

Diseño de un sistema óptico para holografía digital de campo
mediano

Edwin Edgar Mozo Luis

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

Facultad de ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga, Colombia

2012

Diseño de un sistema óptico para holografía digital de campo
mediano

Edwin Edgar Mozo Luis

Trabajo de grado presentado como requisito para obtener el
título de Físico

Director: Rafael Ángel Torres Amarís
Físico, PhD

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga, Colombia

2012

Labrar la tierra bajo el ardiente sol del día, forma mejores hombres.

A mis padres: Marco Fidel Mozo y Ligia Luis.

AGRADECIMIENTOS

Le agradezco al director de proyecto Rafael Torres por el tiempo dedicado a realizar esta tesis, el cual fue un periodo largo de tiempo, por la orientación en esta área del conocimiento, también le doy las gracias por ayudarme a mejorar la forma en la cual escribía ya que tenía una redacción muy pésima.

Agradezco a mis padres Marco Fidel Mozo y Ligia Luis por su apoyo incondicional durante todos los momentos, a mi exnovia Lizette Mayerly Galindo E, la cual me ayudó y me acompañó en una etapa difícil sin ninguna condición.

A todos mis compañeros de universidad especialmente a Leonardo Vega, Jonny Vega y Jhon Elber Leon con los cuales se compartieron muchos momentos. A profesores por aportar en mi formación como físico.

RESUMEN

TÍTULO: DISEÑO DE UN SISTEMA ÓPTICO PARA HOLOGRAFÍA DIGITAL DE CAMPO MEDIANO*

AUTOR: MOZO LUIS, Edwin Edgar.**

PALABRAS CLAVES: Diseño, sistema, holografía digital, campo mediano.

DESCRIPCIÓN:

En este trabajo de grado se hace una revisión bibliográfica de los conceptos teóricos necesarios sobre holografía digital; se describe la forma de hacer el registro, posteriormente la reconstrucción y cómo esta técnica es aplicada a un problema, el cual se trata desde el punto de vista analítico utilizando conceptos de óptica metaxial como: la aproximación metaxial, transparencia de curvatura, difracción de Fraunhofer, el dioptrio, reglas de conjugación, imagen de una esfera tangente al dioptrio, imagen de una esfera centrada sobre el dioptrio, imagen de una esfera cualquiera, teorema del muestreo fraccionario, difracción de Fresnel y transformada de Fourier fraccionaria. El método consiste en determinar dónde se debe posicionar un detector de acuerdo con la tasa de muestreo que este, de tal forma que esta se adapte a la tasa óptima del teorema del muestreo fraccionario. Para esto se realiza un montaje óptico con un interferómetro de Mach-Zender y se hace a una reconstrucción numérica del objeto registrado.

En el capítulo uno se habla de la holografía convencional y de la holografía digital y se mencionan algunas aplicaciones hechas usando holografía digital en microscopía.

En el capítulo dos se hace una descripción de las herramientas matemáticas que se utilizan para hacer el desarrollo analítico del problema, luego se propone una solución.

En el capítulo tres se hace una descripción de los dispositivos usados para hacer el experimento.

*Trabajo de Grado

**Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. PhD: Rafael Ángel Torres Amarís.

En el capítulo cuatro se muestran los resultados obtenidos de los diferentes patrones de difracción de Fresnel registrados en diferentes planos del objeto y sus respectivas reconstrucciones.

ABSTRACT

TITLE: OPTICAL SYSTEM DESIGN FOR AVERAGE FIELD DIGITAL HOLOGRAPHIC *

AUTOR: MOZO LUIS, Edwin Edgar.**

KEYWORDS: design, system, digital holographic, average field.

DESCRIPTION:

This work presents a literature review of theoretical concepts necessary for digital holography, describes how to make the record, then the reconstruction and how this technique is applied to a problem to solve, which is treated from the analytical point of view using optical metaxial concepts such as: the approach metaxial, transparency of curvature, diffraction Fraunhofer, the diopter conjugation rules, the image of a sphere tangent to diopters, an image diopter sphere centered on, the image of any sphere, fractional sampling theorem, Fresnel diffraction and fractional Fourier transform. The method is used to determine where should be the position of a detector according to the sampling rate so that it suits with the optimal fractional rate sampling theorem.

An optical assembly is performed with a Mach-Zender interferometer and makes the record is subjected to a numerical reconstruction.

Chapter one explains the conventional holography and digital holography and some applications using digital holography in microscopy.

Chapter two is a description of the mathematical tools used for analytical development of the problem, then proposes a solution.

Chapter three is a description of the devices used for the experiment.

The fourth chapter shows the results obtained from the different diffraction patterns of Fresnel recorded at different planes of the object and their different reconstructions.

*Degree work

**Physics department, Science College, Universidad Industrial de Santander. PhD: Rafael Ángel Torres Amarís.

Índice general

INTRODUCCIÓN	11
1 HOLOGRAFÍA DIGITAL	18
1.1 Holografía clásica	18
1.2 Holografía digital	19
1.3 Registro de un holograma digital	21
1.4 Reconstrucción de un holograma digital	22
2 SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL PROBLEMA E IMPLEMENTACIÓN EXPERIMENTAL	23
2.1 Difracción metaxial	23
2.1.1 Aproximación metaxial	23
2.1.2 Transparencia de curvatura	24
2.1.3 Difracción de Fraunhofer	25
2.2 El dioptrio	26
2.2.1 Relación de conjugación	26
2.2.2 Imagen de una esfera tangente al dioptrio	27
2.2.3 Imagen de una esfera centrada sobre el dioptrio	28
2.2.4 Imagen de una esfera cualquiera	29
2.3 Teorema del muestreo fraccionario	31
2.3.1 Fórmula de interpolación	32
2.4 Solución matemática del problema	32
2.4.1 Difracción de Fresnel	34
2.4.2 Difracción y la transformación de Fourier fraccionaria	35

3	MONTAJE EXPERIMENTAL	39
3.1	Montaje óptico para el registro de los hologramas	39
3.2	Registro	43
3.3	RECONSTRUCCIÓN	44
4	RESULTADOS	45
4.1	Recontrucción del primer objeto registrado	45
4.2	Reconstrucción de un segundo objeto registrado	47
5	CONCLUSIONES	50
	BIBLIOGRAFÍA	51

Lista de Figuras

1.1	Proceso de grabado sobre una película holográfica.	19
1.2	Detector CCD.	20
1.3	Registro de un holograma.	21
1.4	Reconstrucción de un holograma digital a una distancia d	22
2.1	Transparencia de curvatura de A hasta B	24
2.2	Difracción de Franhofer desde A a F	25
2.3	Ilustración de un dioptrio.	26
2.4	Regla de conjugación del dioptrio esférico.	27
2.5	La imagen de una esfera A tangente al dioptrio es A' tangente al dioptrio y su centro es el conjugado de C	28
2.6	La imagen de una esfera C centrada sobre la superficie del dioptrio es la esfera C' centrada sobre el dioptrio y el vértice es el conjugado de C	29
2.7	La imagen de una esfera C centrada sobre la superficie del dioptrio es la esfera C' centrada sobre el dioptrio y el vértice es el conjugado de C	30
2.8	Ilustra como están los campos después de pasar por el sistema formador de imagen	33
2.9	Difracción de Fresnel de una esfera h	34
2.10	Ilustración del ejemplo.	37
3.1	Montaje para obtener las franjas verticales de interferencia.	40

3.2	Ilustración de la forma que se realizó la posición de los elementos ópticos en uno de los brazos del interferómetro de Mach-Zender para $d > 2f$	41
3.3	Ilustración de cuando el objeto es posicionado para $d < f$	41
3.4	Imagen del experimento.	42
3.5	Representación esquemática del montaje del experimento	43
3.6	Ilustración de como se realiza el registro de los difrentes planos de Fresnel.	44
4.1	Plano imagen con $d' = 36.cm$	45
4.2	a):Registro del patrón de difracción de Fresnel a $d = 1cm$ después de la imagen. b) Reconstrucción del patrón de difracción con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.95$	45
4.3	a):Registro del patrón de difraccion de Fresnel a $d = 1.5cm$ despues de la imagen. b) Reconstrucción del patron de difraccion con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.925$	46
4.4	a):Registro del patrón de difraccion de Fresnel a $d = 2cm$ despues de la imagen. b) Reconstrucción del patron de difracción con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.9$	46
4.5	a):Registro del patrón de difraccion de Fresnel a $d = 2.5cm$ despues de la imagen. b) Reconstrucción del patron de difraccion con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.875$	47
4.6	a):Registro del patrón de difraccion de Fresnel a $d = 3cm$ despues de la imagen. b) Reconstrucción del patron de difraccion con transformadas de Fourier fraccionaria	47
4.7	Plano imagen $d = 36.6cm$	47
4.8	a):Registro del patrón de difraccion de Fresnel a $d = 0.5cm$ despues de la imagen. b) Reconstruccion del patron de difracción con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.975$	48

4.9	a):Registro del patrón de difraccion de Fressnel a $d = 1cm$ despues de la imagen. b) Reconstruccion del patron de difracción con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.95$	48
4.10	a):Registro del patrón de difraccion de Fressnel a $d = 1.5cm$ después de la imagen. b) Reconstruccion del patron de difracción con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.925$	48
4.11	a):Registro del patrón de difraccion de Fressnel a $d = 2cm$ después de la imagen. b) Reconstruccion del patron de difracción con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.9$	48
4.12	a):Registro del patrón de difraccion de Fressnel a $d = 2.5cm$ después de la imagen. b) Reconstruccion del patrón de difraccion con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.875$	49

INTRODUCCIÓN

La holografía fue descubierta por Dennis Gabor en 1947, en esta técnica se incluye la grabación de ondas ópticas y su reconstrucción[1]. Por medio de la holografía se puede obtener una imagen de un objeto sin pérdida de información debido a que se registra un patrón de interferencia formado por las ondas objeto y referencia, a diferencia de la fotografía que solo registra la intensidad de la onda objeto.

Un holograma es el grabado de un patrón de interferencia , que nos permite registrar la información de la onda tanto de su amplitud como de su fase, en una película fotosensible. Para ver la imagen grabada en un holograma, es necesario iluminar el holograma con el haz de referencia que se usó para generar el patrón de interferencia[3].

En los sesentas, en la holografía se cambia la forma de hacer la reconstrucción del objeto, en lugar de la metodología clásica se introdujo una reconstrucción numérica del campo objeto. A esta nueva forma de hacer la reconstrucción se le llamó holografía digital, fue propuesta por primera vez en 1967 por J. W. Goodman y R. W. Lawrence[18] y la reconstrucción numérica de un objeto fue desarrollada por M. P. Konrod y L. P. Yavoslavsky[19]; los registros de los hologramas fueron hechos sobre placas holográficas que luego digitalizaban para ser reconstruidos numéricamente. El primer montaje holográfico totalmente digital fue hecho por U. Schnars y W. P. Jueptner en 1994, empleando una cámara CCD para hacer el registro de hologramas de Fresnel[20]; de ésta forma se cambió el registro óptico, el revelado holográfico por un registro digital y una reconstrucción numérica.

El alto desarrollo científico y tecnológico en la actualidad de las cámaras CCD ha llevado a la mejora de la holografía digital dando lugar a la microscopía holográfica digital (lo que implica tener mayor precisión en la reconstrucción y un tiempo menor en el análisis de datos), junto con el avance en las plataformas de computación que permiten tener una mayor versatilidad para usar a un ritmo competitivo en diferentes áreas de la ciencia. Parte de esto se refleja en algunas de las aplicaciones:

1. Aplicación al control de calidad de dispositivos microópticos[26]: En estos trabajos se muestran las posibilidades ofrecidas por la MHD para el control de calidad de microlentes y arreglos de microlentes. Trabajando con el montaje en transmisión, prueban con un arreglo de microlentes refractivas de cuarzo y trabajando en reflexión con otro de Silicio; después de hacer el registro de los objetos en estudio, para realizar la reconstrucción numérica del campo complejo, se multiplica el holograma registrado por la onda referencia digital RD y para eliminar la aberración de fase introducida por el objetivo de microscopio OM , se introduce una máscara de fase. Sabiendo que en reflexión la información de fase provee la topografía de la superficie, se reconstruye la forma de las lentes, obteniendo su radio de curvatura (ROC). En transmisión, la información de fase da la distribución de la longitud del camino óptico, la cual describe la función de fase de la lente, por lo tanto a partir del índice de refracción se puede deducir el espesor de la lente, así como su forma, altura y ROC .
2. MHD para el estudio de células biológicas[21]: Se aplica Holografía digital para obtener imágenes microscópicas 3D de células biológicas. Utilizando el método de dos longitudes de onda con imágenes de fase con holografía digital, se obtienen imágenes de fase desenvueltas de células biológicas.
3. Holografía con interferencia digital con exploración de longitud de onda[22]: La técnica consiste en reconstruir un gran número de hologramas registrados con longitudes de onda que son variadas a intervalos regulares y realizar la interferencia numérica de los campos de onda resultantes 3D, obteniendo imágenes

topográficas con buen enfoque y con una buena supresión del ruido speckle coherente. Con muestras biológicas de tamaño del orden de los milímetros, se logra una resolución de $100\mu m$ axialmente y $20\mu m$ lateralmente.

4. Estudio del límite de densidad de suspensiones para su análisis en microscopía holográfica digital en línea[23]: La Microscopía Holográfica Digital en Línea (MHDL) es una técnica de formación de imágenes sin lentes, dividida en dos etapas, registro (experimental) donde se captura la intensidad producto de la difracción de un frente de onda esférico sobre el objeto y una segunda etapa de reconstrucción (numérica), donde el registro (Holograma) es digitalmente difractado para obtener la información de amplitud y fase del objeto de estudio. La técnica es basada en una herramienta de modelación de la etapa de registro que permite lograr hologramas con aperturas numéricas mayores a 0.4, correspondientes a resoluciones micrométricas. El resultado principal muestra una dependencia de la concentración o límite con la configuración geométrica de la muestra y una invariabilidad con la apertura numérica del sistema.

Al cambiar la película holográfica por un sensor CCD, se encuentra que la calidad en la reconstrucción se ve sensiblemente afectada por la ubicación del sensor. De aquí que sea necesario la búsqueda de una posición que permita una buena reconstrucción digital. La holografía digital actual no cuenta con un criterio claro para la ubicación del sensor CCD. Por lo tanto en esta tesis nos proponemos estudiar las condiciones bajo las cuales, posicionamos el sensor CCD de tal forma que nos permita obtener un registro del campo, en las mejores condiciones posibles. Es así por lo cual que aquí se hará un estudio teórico de este problema y luego se someterá a una prueba en el registro de frentes de ondas o campo, lo cual es implementado en un esquema holográfico digital.

Capítulo 1

HOLOGRAFÍA DIGITAL

1.1 Holografía clásica

La holografía convencional fue inventada por Gabor[1]. Esta técnica consiste en generar un patrón de interferencia entre dos haces uno el haz objeto y el otro el haz referencia para grabar una imagen en una película holográfica Fig(1.1) la cual puede ser de diferentes materiales tales como termoplasticos, fotopolimeros, fotorrefractivos, fotorrecinas, hemulciones de haluros de plata, calcugenuros[27] entre otros. El proceso de revelado holográfico en blanco y negro es el que hay que llevar a cabo para que la imagen en negativo impresa en la placa o película fotográfica se haga visible, cuando el proceso se realiza sobre papel a partir del negativo se le da el nombre de positivado.

El proceso consta de 5 pasos:

- Preparación
- Revelado
- Baño de paro o detención
- Fijación
- Lavado

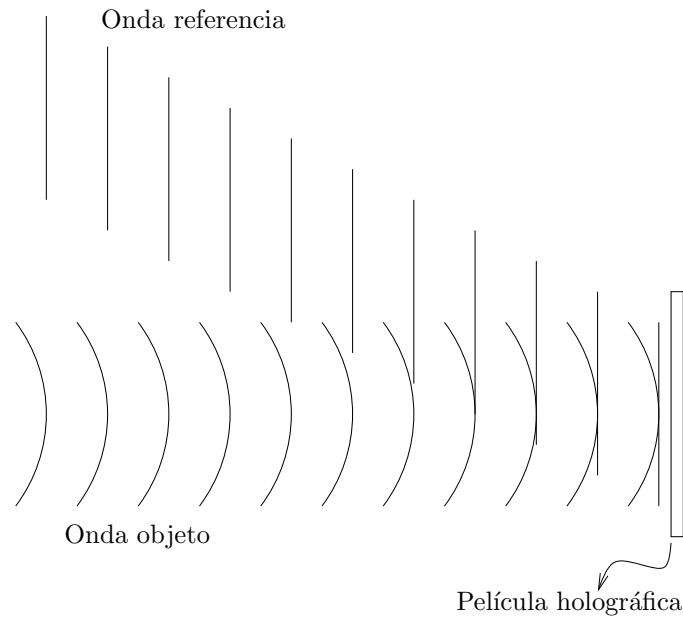


Figura 1.1: Proceso de grabado sobre una película holográfica.

La resolución que se alcanza en las películas holográficas es de hasta 5000 líneas por milimetro en un BTO y cada material tiene una resolución en particular, para hacer la reconstrucción del objeto se emplea el haz de referencia para iluminar el holograma.

1.2 Holografía digital

Las invenciones del detector CCD Fig(1.2) se dio el 17 de octubre de 1969 en los Laboratorios Bell y fueron inventados por Willard Boyle y George Smith, ambos premiados con el premio nobel de Física en el 2009 por este invento. Es un circuito integrado que contiene un número determinado de condensadores enlazados o acoplados. Bajo el control de un circuito interno, cada condensador puede transferir su carga eléctrica a uno o a varios de los condensadores que estén a su lado en el circuito impreso. La resolución alcanzada en estos dispositivos depende del numero de pixeles y del tamaño de este.

La holografía digital es una técnica en la cual el registro se hace sobre un detector CCD. La diferencia que hay entre la holografía convencional y la digital

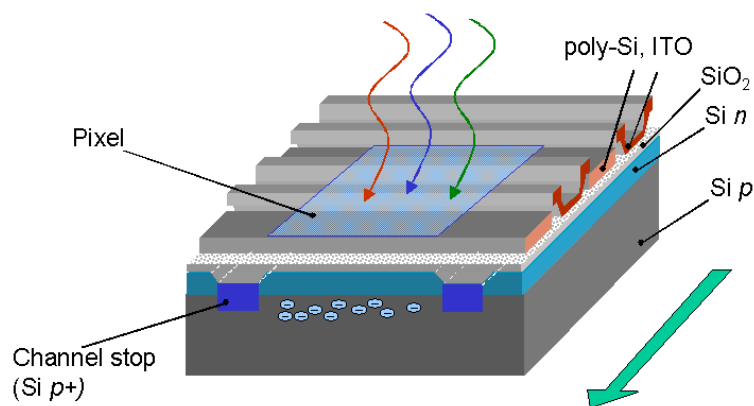


Figura 1.2: Detector CCD.

es el sistema donde se hace el registro, para la holografía convencional es una placa holográfica y la digital un detector CCD. Una de las ventajas de la holografía digital en comparación con la convencional es su versatilidad lo que la hace más atractiva en las diferentes áreas de la investigación y una de las desventajas en comparación a la holografía clásica es la resolución ya que en la holografía convencional la resolución es mayor comparada con la holografía digital.

La técnica de la holografía digital se aplica con buenos resultados en microscopía. Esto se debe a los avances que se hacen en la mejora de los detectores CCD, lo que hace que los resultados que se obtienen vayan mejorando de la mano con las diferentes técnicas implementadas.

En esta tesis se busca adaptar las mejores condiciones de registro asociadas al carácter discreto del detector. Esto se hace adaptando la tasa de muestreo que impone el detector a la tasa de muestreo óptimo del campo difractado en el régimen de Fresnel, bajo la hipótesis de que una distancia z la tasa de muestreo del campo es igual a la tasa que impone el detector. Donde el tamaño del pixel no es importante, la mayor importancia está en la distancia interpixel la cual vamos a adaptar a la tasa de muestreo del campo difractado.

1.3 Registro de un holograma digital

Una onda de referencia y la onda objeto interfieren sobre la superficie de un dispositivo CCD, el resultado es un holograma digitalizado, la fuente utilizada es un láser con el cual se genera la onda referencia y la objeto. Para lograr estas dos, se usa un divisor de haz **BS**, sobre el cual incide el frente de onda colimado, que divide 50% en una dirección y 50% en otra dirección, cada uno de estos haces llega a un espejo donde se cambia la dirección; uno es el haz de referencia y el otro el haz objeto; luego estos haces generan un patrón de interferencia que es registrado en un detector **CCD** Fig(1.3).

Existen diferentes modalidades para hacer holografía digital, a continuación enumeramos dos de estas técnicas

1. Hologramas generados por computador (*Computer Generated Holograms*): En esta técnica el holograma se realiza numéricamente y su reconstrucción se hace ópticamente.
2. Holografía digital (*Digital Holography*): El holograma se realiza ópticamente y su reconstrucción se hace numéricamente.

La metodología de la holografía digital hace que ésta tenga aplicaciones con buenos resultados en microscopía[2].

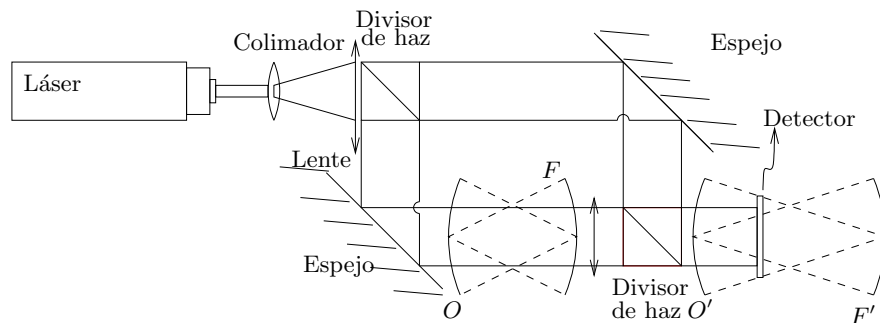


Figura 1.3: Registro de un holograma.

1.4 Reconstrucción de un holograma digital

La reconstrucción de un holograma digital se hace numéricamente. Este proceso consiste en tomar el patrón de difracción de Fresnel y usando un algoritmo de reconstrucción nos remontamos a la imagen del objeto registrado, la cual se encuentra sobre la superficie O' . El proceso de reconstrucción se puede hacer de diferentes formas, utilizando integrales de Fresnel, transformaciones de Fourier fraccionaria u otros algoritmos, en esta tesis usamos la segunda metodología en el cual se dice que hay un orden α que nos remonta a la imagen del objeto registrado.

Para calcular el campo reconstruido a partir del patrón de difracción de Fresnel de un holograma registrado, utilizando una onda de referencia plana (de amplitud 1) perpendicular al plano de registro, lo cual se escribe como:

$$U'(\vec{s}) = A e^{\frac{i\pi}{\lambda d} s^2} \int_{-\infty}^{\infty} U(\vec{r}) e^{\frac{i\pi}{\lambda d} r^2} e^{\frac{i2\pi}{\lambda d} (\vec{r} \cdot \vec{s})} dr, \quad (1.1)$$

donde $U'(\vec{s})$ es el campo reconstruido en la aproximación de Fresnel[2]; $A = \frac{e^{\frac{i2\pi d}{\lambda}}}{i\lambda d}$ es una constante dependiente de la distancia d de reconstrucción y $\vec{r} = (x, y)$ y $\vec{s} = (\xi, \eta)$ Fig(1.4), son las coordenadas el plano de registro y el plano de reconstrucción.

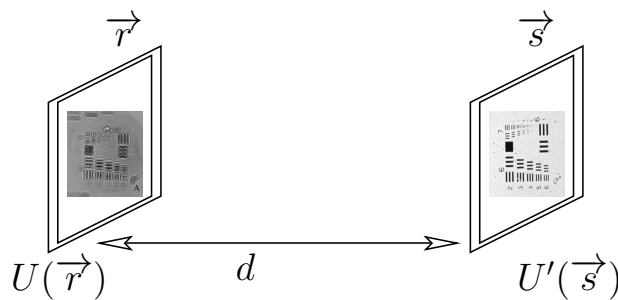


Figura 1.4: Reconstrucción de un holograma digital a una distancia d .

Para lograr la mejor reconstrucción con la menor pérdida de información posible el campo debe ser muestreado de forma correcta. Es así como se busca la mejor posición del sensor CCD de la Fig(1.3) para lograr un buen registro.

Capítulo 2

SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL PROBLEMA E IMPLEMENTACIÓN EXPERIMENTAL

Los desarrollos matemáticos presentados en esta tesis están basados en la óptica metaxial, la cual fue inventada por Georges Bonnet en los años 1975 – 1978. Pella-Finet en sus lecciones de óptica de Fourier presenta nuevos métodos que utilizan la transformación de Fourier fraccionaria, cuya aplicación a la óptica esta basada en receptores y emisores esféricos, es conocida desde 1993 y es un desarrollo importante para esta tesis. La transformción de fourier fraccionaria es la parte central del cálculo operacional, la cual está bien adaptada a la teoría metaxial utilizada para la solución del problema propuesto en este trabajo.

2.1 Difracción metaxial

2.1.1 Aproximación metaxial

La aproximación metaxial es una aproximación de segundo orden con respecto a los parámetros de abertura (dimensiones laterales y ángulos). En un desarrollo de

segundo orden se usan emisores y receptores esféricos bajo las siguientes condiciones:

- Aberturas moderadas. Esto significa que las dimensiones transversales de los emisores y receptores son pequeñas con respecto a las distancias de observación y radios de curvatura para un emisor A .

$$\|\vec{r}\| \ll |R_A| \quad (2.1)$$

- Los ángulos, de los rayos con el eje del emisor o receptor, son moderados.
- Aproximación de los emisores y receptores por porciones de esferas.
- Los cálculos se hacen al segundo orden, con base en los parámetros anteriores[5].

2.1.2 Transparencia de curvatura

Considerando dos porciones de esferas A y B tangentes (ver figura 2.1), con un vértice común, cuyos radios respectivos son R_A y R_B ; las coordenadas son las mismas sobre A y B debido a que ambas esferas tienen un plano en común (P).

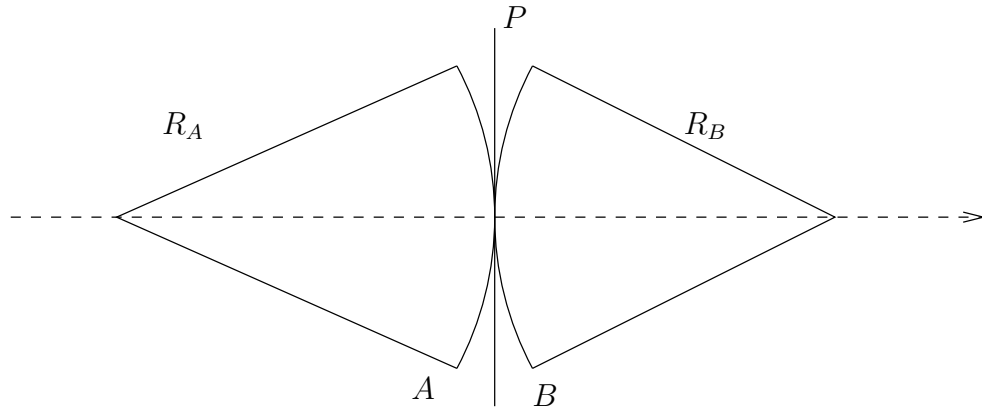


Figura 2.1: Transparencia de curvatura de A hasta B .

De la Fig(2.1) buscamos la relación entre el campo en un punto M de A y el campo en la proyección m de M sobre P , al segundo orden tenemos:

$$\overline{Mm} = \frac{r^2}{2R_A}, \quad (2.2)$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$. La diferencia de recorrido \overline{Mm} produce una diferencia de fase

$$\varphi = -\frac{2\pi\overline{Mm}}{\lambda}, \quad (2.3)$$

de tal forma que

$$U_P(\vec{r}) = U_A(\vec{r})e^{\frac{i\pi r^2}{\lambda R_A}}. \quad (2.4)$$

Se utiliza la misma relación entre B y P , y sustituyendo R_A por R_B se obtiene

$$U_B(\vec{r}) = U_A(\vec{r})e^{-\frac{i\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A}\right)r^2}. \quad (2.5)$$

Se dice que la transferencia del campo de A hasta B se hace por medio de una transparencia de curvatura[6].

2.1.3 Difracción de Fraunhofer

Se tiene un emisor A de radio de curvatura R_A , con vértice V y centro C . Se conoce el campo sobre A , se calculará la amplitud del campo sobre una esfera F que tiene como vértice C , centro de curvatura V (ver figura 2.2). A y F son esferas confocales, el radio de curvatura de F es $R_F = -R_A$. La transferencia del campo $U_A(\vec{r})$ entre el emisor monocromático A con longitud de onda λ y un receptor esférico F se expresa por

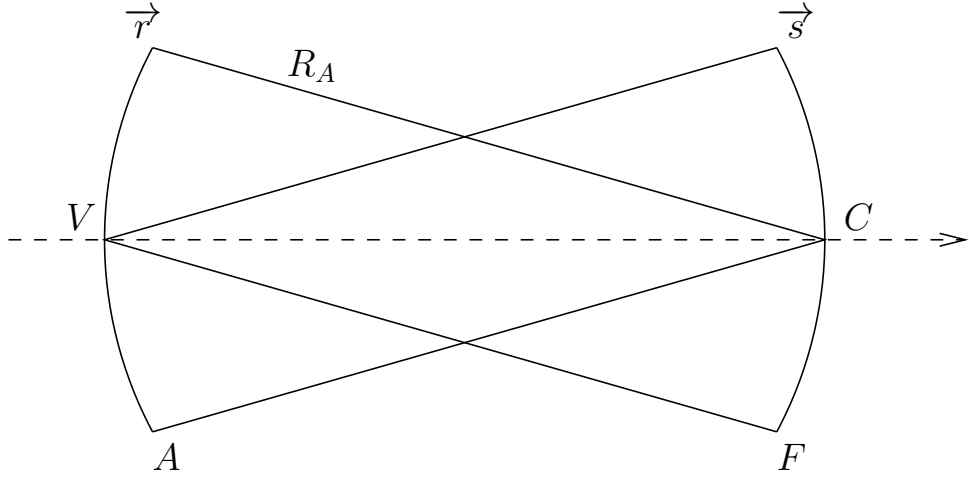


Figura 2.2: Difracción de Franhuofer desde A a F

$$U_F(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \int_{R^2} U_A(\vec{r}) e^{\frac{2i\pi \vec{s} \cdot \vec{r}}{\lambda R_A}} d\vec{r}, \quad (2.6)$$

donde se ha omitido el factor de fase $\Phi = \exp(-2i\pi R_A/\lambda)$, el cual corresponde al retardo de fase que está asociado a la propagación desde A hasta F , por ser un

campo monocromático; lo cual permite eliminar Φ con una translación del origen del tiempo. La transferencia del campo desde A hasta F se hace por medio de una transformación de Fourier óptica donde F es la esfera de Fourier de A y corresponde al fenómeno de difracción de Fraunhofer[5].

2.2 El dioptrio

En la imagen coherente se busca una copia exacta de un objeto en amplitud y fase, entre el objeto y su imagen hay un aumento lateral de la imagen, implica que la imagen tiene un tamaño diferente al del objeto. El dioptrio (ver figura 2.3) es una porción de esfera que separa dos medios isótropos y homogéneos de índices de refracción respectivos n y n' [6].

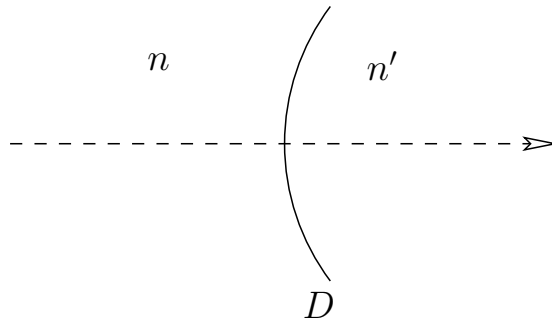


Figura 2.3: Ilustración de un dioptrio.

2.2.1 Relación de conjugación

Sea D un dioptrio esférico que separa dos medios n y n' con longitudes de onda λ y λ' , R_D el radio de curvatura de D y vértice O ; S un punto luminoso sobre el eje del dioptrio situado en el espacio objeto con índice n , a una distancia $d = \overline{OS}$ desde el vértice, y S' un punto en el espacio imagen, sobre el eje con $d' = OS'$ (ver figura 2.4). Para calcular la amplitud del campo sobre D consideramos una esfera A tangente a D y centrada en S con radio de curvatura d , la amplitud del campo sobre A es constante y se toma con magnitud 1; la amplitud del campo sobre D se

expresa por medio de una transparencia de curvatura como

$$U_{D_-}(\vec{r}) = e^{-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_D} - \frac{1}{d} \right) r^2}, \quad (2.7)$$

donde U_{D_-} indica que el campo es anterior al dioptrio. De forma similar se hace para la parte posterior del dioptrio U_{D_+}

$$U_{D_+}(\vec{r}) = e^{-\frac{i\pi}{\lambda'} \left(\frac{1}{R_D} - \frac{1}{d'} \right) r^2}, \quad (2.8)$$

donde S' será la imagen de S a través del dioptrio, si una onda esférica originada en S se transforma en una onda esférica convergente hacia S' , esto sucede cuando $U_{D_+}(\vec{r}) = U_{D_-}(\vec{r})$ para todo \vec{r} , como $n\lambda = n'\lambda'$ se cumple si

$$n' \left(\frac{1}{d'} - \frac{1}{R_D} \right) = n \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R_D} \right), \quad (2.9)$$

así

$$\frac{n'}{d'} - \frac{n}{d} = \frac{n' - n}{R_D}, \quad (2.10)$$

la cual es la relación de conjugación del dioptrio esférico.

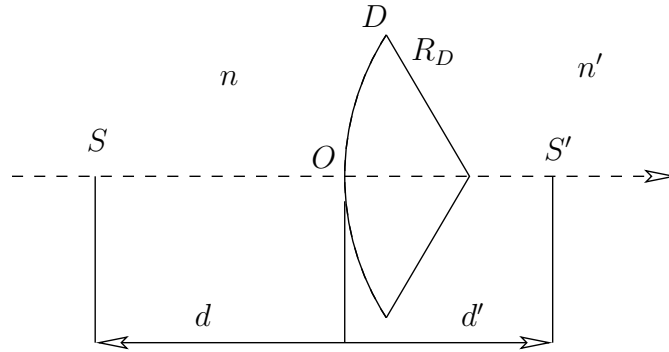


Figura 2.4: Regla de conjugación del dioptrio esférico.

2.2.2 Imagen de una esfera tangente al dioptrio

Sean A y A' dos esferas tangentes a un dioptrio D , de centros respectivos C y C' y radios R_A y $R_{A'}$ (ver figura 2.5). Supongamos que A está en el espacio objeto y A' está en el espacio imagen, la longitud de onda del campo en el vacío es λ_0 , se tiene

$$U_{A'}(\vec{r}) = U_D(\vec{r}) e^{-\frac{i\pi n'}{\lambda_0} \left(\frac{1}{R_{A'}} - \frac{1}{R_D} \right) r^2} \quad (2.11)$$

$$= U_A(\vec{r}) e^{-\frac{i\pi}{\lambda_0} \left(\frac{n-n'}{R_D} - \frac{n}{R_A} + \frac{n'}{R_{A'}} \right) r^2}. \quad (2.12)$$

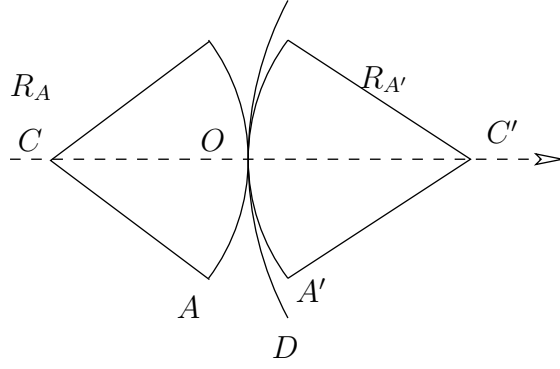


Figura 2.5: La imagen de una esfera A tangente al dioptrio es A' tangente al dioptrio y su centro es el conjugado de C .

El campo sobre A' es la imagen coherente del campo sobre A si el término de fase cuadrática de la ecuación (2.11) es igual a uno para todo \vec{r} , es decir, para

$$U_{A'}(\vec{r}) = U_A(\vec{r}), \quad (2.13)$$

lo que conlleva a

$$\frac{n' - n}{R_D} + \frac{n}{R_A} = \frac{n'}{R_{A'}}, \quad (2.14)$$

la cual es la relación de conjugación entre C y C' . De lo anterior se concluye que la esfera A' tangente al dioptrio es la imagen coherente de la esfera A tangente al dioptrio si el centro de A' es la imagen paraxial del centro de A [5].

2.2.3 Imagen de una esfera centrada sobre el dioptrio

Se tiene un emisor esférico C , a una distancia d de un dioptrio D , el cual está entrado en O y de vértice V , tal que $\overline{OV} = d$ (ver figura 2.6). El radio de curvatura de C es $-d$ y F es la esfera de Fourier de C que está centrada en C y de radio d .

La propagación del campo desde C a F se expresa como:

$$U_F(\vec{s}) = \frac{-i}{\lambda d} \widehat{U}_C \left(-\frac{\vec{s}}{\lambda d} \right), \quad (2.15)$$

donde

$$U_F(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda R_A} \vec{s} \cdot \vec{r}} U_A(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (2.16)$$

es la transformada de fourier óptica de U_A .

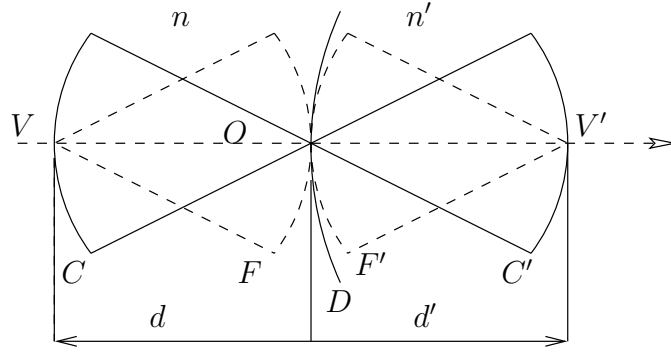


Figura 2.6: La imagen de una esfera C centrada sobre la superficie del dioptrio es la esfera C' centrada sobre el dioptrio y el vértice es el conjugado de C .

El campo F' tangente al dioptrio D es la imagen coherente de la esfera F tangente al dioptrio si $U_{F'}(\vec{s}) = U_F(\vec{s})$.

Sea C' la esfera de vértice V' , centrada sobre D . La esfera C' es la esfera de F' , y de radio $-d'$ con coordenadas \vec{r} sobre C y \vec{r}' sobre C' . La amplitud del campo registrado sobre C' es

$$\begin{aligned} U_{C'}(\vec{r}') &= \frac{i}{\lambda'd'} \widehat{U}_{F'} \left(\frac{\vec{r}'}{\lambda d'} \right) \\ &= \frac{\lambda d}{\lambda'd'} \widehat{U}_F \left(\frac{\vec{r}'}{\lambda d'} \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

lo cual podemos escribir en la forma

$$U_{C'}(\vec{r}') = \frac{\lambda d}{\lambda'd'} \widehat{U}_C \left(\frac{\vec{r}'}{\lambda d'} \right) = \frac{n'd}{nd'} U_C \left(\frac{n'd}{nd'} \vec{r}' \right). \quad (2.18)$$

Se define $g_v = \frac{nd'}{n'd}$ el aumento lateral en los vértices, luego tenemos que

$$U_{C'}(\vec{r}') = \frac{1}{g_v} U_C \left(\frac{1}{g_v} \vec{r}' \right), \quad (2.19)$$

de lo anterior se concluye que $U_{C'}(\vec{r}')$ es una versión escalada de U_C por un factor g_v [5].

2.2.4 Imagen de una esfera cualquiera

Sea un emisor de radio R_A y vértice V , centrado en Ω y situado en el espacio objeto. Sea $d = \overline{OV}$, con la esfera C tangente a A y centrada en O . Su vértice es V y con radio $-d$ (ver figura 2.7).

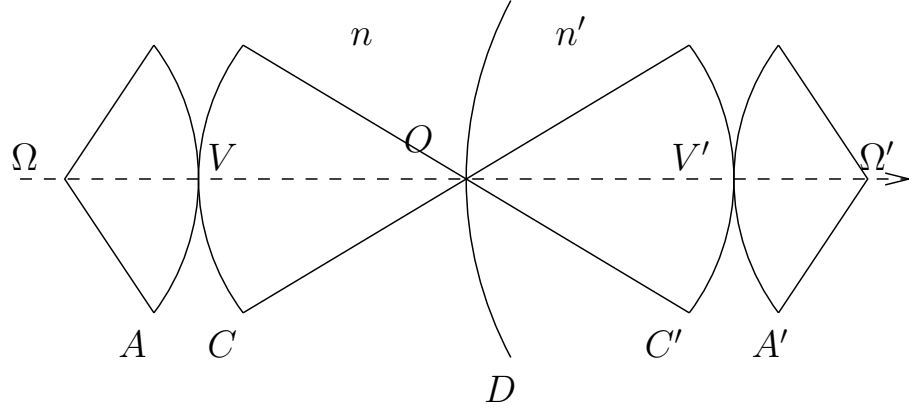


Figura 2.7: La imagen de una esfera C centrada sobre la superficie del dioptrio es la esfera C' centrada sobre el dioptrio y el vértice es el conjugado de C .

La amplitud del campo sobre C se determina de la amplitud del campo sobre A usando una transparencia de curvatura, así

$$U_C(\vec{r}) = U_A e^{\frac{i\pi n}{\lambda_0} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{R_A} \right) r^2}. \quad (2.20)$$

Sea C' la imagen coherente de C , su vértice es V' y radio $d' = \overline{OV'}$. Utilizando las ecuaciones (2.16) y (2.19) para escribir la amplitud del campo sobre A' , el cual es tangente a C' , de radio $R_{A'}$ y centro Ω' en la siguiente forma

$$U_{A'}(\vec{r}') = U_{C'}(\vec{r}') e^{-\frac{i\pi n'}{\lambda_0} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{R_{A'}} \right) r'^2} \quad (2.21)$$

$$= \frac{n'd}{nd'} U_A \left(\frac{n'd}{nd'} \vec{r}' \right) e^{\frac{i\pi n}{\lambda_0} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{R_A} \right) \frac{n'^2 d^2}{n^2 d'^2} r'^2} e^{-\frac{i\pi n'}{\lambda_0} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{R_{A'}} \right) r'^2}. \quad (2.22)$$

El campo sobre A' será la imagen coherente del campo sobre A si el termino de fase cuadrática en la ecuación (2.22) es igual a 1 para cualquier \vec{r}' . Esto se cumple si

$$\frac{d'}{n'} \left(1 + \frac{d'}{R_{A'}} \right) = \frac{d}{n} \left(1 + \frac{d}{R_A} \right). \quad (2.23)$$

Si $q = \overline{O\Omega}$ y $q' = \overline{O\Omega'}$, luego

$$R_A = q - d, \quad R_{A'} = q' - d', \quad (2.24)$$

la relación (2.23) se escribe también como

$$n' \left(\frac{1}{d'} - \frac{1}{q'} \right) = n' \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{q} \right). \quad (2.25)$$

Por otra parte la ecuación 2.10 se aplica a V y V' , que son conjugados, y de 2.23 se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{n'}{q'} = \frac{n}{q} + \frac{n' - n}{R_D}. \quad (2.26)$$

Esta implica que Ω' es imagen paraxial de Ω , entonces la relación entre los campos A y A' es

$$U_{A'}(\vec{r}') = \frac{1}{g_v} U_A \left(\frac{\vec{r}'}{g_v} \right). \quad (2.27)$$

De la ecuación 2.14 se define

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_{A'}} - \frac{1}{R_A} \right), \quad (2.28)$$

con la condición de que $f' = f$, para una lente delgada [17] se tiene

$$\frac{1}{d'} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f'}, \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f'}, \quad (2.30)$$

donde expresión 2.29 es la relación de conjugación para los vértices y 2.30 es la relación de conjugación para los centros, ambas expresiones son llamadas relaciones de doble conjugación de la óptica metaxial.

2.3 Teorema del muestreo fraccionario

Se tiene una función f tal que su transformada de Fourier fraccionaria de orden α tiene soporte compacto, confinado en el intervalo $[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$, entonces f puede ser muestreada y reconstruida perfectamente si las muestras se toman a una tasa $\eta \leq \frac{\sin \alpha}{B}$.

Cuando el orden α de la transformación de Fourier fraccionaria es igual a $\pi/2$ se tiene el teorema de muestreo de Shannon, con una tasa dada por $\eta \leq \frac{1}{B}$ como un caso particular del teorema del muestreo fraccionario [6, 7].

2.3.1 Fórmula de interpolación

Sea f una función de banda limitada en un dominio de Fourier fraccionario α y $f_n = f\left(n\frac{\sin\alpha}{B}\right)$ una versión muestreada de f a una tasa $\frac{\sin\alpha}{B}$, entonces f puede ser recuperada en la forma

$$f(x) = e^{i\pi x^2 \cot\alpha} \sum_n e^{-i\pi n^2 \sin\alpha \cos\alpha/B^2} f\left(n\frac{\sin\alpha}{B}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi Bx}{\sin\alpha} - n\pi\right)}{\frac{\pi Bx}{\sin\alpha} - n\pi}. \quad (2.31)$$

Cuando $\alpha = \pi/2$ se llega a la formula de interpolación de Whittaker-Shannon.

2.4 Solución matemática del problema

En esta sección se determinara la distancia z desde un sistema formador de imagen (Lente) a la cual se debe colocar un detector para que haga el mejor registro posible partiendo de parametros conocidos.

Sea A , el campo de un objeto cualquiera, el cual está sobre la superficie de una esfera con radio de curvatura R_A y centrada en C , separado una distancia d de una lente. Sobre otra superficie esférica F con radio de curvatura R_F y centrada en V a una distancia q desde la lente, se encuentra el patrón de difracción de Fraunhofer del campo A . La imagen de A , a traves de un sistema centrado formador de imagen (lente), se encuentra sobre una superficie esférica A' de radio de curvatura $R_{A'}$, centrada en C' y a una distancia d' de la lente (ver figura 2.8). El patrón de difracción de Fraunhofer del campo sobre A' está también sobre una superficie esférica F' de radio de curvatura $R_{F'}$ y centrado en V' a una distancia q' de la lente, lo anterior forma un sistema con doble conjugación de vértices y centros[6].

El detector será modelado como una peine de Dirac finito, es decir, no se considerará las dimensiones del pixel y por lo tanto no se tendrá en cuenta el área de integración del pixel. La separación entres los pixeles corresponde a la separación entre dos distribuciones de Dirac, así tenemos una tasa de muestreo fija impuesta por el detector.

El interés es determinar la distancia D desde el campo en A' , para posicionar un detector en el plano B y que de esta forma la tasa de muestreo que impone el detector se adapte a la tasa de muestreo del campo difractado desde A' hasta B .

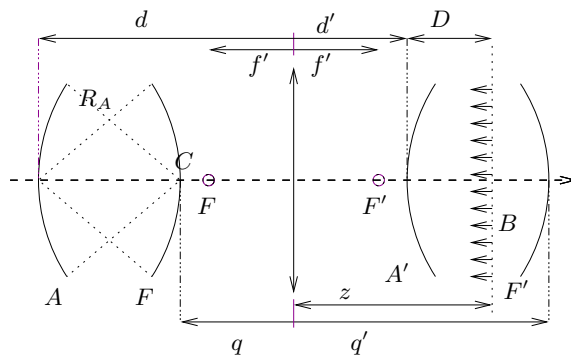


Figura 2.8: Ilustra como están los campos después de pasar por el sistema formador de imagen

Primero escribimos D en función de la distancia z (ver figura 2.8), para esto se parte de las ecuaciones (2.29) y (2.30), y se obtiene

$$d' = \frac{df'}{d + f'}, \quad (2.32)$$

$$q' = \frac{qf'}{q + f'}. \quad (2.33)$$

El radio de curvatura es una cantidad algebraica la cual expresamos como:

$$R_{A'} = q' - d', \quad (2.34)$$

el signo del radio indica de qué lado se encuentra la concavidad de A' . Se toma la convención de que la longitud algebraica es positiva si va en el mismo sentido de la propagación de la luz.

Sustituyendo (2.32) y (2.33) en (2.34) tenemos

$$R_{A'} = \frac{qf'}{q + f'} - \frac{df'}{d + f'},$$

así

$$R_{A'} = \frac{f'^2(q - d)}{(q + f')(d + f')}. \quad (2.35)$$

Se define el aumento lateral de los vértices g_v , para $n = n'$, como:

$$g_v = \frac{d'}{d}, \quad (2.36)$$

y sustituyendo (2.32) en (2.36) se obtiene

$$g_v = \frac{f'}{f' + d}. \quad (2.37)$$

Se define el aumento lateral de los centros g_c como:

$$g_c = \frac{q'}{q}, \quad (2.38)$$

y sustituyendo (2.33) en (2.38) se obtiene

$$g_c = \frac{f'}{q + f'}. \quad (2.39)$$

Sustituyendo (2.37), (2.39) y (2.24) en (2.35) escribimos

$$R_{A'} = q' - d' = g_v g_c R_A, \quad (2.40)$$

finalmente podemos escribir

$$D = z - d' = z - \frac{df'}{d + f'} = z - g_v d, \quad (2.41)$$

el cual nos da la distancia D en términos de la distancia z . La distancia D es importante por que es el radio de curvatura de la esfera del campo difractado sobre el detector y esta distancia se escribe en terminos de z y de d' los cuales conocemos.

2.4.1 Difracción de Fresnel

En esta sección se va explicar el fenomeno de de difracción de Fresnel, ya que la solución de nuestro problema está asociado a este fenomeno.

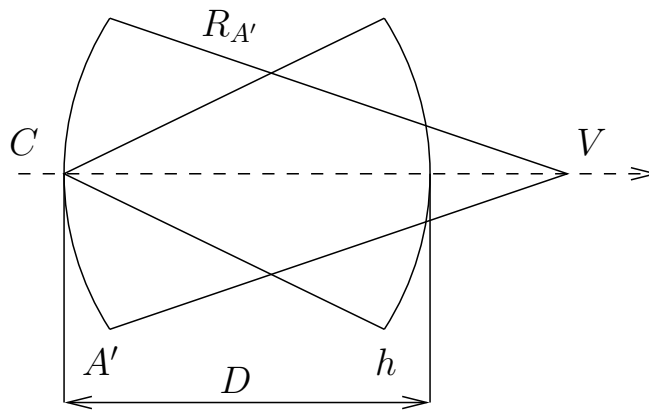


Figura 2.9: Difracción de Fresnel de una esfera h .

El fenómeno de difracción de Fresnel aparece cuando se observa el campo difractado sobre una esfera h centrada sobre el emisor A' (ver figura 2.9), la esfera

h siendo diferente de la esfera de Fourier de A' . El vértice de h se localiza a cierta distancia del centro de A' , la esfera h se le llama esfera cardinal y su radio de curvatura es $-D$ ($D \neq R_{A'}$). La amplitud del campo sobre h es

$$U_h(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda D} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_{A'}} \right) r'^2} e^{\frac{i2\pi}{\lambda D} \vec{r}' \cdot \vec{s}} U_{A'}(\vec{r}') d\vec{r}', \quad (2.42)$$

donde $U_{A'}$ es la imagen coherente de U_A y \vec{r}' son las coordenadas sobre A' . Sustituyendo la ecuación (2.27) en (2.42) se tiene

$$U_h(\vec{s}) = \frac{i}{g_v \lambda D} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_{A'}} \right) r'^2} e^{\frac{i2\pi}{\lambda D} \vec{r}' \cdot \vec{s}} U_A \left(\frac{\vec{r}'}{g_v} \right) d\vec{r}', \quad (2.43)$$

haciendo el cambio de variable $\vec{r} = \frac{\vec{r}'}{g_v}$ se escribe

$$U_h(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda D} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_{A'}} \right) g_v^2 r^2} e^{\frac{i2\pi}{\lambda D} g_v \vec{r} \cdot \vec{s}} U_A(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (2.44)$$

Se define el parámetro

$$\mu' = \frac{D}{R_{A'}} \mapsto \mu' R_{A'} = D, \quad (2.45)$$

y sustituyendo (2.45) en (2.44) se obtiene

$$\begin{aligned} U_h(\vec{s}) &= \frac{i}{\lambda \mu' R_{A'}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{\mu' R_{A'}} - \frac{1}{R_{A'}} \right) g_v^2 r^2} e^{\frac{i2\pi}{\lambda \mu' R_{A'}} g_v \vec{r} \cdot \vec{s}} U_A(\vec{r}) d\vec{r} \\ &= \frac{i}{\lambda \mu' R_{A'}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-i\pi}{\lambda R_{A'}} \left(\frac{1 - \mu'}{\mu'} \right) g_v^2 r^2} e^{\frac{i2\pi}{\lambda \mu' R_{A'}} g_v \vec{r} \cdot \vec{s}} U_A(\vec{r}) d\vec{r}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

2.4.2 Difracción y la transformación de Fourier fraccionaria

Aquí se hace uso de la transformación de Fourier fraccionaria para expresar la difracción, esto basado en la analogía que existe en las expresiones matemáticas para esta dos fórmulas. La transformación de Fourier fraccionaria se define

$$F[f](\vec{\sigma}) = \frac{i e^{-i\alpha}}{\sin \alpha} e^{-i\pi \sigma^2 \cot \alpha} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\pi \rho^2 \cot \alpha} e^{\frac{2i\pi \vec{\sigma} \cdot \vec{\rho}}{\sin \alpha}} f(\vec{\rho}) d\vec{\rho}, \quad (2.47)$$

y se expresa la difracción de Fresnel como una transformación de Fourier fraccionaria de orden α' , para esto se lleva a variables reducidas y amplitudes reducidas adecuadas.

Comparando las ecuaciones (2.46) y (2.47) se escoge

$$\cot \alpha' = g_v^2 \varepsilon \frac{1 - \mu'}{\mu'}, \quad (2.48)$$

tal que

$$\mu' = \frac{g_v^2 \varepsilon \sin \alpha'}{\cos \alpha' + g_v^2 \varepsilon \sin \alpha'}. \quad (2.49)$$

Utilizando las variables reducidas

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_{A'}}} \vec{r}, \quad \vec{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_{A'} g_v}} (\cos \alpha' + g_v^2 \varepsilon \sin \alpha') \vec{s}, \quad (2.50)$$

expresamos las amplitudes de los campos reducidos

$$V_{A'}(\vec{\rho}) = U_{A'} \left(\sqrt{\lambda \varepsilon R_{A'}} \vec{\rho} \right), \quad (2.51)$$

$$V_h(\vec{\sigma}) = U_h \left(\sqrt{\lambda \varepsilon R_{A'} g_v} \frac{\vec{\sigma}}{\cos \alpha' + g_v^2 \varepsilon \sin \alpha'} \right). \quad (2.52)$$

Con estas condiciones se escribe la ecuación (2.47) en la forma

$$V_h(\vec{\sigma}) = \frac{i(\cos \alpha' + g_v^2 \varepsilon \sin \alpha')}{\sin \alpha} e^{-i\pi \sigma^2 \cot \alpha'} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\pi \rho^2 \cot \alpha'} e^{\frac{2i\pi \vec{\sigma} \cdot \vec{\rho}}{\sin \alpha'}} V_{A'}(\vec{\rho}) d\vec{\rho}. \quad (2.53)$$

Para el problema a solucionar $\Delta s = \Delta x$, es la distancia entre dos pixeles, por lo cual

$$\Delta \sigma = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_{A'} g_v}} (\cos \alpha' + g_v^2 \varepsilon \sin \alpha') \Delta x, \quad (2.54)$$

donde $\Delta \sigma$ es la distancia interpixel escalada y ε es el parámetro auxiliar. La base de la solución del problema es la difracción de Fresnel y la transformación de Fourier fraccionaria, por lo tanto expresamos el tamaño del objeto escalado T como

$$T = \frac{X'}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_{A'}}} = \frac{g_v X}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_{A'}}}, \quad (2.55)$$

donde X es el tamaño del objeto y $g_v = \frac{X'}{X}$ es el aumento en el vértice.

La cámara CCD cumple el teorema del muestreo para una campo difractado si

$$\Delta \sigma \leq \frac{\sin \alpha'}{T}. \quad (2.56)$$

Sustituyendo (2.54) y (2.55) en (2.56) se llega a

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_{A'} g_v}} (\cos \alpha' + g_v^2 \varepsilon \sin \alpha') \Delta x \leq \frac{\sin \alpha' \sqrt{\lambda \varepsilon R_{A'}}}{g_v X}, \quad (2.57)$$

resultando

$$\Delta x \leq \frac{\lambda \varepsilon R_A \mu'}{g_v^2 X}. \quad (2.58)$$

Las ecuaciones $\mu' R_{A'} = D$ y $D = z - g_v d$ se sustituyen en (2.58), y se obtiene

$$z \geq g_v \left(g_v \frac{X \Delta x}{\lambda} + d \right), \quad (2.59)$$

donde z es la distancia óptima a la cual se debe posicionar el detector para tener el mejor registro posible con la menor pérdida de información posible, es decir, la distancia donde la rata de muestreo del sensor coincide con la rata óptima de muestreo del campo difractado.

Determinación de la distancia d de un objeto antes de una lente

Conociendo $z = 20[cm]$, $\lambda = 6.4 * 10^{-7}$, $X = 0.5[cm]$, $\Delta x = 1.0 * 10^{-3}[cm]$ y $f' = 15[cm]$ (ver figura 2.10) se calcula la distancia del objeto que produce un óptimo registro.

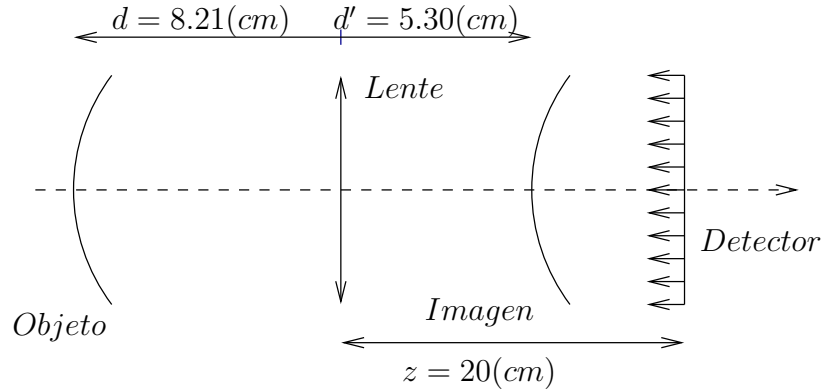


Figura 2.10: Ilustración del ejemplo.

De las ecuaciones (2.59) y (2.37) se tiene

$$z = \frac{f'}{f' + d} \left[\frac{f'}{f' + d} \frac{X \Delta x}{\lambda} + d \right], \quad (2.60)$$

como d es negativo, se escribe

$$z = \frac{f'}{f' - d} \left[\frac{f'}{f' - d} \frac{X \Delta x}{\lambda} - d \right], \quad (2.61)$$

así

$$a \left(\frac{f'}{f' - d} \right)^2 - \frac{f'd}{f' - d} - z = 0, \quad (2.62)$$

donde

$$a = \frac{X\Delta x}{\lambda}. \quad (2.63)$$

Con esto se escribe

$$af'^2 - f'd(f' - d) - z(f' - d)^2 = 0, \quad (2.64)$$

y

$$(f' - z)d^2 + (2zf' - f'^2) + f'^2(a - z) = 0. \quad (2.65)$$

Si llamamos $A = (f' - z)$, $B = (2zf' - f'^2)$ y $C = f'^2(a - z)$, la solución de la ecuación tiene la forma $d = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$, substituyendo los valores de las variables correspondientes se obtiene los siguientes valores para d : $d1 = 8.21[cm]$ y $d2 = 66.78[cm]$.

Capítulo 3

MONTAJE EXPERIMENTAL

El experimento consta de dos pasos: Registro del holograma digital y reconstrucción numérica.

A continuación se hace una descripción del proceso realizado.

3.1 Montaje óptico para el registro de los hologramas

El montaje óptico para hacer el registro de los hologramas consta de los siguientes dispositivos: Un láser de $He - Ne$ (Ls) de longitud de onda $\lambda = 632.8[nm]$; un atenuador (At) de intensidad; un filtro espacial (Fe); tres lentes (L) convergentes, dos con longitud focal $f = 30cm$ y una con $f = 20cm$; dos espejos E ; dos divisores de haz (BS); una cámara CCD *Guppy F-046B* y un computador personal (PC).

Se hicieron diferentes montajes los cuales se describen a continuación.

El haz del láser de $He - Ne$ incide sobre un atenuador de intensidad luego entra en un dispositivo que hace filtrado espacial, generando un frente de onda esférico el cual incide sobre una lente convergente que se posiciona de tal forma que genere un frente de onda plana. Este (frente de onda plano) incide sobre la superficie de un divisor de haz, el cual divide el frente de onda plano en dos, el 50%

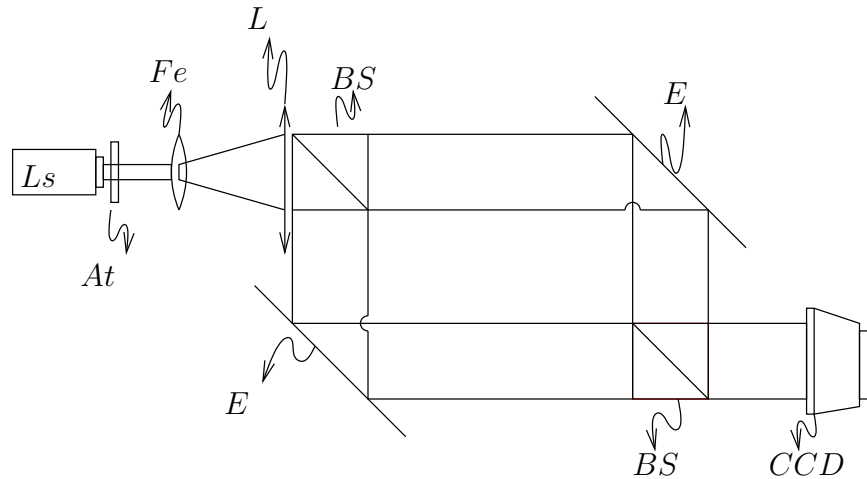


Figura 3.1: Montaje para obtener las franjas verticales de interferencia.

sigue en la misma dirección y el otro 50% es reflejado. Estas ondas inciden sobre sus espejos respectivos, para luego incidir sobre el segundo divisor de haz y así formar un patrón de interferencia sobre la superficie de un detector *CCD* (ver figura 3.1). A continuación se hace una descripción de los objetos posicionados en uno de los brazos del interferómetro.

1. En uno de los brazos del interferómetro de Mach-Zender se coloca un objeto plano iluminado con un frente de onda plano. El haz objeto correspondiente pasa por un sistema formador de imagen y a la distancia focal de la lente encontramos el patrón de difracción de Fraunhofer de la imagen sobre la superficie F' . Si posicionamos el objeto O entre $\infty > d > 2f$, su imagen O' la encontramos a una distancia $f < d' < 2f$, de tal forma que quede fuera del interferómetro (ver figura 3.2).
2. Con las condiciones de iluminación del numeral anterior, se cambia la posición del objeto O a una distancia $d < f$, la imagen O' se encuentra a una distancia $d' > |d|$ (ver figura 3.3). Los dos montajes anteriores se hicieron utilizando una lente de focal $f = 20cm$ para el sistema formador de imagen.
3. Teniendo un patrón de interferencia de franjas verticales, se posiciona una lente convergente; con focal $f = 30cm$, en uno de los brazos del interferómetro; la

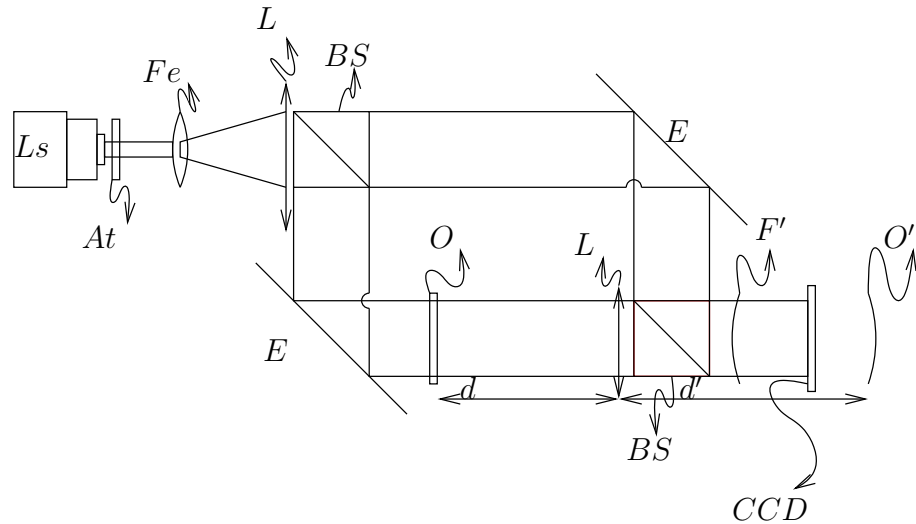


Figura 3.2: Ilustración de la forma que se realizó la posición de los elementos ópticos en uno de los brazos del interferómetro de Mach-Zehnder para $d > 2f$.

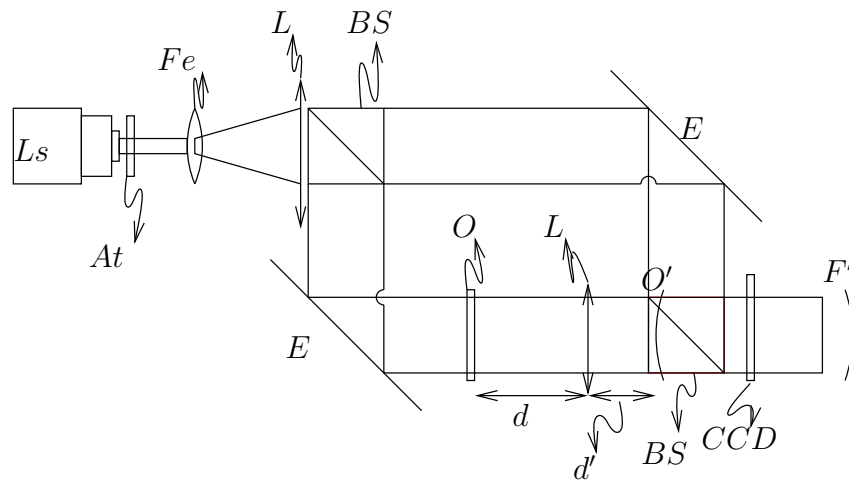


Figura 3.3: Ilustración de cuando el objeto es posicionado para $d < f$.

cual genera un frente de onda esférico que incide sobre una transparencia plana, de ésta forma colocamos el campo del objeto O sobre una superficie esférica de radio de curvatura R_A . En el mismo brazo se posiciona una lente convergente de focal $f = 20\text{cm}$, la cual forma la imagen O' , del campo objeto O y el patrón de difracción de Franhuofer F' de la imagen, fuera del interferómetro; ambos están sobre superficies esféricas con radio de curvatura $R_{A'}$ (ver figura 3.5).

Descripción de la figura (3.5).

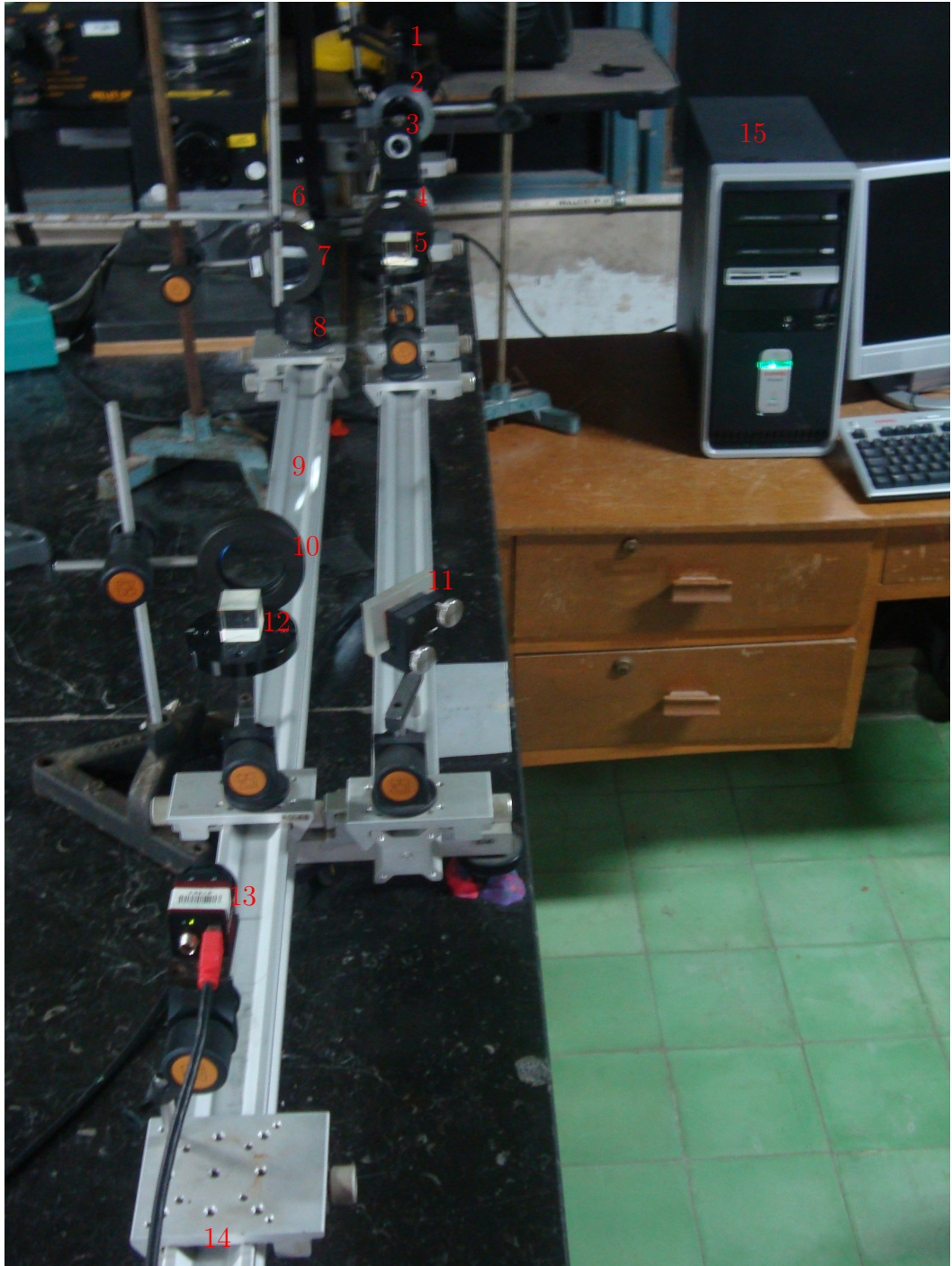


Figura 3.4: Imagen del experimento.

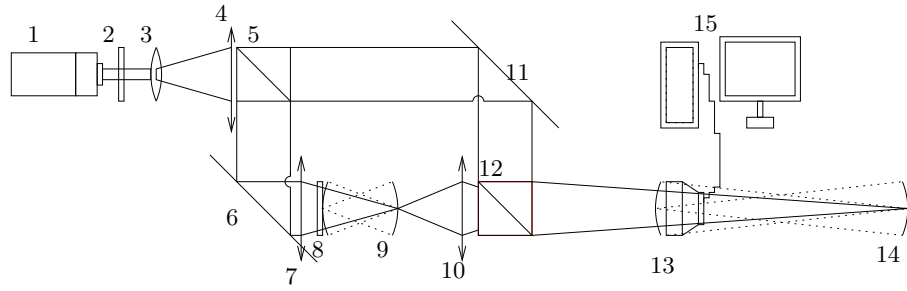


Figura 3.5: Representación esquemática del montaje del experimento .

1	Láser.
2	Atenuador de intensidad.
3	Colimador.
4	Lente convergente de longitud focal $f = 30cm$ para generar la onda plana.
5	Divisor de haz.
6	Espejo.
7	Lente $f = 30cm$ para colocar el objeto plano sobre un emisor esférico.
8	Objeto a registrar y su campo objeto sobre el emisor esférico U_A .
9	Patrón de difracción de franhoufer F sobre una porción de esfera.
10	Lente $f = 20cm$ la cual hace el sistema formador de $8.4\mu m$ de imagen.
11	Espejo.
12	Divisor de haz.
13	Detector CCD y el campo imagen sobre un receptor esférico $U_{A'}$.
14	Patrón de difracción de Franhuofer F' de la imagen.
15	Pc donde se realiza el registro de los datos.

3.2 Registro

Los registros de los patrones de difracción se realizarán con una cámara CCD *Guppy F-046B*, la cual tiene una distancia interpixel de $8.4\mu m$, con la cual se registrarán diferentes patrones de difracción de Fresnel en diferentes posiciones entre O' y $F_{A'}$ (ver figura 3.5). A continuación se hace la descripción de cada registro.

1. El objeto O' es iluminado con una onda plana y es posicionado a una distancia $d > 2f$, $d = 45cm$ su imagen O' esta entre $f < d' < 2f$, $d' = 36cm$ desde

la lente. Se hizo el registro de diferentes planos del patrón de difracción de Fresnel a un intervalo de 0.5cm , avanzando desde la imagen O' hacia el patrón de difracción de Fraunhofer F' (ver figura 3.6), que está en el foco de la lente $f = 20\text{cm}$. De igual forma se hace para cuando el objeto O está a una distancia $f < d$, $d = 5\text{cm}$, $d' = 6.6\text{cm}$ y el patrón de difracción de Fraunhofer F' se encuentra en el foco de la lente y la imagen O' es virtual.

2. Para el objeto O que se ilumina con una onda esférica es posicionado a $d = 45\text{cm}$ y su imagen O' está a $d' = 36\text{cm}$, El patrón de difracción de Fraunhofer F del objeto está en $q = 29\text{cm}$ y la imagen F' en $q' = 64.49\text{cm}$, donde todas las distancias anteriores son medidas desde la lente.

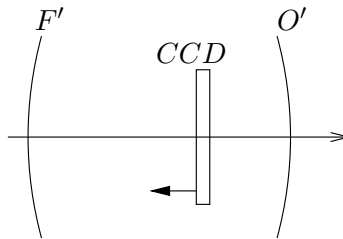


Figura 3.6: Ilustración de como se realiza el registro de los diferentes planos de Fresnel.

3.3 RECONSTRUCCIÓN

La reconstrucción se hace numéricamente bajo la plataforma de programación Matlab, utilizando un algoritmo de transformación de Fourier fraccionaria para hacer la reconstrucción de un patrón de difracción registrado, a este se le calculan diferentes ordenes de la transformación de Fourier fraccionaria y se observa cuál de este conjunto de reconstrucciones resuelve mejor la imagen del objeto registrado.

Se uso un algoritmo de transformación de Fourier fraccionaria ya que con este se puede hacer la reconstrucción del objeto en cualquier orden α , y esta se adapta al teorema de muestreo fraccionario.

Capítulo 4

RESULTADOS

Los resultados obtenidos en la reconstrucción de un patrón de difracción de Fresnel a diferentes distancias son:

4.1 Reconstrucción del primer objeto registrado

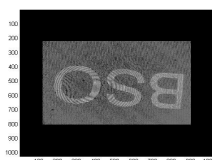


Figura 4.1: Plano imagen con $d' = 36.cm$.

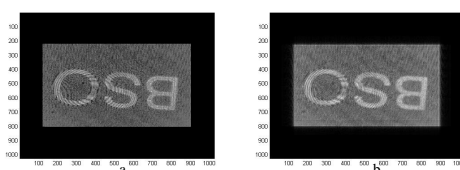


Figura 4.2: a):Registro del patrón de difracción de Fresnel a $d = 1cm$ después de la imagen. b) Reconstrucción del patrón de difracción con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.95$

Las franjas circulares que se observan en los registros se deben a que se uso un sistema formador de imagen en este caso una lente convergente. Las franjas

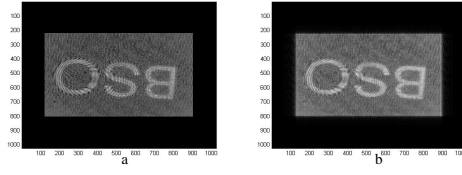


Figura 4.3: a):Registro del patrón de difraccion de Fresnel a $d = 1.5cm$ despues de la imagen. b) Reconstrucción del patron de difraccion con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.925$

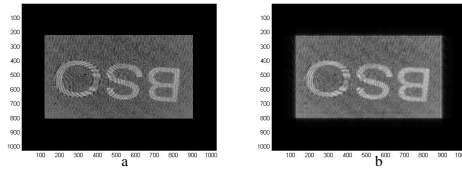


Figura 4.4: a):Registro del patrón de difraccion de Fresnel a $d = 2cm$ despues de la imagen. b) Reconstrucción del patron de difracción con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.9$

circulares se generan al hacer incidir un frente de onda plano con líneas verticales de interferencia sobre la lente convergente.

La reconstrucción depende de un orden α de la transformación de Fourier fraccionaria donde se observa que para diferentes α la reconstrucción es diferente. Para la reconstrucción de la Figura 4.2 b se observa que hace una buena reconstrucción de la letra B , en la Figura 4.3 b tambien se hace una buena reconstrucción de la letra B , a medida que no alejamos de la imagen el patrón de difracción de Fresnel registrado es mas difuso y el proceso de reconstrucción se realiza pero no es el óptimo. Según se observa una de las mejores reconstrucciones es la realizada a una distancia de $2cm$ desde la imagen, donde la distancia óptima de reconstrucción ta a una distancia $z = 38.5[cm]$ o $2.5[cm]$ despues de la imagen, este cálculo se hizo usando la expresión 2.58 y la mejor reconstrucción que se encontro corresponde a la figura 4.4, y la mas difusa es la de la figura 4.6 que esta a una distancia de $3cm$.

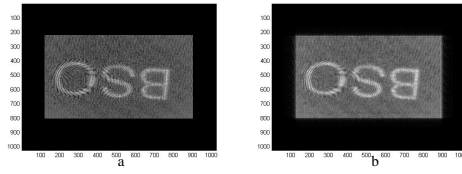


Figura 4.5: a):Registro del patrón de difraccion de Fressnel a $d = 2.5cm$ despues de la imagen. b) Reconstrucción del patron de difraccion con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.875$

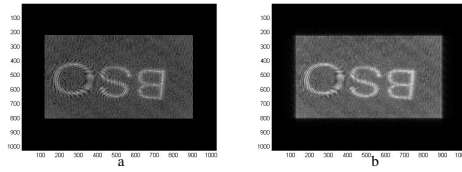


Figura 4.6: a):Registro del patrón de difraccion de Fressnel a $d = 3cm$ despues de la imagen. b) Reconstrucción del patron de difraccion con transformadas de Fourier fraccionaria

4.2 Reconstrucción de un segundo objeto registrado

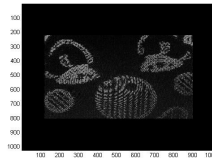


Figura 4.7: Plano imagen $d = 36.6cm$.

El segundo objeto registrado es la imagen de un payaso, se realizo el mismo proceso del caso anterior y se observa que el algoritmo hace la reconstrucción para los diferentes patrones de difracción de Fresnel registrados. En la figura 4.8 la cual esta a 0.5 después de la imagen se observa que se hace la reconstrucción de algunos detalles, a medida que se aumenta la distancia se va perdiendo la resolución el los detalles y la reconstrucción se realiza pero no es la mejor.

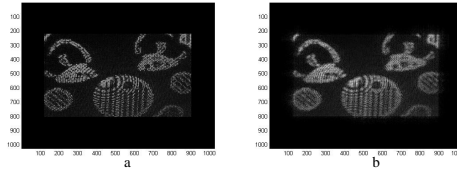


Figura 4.8: a):Registro del patrón de difraccion de Fressnel a $d = 0.5cm$ despues de la imagen. b) Reconstruccion del patron de difracción con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.975$

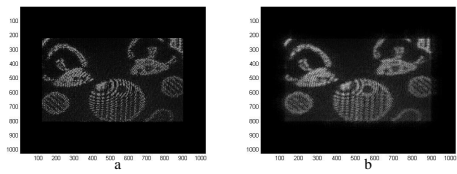


Figura 4.9: a):Registro del patrón de difraccion de Fressnel a $d = 1cm$ despues de la imagen. b) Reconstruccion del patron de difracción con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.95$

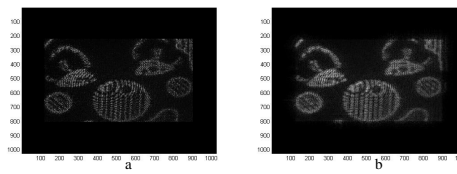


Figura 4.10: a):Registro del patrón de difraccion de Fressnel a $d = 1.5cm$ después de la imagen. b) Reconstruccion del patron de difracción con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.925$

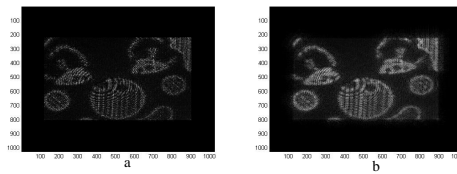


Figura 4.11: a):Registro del patrón de difraccion de Fressnel a $d = 2cm$ después de la imagen. b) Reconstruccion del patron de difracción con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.9$

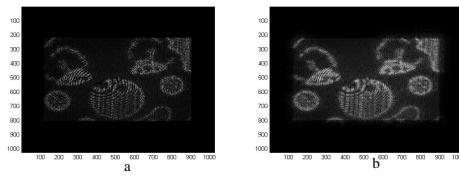


Figura 4.12: a):Registro del patrón de difraccion de Fressnel a $d = 2.5cm$ después de la imagen. b) Reconstruccion del patrón de difraccion con transformadas de Fourier fraccionaria con orde $\alpha = 0.875$

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Se hizo el registro de un holograma digital mediante una CCD lo cual fue propuesto como objetivo general del proyecto, y se realizó la reconstrucción numérica. Para el primer montaje óptico; donde el objeto es iluminado y posicionado entre $\infty > d > 2f$ con una onda plana, se realizaron las reconstrucciones de los diferentes patrones de difracción registrados por el detector, que se encuentran en el intervalo $f < d < 2f$; se observa que el algoritmo de transformación de Fourier fraccionaria utilizado no hace el proceso de reconstrucción para ningún valor de α entre 0 y 1. Esto lleva a concluir que el algoritmo no funciona en todas las direcciones; esto es en el caso cuando el objeto es iluminado con una onda plana (Fig 3.2); por lo tanto se procede a cambiar la posición del objeto que se estaba registrando.

Para el caso donde la posición del objeto es menor que la distancia focal $d < f$ (Fig 3.3), el algoritmo de transformación de Fourier fraccionaria realiza el proceso de reconstrucción de la imagen del objeto, el problema es que no se puede hacer el registro de la imagen del objeto la cual es virtual, lo que no permite comparar las reconstrucciones hechas del objeto.

El objeto es iluminado con una onda esférica y se realizó el registro de la imagen. Después se hizo el registro de diferentes patrones de difracción de Fresnel para diferentes planos (Fig 3.5), se hizo la reconstrucción de cada registro con el algoritmo de transformación de Fourier fraccionaria para diferentes valores de α , y

se observa:

- Cuando el patrón de difracción de Fresnel registrado está cerca de la imagen, la reconstrucción hecha por el algoritmo de transformación de Fourier fraccionaria recupera la imagen del objeto para un orden $\alpha = 0.95$.
- La mejor reconstrucción se logra a una distancia $z = 38cm$ (Fig 4.1)del sistema formador de imagen con un orden $\alpha = 0.9$ y la distancia óptima se encuentra a $z = 38.5cm$ del sistema formador de imagen para el caso del registro de las letras.
- Cuando el patrón de difracción de Fresnel registrado por el detector se acerca al patrón de difracción de Fraunhofer el algoritmo realiza la reconstrucción, pero la resolución en los detalles disminuye para ordenes de α menores de 0.875 .

Las expectativas son de hacer un experimento, más fino donde se medirá la resolución del sistema, se comprobara con exactitud la expresión 2.59.

Bibliografía

- [1] J. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, segunda edición., McGraw-Hill, Inc, Nueva York, 1998.
- [2] F. Monroy, *Microscopía Holográfica digital de Objetos de fase*, Tesis Doctoral. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C. Colombia, 2008.
- [3] R. Castañeda, *Holografía Digital: Un reto factible para la región andina y del caribe*, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín.
- [4] U. Schnars and W. Juepther, *Holography digital hologram recording, Numerical reconstruction and related Techniques*, Editorial Springer, (2005).
- [5] P. Pellat-Finet. *Lecciones de óptica de Fourier*, División editorial y publicaciones, UIS, Bucaramanga, (2004).
- [6] R. Torres. *Tratamiento de señales por transformación de Fourier fraccionaria. Aplicaciones a la holografía sintética y filtrado óptico* Tesis Doctoral, UIS, Bucaramanga, (2008).
- [7] R. Torres, P. Pellat-Finet y Y. Torres. *Sampling theorem for fractional bandlimited signals: A self-contained proof application to digital holography*. IEEE sign pro Lett, **13**,(11), 676-679(2009).
- [8] T. Colomb, J. Kluhn, F. Charriere. *Total aberrations compensation in digital holographic microscopy with a reference conjugated hologram*, Optics Express **14**(10), pp 4300-4306,(2006).

- [9] R. Torres , P. Pellat-Finet , Y. Torres *Fractional convolution, fractional correlation and their translation invariance properties*. Signal Processing, **90** pp 1976 -1984 ,(2010).
- [10] T. Shimobaba, N. Masuda, Y. Ichihashi and T. Ito. *Real-time digital holographic microscopy observable in multi-view and multi-resolution* . J. Opt.**12**, 065402 (4p),(2010)
- [11] A. Faridian, D. Hopp, G. Pedrini, U. Eigenthaler, M. Hirscher and W. Osten .*Nanoscale imaging using deep ultraviolet digital holographic microscopy*. Optics express,**18**,(13) 14159-14164,(2010).
- [12] C. Oh, Serhan O. Isikman, B. Khademhosseini, and A. Ozcan. *On-chip differential interference contrast microscopy using lensless digital holography*. Optics express,**18**,(5), 4717-4726,(2010).
- [13] K. J. Gasvik. *Optical Metrology*. Willey, tercera edición (2002).
- [14] A. Olivares, M. Peres. *Dynamic diffraction ring projector by doped polymer dispersed liquid cristal*. Optical letters , **2**, 1020-1024,(2002).
- [15] A. Toledo. Experiencies on developing computer vision hardware algorithms using xilinx system generator, Mycroprocessors and microsystems, Elsevier 29 , 411-419, (2005).
- [16] Lohmann. Binary Fraunhofer holograms generated by computer, Applied Optics. 6. 1739-1748 (1967).
- [17] D. Malacara. *Óptica Basica*. Segunda edición (2004).
- [18] Goodman, J.W. & Lawrence, R.W., *Digital image formation from electronically detected holograms*, Applied Physics Letters 11, 77-79 (1967).
- [19] Kronrod, M.A, Merzlyakov, N.S & Yaroslavsky, L.P., *Reconstruction of a Hologram with a Computer*, Soviet Physics-Technical Physics 17, 333-334 (1972).
- [20] Schnars, U. & Jueptner, W.P, *Direct recording of holograms by a CCD target and numerical reconstruction*, Appl. Opt. 33, 179-181 (1994).

- [21] Marquet P., Rappaz B., Magistretti P., Cuche E., Emery Y., Colomb T. and Ch. Depeursinge; *Digital holographic microscopy: a noninvasive contrast imaging technique allowing quantitative visualization of living cells with subwavelength axial accuracy*, Optics Letters, Vol. 30, No. 5, pps. 468-470, March 1, 2005.
- [22] Gass J., Dakoff A., and Kim M. K., *Phase imaging without 2π ambiguity by multiwavelength digital holography* Optics Letters, vol. 28, No. 13, Julio de 2003.
- [23] J. Restrepo. *Estudio del límite de densidad de suspensiones para su análisis en microscopía holográfica digital en línea*. Tesis de maestría, UNAL, Bogotá, 2011.
- [24] N. Pavillon, J. Kuhn, P. Jourdain, C. Depeursinge, P. Magistretti, and P. Marquet. *Early Glutamate-mediated Cell Death Detection with Digital Holographic Microscopy*. In Novel Techniques in Microscopy, page JTUA13. OSA, 2011.
- [25] Mann Ch., Yu L., Chun-Min Lo, and Kim M. K., *High-resolution quantitative phase-contrast microscopy by digital holography*. Optics Express, vol. 13, No. 22, pps. 8693-8698, Octubre 2005
- [26] Charrière F., Kuhn J., Colomb T., Montfort F., Cuche E., Emery Y., Weible K. and Depeursinge Ch. D. *Microlenses metrology with digital holographic microscopy*. www.lynceotec.com, presented in Munich, 2005, SPIE.
- [27] Reyes R. y Rubiera L. *Revisión bibliográfica sobre materiales de registro holográfico* . Revista Cubana de Física, vol. 18, No 1, 2001.