

ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

JOSÉ LUIS PUELLO GARCÍA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2008**

ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

JOSÉ LUIS PUELLO GARCÍA

Monografía presentada como requisito para optar al
título de Licenciado en Matemáticas

Director

GILDARDO GUZMÁN BARBOSA

Magister en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2008

Dedicatoria

La vida esta llena de pequeñas cosas que nos van llevando a ser felices, alcanzar las metas es una de ellas y luchar por obtenerlas es el mejor de los esfuerzos

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a: Dios por alcanzar esta meta en mi vida, a mi madre Elba García, a mi tía Cleotilde Mejía y a mis Hermanos Robinson, Lilian y Ernesto que me apoyaron y confiaron en mi, al profesor Gildardo Guzmán por su colaboración para la realización de esta monografía, a mis amigos y compañeros de carrera Francisco Gutiérrez, Óscar y Ávila, Oscar Madieto, Arturo Castro, Jaiver Hernández y Félix Páez por su compañía y motivación, y a mi novia Liliana Ramos por su colaboración en los momentos difíciles.

TITLE: EQUATIONS IN FINITES DIFFERENCES*

AUTHOR: JOSE LUIS PUELLO GARCIA**

KEY WORDS: DIFFERENCE OPERATOR, INDEFINITE SUMMATION, OPERATOR, DIFFERENCE EQUATIONS, HOMOGENEOUS EQUATION, GENERAL SOLUTION, GENERAL PROPERTIES.

DESCRIPTION:

In this essay a bibliographic revision it is made, about difference equations in special the linears. In the first chapter contains the study of the main operators involved in the calculus and their essential properties. They are also studied also some excellent functions that allow to simplify the notation, as well as to obtain formulates important for the calculus in differences, and the indefinite summation, as the inverse process to the calculus in differences. In the second chapter a special development it is made (properties and methods of analytic solution and graph) to the lineal equations in finite difference of first order with some applications to the economy and likeness with the continuous calculus. It is also considered some equations that do not fulfill the definition of lineal equations of first order, but with a variable change they can be taken to equation of that type or as some equations with variable coefficients, to reduce it or to convert it to constant coefficients. The Third chapter a similar study it is made (chapter two) for lineal equations in differences of more order where the properties and the methods are generalized for any order. In each chapter illustrative examples of the properties are given that are presented.

*Monograph

**Faculty of sciences. Mathematics school. Director: GILDARDO GUZMÁN BARBOSA.

TITULO: ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS*

AUTOR: JOSÉ LUIS PUELLO GARCÍA***

PALABRAS CLAVES: Operador diferencia, suma indefinida, operador de traslación, ecuaciones en diferencias, ecuación homogénea, solución general, propiedades generales.

RESUMEN

En el presente trabajo se hace una revisión bibliográfica sobre los aspectos generales de las ecuaciones en diferencias finitas en especial las lineales. En el primer capítulo contiene el estudio de los principales operadores involucrados en el cálculo y sus propiedades esenciales. Se estudiarán asimismo algunas funciones relevantes que permiten simplificar la notación, así como obtener formulas importantes para el cálculo en diferencias, y la sumas indefinidas, como el proceso inverso al calculo en diferencias. En el segundo capítulo se hace un desarrollo especial (propiedades y métodos de solución analítica y gráfica) a las ecuaciones lineales en diferencia finitas de primer orden con algunas aplicaciones a la economía y semejanzas con el calculo continuo. También se considera algunas ecuaciones que no cumplen con la definición de ecuaciones lineales de primer orden, pero con un cambio de variable se pueden llevar a ecuación de ese tipo o como algunas ecuaciones con coeficientes variables, reducirla o convertirla a coeficientes constantes. El Tercer y último capítulo se hace un estudio similar (capitulo dos) para ecuaciones lineales en diferencias de orden mayor donde se generalizan las propiedades y los métodos para cualquier orden. En cada uno de los capítulos se realizan ejemplos ilustrativos a cada una de las propiedades que se presentan.

*Monografía

***Facultad de Ciencias. Escuela de matemáticas. Director: GILDARDO GUZMÁN BARBOSA.

Índice general

INTRODUCCIÓN	1
1. DIFERENCIAS FINITAS	3
1.1. Primera diferencia de una función	3
1.2. Diferencia de Orden Superior	5
1.3. Operador de Traslación E	9
1.4. La Función Factorial	11
1.5. Igualdad de los Operadores	15
1.6. Suma Indefinida: El Operador Δ^{-1}	20
1.6.1. Aplicación al Cálculo Integral	27
2. ECUACIÓN LINEAL EN DIFERENCIAS DE PRIMER ORDEN.	28
2.1. Introduccion	28
2.2. Solución de una Ecuación Lineal en Diferencia de Primer Orden	31
2.3. Propiedades de la Ecuación Homogénea	33
2.4. Solución General de una Ecuación no Homogénea.	36
2.5. Ecuación Lineal en Diferencia con Coeficientes Constantes	40
2.6. El Método de Coeficientes Indeterminados	43
2.7. Solución Geométrica	50
2.8. Solución de Ecuaciones no Lineales	52
3. ECUACIÓN LINEAL EN DIFERENCIAS DE ORDEN SUPERIOR.	54
3.1. Introducción	54
3.2. Existencia de una Solución	55
3.3. Propiedades de la Ecuación Homogénea	56
3.4. Ecuaciones Homogéneas con Coeficientes Constantes	59
3.5. Solución General de la Ecuación Lineal no Homogénea	64
3.5.1. Variación de Parámetros	64
3.5.2. Método de coeficiente indeterminados	67

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones en **DIFERENCIAS FINITAS** juegan un papel muy importante en el estudio de problemas en los cuales algunas variables asumen sólo valores discretos, y de aquí su influencia en el desarrollo de los métodos numéricos relacionados con diferentes áreas como la de las ecuaciones diferenciales, la probabilidad y en general problemas donde existen relaciones secuenciales entre variables. Se constituyen entonces en una herramienta adecuada para discretizar problemas en variable continua y hoy en día mucho más con la abundancia de computadoras cada vez más potentes.

El cálculo en diferencias se ocupa a grosso modo del estudio de propiedades de las funciones reales de variable real a partir de las diferencias sucesivas entre los valores que toman dichas funciones en un conjunto determinado de puntos del dominio. Antes del nacimiento del cálculo infinitesimal las funciones que se manejaban tenían como dominio un conjunto numerable de puntos y el estudio de sus propiedades solo se entendía a partir del cálculo en diferencias finitas. El origen del cálculo en diferencias se le puede atribuir a B. Taylor, aunque el primero que resolvió cuestiones avanzadas fue J. Stirling. No obstante, el primer tratado sobre el cálculo en diferencias aparece en la obra de L. Euler, que introduce por primera vez el símbolo Δ para expresar las diferencias.

Dedicaremos esta monografía al estudio de los aspectos generales de las ecuaciones lineales en diferencias. Lo dividiremos en tres capítulos, en el primero abordaremos el estudio de los principales operadores involucrados en el cálculo y sus propiedades esenciales. Estudiaremos asimismo algunas funciones relevantes que permiten simplificar la notación, así como obtener fórmulas importantes para el cálculo en diferencias, y la “sumas indefinida” como el proceso inverso al “cálculo en diferencias”, todos estos aspectos se desarrollaran tomando como referencias los libros [3] y [4]. De este último libro se tomara un ejemplo que haga analogía entre el operador suma indefinida y la antiderivada como proceso inverso del operador diferencial. En el segundo y tercer capítulo se proporcionará un desarrollo bastante completo (propiedades y métodos de solución) de las ecuaciones lineales en diferencia finitas y algunas aplicaciones hacia la economía, para el desarrollo de estos temarios se tomaran

como referencia los textos [1] y [2].

CAPÍTULO 1

DIFERENCIAS FINITAS

En este capítulo se presenta una visión general de las diferencias finitas y algunas de sus propiedades, que aparecen en situaciones en que interesa estudiar los cambios en los valores de una función, al efectuar variaciones en el dominio de esta. Además estas diferencias aparecen naturalmente en el estudio de las ecuaciones en diferencias finitas, objeto de la presente monografía.

Ejemplos de diferencias finitas se dan en diversos contextos, por ejemplo, cuando se estudian sucesiones numéricas. Al considerar una sucesión (x_n) cuyos primeros términos vienen dados por $0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, \dots$ y asumiendo que la construcción de sus términos sigue una regularidad que puede intuirse de los términos dados, puede observarse que $x_2 - x_1 = 2$, $x_3 - x_2 = 4$, $x_4 - x_3 = 6$, $x_5 - x_4 = 8$, $x_6 - x_5 = 10$, $x_7 - x_6 = 12$, $x_8 - x_7 = 14$. Siguiendo este patrón una sucesión como la indicada tiene la propiedad que $x_{n+1} - x_n = 2n$, para todo número entero mayor o igual que uno. El lado izquierdo de la última igualdad, es una diferencia finita de primer orden.

1.1. Primera diferencia de una función

Definición 1.1.1. *Dadas una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, con $S \subseteq \mathbb{R}$ y una constante h tales que siempre que x pertenezca al dominio de f , $x + h$ también; se define la función primera diferencia de f como la función Δf tal que*

$$(1.1) \quad \Delta f(x) = f(x + h) - f(x).$$

Ejemplo 1.1.1. *La primera diferencia de la función f definida por $f(x) = ax + b$, permite una interpretación sencilla, es la función cuyo valor en x es igual al cambio producido en el valor de f , cuando en el dominio se produce un incremento h . Entonces $\Delta f(x) = ah$ define una función constante, y si $h = 1$, la primera diferencia coincide con el valor a de la pendiente de la recta.*

Ejemplo 1.1.2. Sea $u(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$ $m \geq 1$. Hallamos la primera diferencia teniendo en cuenta que

$$a^m - b^m = (a - b) \sum_{k=0}^{m-1} a^{m-k-1} b^k.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Delta[u(x)] &= \Delta(x^m) = (x + h)^m - x^m = \\ &= (x + h - x) \sum_{k=0}^{m-1} (x + h)^{m-k-1} x^k = \\ &= h \sum_{k=0}^{m-1} (x + h)^{m-k-1} x^k. \end{aligned}$$

De esta expresión puede observarse que la primera diferencia de una potencia de x , es un polinomio de grado menor en una unidad.

Una propiedad muy sencilla pero muy útil al calcular diferencias de ciertas funciones como las polinómicas, es la siguiente:

Teorema 1.1.1. Si f, g son funciones y a, b números reales entonces

$$(1.2) \quad \Delta[af_1 + bf_2](x) = a\Delta f_1(x) + b\Delta f_2(x).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \Delta[af_1 + bf_2](x) &= [af_1(x + h) + bf_2(x + h)] - [af_1(x) + bf_2(x)] = \\ &= [af_1(x + h) - af_1(x)] + [bf_2(x + h) - bf_2(x)] = \\ &= a[f_1(x + h) - f_1(x)] + b[f_2(x + h) - f_2(x)] = \\ &= a\Delta f_1(x) + b\Delta f_2(x). \end{aligned}$$

■

Ejemplo 1.1.3. Hallar la primera diferencia de la función $u(t) = 3t^2 - 5t$.

Sean $f(t) = t^2$ y $g(t) = -t$ entonces $\Delta u(t) = \Delta[3f + 5g](x)$. Aplicando el Teorema 1.1.1 se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta[3f + 5g](x) &= 3\Delta t^2 - 5\Delta t = \\ &= 3[(t + h)^2 - t^2] - 5[t + h - t] = \\ &= 3[t^2 + 2ht + h^2 - t^2] - 5[h] = \\ &= 3t^2 + 6ht + 3h^2 - 5h = \\ &= 3t^2 + 6ht + 3h^2 - 5h. \end{aligned}$$

Por inducción matemática, el Teorema 1.1.1 puede extenderse a n funciones y n constantes, como se indica a continuación.

Corolario 1.1.1. sean f_1, f_2, \dots, f_n funciones y c_1, c_2, \dots, c_n constantes arbitrarias. Entonces para cualquier entero positivo n se cumple que

$$(1.3) \quad \Delta[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)] = c_1 \Delta f_1(x) + c_2 \Delta f_2(x) + \dots + c_n \Delta f_n(x).$$

Demostración. Procediendo por inducción se tiene: Para $n = 2$, según el teorema precedente el resultado es válido.

Si el resultado se cumple para $n = k$, entonces también es cierto para $n = k + 1$. De hecho, si

$$\Delta[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_k f_k(x)] = c_1 \Delta f_1(x) + c_2 \Delta f_2(x) + \dots + c_k \Delta f_k(x)$$

entonces

$$\Delta[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_k f_k(x) + c_{k+1} f_{k+1}(x)] = c_1 \Delta f_1(x) + c_2 \Delta f_2(x) + \dots + c_{k+1} \Delta f_{k+1}(x).$$

$$\begin{aligned} c_1 \Delta f_1(x) + \dots + c_{k+1} \Delta f_{k+1}(x) &= [c_1 \Delta f_1(x) + \dots + c_k \Delta f_k(x)] + c_{k+1} \Delta f_{k+1}(x) \\ &= \Delta[c_1 f_1(x) + \dots + c_k f_k(x)] + c_{k+1} \Delta f_{k+1}(x) \\ &= \Delta[c_1 f_1(x) + \dots + c_k f_k(x) + c_{k+1} f_{k+1}(x)]. \end{aligned}$$

■

Observación 1. Del Teorema anterior se podría preguntar que condiciones debe tener $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ para que se cumpla la siguiente igualdad $\sum_{i=1}^{\infty} \Delta f_i(x) = \Delta \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$.?

Ejemplo 1.1.4. Primera diferencia del polinomio

$$P(x) = a_1 + a_1 x + \dots + a_m x^m,$$

es de grado $m - 1$.

Aplicando el Corolario 1.1.1 y el Ejemplo 1.1.2 se obtiene que

$$\begin{aligned} \Delta P(x) &= a_1 \Delta 1 + a_2 \Delta x + \dots + a_m \Delta x^m = \\ &= 0 + ha_2 \sum_{k=0}^0 (x+h)^{1-k} x^k + ha_3 \sum_{k=0}^1 (x+h)^{2-k-1} x^k + \dots + ha_m \sum_{k=0}^{m-1} (x+h)^{m-1-k} x^k. \end{aligned}$$

Por lo tanto se obtiene un grado menor en el polinomio $P(x)$.

1.2. Diferencia de Orden Superior

Como se estableció en la definición precedente la primera diferencia de una función dada, produce una nueva función. La primera diferencia de esta nueva función se llama diferencia de orden dos y en general se puede definir de forma inductiva para cualquier número natural n , la diferencia de orden n .

Definición 1.2.1. La diferencia de orden cero de una función se define como

$$(1.4) \quad \Delta^0 f(t) = f(t).$$

Se suele identificar Δ^0 con I el “operador identidad”, esto es

$$(1.5) \quad \Delta^0 f = If = f.$$

Definición 1.2.2. La diferencia de orden n , Δ^n de una función f se puede definir como

$$\Delta^n f(x) = \Delta [\Delta^{n-1} f](x),$$

para todo número natural $n \geq 1$.

Ejemplo 1.2.1. Sea $f(x) = x^3 + 1$ entonces aplicando la definición (1.1.1) tenemos :

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = (x+h)^3 + 1 - x^3 - 1 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

Aplicado nuevamente la definición 1.1.1 y el teorema 1.1.1 a la función diferencia tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta f)(x) &= \Delta(3x^2h + 3xh^2 + h^3) = \\ &= 3h\Delta x^2 + 3h^2\Delta x + \Delta h^3 = \\ &= 3h[(x+h)^2 - x^2] + 3h^2[x+h-x] + 0 = \\ &= 3h[(x+h)^2 - x^2] + 3h^2h = \\ &= 3h[(x+h)^2 - x^2] + 3h^3 = \\ &= 3h[x^2 + 2xh + h^2 - x^2] + 3h^3 = \\ &= 3h[2xh + h^2] + 3h^3 = \\ &= 6xh^2 + 6h^3. \end{aligned}$$

Por la Definición 1.2.2 se tiene que

$$\Delta(\Delta f)(x) = \Delta^2 f(x) = 6xh^2 + 6h^3,$$

que es la segunda diferencia. Si calculamos la tercera diferencia tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta(\Delta f(x))) &= \Delta(\Delta^2 f(x)) = \Delta^3 f(x) = \Delta[6xh^2 + 6h^3] = \\ &= \Delta[6xh^2] + \Delta[6h^3] = \\ &= 6h^2\Delta[x] + \Delta[6h^3] = \\ &= 6h^3. \end{aligned}$$

Entonces la tercera diferencia es constante y por consiguiente, $\Delta^4 f(x) = 6h^3 - 6h^3 = 0$.

Anotemos que $\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1}[\Delta f(x)]$. Inductivamente se tiene que

$$\Delta[f(x)] = \Delta^0[\Delta f(x)].$$

Si

$$\begin{aligned}\Delta^k f(x) &= \Delta^{k-1}[\Delta f(x)]; \\ \Delta^{k+1} f(x) &= \Delta[\Delta^k f(x)] = \Delta[\Delta^{k-1}(\Delta f(x))] = \Delta^k[\Delta f(x)].\end{aligned}$$

La primera diferencia de una función también tiene formulaciones de tipo general para productos y cocientes de funciones, las cuales tienen bastante similitud con las ya conocidas para la derivación de productos y cocientes. A continuación se formulan y demuestran estos resultados.

Teorema 1.2.1. *Dadas las funciones f y g entonces:*

1. $\Delta[f \cdot g](x) = \Delta f(x)g(x) + \Delta g(x)f(x+h).$
2. $\Delta\left[\frac{f}{g}\right](x) = \frac{\Delta f(x)g(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+h)}$ si $g(x)g(x+h) \neq 0.$

Demostración.

1.

$$\begin{aligned}\Delta[f \cdot g](x) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = \\ &= f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x) = \\ &= f(x+h)[g(x+h) - g(x)] + g(x)[f(x+h) - f(x)] = \\ &= f(x+h)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x) = \Delta f(x)g(x) + \Delta g(x)f(x+h).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\Delta\left[\frac{f}{g}\right](x) &= \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \\ &= \frac{g(x)f(x+h) - g(x+h)f(x)}{g(x+h)g(x)} = \\ &= \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - g(x+h)f(x)}{g(x+h)g(x)} = \\ &= \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)] + f(x)[g(x) - g(x+h)]}{g(x+h)g(x)} = \\ &= \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)] - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{g(x+h)g(x)} = \\ &= \frac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+h)}.\end{aligned}$$

■

Ejemplo 1.2.2. Calcular la primera diferencia $u(x) = 5x(1 - x)$.

Sean $f(x) = 5x$ y $g(x) = (1 - x)$ aplicando el teorema 1.2.1 la parte 1 se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \Delta[f \cdot g](x) = [5(x + h) - 5x][1 - x] + [(1 - x - h) - 1 + x][5(x + h)] \\ &= (5x + 5h - 5x)(1 - x) + (-h)(5x + 5h) \\ &= 5h - 5hx - 5hx - 5h^2 \\ &= 5h - 10hx - 5h^2.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.3. Calcular la primera diferencia $v(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x^2 + 1$, aplicando el Teorema 1.2.1 la parte 2 se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta v(x) &= \Delta \left[\frac{f}{g} \right] (x) = \frac{(\Delta x)(x^2 + 1) - x\Delta(x^2 + 1)}{[(x + h)^2 + 1][x^2 + 1]} = \\ &= \frac{(x + h - x)(x^2 + 1) - [(x + h)^2 + 1 - (x^2 + 1)]}{(x^2 + 2hx + h^2 + 1)(x^2 + 1)} = \\ &= \frac{h(x^2 + 1) - x(x^2 + 2hx + h^2 + 1 - x^2 - 1)}{(x^2 + 2hx + h^2 + 1)(x^2 + 1)} = \\ &= \frac{h(x^2 + 1) - x(2hx + h^2)}{(x^2 + 2hx + h^2 + 1)(x^2 + 1)} = \\ &= \frac{hx^2 + h - 2hx^2 + xh^2}{(x^2 + 2hx + h^2 + 1)(x^2 + 1)} = \\ &= \frac{h - hx^2 + xh^2}{(x^2 + 2hx + h^2 + 1)(x^2 + 1)}.\end{aligned}$$

Por inducción matemática se probará a continuación que la diferencia de orden n es lineal.

Teorema 1.2.2. $\Delta^n[c_1f_1(x) + c_2f_2(x)] = c_1\Delta^n f_1(x) + c_2\Delta^n f_2(x) \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Demostración. Procediendo por inducción, para $n = 0$ se tiene:

$$\Delta^0[c_1f_1(x) + c_2f_2(x)] = I[c_1f_1(x) + c_2f_2(x)] = c_1f_1(x) + c_2f_2(x),$$

por la definición de $\Delta^0 f = If = f$.

Asumamos que para $n = k$ el resultado es verdadero y demostremos que para $n = k + 1$ también lo es

$$\Delta^{k+1}[c_1f_1(x) + c_2f_2(x)] = \Delta\langle \Delta^k[c_1f_1(x) + c_2f_2(x)] \rangle = \Delta[c_1\Delta^k f_1(x) + c_2\Delta^k f_2(x)].$$

Aplicando el teorema 1.1.1 se tiene

$$\Delta\langle \Delta^k[c_1f_1(x) + c_2f_2(x)] \rangle = c_1\Delta\Delta^k f_1(x) + c_2\Delta\Delta^k f_2(x) = c_1\Delta^{k+1} f_1(x) + c_2\Delta^{k+1} f_2(x)$$

luego queda demostrado para $n = k + 1$, lo cual implica que se cumple para todo n . ■

1.3. Operador de Traslación E

Introduciremos una nueva función que facilitará los cálculos, ya que el operador Δ aplicado a una función f requiere de dos operaciones para conseguir $\Delta f(x)$. Si nosotros cambiamos de $f(x)$ a $f(x+h)$ y substraemos $f(x)$ del resultado, resulta ser sumamente útil introducir un símbolo especial para la primera operación o función, que llamaremos traslación y se denotará por la letra E

Definición 1.3.1. Sean f una función y h cualquier constante tales que x y $x+h$ pertenezcan al dominio de f , se define operador de traslación de f como la función Ef , cuyo valor en x es

$$Ef(x) = f(x+h).$$

Observando podemos escribir

$$\Delta f(x) = Ef(x) - f(x) = Ef(x) - If(x) = (E - I)f(x).$$

El operador E , como Δ , puede aplicarse más de una vez a una función. Por ejemplo:

$$E^2 f(x) = E[Ef(x)] = Ef(x+h) = f(x+2h),$$

$$E^3 f(x) = E[E^2 f(x)] = Ef(x+2h) = f(x+3h),$$

y en general, si se define

$$(1.6) \quad E^0 f(x) = If(x) = f(x).$$

Se tiene la siguiente definición para un entero $n \geq 1$.

Definición 1.3.2. Para un entero $n \geq 0$ se define

$$E^n f(x) = E(E^{n-1} f(x)) \quad n = 1, 2, \dots$$

A continuación demostraremos un resultado que nos permite hallar E^n de una forma más simple, y a la vez nos va permitir demostrar algunos teoremas mas fuertes.

Lema 1.3.1.

$$E^n f(x) = f(x+nh) \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Demostración.

Haciendo inducción sobre n , para $n = 1$ se tiene que $E^1 f(x) = f(x+h)$ y esto es verdadero por la definición.

Asumamos que

$$E^k f(x) = f(x+kh).$$

Aplicando el operador E a $E^k f$, se tiene:

$$E[E^k f(x)] = E[f(x+kh)],$$

usando la Definición 1.3.1 y 1.3.2 se obtiene que

$$\begin{aligned} E^{k+1}f(x) &= f(x + kh + h) \\ &= f(x + [k + 1]h), \end{aligned}$$

entonces el resultado es verdadero para todo $n \geq 1$. ■

Igual que para Δ^n , el operador E^n es lineal.

Teorema 1.3.1 (Propiedad de linealidad).

$$E^n[c_1f_1(x) + c_2f_2(x)] = c_1E^n f_1(x) + c_2E^n f_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Demostración.

Aplicamos inducción sobre n . Para $n = 0$ es verdadero por que

$$E^0[c_1f_1 + c_2f_2](x) = I[c_1f_1 + c_2f_2](x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$$

y

$$c_1E^0 f_1(x) + c_2E^0 f_2(x) = c_1I f_1(x) + c_2I f_2(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$$

por la definición $E^0 = I$.

Supongamos que es verdadero para $n = k$ y demostremos para $n = k + 1$.

Si

$$E^k[c_1f_1(x) + c_2f_2(x)] = c_1E^k f_1(x) + c_2E^k f_2(x)$$

aplicando el operador E , se tiene

$$E(E^k[c_1f_1(x) + c_2f_2(x)]) = E[c_1E^k f_1(x) + c_2E^k f_2(x)],$$

aplicando las definiciones y el Lema 1.3.1

$$\begin{aligned} E^{k+1}[c_1f_1(x) + c_2f_2(x)] &= E(c_1f_1(x + kh) + c_2f_2(x + kh)) \\ &= c_1f_1(x + kh + h) + c_2f_2(x + kh + h) \\ &= c_1f_1(x + h(k + 1)) + c_2f_2(x + h(k + 1)) \\ &= c_1E^{k+1}f_1(x) + c_2E^{k+1}f_2(x). \end{aligned}$$

Lo cual demuestra que se cumple para $n = k + 1$. ■

Teorema 1.3.2. *Sea f y g dos funciones. Entonces*

$$(1.7) \quad \Delta[f \cdot g](x) = Ef(x) \cdot \Delta g(x) + g(x) \cdot \Delta f(x).$$

Demostración. Por el teorema 1.2.1 parte 1 y la definición del operador E se tiene

$$\begin{aligned} \Delta[f \cdot g](x) &= f(x + h) \Delta g(x) + \Delta f(x) g(x + h) \\ &= Ef(x) \Delta g(x) + \Delta f(x) g(x). \end{aligned}$$

Teorema 1.3.3 (Formula para la diferencia del cociente para dos funciones).

Sean f y g dos funciones entonces

$$\Delta \left[\frac{f}{g} \right] (x) = \frac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)Eg(x)} \quad \text{si } g(x)Eg(x) \neq 0.$$

Demostración. Por el teorema 1.2.1 parte 2 y la definición del operador E se tiene

$$\begin{aligned} \Delta \left[\frac{f}{g} \right] (x) &= \frac{\Delta f(x) g(x) - f(x) \Delta g(x)}{g(x) g(x+h)} \\ &= \frac{\Delta f(x) g(x) - f(x) \Delta g(x)}{g(x) Eg(x)}. \end{aligned}$$

■

1.4. La Función Factorial

Una función fundamental para calcular diferencias de polinomios es la factorial que se define continuación.

Definición 1.4.1. La función factorial de orden n ($n = 1, 2, 3, \dots$) es aquella cuyo valor en x esta dado por

$$x^{(n)} = x(x-h)(x-2h) \cdots [x-(n-1)h] \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \text{ y } x^{(0)} = 1$$

Ejemplo 1.4.1.

$$\begin{array}{ll} x^{(1)} = x & (x+h)^{(1)} = x+h \\ x^{(2)} = x(x-h) & (x+h)^{(2)} = (x+h)x \\ x^{(3)} = x(x-h)(x-2h) & (x+h)^{(3)} = (x+h)(x)(x-h) \end{array}$$

De modo que, si $h = 2$,

$$\begin{array}{lll} 3^{(1)} = 3 & 3^{(2)} = 3 \cdot 1 = 3 & 3^{(3)} = 3 \cdot 1 \cdot -1 = -3 \\ 4^{(1)} = 4 & 4^{(2)} = 4 \cdot 2 = 8 & 4^{(3)} = 4 \cdot 2 \cdot 0 = 0 \end{array}$$

Si $h = 1$

$$\begin{array}{l} x^{(1)} = x \\ x^{(2)} = x(x-1) = x^2 - x \\ x^{(3)} = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x \end{array}$$

En el siguiente teorema se estudia la primera diferencia de la función factorial.

Teorema 1.4.1. *Si n es un entero positivo, entonces*

$$\Delta x^{(n)} = nhx^{(n-1)}.$$

Demostración. Para $n \geq 1$

$$\Delta x^{(n)} = (x+h)^{(n)} - x^{(n)}.$$

Teniendo en cuenta

$$\begin{aligned} (x+h)^{(n)} &= (x+h)(x)(x-h) \cdots [x-(n-2)h] = \\ &= (x+h)x^{(n-1)}, \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= x(x-h)(x-2h) \cdots [x-(n-2)h][x-(n-1)h] \\ &= [x-(n-1)h]x^{(n-1)}, \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \Delta x^{(n)} &= (x+h)x^{(n-1)} - [x-(n-1)h]x^{(n-1)} = \\ &= [(x+h) - [x-(n-1)h]]x^{(n-1)} = \\ &= [x+h-x+nh-1h]x^{(n-1)} = \\ &= nhx^{(n-1)}. \end{aligned}$$

■

Puede observarse que excepto por una constante, la primera diferencia de la función factorial es una función factorial de orden menor en una unidad que la función original. Entonces se tiene el siguiente resultado para la diferencia de orden n de la función factorial de orden n .

Teorema 1.4.2. *Si n es un entero positivo, entonces*

$$\Delta^n x^{(n)} = n!h^n$$

Demostración. Por inducción matemática.

Para $n = 1$, $\Delta^1 x^{(1)} = h$.

Suponga que $\Delta^k x^{(k)} = k!h^k$. Entonces

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} x^{(k+1)} &= \Delta^k [\Delta x^{(k+1)}] = \\ &= \Delta^k [(k+1)hx^{(k)}] = \\ &= (k+1)h\Delta^k x^{(k)} = \\ &= (k+1)hk!h^k = \\ &= (k+1)!h^{k+1}. \end{aligned}$$

■

Teorema 1.4.3. sea f un polinomio de grado n , defenida por

$$(1.8) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

con a_0, a_1, \dots, a_n constantes arbitrarias y $a_n \neq 0$. Entonces la n ésima diferencia de f es una función constante y las subsiguientes diferencias son iguales a cero, es decir,

$$(1.9) \quad \Delta^p f(x) = 0 \quad \text{si } p > n.$$

Demostración. Por (1.8)

$$(1.10) \quad \Delta f(x) = a_0\Delta 1 + a_1\Delta x + a_2\Delta x^2 + \cdots + a_n\Delta x^n.$$

Si n es un entero positivo, usando el teorema del binomio obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta x^m &= (c+h)^m - x^m = \\ &= x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}h^2 + \cdots + h^m - x^m = \\ &= mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}h^2 + \cdots + h^m. \end{aligned}$$

Es decir, aplicando Δ a x^m produce un número finito de términos con x^{m-1} como la potencia más alta de x . Usando (1.10) se obtiene una suma de términos. Cada constante multiplicada por una potencia de x y la máxima potencia de x aparece $n-1$. En otras palabras a aplicando Δ a un polinomio de grado n resulta un polinomio de grado $(n-1)$. Por un razonamiento similar $\Delta^2 f$ produce un polinomio de grado $n-2$ y por consiguiente si $p > n$ $\Delta^p f(x) = 0$. ■

Si $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$, f se puede escribir en términos de funciones factoriales.

Ejemplo 1.4.2. Si $n = 1$, $x^{(1)} = x$; si $n = 2$ $x^{(2)} = x(x-h) = x^2 - xh$ y $x^2 = x^{(2)} + x^{(1)}h$. Multiplicando la igualdad precedente por x entonces $x^3 = xx^{(2)} + xx^{(1)}h$.

Como

$$\begin{aligned} x^{(3)} &= x(x-h)(x-2h) = \\ &= x^{(2)}(x-2h) = \\ &= xx^{(2)} - 2hx^{(2)}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} x^3 &= x^{(3)} + 2hx^{(2)} + hx^2 = \\ &= x^{(3)} + 2hx^{(2)} + h[x^{(2)} + x^{(1)}h] = \\ &= x^{(3)} + 3hx^{(2)} + h^2x^{(1)}. \end{aligned}$$

Se observa que x^3 es igual $x^{(3)}$ mas una constante por $x^{(2)}$ mas una constante por $x^{(1)}$. Se probará en el caso general, que existen constantes $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ tales que $x^n = x^{(n)} + A_{n-1}x^{(n-1)} + A_{n-2}x^{(n-2)} + \cdots + A_2x^{(2)} + A_1x^{(1)}$ y por consiguiente x^n se puede expresar en términos de funciones factoriales.

Teorema 1.4.4. Si $n \in \mathbb{N}$ existen constantes $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ tales que

$$x^n = x^{(n)} + A_{n-1}x^{(n-1)} + A_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + A_2x^{(2)} + A_1x^{(1)}.$$

Demostración.

Por inducción.

Si $n = 2$, $x^{(2)} = x(x - h) = x^2 - xh$ entonces $x^2 = x^{(2)} + x^{(1)}h$.

Así $A_1 = h$.

Supónganse que el resultado se cumple para k . Entonces existen constantes $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{k-1}$ tales que

$$x^k = x^{(k)} + A_{k-1}x^{(k-1)} + A_{k-2}x^{(k-2)} + \dots + A_2x^{(2)} + A_1x^{(1)}.$$

Multiplicando la igualdad anterior por x se sigue que

$$xx^k = xx^{(k)} + A_{k-1}xx^{(k-1)} + A_{k-2}xx^{(k-2)} + \dots + A_2xx^{(2)} + A_1xx^{(1)}.$$

Como

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x(x - h)(x - 2h) \cdots (x - (k - 1)h)(x - kh) \\ &= x^{(k)}[x - kh], \end{aligned}$$

entonces

$$xx^{(k)} = x^{(k+1)} - khx^{(k)}, \quad \text{para todo } k = 0, 1, \dots$$

entonces

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^{(k+1)}kx^{(k)} + A_{k-1}[x^{(k)} + (k - 1)hx^{(k-1)}] + A_{k-2}[x^{(k-1)} + (k - 2)x^{(k-2)}] + \dots + \\ &\quad + A_2[x^{(3)} + 2hx^{(2)}] + A_1[x^{(2)} + hx^{(1)}] = \\ &= x^{(k+1)} + x^{(k)}[kh + A_{k-1}] + x^{(k-1)}[A_{k-1}(k - 1)h + A_{k-2}] + x^{(k-2)}[A_{k-2}(k - 2)h + A_{k-3}] + \\ &\quad + \dots + x^{(2)}[A_22h + A_1] + A_1hx^{(1)}. \end{aligned}$$

Claramente se ve que lo que está entre paréntesis son constantes, por lo cual queda demostrado el teorema. ■

Teorema 1.4.5. Si f es un polinomio de grado n , $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ entonces

$$\Delta^n f(x) = n!h^n a_n.$$

Demostración. Tenemos que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ y aplicando la diferencia enésima tenemos

$$\Delta^n f(x) = \Delta^n a_0 + \Delta^n a_1x + \Delta^n a_2x^2 + \dots + \Delta^n a_nx^n.$$

Por el teorema 1.4.3 tenemos que

$$\Delta^n f(x) = \Delta^n a_nx^n,$$

y por el teorema 1.4.2 se tiene que

$$\Delta^n f(x) = \Delta^n a_nx^n = n!h^n a_n. \quad \span style="float: right;">■$$

El siguiente ejemplo que se presenta a continuación es semejante al teorema de Taylor para derivadas.

Ejemplo 1.4.3. Considere $h = 1$ y $f(x) = x^{(n)} + A_{n-1}x^{(n-1)} + A_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + A_2x^{(2)} + A_1x^{(1)} + A_0$.

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= A_1 + 2A_2x^{(1)} + 3A_3x^{(2)} + \dots + nx^{(n-1)} \\ \Delta^2 f(x) &= 2 \cdot 1 \cdot A_2 + 3 \cdot 2A_3x^{(1)} + \dots + n(n-1)x^{(n-2)} \\ \Delta^3 f(x) &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot A_2 + \dots + n(n-1)(n-2)x^{(n-3)} \\ &\vdots \\ \Delta^n f(x) &= n!x^{(0)}.\end{aligned}$$

Si $x = 0$, como $0^{(1)} = 0^{(2)} = \dots = 0^n = 0$ entonces

$$f(0) = A_0, \Delta f(0) = A_1, \Delta^2 f(0) = 2!A_2, \Delta^3 f(0) = 3!A_3, \dots, \Delta^n f(0) = n!,$$

luego

$$(1.11) \quad f(x) = f(0) + \Delta f(0)x^{(1)} + \Delta^2 f(0)\frac{x^{(2)}}{2!} + \Delta^3 f(0)\frac{x^{(3)}}{3!} + \dots + \frac{x^{(n)}}{n!}\Delta^n f(0).$$

También se puede representar en términos de coeficientes binomiales, ya que

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot n}{k!(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n-k)} = \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+2)(n-k+1)}{k!} = \\ &= \frac{x^{(k)}}{k!}.\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$(1.12) \quad f(x) = f(0) + \binom{x}{1}\Delta f(0) + \binom{x}{2}\Delta^2 f(0) + \binom{x}{3}\Delta^3 f(0) + \dots + \binom{x}{n}\Delta^n f(0).$$

Las ecuaciones (1.11) y (1.12) se llaman fórmulas de interpolación de Newton, y se usan para hallar aproximaciones de funciones para cualquier número real.

1.5. Igualdad de los Operadores

La ecuación (1.3) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$(1.13) \quad \Delta f(x) = Ef(x) - If(x).$$

Según esta ecuación se obtiene el mismo resultado al aplicar el operador Δ a cualquier función, como aplicar el operador $(E - I)$. Casos como estos son muy comunes, se introduce una terminología especial para describirlos.

Definición 1.5.1. Dos operadores, O_1 y O_2 , son iguales si tienen un dominio común D y para todo $f \in D$, $O_1f = O_2f$.

Así (1.13) puede escribirse como una equivalencia

$$(1.14) \quad \Delta = E - I$$

De igual manera despejando E se tiene que $E = \Delta + I$. Lo cual es equivalente a

$$Ef(x) = \Delta f(x) + If(x)$$

Teorema 1.5.1. Los operadores Δ y E conmutan, es decir,

$$(1.15) \quad \Delta E = E \Delta.$$

Demostración. Lo que vamos demostrar es que $\Delta Ef(x)$ y $E\Delta f(x)$ son iguales. Entonces

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \Delta(Ef(x)) &= \Delta f(x+h) \\ &= f(x+2h) - f(x+h), \end{aligned}$$

y

$$(1.17) \quad \begin{aligned} (E\Delta)f(x) &= E[\Delta f(x)] = E[f(x+h) - f(x)] \\ &= f(x+2h) - f(x+h). \end{aligned}$$

por (1.16) y (1.17) se tiene lo que se quería demostrar. ■

Teorema 1.5.2. Los operadores Δ y E cumplen la ley de los exponentes, es decir, para n y m enteros no negativos,

$$(1.18) \quad \Delta^m \Delta^n = \Delta^n \Delta^m = \Delta^{m+n},$$

$$(1.19) \quad E^m E^n = E^n E^m = E^{m+n},$$

$$(1.20) \quad \Delta^m E^n = E^n \Delta^m.$$

Demostración. Para demostrar (1.18) se procede por inducción. Para $n = 0$ es verdadero porque

$$\Delta^m \Delta^0 f(x) = \Delta^m [\Delta^0 f(x)] = \Delta^m If(x) = \Delta^m f(x) = I \Delta^m f(x) = \Delta^0 \Delta^m f(x) = \Delta^{m+0} f(x).$$

luego

$$\Delta^m \Delta^0 = \Delta^0 \Delta^m = \Delta^{m+0}.$$

Supongamos que es verdadero para $n = k$ y demostremos para $n = k + 1$.

Si

$$\begin{aligned} \Delta^m \Delta^{k+1} f(x) &= \Delta^m [\Delta^{k+1} f(x)] = \Delta^m \Delta^1 [\Delta^k f(x)] = \Delta^1 \Delta^m [\Delta^k f(x)] = \\ &= \Delta^1 \Delta^k [\Delta^m f(x)] = \Delta^{k+1} [\Delta^m f(x)] = \Delta^{k+1} \Delta^m f(x) \end{aligned}$$

y

$$\Delta^{k+1}[\Delta^m f(x)] = \Delta^1 \Delta^k[\Delta^m f(x)] = \Delta^1[\Delta^{m+k} f(x)] = \Delta^{m+k+1} f(x) = \Delta^{m+(k+1)} f(x)$$

Por transitividad se concluye que

$$(1.21) \quad \Delta^m \Delta^{k+1} f(x) = \Delta^{k+1} \Delta^m f(x) = \Delta^{m+(k+1)} f(x).$$

Ahora para demostrar (1.19) utilizaremos el lema 1.3.1

$$(1.22) \quad E^m(E^n f(x)) = E^m f(x + nh) = f(x + nh + mh) = f(x + mh + nh),$$

y

$$(1.23) \quad (E^n E^m) f(x) = E^n(E^m f(x)) = E^n f(x + mh) = f(x + mh + nh).$$

Por (1.22) y (1.23) se obtiene

$$(1.24) \quad (E^m E^n) f(x) = (E^n E^m) f(x).$$

De la Ecuación (1.23) se tiene que

$$(1.25) \quad (E^n E^m) f(x) = E^{m+n} f(x).$$

Haciendo transitividad en (1.24) y (1.25) se cumple lo pedido.

Para demostrar (1.20), Apliquemos inducción sobre $n = 0$. Para $n = 0$ es verdadero porque

$$(1.26) \quad E^m \Delta^0 f(x) = E^m \Delta I f(x) = E^m \Delta f(x),$$

$$(1.27) \quad \Delta^0 E^m = \Delta^0 f(x + hm) = I f(x + hm) = f(x + hm).$$

luego por (1.26) y (1.27) se tiene $E^m \Delta^0 = \Delta^0 E^m$.

Asumamos que

$$(E^m \Delta^k) f(x) = (\Delta^k E^m) f(x).$$

Aplicando el operador Δ , se tiene

$$\begin{aligned} \Delta E^m [\Delta^k f(x)] &= \Delta \Delta^k [E^m f(x)], \\ E^m \Delta [\Delta^k f(x)] &= \Delta \Delta^k [E^m f(x)], \\ (E^m \Delta^{k+1}) f(x) &= (\Delta^{k+1} E^m) f(x). \end{aligned}$$

Entonces se cumple para todo $n \geq 0$, luego

$$E^m \Delta^n = \Delta^n E^m.$$

■

A continuación presentaremos un resultado que nos permite escribir las diferencias en términos del operador E y viceversa, es decir, como una combinación lineal de E ó como de Δ .

Teorema 1.5.3. Si n es un entero positivo, entonces

$$i.) \Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k f(x).$$

$$ii.) E^n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k f(x).$$

Demostración. i.) Sea $f(x)$ cualquiera función. Entonces la primera diferencia $f(x)$ es $\Delta f(x) = Ef(x) - If(x)$. Por por Definición 1.5.1 son equivalente, es decir

$$\Delta \equiv (E - I).$$

Así, para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\Delta^n \equiv (E - I)^n.$$

Aplicando el Teorema del binomio obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta^n &\equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1 \cdot I)^{n-k} E^k \equiv \\ &\equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k I^{n-k}. \end{aligned}$$

Pero $E^k I^{n-k} \equiv E^k$, por lo tanto

$$\Delta^n \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k.$$

Entonces

$$\Delta^n f(x) \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k f(x).$$

ii.) De igual forma como se hizo en lo anterior

$$E^n \equiv (\Delta + I)^n.$$

Aplicando el Teorema del binomio a lo anterior se obtiene

$$E^n \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k I^{n-k}.$$

Pero $\Delta^k I^{n-k} = \Delta^k$, por lo tanto

$$E^n \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k.$$

Entonces

$$E^n f(x) \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k f(x).$$

■

A continuación presentamos algunos ejemplos de aplicación del anterior teorema

Ejemplo 1.5.1. Sea $y(x) = c^x$, mostrar que

$$(1.28) \quad \Delta^n c^x = c^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} c^{kh},$$

con paso fijo o incremento h .

Aplicando el Teorema 1.5.3 parte i) a $\Delta^n c^x$ obtenemos que

$$(1.29) \quad \Delta^n c^x = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k c^x.$$

Por el Lema 1.3.1 se tiene que

$$(1.30) \quad E^k c^x = c^{x+hk} = c^x c^{kh}.$$

Reemplazando (1.30) en (1.29) se tiene que

$$(1.31) \quad \Delta^n c^x = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} c^x c^{kh}.$$

Aplicando la propiedad homogénea de la sumatoria a (1.31) se obtiene que

$$\Delta^n c^x = c^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} c^{kh}.$$

Ejemplo 1.5.2. Sea la función $y(x) = x^m$ con $m \in \mathbb{N}$. Vamos derivar la siguiente formula

$$\Delta^n x^m = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (x + kh)^m,$$

con incremento h .

Aplicando el Teorema 1.5.3 parte i) a $\Delta^n x^m$ obtenemos que

$$(1.32) \quad \Delta^n x^m = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k x^m,$$

por el Lema 1.3.1 se tiene que

$$(1.33) \quad E^k x^m = (x + kh)^m.$$

Reemplazando (1.33) en (1.32) se obtiene que

$$\Delta^n x^m = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (x + kh)^m.$$

El Teorema 1.5.3 puede ser usado para desarrollar problemas de interpolación.

Ejemplo 1.5.3. Supongamos que se tiene la siguiente información referente a la función $y(x)$:

1. Es un polinomio de grado 3.
2. $y(0) = -4$, $y(1) = -6$, $y(3) = -4$.
3. Paso $h = 1$.

Estimar el valor de $y(4)$.

Usando la información del punto 2 podemos construir la siguiente tabla.

x	$y(x)$	$\Delta y(x)$	$\Delta^2 y(x)$	$\Delta^3 y(x)$
0	-4	-2	0	6
1	-6	-2	6	
2	-8	4		
3	-4			
4	?			

Por el Lema 1.3.1 Tenemos que

$$E^k[y(x)] = y(x + hk).$$

Tomando $x = 0$, $k = 4$ y aplicando el Teorema 1.5.3 se obtiene que

$$\begin{aligned} E^4[y(0)] = y(4) &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \Delta^k y(0) = \\ &= y(0) + 4\Delta y(0) + 6\Delta^2 y(0) + 4\Delta^3 y(0) + \Delta^4 y(0). \end{aligned}$$

Como $y(x)$ es un polinomio de grado 3 entonces $\Delta^4 y(x) = 0$.

Luego

$$y(4) = -4 + 4(-2) + 6(0) + 4(6) + 0 = 12.$$

1.6. Suma Indefinida: El Operador Δ^{-1}

En esta sección se trata de introducir el operador de suma indefinida que puede entenderse como el operador inverso al de la primera diferencia.

El nombre de suma indefinida puede intuirse de la siguiente observación donde se asume que las funciones consideradas son de variable entera no negativa. Si f es una función cuyo valor en n es $f(n)$, si la función $F(n) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$. Tomando como paso $h = 1$,

$$\begin{aligned} \Delta F(n) &= F(n+1) - F(n) = \\ &= \sum_{k=1}^n f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \\ &= f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \\ &= f(n) + 0 = f(n). \end{aligned}$$

Puede notarse entonces, que dada la función f , F es una función cuya primera diferencia es la función f . Escribiendo $F(n) = \Delta^{-1}f(n)$, se tiene entonces que $\Delta(\Delta^{-1}f(n)) = f(n)$. El comentario precedente induce la siguiente definición.

Definición 1.6.1. *Dada la función f , una función F cuya primera diferencia es f , será llamada suma indefinida de f , y se denotará por $F = \Delta^{-1}f$.*

En otros términos si F y f son funciones tales que $\Delta F(x) = f(x)$, F se llama suma de f , o equivalentemente una suma de f es una solución de la ecuación $\Delta F(x) = f(x)$.

El problema de encontrar una suma indefinida de f es el problema inverso de encontrar la primera diferencia de F . Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6.1. *Una suma indefinida de la función f definida por $f(x) = 3$, es la función F definida por $F(x) = x + 4$, ya que considerando como paso $h = 3$ se tiene que*

$$\begin{aligned}\Delta F(x) &= F(x+3) - F(x) = (x+3) + 4 - (x+4) \\ &= x+3+4-x-4 = 3.\end{aligned}$$

Otra suma indefinida para la misma función es la definida por $F(x) = x + c$, ya que tomando como paso $h = 3$, se tiene que

$$\begin{aligned}\Delta F(x) &= F(x+3) - F(x) = (x+3) + c - (x+c) \\ &= x+3+c-x-c = 3.\end{aligned}$$

De lo anterior se puede observar, que si se consideran diferencias con un paso fijo h , una suma indefinida de la función constante definida por $f(x) = h$, es la función F definida por $F(x) = x$ y de manera más general una suma indefinida para f , es la función definida por $F(x) = x + c$ donde c es un número real.

Ejemplo 1.6.2. *Probemos que $\Delta^{-1}x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{h(n+1)} + C$, con paso $h \neq 0$.*

Como $\Delta x^{(2)} = 2hx^{(1)}$ dividiendo por $2h$ se tiene $\frac{\Delta x^{(2)}}{2h} = x^{(1)}$, lo cual implica que

$$\Delta^{-1}x^{(1)} = \frac{x^{(2)}}{2h} + C.$$

De igual forma

$$\frac{\Delta x^{(3)}}{3h} = x^{(2)} \quad \text{entonces} \quad \Delta^{-1}x^{(2)} = \frac{x^{(3)}}{3h} + C.$$

De forma general tenemos

$$\Delta^{-1}x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{h(n+1)} + C.$$

Ejemplo 1.6.3. *Hallemos que $\Delta^{-1}2^x = \frac{2^x}{2^h-1} + 4$, con paso fijo $h \in \mathbb{R}$.*

Como

$$\Delta 2^x = 2^{x+h} - 2^x = 2^x(2^h - 1).$$

Entonces

$$\frac{1}{(2^h - 1)} \Delta 2^x = 2^x.$$

Por consiguiente

$$\Delta^{-1} 2^x = \frac{2^x}{(2^h - 1)} + C.$$

Donde C es una constante cualesquiera, para este caso se toma $C = 4$.

Luego

$$\Delta^{-1} 2^x = \frac{2^x}{(2^h - 1)} + 4.$$

Cuando f es una sucesión y se toma como paso $h = 1$ se tendrá que una suma indefinida de f también es la función F definida por $F(n) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + c$, donde c es una constante real.

De una manera más amplia, si q es una función periódica de periodo h , se tiene que $\Delta q(x) = 0$ y entonces una suma indefinida para la función f definida por $f(x) = h$, es la función definida por $F(x) = x + q(x)$. Se puede concluir entonces que si F es una suma indefinida para una función f entonces para toda función periódica q de periodo h , $G(x) = F(x) + q(x)$ define una suma indefinida de f . Obsérvese de otro lado que dada una función g y considerando un paso fijo h , si $\Delta g(x) = 0$, entonces $g(x+h) - g(x) = 0$ y por lo cual g es una función periódica de periodo h . En consecuencia si se tienen dos sumas indefinidas para la misma función su diferencia será una función periódica de periodo h . Los comentarios precedente permiten formular el siguiente teorema.

Teorema 1.6.1. Sean F_1 y F_2 sumas indefinidas de una función f con el mismo periodo h , entonces su diferencia ($F_1 - F_2$) es una función con periodo h ,

Demostración. Si F_1 y F_2 son sumas indefinidas de f , $\Delta F_1(x) = f(x)$ y $\Delta F_2(x) = f(x)$. De aquí

$$\Delta F_1(x) - \Delta F_2(x) = \Delta[F_1(x) - F_2(x)] = 0.$$

Por el comentario mencionado $F_1 - F_2$ es periódica de periodo h . ■

Este teorema nos lleva concluir que en general $\Delta^{-1} \Delta \neq \Delta \Delta^{-1}$.

Si F es una suma indefinida de f , entonces $\Delta F = f$. De un lado $\Delta^{-1}[\Delta F(x)] = F(x) + c$ es una función cuya diferencia es $\Delta F(x)$. $\Delta[\Delta^{-1} F(x)] = F(x)$ ya que $\Delta^{-1} F(x)$ es una función cuya diferencia es F . De esta forma:

$$\Delta^{-1}[\Delta F(x)] - \Delta[\Delta^{-1} F(x)] = c \quad \text{y} \quad \Delta^{-1} \Delta \neq \Delta \Delta^{-1}.$$

El operador de suma indefinida también cumple la propiedad de linealidad, la cual se demuestra a continuación.

Teorema 1.6.2. Si F_1 y F_2 son sumas indefinidas de f_1 y f_2 respectivamente con el mismo paso, y si c_1 y c_2 son constante arbitrarias, entonces $c_1 F_1 + c_2 F_2$ es una suma indefinida de la función $c_1 f_1 + c_2 f_2$, es decir,

$$(1.34) \quad \Delta^{-1}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \Delta^{-1} F_1 + c_2 \Delta^{-1} F_2.$$

Demostración. Tenemos que $\Delta F_1 = f_1$ y $\Delta F_2 = f_2$. Debemos demostrar que la diferencia de $c_1 F_1 + c_2 F_2$ es igual $c_1 f_1 + c_2 f_2$. Usando (1.2) se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta(c_1 F_1 + c_2 F_2) &= c_1 \Delta F_1 + c_2 \Delta F_2 \\ &= c_1 f_1 + c_2 f_2.\end{aligned}$$

Esto muestra claramente que $c_1 F_1 + c_2 F_2$ es una función cuya diferencia es $c_1 f_1 + c_2 f_2$ y por consiguiente:

$$\Delta^{-1}[c_1 F_1 + c_2 F_2] = c_1 f_1 + c_2 f_2.$$

■

Ejemplo 1.6.4. *Hallemos*

$$\Delta^{-1}[x^3 - x^2 - x + 1].$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}x^2 &= x^{(2)} + hx^{(1)}, \\ x^3 &= x^{(3)} + 3hx^{(2)} + h^2x^{(1)}.\end{aligned}$$

Pasando $x^3 - x^2 - x + 1$ a funciones factoriales obtenemos

$$x^{(3)} + (3h - 1)x^{(2)} + (h^2 - h - 1)x^{(1)} + x^{(0)},$$

entonces aplicando la suma indefinida y el Teorema 1.6.2 se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}[x^{(3)} + (3h - 1)x^{(2)} + (h^2 - h - 1)x^{(1)} + x^{(0)}] &= \Delta^{-1}x^{(3)} + (3h - 1)\Delta^{-1}x^{(2)} + \\ &+ (h^2 - h - 1)\Delta^{-1}x^{(1)} + \Delta^{-1}x^{(0)} = \\ &= \frac{x^{(4)}}{4h} + C_1 + (3h - 1)\frac{x^{(3)}}{3h} + C_2 + (h^2 - h - 1)\frac{x^{(2)}}{2h} + C_3 + \frac{x^{(1)}}{h} + C_4 = \\ &= \frac{x^{(4)}}{4h} + (3h - 1)\frac{x^{(3)}}{3h} + (h^2 - h - 1)\frac{x^{(2)}}{2h} + \frac{x^{(1)}}{h} + C_1 + C_2 + C_3 + C_4,\end{aligned}$$

haciendo $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ siguen siendo constantes.

Luego

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}[x^{(3)} + (3h - 1)x^{(2)} + (h^2 - h - 1)x^{(1)} + x^{(0)}] &= \frac{x^{(4)}}{4h} + (3h - 1)\frac{x^{(3)}}{3h} + \\ &+ (h^2 - h - 1)\frac{x^{(2)}}{2h} + \frac{x^{(1)}}{h} + C.\end{aligned}$$

La formula (1.34) puede ser extendida a una combinación lineal de n funciones, es decir,

$$(1.35) \quad \Delta^{-1} \sum_{k=1}^n c_k f_k = \sum_{k=1}^n c_k \Delta^{-1} f_k,$$

la cual se puede demostrar por inducción.

Observación 2. Análogamente a la Observación, ¿qué condiciones debe tener $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ para que se cumpla la siguiente igualdad $\sum_{i=1}^{\infty} \Delta^{-1} f_i(x) = \Delta^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$?

Teorema 1.6.3. Si F es una suma indefinida para F . Entonces

$$\Delta^{-1} f(x+a) = F(x+a) + C, \quad \text{para alguna constante } C$$

Demostración. Por hipótesis tenemos que $\Delta F(z) = f(z)$ y haciendo $z = x+a$.

$$\Delta[F(z) + C] = \Delta F(z) + \Delta C = f(z) + 0 = f(z).$$

Aplicando la definición de suma indefinida obtenemos

$$\Delta^{-1} f(z) = F(z) + C,$$

luego

$$\Delta^{-1} f(x+a) = F(x+a) + C. \quad \blacksquare$$

En el siguiente teorema se estudia la suma indefinida de un producto, la cual conduce a la llamada sumación por partes.

Teorema 1.6.4 (Sumación por partes). Sea u y v dos funciones, entonces

$$\Delta^{-1}[v(x) \cdot \Delta u(x)] = u(x)v(x) - \Delta^{-1}[Eu(x) \cdot \Delta v(x)].$$

Demostración. Como por Teorema 1.2.1 parte 1

$$\Delta[u(x) \cdot v(x)] = Eu(x) \cdot \Delta v(x) + v(x) \cdot \Delta u(x).$$

Aplicando la definición de suma indefinida se obtiene que

$$\Delta^{-1}[Eu(x) \cdot \Delta v(x) + v(x) \cdot \Delta u(x)] = u(x) \cdot v(x)$$

y por el teorema 1.6.2 se concluye que

$$\Delta^{-1}[Eu(x) \cdot \Delta v(x)] + \Delta^{-1}[v(x) \cdot \Delta u(x)] = u(x) \cdot v(x).$$

Despejando

$$\Delta^{-1}[v(x) \cdot \Delta u(x)] = u(x) \cdot v(x) + \Delta^{-1}[Eu(x) \cdot \Delta v(x)]. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 1.6.5. Por medio de la sumación por partes vamos mostrar lo siguiente:

$$\Delta^{-1}[x2^x] = \frac{x2^x}{2^k - 1} - \frac{h2^{x+h}}{(2^h - 1)^2} + p(x),$$

con paso fijo $h \in \mathbb{R}$.

Sean $v(x) = x$, $\Delta u(x) = 2^x$. Antes de aplicar de teorema de sumación por partes, calculemos

$\Delta^{-1}c^x$.

Sea

$$\Delta c^x = c^{x+h} - c^x = c^x(c^h - 1).$$

Entonces

$$c^x = \frac{\Delta c^x}{c^h - 1} = \Delta \left[\frac{c^x}{c^h - 1} \right].$$

Por consiguiente

$$(1.36) \quad \Delta^{-1}c^x = \frac{c^x}{c^h - 1} + C.$$

Reemplazando $c = 2$ en (1.36) se obtiene

$$\Delta^{-1}2^x = \frac{2^x}{2^h - 1} + C.$$

Como $\Delta u(x) = 2^x$ entonces $\Delta^{-1}2^x = u(x) = \frac{2^x}{2^h - 1}$. Entonces aplicando teorema 1.6.3

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[x2^x] &= \frac{x2^x}{2^h - 1} - \Delta^{-1} \left[\frac{h2^{x+h}}{2^h - 1} \right] + C = \\ &= \frac{x2^x}{2^h - 1} - \frac{h}{(2^h - 1)} \Delta^{-1}[2^{x+h}] + C = \\ &= \frac{x2^x}{2^h - 1} - \frac{h}{(2^h - 1)} \cdot \frac{2^{x+h}}{(2^h - 1)} + C = \\ &= \frac{x2^x}{2^h - 1} - \frac{h2^{x+h}}{(2^h - 1)^2} + C. \end{aligned}$$

Teorema 1.6.5 (Suma de series finitas). Sea f una función con dominio en los enteros positivos y sea F cualquier suma indefinida de f . Entonces

$$\sum_{k=1}^n f(k) = F(n+1) - F(1).$$

Demostración. Como f tiene dominio en los naturales tenemos paso $h = 1$.

Por hipótesis tenemos que $\Delta F(k) = f(k)$. Entonces

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n \Delta F(k) = \sum_{k=1}^n F(k+1) - F(k),$$

utilizando la propiedad telescópica en la expresión anterior, se obtiene que

$$\sum_{k=1}^n f(k) = F(n+1) - F(1).$$

■

Ejemplo 1.6.6. Aplicando el Teorema anterior vamos obtener las siguientes formulas:

1. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\sum_{k=1}^n ar^{k-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r} \quad (r \neq 1)$.
3. $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$.

Tomando $h = 1$

1. Sea $\Delta F(k) = f(k) = k$, entonces

$$\Delta^{-1}k = \Delta^{-1}k^{(1)} = \frac{k^{(2)}}{2h} = Y(k) = \frac{k(k-1)}{2h}.$$

Aplicando el teorema 1.6.5 (suma de series finitas) se obtiene

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} - 0 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Sea $\Delta Y(k) = y(k) = ar^{k-1}$ entonces

$$\Delta^{-1}ar^{k-1} = \frac{ar^{k-1}}{r^h - 1} = Y(k).$$

Luego

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n ar^{k-1} &= \sum_{k=1}^n \frac{ar^{k-1}}{r-1} = \frac{ar^{n+1-1}}{r-1} - \frac{ar^{1-1}}{r-1} = \\ &= \frac{ar^n}{r-1} - \frac{a}{r-1} = -\frac{ar^n}{1-r} + \frac{a}{1-r} = \\ &= \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} = \frac{a - ar^n}{1-r}. \end{aligned}$$

3. Sea $\Delta Y(k) = y(k) = 2k - 1 = 2k^{(1)} - k^{(0)}$ entonces

$$\Delta^{-1}[2k^{(1)} - k^{(0)}] = \frac{2k^{(2)}}{2} - k^{(1)} = k^{(2)} - k^{(1)} = k(k-1) - k = k^2 - k - k = k^2 - 2k = Y(x),$$

entonces

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = k^2 - 2k = [(n+1)^2 - 2(n+1)] - [1 - 2] = n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 1 = n^2.$$

Luego

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2.$$

1.6.1. Aplicación al Cálculo Integral

Existe en el cálculo integral situaciones donde es imposible hallar el valor exacto de una integral, ya que es necesario conocer una antiderivada de la función. Sin embargo, a veces es difícil o imposible, hallar estas antiderivadas.

Por ejemplo evaluar con exactitud las siguientes integrales

$$\int_0^1 e^{x^2} dx, \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3} dx.$$

Supongamos que queremos hallar la $\int_a^b f(x)dx$. Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ y sea $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$ puntos intermedios del intervalo, Podemos escribir la siguiente aproximación discreta de nuestra integral

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i.$$

Aplicando el Teorema Suma de series finitas obtenemos

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta^{-1} f(x_n)\Delta x_n$$

En ocasiones es difícil de calcular suma indefinida de una función, una forma de evitar esto, es sustituir la función f por otra función g que la aproxime y la cual facilite los cálculos.

Por ejemplo, conocido el desarrollo de la serie de Taylor $e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, como la serie converge uniformemente, se deduce que:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{2k}}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)k!} \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)k!}$$

donde se puede hallar una aproximación hasta término n ésimo por medio del operador suma indefinida, ahora:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \Delta^{-1} \left(\frac{1}{(2n+1)n!} \right).$$

Se puede observar que este operador suma indefinida es difícil de calcular.

Considerando desarrollo de Taylor de función $\frac{1}{x-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, se deduce que

$$\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx = \int_1^2 \sum_{k=0}^{\infty} x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_1^2 x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1} - 1}{k+1}.$$

Tomando suma de los primeros n términos, tenemos: tenemos

$$\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx \approx \Delta^{-1} \left(\frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \right).$$

Lo cual es una suma indefinida fácil de calcular.

Para el cálculo diferencial, en Ejemplo 2.1.3 se hará una relación entre el operador diferencial y diferencia.

CAPÍTULO 2

ECUACIÓN LINEAL EN DIFERENCIAS DE PRIMER ORDEN.

2.1. Introducción

Se comienza el estudio de las ecuaciones en diferencias con el análisis detallado de un tipo especial de ecuación, llamado ecuación lineal en diferencias de primer orden. Expondremos algunos ejemplos iniciales que permitirán ilustrar qué es una ecuación en diferencias de primer orden y cómo una ecuación de este tipo puede originarse.

Ejemplo 2.1.1. *Este ejemplo está relacionado con el llamado interés simple e interés compuesto. Una cierta cantidad de dinero gana interés simple a una tasa de interés i en un periodo determinado, cuando el capital obtenido en un periodo dado, es igual al capital en el periodo anterior, más el interés ganado durante el periodo por el capital inicial invertido. Si el capital inicial se denota por C , y el capital en el periodo k se denota por C_k , entonces $C_{k+1} = C_k + iC$, $k = 0, 1, \dots$, donde $C_0 = C$.*

El interés compuesto es obtenido cuando los intereses son agregados al capital. Si i representa la rata o tasa de interés por periodo de conversión (por ejemplo si se tiene una tasa anual del 8% capitalizable semestralmente $i = 0,04$, si la capitalización se hace trimestralmente $i = 0,02$ etc) entonces el capital C_{k+1} , acumulado en el periodo $k+1$ de conversión es igual al capital C_k obtenido en el periodo k más iC_k . Entonces $C_{k+1} = C_k + iC_k$, $k = 0, 1, \dots$, donde $C_0 = C$.

Las ecuaciones $C_{k+1} = C_k + iC$, y $C_{k+1} = C_k + iC_k$, donde $k = 0, 1, 2, \dots$ son ejemplos de ecuaciones en diferencias de primer orden.

Ejemplo 2.1.2. *En este ejemplo se muestra la relación entre la ecuaciones en diferencia de primer orden y las series de potencias. Considerando la función f definida por $\frac{e^x}{1-x}$, esta*

función tiene una expansión en series de potencias por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, la cual es absolutamente convergente en el intervalo $(-1, 1)$.

Al multiplicar por $1 - x$ se obtiene

$$\begin{aligned} e^x &= (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

De aquí se concluye que

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n!} \quad n = 1, 2, \dots \text{ y } a_0 = 1.$$

La ecuación $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n!}$ es una ecuación en diferencias de primer orden.

Ejemplo 2.1.3. En este ejemplo se muestra la relación cercana entre el operador de diferencia finita y el operador derivada, no es sorprendente que se puedan establecer conexiones entre ecuaciones en diferencias y ecuaciones diferenciales. Este ejemplo muestra esta situación.

Considere la ecuación diferencial

$$(2.1) \quad \frac{dy(x)}{dx} = Ay(x) + B, \text{ para } a \leq x \leq b,$$

A y B son constantes con $A \neq 0$. Si $y(a) = y_0$, resolver el problema de valor inicial implica encontrar una función derivable que en $x_0 = a$ tenga el valor presente y_0 .

Para pasar de una ecuación (2.1) a una ecuación en diferencias se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, considerando el paso $h = \frac{b-a}{n}$. Esto produce $(n+1)$ partes $x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh = b$, encontrando $y_k = y(x_k) = y(x_0 + kh)$.

Recordando que

$$\frac{dy(x)}{dx} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{\alpha},$$

parece razonable reemplazar la ecuación (2.1) por

$$\frac{\Delta y_k}{h} = Ay_k + B, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

o

$$y_{k+1} - y_k = Ah y_k + Bh.$$

Despejando y_{k+1} , se tiene que

$$y_{k+1} = (1 + hA)y_k + Bh \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{con } y_0 = y(a).$$

La ecuación $y_{k+1} = (1 + hA)y_k + Bh$ es una ecuación lineal en diferencia de primer orden con coeficientes constantes.

Después de haber estudiado los ejemplos anteriores formularemos a continuación la definición de una ecuación en diferencia de primer orden.

Definición 2.1.1. Una ecuación en diferencias de la forma

$$(2.2) \quad y_{k+1} + a(k)y_k = b(k),$$

donde a y b son funciones definidas sobre un conjunto S , se llama ecuación lineal en diferencias de primer orden, sobre el conjunto S .

Definición 2.1.2. Cuando en (2.2), $b(k)$ es la función nula la ecuación llama ecuación homogénea.

Ejemplo 2.1.4. Ahora retomemos los ejemplos anteriores y miremos cuales de ellas son ecuaciones lineales de primer orden, según la definición:

1. La relacionada con interés simple, llevada a la forma de la ecuación (2.2) es

$$C_{k+1} - C_k = iC \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde $a(k) = -1$ y $b(k) = iC$, por lo tanto es una ecuación lineal y no homogénea ya que $b(k) \neq 0$.

2. La relacionada con el interés compuesto, llevada a la forma de la ecuación (2.2), conduce a

$$C_{k+1} - (i + 1)C_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde $a(k) = -(i + 1)$ y $b(k) = 0$, por lo tanto es una ecuación lineal homogénea, ya que $b(k) = 0$.

3. En el Ejemplo 2.1.2, la ecuación se puede llevar a la forma de la ecuación (2.2) obteniendo

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Donde $a(k) = -1$ y $b(k) = \frac{1}{n!}$, lo cual es una ecuación lineal no homogénea, ya que $b(k) \neq 0$.

4. En el Ejemplo 2.1.3, la ecuación se puede llevar a la forma de la ecuación (2.2), obteniendo lo siguiente:

$$y_{k+1} - (a + hA)y_k = B.$$

Donde $a(k) = (a + hA)$ y $b(k) = B$, lo cual es una ecuación no homogénea, ya que $b(k) \neq 0$.

2.2. Solución de una Ecuación Lineal en Diferencia de Primer Orden

Ya definimos qué es una ecuación lineal en diferencias de primer orden y algunos situaciones donde se pueden presentar este tipo de ecuaciones, ahora vamos a mirar como se comportan y cual es su solución general.

La idea de solución para una ecuación en diferencias sobre un conjunto de S es básicamente la misma que se tiene para una ecuación algebraica, o para una ecuación diferencial como se puede ver en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.2.1. *Tomemos la ecuación en diferencias*

$$y_{k+1} - 2y_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Claramente podemos ver que es una ecuación lineal homogénea. Probemos que al reemplazar $y_k = 2^k$ $k = 0, 1, 2, \dots$, en la ecuación se obtiene una identidad.

$$\begin{aligned} y_{k+1} - 2y_k &= 2^{k+1} - 2(2^k) \\ &= 2^{k+1} - 2^{k+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se dice que la función y definida por $y_k = y(k) = 2^k$ es una solución. También podemos tomar $y_k = 3 \cdot 2^k$ $k = 0, 1, 2, \dots$, y reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} y_{k+1} - 2y_k &= 3 \cdot 2^{k+1} - 2(3 \cdot 2^k) \\ &= 3 \cdot 2^{k+1} - 3 \cdot 2^{k+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

En general se puede verificar que $y_k = C2^k$ $k = 0, 1, 2, \dots$, con $C \in \mathbb{R}$, es una solución y que para C_1, C_2 en \mathbb{R}

$$y_k = C_1 2^k + C_2 2^k,$$

define una solución.

$$\begin{aligned} y_{k+1} - 2y_k &= (C_1 2^{k+1} + C_2 2^{k+1}) - 2(C_1 2^k + C_2 2^k) \\ &= (C_1 2^{k+1} + C_2 2^{k+1}) - (C_1 2^{k+1} + C_2 2^{k+1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lo anterior nos muestra que una ecuación en diferencias puede tener muchas soluciones sobre un conjunto específico de valores.

Ejemplo 2.2.2. *Miremos que la ecuación*

$$(2.3) \quad y_k = \frac{C}{1 + Ck} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

es una solución de la ecuación

$$(2.4) \quad y_{k+1} = \frac{y_k}{1 + y_k}.$$

De la ecuación (2.3) obtenemos

$$y_{k+1} = \frac{C}{1 + C(k+1)}.$$

Ahora reemplazando la ecuación (2.3) en (2.4) tenemos

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 + y_k} = \frac{\frac{C}{1 + Ck}}{1 + \frac{C}{1 + Ck}} = \frac{\frac{C}{1 + Ck}}{\frac{1 + C(k+1)}{1 + Ck}} = \frac{C}{1 + C(k+1)}.$$

Luego hace verdadera la igualdad.

Tomando estos ejemplos como soporte podemos definir a continuación qué es una solución de una ecuación en diferencias finitas.

Definición 2.2.1. Una función f es una solución de la ecuación en diferencia

$$y_{k+1} = a(k)y_k + b(k)$$

en un conjunto S si

$$f_{k+1} = a(k)f_k + b(k), \quad \text{para todo } k \in S.$$

Ejemplo 2.2.3. La función y dada por

$$(2.5) \quad y_k = 1 - \frac{2}{k} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

es una solución de la ecuación diferencias de primer orden

$$(2.6) \quad (k+1)y_{k+1} + ky_k = 2k - 3 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Para probar lo anterior se sustituyen los valores y en (2.6) para todo entero positivo k . De (2.5) nosotros tenemos

$$(2.7) \quad y_{k+1} = 1 - \frac{2}{k+1}.$$

Reemplazando (2.5) y (2.7) en (2.6) se obtiene

$$(k+1) \left(1 - \frac{2}{k+1}\right) + k \left(1 - \frac{2}{k}\right) = 2k - 3,$$

simplificando al lado izquierdo tenemos

$$(k+1) - 2 + k - 2 = 2k - 3.$$

Lo cual implica y_k satisface la ecuación en diferencia (2.6).

Ejemplo 2.2.4. La función y dada por la

$$(2.8) \quad y_k = \frac{k(k-1)}{2} + C,$$

donde C es cualquier constante arbitraria, es solución de la ecuación en diferencias de primer orden

$$(2.9) \quad y_{k+1} - y_k = k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Para probar lo anterior se sustituye los valores y en (2.9). De (2.8) se conoce que

$$(2.10) \quad y_{k+1} = \frac{k(k+1)}{2} + C.$$

Reemplazando (2.8) y (2.10) en (2.9) se obtiene

$$\frac{k(k+1)}{2} + C - \left(\frac{k(k-1)}{2} + C \right) = \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + C - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} - C = k,$$

Simplificando el lado izquierdo se tiene

$$\frac{k^2 + k - k^2 + k}{2} + C - C = \frac{2k}{2} = k,$$

lo cual demuestra que y es solución de la ecuación en diferencias (2.9).

En la sección siguiente se estudia la ecuación homogénea, la cual es fundamental a la hora obtener soluciones para la ecuación no homogénea.

2.3. Propiedades de la Ecuación Homogénea

Denotaremos \mathbb{R}^∞ como el conjunto de todas las sucesiones reales, el cual es un espacio vectorial bajo las operaciones naturales de suma de sucesiones y multiplicaciones de escalares reales. A continuación vamos demostrar que el conjunto solución ℓ_s de la ecuación homogénea es un subespacio \mathbb{R}^∞ .

Teorema 2.3.1. *El conjunto solución de la ecuación lineal homogénea en diferencias de primer orden es un subespacio del espacio vectorial \mathbb{R}^∞ .*

Demostración.

Se va demostrar que si $u, v \in \ell_s$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $(u+v) \in \ell_s$ y $(\alpha u) \in \ell_s$.

i) Como $u, v \in \ell_s$,

$$u_{k+1} - a(k)u_k = 0 \quad \text{y} \quad v_{k+1} - a(k)v_k = 0.$$

Sumando las dos igualdades tenemos

$$(u_{k+1} + v_{k+1}) - a(k)(u_k + v_k) = 0,$$

lo cual nos dice que $u+v$ también es un elemento de ℓ_s .

ii) Como $u \in \ell_s$ entonces

$$u_{k+1} - a(k)u_k = 0,$$

multiplicando la igualdad anterior por α se tiene

$$\alpha[u_{k+1} - a(k)u_k] = \alpha u_{k+1} - a(k)\alpha u_k = 0 \cdot \alpha = 0,$$

lo cual implica que αu pertenece ℓ_s .

Por i) y ii) se obtiene que ℓ_s es subespacio de \mathbb{R}^∞ . ■

Como consecuencia del teorema anterior se cumple el siguiente principio de superposición

Corolario 2.3.1. *Si u y v son dos soluciones de la ecuación*

$$y_{k+1} = a(k)y_k$$

y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, entonces $c_1u + c_2v$ también es solución.

Teorema 2.3.2 (Existencia y unicidad). *Dada la ecuación lineal homogénea en diferencia de primer orden*

$$(2.11) \quad y_{k+1} = a(k)y_k \text{ con } a(k) \neq 0 \text{ para todo } k$$

y la constante m_0 , existe una única solución, f con la condición $f(0) = m_0$.

Demostración.

Se observa que una solución f debe satisfacer $f(1) = a(0)f(0)$, $f(2) = a(1)f(1) = a(1)a(0)f(0)$; $f(3) = a(2)f(2) = a(2)a(1)a(0)f(0)$. Esto nos lleva a proponer y demostrar que la función definida por*

$$f(k) = f(0) \prod_{j=0}^{k-1} a(j), \quad k = 1, 2, \dots$$

es una solución. En efecto:

$$f(k+1) = f(0) \prod_{j=0}^k a(j) = \left[f(0) \prod_{j=0}^{k-1} a(j) \right] a(k) = a(k)f(k).$$

*Para tener bien definida la expresión siguiente en $k = 0$ hay que suponer

$$\prod_{j=0}^{-1} a(j) = 1.$$

En adelante se adoptara lo siguiente

$$\prod_{j=r}^s a(j) = \begin{cases} a(r)a(r+1)\cdots a(s), & s \geq r \\ 1 & , \quad s < r \end{cases}$$

para garantizar su validez para todo $k \geq 0$.

Si $f(0) = m_0$, f es una solución de la ecuación con la condiciones requerida.
De otro lado si g es una solución,

$$\frac{g(k+1)}{\prod_{j=0}^k a(j)} = \frac{a(k)g(k)}{\prod_{j=0}^k a(j)},$$

entonces

$$\frac{g(k+1)}{\prod_{j=0}^k a(j)} - \frac{a(k)g(k)}{a(k) \prod_{j=0}^{k-1} a(j)} = \frac{g(k+1)}{\prod_{j=0}^k a(j)} - \frac{g(k)}{\prod_{j=0}^{k-1} a(j)} = \Delta \left[\frac{g(k)}{\prod_{j=0}^{k-1} a(j)} \right] = 0,$$

Entonces existe una constante C tal que $g(k) = C \prod_{j=0}^{k-1} a(j)$. De aquí se sigue que si $g(0) = m_0$ entonces $g = f$ y se tiene la unicidad. ■

Teorema 2.3.3. *la dimension del subespacio de soluciones de la ecuación lineal homogéneas de primer orden es 1.*

Demostración. Sea

$$H : \mathbb{R} \longrightarrow \ell_s$$

$$\alpha \longmapsto H(\alpha) = \alpha \prod_{k=0}^{n-1} a(k).$$

Probemos que H es una transformación lineal biyectiva.

i) Sea $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ entonces

$$H(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) \prod_{k=0}^{n-1} a(k) = x_1 \prod_{k=0}^{n-1} a(k) + x_2 \prod_{k=0}^{n-1} a(k) = H(x_1) + H(x_2)$$

ii) Sea $\alpha, x_1 \in \mathbb{R}$ entonces

$$H(\alpha x_1) = \alpha x_1 \prod_{k=0}^{n-1} a(k) = \alpha H(x_1).$$

iii) H es inyectiva ya que si

$$H(\alpha) = 0 = \alpha \prod_{j=0}^{k-1} a(j),$$

como $a(j) \neq 0$ entonces $\alpha = 0$.

iv) H es sobreyectiva ya que si $g(k) = C \prod_{j=0}^{k-1} a(j)$ con $C \in \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación homogénea, entonces g es imagen de C .

Se concluye por i) y ii) que H es una transformación lineal biyectiva. Por iii) y iv) $\dim \mathbb{R} = \dim \ell_s = 1$. ■

Ejemplo 2.3.1. Resolver la ecuación con condición inicial

$$y_{k+1} = ky_k, \quad y(0) = 2.$$

Como $a(k) = k$, entonces la solución general es

$$y_k = y_0 \prod_{j=0}^{k-1} j = C(k-1)! \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Teniendo en cuenta la condición inicial, la solución es

$$y_k = 2 \prod_{j=0}^{k-1} j = 2(k-1)!.$$

Ejemplo 2.3.2. Retomando el Ejemplo 2.1.1 de interés compuesto hallemos la solución general de esta ecuación.

Sea

$$C_{k+1} = C_k(i+1),$$

donde $a = (i+1)$. Entonces

$$C_k = C_0 \prod_{j=0}^{k-1} (i+1) = C_0 \overbrace{(1+i) \cdot (1+i) \cdot (1+i) \cdot \dots \cdot (1+i)}^{k \text{ veces}} = C_0(1+i)^k.$$

Luego la solución es:

$$C_k = C_0(1+i)^k.$$

2.4. Solución General de una Ecuación no Homogénea.

El Teorema que se enunciará a continuación nos permitirá ver la relación que hay entre la solución particular de la ecuación lineal completa y la solución general de la homogénea asociada a ésta.

Teorema 2.4.1. Dada la ecuación lineal no homogénea

$$y_{k+1} = a(k)y_k + b(k).$$

Si f y g son soluciones de esta ecuación, entonces la función $s = f - g$ es solución de la ecuación homogénea asociada.

Demostración. Por hipótesis

$$f(k+1) - a(k)f(k) = b(k)$$

y

$$g(k+1) - a(k)g(k) = b(k),$$

entonces

$$\begin{aligned} s(k+1) &= f(k+1) - g(k+1) = a(k)f(k) + b(k) - a(k)g(k) - b(k) = \\ &= a(k)[f(k) - g(k)] = a(k)s(k). \end{aligned}$$

■

El teorema muestra que si se conoce una solución particular g , de la ecuación no homogénea, cualquier solución f de ella, es la suma de ésta solución y una solución de la ecuación homogénea asociada.

Ejemplo 2.4.1. *Tomando la ecuación*

$$y_{k+1} - y_k = 1,$$

donde fácilmente se puede ver que $y_k = k$ es solución.

Ahora hallemos la solución general de la ecuación homogénea asociada, la cual es:

$$y_k = y_0 \prod_{j=0}^{k-1} 1 = y_0.$$

Miremos que $s(k) = k + y_0$ es también una solución. Reemplazando en $y_{k+1} - y_k = 1$ obtenemos que

$$y_0 + k + 1 - y_0 - k = 1,$$

lo cual cumple la igualdad.

Teorema 2.4.2. *La solución general de la ecuación lineal no homogénea*

$$y_{k+1} = a(k)y_{k+1} + b(k)$$

tiene la forma

$$y_k = A \prod_{j=0}^{k-1} a(j) + \left[\prod_{j=0}^{k-1} a(j) \right] \sum_{j=1}^{k-1} \frac{b(j)}{\prod_{i=0}^j a(i)},$$

donde A es una constante.

Demostración. Dividiendo ambos lados de

$$y_{k+1} = a(k)y_{k+1} + b(k),$$

por $\prod_{j=0}^k a(j)$ se tiene que

$$\frac{y_{k+1}}{\prod_{j=0}^k a(j)} = \frac{a(k)y_k}{\prod_{j=0}^k a(j)} + \frac{b(k)}{\prod_{j=0}^k a(j)} = \frac{a(k)y_k}{a(k) \prod_{j=0}^{k-1} a(j)} + \frac{b(k)}{\prod_{j=0}^k a(j)},$$

entonces

$$\frac{y_{k+1}}{\prod_{j=0}^k a(j)} = \frac{y_k}{\prod_{j=0}^{k-1} a(j)} + \frac{1}{\prod_{j=0}^k a(j)} b(k).$$

Por consiguiente

$$\frac{y_{k+1}}{\prod_{j=0}^k a(j)} - \frac{y_k}{\prod_{j=0}^{k-1} a(j)} = \Delta \left[\frac{y_k}{\prod_{j=0}^{k-1} a(j)} \right] = \frac{1}{\prod_{j=0}^k a(j)} b(k).$$

Entonces $\frac{y_k}{\prod_{j=0}^{k-1} a(j)}$ es una suma indefinida de $\frac{b(k)}{\prod_{j=0}^k a(j)}$. Entonces por le teorema se series finitas existe una constante A tal que:

$$\frac{y_k}{\prod_{j=0}^{k-1} a(j)} = A + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{b(j)}{\prod_{i=0}^j a(i)}.$$

De aquí

$$y_k = A \prod_{j=0}^{k-1} a(j) + \left[\prod_{j=0}^{k-1} a(j) \right] \sum_{j=1}^{k-1} \frac{b(j)}{\prod_{i=0}^j a(i)}.$$

■

Puede observarse que la estructura de la solución es la suma de una solución de la ecuación homogénea y una particular de la no homogénea.

Ejemplo 2.4.2. Resolver

1. $y_{k+1} = y_k + (k+1)^2$. En este ejemplo $a(k) = 1$ y $b(k) = (k+1)^2$.
Entonces :

$$\begin{aligned} y_k &= A \prod_{j=1}^{k-1} 1 + \prod_{j=1}^{k-1} 1 \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{(j+1)^2}{\prod_{i=1}^j i} \right) = \\ &= A + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(j+1)^2}{1} = A + \sum_{j=1}^{k-1} (j+1)^2. \end{aligned}$$

Ahora aplicando propiedades de la sumatoria se tiene

$$\begin{aligned} y_k &= A + \sum_{j=1}^{k-1} (j+1)^2 = A + \sum_{j=1}^{k-1} j^2 + \sum_{j=1}^{k-1} 2j + \sum_{j=1}^{k-1} 1 = \\ &= A + \frac{k(k-1)(2k-1)}{6} + k(k+1) + (k-1) = A + \frac{2k^3 + 3k^2 + k - 6}{6}. \end{aligned}$$

Luego

$$y_k = A + \frac{2k^3 + 3k^2 + k - 6}{6}.$$

2. $y_{k+1} = (k-a)y_k$. En este ejemplo $a(k) = (k-a)$ y $b(k) = 0$. Entonces por el Teorema 2.4.2 la solución general es:

$$\begin{aligned} y_k &= A \prod_{j=0}^{k-1} a(j) + \prod_{j=0}^{k-1} a(j) \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{0}{\prod_{i=1}^j (i-a)} \right) = \\ &= A \prod_{j=0}^{k-1} (j-a) + 0 = -A \prod_{j=0}^{k-1} (a-j) = \\ &= -A[a(a-1)(a-2) \cdots (a-(k-1))] = -Aa^{(k)}. \end{aligned}$$

3. Dado $y_{k+1} = (k-a)(k-b)y_k$. Se observa que $a(k) = (k-a)(k-b)$ y $b(k) = 0$. Entonces la solución general es:

$$\begin{aligned} y_k &= A \prod_{j=0}^{k-1} (k-a)(k-b) + \left(\prod_{j=0}^{k-1} (j-a)(j-b) \sum_{j=1}^{k-1} \frac{0}{\prod_{i=0}^j (i-a)(i-b)} \right) = \\ &= A \prod_{j=0}^{k-1} (a-j)(b-j) = \\ &= A[a(a-1)(a-2) \cdots (a-(k-1))] \cdot [b(b-1)(b-2) \cdots (b-(k-1))] = \\ &= Aa^{(k)}b^{(k)}. \end{aligned}$$

4. Dado $y_{k+1} = (k-a_1)(k-a_2) \cdots (k-a_k)y_k$ entonces la solución general se deriva al observar los casos 3 y 4, luego se obtiene que

$$y_{k+1} = C a_1^{(k)} a_2^{(k)} \cdots a_{k-1}^{(k)} a_k^{(k)}.$$

2.5. Ecuación Lineal en Diferencia con Coeficientes Constantes

En esta sección hallaremos la solución general de un caso particular de la ecuación no homogénea, donde $a(k)$ y $b(k)$ son constantes.

Teorema 2.5.1. *Dada la ecuación lineal en diferencia de primer orden*

$$y_{k+1} = ay_{k+1} + b,$$

con a y b constantes. Entonces la solución general tiene la forma

$$y_k = \begin{cases} Aa^k + \frac{1-a^k}{1-a}b, & (a \neq 1) \\ A + kb, & (a = 1) \end{cases}$$

Demostración. Aplicando el teorema 2.4.2 tenemos

$$(2.12) \quad y_k = A \prod_{j=0}^{k-1} a + \prod_{j=0}^{k-1} a \left[\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\prod_{i=0}^j a} b \right] = Aa^k + a^k b \left[\sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{a} \right)^{(j+1)} \right].$$

Aplicando en la sumatoria de la ecuación anterior el teorema de suma series finitas de igual forma como se hizo en el ejercicio 1.6.6 numeral 2 tenemos

$$(2.13) \quad \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{a} \right)^{j+1} = \frac{1-a^k}{a^k(1-a)}.$$

Reemplazando (2.13) en (2.12) obtenemos

$$y_k = Aa^k + a^k b \left\langle \frac{1-a^k}{a^k(1-a)} \right\rangle = Aa^k + \frac{1-a^k}{1-a} b.$$

Si $a = 1$ tenemos

$$y_k = A \prod_{j=0}^{k-1} 1 + \prod_{j=0}^{k-1} 1 \left[\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\prod_{i=0}^j 1} b \right] = A + b \left[\sum_{j=0}^{k-1} 1 \right] = A + kb.$$

■

Ejemplo 2.5.1. *El llamado fenómeno de telaraña en economía, proporciona ejemplos en los cuales se puede aplicar las ecuaciones en diferencias de primer orden. Consideremos la siguiente situación: Los agricultores deciden, sobre los precios del presente año, el área que van a sembrar de cuerdo al producto.*

Anticipando que el nivel de los precios se mantendrá si los precios del año son altos, los agricultores tienden a sembrar grandes áreas. El siguiente año cuando la cosecha es recogida y llevada al mercado, la oferta supera a la demanda, los precios caen, entonces los cultivadores sembraran menos área. Cuando la siguiente cosecha es recogida la oferta podría ser menos que la demanda y los precios se incrementan, entonces los agricultores siembran más y el proceso continua.

Para el análisis de este proceso estudiaremos tres funciones para $k = 0, 1, 2, \dots$. Como S , donde $S(k)$ es el número de unidades ofrecidas en el periodo k , D es la función para la cual $D(k)$ es el número de unidades demandadas en el periodo k y la función P , tal que $P(k)$ es el precio por unidades en el periodo k . Se hacen los siguientes supuestos:

- i. La demanda es una función del precio $D(k) = f(P(k))$, es decir, la cantidad demandada depende del precio.
- ii. La oferta S es función del precio $S(k+1) = g(P(k))$, la cantidad ofrecida en un periodo dado es función del precio en el periodo anterior.
- iii. El precio del mercado esta determinado por la disponibilidad de oferta y las transacciones que se presentan en el precio en el cual la cantidad demandada son iguales, es decir, P es determinado como la solución de la ecuación $S(k) = D(k)$

Si $P(0)$ esta dada f y g son conocidas se puede calcular, $S(1) = g(P(0))$ y $D(1)$ se puede calcular puesto que $D(1) = S(1)$ entonces $D(1) = f(P(1)) = S(1)$ y así $P(1)$ podrá obtenerse de la ecuación $f(P(1)) = S(1)$. Este proceso podrá repetirse para obtener P_2 y $P_3 \dots$, etc. Se estudiará la sucesión P_0, P_1, P_2, \dots .

Si asumimos que f y g son polinomios de primer grado, es decir que la gráfica de la demanda y la oferta en función de P son rectas; obtendremos una ecuación de diferencias lineal de primer orden para P , ya que

$$D_k = -mP_k + b, \quad m > 0 \text{ y } b > 0$$

y

$$S_{k+1} = \hat{m}P_k + C \quad \hat{m} > 0 \text{ y } C > 0.$$

La pendiente de la demanda se toma negativa ya que el incremento de una unidad en el precio produce un decrecimiento igual a uno en la demanda y un incremento de una unidad en el precio produce un incremento \hat{m} en la oferta.

Por el supuesto iii) $S(k+1) = D(k+1)$ entonces

$$(2.14) \quad -mP_k + b = \hat{m}P_{k+1} + C.$$

Despejando P_{k+1} se obtiene

$$(2.15) \quad P_{k+1} = -\frac{m}{\hat{m}}P_k + \frac{b-C}{\hat{m}}.$$

Haciendo $A = -\frac{m}{\hat{m}}$ y $B = \frac{b-C}{\hat{m}}$, se obtiene que

$$P_{k+1} = AP_k + \alpha.$$

$A < 0$ la sucesión $\{P_k\}$ "oscila".

El siguiente ejemplo mostraremos otra forma de obtener la solución general de una ecuación en diferencia lineal de primer orden

Ejemplo 2.5.2. *Dada la ecuación lineal de primer orden*

$$(2.16) \quad y_{k+1} = a(k)y_{k+1} + b(k) \quad a(k) \neq 0.$$

Supongamos que y_k es la solución general, la cual se escribe de la siguiente forma

$$(2.17) \quad y_k = u_k v_k,$$

ya que el producto de dos funciones u y v puede ser determinado. Entonces

$$\begin{aligned} y_{k+1} - a_k y_k &= u_{k+1} v_{k+1} - a_k u_k v_k = \\ &= u_{k+1} v_{k+1} + u_{k+1} v_k - u_{k+1} v_k - a_k u_k v_k = \\ &= u_{k+1} (v_k + \Delta v_k) - a_k u_k v_k = \\ &= v_k (u_{k+1} - a_k u_k) + u_{k+1} \Delta v_k = b(k). \end{aligned}$$

Ahora tomando

$$(2.18) \quad u_{k+1} - a_k u_k = 0$$

y

$$(2.19) \quad u_{k+1} \Delta v_k = b(k),$$

entonces y_k es una solución de la ecuación (2.16). La función u es una solución de la ecuación homogénea (2.18), la cual tiene la siguiente solución

$$u_0 = C_1, \quad u_k = C_1 \prod_{j=0}^{k-1} a(j) \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad y \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Despejando Δv_k de (2.19) se obtiene

$$\Delta v_k = \frac{b(k)}{u_{k+1}},$$

ya que $u_k \neq 0$, por que $a(j) \neq 0$ para todo j .

Aplicando suma indefinida obtenemos lo siguiente

$$(2.20) \quad v_k = \Delta^{-1} \frac{b(k)}{u_{k+1}} + C_2.$$

Ahora hallemos nuevamente la solución general de la ecuación lineal en diferencias de coeficientes constantes

$$y_{k+1} = ay_k + b,$$

donde $a(k) = a$ y $B(k) = b$. Falta hallar v se usa la ecuación (2.20) y se obtiene lo siguiente

$$v_k = \Delta^{-1} \frac{b}{a^{k+1}} = \frac{b}{a} \Delta^{-1} \left(\frac{1}{a} \right)^k,$$

aplicando la ecuación (1.36) a

$$\Delta^{-1} \left(\frac{1}{a} \right)^k = \begin{cases} \frac{a}{1-a} \left(\frac{1}{a} \right)^k, & \text{si } a \neq 1 \\ k, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Entonces

$$v_k = \begin{cases} \frac{b}{1-a} \left(\frac{1}{a} \right)^k, & \text{si } a \neq 1 \\ bk + C_2, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Luego la solución de $y_{k+1} = ay_k + b$, esta dada por

$$y_k = u_k v_k = \begin{cases} C_1 C_2 a^k + \frac{b}{1-a}, & \text{si } a \neq 1 \\ bk + C_1 C_2, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Haciendo $A = C_1 C_2$ se obtiene que

$$y_k = u_k v_k = \begin{cases} Aa^k + \frac{b}{1-a}, & \text{si } a \neq 1 \\ A + bk, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Se obtiene la misma solución del Teorema 2.5.1.

2.6. El Método de Coeficientes Indeterminados

A continuación presentaremos otro método que nos permitirá hallar la solución particular de la ecuación lineal en diferencia no homogénea

$$(2.21) \quad y_{k+1} = y_k + b(k).$$

El método de coeficiente indeterminado consiste en hacer una suposición de la forma general de $y_p(k)$ cuando la función $b(k)$ es bastante sencilla. A continuación se presentaran algunos casos:

1) $b(k)$ es un polinomio

Comencemos con el caso donde $b(k)$ es un polinomio de primer grado para después generalizar para polinomios de cualquier grado. Sea $b(k) = b_0 + b_1 k$, entonces la ecuación (2.2) tiene la forma

$$(2.22) \quad y_{k+1} - ay_k = b_0 + b_1 k, \quad b \neq 0.$$

Dado que el segundo miembro de la ecuación (2.22) es un polinomio de primer grado, entonces $y_{k+1} - ay_k$ debe ser también un polinomio de primer grado. Luego se puede conjeturar la existencia de una solución particular que sea también un polinomio de primer grado:

$$(2.23) \quad y_p(k) = \beta_0 + \beta_1 k,$$

reemplazando (2.23) en (2.22) se tiene

$$\beta_0 + \beta_1(k+1) - a(\beta_0 + \beta_1 k) = b_0 + b_1 k.$$

Agrupando términos semejante se obtiene

$$(\beta_0 + \beta_1 - a\beta_0) + (\beta_1 - a\beta_1)k = b_0 + b_1 k.$$

Igualando los coeficientes de potencias iguales de k :

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 - a\beta_0 = b_0, \\ \beta_1 - a\beta_1 = b_1, \end{cases}$$

se producen los siguientes valores

$$\beta_0 = \frac{b_0 b_1}{(1-a)(1-a)^2} = \frac{b_0 b_1}{(1-a)(1-a)^3},$$

$$\beta_1 = \frac{b_1}{1-a},$$

siempre que $a \neq 1$.

Si $a = 1$ la conjetura anterior ha fallado y no existe ninguna solución de la forma propuesta. La razón está en que, en este caso, $y_{k+1} - y_k$ es un polinomio de grado cero y el segundo miembro de (2.22) es de primer grado. Lo cual se propone para $y_p(k)$ un polinomio de grado dos. Pero como $a = 1$, la solución general de la ecuación homogénea es $y_h(k) = C$, el término constante de $y_p(k)$ es absorbido por la solución de la ecuación homogénea. Propongamos la solución particular de la forma

$$(2.24) \quad y_p(k) = \beta_0 k + \beta_1 k^2.$$

Sustituyendo (2.24) en (2.22) con $a = 1$, resulta

$$\beta_0(k+1) + \beta_1(k+1)^2 - (\beta_0 + \beta_1 k^2) = b_0 + b_1 k.$$

Simplificando se obtiene

$$(\beta_0 + \beta_1) + 2\beta_1 k = b_0 + b_1 k.$$

Igualando coeficientes

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 = b_0 \\ 2\beta_1 = b_1, \end{cases}$$

y así

$$\beta_0 = b_0 - \frac{b_1}{2},$$

$$\beta_1 = \frac{b_1}{2}.$$

Luego la ecuación (2.22) tiene solución particular de la forma:

$$y_p(k) = \begin{cases} \frac{b_0}{1-a} \frac{b_1}{(1-a)^2} + \frac{b_1}{1-a} k, & \text{si } a \neq 1 \\ (b_0 - \frac{b_1}{2})k + \frac{b_1}{2} k^2, & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Lo anterior se puede generalizar para ecuaciones con termino $b(k) = b_0 + b_1 k + \dots + b_n k^n$, $b_n \neq 0$, la ecuación

$$(2.25) \quad y_{n+1} - ay_k = b_0 + b_1 k + \dots + b_n k^n$$

cuya solución general es de la forma

$$(2.26) \quad y_p(k) = \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 k + \dots + \beta_n k^n, & \text{si } a \neq 1 \\ k(\beta_0 + \beta_1 k + \dots + \beta_n k^n), & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Los coeficientes $\beta_0 + \beta_1 k + \dots + \beta_n k^n$ se determinan sustituyendo (2.26) en la ecuación (2.28) e igualando el coeficiente que resulta en el primer miembro para cada potencia de k con el correspondiente b_k del segundo miembro.

Ejemplo 2.6.1. *Resolvamos, por el método de coeficientes indeterminados, la siguiente ecuación*

$$(2.27) \quad y_k = y_{k-1} + k^2.$$

Se puede comprobar que la solución que satisface $y(0) = 0$ es

$$y_k = \frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k.$$

La solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h(k) = C.$$

Dado que $b(k)$ es un polinomio de grado 2, y $a = 1$, lo adecuado es buscar una solución de la forma

$$(2.28) \quad y_p(k) = k(\beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2) = (\beta_0 k + \beta_1 k^2 + \beta_2 k^3).$$

Sustituyendo (2.28) en la ecuación (2.27)

$$\beta_0 k + \beta_1 k^2 + \beta_2 k^2 - [\beta_0(k-1) + \beta_1(k-1)^2 + \beta_2(k-1)^2] = k^2.$$

resulta,

$$(2.29) \quad \begin{cases} \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ 2\beta_1 - 3\beta_2 = 0 \\ 3\beta_2 = 1. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene que

$$\beta_0 = \frac{1}{6}, \quad \beta_1 = \frac{1}{2} \quad y \quad \beta_2 = \frac{1}{3}.$$

Entonces la solución particular es

$$(2.30) \quad y_p(k) = \frac{1}{6}k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k^3.$$

Luego, la solución general es de la ecuación completa (2.27) esta dada por

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k) = C + \frac{1}{6}k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k^3.$$

Ahora reemplazando las condiciones iniciales obtenemos

$$y(0) = C + \frac{1}{6}(0) + \frac{1}{2}(0)^2 + \frac{1}{3}(0)^3 = 0$$

se obtiene la constante $C = 0$, luego se comprueba que la solución que satisface $y(0) = 0$ es

$$(2.31) \quad y_k = \frac{1}{6}k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k^3.$$

Tomando la ecuación (2.27) y haciendo iteraciones con $y_0 = 0$ tenemos

$$(2.32) \quad \begin{aligned} y_1 &= y_0 + 1^2 = 1^2, & k &= 1. \\ y_2 &= y_1 + 2^2 = 1^2 + 2^2, & k &= 2. \\ y_3 &= y_2 + 3^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2, & k &= 3. \\ &\vdots & & \\ y_n &= y_{n-1} + n^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2, & k &= n. \end{aligned}$$

Lo cual se puede demostrar por inducción.

Ahora haciendo $k = n$ en (2.31) tenemos $y_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$ y reemplazando en (2.32) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 &= \frac{1}{3}n\left(1 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2\right) = \frac{n}{3}\left(n + \frac{1}{2}\right)(n + 1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &= 1^2 + \dots + n^2, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

es la fórmula conocida para la suma de cuadrados de números enteros. De esta manera se puede establecer la validez para otras fórmulas conocidas como

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{2}n^2(n+1)^2 = (1+2+\cdots+n)^2,$$

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

2) Sea $b(k) = (\beta_0 + \beta_1 k + \cdots + k^n \beta_n) \cdot \alpha^k$.

Supongamos ahora que el término $b(k)$ es el producto de una potencia por un polinomio, o sea de la forma

$$b(k) = P_n(k) \cdot \alpha^k, \quad \alpha \neq 0$$

la ecuación

$$(2.33) \quad y_{k+1} = y_k + P_n(k) \cdot \alpha^k = y_k + (\beta_0 + \beta_1 k + \cdots + k^n \beta_n) \cdot \alpha^k.$$

Dividiendo por α^{k+1} en la ecuación (2.33), obtenemos

$$(2.34) \quad \frac{y_{k+1}}{\alpha^{k+1}} = a \frac{y_k}{\alpha^{k+1}} + \frac{P_n(k) \cdot \alpha^k}{\alpha^{k+1}} = a \frac{1}{\alpha} \frac{y_k}{\alpha^k} + \frac{P_n(k)}{\alpha}.$$

Haciendo un cambio de variable en (2.34), donde $u_k = \frac{y_k}{\alpha^k}$, resulta

$$(2.35) \quad u_{k+1} = \frac{a}{\alpha} u_k + \frac{1}{\alpha} P_n(k).$$

Las ecuaciones (2.21) y (2.35) son equivalentes en el sentido de que a cada solución y_k de (2.21) le corresponde una y solo una solución $u(k)$ de (2.35). Entonces la ecuación (2.33) tiene una solución particular de la forma

$$(2.36) \quad y_p(k) = \begin{cases} \alpha^k (\beta_0 + \beta_1 k + \cdots + \beta_n k^n), & \text{si } \alpha \neq a \\ \alpha^k k (\beta_0 + \beta_1 k + \cdots + \beta_n k^n), & \text{si } \alpha = a. \end{cases}$$

De nuevo los coeficientes $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_n$ se determinan sustituyendo (2.36) en la ecuación (2.33) e igualando el coeficiente que resulta en el primer miembro para cada potencia de k con el correspondiente b_k del segundo miembro.

El siguiente ejemplo nos va permitir pasar de una ecuación lineal en diferencia cuando $a(k)$ y $b(k)$ no son constantes a una ecuación de la forma (2.21).

Ejemplo 2.6.2. Dada la constante real $\alpha \neq 1$, resolver la ecuación

$$(2.37) \quad y_{k+1} = \frac{k+2}{k+1} y_k + (k+2) \alpha^k$$

Multiplicando $\frac{1}{k+2}$ ambos lados la ecuación (2.37), se obtiene

$$(2.38) \quad \frac{y_{k+1}}{(k+2)} = \frac{1}{k+1} y_k + \alpha^k.$$

Haciendo $u(k) = \frac{y_k}{k+1}$ y sustituyendo en (2.38), se obtiene que

$$(2.39) \quad u_{k+1} = u_k + \alpha^k.$$

Como $\alpha \neq 1$ y $a = 1$ en la ecuación (2.39) entonces $\alpha \neq a$, se toma una solución de la forma

$$u_p(k) = \beta_0 \alpha^k.$$

Reemplazando en (2.39) resulta que

$$\beta_0 \alpha^{k+1} - \beta_0 \alpha^k = \alpha^k = \alpha \beta_0 \alpha^k - \beta_0 \alpha^k = \alpha^k,$$

entonces

$$\beta_0 \alpha - \beta_0 = 1,$$

y así $\beta_0 = \frac{1}{(\alpha - 1)}$ y la solución particular de (2.39) es

$$u_p(k) = \frac{1}{\alpha - 1} \alpha^k.$$

Por lo tanto la solución particular de (2.37) es

$$y_p(k) = \frac{1}{\alpha - 1} (k+1) \alpha^k$$

y su solución general es

$$y(k) = C(k+1) + \frac{1}{\alpha - 1} (k+1) \alpha^k, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- 3) Sea $b(k) = a_0 \cos \omega k + b_0 \sin \omega k$. Nuevamente la idea consiste en buscar una solución particular del mismo tipo, es decir,

$$(2.40) \quad y_p(k) = A_0 \cos \omega k + B_0 \sin \omega k.$$

Sustituyendo en el primer término de la ecuación (2.21)

$$\begin{aligned} y_{k+1} - ay_k &= A_0 \cos(\omega k + \omega) + B_0 \sin(\omega k + \omega) - aA_0 \cos \omega k - aB_0 \sin \omega k \\ &= A_0(\cos \omega k \cos \omega - \sin \omega k \sin \omega) + B_0(\sin \omega k \cos \omega + \cos \omega k \sin \omega) - \\ &\quad - aA_0 \cos \omega k - aB_0 \sin \omega k \\ &= (A_0 \cos \omega + B_0 \sin \omega - aA_0) \cos \omega k + (-A_0 \sin \omega + B_0 \cos \omega - aB_0) \sin \omega k \end{aligned}$$

e igualando al segundo término resulta

$$(A_0 \cos \omega + B_0 \sin \omega - aA_0) \cos \omega k + (-A_0 \sin \omega + B_0 \cos \omega - aB_0) \sin \omega k = a_0 \cos \omega k + b_0 \sin \omega k.$$

Para que estas funciones trigonométricas coincidan para todo $k > 0$, han de ser iguales los coeficientes de $\cos \omega k$ y $\sin \omega k$; así, se deduce que

$$\begin{cases} A_0 \cos \omega + B_0 \sin \omega - aA_0 = a_0 \\ -A_0 \sin \omega + B_0 \cos \omega - aB_0 = b_0. \end{cases}$$

Este sistema si tiene solución, determina los valores de A_0 y B_0 . En el caso de que no exista solución del sistema, habría que buscar una solución particular de la forma

$$y_p(k) = A_0 k \cos \omega k + B_0 k \sen \omega k,$$

esto sucede cuando alguno de los sumandos de la expresión (2.40) es solución de ecuación homogénea.

Ejemplo 2.6.3. Dada la ecuación lineal en diferencia de primer orden

$$y_{k+1} = y_k + \sen \frac{\pi k}{2},$$

hallemos la solución homogénea asociada. Como $a(k) = 1$ se tiene que

$$y_h(k) = y_0 \prod_{j=0}^{k-1} 1 = y_0.$$

Supongamos que la solución particular tiene la forma

$$y_p(k) = A_0 \cos \frac{\pi k}{2} + B_0 \sen \frac{\pi k}{2},$$

entonces sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$A_0 \cos \frac{\pi(k+1)}{2} + B_0 \sen \frac{\pi(k+1)}{2} - A_0 \cos \frac{\pi k}{2} - B_0 \sen \frac{\pi k}{2} = \sen \frac{\pi k}{2}.$$

Dado que

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi(k+1)}{2} &= -\sen \frac{\pi k}{2}, \\ \sen \frac{\pi(k+1)}{2} &= \cos \frac{\pi k}{2}, \end{aligned}$$

resulta

$$-A_0 \sen \frac{\pi k}{2} + B_0 \cos \frac{\pi k}{2} - A_0 \cos \frac{\pi k}{2} - B_0 \sen \frac{\pi k}{2} = \sen \frac{\pi k}{2}.$$

Simplificando tenemos

$$(-A_0 - B_0) \sen \frac{\pi k}{2} + (B_0 - A_0) \cos \frac{\pi k}{2} = \sen \frac{\pi k}{2},$$

de lo cual se deduce

$$\begin{cases} -A_0 - B_0 = 1 \\ B_0 - A_0 = 0. \end{cases}$$

Así $A_0 = -\frac{1}{2}$ y $B_0 = \frac{3}{2}$, por lo que una solución particular es

$$y_p(k) = -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi k}{2} + \frac{3}{2} \sen \frac{\pi k}{2},$$

y la solución general de la ecuación completa viene dada por:

$$y_k = y_0 - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi k}{2} + \frac{3}{2} \sen \frac{\pi k}{2}.$$

2.7. Solución Geométrica

Ya vimos en secciones anteriores como resolver una ecuación lineal en diferencia de primer orden, para responder preguntas específicas de estas soluciones. Este método gráfico o geométrico nos permite obtener información cualitativas de la solución general de ecuaciones difíciles de resolver por métodos específicos.

Este nuevo método está basado en utilizar la gráfica de la función $f(x)$ para generar el siguiente punto que toma la trayectoria de la solución y luego proyectarlo con ayuda de la bisectriz $y = x$, en el eje horizontal; aplicando reiteradamente este procedimiento se generan los sucesivos puntos de la trayectoria. Veámoslo con más detenimiento en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7.1. Retomemos nuevamente la ecuación de interés compuesto con un ahorro A al final de cada periodo, entonces

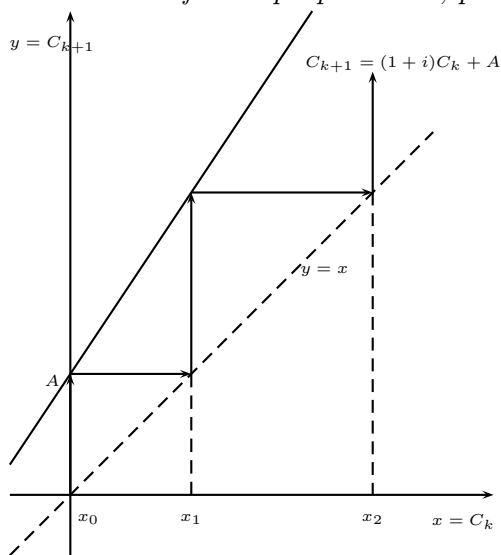
$$C_{k+1} = (1 + i)C_k + A,$$

la cual se puede representar por la recta o ecuación

$$y = f(x) = (1 + i)x + A.$$

Comencemos con un punto inicial $x_0 = 0$, el siguiente punto de la trayectoria es $x_1 = f(x_0) = A$, es decir, $x_1 = A$ es el punto del eje vertical tal que $(x_0, x_1) = (0, A)$ pertenece a la gráfica $y = f(x)$. Proyectando dicho punto en el eje horizontal con ayuda de la recta $y = x$, podemos aplicar de nuevo la función $f(x)$ y obtener $x_2 = f(x_1) = (1 + i)A + A = A(2 + i)$ y proyectarlo nuevamente por medio de la ecuación $x = y$. Hacemos lo mismo para obtener x_3 y así sucesivamente.

Claramente se ve que el valor siguiente crece de forma proporcional, por lo tanto su solución gráfica es la siguiente:



En este caso como la pendiente de la ecuación es positiva la sucesión que se forma es creciente, en caso contrario tendríamos una sucesión decreciente y las flechas de la gráfica irían en sentido contrario.

Ejemplo 2.7.2. Aquí vamos retomar el Ejemplo 2.5.1 relacionado con la oferta y la demanda. Veamos sus posibles soluciones gráficas. Partiremos desde la ecuación (2.14) y la separemos en dos ecuaciones equivalentes

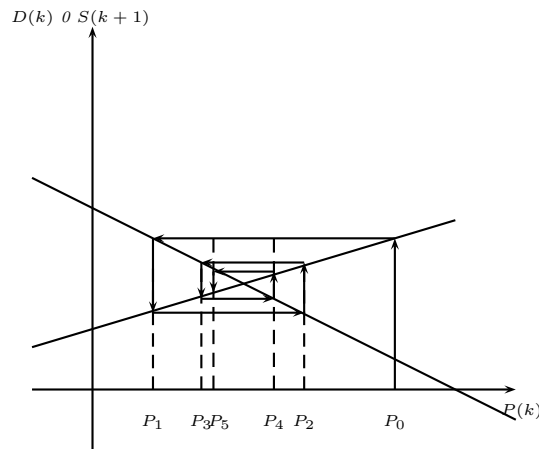
$$y = -mx + b, \quad m > 0 \text{ y } b > 0$$

y

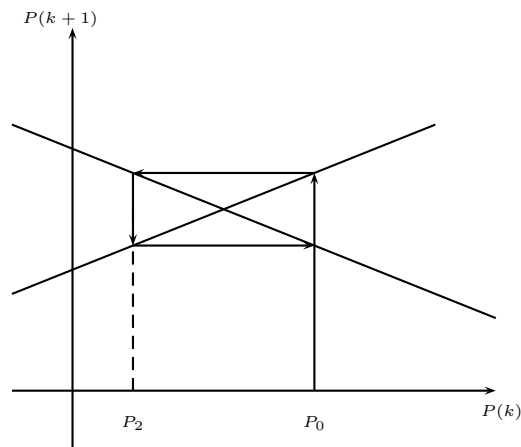
$$y = \hat{m}x + C, \quad \hat{m} > 0 \text{ y } C > 0,$$

y se precede de la misma forma que le ejemplo anterior pero con la única diferencia que no se proyecta sobre la ecuación $y = x$, de esta forma se obtiene la gráfica referente $P(k)$ (precios) y demanda o oferta. A continuación se presentaran los diferentes comportamientos que puede tomar A en la ecuación (2.15).

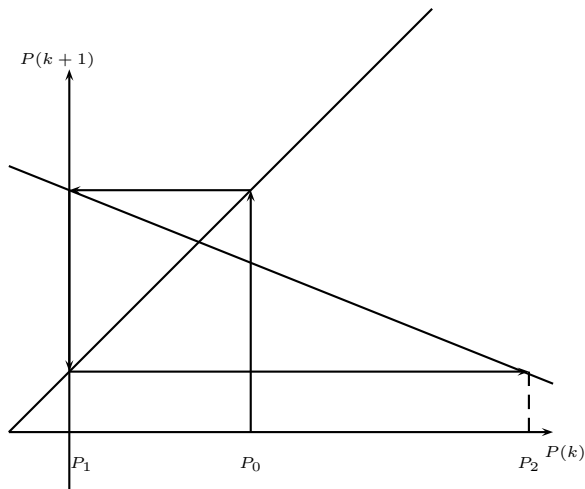
i) Si $-1 < A < 0$ la recta $P(k+1) = AP(k) + b$ es decreciente y genera una sucesión puntos que converge al punto de intersección entre la dos rectas.



ii) Si $A = -1$, todas las soluciones no constantes son periódicas de periodo dos.



iii) Si $A < -1$ se generan oscilaciones no acotadas



2.8. Solución de Ecuaciones no Lineales

En esta sección vamos a considerar algunas ecuaciones que no cumplen la Definición 2.1.1 de ecuaciones lineales de primer orden, pero con un cambio de variable las podemos llevar a una ecuación de ese tipo. Otra forma de utilizar el método que vamos a desarrollar, es llevar algunas ecuaciones con coeficientes variables, a reducir o convertirlas a coeficientes constantes.

Ejemplo 2.8.1. Sea la ecuación $y_k - y_{k+1} = ky_k y_{k+1}$. Se observa que $y_k = 0$ es una solución de la ecuación. En este caso, esta solución es trivial. No obstante, podemos encontrar las soluciones no triviales de la forma siguiente:

Dividamos la ecuación por $y_k y_{k+1}$, con lo cual

$$\frac{1}{y_{k+1}} - \frac{1}{y_k} = k.$$

Haciendo un cambio de variable $u_k = \frac{1}{y_k}$, tenemos la siguiente ecuación de primer orden lineal

$$u_{k+1} - u_k = k,$$

cuya solución general es $u_k = C + k$, volviendo a la variable original tenemos $y_k = \frac{1}{C+k}$. Así, tenemos todas las soluciones de la ecuación lineal, incluyendo la trivial.

El siguiente ejemplo nos permite llevar una ecuación de coeficientes variables a una de coeficientes constantes, dichas soluciones se dejamos al lector.

Ejemplo 2.8.2. i) considere la ecuación $y_{k+1}^2 - y_k^2 = 1$. Haciendo $u_k = y_k^2$ nos queda la siguiente ecuación lineal de primer orden

$$u_{k+1} - u_k = 1.$$

ii) Considerando la ecuación $y_{k+1} = (1 + \sqrt[3]{y_k})^3$. Haciendo un cambio de variable $u_k = \sqrt[3]{y_k}$ tenemos la siguiente ecuación

$$u_{k+1}^3 = (1 + u_k)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{u_{k+1}^3} = \sqrt[3]{(1 + u_k)^3} \Leftrightarrow u_{k+1} = 1 + u_k$$

luego tenemos la siguiente ecuación lineal primer orden

$$u_{k+1} - u_k = 1.$$

Nota: Este método de cambio de variable se puede aplicar para ecuaciones de orden superior no lineales y llevarlas a ecuaciones lineales de orden superior que se va desarrollar en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3

ECUACIÓN LINEAL EN DIFERENCIAS DE ORDEN SUPERIOR.

3.1. Introducción

En el capítulo anterior se prestó atención a las ecuaciones en diferencias de primer orden, haciendo énfasis en las ecuaciones lineales, para las cuales se estudio la estructura de las soluciones, algunos métodos para calcular soluciones, aspectos geométricos de estas soluciones y se presentaron algunas situaciones que conducían a este tipo de ecuaciones.

En el presente capítulo se hará un estudio similar para ecuaciones lineales en diferencias de orden mayor o igual que dos. Para efectos de cálculo tomaremos ecuaciones de orden dos y tres.

Comenzaremos con la sucesión de Fibonacci, que se puede plantear de la siguiente forma $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$. La cual es una ecuación en diferencia finita de orden dos.

Damos a continuación la definición de una ecuación lineal en diferencia de orden n .

Definición 3.1.1. *Una ecuación en diferencia de la forma*

$$(3.1) \quad y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1}(k)y_{k+1} + a_n(k)y_k = b(k).$$

donde a_i, b ; para $i = 0, 1, 2, \dots$ son funciones que depende $k \in \mathbb{N}$, donde $a_n(k) \neq 0$, es una ecuación lineal en diferencias de orden n .

En el caso especial en que $b(k) = 0$, para todo k , la ecuación se denomina homogénea, y cuando las funciones a_i son constantes, la ecuación se llama lineal con coeficientes constantes.

Ejemplo 3.1.1. Un ejemplo de una ecuación de orden tres es

$$y_{k+3} + 3y_{k+2} + 9y_k = \cos k.$$

Aquí

$$a_1(k) = 3, \quad a_2(k) = 9, \quad b(k) = \cos k.$$

3.2. Existencia de una Solución

Estableceremos condiciones bajo las cuales una ecuación en diferencias de orden mayor que uno tiene solución. El teorema de existencia es importante, ya que por ejemplo

$$y_{k+2} - ky_{k+1} - y_k = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

no tiene solución. Si $y_0 = 0$ y $y_2 = 1$, pues que $y_2 - y_0 = 1 - 0 = 1$. Por otro lado si $y_0 = y_2 = 1$; entonces $y_2 - y_0 = 0$; y como para $k = 1$ $y_3 - y_2 - y_1 = y_3 - y_2 - y_1$; para satisfacer la ecuación se tendrá que y_3 dependa de y_1 y así la ecuación tendrá infinitas soluciones.

Teorema 3.2.1 (Existencia y unicidad). Dada la ecuación lineal

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + a_2(k)y_{k+n-2} + \dots + a_{n-1}(k)y_{k+1} + a_n(k)y_k = b(k), \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

y las constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, existe una única solución tal que $y_0 = \alpha_0, y_1 = \alpha_1, \dots, y_{n-1} = \alpha_{n-1}$.

Demostración. Como se conocen

$$y_0 = \alpha_0, y_1 = \alpha_1, y_2 = \alpha_2, \dots, y_{n-1} = \alpha_{n-1},$$

al reemplazarlo en la ecuación, haciendo $k = 0$, se obtiene y_n , ya que

$$y_n + a_0(0)y_{n-1} + a_2(0)y_{n-2} \dots + a_{n-1}(0)y_1 + a_n(0)y_0 = b(0).$$

Ahora supónganse que se conocen los términos de la sucesión hasta y_j para algún $j \geq n$. Mostraremos que el valor de y_{j+1} puede construirse.

Reemplazando en la ecuación para $k = j + 1 - n$ se obtiene

$$y_{j+1} = b(j + 1 - n) - a_1(j + 1 - n)y_j - \dots - a_n(j + 1 - n)y_{j+1-n}.$$

Como por hipótesis los términos de la derecha son conocidos se conoce y_{j+1} . De esta forma se concluye inductivamente que la ecuación tiene solución. Además puede observarse que cualquier otra sucesión con valores iniciales iguales coincide con la solución encontrada. ■

3.3. Propiedades de la Ecuación Homogénea

La ecuación homogénea juega un papel central en la búsqueda de la solución de la ecuación no homogénea. Dos hechos indican la importancia de la ecuación homogénea en la teoría de ecuaciones lineales. El primero es que la diferencia entre dos soluciones de la ecuación no homogénea es una solución de la homogénea asociada y en segundo lugar que si dos solución de la ecuación homogénea se suman sigue siendo una solución de la ecuación homogénea. Por consiguiente se estudian aspectos muy importantes de la ecuación homogénea.

Teorema 3.3.1. *Supónganse que las sucesiones, $\{w_k\}$ y $\{z_k\}$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea de orden n . Entonces para números reales α_1 y α_2 , $\alpha_1 w_k + \alpha_2 z_k$ es solución de la homogénea*

Demostración. Tomando $y_k = \alpha_1 w_k + \alpha_2 z_k$ y reemplazando en la ecuación lineal homogénea

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + a_2(k)y_{k+n-2} + \cdots + a_{n-1}(k)y_{k+1} + a_n(k)y_k = 0 \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

tenemos

$$\begin{aligned} & \alpha_1 w_{k+n} + \alpha_2 z_{k+n} + a_1(k)[\alpha_1 w_{k+n-1} + \alpha_2 z_{k+n-1}] + \cdots + a_n(k)[\alpha_1 w_k + \alpha_2 z_k] = \\ & \alpha_1 [w_{k+n} + a_1(k)w_{k+n-1} + \cdots + a_n(k)w_k] + \alpha_2 [z_{k+n} + a_2(k)z_{k+n-1} + \cdots + a_2 z_k]. \end{aligned}$$

Como $\{w_k\}$ y $\{z_k\}$ son soluciones de la ecuación homogénea, luego se obtiene que $y_k = \alpha_1 w_k + \alpha_2 z_k$ es una solución de la ecuación lineal homogénea. ■

El teorema anterior nos muestra que puede existir un conjunto muy grande de soluciones para una ecuación en diferencia de orden n . Esto nos lleva a preguntarnos si es posible encontrar un conjunto especial de soluciones de tal forma que pueda ser usada para representar todas las soluciones. La respuesta esta a esta pregunta nos lleva a formular la definición de soluciones independientes.

Definición 3.3.1. *Dada la ecuación homogénea de orden n , las soluciones $\{y_k\}$ y $\{\hat{y}_k\}$ se llaman independientes si dado que $\alpha y_k + \beta \hat{y}_k = 0$ para todo k entonces $\alpha = \beta = 0$. De lo contrario son linealmente dependientes.*

Ejemplo 3.3.1.

$$\begin{aligned} y_{k+2} - y_{k+1} - y_k &= 0 \\ y_k &= 1, \quad \hat{y}_k = k. \end{aligned}$$

La solución $\{y_k\}$ y $\{\hat{y}_k\}$ son independientes ya que si $\alpha y_k + \beta \hat{y}_k = 0$ para todo k , entonces

$$\begin{aligned} \alpha y_1 + \beta \hat{y}_1 &= 0, & \text{entonces } \alpha + \beta &= 0. \\ \alpha y_2 + \beta \hat{y}_2 &= 0, & \text{entonces } \beta + 2\beta &= 0. \end{aligned}$$

De lo ultimo se tiene $\alpha = -\beta = -2\beta$ y así $\beta = 0$ y $\alpha = 0$.

El siguiente teorema muestra que toda ecuación lineal homogénea de orden n tiene n soluciones independientes.

Teorema 3.3.2. *Toda ecuación lineal homogénea de orden n tiene n soluciones independientes.*

Demostración. Sea la ecuación homogénea de orden n

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1}(k)y_{k+1} + a_n(k)y_k = 0.$$

Por el Teorema de existencia y unicidad se tiene lo siguiente:

1) Si $y^1(k)$ es la única solución tal que

$$y_0^1 = 1, y_1^1 = 0, \dots, y_{n-1}^1 = 0,$$

2) si $y^2(k)$ es la única solución tal que

$$y_0^2 = 0, y_1^2 = 1, \dots, y_{n-1}^2 = 0,$$

⋮

n) si $y^n(k)$ es única solución tal que

$$y_0^n = 0, y_1^n = 0, \dots, y_{n-1}^n = 1.$$

Las soluciones $\{y^1(k)\}, \{y^2(k)\}, \dots, \{y^n(k)\}$ son linealmente independientes, ya que si

$$C_1y^1(k) + C_2y^2(k) + \cdots + C_ny^n(k) = 0,$$

tomando cada problema de condición inicial y haciendo $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ obtenemos $\alpha_1y^1(0) + \alpha_2y^2(0) + \cdots + \alpha_ny^n(0) = 0$ entonces $\alpha_1y^1(0) = 0$. Por lo tanto $\alpha_1 = 0$.

$\alpha_1y^2(1) + \alpha_2y^2(1) + \cdots + \alpha_ny^n(1) = 0$ entonces $\alpha_2y^2(1) = 0$. Por lo tanto $\alpha_2 = 0$.

Así sucesivamente resulta que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. ■

A continuación mostraremos que toda solución de la ecuación homogénea se puede escribir en términos soluciones independientes.

Teorema 3.3.3. *Sea $\{z_k\}$ una solución de la ecuación lineal homogénea en diferencias finitas de orden n , y $y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k)$ las soluciones obtenidas en el teorema precedente. Entonces existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, tales que $z_k = \alpha_1y_1(k) + \alpha_2y_2(k) + \cdots + \alpha_ny_n(k)$.*

Demostración. Sea $y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k)$ soluciones de la ecuación lineal homogénea por el Teorema 3.3.1 existen escalares C_1, C_2, \dots, C_n tal que

$$y_k = C_1y_1(k) + C_2y_2(k) + \cdots + C_ny_n(k),$$

es solución de ecuación homogénea. Como $\{z\}$ es otra solución de la ecuación homogénea tenemos el siguiente conjunto de $n + 1$ de soluciones $y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k), z(k)$ linealmente

dependiente por el Teorema 3.3.2 que solo se admiten n soluciones linealmente independiente. Aplicando la definición de dependencia lineal, existen escalares $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$ no todos ceros tal que

$$C_1 y_1(k) + C_2 y_2(k) + \dots + C_n y_n(k) + C_{n+1} z(k) = 0.$$

Pos ser $y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k)$ linealmente independientes $C_{n+1} \neq 0$, entonces

$$z(k) = \frac{C_1}{C_{n+1}} y_1(k) + \frac{C_2}{C_{n+1}} y_2(k) + \dots + \frac{C_n}{C_{n+1}} y_n(k).$$

Tomando $\alpha_i = \frac{y_i(k)}{C_{n+1}}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ entonces

$$z(k) = \alpha_1 y_1(k) + \alpha_2 y_2(k) + \dots + \alpha_n y_n(k),$$

lo cual es una solución particular de la ecuación homogénea lineal. ■

Tenemos según los teoremas precedentes que el conjunto solución de la ecuación lineal en diferencias de orden n es un espacio vectorial de dimensión n . y por consiguiente, cualquier solución no solamente puede expresarse como combinación lineal de las soluciones básicas dadas, sino que puede expresarse en términos de cualquier conjunto independiente de n soluciones de la ecuación.

Ejemplo 3.3.2. *Estudiamos la ecuación $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 0$. Puede verificarse que $y_k = 1$ y $z_k = 2^k$ son soluciones ya que*

$$1 - 3 + 2 = 0 \quad \text{y} \quad 2^{k+2} - 3 \cdot 2^{k+1} + 2 \cdot 2^k = 2^k [2^2 - 3 \cdot 2 + 2] = 0.$$

Estas soluciones son independientes ya que si tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} C_1 y_k + C_2 z_k, \\ C_1 y_{k+1} + C_2 z_{k+1}. \end{cases} \equiv \begin{cases} C_1 + C_2 2^k, \\ C_1 + C_2 2^{k+1}. \end{cases}$$

Despejando C_1 de la primera y reemplazando en la segunda se tiene

$$C_2(-2^k + 2^{k+1}) = 0.$$

Como $-2^k + 2^{k+1} \neq 0$ para $k = 1, 2, 3, \dots$ entonces $C_2 = 0$. Reemplazando el valor de C_2 en la primera se obtiene

$$C_1 + 0 \cdot 2^k = 0.$$

Luego $C_1 = 0$.

Entonces toda solución de esta ecuación, es de la forma $w_k = \alpha_1 y_k + \alpha_2 z_k$ para alguna pareja α_1, α_2 de números reales.

3.4. Ecuaciones Homogéneas con Coeficientes Constantes

En la sección 3.3 vimos que una solución de la ecuación lineal en diferencias finitas de orden n es una combinación lineal de n soluciones particulares linealmente independientes, pero no dijimos como encontrar tal solución. Explicaremos ahora como encontrar de manera explícita y directa, n soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal en diferencias finitas de orden n con coeficientes constantes. A continuación presentaremos algunos ejemplos de ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes.

Ejemplo 3.4.1. *Considere las ecuaciones lineales en diferencia*

$$\begin{aligned}y_{k+1} - y_k &= 0, \\y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k &= 0, \\y_{k+3} - y_k &= 0.\end{aligned}$$

Son ecuaciones con coeficientes constantes de orden 1, 2 y 3 respectivamente.

Busquemos una solución sencilla de la ecuación homogénea y observemos lo que sucede al reemplazar $y_k = m^k$ en la ecuación lineal homogénea

$$(3.2) \quad y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + a_2 y_{k+n-2} + \cdots + a_{n-1} y_{k+1} + (k)y_k = 0,$$

con a_1, a_2, \dots, a_n constantes.

$$m^{k+n} + a_1 m^{k+n-1} + a_2 m^{k+n-2} + \cdots + a_{n-1} m^{k+1} + a_n m^k = 0.$$

Factorizando tenemos

$$m^k [m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1} m + a_n] = 0,$$

entonces como m^k nunca es cero, $y_k = m^k$ será una solución de la ecuación (3.2) cuando m sea una raíz de la ecuación

$$m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0.$$

Esto nos lleva plantear la siguiente definición.

Definición 3.4.1. *Llamaremos ecuación o polinomio característico asociado a la ecuación (3.2) a*

$$p(m) = m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Ejemplo 3.4.2. *Sea la ecuación lineal homogénea con coeficientes constante $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 0$. Su polinomio característico es :*

$$p(m) = m^2 - 3m + 2 = 0.$$

Este polinomio se puede descomponer en dos factores

$$m^2 - 3m + 2 = (m - 2)(m - 1),$$

entonces sus raíces son: $m = 2$ y $m = 1$.

Ejemplo 3.4.3. Sea la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes $y_{k+2} + y_k = 0$. Su polinomio característico es el siguiente:

$$m^2 + 1 = 0 \quad \text{ó} \quad m^2 = -1,$$

lo que implica que tiene dos soluciones complejas diferentes $m = -i$ y $m = i$.

Entonces, nuestro problema se reduce a la solución de una ecuación puramente algebraica. Por el teorema fundamental del álgebra, todo polinomio de grado n tiene n raíces no todas necesariamente distintas ni reales como se vio en los dos ejemplos anteriores, por tal la solución de una ecuación en diferencia presenta diferentes casos, que a continuación desarrollaremos.

Teorema 3.4.1. Sea la ecuación lineal en diferencia, homogénea con coeficientes constantes

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + a_2 y_{k+n-2} + \cdots + a_{n-1} y_{k+1} + (k) y_k = 0,$$

y su polinomio asociado $p(m) = m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_n$.

- a) Si m_0 es raíz de $p(m)$, entonces, m_0^k es solución de la ecuación, homogénea.
 b) Si $a + bi$ es raíz de $p(m)$, entonces $r^k \operatorname{sen} \alpha k, r^k \cos \alpha k$ son soluciones de la ecuación homogénea siendo r el módulo y α el argumento de $a + bi$.

Demostración.

a) Sean

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{k+2} + a_n y_k$$

y

$$p(m_0) = m_0^n + a_1 m_0^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Sea $y_k = m_0^k$ entonces

$$\begin{aligned} m_0^{k+n} + a_1 m_0^{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} m_0^{k+2} + a_n m_0^k &= m_0^k (m_0^k + a_1 m_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m_0^2 + a_n) = \\ &= m_0^k p(m_0) = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto $y_k = m_0^k$ es solución de la ecuación homogénea

- b) Tomando la parte a) tenemos que si $a + bi$ es solución del polinomio característico $p(m)$ entonces $(a + bi)^k$ es solución de la ecuación homogénea en diferencias.

Sea $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ que es el módulo de $a + bi$ y $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a}$ el argumento.

Por el Teorema de Demoivre se tiene que

$$(a + bi) = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \quad \text{y} \quad (a + bi)^k = r^k (\cos k\alpha + i \operatorname{sen} k\alpha) = r^k \cos k\alpha + i r^k \operatorname{sen} k\alpha.$$

Como las raíces de un polinomio vienen en pares conjugados entonces $a - bi$ también es solución del polinomio característico por lo tanto

$$(a - bi)^k = r^k (\cos k\alpha - i \operatorname{sen} k\alpha) = r^k \cos k\alpha - i r^k \operatorname{sen} k\alpha,$$

también es solución de la ecuación homogénea en diferencia.

Tomando

$$\begin{aligned} r^k \cos k\alpha &= \frac{1}{2}[r^k \cos k\alpha + ir^k \sin k\alpha] + \frac{1}{2}[r^k \cos k\alpha - ir^k \sin k\alpha] \\ &= \frac{1}{2}(a + bi)^k + \frac{1}{2}(a - bi)^k \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} r^k \sin k\alpha &= \frac{1}{2i}[r^k \cos k\alpha + ir^k \sin k\alpha] - \frac{1}{2i}[r^k \cos k\alpha - ir^k \sin k\alpha] \\ &= \frac{1}{2i}(a + bi)^k - \frac{1}{2i}(a - bi)^k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $r^k \sin k\alpha$ y $r^k \cos k\alpha$ son soluciones de la ecuación homogénea. ■

Del teorema anterior podemos concluir que, si se tienen n -raíces reales distintas de la ecuación característica, la solución ecuación homogénea tiene la siguiente forma

$$y_k = C_1 m_1^k + C_2 m_2^k + \cdots + C_n m_n^k,$$

ya que el conjunto de soluciones es linealmente independiente.

De igual forma para raíces complejas se tiene

$$\begin{aligned} y_k &= C_1(a + ib)^k + C_2(a - ib)^k = r^k \cos k\alpha + ir^k \sin k\alpha + r^k \cos k\alpha - ir^k \sin k\alpha = \\ &= (C_1 + C_2)r^k \cos k\alpha + (C_1 - C_2)i r^k \sin k\alpha = \\ &= c_1 r^k \cos k\alpha + c_2 r^k \sin k\alpha, \end{aligned}$$

donde $c_1 = (C_1 + C_2)$ y $c_2 = (C_1 - C_2)i$.

Ejemplo 3.4.4. Retomando los Ejemplos 3.4.2 y 3.4.3 se tiene las siguientes soluciones:
Para el Ejemplo 3.4.2

$$y_k = C_1 2^k + C_2,$$

y para el Ejemplo 3.4.3

$$y_k = C_3 \cos \frac{\pi}{2}k + C_4 \sin \frac{\pi}{2}k.$$

Teorema 3.4.2. Sea la ecuación en diferencias homogénea

a) Si m_0 es raíz con multiplicidad p , entonces

$$m_0^k, k m_0^k, k^2 m_0^k, \dots, k^{p-1} m_0^k,$$

son soluciones de la ecuación de diferencias.

b) Si $a + bi$, $a - bi$ son complejos conjugados con multiplicidad p , entonces

$$\begin{aligned} r^k \cos k\alpha, & \quad kr^k \cos k\alpha, \dots, & \quad k^{p-1}r^k \cos k\alpha, \\ r^k \sin k\alpha, & \quad kr^k \sin k\alpha, \dots, & \quad k^{p-1}r^k \sin k\alpha, \end{aligned}$$

son soluciones de la ecuación homogénea en diferencias.

Demostración.

a) Utilizando el operador de traslación podemos escribir la ecuación

$$y_{k+n} + a_1y_{k+n-1} + \dots + a_{n-1}y_{k+2} + a_ny_k = 0,$$

como sigue

$$[E^n + a_1E^{n-1} + \dots + a_{n-1}E + a_n]y_k = 0,$$

como m_0 es una raíz de multiplicidad p , lo anterior se puede expresar como

$$(3.3) \quad (E - m_0)^p y_k = 0.$$

Tenemos que $y_1 = m_0^k$ es una solución y hagamos $y(k) = u_k y_1 = u_k m_0^k$, entonces

$$(E - m_0)u_k m_0^k = E(u_k m_0^k) - u_k m_0^{k+1} = u_{k+1} m_0^{k+1} - u_k m_0^{k+1} = m_0^{k+1}(u_{k+1} - u_k) = m_0^{k+1} \Delta u_k.$$

Entonces

$$(E - m_0)^p y_k = m_0^{k+1} \Delta^p u_k,$$

para cualquier sucesión u_k . entonces y_k es solución de la ecuación (3.3) si y solo si $\Delta^k u_k = 0$, luego

$$u(x) = 1 + k + k^2 + \dots + k^{p-1},$$

en particular $m_0^k, km_0^k, k^2m_0^k, \dots, k^{p-1}m_0^k$.

b) Usando la parte a) tenemos

$$(a \pm ib)^k, k(a \pm ib)^k, k^2(a \pm ib)^k, \dots, k^{p-1}(a \pm ib)^k.$$

Entonces

$$(r[\cos \alpha \pm i \sin \alpha])^k, k(r[\cos \alpha \pm i \sin \alpha])^k, k^2(r[\cos \alpha \pm i \sin \alpha])^k, \dots, k^{p-1}(r[\cos \alpha \pm i \sin \alpha])^k.$$

Realizando cálculos obtenemos

$$\begin{aligned} r^k \cos k\alpha \pm ir^k \sin k\alpha, & \quad kr^k \cos k\alpha \pm ikr^k \sin k\alpha, & \quad k^2r^k \cos k\alpha \pm ik^2r^k \sin k\alpha, \\ , \dots, & \quad k^{p-1}r^k \cos k\alpha \pm ik^{p-1}r^k \sin k\alpha. \end{aligned}$$

En particular se tiene

$$\begin{aligned} r^k \cos k\alpha, & \quad kr^k \cos k\alpha, \dots, & \quad k^{p-1}r^k \cos k\alpha, \\ r^k \sin k\alpha, & \quad kr^k \sin k\alpha, \dots, & \quad k^{p-1}r^k \sin k\alpha. \end{aligned}$$



Ejemplo 3.4.5. *Resolvamos un problema con condiciones iniciales*

$$\begin{aligned} y_{k+2} + 2y_{k+1} + y_k &= 0. \\ y_0 = 5, \quad y_1 &= -3. \end{aligned}$$

Observemos que la ecuación característica

$$m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2 = 0,$$

tiene raíces iguales $m_1 = m_2 = -1$, es decir tiene multiplicidad $p = 2$. De aquí la solución general proporcionada por el Teorema 3.4.2 parte a) es

$$y_k = c_1(-1)^k + c_2k(-1)^k.$$

Reemplazando las condiciones iniciales producen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} y_0 = c_1(-1)^0 + c_2 \cdot 0 \cdot (-1)^0 &= c_1 = 5, \\ y_1 = c_1(-1)^1 + c_2 \cdot 1 \cdot (-1)^1 &= -c_1 - c_2 = -3, \end{aligned}$$

lo cual implica que $c_1 = 5$, y $c_2 = -2$. Así la solución deseada del problema con condiciones iniciales es

$$y_k = 5(-1)^k - 2k(-1)^k.$$

Ejemplo 3.4.6. *La ecuación característica de la ecuación lineal homogénea en diferencia finita*

$$y_{k+3} + y_{k+1} - 10y_k = 0,$$

es la ecuación cubica

$$m^3 + r - 10$$

la cual tiene raíces complejas $-1 \pm 2i$ y una raíz real 2. De aquí la solución general proporcionada por el teorema 3.4.1 es

$$y_k = c_1 2^k + (c_2 \cos k + c_3 \operatorname{sen} k).$$

Ejemplo 3.4.7. *Sea P_n la población n -enésima generación de una especie de bacterias. Suponga que la población en la n -enésima generación depende de las dos generaciones anteriores:*

$$P_{n+2} - rP_{n+1} - sP_n = 0$$

donde r y s son medidas de la importancia relativa de las dos generaciones. La ecuación característica es $m^2 - rm - s = 0$ con raíces

$$m_1 = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4s}}{2}, \quad m_2 = \frac{r - \sqrt{r^2 + 4s}}{2}$$

Si $r^2 > -4$, las raíces son reales diferentes y la solución general es

$$P_n = c_1 m_1^k + c_2 m_2^k.$$

Si $|m_1| < 1$ y $|m_2| < 1$, entonces P_n tiende a cero cuando k tiende a infinito, pero $|m_1|$ o $|m_2|$ es mayor que 1, entonces P_n tiende a infinito. Si $r^2 = -4s$ ($s < 0$), entonces la solución general es

$$P_n = c_1 \left(\frac{r}{2}\right)^k + c_2 k \left(\frac{r}{2}\right)^k,$$

en cuyo caso P_n tiende a cero si $|r| < 2$, pero si $|r| \geq 2$, la solución general es

$$P_n = (-s)^{\frac{k}{2}} (c_1 \cos k\alpha + c_2 k\alpha),$$

donde $\alpha = \tan^{-1} \left(\sqrt{-r^2 - \frac{4s}{r}} \right)$. Cuando $-s < 1$, la solución P_n tiende a cero de una manera oscilatoria.

3.5. Solución General de la Ecuación Lineal no Homogénea con Coeficientes Constantes

En las secciones anteriores presentamos cómo hallar la solución de una ecuación homogénea en diferencia de orden n . Igual que las ecuaciones de primer grado hay una relación entre esta solución y la particular de la no homogénea. El Teorema 2.4.1 se puede generalizar para ecuaciones de grado n donde su demostración es similar a la demostrado, para ecuaciones de orden uno.

A continuación presentaremos dos formas de encontrar la solución de una ecuaciones no homogénea. El primer método que presentaremos es el de variación de parámetros y el segundo de coeficientes indeterminados que es similar a expuesto para solucionar ecuaciones de primer grado lo cual nos limitaremos a presentar algunos ejemplos para ecuaciones de orden n .

3.5.1. Variación de Parámetros

Supongamos la solución de la ecuación homogénea asociada a la ecuación lineal en diferencia de orden n

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + a_2 y_{k+n-2} + \cdots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n(k) y_k = b(k),$$

tiene la siguiente forma

$$y_H(k) = C_1 y_1(k) + C_2 y_2(k) + \cdots + C_n y_n(k),$$

donde $y_i(k) \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ son soluciones linealmente independientes.

A partir de esto, buscaremos una solución completa de la siguiente forma:

$$(3.4) \quad y_H(k) = C_1(k) y_1(k) + C_2(k) y_2(k) + \cdots + C_n(k) y_n(k),$$

donde $C_i(k) \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ están función de k .

Por otro lado

$$(3.5) \quad y_H(k+1) = C_1(k+1)y_1(k+1) + C_2(k+1)y_2(k+1) + \dots + C_n(k+1)y_n(k+1)$$

sumando y restando $C_i(k+1)$ a 3.5 tenemos

$$\begin{aligned} y_H(k+1) &= [C_1(k) + C_1(k+1) - C_1(k+1)]y_1(k+1) + [C_2(k) + C_2(k+1) - C_2(k+1)]y_2(k+1) + \\ &\quad + \dots + [C_n(k) + C_n(k+1) - C_n(k+1)]y_n(k+1) = \\ &= [C_1(k) + \Delta C_1(k)]y_1(k+1) + [C_2(k) + \Delta C_2(k)]y_2(k+1) + \\ &\quad + \dots + [C_n(k) + \Delta C_n(k)]y_n(k+1) \\ &= [C_1(k)y_1(k+1) + C_2(k)y_2(k+1) + \dots + C_n(k)y_n(k+1)] + [\Delta C_1(k)y_1(k+1) + \\ &\quad + \Delta C_2(k)y_2(k+1) + \dots + \Delta C_n(k)y_n(k+1)]. \end{aligned}$$

la cual se puede escribir como

$$(3.6) \quad y_H(k+1) = C_1(k)y_1(k+1) + C_2(k)y_2(k+1) + \dots + C_n(k)y_n(k+1)$$

siempre y cuando se tome $C_i(k)$, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ de tal forma que

$$\Delta C_1(k)y_1(k+1) + \Delta C_2(k)y_2(k+1) + \dots + \Delta C_n(k)y_n(k+1) = 0.$$

Análogamente, sumando y restando $C_i(k)$ para $i = 1, 2, \dots, n$ a la ecuación 3.6 se puede escribir de la siguiente forma

$$y_H(k+2) = C_1(k)y_1(k+2) + C_2(k)y_2(k+2) + \dots + C_n(k)y_n(k+2),$$

siempre y cuando se tome $C_i(k)$, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ de tal manera que

$$(3.7) \quad \Delta C_1(k)y_1(k+2) + \Delta C_2(k)y_2(k+2) + \dots + \Delta C_n(k)y_n(k+2) = 0.$$

sucesivamente podemos escribir

$$y_H(k+n-1) = C_1(k)y_1(k+n-1) + C_2(k)y_2(k+n-1) + \dots + C_n(k)y_n(k+n-1)$$

si elegimos $C_i(k)$, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ que verifique

$$(3.8) \quad \Delta C_1(k)y_1(k+n-1) + \Delta C_2(k)y_2(k+n-1) + \dots + \Delta C_n(k)y_n(k+n-1) = 0$$

y finalmente

$$y_H(k+n) = C_1(k)y_1(k+n) + C_2(k)y_2(k+n) + \dots + C_n(k)y_n(k+n)$$

si elegimos $C_i(k)$, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ tal que

$$(3.9) \quad \Delta C_1(k)y_1(k+n) + \Delta C_2(k)y_2(k+n) + \dots + \Delta C_n(k)y_n(k+n) = b(k).$$

Asi tenemos un sistema de n ecuaciones (3.7),(3.8),..., (3.9) linealmente independientes el cual tiene solución por el Teorema 3.3.3. Calculando los valores de $\Delta C_i(k)$ podemos obtener los $C_i(k)$ por medio del operador suma indefinida Δ^{-1} .

Ejemplo 3.5.1. *Hallemos la solución de la ecuación*

$$y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = k + 2.$$

Su polígono característico

$$r^2 - 5r + 6 = (r - 2)(r - 3),$$

y sus respectivas soluciones son $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$, luego la solución homogénea asociada es

$$y_k = c_1 2^k + c_2 3^k.$$

Tomando lo anterior tenemos que

$$y_k = c_1(k)2^k + c_2(k)3^k,$$

lo cual implica que

$$(3.10) \quad \Delta c_1(k)2^{k+1} + \Delta c_2(k)3^{k+1} = 0,$$

$$(3.11) \quad \Delta c_1(k)2^{k+2} + \Delta c_2(k)3^{k+2} = k + 2$$

Despejando $\Delta C_i(k)$ en las ecuaciones (3.10) y (3.11) e igualando obtenemos

$$\frac{3^{k+1}}{2^{k+1}} \Delta c_2(k) = \frac{k + 2}{2^{k+2}} - \frac{3^{k+2}}{2^{k+2}} \Delta c_2(k),$$

despejando se tiene

$$(3.12) \quad \Delta c_2(k) = \frac{k + 2}{3^{k+1}}$$

y

$$(3.13) \quad \Delta c_1(k) = \frac{k + 2}{2^{k+1}}.$$

Aplicando la suma indefinida y el Teorema sumación por partes en (3.12) y 3.13) se obtiene

$$c_1(k) = \frac{k + 2}{2^{k+2}} + D_1 \quad \text{y} \quad c_2(k) = \frac{4k + 7}{2^3 \cdot 3^{k+1}} + D_2.$$

Entonces la solución general es:

$$y_k = \frac{k + 2}{2^{k+2}} 2^k + \frac{4k + 7}{2^3 \cdot 3^{k+1}} 3^k + 2^k D_1 + 3^k D_2 = \frac{k + 2}{4} + \frac{4k + 7}{27} + 2^k D_1 + 3^k D_2,$$

luego

$$y_k = 2^k D_1 + 3^k D_2 + \frac{k + 2}{4} + \frac{4k + 7}{27}.$$

Ahora hallemos en el siguiente ejemplo una fórmula general para resolver ecuaciones homogéneas lineales de grado 2 utilizando el método de variación de parámetros.

Ejemplo 3.5.2. Sea la ecuación

$$(3.14) \quad y_{k+2} + a_1(k)y_{k+1} + a_2(k)y_k = b_k \quad a_2(k) \neq 0,$$

supongamos que la solución general es de la forma

$$y_k = c_k y_1(k) + d_k y_2(k).$$

donde $y_1(k)$ e $y_2(k)$ son soluciones linealmente independiente.

Utilizando el método de variación parámetros resulta lo siguiente

$$\begin{aligned} \Delta c_k y_1(k) + \Delta d_k y_2(k) &= 0, \\ \Delta c_k y_1(k) + \Delta d_k y_2(k) &= b_k. \end{aligned}$$

El determinante de este sistema que lo denotaremos $\det_{k+1}(y_1, y_2)$ es diferentes de cero, así que

$$\Delta c_k = -\frac{b_k y_1(k+1)}{\det_{k+1}(y_1, y_2)}, \quad \Delta d_k = \frac{b_k y_2(k+1)}{\det_{k+1}(y_1, y_2)}.$$

Aplicando el operador de suma indefinida tenemos que

$$c_k = c_0 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{b_n y_1(n+1)}{\det_{n+1}(y_1, y_2)}, \quad d_k = d_0 + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{b_n y_2(n+1)}{\det_{n+1}(y_1, y_2)},$$

entonces la solución general de la ecuación (3.14) está dada por

$$y_k = c_0 y_1(k) + d_0 y_2(k) - y_1(k) \sum_{n=0}^{k-1} \frac{b_n y_1(n+1)}{\det_{n+1}(y_1, y_2)} + y_2(k) \sum_{n=0}^{k-1} \frac{b_n y_2(n+1)}{\det_{n+1}(y_1, y_2)}.$$

3.5.2. Método de coeficiente indeterminados

Este método es análogo al que se desarrollo para ecuaciones de lineales de primer grado, es esta sección lo que se pretende es dar algunos ejemplos para ilustrarlo a ecuaciones de grado superior.

Ejemplo 3.5.3. Sea la ecuación

$$y_{k+2} + 5y_{k+1} + 6y_k = k + 2,$$

la solución homogénea asociada es

$$y_h(k) = 2^k C_1 + 3^k C_2.$$

Para hallar la solución particular supongamos que este tiene siguiente forma

$$y_p(k) = Ak + C,$$

entonces calculemos los valores A y C , reemplazando la solución particular en la ecuación completa tenemos

$$A(k+2) + C - 5[A(k+1) + C] + 6(Ak + C) = 2Ak - 3A + 2C = k^2 + k,$$

lo cual implica que $A = \frac{1}{2}$ y $C = \frac{3}{4}$.
Entonces

$$y_p(k) = \frac{1}{2}k + \frac{3}{4},$$

luego la solución general es

$$y_k = 2^k C_1 + 3^k C_2 + \frac{1}{2}k + \frac{3}{4}.$$

Ejemplo 3.5.4. Sea la ecuación $y_{k+2} - 3y_{k+1} + y_k = \text{sen}(\pi k)$, la solución de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_p(k) = C_1 + C_2 2^k.$$

Supongamos que la solución particular de la ecuación completa tiene la siguiente forma

$$y_p(k) = A \text{sen}(\pi k) + B \cos(\pi k),$$

reemplazando en la ecuación completa tenemos

$$7A \text{sen}(\pi k) + 6B \cos(\pi k) = \text{sen}(\pi k),$$

entonces las constantes $A = -\frac{1}{7}$ y $B = 0$. Lo cual implica que

$$y_p(k) = \frac{1}{7} \text{sen}(\pi k).$$

Luego la solución general es:

$$y_k = C_1 + C_2 2^k + \frac{1}{7} \text{sen}(\pi k).$$

Ejemplo 3.5.5. Sea la ecuación $y_{k+3} - 4y_{k+2} + 3y_{k+1} = 2^k$. La solución homogénea asociada es:

$$y_h(k) = 2^k C_1 + C_2.$$

Ahora supongamos que la solución particular es de la forma

$$y_p(k) = Ak2^k.$$

Reemplazando en la ecuación completa tenemos

$$A(k+3)2^{k+3} - 4A(k+2)2^{k+2} + 2A(k+1)2^{k+1} = 2^k,$$

por lo tanto el valor de $A = \frac{1}{14}$. Reemplazando en la solución particular tenemos que

$$y_p(k) = \frac{1}{14} k 2^k.$$

Luego la solución general es

$$y_k = 2^k C_1 + C_2 + \frac{1}{14} k 2^k.$$

Bibliografía

- [1] **FERNÁNDEZ PÉREZ, Carlos y VEGAS H. Francisco José.** *Ecuaciones Diferenciales y en Diferencia* International Thomson Editores, 2003.
- [2] **GONZÁLEZ, C. y BARRIOS, J. A.** *Análisis discreto en Economía Empresa* International Thomson Editores, España, 2000.
- [3] **TAKAHASHI, Takehito.** *Ecuaciones en Diferencias con Aplicaciones* Grupo Editorial Iberoamerica , Mexico, 1990.
- [4] **GOLDBERG, Samuel.** *Introduction to difference Equations* Courier Dover Publications, New York, 1986.