frac{4\pi}{9}(\frac{1}{2})^2\frac{dh}{dt}$, lo que implica que $-0,03 = \frac{\pi}{9}\frac{dh}{dt}$, por lo que $\frac{dh}{dt} = \frac{(-0,03).(9)}{\pi} \simeq -0,086$.

Por último, en el AVA, se plantea un problema sobre el vuelo de un avión (ver Figura 37), el cual debe ser solucionado por los estudiantes, utilizando modelación matemática.

Figura 37 Problema sobre el avión que vuela a una altura constante

Avión que vuela a una altura constante

Un avión se encuentra volando a una altura constante de $4km$. Una persona ve el avión desde una posición a $3km$ desde la base de una torre de radio. El avión se encuentra volanado de manera horizontal alejándose de la persona. Si el avión vuela a la velocidad de $3\frac{km}{s}$ ¿A qué velocidad aumenta la distancia entre la persona y el avión cuando este pasa por encima de la torre de radio?

Por otro lado, en las herramientas utilizadas, se proporcionó mediante un recurso de GeoGebra, la simulación del embudo con el drenaje del agua. También se proporcionaron diferentes videos explicativos sobre problemas de razones de cambio relacionadas. Además de un espacio para que los estudiantes subieran la solución de algunos ejercicios (ver Figura 38).

Figura 38 Herramientas utilizadas en la sección de razones de cambio relacionadas

Soluciones de los problemas

Simulación sobre el drenaje del agua del embudo

Ayudas audiovisuales sobre problemas de razones de cambio relacionadas

4.2.13. Diseño de la sección Máximos y mínimos de una función (extremos de funciones)

Para iniciar esta sección, se establecieron aquellas definiciones sobre un máximo y un mínimo, las cuales, fueron ejemplificadas con ayuda de imágenes creadas mediante el Applet de GeoGebra (ver Figura 39).

Figura 39 Teoría y ejemplo sobre máximos y mínimos

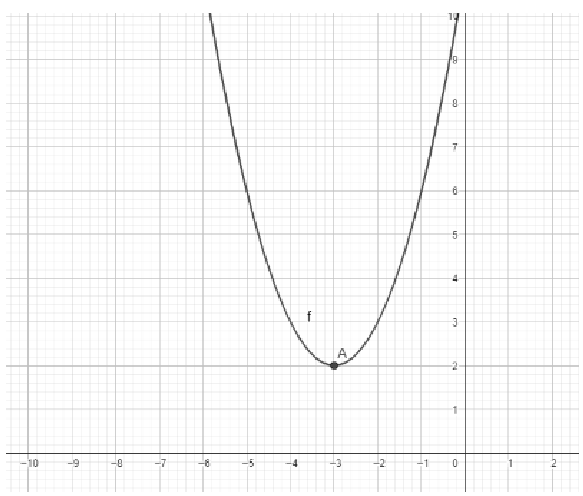
En esta sección establecemos algunas definiciones importantes y mostraremos cómo puede encontrar los valores máximos y mínimos de una función f que es continua sobre un intervalo cerrado I. En otras palabras, veremos cómo utilizar las derivadas para encontrar los valores máximos y mínimos de una función.

En primera instancia, debemos saber cuándo decimos que hay un mínimo o máximo en una función.

1. Un número $f(c_1)$ es un **máximo absoluto** de una función f si $f(x) \leq f(c_1)$ para toda x en el dominio de f.
2. Un número $f(c_1)$ es un **mínimo absoluto** de una función f si $f(x) \geq f(c_1)$ para toda x en el dominio de f.

Los extremos absolutos también se denominan **extremos globales**.

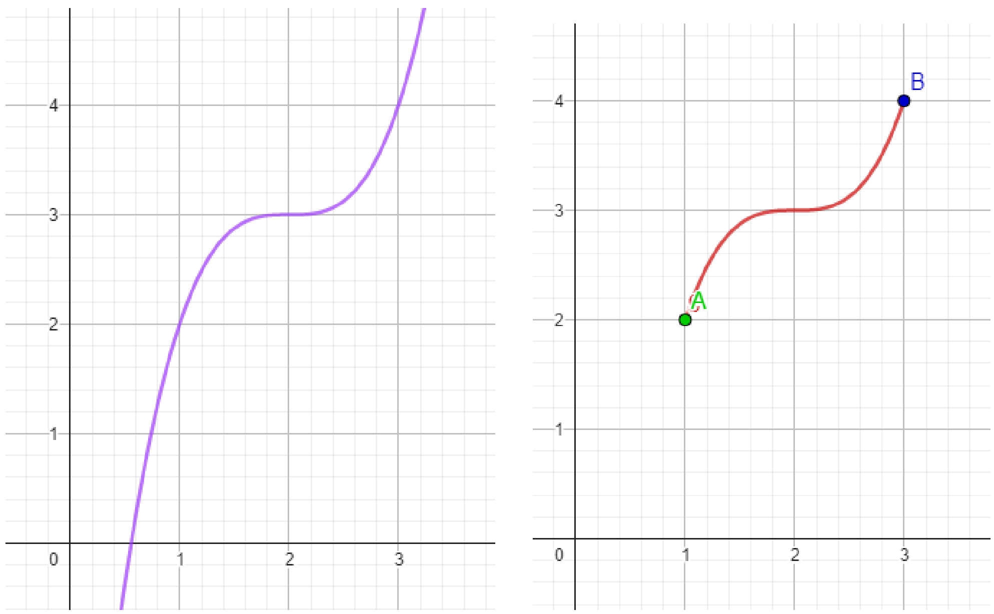
Veamos el siguiente ejemplo con la gráfica de la función $y = (x+3)^2 + 2$. Como podremos ver a continuación, $f(-3) = 2$ es un mínimo absoluto, puesto que $f(x) \geq f(-3)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Ahora bien, podemos observar que para esta función, no hay máximo absoluto, pues no existe $f(c_1)$ tal que $f(x) \leq f(c_1)$



De la misma manera, se ejemplificó lo que respecta a aquellas funciones que no tienen máximos ni mínimos, pero mediante una restricción, se obtienen los extremos de punto frontera, los cuales vienen dados en intervalos cerrados (ver Figura 40).

Figura 40 Ejemplo sobre extremos de punto frontera

Por otro lado, una función f continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ siempre tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto sobre el intervalo. Para este caso pensemos en la función $y = (x - 2)^3 + 3$, la cual no tiene ni máximos ni mínimos, pero si restringimos su dominio al intervalo $[1, 3]$, podemos evidenciar que se genera un máximo y un mínimo absoluto. En este caso, el mínimo absoluto es $f(1) = 2$ y el máximo absoluto es $f(3) = 4$

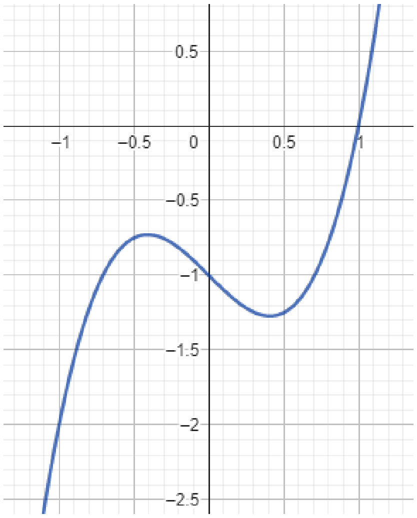


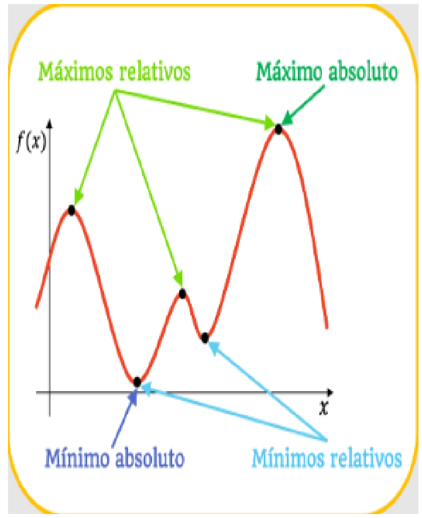
Cuando un extremo absoluto de una función ocurre en un punto frontera de un intervalo cerrado I, como se evidencia en el ejemplo anterior, decimos que se trata de un extremo de un punto frontera. A y B son extremos de un punto frontera. **¿Qué pasa cuando I no es cerrado?**

Del mismo modo, se ejemplificó lo relacionado con los máximos y mínimos relativos. Recalcando que no siempre se hallan extremos absolutos, por lo que entran nuevas definiciones, las cuales también fueron expuestas en el Aula Virtual (ver Figura 41).

Figura 41 Máximos y mínimos relativos

Ahora bien, no siempre hay máximos o mínimos absolutos, existen casos en los que simplemente se evidencia que hay máximos y mínimos pero no son absolutos. Piense en la función $y = 2x^3 - x - 1$, y vea que no hay máximos o mínimos absolutos:





En $x = -\sqrt{\frac{1}{6}}$ podemos evidenciar un máximo relativo y en $x = \sqrt{\frac{1}{6}}$ un mínimo relativo.

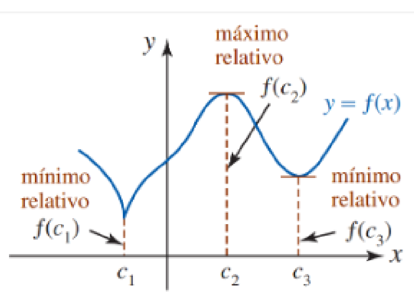
1. Un número $f(c_1)$ es un **máximo relativo** de una función f si para toda x en **algún** intervalo **abierto** que contiene a c_1.
2. Un número $f(c_1)$ es un **mínimo relativo** de una función f si para toda x en **algún** intervalo **abierto** que contiene a c_1.

Todo extremo absoluto, con excepción de un extremo de un punto frontera, también es un extremo relativo.

Posteriormente, mediante una imagen, se estableció el cómo se hallaban los puntos críticos teniendo en cuenta la recta tangente a la curva de función (ver Figura 42).

Figura 42 Teoría sobre el cómo hallar puntos críticos

La pregunta que debería rondar por nuestra mente es ¿Cómo se encuentran los extremos de una función? Antes de dar respuesta a esto, debemos tener en cuenta que si c es un número en el que la función f tiene un extremo relativo, entonces la tangente es horizontal en el punto correspondiente a $x = c$ o no es diferenciable en $x = c$. Es decir, una de las dos: $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe. Este número c recibe el nombre especial de número (punto) crítico. Si una función f tiene un extremo relativo en $x = c$, entonces c es un número crítico. En la siguiente imágen vea que f no es diferenciable en c_1 y que en c_2 y c_3 $f'(c) = 0$.



Podemos concluir que para hallar los puntos críticos de las funciones, debemos hallar la derivada de la función en cuestión, para luego igualarla a cero y despejar el valor de x. Veamos algunos ejemplos:

Por último, se planteó un ejemplo el cual también llevó a dar algunas definiciones las cuales correspondían a cuándo hablábamos de un máximo y cuando de un mínimo, teniendo en cuenta el signo de la pendiente de la recta tangente (ver Figura 43).

Figura 43Teoría y ejemplo sobre el cómo hallar máximos y mínimos

Sea $h(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$, donde su derivada es: $h´(x) = \frac{(1).\sqrt{x}-(1+x).\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$. Ahora bien, debemos igualar a cero, por lo tanto:

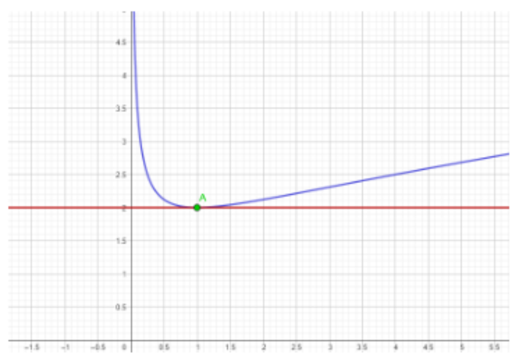
$$\frac{x-1}{2x\sqrt{x}} = 0$$
$$x - 1 = 0.(2x\sqrt{x})$$
$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

Por lo hecho anteriormente, sabemos eque en $x = 1$ tenemos un punto critico, ahora bien ¿Còmo sabemos si es un máximo o un mímino? Lo que debemos hacer, es coger un valor anterior y otro posterior al punto crítico y reemplazarlos en la derivada, teniendo en cuenta que si:

1. La pendiente pasa de tener un valor positivo a uno negativo, tenemos un máximo.
2. .La pendiente pasa de tener un valor negativo a uno positivo, tenemos un mínimo.

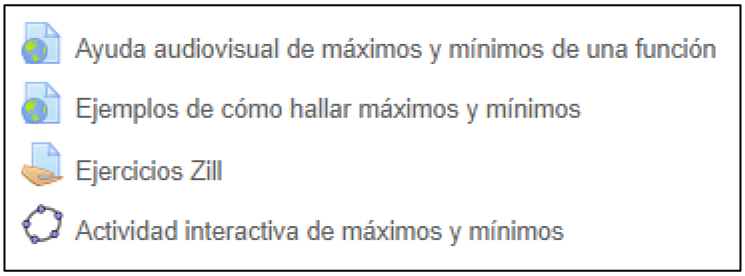
Tenga en cuenta que los valores anteriores y posteriores del punto critico que se toman, deben pertenecer al dominio.

Para el ejemplo que estàbamos manejando, teníamos que $x = 1$ era un punto crítico, vea que para el valor anterior, no podemos tomar a 0, puesto que 0 no pertenece al dominio de la función. Por lo que como valor anterior, tomaremos a 0.5 y como valor posterior tomaremos a 2. Note que $f´(0,5) \simeq -0,7$ y $f´(2) \simeq 0,177$, por lo que podemos afirmar que en $x = 1$ hay un mínimo.



Las herramientas utilizadas, fueron ayudas audiovisuales las cuales contenían tanto explicaciones del cómo hallar máximo y mínimo, como también las definiciones propias. Se proporcionó un recurso de GeoGebra para una actividad interactiva al final de la clase. Por último, un apartado en el que los estudiantes subirían algunos ejercicios del libro guía (ver Figura 44).

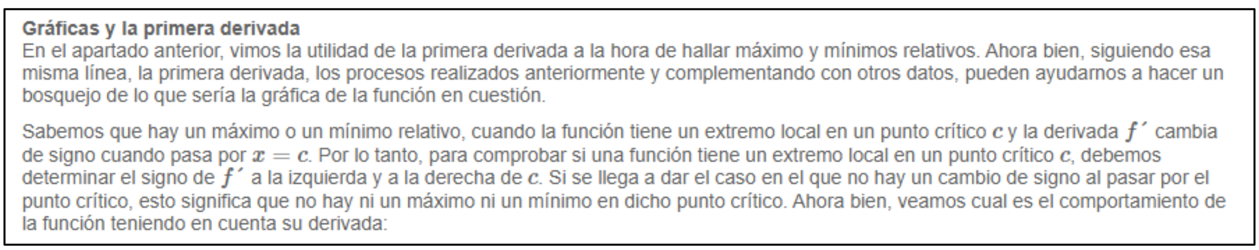
Figura 44 Herramientas utilizadas en la sección de Máximos y mínimos de una función



4.2.14. Diseño de la sección Criterio de la primera y segunda derivada

Para el criterio de la primera derivada, se inició mediante una breve introducción de lo que se había deducido en la clase anterior sobre los máximos y mínimos y el cómo hallarlos (ver Figura 45).

Figura 45 Introducción sobre el criterio de la primera derivada

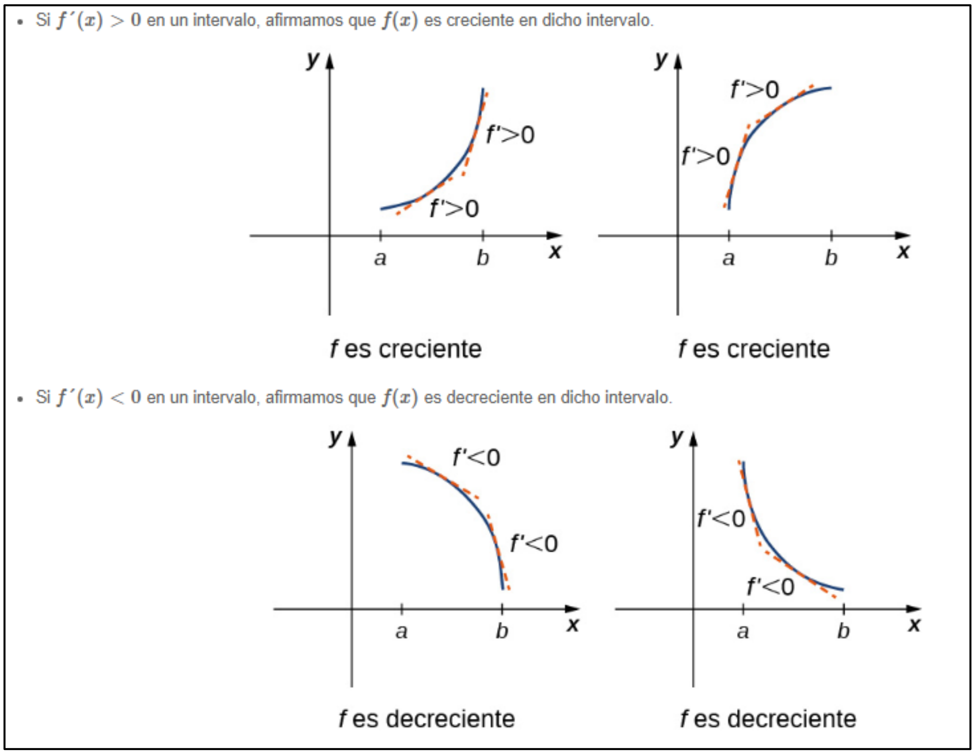


Gráficas y la primera derivada
En el apartado anterior, vimos la utilidad de la primera derivada a la hora de hallar máximo y mínimos relativos. Ahora bien, siguiendo esa misma línea, la primera derivada, los procesos realizados anteriormente y complementando con otros datos, pueden ayudarnos a hacer un bosquejo de lo que sería la gráfica de la función en cuestión.

Sabemos que hay un máximo o un mínimo relativo, cuando la función tiene un extremo local en un punto crítico c y la derivada f' cambia de signo cuando pasa por $x = c$. Por lo tanto, para comprobar si una función tiene un extremo local en un punto crítico c, debemos determinar el signo de f' a la izquierda y a la derecha de c. Si se llega a dar el caso en el que no hay un cambio de signo al pasar por el punto crítico, esto significa que no hay ni un máximo ni un mínimo en dicho punto crítico. Ahora bien, veamos cual es el comportamiento de la función teniendo en cuenta su derivada:

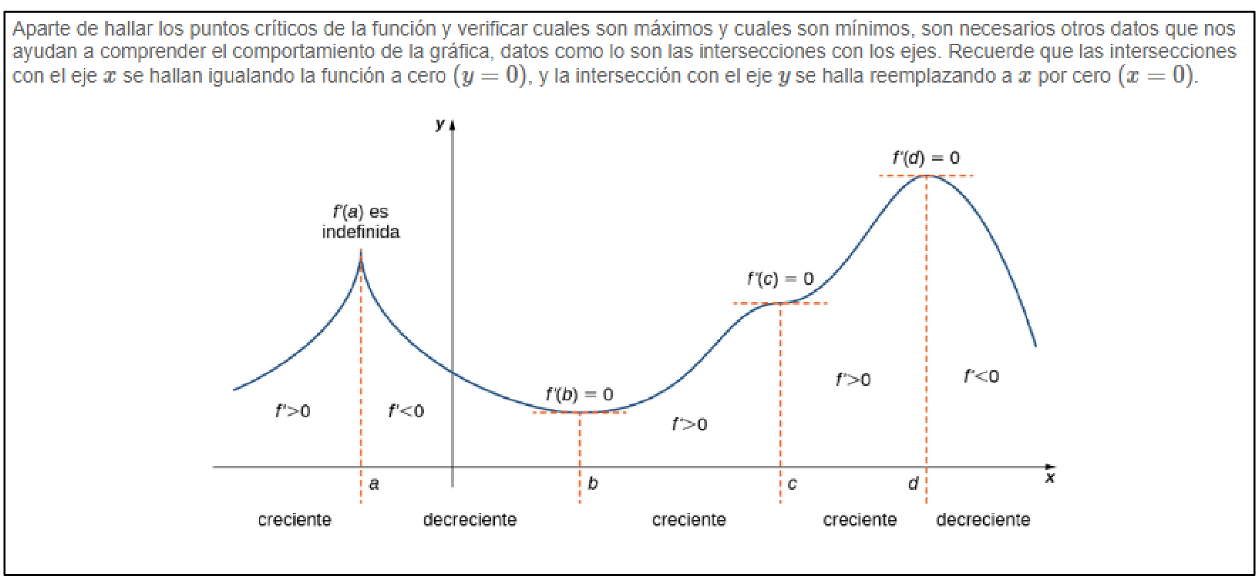
Posteriormente, se resume el criterio de la primera derivada mediante imágenes, mostrando los diferentes trazos de la gráfica que se pueden dar (ver Figura 46).

Figura 46 Criterio de la primera derivada



A la hora de construir una gráfica, además del criterio de la primera derivada, son importantes otros datos, como lo son las intersecciones con los ejes, por lo que, en el AVA, se establece esto, complementando con una imagen de una gráfica (ver Figura 47).

Figura 47 Datos complementarios



Se proporciona un ejemplo detallado de todo lo mencionado anteriormente. Desde lo más importante, que es el criterio de la primera derivada, como aquellos otros datos que ayudan en el análisis del comportamiento de la gráfica de una función (ver Figura 48 y 49). Además, se comprobó lo hecho mediante el archivo de GeoGebra https://www.geogebra.org/classic/dezxmjtg.

Figura 48 Ejemplo sobre el criterio de la primera derivada

Veamos un ejemplo. Sea $f(x) = x^3 + 6x^2 - x$, hallemos los puntos críticos de la función, por lo que es necesario hallar la derivada: $f'(x) = 3x^2 + 12x - 1$ donde utilizando la fórmula del estudiante, hallamos que los puntos para los cuales $f'(x) = 0$ son:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)}$$

$$\frac{-12 \pm \sqrt{144 + 12}}{6}$$

$$\frac{-12 \pm \sqrt{156}}{6}$$

$$\frac{-12 \pm 2\sqrt{39}}{6}$$

$$\frac{-6 \pm \sqrt{39}}{3}$$

$$x_1 \simeq -4,08167 \text{ y } x_2 \simeq 0,0816$$

Verifiquemos los signos de la derivada antes y después de los puntos críticos, para deducir cuál es un punto mínimo y cuál es un máximo:

- $x_1 \simeq -4,08167$, como valor anterior tomaremos a -5 y como valor posterior a -3. Reemplazando en la derivada tendríamos: $f'(-5) = 3(-5)^2 + 12(-5) - 1 = 14$ y $f'(-3) = 3(-3)^2 + 12(-3) - 1 = -10$. Podemos evidenciar que el signo de la derivada cambia de positivo a negativo, por lo que podemos concluir que en $x_1 \simeq -4,08167$ hay un máximo relativo.
- $x_2 \simeq 0,0816$, como valor anterior tomaremos a 0 y como valor posterior a 1. Reemplazando en la derivada tendríamos: $f'(0) = 3(0)^2 + 12(0) - 1 = -1$ y $f'(1) = 3(1)^2 + 12(1) - 1 = 14$. Podemos evidenciar que el signo de la derivada cambia de negativo a positivo, por lo que podemos concluir que en $x_2 \simeq 0,0816$ hay un mínimo relativo.

Figura 49 Continuación del ejemplo sobre el criterio de la primera derivada

Ahora bien, veamos los cortes con los ejes: Para el eje x, igualemos la función a cero y factoricemos de tal manera que nos quede fácil hallar los valores para los cuales la función se hace cero. Entonces: $x^3 + 6x^2 - x = 0$. Sacando a x como factor común tenemos que $x(x^2 + 6x - 1) = 0$ por lo que en $x = 0$ hay un corte $(x_2 = 0)$. Por otro lado, factorizando $x^2 + 6x - 1$ con ayuda de la fórmula del estudiante para hallar los otros cortes, tendríamos:

$$\frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$\frac{-6 \pm \sqrt{36+4}}{2}$$

$$\frac{-6 \pm \sqrt{40}}{2}$$

$$\frac{-6 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$-3 \pm \sqrt{10}$$

$$x_1 \simeq -6,162 \text{ y } x_3 \simeq 0,162$$

Por último, hallemos el corte con el eje y tomando a $x = 0$, entonces: $f(0) = (0)^3 + 6(0)^2 - (0) = 0$.

Teniendo en cuenta todos los datos encontrados anteriormente, podemos darnos una idea del comportamiento de la gráfica. Ahora bien, mediante una construcción de la gráfica en GeoGebra, podemos comprobar todos estos datos. Dicha construcción, se encuentra en la parte inferior de la sección.

Para el criterio de la segunda derivada, se optó por proporcionar imágenes en el aula virtual de aprendizaje. A medida que se iban mencionando los diferentes criterios que esta derivada nos ofrecía, se iban proyectan las imágenes acordes.

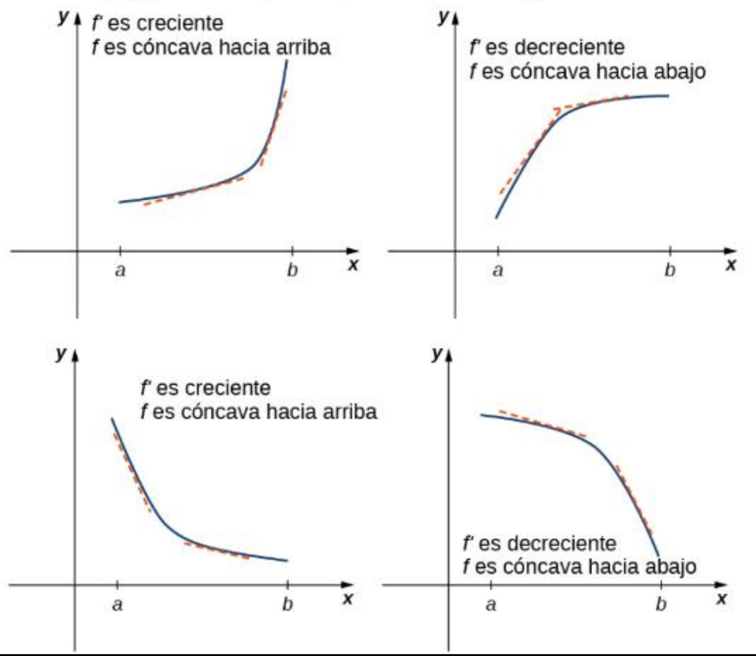
Para el comportamiento de la gráfica de una función por medio del criterio de la concavidad en un intervalo mediante la primera derivada, se presentó lo siguiente (ver Figura 50).

Figura 50 Criterio de la concavidad por medio de la primera derivada

Ahora sabemos cómo determinar si una función es creciente o decreciente. Sin embargo, hay otra cuestión a tener en cuenta respecto a la forma del gráfico de una función. Si el gráfico se curva, ¿lo hace hacia arriba o hacia abajo? Esta noción se denomina concavidad de la función. En el siguiente análisis el objetivo es relacionar el concepto de concavidad con la segunda derivada de una función, pero antes de eso, veremos como está relacionada la concavidad con la primera derivada:

Sea f una función diferenciable sobre un intervalo (a, b).

- Si f' es una función creciente sobre (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre el intervalo
- Si f' es una función decreciente sobre (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre el intervalo.



La información proporcionada en el AVA sobre la prueba de concavidad por medio de la segunda derivada, las pendientes de la primera derivada y el punto de inflexión se presentó como se evidencia en la Figura 51.

Figura 51 Teoría sobre el criterio de la concavidad por medio de la segunda derivada

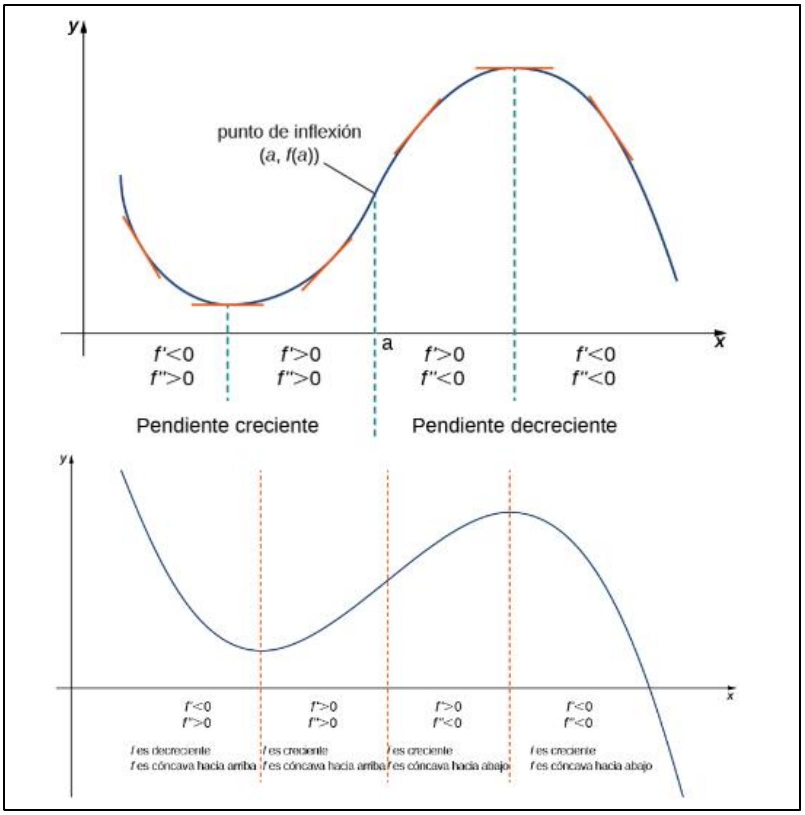
Por otro lado, para la prueba de concavidad, tenemos que si f es una función para la cual f'' existe en (a, b), entonces:

- Si $f''(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre (a, b).
- Si $f''(x) < 0$ para toda x en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre (a, b).

Además si $(a, f(a))$ es un punto sobre la gráfica de una función donde la concavidad cambia de arriba abajo o viceversa recibe el nombre de punto de inflexión. En consecuencia si $(a, f(a))$ es un punto de inflexión para la gráfica de una función f, entonces $f''(a) = 0$ o $f''(a)$ no existe.

La información expuesta en la Figura 51, fue representada mediante imágenes, las cuales son las expuestas en la Figura 52.

Figura 52 Ilustración de la Teoría sobre el criterio de la concavidad por medio de la segunda derivada

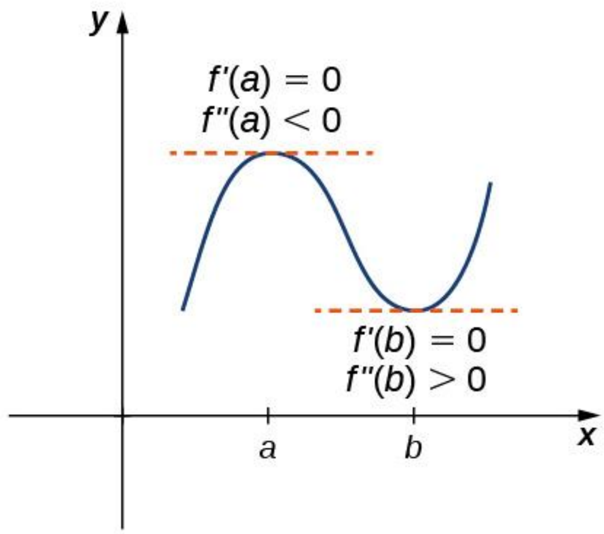


Para la información correspondiente a los máximos y mínimos por medio de la segunda derivada se presentó como se evidencia en la Figura 53.

Figura 53 Máximos y mínimos por medio de la segunda derivada

Por último, si f es una función para la cual f'' existe sobre un intervalo (a, b) que contiene al número crítico, entonces:

- Si $f''(b) > 0$, entonces $f(b)$ es un mínimo relativo.
- Si $f''(a) < 0$, entonces $f(a)$ es un máximo relativo.
- Si $f''(c) = 0$, entonces la prueba falla y $f(c)$ puede ser o no un extremo relativo. En este caso se usa la prueba de la primera derivada.



Por último, y al igual que en el criterio de la primera derivada, se proporcionó un ejemplo detallado, aunque en este ejemplo se utilizaron ambos criterios (ver Figura 54 y 55). Además, se comprobó lo hecho mediante el archivo de GeoGebra https://www.geogebra.org/classic/e4wyxqp8.

Figura 54 Ejemplo sobre el criterio de la segunda derivada

Analicemos un ejemplo en el que veamos empleado todo lo mencionado anteriormente: Sea $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{x}{8} + 2$. En primera instancia hallemos la primera y segunda derivada de esta función.

Al derivar la función tenemos que $f\acute{}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{8}$ y volviendo a derivar tendríamos que $f\acute{}\acute{}(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$. Como tenemos la primera derivada, podemos hallar los puntos críticos de esta función, veamos cuales son:

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{8} = 0$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{8}$$

$$3\sqrt[3]{x^2} = 8$$

$$\sqrt[3]{x^2} = \frac{8}{3}$$

$$x^2 = (\tfrac{8}{3})^3$$

$$x = \sqrt{(\tfrac{8}{3})^3}$$

$$x = \pm\frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$x_1 \simeq -4,355 \text{ y } x_2 \simeq 4,355$$

Ahora bien, con ayuda de la segunda derivada veamos cuál punto es máximo y cuál es mínimo.

- Tenemos que $f\acute{}\acute{}(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$ por lo que $f\acute{}\acute{}(x_1) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(-4{,}355)^5}} \simeq 0,019$, entonces $f\acute{}\acute{}(-4,355) > 0$, concluimos que $x = -4,355$ es un mínimo.

Figura 55 Continuación del ejemplo sobre el criterio de la segunda derivada

- Por otro lado, tenemos que $f\acute{}\acute{}(x_2) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(4{,}355)^5}} \simeq -0,019$, entonces $f\acute{}\acute{}(4,355) < 0$, concluimos que $x = 4,355$ es un máximo.

Veamos ahora los intervalos en los cuales la función es cóncava hacia arriba $(f\acute{}\acute{}(x) > 0)$ y los intervalos en los que es cóncava hacia abajo $(f\acute{}\acute{}(x) < 0)$.

Tenemos que $f\acute{}\acute{}(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$, vea que el numerador siempre es negativo, esto será muy importante a la hora de concluir. Veamos cuándo el denominador es positivo y cuando es negativo:

$$9\sqrt[3]{x^5} = 0$$

$$\sqrt[3]{x^5} = \frac{0}{9}$$

$$x^5 = (\tfrac{0}{9})^3$$

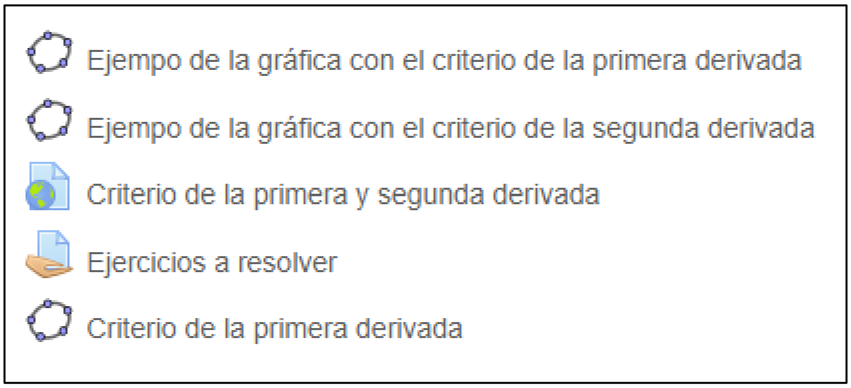
$$x = \sqrt[5]{(\tfrac{0}{9})^3} \text{ entonces } x = 0$$

Vea que por el denominador, tenemos que los valores antes de cero son negativos y los valores después de cero son positivos. Ahora bien, como el numerador es negativos, los valores de $f\acute{}\acute{}$ cambian. Por lo tanto, concluimos que $f\acute{}\acute{}(x) > 0$ cuando $x \in (-\infty, 0)$ o en otras palabras, la función es cóncava hacia arriba en ese intervalo. Por otro lado, $f\acute{}\acute{}(x) < 0$ cuando $x \in (0, \infty)$ o en otras palabras, la función es cóncava hacia abajo en dicho intervalo.

Solo nos faltaría el punto de inflexión, vea que por lo hecho anteriormente, podríamos concluir que $(0, f(0)$ es el punto de inflexión, puesto que es ahí donde se está dando el cambio de concavidad. Pero si deseamos hallarlo mediante un procedimiento basta ver cuando $\frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}} = 0$ pero vea que para este caso en particular, no hay, y $f\acute{}\acute{}(0)$ no existe, pues $\frac{-2}{9\sqrt[3]{0^5}} = \infty$, por lo que concluimos que $(0, f(0)) = (0, 2)$ es el punto de inflexión.

Mediante las herramientas utilizadas, se proporcionaron dos construcciones, las cuales junto al URL nombrado “Criterio de la primera y segunda derivada”, fueron utilizados para comprobar y analizar el comportamiento de las gráficas de los ejemplos planteados en el AVA y los vistos en la clase. El recurso de GeoGebra nombrado "Criterio de la primera derivada" fue el utilizado para que los estudiantes modelaran por sí mismos dicho criterio (ver Figura 56).

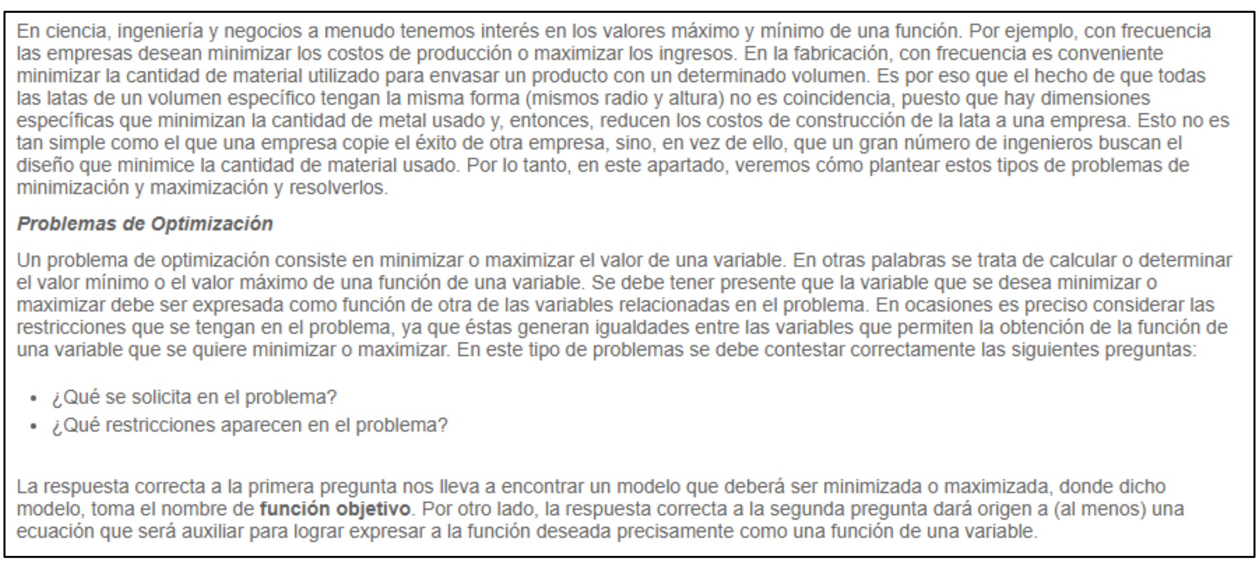
Figura 56 Herramientas utilizadas en la sección de Criterio de la primera y segunda derivada



4.2.15. Diseño de la sección Optimización

Se empezó esta sección dando una breve introducción de lo que son los problemas de optimización, para posteriormente plantear las preguntas que se debían hacer cuando se deseaba desarrollar y solucionar uno de estos problemas (ver Figura 57).

Figura 57 Introducción al tema de optimización



En ciencia, ingeniería y negocios a menudo tenemos interés en los valores máximo y mínimo de una función. Por ejemplo, con frecuencia las empresas desean minimizar los costos de producción o maximizar los ingresos. En la fabricación, con frecuencia es conveniente minimizar la cantidad de material utilizado para envasar un producto con un determinado volumen. Es por eso que el hecho de que todas las latas de un volumen específico tengan la misma forma (mismos radio y altura) no es coincidencia, puesto que hay dimensiones específicas que minimizan la cantidad de metal usado y, entonces, reducen los costos de construcción de la lata a una empresa. Esto no es tan simple como el que una empresa copie el éxito de otra empresa, sino, en vez de ello, que un gran número de ingenieros buscan el diseño que minimice la cantidad de material usado. Por lo tanto, en este apartado, veremos cómo plantear estos tipos de problemas de minimización y maximización y resolverlos.

Problemas de Optimización

Un problema de optimización consiste en minimizar o maximizar el valor de una variable. En otras palabras se trata de calcular o determinar el valor mínimo o el valor máximo de una función de una variable. Se debe tener presente que la variable que se desea minimizar o maximizar debe ser expresada como función de otra de las variables relacionadas en el problema. En ocasiones es preciso considerar las restricciones que se tengan en el problema, ya que éstas generan igualdades entre las variables que permiten la obtención de la función de una variable que se quiere minimizar o maximizar. En este tipo de problemas se debe contestar correctamente las siguientes preguntas:

- ¿Qué se solicita en el problema?
- ¿Qué restricciones aparecen en el problema?

La respuesta correcta a la primera pregunta nos lleva a encontrar un modelo que deberá ser minimizada o maximizada, donde dicho modelo, toma el nombre de **función objetivo**. Por otro lado, la respuesta correcta a la segunda pregunta dará origen a (al menos) una ecuación que será auxiliar para lograr expresar a la función deseada precisamente como una función de una variable.

Posteriormente, al igual que en algunas de las secciones anteriores, se dieron estrategias de resolución. Lo anterior con la finalidad de que el estudiante pudiera dar una mejor interpretación y solución a los problemas planteados (ver Figura 58).

Figura 58 Estrategias de resolución de problemas de optimización

Estrategias para la resolución de problemas de optimización

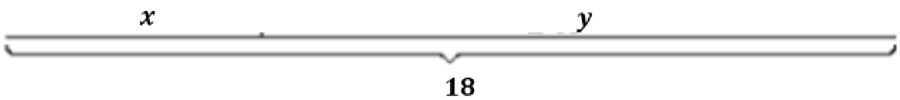
1. Lea el problema con atención; luego léalo de nuevo.
2. Realice un bosquejo o dibujo del problema cuando sea posible; hágalo sencillo.
3. Introduzca las variables (en su dibujo, en caso de haber alguna) y observe cualquier restricción entre estas.
4. Determine qué cantidad debe ser maximizada o minimizada.
5. Use todas las variables necesarias para establecer el modelo. Este modelo puede incluir más de una variable.
6. Escriba cualquier ecuación que relacione las variables independientes en la fórmula del paso 5. Utilice estas ecuaciones para escribir el modelo en función de una variable.
7. Identifique el dominio de consideración de la función en el paso 6, en función del problema físico que hay que resolver.
8. Localice el valor máximo o mínimo de la función a partir del paso 7. Este paso suele implicar la búsqueda de puntos críticos y la evaluación de una función en los puntos extremos.
   - Si la función objetivo es continua y está definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces compruebe los extremos en puntos frontera. Si el extremo deseado no ocurre en un punto frontera, debe ocurrir en un número crítico en el intervalo abierto (a, b).
   - Si la función objetivo está definida sobre un intervalo que no es cerrado, entonces es necesario aplicar una prueba de la derivada en cada número crítico en ese intervalo.

Se proporcionó también un ejemplo. Dicho ejemplo fue expuesto en el marco teórico de esta investigación. Al igual que en los otros apartados, el ejemplo se resuelve de la manera más detallada posible (ver Figura 59).

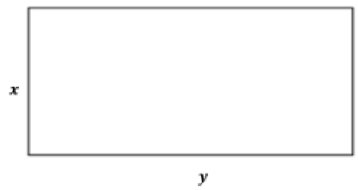
Figura 59 Ejemplo sobre el segmento

Veamos un ejemplo sencillo: Dado un segmento de $18cm$ de longitud , divídalo en dos partes, de modo que, el resultado de la multiplicación de las dos longitudes resultantes, sea el mayor.

Tenemos que el segmento mide $18cm$ y que debe ser dividido en dos parte, por lo que a las longitudes resultantes les daremos los nombres de x y y. De manera tal que tendríamos lo siguiente:



Por lo tanto, la pregunta en cuestión es ¿Para qué valor de x el producto $x.y$ es máximo? Lo que también podría entenderse como ¿Dónde debe cortarse el segmento para que el rectángulo de base y y altura x tenga el área máxima?



Tendríamos que la función objetivo es $A = \acute{a}rea = x.y$. Como son dos variables las que tenemos, utilicemos la ecuación $x + y = 18$ para dejar todo en términos de una sola variable (x). Como $x + y = 18$ entonces $y = 18 - x$, y reescribiendo la función objetivo, tendríamos que $f(x) = x.(18 - x) = 18x - x^2$. Vea que el dominio de esta función a simple vista, sería $(-\infty, \infty)$, pero teniendo en cuenta el problema en sí, dominio es $[0, 18])$, pues que la longitud tomada no será negativa, además de que no será mayor a 18.

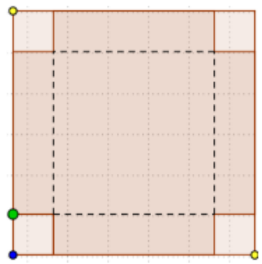
Como lo dice el punto el punto 8 de las estrategias, ya teniendo la función, debemos buscar los puntos críticos y aplicar las pruebas de la derivada. Tenemos que $f(x) = 18x - x^2$ por lo que $f\acute{}(x) = 18 - 2x$, donde al igual la derivada a cero y despejar, llegamos a que su único punto crítico es $x = 9$. Ahora bien, para saber si es un máximo o un mínimo, utilicemos la segunda derivada. Por tanto, $f\acute{}\acute{}(x) = -2$ y $f\acute{}\acute{}(9) = -2$ y cuando $f\acute{}\acute{}(c) < 0$ significa que en ese punto crítico, hay un máximo. Por lo que concluimos que x debe medir $9cm$ y por lo tanto y también siendo estas dos longitudes la que producen mayor producto entre estas dos, con el valor de $81cm^2$.

Otro ejemplo planteado en el aula, haciendo uso de la modelación como simulación, fue el de la caja sin tapa (ver Figura 60), utilizando el siguiente recurso para su simulación https://www.geogebra.org/m/wjrvyuvz. El último problema trabajado en la clase, se compartió mediante el link https://www.geogebra.org/m/rnBSqp3V, el cual mostraba la descripción del problema (el cual trataba sobre un jardín) y su respectiva simulación.

Figura 60 Ejemplo de la caja sin tapa

Veamos otro ejemplo: Una empresa que vende profuctos industriales, quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón de $6m \times 6m$ para empacar uno de sus productos. Para ello, se corta un cuadrado de lado x en cada esquina y se dobla la hoja levantando los cuatro laterales de la caja.

Antes de empezar con la resolución de este problema, ingrese al siguiente link https://www.geogebra.org/classroom/jre5knvc y vea la simulación de dicho problema. Mueva el punto verde que aparece en la representación bidimencional, y vea como va cambiando la forma y el volumen de la caja resultante. Según el dibujo, ¿Para cuál valor de x el volumen de la caja se hace máximo? Veamos cómo llegan a dicha respuesta. Tenga abierto dicho archivo para que sepa a que nos referimos.



El volumen de una caja está dado por $V = a \times h \times p$ donde a es el ancho, h la altura y p la profundidad. Tenemos que $a = 6cm$ y $p = 6cm$. Ahora bien, al quitarles de las esquinas el cuadrado de lado x, tendríamos que $a = 6 - 2x$ y $p = 6 - 2x$. Por otro lado, vea que la altura coincide con la longitud del cuadrado recortado, por lo que $h = x$. Reescribiendo la función, tendríamos que:

$$V = (6 - 2x)(x)(6 - 2x) = (6 - 2x)^2(x)$$

$$V = (36 - 24x + 4x^2)(x)$$

$$V = 36x - 24x^2 + 4x^3$$

Siendo su derivada: $V'(x) = 36 - 48x + 12x^2$

Ahora bien, igualando a cero tenemos: $36 - 48x + 12x^2 = 0$. Dividiendo entre 12 a ambos lados y reescribiendo tenemos $x^2 - 4x + 3 = 0$. Por último factorizando $(x - 1)(x - 3) = 0$ por lo que $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$.

Por otro lado, tenemos que $V''(x) = 24x - 48$ y utilizando el criterio de la segunda derivada, obtenemos que $V''(1) = 24(1) - 48 = -24$ y $V''(3) = 24(3) - 48 = 24$ por lo que afirmamos que $x_1 = 1$ es un máximo y $x_2 = 3$ es un mínimo. **En conclusión, se debe recortar un cuadrado de lado igual a un metro**.

Problema para la clase: https://www.geogebra.org/classroom/tkr7tkpv en este link se encuentra la simulación y la descripción del problema a realizar.

También se dejaron planteados algunos problemas, los cuales debían resolver y subir su respectiva solución en el apartado indicado (ver Figura 61).

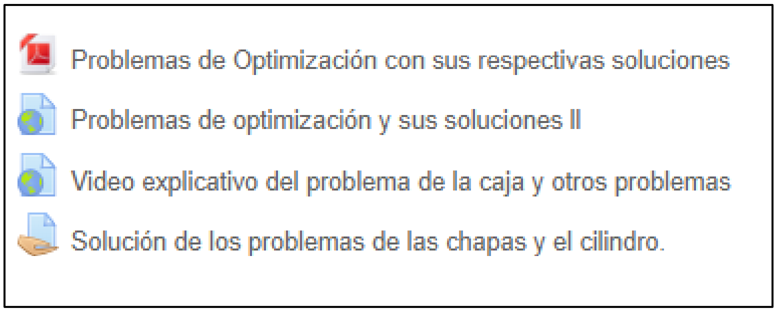
Figura 61 Problemas planteados para la casa

Problemas a realizar en casa

1. Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos materiales distintos. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser de un metro?
2. Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto que tenga una superficie (área) total de $200cm^2$. Determine el radio de la base y la altura de la lata para que el volumen sea máximo. En el siguiente link está la simulación de este problema: https://www.geogebra.org/classroom/uwch9fqn y al igual que en el problema anterior, primero ingrese al link y familiaricese con el problema, busque las posible soluciones moviendo el radio.

Por último, por medio de las herramientas del AVA, se proporcionó un documento PDF y un URL (https://www.matesfacil.com/BAC/optimizar/problemas-resueltos-optimizar-extremos-maximo-minimo-derivada-creciente-decreciente-monotonia.html) los cuales contenían diversos problemas de optimización con su respectiva solución. Además, se proporcionaron ayudas audiovisuales sobres diferentes problemas, incluyendo el de la caja, expuesto en la Figura 60. Por último, se proporciona el espacio en el que los estudiantes subirán las soluciones de los problemas que no fueron abordados en la clase (ver Figura 62).

Figura 62 Herramientas utilizadas en la sección de Optimización



4.2.16. Recolección de información

Teniendo en cuenta la importancia de disponer de diversos instrumentos de recolección de información, se cuenta con el uso de la plataforma Moodle (tic.uis.edu.co), y como se pudo evidenciar en el diseño del Aula Virtual de Aprendizaje, esta permite subir documentos, que están en repositorio para el profesor.

Las actividades se implementaron durante los encuentros presenciales con los estudiantes y algunas actividades fueron durante la hora de estudio de cada estudiante. También se hizo uso del portal www.geogebra.org, en el cual los estudiantes pueden crear un perfil para compartir ideas académicas, además de poder ver construcciones geométricas paso a paso para el aprendizaje.

5. Beneficios del uso de un Aula Virtual de Aprendizaje

Los beneficios del uso del Aula Virtual de Aprendizaje Moodle, fueron obtenidos de acuerdo a las pestañas de Derivada y Aplicaciones de la Derivada. Inicialmente se presenta los beneficios encontrados en la pestaña Derivada en las secciones de: *Concepto Derivada, Regla de la suma y resta, Regla de la cadena, Derivación implícita y Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas.*

Posteriormente, se presentan los beneficios encontrados en la pestaña de Aplicaciones de la derivada con las secciones de: *Razones de cambio relacionadas, Máximos y mínimos de una función, Criterio de la primera y segunda derivada y Optimización.*

5.1. Pestaña de la Derivada

5.1.1. Relación entre las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de una función y la derivada de esta, en la sección de Derivada

Como se indicó anteriormente, en esta sección se realizó una encuesta. En esta, se identificó que la mayoría de los estudiantes lograron encontrar la relación entre las infinitas pendientes de las rectas tangentes y la derivada. Lo anterior con ayuda de una construcción de GeoGebra sobre el rastro de las pendientes de una gráfica. La construcción puede ser vista en https://www.geogebra.org/classic/xfngsznq. A continuación, se mostrarán las preguntas hechas y algunas respuestas (ver Figura 63).

Figura 63 Respuesta 1 sobre la encuesta de La derivada

¿Qué sucede cuando mueve el punto "A" por toda la gráfica?	Utilizando la definición de la derivada, halle la derivada de la función expuesta en la construucción y escríbala acá	Escriba la derivada de la función en el archivo de GeoGebra y mueva nuevamente el punto, ¿Qué ocurre?	¿Qué puede decir sobre lo ocurrido anteriormente? ¿Por qué cree que ocurre lo anterior?	¿Qué relación encuentra entre las pendientes de la rectas tangentes a una función y la derivada de la misma?
La pendiente de esta toma valores formando una grafica de una cuadratica.	3x^2	La funcion que se forma es la de la pendiente de la grafica original	Que esto sucede ya que la derivada me daria como resultado la pendiente de la recta tangente entonces al graficar la derivada esta tendria que ser igual a las pendientes de la grafica original en cada punto.	Que son iguales ya que la derivada es equvalente a la pendiente de la recta tangente en cada punto.

En la Figura 63, para la primera pregunta, "*¿Qué sucede cuando mueve el punto "A" por toda la gráfica?*", el estudiante de cierta manera logró identificar que al mover el punto A, la pendiente de la recta tangente variaba, además de que dicho valor que tomaba la pendiente era el mismo que tomaba el punto B respecto al eje Y, pues eran estos valores los que formaban la función cuadrática. Las siguientes tres preguntas, tenían la finalidad de que el estudiante pudiera observar y concretar la relación existente entre la pendiente y la derivada. Para el cuarto apartado, se puede observar que en las preguntas "*¿Qué puede decir sobre lo ocurrido anteriormente? ¿Por qué cree que ocurre lo anterior?*", ya el estudiante logra evidenciar lo ligadas que están la pendiente de la recta tangente y la derivada de la función. En la última pregunta, "*¿Qué relación encuentra entre las pendientes de las rectas tangentes a una función y la derivada de la misma?*" el estudiante logra establecer dicha relación, mencionando en otras palabras, que la pendiente de la recta tangente es igual a la derivada de la función evaluada en un mismo punto.

Figura 64 Respuesta 2 sobre la encuesta de La derivada

su tangente cambia de posicion y se mueve por toda la grafica de la funcion	$3x^2$	la derivada de la funcion se convirtio en la grafica que pasa por los puntos verdes de la funcion original	esto pasa porque los puntos verdes nos indican por donde pasa la derivada de la funcion original	en un mismo punto de una funcion, la derivada y la tangente son las mismas

En la Figura 64, para las respuestas de este estudiante, en la primera pregunta, no logra hacer una buena interpretación, puesto que su respuesta solo relata el desplazamiento de la recta tangente. Sin embargo, en el cuarto apartado, logra dar una aproximación a la relación existente, aunque sin justificación alguna. Para el último apartado, el estudiante concluye lo que se buscaba con la interacción con el recurso.

Con un recurso de GeoGebra proporcionado en el AVA, los estudiantes mediante la interacción con dicho recurso logran establecer la relación entre las pendientes de las infinitas rectas tangentes a la gráfica de una función y la derivada de esta. Un factor que pudo influir en los razonamientos de los estudiantes pudo haber sido las definiciones de la pendiente de la recta tangente y la de la derivada, ambas mediante el límite, las cuales fueron proporcionadas en el Aula Virtual de Aprendizaje, como se logra observar en la Figura 4 y Figura 5.

5.1.2. Aprendizaje autónomo en la sección de Reglas de la constante, potencia, sumas y restas

Como se evidencia en la Figura 7, Figura 8, y Figura 9, en esta sección no se proporcionaron directamente estas reglas de derivación, sino que se expusieron diferentes ejemplos de cada una de ellas. Además, como se logra observar en la Figura 10, se utilizó una encuesta, la cual tenía como finalidad, que los estudiantes escribieran las generalizaciones de las diferentes reglas vistas en esta sección. A continuación, se mostrarán las respuestas de algunos estudiantes (ver Figura 65).

Figura 65 Respuestas de los estudiantes en la encuesta de la Regla de la constante, potencia, suma y resta

Respuesta número	La derivada de cualquier función $f(x) = c$ con $c \in R$, es:	Escriba la generalización de la derivada de cualquier función potencia, teniendo en cuenta que $g(x) = x^n, n \in R$	¿Qué generalización puede hacer de la derivada de sumas y/o restas de funciones?	Halle las derivadas de $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = 10000$ y $h(x) = x^{\frac{3}{2}} - 4$
Respuesta número: 1	0	nx^n-x	(f±g)'(x) = f'(x) ± g'(x)	f'(x)=-2/x^3, g'(x)= 0, h(x)= (3x^1/2)/2
Respuesta número: 2	0	nX^n-1	se derivada cada termino por separado y luego se opera sea suma o resta	-2x^-3, 0, 3/2 x ^1/2,
Respuesta número: 4	0	g'(x) = nx^n-1	Dx (f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)	f '(x) = -2/x^3 g'(x) = 0 h'(x) = 3/2x^1/2
Respuesta número: 6	0	nx^n-1	que se deben derivar las funciones por separa y despues unirlas en la operacion de suma y/o resta y despues operar las derivadas para obtener el resultado final.	F'(x)= -2x^-3 ; G'(x)= 0 ; H(x)= (3/2)x^1/2
Respuesta número: 8	0	nx^n-1	(f+-g)'(x)=f'(x)+-g'(x)	f'(x)=-2/x^3, g'(x)=0, h'(x)= (3x^1/2)/2
Respuesta número: 9	f'(x)= 0	g'(x)= nX^n-1	(f±g)' (x)= f'(x)±g'(x)	f'(x)=-2/x^3 g'(x)=0 h(x)=3/2X^1/2

En la Figura 65, se pueden observar las respuestas de 9 estudiantes, los cuales hacen una generalización correcta para cada una de las reglas de derivación expuestas en esta sección. Sin embargo, algunos estudiantes, como se evidencia en las respuestas 2 y 6, siguieron al pie de la letra los ejemplos planteados, lo que ocasionó que estos pensaran que, a la hora de aplicar la regla de la suma o resta, obligatoriamente debían derivar las funciones por separado y luego los resultados sumarlos o restarlos, y lo que en verdad se buscaba, era que el estudiante evidenciara que la derivada de una suma o resta de funciones, es la suma o resta (según corresponda) de las derivadas de las funciones. Pero en general, todos los estudiantes captaron la idea y generalizaron cada una de las reglas de derivación.

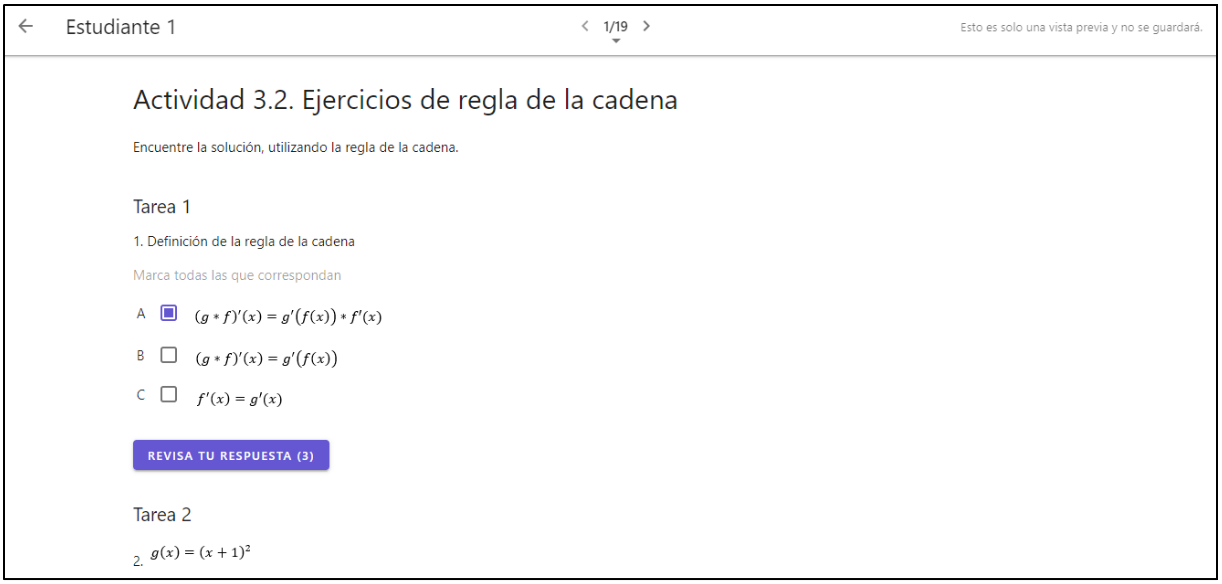
Cabe aclarar que las dos anteriores secciones fueron habilitadas para antes de la clase, por lo que los estudiantes tenían plazo para responder a las encuestas hasta antes de la hora de inicio de la clase. Toda la información necesaria para dar respuesta a las preguntas de las encuestas, se encontraba plasmada en el AVA y los recursos de GeoGebra proporcionados. Lo anterior nos demuestra que el Aula Virtual de Aprendizaje permite también un estudio autónomo por parte de los estudiantes, dándoles una primera noción del tema a tratar, para luego en la clase concretar el conocimiento del mismo.

Lo anterior también fue expresado por López (2021), pues este menciona que los Objetos virtuales de Aprendizaje (los cuales hacen parte de un AVA), permiten a los estudiantes mostrarse de una forma más autónoma, pues estos concretan y construyen su propio conocimiento, agilizando también el objeto matemático a tratar en la clase.

5.1.3. Autoevaluación del aprendizaje en la sección de Regla de la cadena

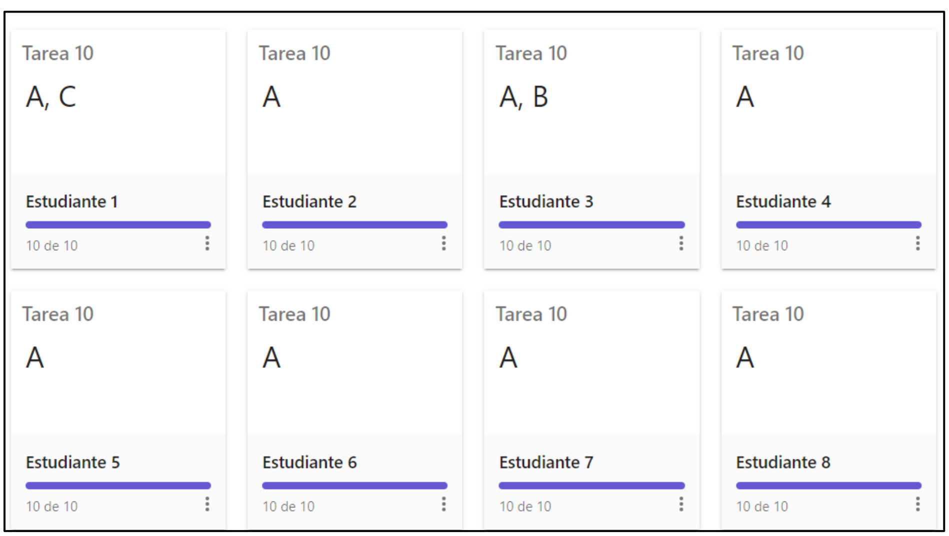
Como se pudo observar en la Figura 19, en esta sección, mediante el Aula Virtual, se proporcionó un URL el cual dirigía a los estudiantes a una actividad en la plataforma de GeoGebra. Gracias a esta actividad (ver Figura 66), se puede mencionar que, a través de algunos recursos dados por GeoGebra, los estudiantes pueden evaluar su conocimiento, de una forma dinámica y fuera de los tradicional. Puesto que, los estudiantes pudieron hacer una prueba de opción múltiple en la que estos verificaban y rectificaban sus respuestas a medida que iban respondiendo cada una de las preguntas o al finalizarlas todas, lo que permitió un ahorro de tiempo, aprovechando la tecnología y sus beneficios. El recurso utilizado se puede observar en https://www.geogebra.org/m/e3bapd7f.

Figura 66 Recurso en el Applet de GeoGebra sobre la regla de la cadena



Además, si la actividad es asignada mediante una cuenta de GeoGebra, las respuestas de los estudiantes quedan registradas y pueden ser observadas por el docente en la misma cuenta. Las respuestas, quedan guardadas de la siguiente manera (ver Figura 67).

Figura 67 Respuestas de los estudiantes en el recurso de GeoGebra sobre la Regla de la cadena

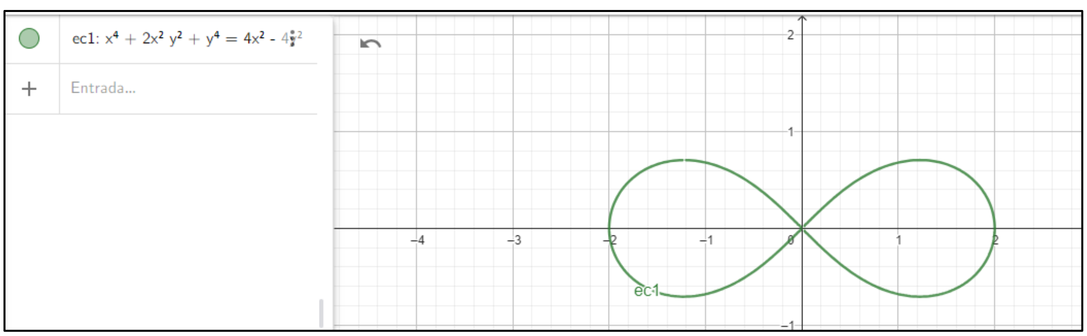


Este tipo de actividades, son muy beneficiosas cuando se desea aprovechar y utilizar el mayor tiempo posible para la enseñanza de algún objeto matemático. Pues se ahorra tiempo en la escritura y solución de los problemas. Además de que, al ser una actividad dinámica, se deja de lado la enseñanza y metodología tradicional para evaluar los conocimientos que el estudiante adquiere en el transcurso de la clase.

5.1.4. Transición entre la representación gráfica y la representación algebraica en la sección de Derivación implícita

En esta sección, en la situación problema que se les planteó, se logró identificar que la modelación mediante GeoGebra ayudó en la interpretación del problema sobre la ecuación lemniscata, pues los estudiantes se dieron ideas de la solución de algunos incisos al ver plasmado en el Applet lo que se estaba realizando. En la Figura 22, se puede observar los incisos a realizar sobre el problema de la ecuación lemniscata que se les planteó a los estudiantes. A continuación, se mostrará una de las respuestas de los estudiantes para el primer inciso (ver Figura 68).

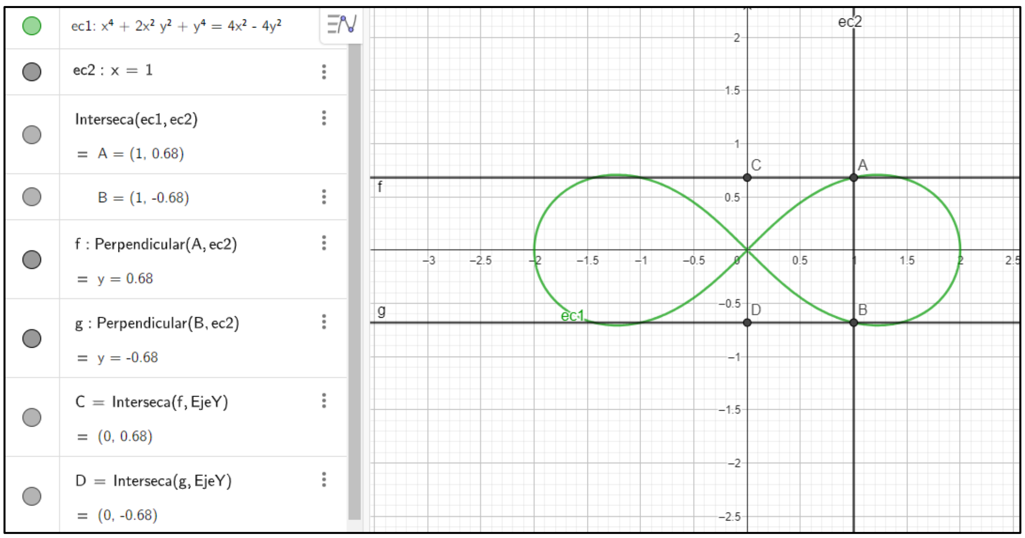
Figura 68 Ilustración de la gráfica hecha por los estudiantes



A la hora de modelar la ecuación lemniscata mediante una gráfica, los estudiantes escribieron dicha ecuación de dos maneras. La primera, como se logra observar en la Figura 68, los estudiantes resolvieron el cuadrado y distribuyeron el número cuatro, dando como resultado la ecuación $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 4x^2 - 4y^2$. Por su contraparte, los demás estudiantes modelaron la gráfica mediante la ecuación dada en un principio.

En el segundo inciso, el cual decía "*Encuentre los puntos sobre la gráfica que corresponden a* $x = 1$". Pasó algo muy particular con el mismo estudiante del cual se tomó la respuesta de la Figura 68, puesto que como el problema decía que se hallaran los puntos sobre la gráfica, utilizó reglas de correspondencia y por ende rectas, para hallar los valores correspondientes a $x = 1$, de tal manera que dio con las respuestas, solo utilizando el Applet de GeoGebra y no haciendo un proceso algebraico (ver Figura 69).

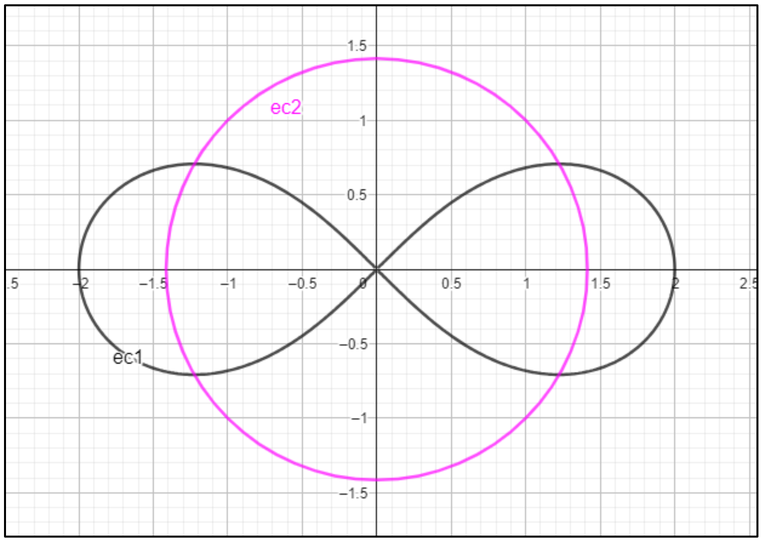
Figura 69 Respuesta de un estudiante sobre el segundo inciso del problema de la ecuación lemniscata



Lo hecho por el estudiante es correcto, pues está dando la respuesta correcta a lo que se le pide. Estas es una de las tantas ventajas que nos ofrece el Applet de GeoGebra. A lo que se debe enfrentar al estudiante, es a proporcionar el proceso algebraico necesario para llegar a dichas respuestas, pues este no debe ir desligado del proceso de enseñanza.

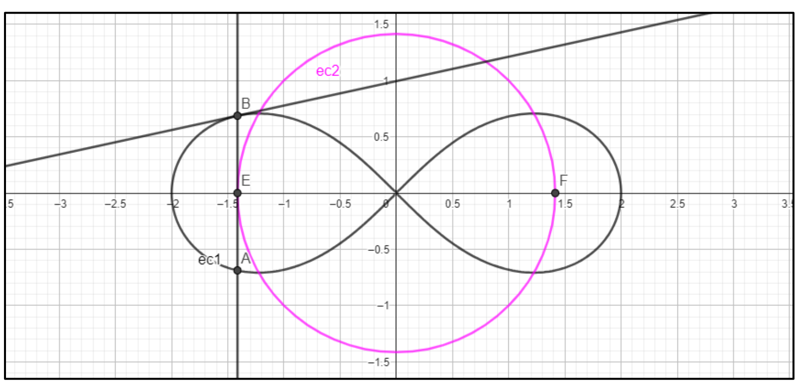
Para el cuarto inciso, el cual decía "*Encuentre los puntos sobre la gráfica en los que la tangente es horizontal*", se decidió proyectar los gráficos necesarios en el televisor. En este inciso, los estudiantes identificaron que debían igualar a cero la derivada de la función. Luego de empezar a desarrollar dicho punto, los estudiantes llegaron a la siguiente ecuación $x^2 + y^2 = 2$. Un estudiante sugirió que se graficara dicha ecuación junto a la ecuación lemniscata, por lo que se proyectó lo siguiente (ver Figura 70).

Figura 70 Gráfica de la ecuación lemniscata y círculo



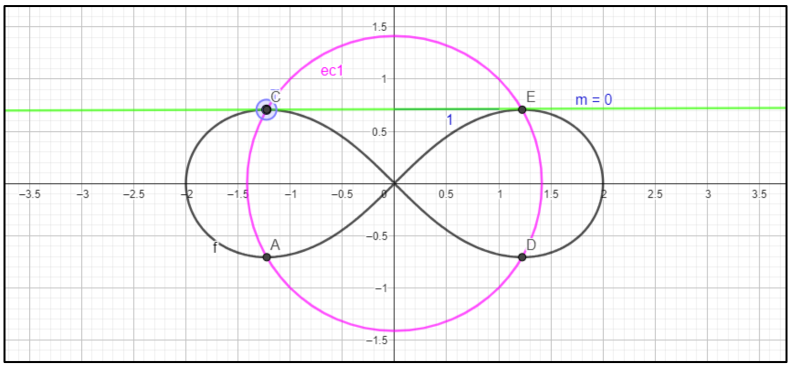
Posteriormente, un estudiante preguntó que si la solución era dada por los valores para los cuales la circunferencia intersecaba al eje x, por lo que se procedió a graficar la recta tangente a la curva en dichos puntos sugeridos, para que ellos mismos pudiesen evidenciarlo. En la pantalla del televisor se proyectó lo siguiente (ver Figura 71).

Figura 71 Recta tangente para los valores de la intersección del círculo y el eje x



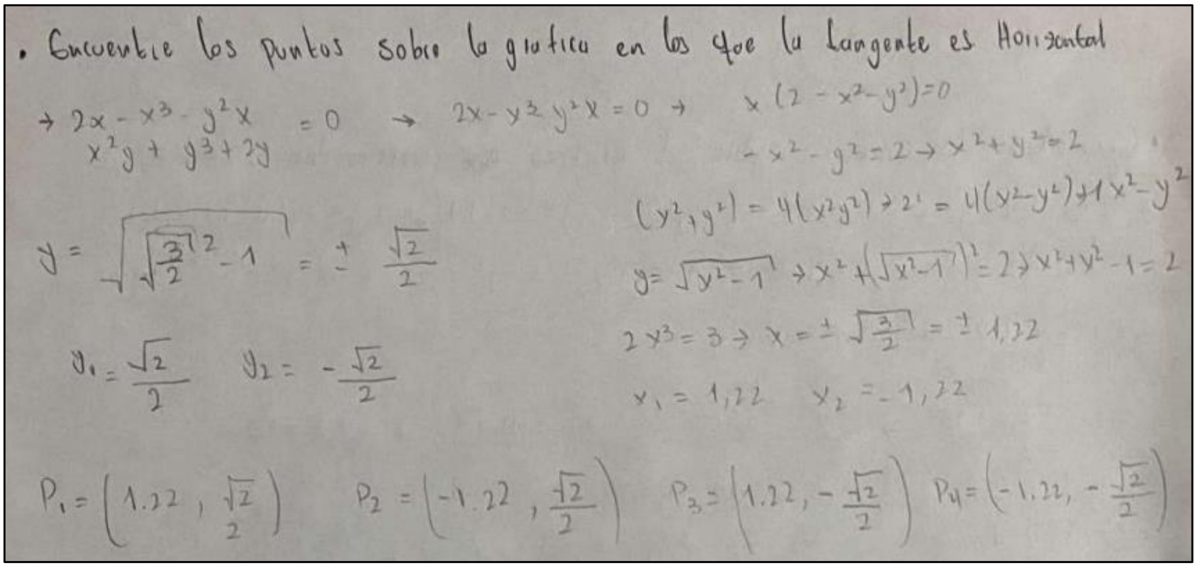
Después de haberles mostrado lo anterior, se les dio un tiempo para que pudieran interpretar lo que se tenía hasta el momento. En ese lapso, un estudiante preguntó si en la intersección de las dos gráficas, la pendiente era cero, por lo que se procedió a graficar la recta tangente a la gráfica en dicho punto, además de colocar la pendiente de la recta tangente. En el televisor se proyectó lo siguiente (ver Figura 72).

Figura 72 Recta tangente para los valores de la intersección del círculo y la gráfica de la ecuación lemniscata



Los estudiantes, al observar lo proyectado en el televisor, y evidenciar que la clave para dar solución al inciso estaba en la intersección de ambas gráficas, empezaron a expresar algebraicamente lo modelado en el Applet. Una respuesta (la cual era muy similar a las demás) dada por uno de los estudiantes, fue la siguiente (ver Figura 73).

Figura 73 Respuesta de un estudiante sobre el cuarto inciso del problema de la ecuación lemniscata



Podemos observar que el estudiante, al saber que la clave estaba en la intersección de las gráficas, reemplazó la ecuación $x^2 + y^2 = 2$, en la función original, para luego obtener un valor de y, dado por $y = \sqrt{x^2 - 1}$, reemplazarlo en la ecuación del círculo y obtener los valores de x para los cuales la pendiente es cero. Todos los estudiantes hicieron un proceso muy similar, solo diferían a la hora de evaluar dichos puntos obtenidos, puesto que algunos estudiantes lo hicieron en la ecuación inicial y otros en la ecuación de la circunferencia como fue el caso expresado en la Figura 73. Lo anterior, claramente no tenía relevancia, pues llegaban al mismo resultado, el cual proporcionaba los puntos para los cuales la recta tangente a la gráfica es horizontal.

Nuevamente, se puede evidenciar lo importante que puede ser el apoyo de la tecnología, siendo en este caso mediante el Applet de GeoGebra, pues los estudiantes al evidenciar el comportamiento de las gráficas y la recta tangente dan una interpretación mejor de lo que puede proporcionar un dibujo, el cual no permite el dinamismo y la interacción con el mismo.

A lo largo de este apartado de la derivación implícita, pudimos evidenciar la utilidad que tuvo el recurso de GeoGebra junto a las oportunas intervenciones del profesor, pues permitieron una transición de lo gráfico a lo algebraico, proceso que, en la mayoría de los casos, es difícil para los alumnos. Gutiérrez, Buitrago y Ariza (2015), mencionan que el docente y sus intervenciones junto a la incorporación de los diferentes recursos que ofrecen las TICs, generan beneficios en el campo educativo, como lo pudimos observar anteriormente.

5.1.5. Derivación de funciones exponenciales mediante la epistemología en la sección de Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas

Para esta sección, se detalló la demostración de la función $y = e^x$, pues esta función tiene algo muy peculiar, y es el hecho de que $\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3} = \cdots = \frac{d^ny}{dx^n} = \cdots, n \in \mathbb{N}$, y que, hasta el momento, no se sabía el cómo derivarlas. Por ende, se les pidió a los estudiantes que empezaran a derivar la función exponencial $y = b^x$ por medio de la definición de límite.

Luego de un tiempo, los estudiantes manifestaron no poder avanzar más de $\lim_{h \to 0} \frac{b^x(b^h-1)}{h}$. Por lo que se presentó el siguiente diálogo.

Profesor: Al resolver el límite, ¿b^x se ve influenciado?

Estudiantes: No

Profesor: ¿Entonces qué podemos hacer con b^x?

Estudiantes: Se puede sacar

Profesor: ¿Sacar?

Estudiante 1: Sí, o sea, escribirlo como $b^x . \lim_{h \to 0} \frac{(b^h-1)}{h}$, como si b^x fuera una constante.

Seguidamente se les indicó a los estudiantes que empezaran a darle valores a b y a h, mencionando que tomaran para h, valores muy cercanos a cero, tanto por derecha como por izquierda. Los estudiantes dieron valores a b, pero la tomaron como un número natural, pues solo evaluaron con valores exactos. Claramente, con lo anterior no pudieron llegar a nada, lo que conllevó a no deducir datos significativos para la solución, por lo que se les mencionó, que evaluaran a b, con valores entre 2 y 3.

Los estudiantes, luego de evaluar algunos puntos, empezaron a compartir entre ellos, y varios empezaron a mencionar que los valores son muy cercanos a uno. Por lo que, se procedió a mostrarles la siguiente tabla desde el AVA (ver Figura 74).

Figura 74 Tabla de valores aproximados a "e" para la derivada de funciones exponenciales

b	$\frac{b^{-0,00001}-1}{-0,00001} < B'(0) < \frac{b^{0,00001}-1}{0,00001}$	b	$\frac{b^{-0,00001}-1}{-0,00001} < B'(0) < \frac{b^{0,00001}-1}{0,00001}$
2	$0,693145 < B'(0) < 0,69315$	2,7183	$1,000002 < B'(0) < 1,000012$
2,7	$0,993247 < B'(0) < 0,993257$	2,719	$1,000259 < B'(0) < 1,000269$
2,71	$0,996944 < B'(0) < 0,996954$	2,72	$1,000627 < B'(0) < 1,000637$
2,718	$0,999891 < B'(0) < 0,999901$	2,8	$1,029614 < B'(0) < 1,029625$
2,7182	$0,999965 < B'(0) < 0,999975$	3	$1,098606 < B'(0) < 1,098618$

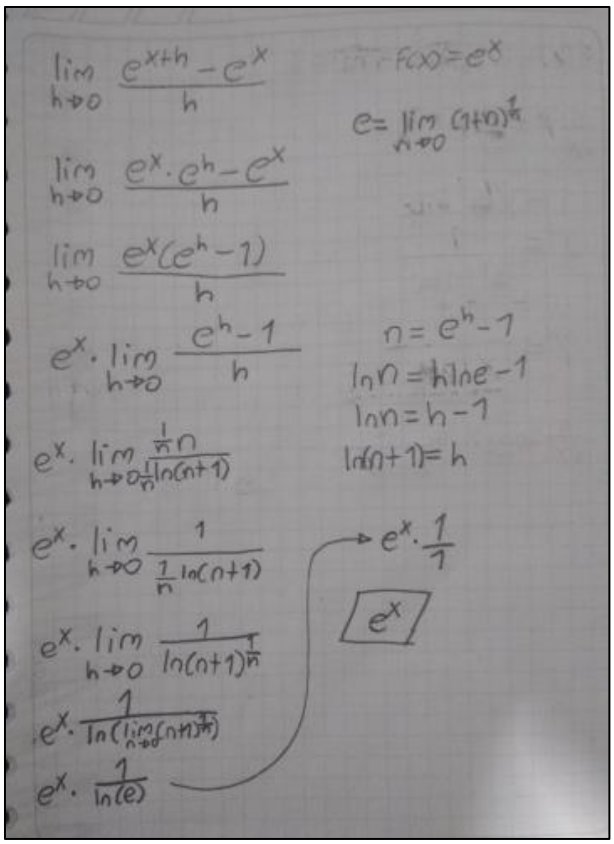
Se consolidó lo que los estudiantes habían mencionado, y es que para ciertos valores entre 2 y 3, tienen una tendencia hacia 1. Se procedió a preguntarles si sabían de algún número que sea aproximado a los datos vistos en la tabla. Un estudiante responde "Pues euler tiene un valor de 2,71 algo". Se les indicó entonces que tomaran a b como e, por lo que los estudiantes llegaron nuevamente a $e^x . \lim_{h \to 0} \frac{(e^h - 1)}{h}$.

Los estudiantes mencionaron que ese límite tendía a uno, pues eso fue lo que se concluyó en el análisis de tabla y, por ende, la derivada de e^x era e^x. Se les indicó que sí, pero que había que demostrarlo, por lo que se procedió a darles algunas igualdades para que estos se ayudaran en la demostración. Las igualdades dadas fueron las siguientes:

- $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$
- $e = \lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}$
- $e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, n \in \mathbb{N}$

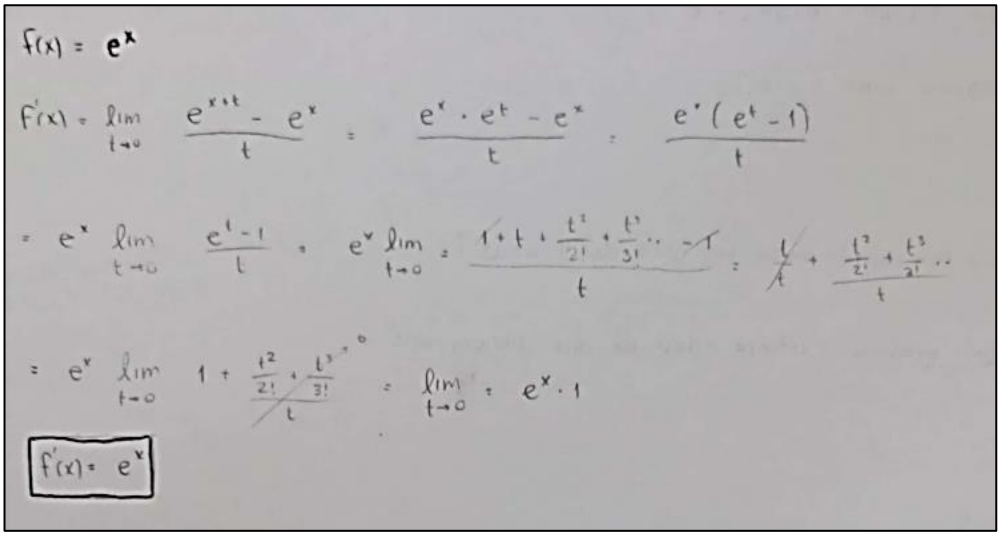
De las respuestas de los estudiantes (ver Figura 75 y 76), se logran evidenciar dos tipos de solución, en las que se utilizó la ecuación 2 y 3 respectivamente.

Figura 75 Respuesta 1 sobre la derivada de funciones exponenciales



En la Figura 75, se logra observar que el estudiante afronta la situación para llegar a la derivada de la función e^x por medio de la segunda ecuación. Además, no utilizó una regla mecánica de derivación, sino por el contrario, hizo un análisis mediante la definición de límite, la cual fue abordada de manera autónoma, solo teniendo una orientación del investigador por medio de preguntas.

Figura 76 Respuesta 2 sobre la derivada de funciones exponenciales



Por otro lado, en la Figura 76, el estudiante utiliza la tercera ecuación, concluyendo de igual manera lo referente a la derivada de la función e^x. Sin embargo, el estudiante debió resolver un poco más a $\frac{\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots+\frac{h^n}{n!}+}{h}$ para indicar que esto tendía a cero, pues a simple vista parece errónea dicha conclusión. De igual manera que en la respuesta expuesta en la Figura 75, este estudiante llega a la conclusión de la derivada de la función e^x, mediante un análisis por medio de la definición de límite y no siguiendo de forma mecánica una regla de derivación.

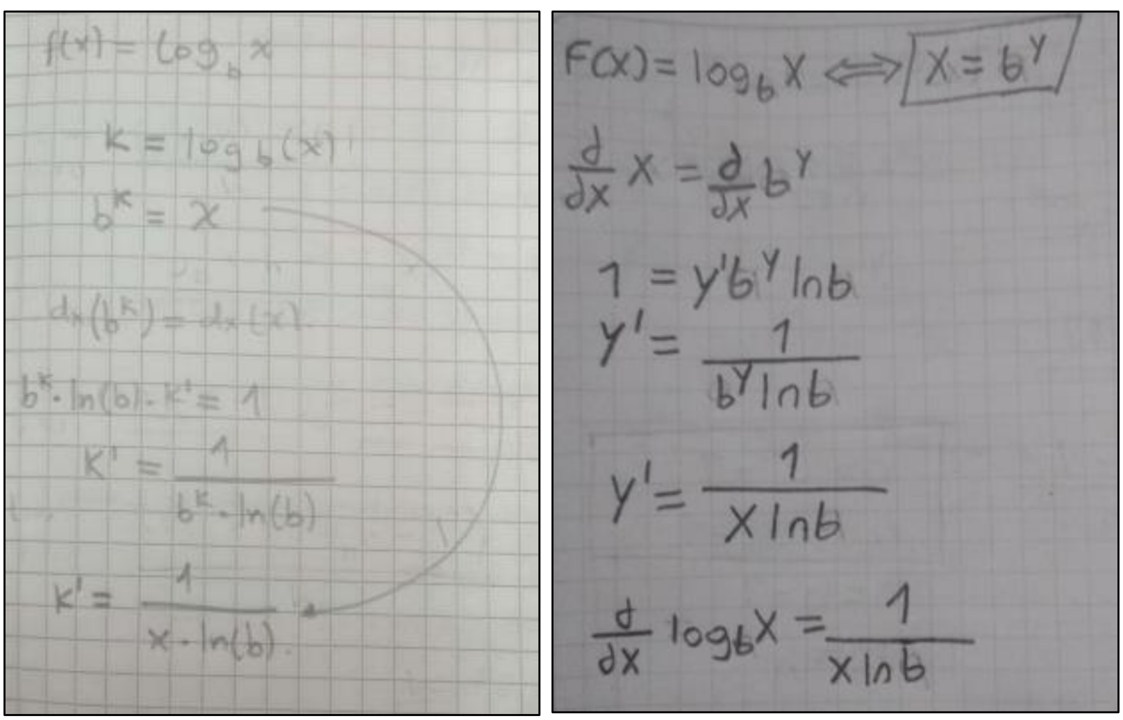
Ahora bien, el que los estudiantes realicen un análisis mediante la definición de límite para hallar la derivada de la función exponencial natural, propicia una mejor interpretación de esta, pues como menciona Cardona (2012), un análisis mediado por la historia, es de mucha relevancia para un oportuno desarrollo de la clase, además, facilita una mejor comprensión.

5.1.6. Apoyo gráfico en las justificaciones de la sección de Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas

Para la derivación de funciones logarítmicas, el Aula Virtual de Aprendizaje, permitió dirigirnos hacia la sección de Derivación implícita, lo anterior con la finalidad de revisar lo necesario para derivar de esa manera. Aunque los estudiantes ya tenían previo conocimiento de la derivación implícita, pues ya se había tratado dicho tema, el poder dirigirnos a cualquiera de las secciones del AVA vistas anteriormente, permite una mejor fluides en la enseñanza de un objeto matemático.

Luego de proporcionar e interpretar la derivada de la función $y = \mathrm{Ln}(x)$ mediante el AVA, se les pidió a los estudiantes que hicieran la demostración de las funciones logarítmicas a nivel general, o sea, la derivada de la función $y = \log_b(x)$. A continuación, se proporcionan dos respuestas sobre esta demostración (ver Figura 77).

Figura 77 Respuestas sobre la derivada de la función Logaritmo base b de x.

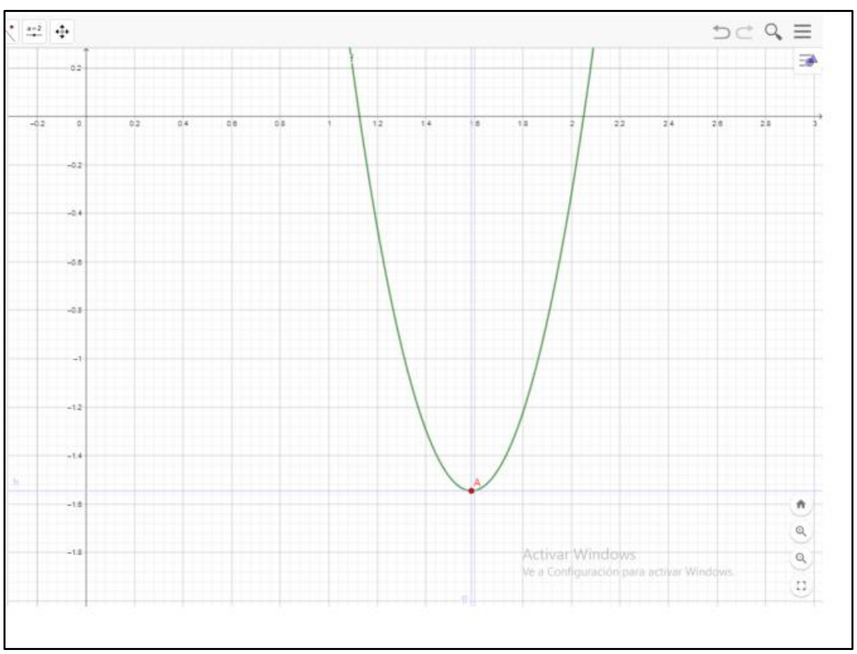


En la Figura 77, se evidencia una misma demostración, difiriendo solo en las variables utilizadas para la misma y la representación de la derivada. Los estudiantes siguieron la idea de la anterior demostración, pues utilizando la relación que existe entre las funciones exponenciales y logarítmicas, y con la ayuda de la derivación implícita, de manera correcta, proporcionan la demostración de la derivada de la función $\log_b(x)$.

Luego de socializar los ejemplos planteados en el AVA, se les proporcionó a los estudiantes el siguiente ejercicio: “Utilice GeoGebra para obtener la gráfica de $f(x) = x^3 - 12Ln(x)$. Interactúe con la gráfica y halle el valor exacto del menor valor de $f(x)$”. En esta actividad, los estudiantes sin saberlo, estaban adentrándose al tema de extremos de funciones.

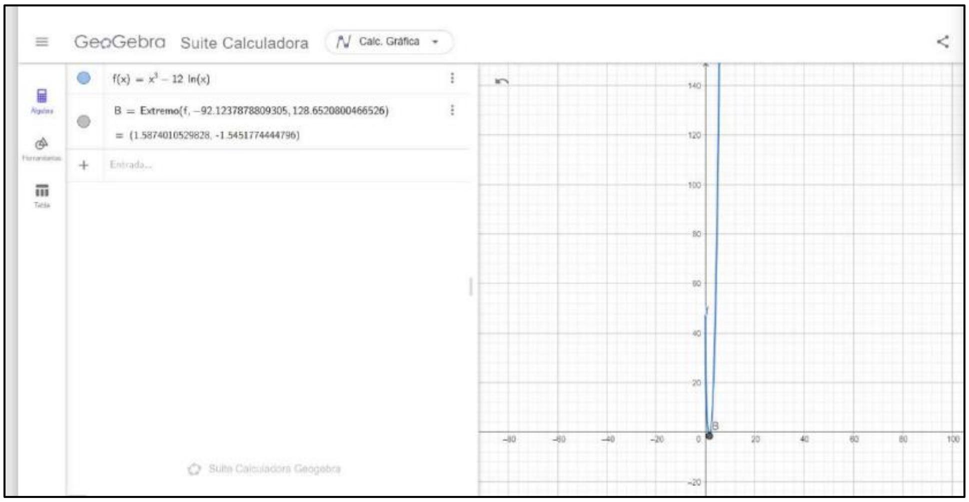
De las construcciones hechas por los estudiantes en GeoGebra, se evidenció una misma gráfica, pero con 2 formas diferentes de dar solución al problema (ver Figura 78 y 79).

Figura 78 Respuesta 1 sobre el valor mínimo de una función



Los estudiantes que modelaron la gráfica como en la Figura 78, evidenciaron que, al graficar la recta tangente, y acercarla al punto que al parecer era mínimo, la recta tangente tendía a ser horizontal, por lo que la solución proporcionada por estos, utilizaba dicha conclusión.

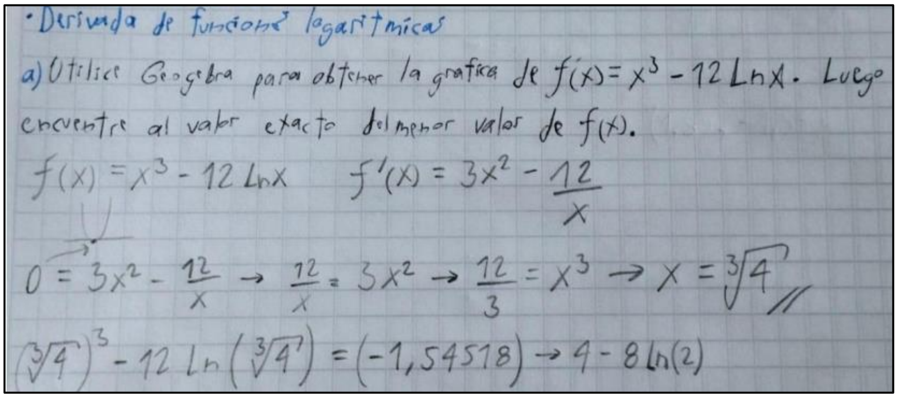
Figura 79 Respuesta 2 sobre el valor mínimo de una función



Por otro lado, con un poco de ingenio y gracias a las opciones que nos proporciona el Applet de GeoGebra, los estudiantes que modelaron de manera similar a la gráfica de la Figura 79, les bastó solo con colocar "Extremo(polinomio)" en la entrada de GeoGebra, y luego seleccionar la gráfica, para que el mismo Applet les diera la respuesta. A estos estudiantes se les indicó que, aunque era correcta la respuesta dada, el proceso algebraico no puede ir desligado en las soluciones de estos problemas.

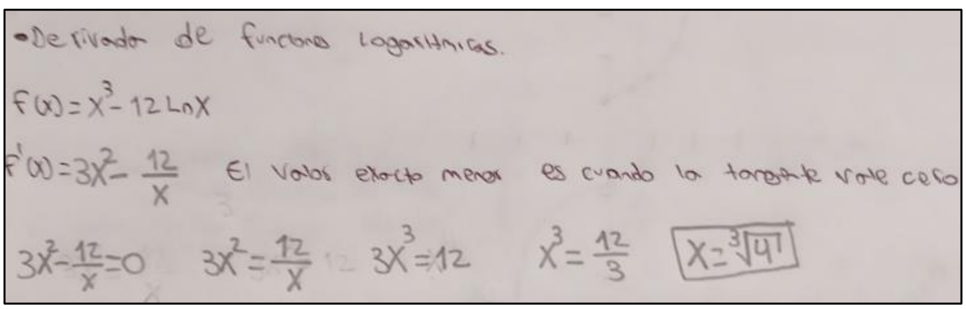
A la hora de presentar la solución de este ejercicio, los estudiantes tuvieron una misma idea, la cual basaba en derivar la función para luego igualarla a cero y finalmente despejar el valor de x. A continuación, se muestran las respuestas escritas presentadas por los estudiantes (ver Figura 80 y 81).

Figura 80 Justificación de la respuesta brindada en la Figura 78



El estudiante que proporciona la respuesta de la Figura 80, justificó por medio de un dibujo el por qué estaba igualando la derivada a cero, pues en el dibujo, la recta tangente a la gráfica es horizontal, por lo que su pendiente sería igual a cero.

Figura 81 Justificación de la respuesta brindada en la Figura 79 luego de solicitarle una respuesta escrita



Por otro lado, el estudiante que proporciona la respuesta de la Figura 79, al igual que la mayoría del resto de sus compañeros, dieron una justificación escrita. Algunos estudiantes, como se evidencia en esta misma figura, solo hallaron el valor de x para el cual $f(x)$ era mínimo, o sea, hallaron el punto crítico, pero no hallaron el valor mínimo de la función, por lo que dejaron el ejercicio incompleto.

5.2. Aplicaciones de la derivada

5.2.1. Importancia de las simulaciones, imágenes y estrategias de resolución en problemas de la sección de Razones de cambio relacionadas

Antes de empezar con los problemas de esta sección, se hizo una breve introducción en la que posteriormente se generó la siguiente pregunta y respuestas de los estudiantes.

Profesor: Si estamos llenando de aire un globo, ¿Cuáles variables se encuentran relacionadas?

Estudiante 1: El radio y el diámetro.

Estudiante 2: El tiempo y el radio.

Estudiante 3: La cantidad de aire dentro del globo y el tiempo.

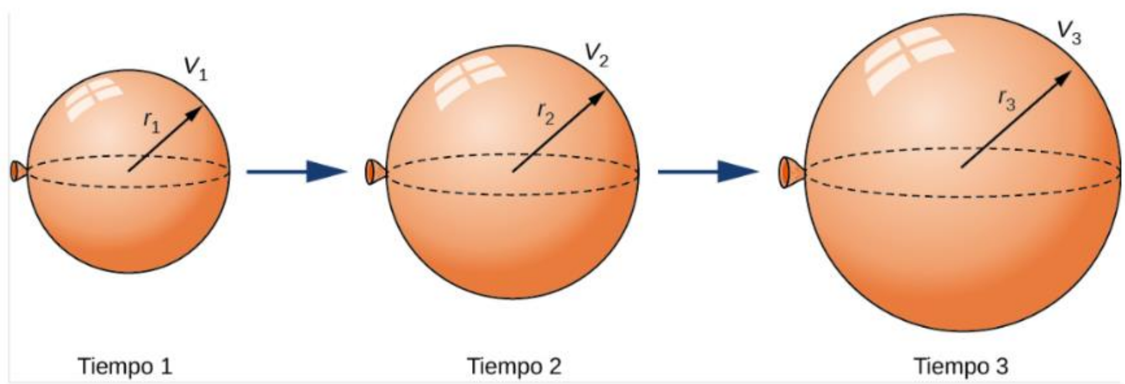
Estudiante 4: El volumen y el radio.

Profesor: Correcto.

Posterior a la última respuesta, se procedió a presentarles el primer problema. Cabe aclarar que, en esta sección, la modelación nos permitió mostrar los problemas planteados a los estudiantes mediante enunciados verbales y simulaciones. Para este apartado, el primer problema planteado fue mediante un enunciado verbal, el cual después sería complementado con imágenes ilustrativas y exactas del problema tratado. A los estudiantes, se les presentó el problema de la siguiente manera (ver Figura 82).

Figura 82 Descripción e ilustración del problema del globo esférico

Un globo esférico se está llenando de aire a un ritmo constante de $5\frac{cm^3}{s}$, ¿Qué tan rápido aumenta el radio cuando el radio es $2cm$?



Después de dar un tiempo prudente para que los estudiantes presentaran un modelo el cual ayudara a dar solución al problema, todos concordaron que el modelo a utilizar era la misma ecuación que modelaba el volumen del globo, la cual venía dada por $V = \frac{4}{3}\pi r^3 cm^3$. Se les preguntó el por qué y un estudiante respondió: "*Se busca relacionar el volumen con el radio y, en la ecuación del volumen de una esfera, que en este caso es un globo, ambas están ahí*".

Como la respuesta del estudiante era correcta, se continuó dando solución al problema, siguiendo los pasos planteados en las estrategias de resolución. Esto se hizo con ayuda de los mismos estudiantes, quienes iban mencionando los pasos a seguir, las derivadas y las soluciones de los respectivos cálculos que se debían hacer en el problema.

En el segundo problema, se les planteó mediante una simulación, acompañado de un enunciado e imágenes. A continuación, se muestra el enunciado (ver Figura 83); la simulación puede ser vista en https://www.geogebra.org/m/P5kDZme7.

Figura 83 Problema del embudo y el drenaje de agua

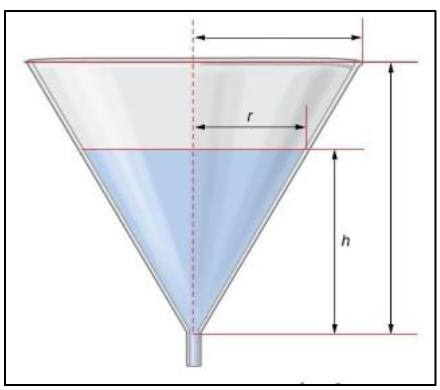
El agua sale por el fondo de un embudo en forma de cono a una tasa de $0,03\frac{cm^3}{s}$. La altura del embudo es de $3cm$ y el radio en la parte superior del embudo es $2cm$ ¿A qué tasa cambia la altura del agua en el embudo cuando la altura del agua es $\frac{1}{2}cm$?

Después de plantearles el problema, e indicarles que hallaran un modelo para dar solución, un estudiante preguntó "*Profe, si en el anterior problema se utilizó la fórmula del volumen de una esfera, ¿Para este problema se utilizaría la del volumen del cono?*", posterior a la pregunta, se les indicó que se les daría un tiempo para que verificaran eso o hallaran un modelo que ayudara a dar solución al problema.

Cumplido el tiempo, un estudiante mencionó, "*Profe, efectivamente es la del volumen de un cono, pues acá (señala con su dedo el modelo escrito en su cuaderno), se encuentran las tres variables mencionadas, volumen, altura y radio*". Dicho esto, se les indicó que efectivamente es el modelo que nos ayudaría. Posteriormente, se les compartió la simulación para que se dieran ideas de cómo empezar a solucionar, pues en el problema había 3 variables, y se necesitaban que fuesen dos.

Luego de darles un tiempo, los estudiantes no sabían cómo continuar con dicho problema, por lo que se les proporcionó la siguiente imagen (ver Figura 84), con la finalidad de poder encaminarlos más hacia el paso que se debía hacer para poder empezar a dar solución al problema.

Figura 84 Ilustración sobre el problema del embudo y el drenaje de agua



Inmediatamente un estudiante al observar la imagen preguntó si podía utilizar razones y proporciones. Al indicarle que sí, escribió lo siguiente en el cuaderno "$\frac{r}{h} = \frac{2}{3}$", y mencionó que el dos salía de la medida del radio y el 3 de la altura. El estudiante compartió la solución con sus compañeros y posteriormente, se les preguntó que para qué nos servía eso. Todos quedaron pensativos hasta que el mismo estudiante mencionó que podían despejar a r, para dejar el modelo en términos de h, mientras los otros estudiantes solo se limitaban a escuchar. Se hizo una pregunta al grupo exceptuando al estudiante que estaba respondiendo "*¿Alguien puede mencionar por qué debemos dejarlo en términos de h?*" a lo que un estudiante respondió "*Porque eso es lo que nos piden, o sea, la tasa de cambio de la altura*".

Posteriormente, se empezó a dar solución al problema, el profesor solo se limitó a escribir lo que los estudiantes mencionaban a sus preguntas. Cuando preguntó por los datos proporcionados en el problema, y al preguntar específicamente por $\frac{dV}{dt}$, se generó el siguiente dialogo.

Estudiante 1: $0{,}03\,\frac{cm^3}{s}$

Estudiante 2: $-0{,}03\,\frac{cm^3}{s}$

Estudiante 1: ¿Por qué?

El profesor procedió a proyectar la simulación y ejecutarla.

Profesor: ¿Qué está sucediendo con el agua?

Estudiantes: Está disminuyendo.

Profesor: Y cuando algo disminuye, ¿Con cuál signo lo asociamos?

Estudiantes: Con el signo menos

Profesor: Entonces, ¿Qué podemos concluir?

Estudiantes: Que como el volumen del agua se estaba drenando y va disminuyendo, $\frac{dV}{dt} = -0{,}03\,\frac{cm^3}{s}$

Profesor: Exacto, cuando una cantidad aumenta, su derivada debe ser positiva, negativa cuando disminuye y cero cuando permanece constante. Más adelante podremos observar el por qué.

Seguidamente al diálogo, se dio solución al problema entre todos, en donde el investigador se limitó solo a escribir en el tablero las respuestas de los estudiantes, cuestionando aquellas que eran erróneas.

En el problema del embudo, la simulación y las imágenes proporcionadas mediante el AVA, jugaron un papel muy importante, puesto que, gracias a estas, los estudiantes se dieron ideas, las cuales encaminaron a la solución de este. En el caso de las imágenes, los estudiantes pudieron hacer una relación entre el radio y la altura, utilizando razones y proporciones, lo que permitió expresar al radio en términos de la altura. Por otro lado, la simulación ayudó a concluir el por qué la tasa de cambio del volumen debía expresarse negativamente.

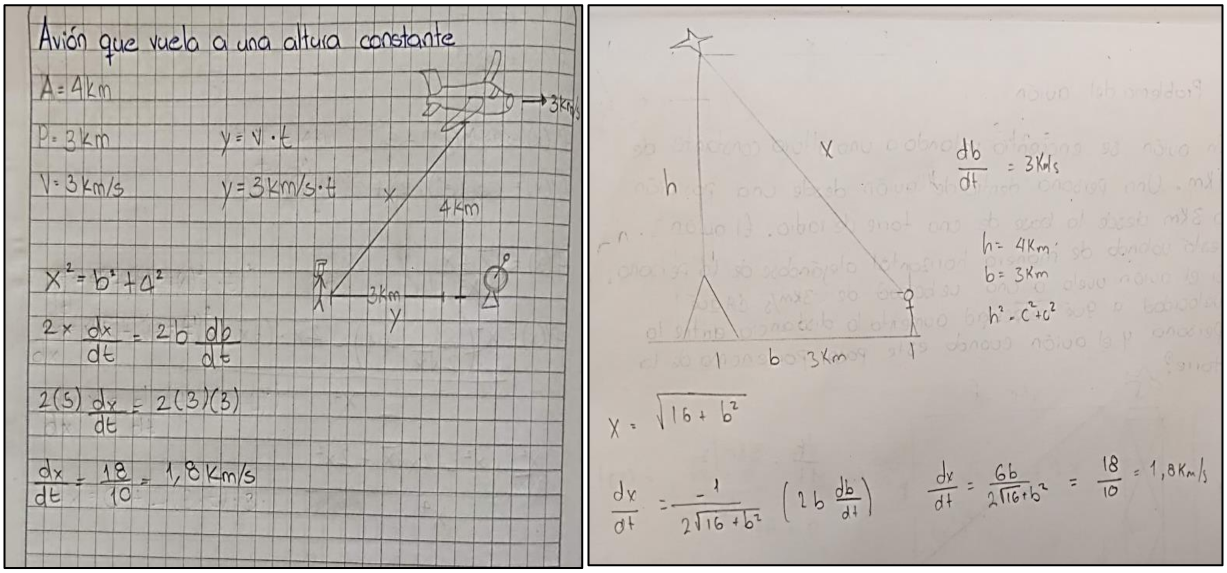
Se deseaba poner a prueba lo que se había visto hasta el momento, por lo que se les planteó el siguiente problema (ver Figura 85), sin dar ayuda alguna, quedando a libre desarrollo e interpretación de los estudiantes.

Figura 85 Descripción sobre el problema del avión que vuela a una altura constante

Un avión se encuentra volando a una altura constante de $4km$. Una persona ve el avión desde una posición a $3km$ desde la base de una torre de radio. El avión se encuentra volanado de manera horizontal alejándose de la persona. Si el avión vuela a la velocidad de $3\frac{km}{s}$ ¿A qué velocidad aumenta la distancia entre la persona y el avión cuando este pasa por encima de la torre de radio?

Se evidenciaron dos maneras de dar solución al problema (ver Figura 86), llevando ambas a la respuesta correcta. Además, se evidenciaron “dos maneras distintas” de modelar mediante un dibujo el problema planteado.

Figura 86 Respuestas del problema del avión de vuela a una altura constante



Podemos notar que, en ambas respuestas, los estudiantes modelan de igual manera el problema planteado mediante una ilustración, con la pequeña diferencia de la orientación hacia la que se dirige el avión y la elaboración de este. El hecho de que los estudiantes puedan en primera instancia modelar el problema mediante un dibujo, demuestra la buena interpretación que se hace del mismo. Cabe resaltar que la mayoría de los estudiantes (alrededor de un 85% del total), hicieron una representación similar a la de la izquierda, esto puede deberse al hecho de que los estudiantes consideraban que al irse alejando y producirse una distancia positiva, esta debe ser obligatoriamente hacia la derecha.

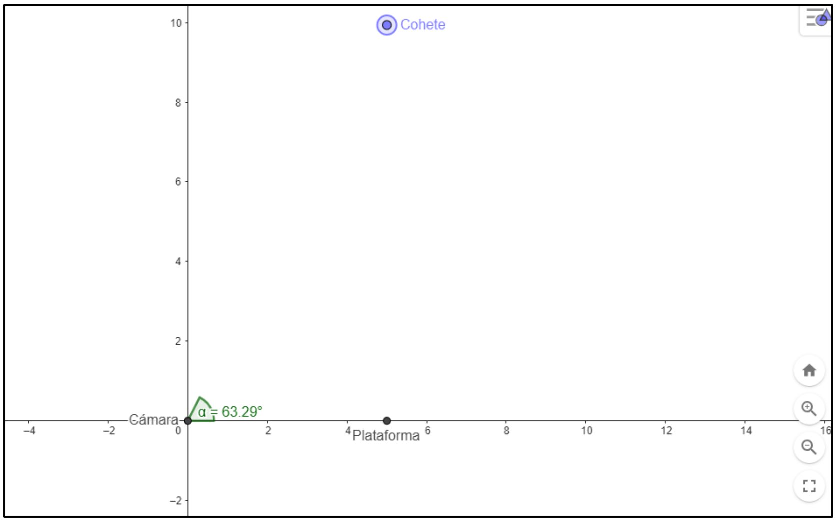
También podemos evidenciar que todos los estudiantes construyeron un mismo modelo, el cual venía dado por: $h^2 = x^2 + y^2$, solo difiriendo en las variables utilizadas. Algunos estudiantes, hicieron un paso más, y llegaban a construir otro modelo que derivaba del anterior, pues lo planteaban de la siguiente manera: $h = \sqrt{x^2 + y^2}$, como se puede evidenciar en las imágenes plasmadas. Estos modelos que fueron hallados por los estudiantes, son proporcionados por las mismas ilustraciones que, para este caso, fueron hechas por los mismos estudiantes.

Por último, se puede evidenciar que ambos estudiantes (al igual que el resto), resuelven el problema teniendo en cuenta las estrategias de resolución dadas en un inicio, pues plantean mediante un dibujo el problema, asignan variables, construyen un modelo que representa el problema planteado, derivan y reemplazan valores. Podemos entonces evidenciar lo beneficiosas que pueden ser las pautas planteadas en las estrategias de resolución, puesta estas ayudan a tener un orden, encaminando de manera correcta hacia la solución del problema.

Con el poco tiempo de clase que quedaba, se planteó en el tablero el siguiente problema: "*Se lanza un cohete de tal manera que este se eleva verticalmente. Se sitúa una cámara de grabación a 5km desde la plataforma de lanzamiento del cohete. Cuando el cohete está 10km sobre la plataforma de lanzamiento, su velocidad es 6km/s. Calcule la tasa de cambio necesaria del ángulo de la cámara en función del tiempo para que se mantenga enfocada en el cohete*".

En primera instancia, se les pidió a los estudiantes modelar mediante un dibujo el problema planteado para una mejor interpretación de este y posteriormente hallar un modelo para la solución del problema. Los estudiantes presentaron confusión a la hora de plasmar el problema en un dibujo, pues no comprendían lo relacionado con el ángulo mencionado, lo que no les permitió ilustrar mediante un dibujo el problema y por ende tampoco pudieron hallar un modelo para dar solución al problema. Por lo que se les proporcionó una simulación como la siguiente (ver Figura 87), con la finalidad de que los estudiantes pudieran interactuar y entender un poco más el problema. La simulación puede ser vista en: https://www.geogebra.org/classic/bjhnhzfe.

Figura 87 Recurso sobre la simulación del problema del cohete



Luego de interactuar con la simulación, la mayoría de los estudiantes concordaron con un mismo modelo, el cual venía dado por $Tang(\theta) = \frac{h}{5}$. Aunque este problema fue abordado solo hasta acá, puesto que se acabó el tiempo de la clase, podemos mencionar la importancia de la somulación para plantear el modelo, puesto que, gracias a este, los estudiantes pueden hallar las diferentes relaciones entre las variables del problema.

A nivel general, las simulaciones proporcionadas por recursos de GeoGebra, y las imágenes y estrategias de resolución expuestas en el AVA desempeñan un papel de gran importancia en la obtención y posterior análisis de datos, además de que ayudan a la creación de modelos o la validación y análisis de estos (Villa-Ochoa, González-Gómez y Carmona-Meza, 2018).

5.2.2. Dinamismo del concepto de derivada en la sección de Máximos y Mínimos

Para empezar esta sección, se retomó al problema planteado y resuelto por los estudiantes en el apartado de la derivada de funciones logarítmicas. El cual trató sobre hallar el punto en el cual la función tomaba el menor valor posible. Por lo que se presentó el siguiente diálogo.

Profesor: ¿Cómo hicieron para hallar el menor valor que tomaba la gráfica?

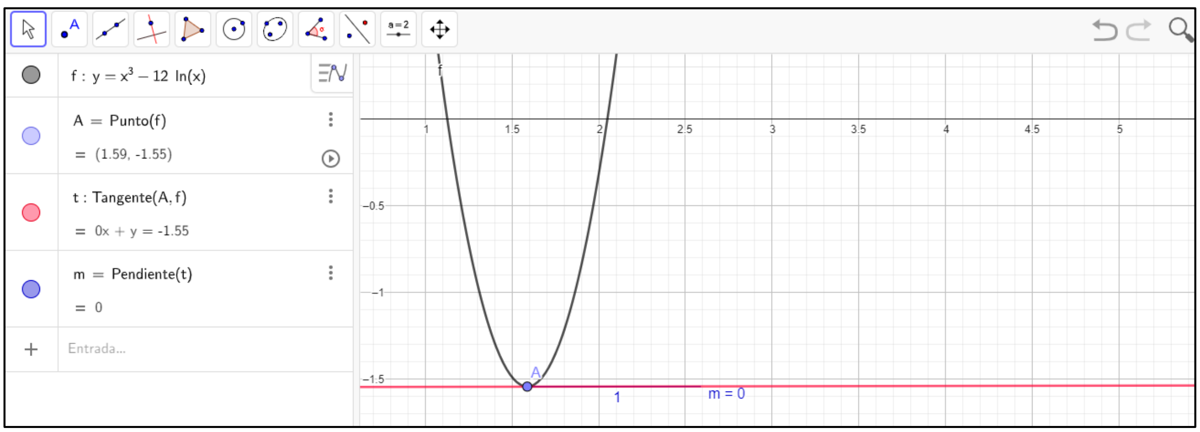
Estudiante 1: El menor valor estaba cuando la recta tangente era horizontal.

Estudiante 2: Con la pendiente, cuando la pendiente es igual a cero.

Estudiante 3: Se hallaba igualando la derivada a cero.

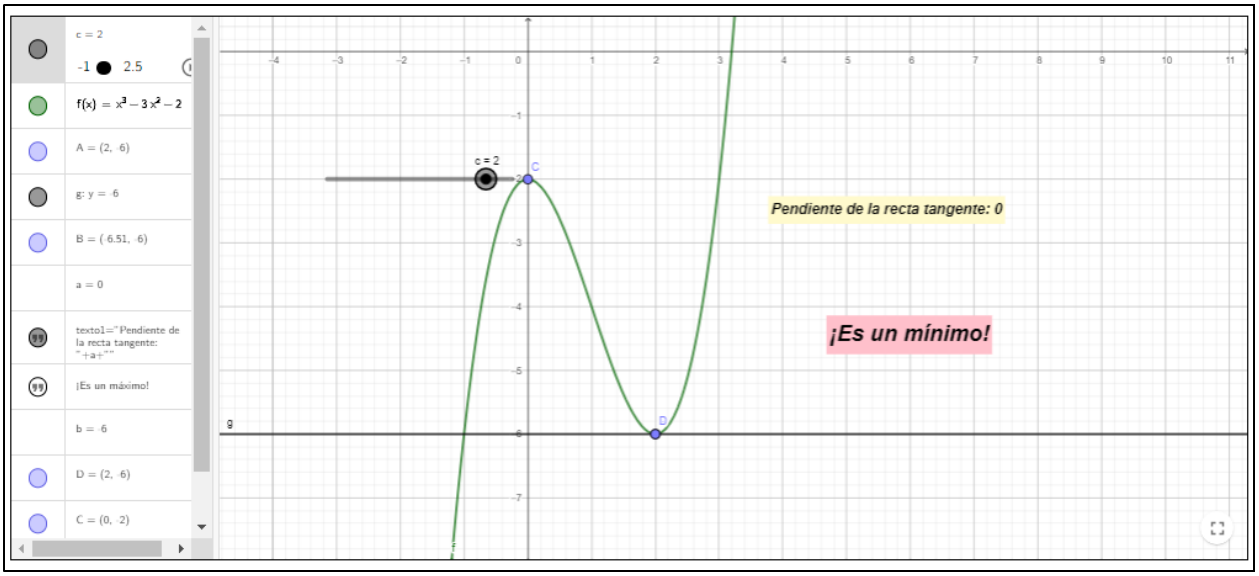
Se procedió a graficar la función de dicho problema para su posterior análisis (ver Figura 88). Al intentar poner la recta tangente de manera horizontal, no se logró a la primera, por lo que fue necesario acercar (hacer zoom) para así poder tomar valores más aproximados en donde la recta se hacía horizontal.

Figura 88 Gráfica sobre el valor mínimo de una función



Con la misma gráfica, se empezó a analizar el comportamiento de la pendiente a medida que se desplaza el punto sobre la gráfica. Posteriormente se continuó el análisis con el siguiente recurso (ver Figura 89), el cual puede ser observado en https://www.geogebra.org/m/ec6ktmtd.

Figura 89 Recurso sobre Máximos y mínimos



La gráfica hecha en GeoGebra y el recurso del mismo Applet, se utilizaron con la finalidad de que los estudiantes pudieran interpretar el comportamiento de la pendiente y dedujeran lo que correspondía al tema de esta sección. Después de interactuar con los recursos, se presentó el siguiente diálogo.

Profesor: ¿Qué pueden deducir de la pendiente de la recta tangente antes y después de pasar por donde se ubicaba un mínimo?

Estudiantes: El valor de la pendiente pasa de ser negativa a positiva.

Profesor: ¿Y respecto a un máximo?

Estudiantes: Al revés

Profesor: ¿Al revés?

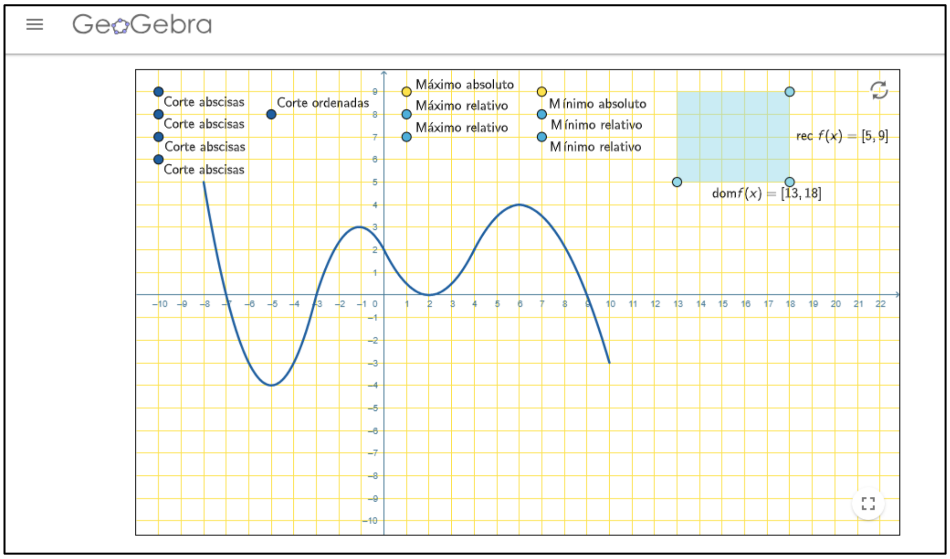
Estudiantes: Pasa de positiva a negativa

Con lo anterior podemos evidenciar que, utilizando un material adecuado para la enseñanza, que para este caso fue el uso de recursos del Applet de GeoGebra proporcionados mediante el AVA, los mismos estudiantes pueden deducir lo referente al tema tratado, y no hacen un proceso mecánico en el que solo se les proporciona la información y estos solo se limitan a desarrollar ejercicios.

Además, cabe mencionar que los objetos matemáticos del cálculo no son estáticos, como se puede creer gracias a la educación tradicional, no es algo que se plantea en un cuaderno o un tablero, sino que mediante la tecnología y los diferentes recursos que nos permite el Applet de GeoGebra, se puede evidenciar de manera didáctica, dinámica, eficaz y eficiente los movimientos de un punto sobre la función, el hallazgo de los máximos y mínimos, el cómo identificarlos, puesto que hay más de los que se pueden evidenciar en un cuaderno o un tablero, expandiendo estas ideas un poco más allá de lo que una metodología tradicional permitiría.

Luego del análisis realizado anteriormente, se pasó a la parte algebraica, que no puede ir desligada de todos estos procesos. En el aula virtual estaban planteados algunos ejemplos como se puede evidenciar en la Figura 43. Luego de una socialización de los ejemplos plasmados en el AVA, y otros proporcionados en la clase, se finalizó la clase haciendo una actividad interactiva, pues se utilizó un recurso del Applet de GeoGebra (ver Figura 90), el cual puede ser visto en: https://www.geogebra.org/m/rmtAjhHg

Figura 90 Recurso utilizado para la actividad interactiva



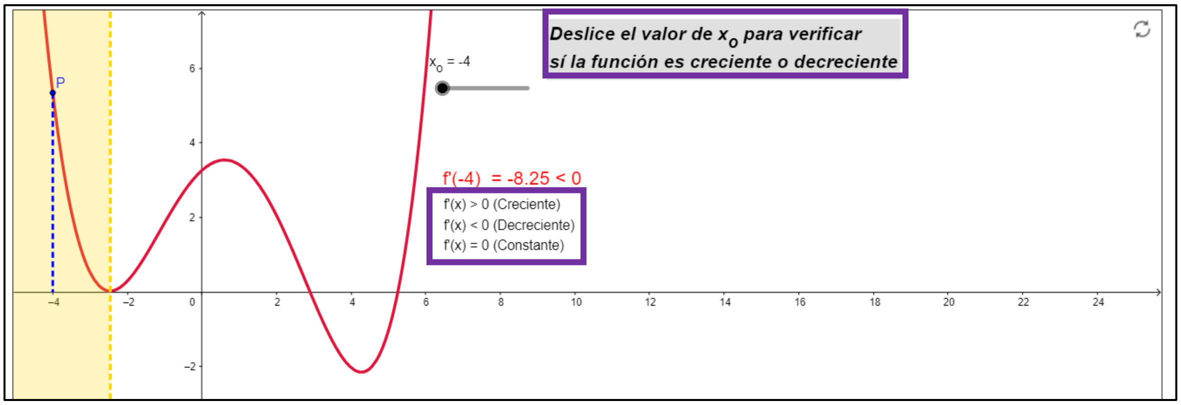
El anterior recurso, ayudó a concretar y practicar lo que se había visto en el trascurso de la clase. Siendo esto muy importante, puesto que, en una sola actividad, se puede evaluar los conocimientos adquiridos. Por otro lado, lo práctico, llamativo y sencillo que viene siendo, termina ahorrándonos tiempo, además de salir de la cotidianeidad de los procesos de enseñanza.

El uso de los diferentes recursos que podemos realizar o encontrar gracias a la tecnología, pueden facilitar el aprendizaje de los objetos matemáticos que constituyen el cálculo. Para complementar lo anterior, Mercapide (2018), nos menciona que las nuevas tecnologías proporcionan nuevas herramientas facilitadoras del aprendizaje del cálculo.

5.2.3. GeoGebra como foco de enseñanza en la sección de Criterios de la primera y segunda derivada

Para iniciar este tema, específicamente en el criterio de la primera derivada, se utilizó el siguiente recurso (ver Figura 91), el cual puede ser visto en https://www.geogebra.org/m/eRnq7JcE, con la finalidad de que los mismos estudiantes dedujeran lo que veríamos durante el transcurso de la clase.

Figura 91 Recurso sobre el criterio de la primera derivada



Cabe aclarar que lo encerrado en los recuadros morados, fue oculto, para que dicha información no influyera en las respuestas o deducciones que hacían los estudiantes. Teniendo en cuenta lo anterior, se presentó el siguiente diálogo:

Profesor: ¿Qué pueden observar al desplazarme en el deslizador?

Hubo un silencio y nadie respondió. Se ubicó el deslizador para el valor de 0,6 y se les preguntó.

Profesor: ¿Qué ocurre específicamente en este punto?

Estudiantes: Hay un máximo.

Profesor: ¿Qué ocurre antes de este punto, en la parte sombreada de gris?

Se les preguntó mientras se movía el deslizador para ese intervalo.

Estudiantes: La pendiente es positiva.

Profesor: ¿Y qué ocurre con la gráfica de la función?

Estudiante 1: ¿Crece?

Profesor: ¿Están de acuerdo con lo que dice el compañero?

Estudiantes: Sí.

Profesor: ¿Qué sucede después del mismo punto? En la parte sombreada de amarillo.

Estudiante 2: La gráfica de la función decrece, y la pendiente es negativa.

Profesor: Entonces, ¿Qué podemos concluir?

Se les preguntó mientras se movía el punto repetidamente por todo el deslizador

Estudiantes: Cuando la pendiente es positiva, la función crece. Y cuando es negativa, decrece.

Nuevamente, podemos evidenciar lo útil que puede ser el apoyo de la tecnología para la enseñanza de algún objeto matemático, puesto que, mediante un recurso de GeoGebra, los estudiantes deducen por sí mismos, lo que se verá en el transcurso de la clase. En otras palabras, por medio de la visualización se pueden concretar reflexiones (Rodríguez y Quiroz, 2016, citados por Villa-Ochoa, González-Gómez y Carmona-Meza, 2018), además de poder construir las bases del conocimiento sobre un nuevo objeto matemático.

Para complementar lo trabajado con el recurso, se procedió a mostrar mediante el Aula Virtual, imágenes las cuales, como se logra evidenciar en la Figura 46, tenían la finalidad de representar lo concluido.

Como se mencionó anteriormente, en el diseño para el criterio de la segunda derivada, se optó por tener mucho apoyo en imágenes. El uso de las imágenes como apoyo para la enseñanza de algún objeto matemático, termina siendo muy conveniente, puesto que al estar bien elaboradas y con información concisa, logran resumir lo mencionado. Además de que terminan siendo más exactas y apegadas a la realidad, que dibujos plasmados en el tablero.

Además de los ejemplos planteados en el AVA, se expusieron algunos ejemplos en la clase, los cuales, mediante un recurso de GeoGebra (ver Figura 92 y 93), se analizó el comportamiento de las gráficas. El recurso puede ser visto en https://www.geogebra.org/m/qd9pjxfb. Un ejemplo desarrollado en la clase, fue el de la función $y = 2x^4 + (3x)^2$. En el recurso fue analizado el comportamiento de las gráficas, además de los puntos de inflexión y los puntos críticos.

Figura 92 Recurso de GeoGebra, gráfica y sus derivadas

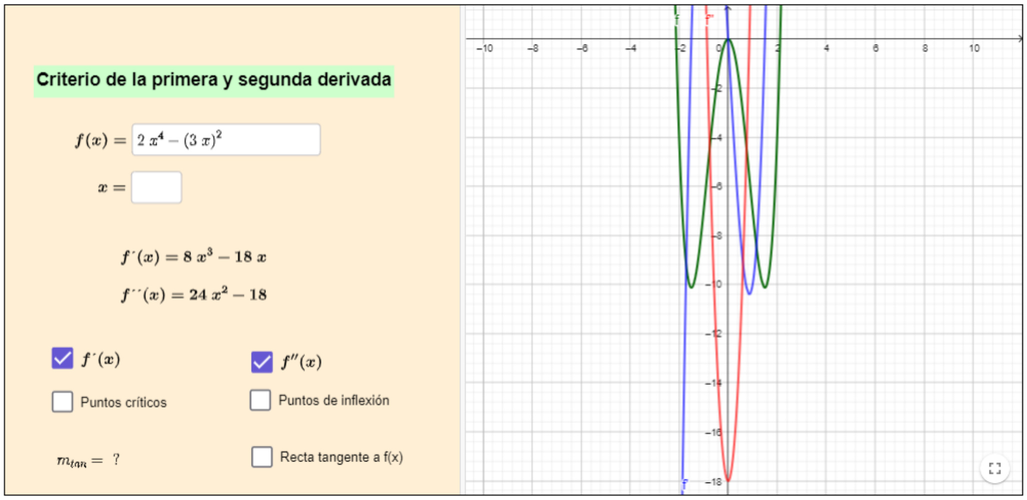
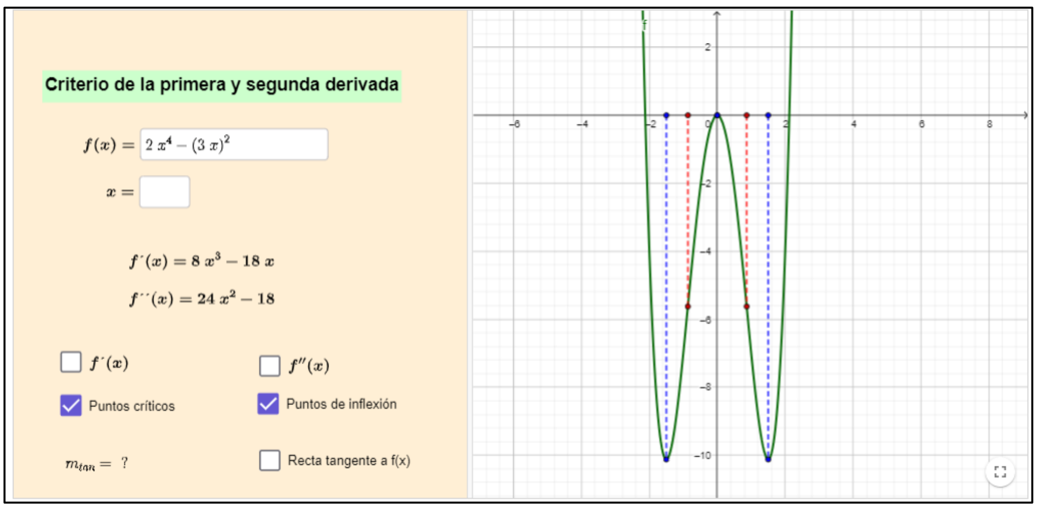


Figura 93 Recurso de GeoGebra, puntos críticos y de inflexión



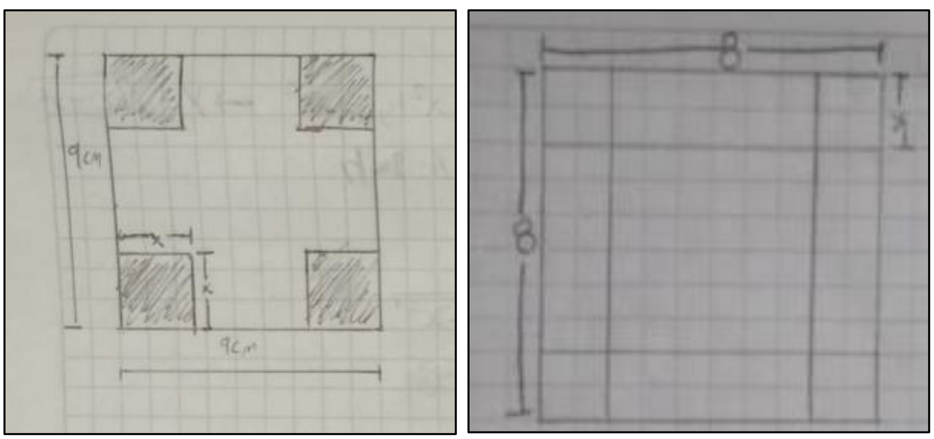
El anterior recurso, fue de mucha utilidad, puesto que este nos brindaba los diferentes datos que se pueden obtener por medio de los criterios de la primera y segunda derivada. Lo que se concluía en un apoyo para la interpretación de dichos criterios, además de ser utilizado para comprobar lo resultados obtenidos.

5.2.4. Modelación a través de simulaciones en la sección de Optimización

En esta sección, se trabajaron con algunos problemas clásicos de optimización. Para empezar, a los estudiantes se les planteó el problema de la caja sin tapa, el cual decía: "*Una empresa que vende productos industriales, quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón de 6 metros por 6 metros, para empacar uno de sus productos. Para ello, se corta un cuadrado de lado x en cada esquina y se dobla la hoja levantando los cuatro laterales de la caja*."

Inicialmente se les pidió a los estudiantes que cambiaran las longitudes de la hoja de cartón, por el último dígito de su código, exceptuando si este era cero, pues en ese caso, deberían cambiarlo por el penúltimo. Posteriormente, se les pide a los estudiantes que hicieran una representación del problema planteado (ver Figura 94).

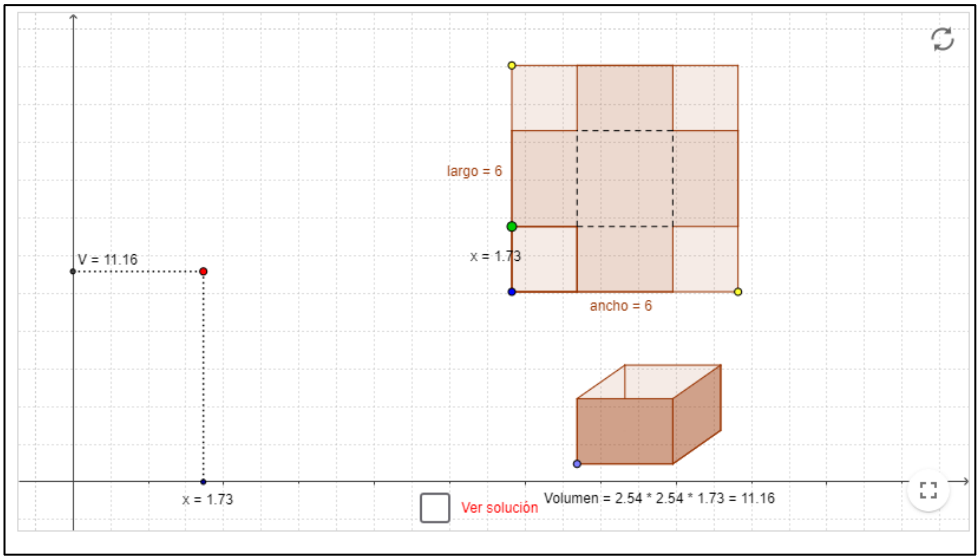
Figura 94 Respuestas sobre la modelación por medio de un dibujo del problema de la caja



Como podemos evidenciar en las respuestas, estos estudiantes (al igual que el resto) modelaron el dibujo de la misma manera. Se puede observar también que los estudiantes tuvieron una buena interpretación del enunciado del problema, puesto que hacen una ilustración correcta del mismo.

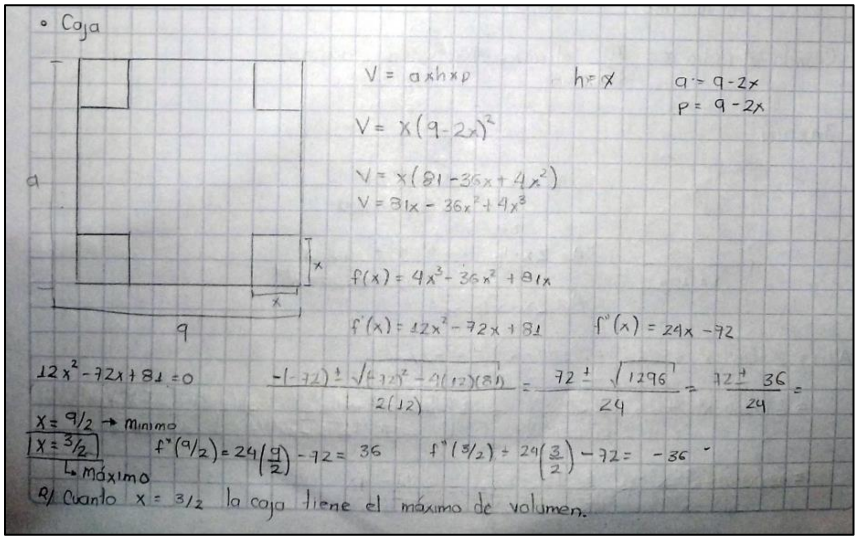
Luego, se les proporcionó a los estudiantes un recurso de GeoGebra (ver Figura 95), el cual permitía observar el problema planteado de manera bi- y tridimensionalmente, en el cual se les pidió que movieran los puntos amarillos de tal manera que cumplieran con el problema según lo que se había mencionado del último dígito del código, además de que interactuaran con él, para que posteriormente, empezaran a dar solución al problema. Dicho recurso puede ser visto en https://www.geogebra.org/m/wjrvyuvz.

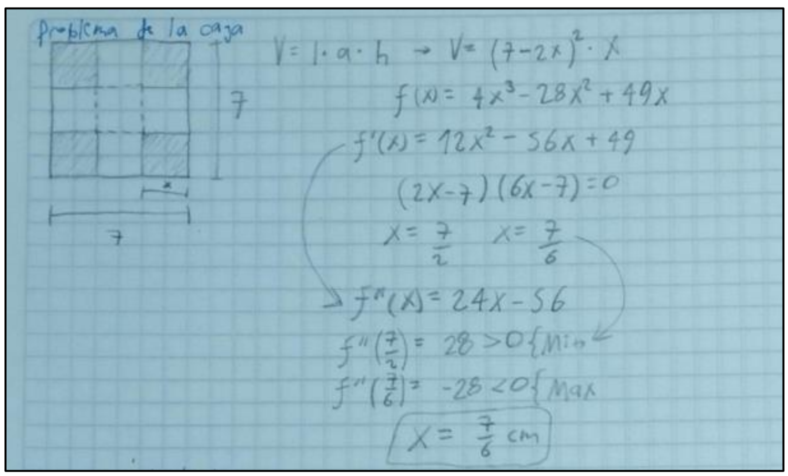
Figura 95 Recurso sobre la simulación del problema sin tapa



A continuación, se mostrarán algunas de las respuestas de los estudiantes sobre la solución del problema de caja sin tapa (ver Figura 96).

Figura 96 Respuestas sobre el problema de la caja





En las respuestas proporcionadas en la Figura 96, se puede observar el modelo utilizado para la resolución del problema. Cabe mencionar que todos los estudiantes plantearon un mismo modelo, el cual venía dado por $V = l.a.h$ difiriendo solo en las variables utilizadas, pero llegaban al mismo modelo, el cual basaba en que el volumen venía dado por la multiplicación del largo, ancho y alto de la caja.

Se evidenció también que todos los estudiantes a la hora de evaluar los puntos críticos para saber si eran máximos o mínimos, utilizaron el criterio de la segunda derivada, y no el de la primera. Esto se dio gracias a que, con el criterio de la segunda derivada, es un poco más rápido.

En la resolución del problema, se presentaron dos obstáculos de interpretación. En primera instancia, fue el hecho de que algunos estudiantes no reconocieron a la altura de la caja como el valor de x, el cual era la longitud que se quitaba de la hoja de cartón, dicha interpretación lograron contemplarla luego de mencionarles que observaran bien lo que ocurría cuando movían el punto verde, y el cómo variaba la forma tridimensional de la caja.

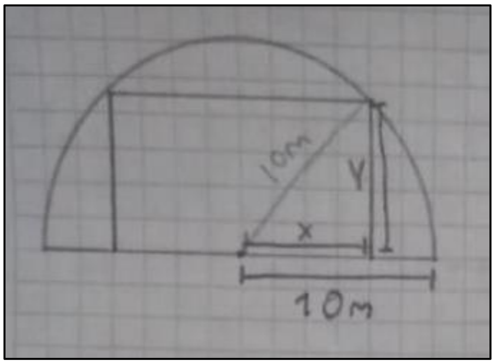
El segundo obstáculo, fue el hecho de restar x a las medidas del largo y el ancho, y no el doble de x, puesto que se quitaba un cuadro en cada esquina. Los estudiantes se dieron cuenta de que estaban cometiendo un error puesto que, al llegar a la solución, sus respuestas no concordaban con la arrojada por el recurso de GeoGebra. Nuevamente, se les pidió de que hicieran una mejor interpretación de la simulación de la caja, centrándose más en la simulación bidimensional.

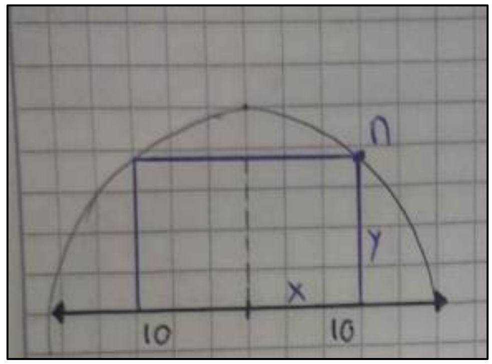
Una vez más, podemos evidenciar las ventajas que puede ofrecer en la enseñanza, el acompañamiento de la tecnología, siendo en este caso por medio de una simulación en un recurso de GeoGebra, pues para este caso, el recurso permitió que los estudiantes se dieran cuenta de que estaban cometiendo un error en la resolución del problema, pues su respuesta no concordaba con la respuesta proporcionada por el recurso. Además, de que los estudiantes mediante las diferentes representaciones (bi- y tridimensionalmente), podían obtener una mejor interpretación del problema.

Un segundo problema planteado, fue el del rectángulo inscrito en un semicírculo, el cual decía lo siguiente: "*Un jardín con forma de semicírculo de radio* $10m$, *se va a instalar un parterre* *rectangular. Uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del parterre para su área sea máxima*.”

A los estudiantes nuevamente se les pidió hacer un dibujo que representara el problema planteado (ver Figura 97). En esta ocasión se observó una misma representación, pero algunos estudiantes agregaban algo más al dibujo lo cual sería clave para relacionar las variables.

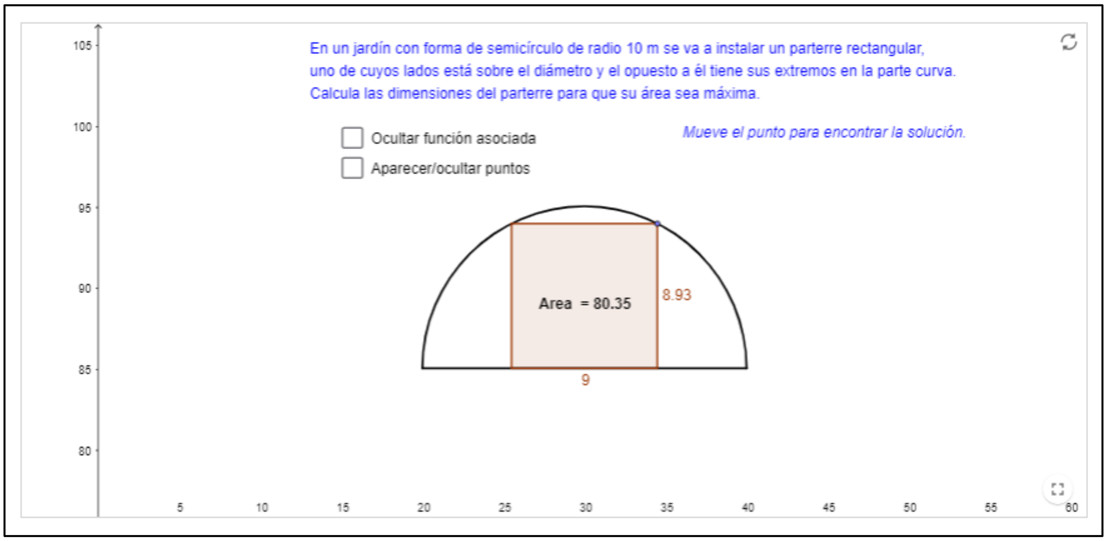
Figura 97 Respuestas sobre la modelación por medio de un dibujo del problema del jardín





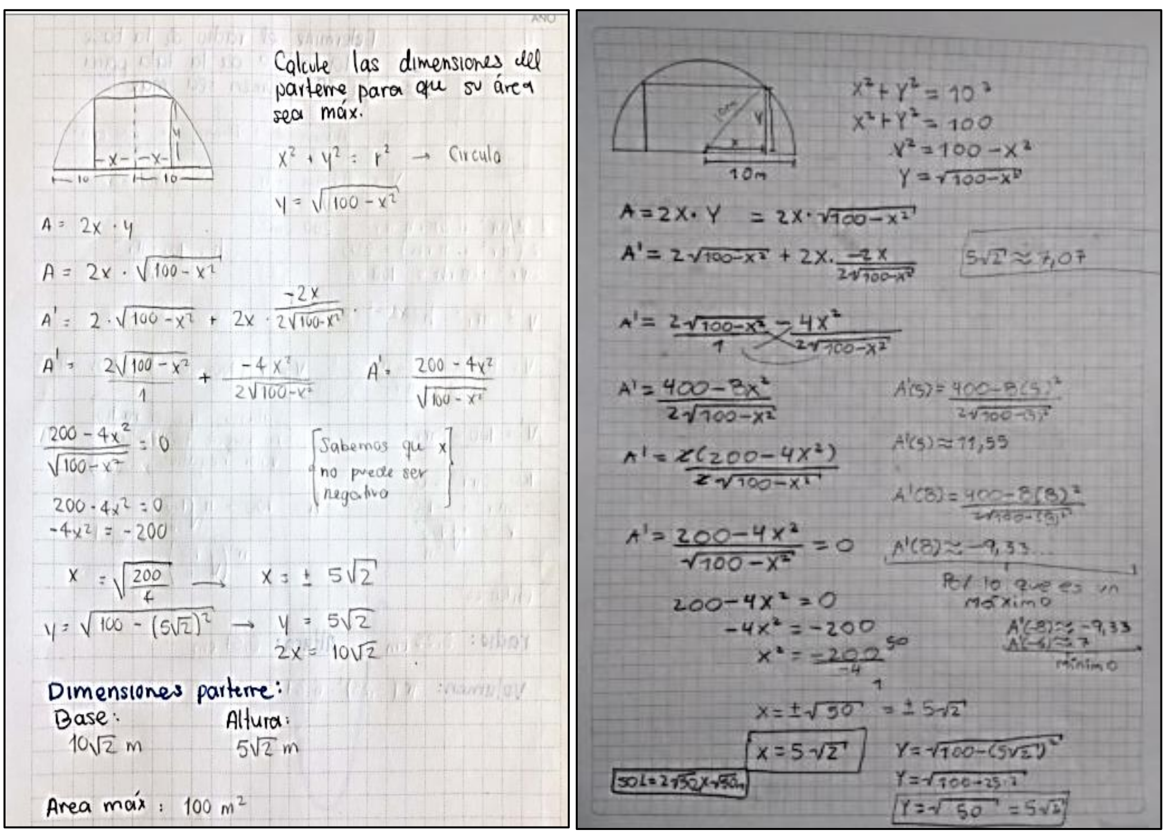
Posteriormente se les proporcionó el recurso de GeoGebra (ver Figura 98), para que los estudiantes analizaran la simulación del problema planteado, además de interactuar con él, sacar datos para idearse una solución, e incluso, observar la solución del problema, la cual serviría para comparar con las respuestas encontradas por cada uno de ellos, como ocurrió en el problema anterior. El recurso puede ser visto en: https://www.geogebra.org/m/rnBSqp3V

Figura 98 Recurso sobre la simulación del problema del jardín



A continuación, se mostrarán algunas de las respuestas proporcionadas por los estudiantes sobre el problema del jardín (ver Figura 99).

Figura 99 Respuestas del problema del jardín



Como se había mencionado anteriormente, se evidenciaron dos maneras de relacionar las variables x e y. Algunos estudiantes, como se evidencia en la imagen de la izquierda, lo hicieron mediante la ecuación de un círculo, la cual, al despejar y escoger la parte positiva, ratifican la forma del semicírculo. Por otro lado, otros estudiantes, como se evidencia en la imagen de la derecha, lo hicieron mediante el teorema de Pitágoras, pues este ve la forma de un triángulo rectángulo.

Todos los estudiantes encontraron un mismo modelo, pero con diferentes métodos, como se evidenció en lo anteriormente expuesto. El modelo para dar solución fue el de $A = 2xy$, el cual terminan expresándolo como $A = 2x\sqrt{100 - x^2}$.

Al estudiante que presentó la respuesta observa en la imagen de la izquierda, se le preguntó el por qué no evaluaba el punto crítico hallado bien sea con el criterio de la primera derivada o con el de la segunda. Este respondió que había llegado a la solución dada por el recurso, lo que significa que es correcta y que no tenía la necesidad de evaluar los puntos críticos. Lo anterior se puede ver de una manera positiva y negativa. Positiva por el hecho de que es cierto, el recurso nos da la facilidad de verificar los resultados obtenidos e indicarnos si son o no correctos. Por otro lado, de manera negativa puesto que el estudiante no hizo el proceso completo el cual es necesario de realizar, pues en otros problemas puede que no cuente con una simulación, y el no tener la práctica a la hora de evaluar puntos críticos, puede llevarlo a cometer errores.

Los aportes que nos brindan la modelación mediante simulaciones no es algo nuevo, puesto que como lo menciona Villa-Ochoa, Sánchez-Cardona y Parra-Zapata (2017), la modelación se caracteriza por diferentes aspectos, entre los cuales podemos resaltar la extensión y cobertura del problema planteado, la búsqueda y obtención de datos, el tiempo utilizado para dar solución al problema en cuestión y, por último, la envergadura de los resultados.

En todo lo expuesto en el documento, pudimos observar las diferentes ventajas que nos puede proporcionar el uso de un Aula Virtual de Aprendizaje junto a sus diferentes herramientas digitales, en la cual se resalta el Applet de GeoGebra.

A continuación, se expondrán las conclusiones del documento.

6. Conclusiones

El Aula Virtual de Aprendizaje, junto a las diferentes herramientas digitales, propician un buen desarrollo de la clase, lo que facilita a los docentes la enseñanza y evaluación de los objetos matemáticos.

El AVA y el uso de la tecnología en general, permiten una intervención más activa por parte de los estudiantes, pues la clase deja de ser monótona, dejando de lado la metodología tradicional, la cual se centraliza solo en el profesor, tablero y marcador.

Al ser un Aula Virtual de Aprendizaje, la información más relevante o fundamental del objeto matemático visto en la clase, queda habilitada para que lo estudiantes ingresen en cualquier momento, permitiendo que estos desarrollen un estudio autónomo, siendo partícipes de su crecimiento intelectual.

Los diferentes recursos de GeoGebra utilizados y proporcionados mediante el Aula Virtual, son fundamentales para la buena interpretación y adquisición del objeto matemático tratado, pues como se logró evidenciar, estos permiten abordar los problemas planteados de una mejor manera.

La interacción con el AVA y los diferentes recursos del applet de GeoGebra, posibilita que los estudiantes realicen procesos de razonamiento, permitiendo que estos conjeturen sobre diferentes reglas.

El apoyo brindado por las tecnologías digitales, posibilita una interacción con el movimiento y la variación de los fenómenos, permitiendo una mejor apreciación de la derivada, puesto que dichos aspectos son fundamentales en esta.

La mayoría de los problemas utilizados en esta investigación, son comunes en la enseñanza de la derivada, por lo que se recomienda para futuras investigaciones, la creación de nuevos problemas que, junto al uso de la tecnología, propicien a una mejor interpretación de la derivada.

Un factor muy relevante en la modelación matemática, es el proceso de modelación que ejecuta cada estudiante, por lo que, para posteriores investigaciones, sería fundamental el estudio de dicho proceso.

7. Referencias

Cardona Aguirre, R. (2012). Una propuesta para la enseñanza de la derivada como razón de cambio a estudiantes de grado undécimo.

Castro, S., Guzmán, B., & Casado, D. (2007). Las Tic en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Laurus, 13(23), 213-234.

Cervantes-Salazar, M., Camarena-Gallardo, P., & Pinet-Plasencia, R. (2008). La derivada con la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación. Científica, 12(4), 167-173.

Erazo, I., Escobar, D., Bravo, M., Villa-Ochoa, J. (2018). La modelación matemática: un aporte al aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden en ingeniería.

Fiallo Leal, J. y Parada Rico, S. (2018). Estudio dinámico del cambio y de la variación. Curso de precálculo mediado por GeoGebra.

Guilcapi Imaicela, E. (2021). Aula virtual para reforzar el aprendizaje del cálculo de derivadas.

Gutiérrez Mendoza, L., Buitrago A, M. y Ariza N, L. (2015). Diseño de un OVA como mediador pedagógico para la enseñanza de la derivada.

López Pérez, M. (2013). Las nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje. ¿Qué piensan los futuros maestros? Pp 40-61.

López Santoyo, Y. (2021). Impacto del uso de ovas diseñados para la enseñanza de la derivada en ingeniería civil.

Lugo, G. (2016). Gestión curricular de las asignaturas didáctica I y didáctica II (EUS-CUV) en entornos virtuales. (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Caracas, Venezuela.

MEN (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Ministerio de Educación Nacional. Colombia. Ministerio de Educación Nacional.

Mercapide Argüello, G. (2018). Dificultades de aprendizaje del cálculo y enseñanza de la economía. Los conceptos de función y derivada.

Montoya Forero, S. y Díaz Fernández, L. (2018). Ambiente Virtual para el Aprendizaje de la Solución de Problemas de las Razones de Cambio Relacionadas Mediado por Andamiajes Conceptuales e implícitos.

Pereyra, N. y Herrera, C. (2020). Dificultades en la comprensión del concepto derivada de una función. Revista de Investigación, pp 48 – 58.

Roa Fuentes, S., Parada Rico, S. y Fiallo Leal, J. (2012). Memoria 4to Seminario Taller en Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y las componentes de su investigación.

Torrijos Cobos, M. y Rubiano Lara, J. (2011). Análisis del rendimiento académico en un curso de cálculo diferencial usando como herramienta el aula virtual. Vol. 6, pp 35-52.

Vasco, C. (2002). Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas. El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías.

Vega Agredo, S. (2019). El desarrollo histórico-epistemológico de la derivada en el paso de lo geométrico a lo analítico.

Villa-Ochoa, J., González-Gómez, D. y Carmona-Mesa, J. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas.

Villa-Ochoa, Jhony Alexander, y Castrillón-Yepes, Alexander, y Sánchez-Cardona Jonathan, y "TIPOS DE TAREAS DE MODELACIÓN PARA LA CLASE DE MATEMMATICA." Espaço Plural, vol. XVIII, no. 36, 2017, pp.219-251.

Zill, D. G., & Wright, W. S. (2011). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (4a. ed. --.). México D.F.: McGraw-Hill.

Zúñiga, Leopoldo. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10(1), 145-175.