

**DESARROLLO DE UN MODELO COMPUTACIONAL PARA FLUJO BIFÁSICO
EN TRES DIMENSIONES USANDO EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS**

NELSON ENRIQUE QUINTERO VALERO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOQUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE PETRÓLEOS
BUCARAMANGA**

2012

**DESARROLLO DE UN MODELO COMPUTACIONAL PARA FLUJO BIFÁSICO
EN TRES DIMENSIONES USANDO EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS**

NELSON ENRIQUE QUINTERO VALERO

**Trabajo de investigación presentado como requisito para optar al título de
MAGISTER EN INGENIERÍA DE HIDROCARBUROS**

DIRECTOR:

M.Sc. FERNANDO ENRIQUE CALVETE GONZALEZ

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOQUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE PETRÓLEOS
BUCARAMANGA**

2012

DEDICATORIA

*Este gran logro se lo dedico a mi familia que ha sido la gran
motivación de mi vida*

*Y a todos mis amigos y compañeros que han contribuido en mi
crecimiento y desarrollo durante mi formación Universitaria y
laboral.*

NELSON ENRIQUE QUINTERO

AGRADECIMIENTOS

A mi Director Fernando Calvete, por sus enseñanzas, acompañamiento y consejos en la culminación del presente trabajo y en mi desarrollo profesional.

Al Doctor Carlos Piedrahita y la Ingeniera Olga Patricia Ortiz por su apoyo y orientación.

A mi compadre Jorge Quintero por su respaldo incondicional durante todo este proceso.

A la Universidad Industrial de Santander y a la Escuela de Ingeniería de Petróleos por ser forjadora de mi formación académica y profesional.

A Mónica Yasmin Hernández, María Isabel Archila y Sindy Anaya por sus palabras de motivación y aliento.

A todas aquellas personas que de alguna u otra manera me contribuyeron para cumplir exitosamente este propósito.

CONTENIDO

	Pág
INTRODUCCIÓN	15
1. INTERACCIÓN ROCA-FLUIDO	17
1.1 PROPIEDADES DE ROCA	17
1.1.1 Porosidad	17
1.1.2 Permeabilidad	18
1.1.3 Permeabilidad relativa	20
1.1.4 Presión capilar	23
1.1.5 Saturación	25
1.2 PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS DE YACIMIENTO	26
1.2.1 Propiedades del petróleo	26
1.2.2 Propiedades del agua	32
2. MODELO FÍSICOMATEMÁTICO DEL FLUJO DE FLUIDOS BIFÁSICOS EN MEDIOS POROSOS	34
2.1 BALANCES DE MASA A CONDICIONES DE SUPERFICIE	35
2.1.1 Ecuación para el petróleo	36
2.1.2 Ecuación para el agua	39
2.1.3 Ecuaciones adicionales en las ecuaciones de balance	39
2.2 ECUACIONES FUNDAMENTALES PARA EL FLUJO BIFÁSICO	39
3. DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE FLUJO BIFÁSICO CON EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS EN MALLAS NO ESTRUCTURADA	41
3.1 LA GENERACIÓN DE MALLAS EN LA SIMULACIÓN NUMÉRICA	41
3.2.1 Mallas estructuradas	45
3.2.2 Mallas no estructuradas	46
3.3 TÉCNICAS DE DISCRETIZACIÓN NUMÉRICA	48
3.3.1 El método de las diferencias finitas	48

3.3.2	El método de los elementos finitos	48
3.3.3	El método de los volúmenes finitos	49
3.4	DISCRETIZACIÓN NUMÉRICA DE FLUJO BIFÁSICO EN MEDIOS POROSOS EN VOLÚMENES FINITOS	50
3.5	MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DE FLUJO BIFÁSICO EN EL TIEMPO	62
3.5.1	Método de solución simultánea semi-implícito para ecuaciones de flujo bifásico en medios porosos	64
4.	IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO COMPUTACIONAL	67
4.1	CARGA DE DATOS	68
4.3	CÁLCULO DE LAS TRANSMISIBILIDADES	71
4.5	ENSAMBLE DE LA MATRIZ	76
4.6	SOLUCIÓN DEL SISTEMA LINEAL	77
4.7	POSTPROCESAMIENTO Y VISUALIZACIÓN	80
5.	MODELOS PLANTEADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	81
5.1	MODELOS DE YACIMIENTOS CON PRODUCCIÓN PRIMARIA	81
5.1.1	Propiedades de roca del yacimiento	82
5.1.2	Propiedades de los fluidos del yacimiento	83
5.1.3	Condiciones iniciales del yacimiento	84
5.1.4	Modelo geométrico del yacimiento	84
5.1.5	Esquema de producción del yacimiento	88
5.1.6	Resultados de la simulación numérica de los modelos	91
5.2	PROCESO DE INYECCIÓN DE AGUA	94
5.2.1	Modelo geométrico del yacimiento	95
5.2.2	Esquema de producción del yacimiento	96
5.2.3	Resultados de la simulación numérica del modelo	97
	CONCLUSIONES	101
	RECOMENDACIONES	102
	BIBLIOGRAFÍA	103
	ANEXOS	109

LISTA DE FIGURAS

	pág
Figura 1. Representación de la porosidad en la roca.	17
Figura 2. Curva de permeabilidad relativa agua-petróleo.....	21
Figura 3. Curva de presión capilar agua-petróleo.	24
Figura 4. Distribución de los fluidos en la roca.	25
Figura 5. Curva R_s vs la presión a temperatura constante.....	27
Figura 6. Curva B_o vs la presión a temperatura constante.....	28
Figura 7. Curva C_o vs la presión a temperatura constante.	30
Figura 8. Curva μ_o vs la presión a temperatura constante.	31
Figura 9. Distribución de componentes de fases en fluido bifásico agua-petróleo.	34
Figura 10. Elemento infinitesimal de volumen.	35
Figura 11. Elemento tetraédrico con ángulos agudos.	42
Figura 12. Mallas con nodos centrados en los vértices.	44
Figura 13. Mallas con nodos centrados en los elementos.	45
Figura 14. Malla estructurada en coordenadas cartesianas.	45
Figura 15. Malla curvilínea.	46
Figura 16. Malla no estructurada tetraédrica.	47
Figura 17. Malla no estructurada triangular.	47
Figura 18. Elemento de malla tetraédrico.	52
Figura 19. Superficie de intersección entre los dos volúmenes tetraédricos.	55
Figura 20. Diagrama de flujo general de la aplicación.	67
Figura 21. Generación de la malla tetraédrica en Gmsh.	68
Figura 22. Cálculo de parámetros de la malla tetraédrica.	70
Figura 23. Ubicación de los pozos.	73
Figura 24. Esquema de distribución de las variables dentro matriz.	76
Figura 25. Ejemplo de matriz dispersa.	78
Figura 26. Formato de matriz comprimida CRS.	78

Figura 27. Seudocódigo método de gradiente biconjugado.	79
Figura 28. Visualización en ParaView.	80
Figura 29. Curvas de permeabilidad relativa agua-petróleo del modelo.	82
Figura 30. Malla tetraédrica de 2422 elementos.	85
Figura 31. Malla tetraédrica de 7948 elementos.	86
Figura 32. Malla tetraédrica de 23796 elementos.	87
Figura 33. Ubicación de los tres casos en el yacimiento.	90
Figura 34. Resultados del primer caso.	91
Figura 35. Comparación de resultados de la presión promedio del primer caso de producción.	92
Figura 36. Resultados del segundo caso.	92
Figura 37. Comparación de resultados de la presión promedio del primer caso de producción.	93
Figura 38. Resultados del tercer caso.	93
Figura 39. Comparación de resultados de la presión promedio del tercer caso de producción.	94
Figura 40. Malla tetraédrica de 4433 elementos.	95
Figura 41. Ubicación de los pozos en el yacimiento.	97
Figura 42. Resultados del proceso de inyección de agua.	98
Figura 43. Comparación de resultados de la presión promedio del modelo desarrollado y eclipse.	99
Figura 44. Líneas de contorno del modelo a los 5460 días.	100

LISTA DE TABLAS

	pág
Tabla 1. Factores que afectan la solubilidad del gas en el petróleo.	28
Tabla 2. Propiedades de la roca.	82
Tabla 3. Propiedades del petróleo.	83
Tabla 4. Propiedades del agua.	83
Tabla 5. Condiciones iniciales.....	84
Tabla 6. Dimensiones del modelo.	84
Tabla 7. Información de los elementos malla primer caso.....	85
Tabla 8. Información de los elementos malla segundo caso.	86
Tabla 9. Información de los elementos malla tercer caso.....	87
Tabla 10. Información del pozo primer caso.	88
Tabla 11. Información del pozo P1 del segundo caso.....	88
Tabla 12. Información del pozo P2 del segundo caso.....	89
Tabla 13. Información del pozo P1 del tercer caso.	89
Tabla 14. Información del pozo P2 del tercer caso.	90
Tabla 15. Información del pozo P3 del tercer caso.	90
Tabla 16. Dimensiones del modelo.	95
Tabla 17. Información de los elementos de la malla.	96
Tabla 18. Información del pozo productor.....	96
Tabla 19. Información de los pozos Inyectores.	97

LISTA DE ANEXOS

pág

ANEXO A. FORMATO DEL ARCHIVO DE LA MALLA	109
ANEXO B. FORMATO DE LOS DATOS DE ENTRADA	112
ANEXO C. FORMATO DE LOS DATOS PARA PARAVIEW	115

RESUMEN

TÍTULO

DESARROLLO DE UN MODELO COMPUTACIONAL PARA FLUJO BIFÁSICO EN TRES DIMENSIONES USANDO EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS*.

AUTORES

NELSON ENRIQUE QUINTERO VALERO**

PALABRAS CLAVE

Volúmenes finitos, simulación de yacimientos, métodos numéricos, ingeniería de yacimientos.

DESCRIPCIÓN

El método de los volúmenes finitos permite discretizar y resolver numéricamente ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento de flujo de calor, flujo de fluidos o acoplados. Es un método que tiene la flexibilidad de los elementos finitos en cuanto al manejo de mallas estructuradas y no estructuras (ortogonales o no ortogonales) y la robustez y convergencia de las diferencias finitas. La principal propiedad es que la solución obtenida del sistema discretizado satisface en forma exacta las ecuaciones de conservación masa y energía independientemente del tamaño de la malla.

En este trabajo se desarrolló la primera etapa de implementación de un simulador numérico de flujo bifásico agua-petróleo tridimensional, para el modelamiento de procesos de recuperación primaria de petróleo e inyección de agua. El sistema de ecuaciones que representa el flujo de fluidos bifásico agua-petróleo en el medio poroso, se obtienen al combinar la ecuación de conservación de la masa con la ecuación de movimiento de Darcy para cada fase (Thomas, 1982). Las incógnitas del sistema son la presión de petróleo y la saturación de agua para cada elemento de la malla. A las ecuaciones obtenidas se discretizan en volúmenes finitos y se aplica un método de solución simultánea semi-implícito en el tiempo, donde las variables principales son implícitas y las variables secundarias explícitas. Al ensamblar estas variables se obtiene una matriz asimétrica y altamente dispersa. El sistema lineal que se obtiene se resuelve mediante el método iterativo de gradiente biconjugado.

Para la evaluación de los resultados se plantearon dos casos: uno donde los cambios de presión son predominantes en el tiempo (producción primaria) y otro donde se producen fuertes cambios en la saturación (recobro secundario). Estos son implementados en eclipse 100 para un análisis comparativo.

* Trabajo de grado para optar al título de Magister en ingeniería de hidrocarburos.

** Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingenierías Fisicoquímicas. Escuela de Ingeniería de Petróleos. Director: M.Sc. Fernando Enrique Calvete Gonzalez.

ABSTRACT

TITLE

DEVELOPMENT OF A COMPUTATIONAL MODEL FOR TWO-PHASE FLOW IN THREE DIMENSIONS USING FINITE VOLUME METHOD*.

AUTHORS

NELSON ENRIQUE QUINTERO VALERO²

KEYWORDS

Finite volume method, reservoir simulation, numerical methods, reservoir engineering.

DESCRIPTION

The method of the finite volumes allows discretize and to solve numerically differential equations and modeling the behavior of the heat flow, fluid flow or coupled. It is a method that has the flexibility of finite elements in the management of structured meshes and structures (orthogonal or non-orthogonal) and the robustness and convergence of finite differences. The principal property is that the solution obtained discretized system accurately satisfies the equations of conservation of mass and energy independently mesh size.

In this work there developed the first phase of implementation of a numerical simulator of oil-water two-phase flow three-dimensional modeling processes for primary oil recovery and water injection.

The system of equations representing the flow of oil-water two-phase fluid in the porous medium, obtained by combining the equation for conservation of mass with the Darcy equation of motion for each phase (Thomas, 1982). The unknowns of the system are the oil pressure and water saturation for each element of the mesh. In the resulting equations are discretized in finite volume and applies a method of semi-implicit simultaneous solution in time, where the main variables are implicit and explicit secondary endpoints. By assembling these variables results in a highly asymmetric matrix and dispersed. The obtained linear system is solved by the iterative gradient biconjugate.

For the evaluation of the results was presented two cases: one where pressure changes are predominant in time (primary production) and another with extreme changes in saturation (secondary recovery). These are implemented in Eclipse 100 for a comparative analysis.

* Work of degree to choose Magister's title in engineering hydrocarbon.

** Industrial of Santander University. Physicochemical Engineering Faculty. School of Petroleum Engineering. Director: M.Sc. Enrique Fernando Gonzalez Calvete.

INTRODUCCIÓN

Actualmente, gracias al avance tecnológico en la computación, la simulación numérica de yacimientos se ha convertido en una herramienta indispensable para comprender la dinámica de los fluidos en el yacimiento y ayudar en la predicción del futuro desempeño de los campos. En las últimas décadas, muchos trabajos se han venido desarrollando en torno a técnicas numéricas que hagan uso de mallas no estructuradas como los elementos finitos y los volúmenes finitos, debido a que estos métodos permiten modelar características físicas y geometrías de yacimientos complejos y además, permiten trabajar con técnicas de adaptación de mallas.

En general, el modelamiento del movimiento de los fluidos (agua, petróleo, gas, etc) en un medio poroso implica resolver un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales (Peaceman, 1977;. Ewing, 1983, y Jaffre Chavent , 1986, Chen et al., 1994) , cuya solución analítica solo se consigue en casos de geometrías y problemas físicos sencillos. La solución de estas ecuaciones por métodos numéricos son necesariamente obligatorias cuando se requiere un resultado cuantitativo para poder definir el esquema de producción de un campo, ubicación de nuevos pozos, definir un proceso de inyección, entre otros.

En este trabajo se presenta la primera etapa de implementación de un simulador numérico de flujo bifásico agua-petróleo tridimensional, para el modelamiento de procesos de recuperación primaria de petróleo e inyección de agua. Se toma como método de discretización los volúmenes finitos debido a que se trabajará sobre un dominio representado por mallas tetraédricas con diferentes grados de refinamiento.

El sistema de ecuaciones que representa el flujo de fluidos bifásico agua-petróleo en el medio poroso, se obtienen al combinar la ecuación de conservación de la

masa con la ecuación de movimiento de Darcy para cada fase (Thomas, 1982). Las incógnitas del sistema son la presión de petróleo y la saturación de agua para cada elemento de la malla.

A las ecuaciones obtenidas se discretizan en volúmenes finitos y se aplica un método de solución simultánea semi-implícito en el tiempo, donde las variables principales son implícitas y las variables secundarias explícitas. Al ensamblar estas variables se obtiene una matriz asimétrica y altamente dispersa. El sistema lineal que se obtiene se resuelve mediante el método iterativo de gradiente biconjugado.

Para la evaluación de los resultados se plantearon dos casos: uno donde los cambios de presión son predominantes en el tiempo (producción primaria) y otro donde se producen fuertes cambios en la saturación (recobro secundario). Estos son implementados en eclipse 100 para un análisis comparativo.

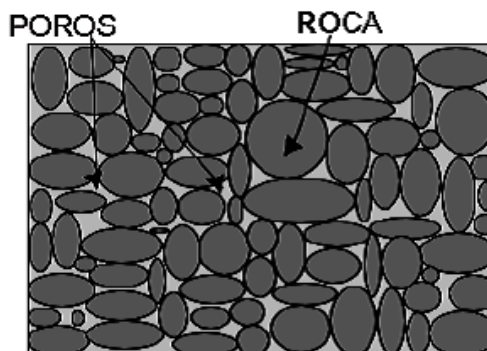
1. INTERACCIÓN ROCA-FLUIDO

1.1 PROPIEDADES DE ROCA

1.1.1 Porosidad

Un medio poroso es un material sólido que tiene huecos distribuidos en toda su extensión. La porosidad constituye una parte de la roca, y representa un espacio vacío o saturado. El almacenamiento y transmisión de fluido en un medio poroso son afectados principalmente por las propiedades físicas de los poros, el tamaño y la forma pueden variar en términos de la forma global de la geometría. En un medio poroso compuesto de granos relativamente esféricos, la geometría del poro puede ser influenciada por el arreglo de los granos, pueden estar ordenados de manera cúbica, romboédrica o aleatoria.

Figura 1. Representación de la porosidad en la roca.



Fuente: OLVERA GOMEZ, Alfredo, Estudio Sistemático de las Discontinuidades que ocurren en la Modelación de Yacimientos Petroleros, 2008.

La porosidad se puede clasificar de acuerdo a la interconexión del volumen poroso en:

Porosidad absoluta: Es aquella porosidad que considera el volumen poroso de la roca esté o no interconectado. Esta propiedad es la que normalmente miden los porosímetros comerciales.

Porosidad efectiva: Es la que considera los espacios interconectados y que finalmente permitirá que haya flujo de fluidos.

1.1.2 Permeabilidad

La permeabilidad de la roca de un yacimiento de petróleo es una propiedad del medio poroso que cuantifica la capacidad de un material para transmitir fluidos. La permeabilidad está referida a la capacidad de permitir el flujo de fluidos a través del sistema de poros interconectados.

La permeabilidad formalmente definida es un tensor y el uso de valores escalares o tensores simplificados diagonales es muy generalizado, principalmente en los simuladores comerciales.

La medición de muestras en laboratorio extraídas de corazones es frecuentemente confiable por cuanto brinda información de permeabilidades en las direcciones de sedimentación (Z usualmente) y dos perpendiculares. Estas permeabilidades se expresan en general en los simuladores como:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dado que la permeabilidad es principalmente función de las direcciones de sedimentación y de las características geológicas del reservorio (si es fluvial, por ejemplo, tendrá una dirección preferencial en la dirección de los lechos), en caso

de una deformación de la formación las permeabilidades se reorientarán arbitrariamente, resultando en un tensor en general completo del tipo:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Donde los componentes extradiagonales son en principio no nulos, y los elementos diagonales pueden cambiar completamente su relación de valores. Este tipo de casos puede llegar a ser de extrema importancia en formaciones con variabilidad en el buzamiento en el caso de intrusivos y para yacimientos fracturados.

Es también de importancia el caso de formaciones con buzamiento constante, eventualmente cero, pero en el cual se ha realizado un modelo geoestadístico. Al realizar un upscaling de las celdas del modelo geoestadístico al modelo dinámico, lo usual es que resulten tensores de permeabilidad completos. Esto trae problemas en la implementación de los simuladores comerciales de petróleo negro que no están equipados para resolver este tipo de problemas. El Eclipse 300¹ posee la posibilidad de incluir permeabilidades tensoriales completas, pero a un enorme costo computacional, ya que al implementar las permeabilidades tensoriales completas se pasa de un esquema de 7 puntos a uno de 27 puntos en 3-D.

La permeabilidad absoluta es una propiedad solo de la roca, mientras que la permeabilidad efectiva es una propiedad de la roca y de los fluidos presentes en la

¹ Schlumberger-Geoquest, Simulation Software Manuals 2008, reference manual 100 y 300.

roca. Generalmente, la permeabilidad usada en la industria del petróleo es una constante en la ecuación de Darcy, por tanto una medida de permeabilidad requiere un proceso dinámico de flujo. Si se considera que no existen poros interconectados en una roca, esta sería impermeable, por lo que puede afirmarse que existe una cierta correlación entre la permeabilidad y la porosidad efectiva, y por lo tanto, todos los factores que afectan a la porosidad afectan de igual manera a la permeabilidad. En este sentido, y considerando que la medida de permeabilidad no siempre se tiene, se correlaciona la porosidad con la permeabilidad para obtener estos valores entre los pozos.

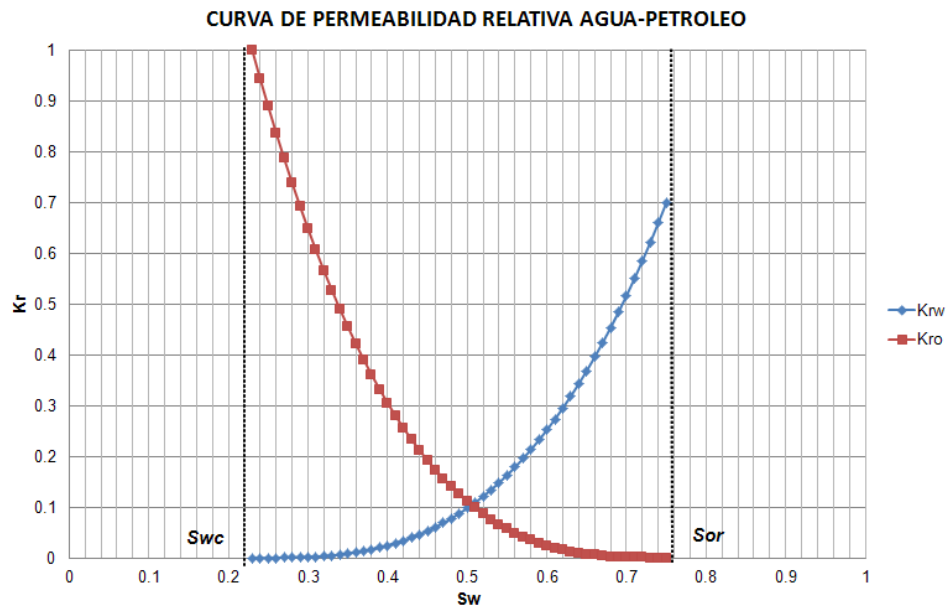
1.1.3 Permeabilidad relativa

La permeabilidad relativa es el factor más importante en lo que respecta al movimiento de las fases inmiscibles (petróleo, agua y gas) dentro del medio poroso. Las curvas de permeabilidad relativa es un resultado de laboratorio (experimental), pero su forma incorpora los parámetros de flujo de fluidos dentro del yacimiento de petróleo y dependen de variables tales como:

- Geometría del sistema poroso.
- Mineral de la roca.
- Permeabilidad absoluta y porosidad.
- Presencia de mojabilidad de la roca.
- Viscosidad del fluido.
- Tensión interferencial.
- Tasas de desplazamiento.
- Presión.
- Presencia de fases inmóviles.

La mayoría de los trabajos experimentales sobre permeabilidad relativa han sido realizados sobre sistemas de dos fases. La figura 2 muestra los resultados típicos que pueden ser obtenidos desplazando el aceite con agua para un sistema agua-petróleo.

Figura 2. Curva de permeabilidad relativa agua-petróleo.



Fuente: El autor

El valor de S_w en el cual el agua empieza a fluir el agua es llamado saturación crítica, S_{wc} . La saturación S_{or} en la cual la fase desplazada deja de fluir es llamada saturación residual. En términos de la ecuación de flujo de Darcy esto significa que la fase deja de fluir porque la movilidad es cero y no porque la fuerza externa es cero.

Junto con los numerosos resultados experimentales, hay también métodos teóricos los cuales muestran que la porosidad, la presión capilar y la permeabilidad relativa están relacionadas. Una relación aproximada entre ellas es representada por la función de Leverett.

$$J = \left(\frac{P_c}{\sigma}\right) \sqrt{\frac{K}{\phi}} \quad (3)$$

La cual es base para algunos métodos teóricos de cálculo de la permeabilidad (Ashford, 1969). Por lo tanto, en un yacimiento con propiedades que varían fuertemente, se deben usar varios tipos de curvas de permeabilidad relativa y saturaciones residuales en diferentes partes del yacimiento.

La mojabilidad de la roca también tiene una fuerte influencia sobre la permeabilidad relativa (Owens y Archer, 1971). Mungan (1972) muestra que los fluidos del yacimiento deben ser utilizados para las mediciones de permeabilidad relativa en lugar de otros líquidos.

Comenzado con la primera medición por Leverett y Lewis (1941), casi todos los trabajos de tres fases han sido realizados experimentalmente (Corey et al., 1956; Snell, 1962). Estas investigaciones muestran que la dependencia funcional de la permeabilidad relativa puede ser aproximada por:

$$K_{rw} = f(S_w) \quad (4)$$

$$K_{ro} = f(S_w, S_g) \quad (5)$$

$$K_{rg} = f(S_g) \quad (6)$$

En la práctica los enfoques son basados en la estimación de la permeabilidad relativa de las tres fases en dos grupos:

La permeabilidad relativa en un sistema agua-petróleo

$$K_{row} = f(S_w) \quad (7)$$

Y en un sistema gas-aceite

$$K_{rog} = f(S_g) \quad (8)$$

El concepto referente a la **Krow**, la fase no mojante puede ser asumida como la suma de la fase petróleo y la fase gas, y similarmente para **Krog**, la fase mojante es todo el líquido presente (petróleo y agua).

1.1.4 Presión capilar

Es la diferencia de presión que existe a lo largo de la interface que separa a los dos fluidos inmiscibles. Si se tiene conocimiento de la mojabilidad, la presión capilar será definida como la diferencia de presión entre las fases no-mojante y mojante.

Es decir,

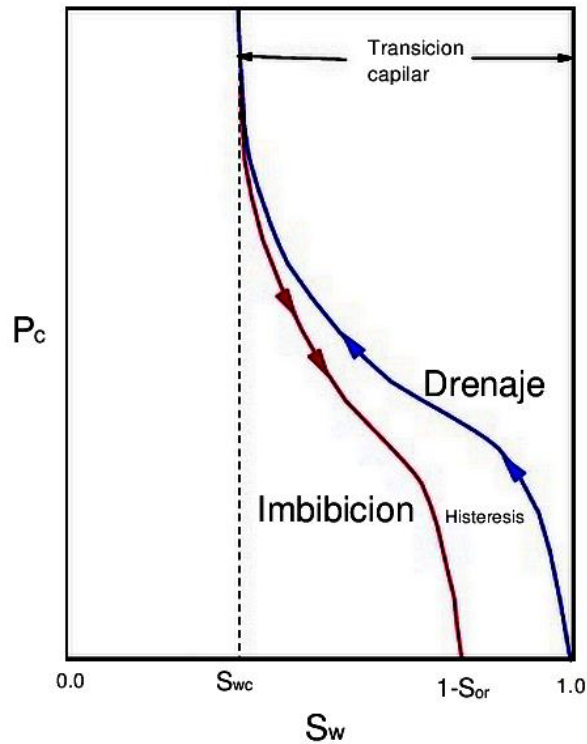
$$P_c = P_{fluido\ no\ mojante} - P_{fluido\ mojante} \quad (9)$$

Por lo tanto, para un sistema petróleo-agua (mojado por agua):

$$P_{cwo} = P_o - P_w \quad (10)$$

En este caso de dos fases, la curva típica de presión capilar es representada mediante la Figura 3.

Figura 3. Curva de presión capilar agua-petróleo.



Fuente: ESCOBAR, Freddy, Fundamentos de ingeniería de yacimientos.

El drenaje hace referencia al proceso por el cual la fase no-mojante desplaza, del medio poroso, a la fase mojante. Es un proceso forzado (no espontáneo) pues las fuerzas capilares tienden a retener la fase mojante dentro de la estructura capilar. En este proceso siempre existe una presión umbral asociada a las fuerzas capilares. La imbibición en cambio, es el proceso espontáneo de desplazamiento, con una fase mojante, de la fase no-mojante. Este proceso no requiere aplicación de fuerzas externas al sistema roca-fluidos, por lo que no existen presiones umbral.

En general, la presión capilar en el medio poroso está asociada con la mojabilidad, saturación de los fluidos y tamaño de los poros.

1.1.5 Saturación

Si se considera un volumen representativo del yacimiento petrolero, con los poros llenos de petróleo, agua y gas, en términos volumétricos podemos representarlo como:

$$V_{poroso} = V_{petroleo} + V_{agua} + V_{gas} \quad (11)$$

Donde, $V_{petroleo}$ representa la fracción de volumen del petróleo, V_{agua} representa la fracción de volumen del agua y V_{gas} representa la fracción de volumen del gas.

Al dividir toda la expresión sobre el volumen poroso se obtendría:

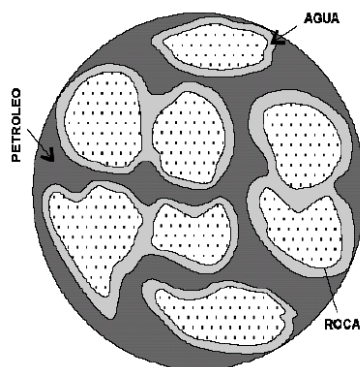
$$1 = S_{petroleo} + S_{agua} + S_{gas} \quad (12)$$

Por tanto, la saturación se define como una fracción del volumen poroso ocupado por un fluido en particular. Para un caso particular donde solo coexisten petróleo y agua su expresión sería:

$$1 = S_{petroleo} + S_{agua} \quad (13)$$

Y gráficamente se puede representar de la siguiente forma:

Figura 4. Distribución de los fluidos en la roca.



Fuente: OLVERA GOMEZ, Alfredo, Estudio Sistemático de las Discontinuidades que ocurren en la Modelación de Yacimientos Petroleros, 2008.

Si en un yacimiento petrolero coexisten dos fluidos (petróleo y agua, petróleo y gas, gas y agua, etc.), estos se distribuyen en el espacio poroso de acuerdo a sus características de mojabilidad. La saturación de fluidos cambia tanto en el espacio como en el tiempo, en un yacimiento de petróleo puede tener diferentes niveles de saturación en sentido horizontal y sentido vertical y también esta saturación cambia progresivamente de acuerdo al avance de la producción de fluidos.

1.2 PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS DE YACIMIENTO

1.2.1 Propiedades del petróleo

1.2.1.1 Presión de burbuja

La presión de burbuja, P_b , se define como la presión a la cual se forma la primera burbuja de gas al pasar un sistema del estado líquido al estado bifásico, donde la fase líquida está en equilibrio con una cantidad infinitesimal de gas libre.

A presiones por debajo de la presión de burbuja se forman dos fases en equilibrio: una líquida (crudo con gas en solución) y una gaseosa (gas natural). La fase líquida está constituida por el crudo saturado con gas natural, a estas presiones se les llama presiones de saturación, P_s .

1.2.1.2 Solubilidad del gas en el Petróleo

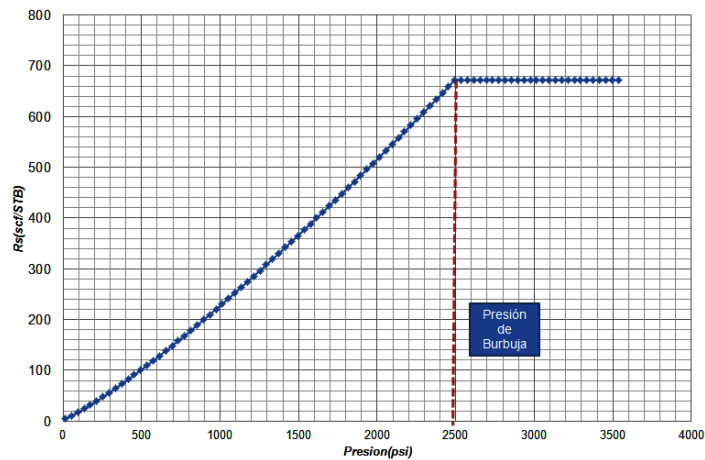
La razón gas disuelto - petróleo (gas en solución) o solubilidad del gas en el petróleo, R_s , se define como el número de pies cúbicos normales (PCN) de gas que pueden disolverse en un barril normal (BN) de petróleo cuando ambos son llevados a las condiciones de presión y temperatura en el yacimiento.

Se dice que un crudo está saturado con gas cuando tiene en solución la máxima cantidad de gas que el admite, y en este caso, al reducir un poco la presión ocurre liberación de gas. Si el crudo tiene una cantidad de gas inferior a la que puede admitir a ciertas condiciones de P y T se dice que el crudo está subsaturado (no saturado), o sea, que tiene una deficiencia de gas. En un crudo, si se dispone de

suficiente gas y se puede someter el petróleo a altas presiones y temperaturas, puede decirse que el gas es infinitamente soluble en el petróleo.

Lo que limita la solubilidad del gas en el petróleo en el yacimiento, son las condiciones de presión y temperaturas que allí existen y por supuesto la cantidad del gas disponible. Por esta razón se encuentran yacimientos con capa de gas inicial (exceso de gas a las condiciones de P y T existentes) y yacimientos subsaturados (no saturados).

Figura 5. Curva R_s vs la presión a temperatura constante.



Fuente: El autor

En la Figura 5 se observa que R_s aumenta con la presión hasta llegar a la presión de burbuja, P_b , a partir de la cual se mantiene constante. La razón de esto, es que al llegar al punto de burbuja no existe más gas disponible para entrar en solución con el petróleo. Así, por arriba de la presión de burbuja el petróleo está subsaturado ya que una disminución de presión no causa liberación de gas (R_s es constante); sin embargo, por debajo de la presión de burbujeo el petróleo está saturado, ya que una disminución de presión origina una liberación de gas.

Los factores que afectan la solubilidad del gas en el petróleo son:

Tabla 1. Factores que afectan la solubilidad del gas en el petróleo.

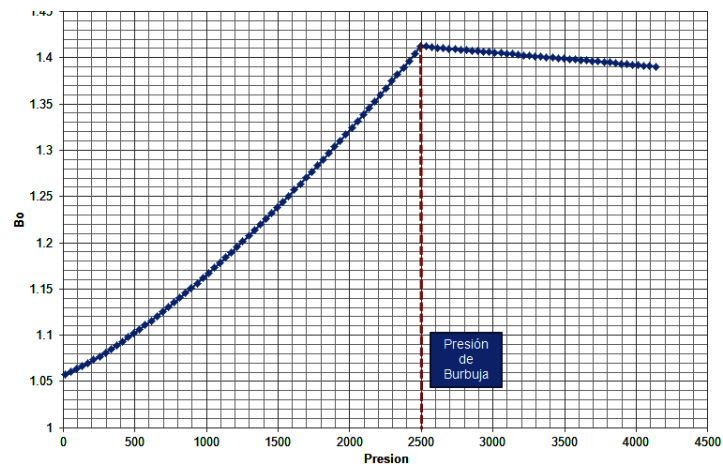
Propiedad		RS
Presión	↗	↗
Temperatura	↗	↘
API	↗	↗
γ_g	↗	↗

Fuente: El autor

1.2.1.3 Factor volumétrico de formación

El Factor Volumétrico de Formación, β_o , se define como el volumen que ocupa a condiciones de yacimiento un barril normal de petróleo más su gas en solución.

Figura 6. Curva Bo vs la presión a temperatura constante.



Fuente: El autor

También, puede definirse como el cambio de volumen que experimenta la fase líquida al pasar de las condiciones de yacimiento a las condiciones de superficie como consecuencia de la expansión líquida y/o liberación del gas en solución.

Debido a que no se libera gas de solución cuando la presión disminuye desde su valor inicial hasta la presión de burbuja (asumiendo que la presión inicial es mayor que la presión de burbuja), el fluido de yacimiento permanece en estado monofásico (petróleo subsaturado), sin embargo, como los líquidos son ligeramente compresibles, el volumen aumenta un poco desde la presión inicial hasta la presión de burbuja, como se puede observar en la Figura 6. Por debajo de la presión de burbujeo, la expansión líquida continúa, pero su efecto sobre el aumento en volumen es insignificante comparado con un efecto de la reducción en el volumen líquido debido a la liberación del gas en solución.

1.2.1.4 Compresibilidad del Petróleo

En general, la compresibilidad isotérmica de un fluido, C en psia^{-1} , se define como el cambio fraccional en volumen cuando la presión es cambiada a temperatura constante. La compresibilidad de un petróleo subsaturado (petróleo que está por arriba de la presión del punto de burbuja) se define de la siguiente manera:

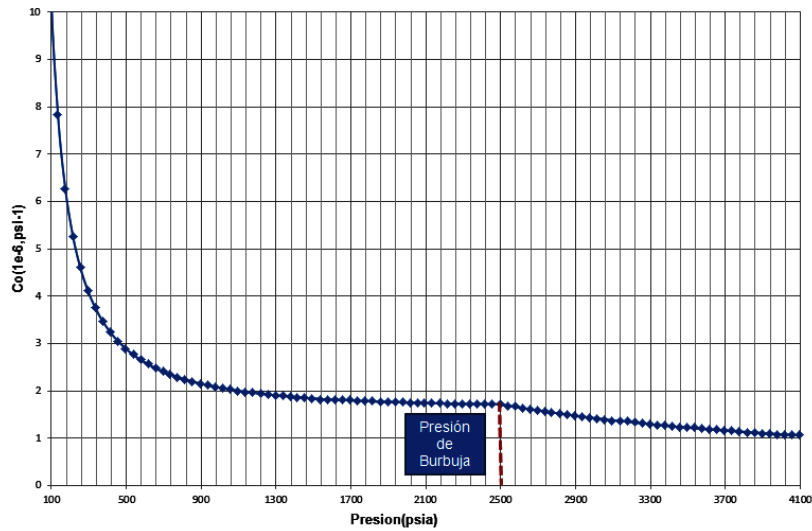
$$C_o = -\frac{1}{V_o} \left(\frac{\partial V_o}{\partial P} \right)_T \quad (14)$$

$$C_o = \frac{1}{\rho_o} \left(\frac{\partial \rho_o}{\partial P} \right)_T \quad (15)$$

$$C_o = -\frac{1}{\beta_o} \left(\frac{\partial \beta_o}{\partial P} \right)_T \quad (16)$$

Como el volumen de un líquido subsaturado disminuye a medida que la presión aumenta, C_o es positiva. Para algunos crudos de ciertos yacimientos, C_o es esencialmente constante por arriba del punto de burbujeo, mientras que en otros varía con la presión. El comportamiento de la compresibilidad con el cambio de presión a temperatura constante se observa en el figura 7.

Figura 7. Curva C_o vs la presión a temperatura constante.



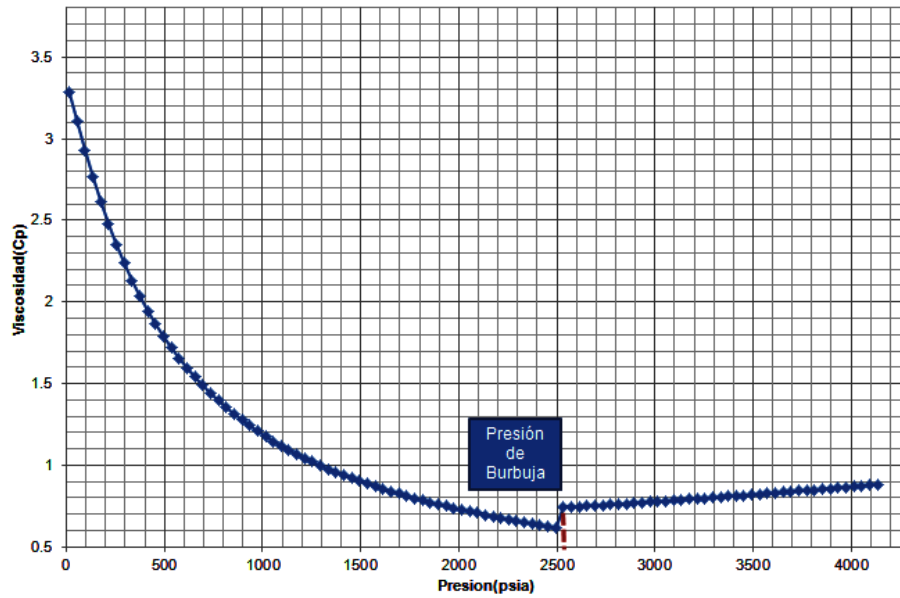
Fuente: El autor

1.2.1.5 Viscosidad del Petróleo

En general, la viscosidad de un fluido es una medida de la fricción interna o resistencia que ofrecen sus moléculas a fluir (moverse). En el caso de petróleo deben distinguirse dos tipos de viscosidad: viscosidad de un petróleo sin gas en solución, y viscosidad de un petróleo a determinada P y T llevando consigo la cantidad de gas, R_s , que puede disolverse a esas condiciones.

En ambos casos, el efecto de la temperatura es disminuir la viscosidad, sin embargo, la presión en el primer caso aumenta la viscosidad y en el segundo la disminuye, ya que el efecto de disminución de la viscosidad por gas en solución es mayor que el efecto por compresibilidad del petróleo. El comportamiento de la viscosidad con el cambio de presión se observa en la Figura 8.

Figura 8. Curva μ_o vs la presión a temperatura constante.



Fuente: El autor

1.2.1.6 Densidad del Petróleo

La Densidad del Petróleo, ρ_o en Lb/ft^3 , a presiones menores o iguales a la presión de burbuja ($P \leq P_b$) se determina mediante la siguiente ecuación:

$$\rho_o = \frac{350\gamma_o + 0.0764\gamma_g d R_s}{5.615\beta_o} \quad (17)$$

Y a presiones mayores que la presión de punto de burbujeo ($P > P_b$), se determina mediante la siguiente ecuación:

$$\rho_o = \rho_{ob} e^{C_o(P_b - P)} \quad (18)$$

1.2.2 Propiedades del agua

1.2.2.1 Factor Volumétrico del Agua

El factor volumétrico del agua, β_w en BY/BN, en forma similar al petróleo, se define como el volumen que ocupa en el yacimiento la unidad volumétrica de agua a condiciones normales más su gas en solución. El valor de β_w depende de presión, temperatura y de la salinidad del agua que afecta la solubilidad. La variación de β_w con presión es diferente a la del petróleo, o sea, que aumenta con disminución de presión. Cuando la presión del yacimiento es reducida desde su presión inicial a la presión de burbuja (asumiendo que la presión inicial es mayor que la presión de burbuja), el factor volumétrico del agua aumenta debido a la expansión del agua en el yacimiento. A presiones por debajo de la presión de burbujeo, se libera gas, pero el factor volumétrico continúa aumentado debido a que la disminución en el volumen de agua, resultante de la liberación de gas, es insuficiente para contrarrestar la expansión del líquido. Este efecto se debe a la baja solubilidad del gas natural en el agua.

El factor volumétrico del agua a presiones mayores que la presión de burbuja ($P > P_b$) se puede expresar en función de la compresibilidad y el factor volumétrico del agua a esta presión de burbuja.

$$\beta_w = \beta_{wb} e^{C_w(P_b - P)} \quad (19)$$

1.2.2.2 Compresibilidad del Agua

La compresibilidad isotérmica del agua, C_w en psia^{-1} , a presiones mayores que la presión de burbujeo se define de manera similar que para el petróleo.

$$C_w = -\frac{1}{V_w} \left(\frac{\partial V_w}{\partial P} \right)_T \quad (20)$$

$$C_w = \frac{1}{\rho_w} \left(\frac{\partial \rho_w}{\partial P} \right)_T \quad (21)$$

$$C_w = -\frac{1}{\beta_w} \left(\frac{\partial \beta_w}{\partial P} \right)_T \quad (22)$$

Esta propiedad es afectada por la presión, temperatura y solubilidad del gas en el agua, la cual a su vez es afectada por la salinidad. Así, un aumento en presión causa una reducción en la compresibilidad, mientras que un aumento en temperatura produce un aumento en esta propiedad.

1.2.2.3 Viscosidad del Agua

La viscosidad del agua, μ_w en cp, depende de presión, temperatura y sólidos disueltos. Así, la viscosidad del agua aumenta con un incremento de presión, disminuye con un aumento temperatura y aumenta con un incremento en la concentración de sólidos disueltos. El efecto de los gases disueltos en el agua podría reducir la viscosidad, sin embargo, aún no se ha publicado información al respecto.

1.2.2.4 Densidad del Agua

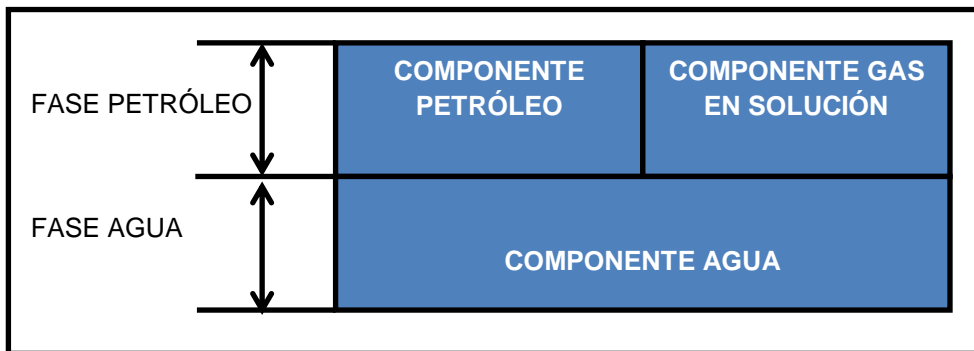
La densidad del agua, ρ_w en Lbs/pie³, puede ser determinada utilizando la misma aproximación que para un sistema gas – petróleo, excepto que los efectos del gas en solución normalmente son despreciados.

$$\rho_w = \frac{\rho_{wcn}}{\beta_w} = \frac{62.4\gamma_w}{\beta_w} \quad (23)$$

2. MODELO FÍSICOMATEMÁTICO DEL FLUJO DE FLUIDOS BIFÁSICOS EN MEDIOS POROSOS

Las ecuaciones fundamentales de flujo, tal como se utilizan en simulación de yacimientos, toman diversas formas. Estas formas difieren fundamentalmente en la naturaleza del fluido (composicional o no-composicional) y en las condiciones de presión y temperatura a las cuales se realiza el balance de masa (condiciones de superficie o condiciones de yacimiento). En esta sección se presenta la formulación de las ecuaciones fundamentales del flujo de fluido bifásico para condiciones de superficie.

Figura 9. Distribución de componentes de fases en fluido bifásico agua-petróleo.



Fuente: Modificado. ERTEKIN, Turgay, Simulation in petroleum reservoirs.

Las ecuaciones constitutivas de este modelo, se obtienen de la aplicación de los principios de conservación de masa y energía en un volumen elemental, representativo del medio poroso. Estas ecuaciones se acoplan con:

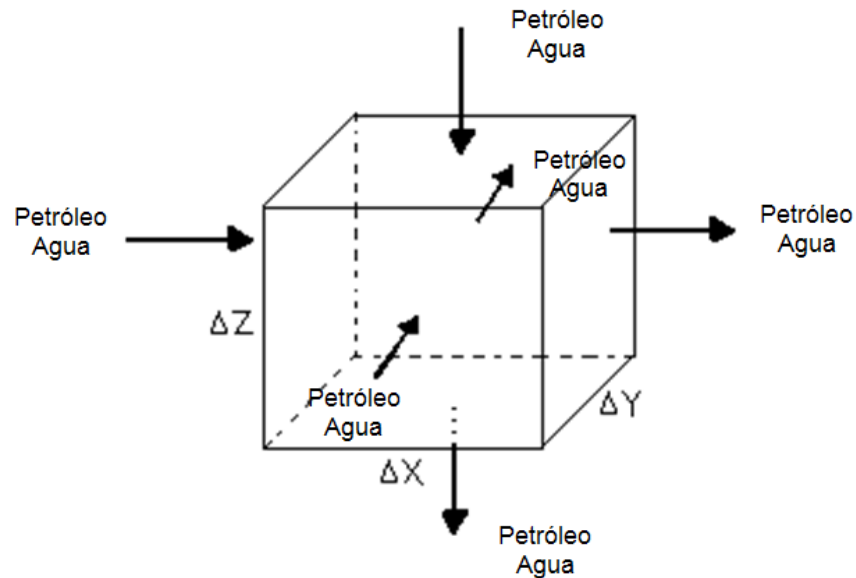
- Ecuaciones de estado que describen el comportamiento volumétrico.
- Ecuaciones de movimiento de las fases en el medio poroso como la ecuación de Darcy.
- Ecuaciones auxiliares.

Las ecuaciones diferenciales parciales generadas para flujo de fluidos en medios porosos son ecuaciones no lineales que generalmente se resuelven numéricamente.

2.1 BALANCES DE MASA A CONDICIONES DE SUPERFICIE

Considérese un flujo en las tres direcciones X, Y, y Z en un elemento infinitesimal tal como se muestra en la figura 10.

Figura 10. Elemento infinitesimal de volumen.



Fuente: El autor

La ecuación de balance de masa general sobre un Elemento infinitesimal de volumen de control sería:

$$[Masa_{entra}]_{\Delta t} - [Masa_{sale}]_{\Delta t} \pm [Masa_{Fuentes \acute{o} Sumideros}]_{\Delta t} = [Masa_{Acumula \acute{o} Agota}]_{\Delta t} \quad (24)$$

2.1.1 Ecuación para el petróleo

El balance de la masa del petróleo a condiciones de superficie está dado por:

$$[Masa_{entra}]_{\Delta t} = \rho_{ocn}u_{oxcn}A_{yz}\Delta t + \rho_{ocn}u_{oycn}A_{xz}\Delta t + \rho_{ocn}u_{ozcn}A_{xy}\Delta t \quad (25)$$

En la ecuación 25, ρ_{ocn} es la densidad del petróleo a condiciones de superficie, A es el área trasversal al flujo y u_{ocn} es la velocidad lineal en la dirección x , y y z respectivamente del petróleo llevada a condiciones superficie.

Para la masa de petróleo que sale, a condiciones de superficie, se define de la siguiente forma:

$$[Masa_{sale}]_{\Delta t} = (\rho_{ocn}u_{oxcn}A_{yz} + \Delta(\rho_{ocn}u_{oxcn}A_{yz}))\Delta t + (\rho_{ocn}u_{oycn}A_{xz} + \Delta(\rho_{ocn}u_{oycn}A_{xz}))\Delta t + (\rho_{ocn}u_{ozcn}A_{xy} + \Delta(\rho_{ocn}u_{ozcn}A_{xy}))\Delta t \quad (26)$$

Si se define q_{ocn} como el volumen de petróleo a condiciones de superficie que entra ó sale por fuentes ó sumideros, por unidad de volumen del yacimiento, por unidad de tiempo, para su balance se tiene:

$$[Masa_{Fuentes \acute{o} Sumideros}]_{\Delta t} = q_{ocn}\Delta V\Delta t\rho_{ocn} \quad (27)$$

La acumulación ó agotamiento de petróleo durante el intervalo infinitesimal de tiempo seria:

$$[Masa_{Acumula \acute{o} Agota}]_{\Delta t} = [\rho_{ocn}V_{ocn}]_{t+\Delta t} - [\rho_{ocn}V_{ocn}]_t \quad (28)$$

En la Ecuación 28, V_{ocn} es el volumen de petróleo a condiciones de superficie y es equivalente a:

$$V_{ocn} = \Delta V \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) \quad (29)$$

Donde ΔV es volumen de control, S_o es la fracción de petróleo en el volumen y B_o es el factor volumétrico del petróleo.

Sustituyendo las ecuaciones 25 al 29 en la ecuación 24 se obtiene:

$$\begin{aligned} -\Delta(\rho_{ocn}u_{oxcn}A_{yz})\Delta t - \Delta(\rho_{ocn}u_{oycn}A_{xz})\Delta t - \Delta(\rho_{ocn}u_{ozcn}A_{xy})\Delta t \\ \pm q_{ocn}\Delta V\Delta t\rho_{ocn} = \rho_{ocn}\Delta V \left[\left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)_{t+\Delta t} - \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)_t \right] \end{aligned} \quad (30)$$

Dividiendo por ΔV , ρ_{ocn} y Δt y tomando los límites cuando los deltas tienden a cero, se obtiene;

$$-\frac{\partial}{\partial x}(u_{oxcn}) - \frac{\partial}{\partial y}(u_{oycn}) - \frac{\partial}{\partial z}(u_{ozcn}) \pm q_{ocn} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) \quad (31)$$

La formulación general de la ecuación 30 es:

$$-\nabla \cdot (u_{ocn}) \pm q_{ocn} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) \quad (32)$$

$\nabla \cdot$ Es la divergencia en coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \quad (33)$$

y u_{ocn} es el vector de velocidad el cual está dado por:

$$u_{ocn} = u_{oxcn}\vec{i} + u_{oycn}\vec{j} + u_{ozcn}\vec{k} \quad (34)$$

En la ecuación 34, u_{oxcn} , u_{oycn} y u_{ozcn} son la componentes del vector velocidad de petróleo a condiciones de superficie en las direcciones x , y y z , respectivamente.

Esta ecuación de velocidad está regida por la ley de Darcy, la cual se representa de la siguiente forma:

$$u_{ocn} = -c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o\mu_o} \nabla \Phi_o \quad (35)$$

Dónde:

c_1 Constante de conversión de unidades.

k Es el tensor de permeabilidad.

K_{ro} Es la permeabilidad relativa al petróleo.

B_o Es el factor volumétrico del petróleo.

μ_o Es la viscosidad del petróleo.

Φ_o Es el potencial del petróleo.

Respecto al potencial de un fluido se define como el trabajo requerido por un proceso para transportar una unidad de masa del fluido desde un estado de presión y elevación cero, a un cierto punto de elevación Z y/o presión. Su expresión esta defina por:

$$\Phi_o = P_o - \rho_{ocy}gZ \quad (36)$$

Acoplado las ecuaciones 33 y 36 en la ecuación 32 se obtiene:

$$\nabla \cdot \left(c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o\mu_o} \nabla (P_o - \rho_{ocy}gZ) \right) \pm q_{ocn} = \frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) \quad (37)$$

La constante c_2 denota la constante de conversión volumétrica.

2.1.2 Ecuación para el agua

Para obtener la ecuación del agua se realiza un proceso análogo a la ecuación de petróleo, de esta forma se obtiene la siguiente expresión:

$$\nabla \cdot \left(c_1 \frac{kK_{rw}}{B_w \mu_w} \nabla (P_w - \rho_w c_y g Z) \right) \pm q_{wcn} = \frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) \quad (38)$$

2.1.3 Ecuaciones adicionales en las ecuaciones de balance

En el caso de las ecuaciones de flujo bifásico se cuenta con dos ecuaciones, una para el petróleo y una para el agua, y cada una de ellas tiene dos variables: una respecto a la presión y otra relativa a la saturación. Por lo tanto se requiere, dos ecuaciones que correlacionen estas variables para completar la formulación.

Una de ellas es la ecuación que relaciona la distribución de los fluidos en el volumen de control, mediante la siguiente expresión:

$$S_w + S_o = 1 \quad (39)$$

En cuanto a la relación de las presiones entre dos fluidos inmiscibles que están en contacto, se pueden relacionar mediante la presión capilar, de la siguiente forma:

$$P_{cwo} = P_o - P_w \quad (40)$$

2.2 ECUACIONES FUNDAMENTALES PARA EL FLUJO BIFÁSICO

Tomando las ecuaciones 37 y 38 obtenidas del balance de masa para cada fluido e integrándolas con las ecuaciones adicionales 39 y 40, se tienen las siguientes expresiones generales para flujo bifásico agua-petróleo.

Ecuación fundamental para flujo de petróleo

$$\nabla \cdot \left(c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o \mu_o} \nabla (P_o - \rho_{ocy} gZ) \right) \pm q_{ocn} = \frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi(1-S_w)}{B_o} \right) \quad (41)$$

Ecuación fundamental para flujo de agua

$$\nabla \cdot \left(c_1 \frac{kK_{rw}}{B_w \mu_w} \nabla (P_o - P_{cwo} - \rho_{wcy} gZ) \right) \pm q_{wcn} = \frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) \quad (42)$$

En este caso de flujo bifásico se cuenta con dos ecuaciones y dos variables: la presión de petróleo (P_o) y saturación de agua (S_w), las demás variables son valores dados o calculados con correlaciones.

3. DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE FLUJO BIFÁSICO CON EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS EN MALLAS NO ESTRUCTURADA

3.1 LA GENERACIÓN DE MALLAS EN LA SIMULACIÓN NUMÉRICA

El problema de discretización de un dominio para la simulación numérica puede ser un problema más difícil de lo que parece a simple vista. Una malla debe ajustarse a la región que se va modelar, y también, debe cumplir condiciones sobre el tamaño y la forma de sus elementos, a veces una malla útil debe satisfacer condiciones que a primera instancia parecen contradictorias. El primer objetivo del modelado de la región es mantener o conservar lo mejor posible su forma.

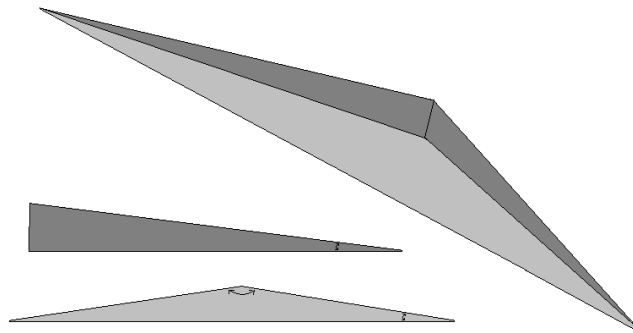
Un segundo objetivo de la generación de mallas es ofrecer el máximo control posible sobre los tamaños de los elementos de la malla. Idealmente, este control incluye la capacidad de pasar de elementos pequeños a grandes a través de una distancia relativamente corta. Al resolver un problema numérico hay que considerar que los elementos pequeños, que conforman una región densa, ofrecen más precisión que los grandes cuyo espaciamiento es mayor y que el tiempo de cálculo para resolver el problema numérico es proporcional al número de elementos, por lo cual es recomendable plantear la posibilidad de usar distintas distribuciones. Por lo tanto, elegir el tamaño supone un elemento de balance entre la velocidad de procesamiento y la precisión de la aproximación.

Además, el tamaño del elemento necesario para alcanzar una determinada cantidad de precisión depende del comportamiento de los fenómenos físicos en que se basa el modelo, y puede variar a lo largo del dominio. Por ejemplo, una simulación de flujo en tres dimensiones requiere elementos más pequeños en zonas donde hay mayores cambios de masa que en las zonas de poca variación.

Una malla gruesa, con un número relativamente reducido de elementos, no es difícil usarla para producir otra con un número mayor de elementos pequeños en algunas zonas deseadas. El proceso inverso no es tan fácil, por lo tanto, los algoritmos de generación de mallas con frecuencia se fijan el objetivo de poder generar mallas con pocos elementos, y ofrecer la opción de refinar parte de la malla en donde los elementos no sean lo suficientemente pequeños como para obtener la precisión requerida.

Un tercer objetivo de la generación de mallas, y la mayor dificultad, es que los elementos deberán ser relativamente de buena forma, ya que los elementos con ángulos interiores grandes o pequeños pueden degradar la calidad de la solución numérica, así que se busca que el rango de los ángulos sea corto. En los métodos numéricos, los elementos con ángulos grandes pueden causar un gran error de discretización, es decir, la precisión de la solución dada sobre la malla puede ser mucho menor que si los tres ángulos de cada elemento son parecidos. En principio, la solución numérica se aproxima a la solución exacta conforme el tamaño del elemento más grande se acerca a cero. Sin embargo, Babuska y Aziz demuestran que en mallas densas la convergencia a la solución exacta puede no ocurrir si los ángulos de la malla son muy abiertos².

Figura 11. Elemento tetraédrico con ángulos agudos.



Fuente: El autor

² I. Babuska and A. K. Aziz. On the angle condition in the finite element method. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol 13, p. 214-226, 1976.

Otro problema causado por los grandes ángulos es de errores de aproximación en las derivadas de la solución, que surgen como efecto de interpolación sobre la malla. La figura 11 muestra un elemento de la malla que representa una aproximación de la cantidad física de la solución. Este efecto se produce porque un valor interpolado linealmente no es suficiente si la solución exacta no es lineal. Este problema puede afectar cualquier aplicación que utilice mallas de interpolación, y no solo al resolver una EDP.

Los triángulos con ángulos pequeños también causan problemas pues el sistema de ecuaciones del método numérico puede ser mal condicionado. Si esto ocurre, la precisión de la solución disminuye si el sistema es resuelto por métodos directos, y con métodos iterativos la convergencia es lenta.

Muchos algoritmos de generación de mallas optan por restringir a un ángulo mínimo en toda la triangulación, al acotarlo inferiormente entonces el mayor ángulo de la triangulación a su vez se estaría acotando superiormente. Por ejemplo, si ningún ángulo es más pequeño que ϕ , entonces ningún ángulo sería mayor que $180-2\phi$.

El problema de la generación de mallas incluye varias fases bien definidas que se pueden resumir como sigue³:

- ✓ Definición de la frontera del dominio físico.
- ✓ Definición de la distribución de tamaño del elemento en función de la ubicación espacial.
- ✓ Construcción de la frontera de la malla utilizando un enfoque de discretización adecuado.
- ✓ Construcción de la malla de forma secuencial o simultánea de los nodos y sus conexiones.

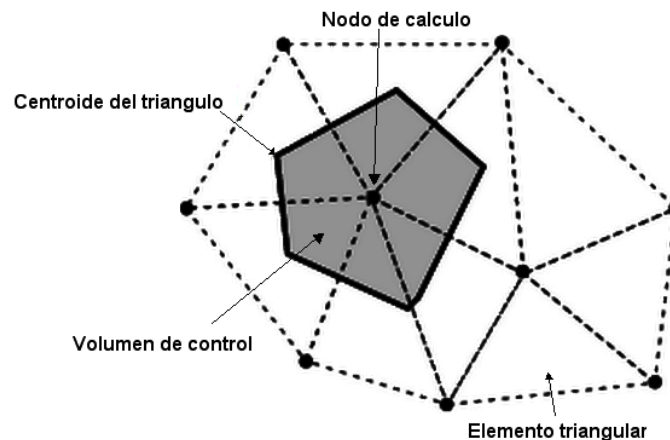
³ BERZINS, Martin, Solution-Based Mesh Quality Indicators For Triangular And Tetrahedral Meshes, International Journal of Computational Geometry & Applications, vol 10, p. 333-346, June 2000.

- ✓ Tratamiento posterior a la malla generada para mejorar la calidad del elemento.

3.2 DISCRETIZACIÓN ESPACIAL

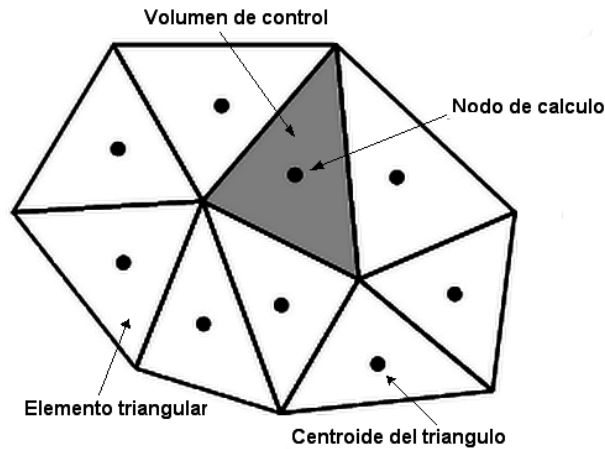
Todos los métodos que usan mallas para la solución de EDP requieren una previa discretización geométrica (espacial) para poder realizar la discretización de las ecuaciones que gobiernan el fluido. Básicamente, existen dos tipos de mallado: mallas estructuradas y no estructuradas. El tipo de malla depende del tipo de método de discretización que se use, así como de la estructura interna de datos empleados para resolver el flujo. Por ejemplo, el método de las diferencias finitas, que discretiza las ecuaciones en forma diferencial, requiere una malla estructurada de puntos en los que se guardan las variables de flujo. Por otro lado, en el método de los volúmenes finitos es necesario definir puntos de control en cada volumen generado donde estos pueden ser definidos en el centro del elemento (cell-centred) o en los vértices (cell vertex) de las celdas como se puede observar en las siguientes figuras.

Figura 12. Mallas con nodos centrados en los vértices.



Fuente: Modificado. HEINZL, Rene, Concepts for Scientific Computing.

Figura 13. Mallas con nodos centrados en los elementos.



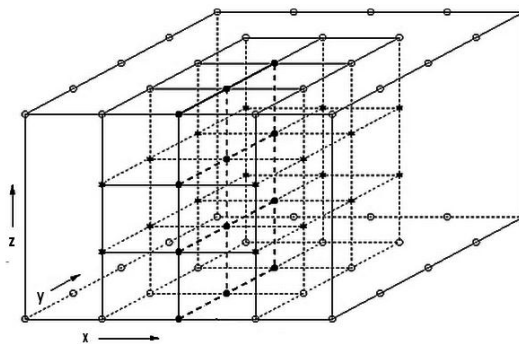
Fuente: Modificado. HEINZL, Rene, Concepts for Scientific Computing.

3.2.1 Mallas estructuradas

La principal ventaja de los mallados estructurados reside en la ordenación de los elementos en memoria, ya que de esta forma, el acceso a las celdas vecinas a una dada resulta muy rápido y fácil, sin más que sumar o restar un número al valor del índice correspondiente.

Las mallas estructuradas pueden representarse en un sistema cartesiano o curvilíneo. En el primer caso, las líneas que configuran las celdas son siempre paralelas al sistema de ejes coordenados (figura 14).

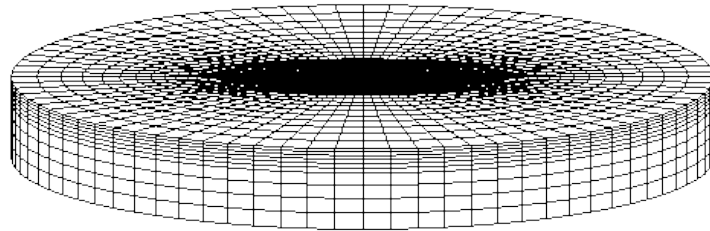
Figura 14. Malla estructurada en coordenadas cartesianas.



Fuente: Tomado de <http://www.tafsm.org/PROJ/MSM/EDSTT/>

Por el contrario, en los sistemas curvilíneos, el sistema de coordenadas es deformado para adaptarse a la geometría del objeto de estudio (figura 15).

Figura 15. Malla curvilínea.



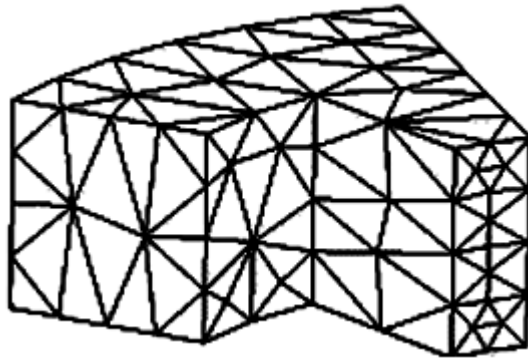
Fuente: Tomado de <http://www.cs.cmu.edu/~quake/valley3.mesh.gif>

Por otro lado, también pueden clasificarse en mallas ortogonales y mallas no ortogonales. Las mallas ortogonales son aquellas en las que todas las líneas que la configuran se cortan entre sí con un ángulo de 90° . Algunos flujos pueden considerarse como axisimétricos; en estos casos, las ecuaciones de flujo pueden ser expresadas en coordenadas polares (r, θ) , en lugar de en coordenadas cartesianas (x, y) .

3.2.2 Mallas no estructuradas

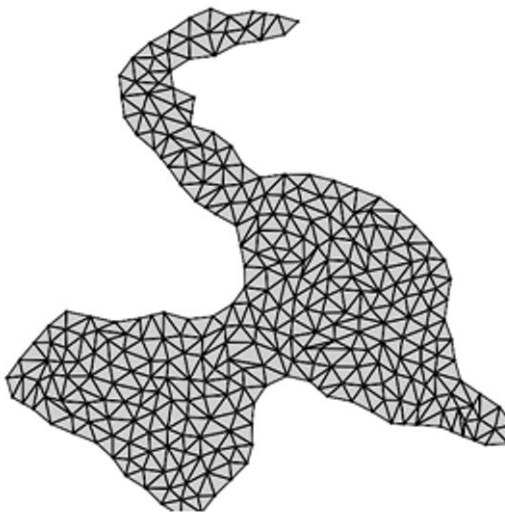
Los enmallados no estructurados ofrecen una gran flexibilidad en el tratamiento de geometrías complejas. La principal ventaja de los enmallados no estructurados reside en que los triángulos (2-D) o los tetraedros (3-D), se pueden generar automáticamente, independientemente de la complejidad del dominio (figuras 16 y 17).

Figura 16. Malla no estructurada tetraédrica.



Fuente: Tomado de Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, February 2005.

Figura 17. Malla no estructurada triangular.



Fuente: Tomado de <http://code.google.com/p/umeshu/>

En la práctica, es necesario determinar unos parámetros para obtener una buena calidad de malla. Una desventaja de este tipo de enmallado es el tiempo requerido por una computadora para generar un enmallado no estructurado, que es mucho mayor que el que requiere para uno estructurado. Otra desventaja de este tipo de enmallado es que requieren mucho más memoria computacional que los enmallados estructurados.

3.3 TÉCNICAS DE DISCRETIZACIÓN NUMÉRICA

En la aplicación de la dinámica de fluidos computacional existen muchos métodos para la discretización del problema. A groso modo, se pueden clasificar los distintos esquemas de discretización en tres categorías principales: diferencias finitas, elementos finitos y volúmenes finitos.

3.3.1 El método de las diferencias finitas

Fue el primer método aplicado para obtener la solución numérica de unas ecuaciones diferenciales. La primera persona en emplearlo fue Euler (probablemente en 1768). Este método emplea el desarrollo en series de Taylor para la discretización de las derivadas en las variables de flujo.

Una ventaja importante del método de las diferencias finitas es su simplicidad teórica y la posibilidad de aumentar la precisión del método sin más que aumentar el orden de aproximación de las derivadas. Por otro lado, este método requiere una malla estructurada, con lo cual el campo de aplicación se ve reducido a algunos problemas, normalmente con geometrías sencillas. Además, este método no puede aplicarse directamente en coordenadas curvilíneas, teniéndose que transformar las ecuaciones de flujo de curvilíneas a cartesianas para la resolución del problema. Por este motivo, el método de las diferencias finitas sólo es aplicable en algunas geometrías sencillas.

3.3.2 El método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos, introducido por Turner et al. en 1956, se empleó en principio, para el análisis estructural y fue diez años después cuando comenzó su utilización para la resolución de las ecuaciones de campo en medios continuos.

El método de los elementos finitos, como método general para la resolución de las ecuaciones EDP, comienza con una división del dominio en elementos triangulares (en 2-D) o tetraédricos (en 3-D), generando una malla no estructurada. Dependiendo del tipo de elemento y de la precisión que se quiera, se tendrá que definir una malla más o menos fina de elementos. El número total de nodos multiplicado por el número de variables del problema es el número de grados de libertad del problema.

Además, tienen que definirse las llamadas funciones de forma que representan la variación de la solución en el interior de los elementos. En la práctica, se emplean normalmente funciones de forma lineales, que emplean únicamente los nodos pertenecientes a la malla. Las funciones de forma son distribuciones lineales de valor cero fuera del elemento correspondiente a la función. Esto da lugar, a una aproximación de segundo orden en la representación de los resultados.

Este método resulta muy atractivo por el uso de mallas no estructuradas. El método de los elementos finitos tiene una base matemática muy rígida, particularmente en problemas elípticos y parabólicos. Sin embargo, en ciertos casos, el método es matemáticamente equivalente al método de los volúmenes finitos, siendo el esfuerzo matemático mucho mayor. Esto explica por qué el método de los volúmenes finitos se ha hecho tan popular. Sin embargo, ambos métodos se combinan en ocasiones (normalmente en mallas estructuradas), como por ejemplo para el tratamiento de las condiciones de contorno y la discretización de flujos viscosos.

3.3.3 El método de los volúmenes finitos

El método de los volúmenes finitos emplea directamente las ecuaciones de conservación en su forma integral. Este método fue introducido por McDonald en 1971 y luego independientemente por McCormack y Paullay en 1972, para la simulación de problemas de flujo no viscoso en 2D.

Este método discretiza las ecuaciones en cada uno de los poliedros del dominio, en los que previamente se realiza una discretización espacial. La integral de superficie que aparece en el término de la variación espacial en las ecuaciones de flujo (en su forma integral) es aproximada por la suma de los flujos que atraviesan cada una de caras del poliedro.

La principal ventaja del método de los volúmenes finitos es que la discretización espacial se lleva a cabo directamente en el espacio físico del problema. Por lo tanto, no hay problemas con la transformación entre sistemas de coordenadas, como ocurre en el método de las diferencias finitas. Comparado con el método de las diferencias finitas, este método es mucho más flexible dado que se puede implementarse en mallas estructuradas y no estructuradas; por este motivo, el método de los volúmenes finitos es el más empleado para la resolución de flujos con geometrías complejas.

3.4 DISCRETIZACIÓN NUMÉRICA DE FLUJO BIFÁSICO EN MEDIOS POROSOS EN VOLÚMENES FINITOS

El procedimiento de deducción de las ecuaciones diferenciales parciales que rige el flujo de fluidos bifásico en medios porosos puede ser encontrado en el capítulo 2 del presente trabajo. Estas ecuaciones serán usadas como punto de partida para la discretización en volúmenes finitos.

El paso clave para la aplicación del método de volúmenes finitos es la integración de las ecuaciones 41 y 42 sobre un volumen de control tridimensional.

Ecuación integral para el flujo de petróleo.

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(\nabla \cdot \left(c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o \mu_o} \nabla (P_o - \rho_{ocy} gZ) \right) \right) dv \pm \iiint_V (q_{ocn}) dV = \\ & \iiint_V \left(\frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi(1-S_w)}{B_o} \right) \right) dV \end{aligned} \quad (43)$$

Ecuación integral para el flujo de agua.

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(\nabla \cdot \left(c_1 \frac{kK_{rw}}{B_w \mu_w} \nabla (P_o - P_{cwo} - \rho_{wcy} gZ) \right) \right) dV \pm \iiint_V (q_{wcn}) dV = \\ & \iiint_V \left(\frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) \right) dV \end{aligned} \quad (44)$$

Para un campo vectorial \vec{a} este teorema establece:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{a}) dV = \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS \quad (45)$$

La interpretación física de $\vec{a} \cdot \vec{n}$ es el componente del vector \vec{a} en la dirección del vector normal \vec{n} a la superficie del elemento dS . Así que la integral de la divergencia de un vector \vec{a} sobre un volumen es igual a la componente de \vec{a} en la dirección normal a la superficie con límites del volumen de control integrado sobre el límite entero de la superficie S. Aplicando el teorema de la divergencia de Gauss en las ecuaciones integrales que rigen el flujo bifásico, se obtiene:

Ecuación integral para el flujo de petróleo.

$$\begin{aligned} & \iint_S \left(c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o \mu_o} \nabla (P_o - \rho_{ocy} gZ) \cdot \vec{n} \right) dS \pm \iiint_V (q_{ocn}) dV = \\ & \frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_V \left(\frac{\phi(1-S_w)}{B_o} \right) dV \right) \end{aligned} \quad (46)$$

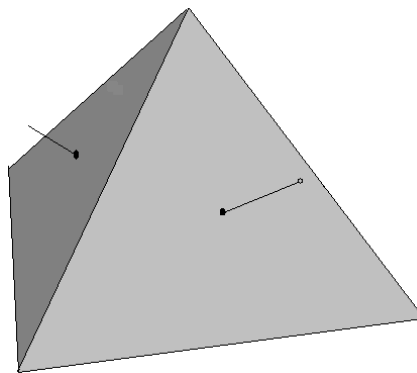
Ecuación integral para el flujo de agua.

$$\iint_S \left(c_1 \frac{kK_{rw}}{B_w \mu_w} \nabla (P_o - P_{cwo} - \rho_{wcy} gZ) \cdot \vec{n} \right) dS \pm \iiint_V (q_{wcn}) dV = \frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_V \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) dV \right) \quad (47)$$

El orden de la integración y la derivación ha sido cambiado en el término del lado derecho para ilustrar el significado físico. Este término significa la velocidad de cambio de la cantidad total de propiedad Sw del fluido en el volumen de control. La expresión de la izquierda enuncia la componente del flujo a lo largo del vector \vec{n} normal al exterior (hacia fuera).

Estas ecuaciones se aplican sobre un medio tridimensional representado por una malla tetraédrica, donde el volumen de control es el tetraedro (figura 18) y su punto representativo estará centrado en este elemento.

Figura 18. Elemento de malla tetraédrico.



Fuente: El autor

Desarrollando el término referente a las fuentes y sumideros se obtiene:

Para el agua,

$$\iiint_V (q_{wcn}) dV = q_{wcn} V = Q_{wcn} \quad (48)$$

Para el petróleo,

$$\iiint_V (q_{ocn}) dV = q_{ocn} V = Q_{ocn} \quad (49)$$

En cuanto al término difusivo se tiene que:

Ecuación para el flujo de petróleo.

$$\begin{aligned} & \iint_S \left(c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o \mu_o} \nabla(P_o - \rho_{ocy} gZ) \cdot \vec{n} \right) dS = \\ & \sum_{j=1}^n \iint_{S_{ij}} \left(c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o \mu_o} \nabla(P_o - \rho_{ocy} gZ) \cdot \vec{n} \right) dS \end{aligned} \quad (50)$$

Ecuación para el flujo de agua.

$$\begin{aligned} & \iint_S \left(c_1 \frac{kK_{rw}}{B_w \mu_w} \nabla(P_o - P_{cwo} - \rho_{wcy} gZ) \cdot \vec{n} \right) dS = \\ & \sum_{j=1}^n \iint_{S_{ij}} \left(c_1 \frac{kK_{rw}}{B_w \mu_w} \nabla(P_o - P_{cwo} - \rho_{wcy} gZ) \cdot \vec{n} \right) dS \end{aligned} \quad (51)$$

El término de la izquierda hace referencia a la integral de superficie de todo el elemento, al pasar a la expresión de la derecha se tiene la integral de superficie de cada una de las caras del poliedro. El elemento base de este trabajo son los tetraedros los cuales están compuestos de 4 caras, por tanto n tomaría este valor. El subíndice i se refiere al número de elemento y j a la cara del poliedro.

Se continúa desarrollando la expresión anterior para cada una de las caras del poliedro se obtiene la siguiente expresión:

Para el petróleo,

$$\begin{aligned} & \iint_{S_{ij}} \left(c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o \mu_o} \nabla (P_o - \rho_{ocy} gZ) \cdot \vec{n} \right) dS = \\ & \iint_{S_{ij}} \left(c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o \mu_o} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (P_o - \rho_{ocy} gZ) \right) dS \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{S_{ij}} \left(c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o \mu_o} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (P_o - \rho_{ocy} gZ) \cdot \vec{n} \right) dS = \\ & \left(c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o \mu_o} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (P_o - \rho_{ocy} gZ) \right) S_{ij} \end{aligned} \quad (53)$$

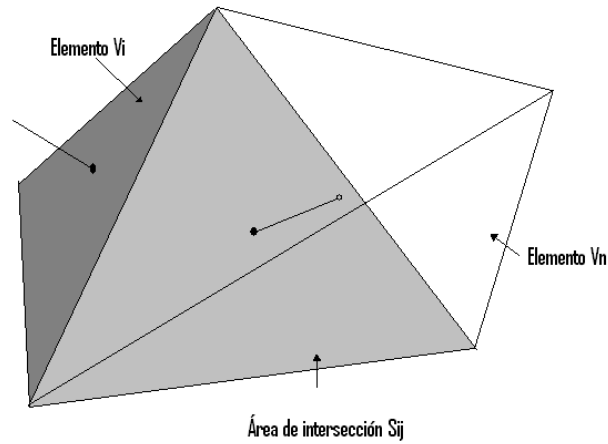
Para el agua,

$$\begin{aligned} & \iint_{S_{ij}} \left(c_1 \frac{kK_{rw}}{B_w \mu_w} \nabla (P_o - P_{cwo} - \rho_{wcy} gZ) \cdot \vec{n} \right) dS = \\ & \iint_{S_{ij}} \left(c_1 \frac{kK_{rw}}{B_w \mu_w} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (P_o - P_{cwo} - \rho_{wcy} gZ) \right) dS \end{aligned} \quad (54)$$

$$\iint_{S_{ij}} \left(c_1 \frac{kK_{rw}}{B_w \mu_w} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (P_o - P_{cwo} - \rho_{wcy} gZ) \right) dS = \left(c_1 \frac{kK_{rw}}{B_w \mu_w} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (P_o - P_{cwo} - \rho_{wcy} gZ) \right) S_{ij} \quad (55)$$

Las propiedades de permeabilidad, viscosidad y factor volumétrico se evalúan en la intersección del volumen V_i y el volumen V_n normal a la cara del elemento i . S_{ij} es el área de la superficie de intersección entre los dos volúmenes como lo muestra la siguiente figura.

Figura 19. Superficie de intersección entre los dos volúmenes tetraédricos.



Fuente: El autor

Aproximando la derivada parcial del potencial mediante el teorema de valor medio se obtiene:

Para el petróleo,

$$\left(c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o \mu_o} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (P_o - \rho_{ocy} gZ) \right) S_{ij} =$$

$$\left(c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o \mu_o} \right)_{i,n} \left(\frac{(P_o - \rho_{ocy} gZ)_n - (P_o - \rho_{ocy} gZ)_i}{\Delta L} \right) S_{ij} \quad (56)$$

Para el agua,

$$\left(c_1 \frac{kK_{rw}}{B_w \mu_w} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (P_o - P_{cwo} - \rho_{wcy} gZ) \right) S_{ij} =$$

$$\left(c_1 \frac{kK_{rw}}{B_w \mu_w} \right)_{i,n} \left(\frac{(P_o - P_{cwo} - \rho_{wcy} gZ)_n - (P_o - P_{cwo} - \rho_{wcy} gZ)_i}{\Delta L} \right) S_{ij} \quad (57)$$

ΔL hace referencia a la distancia que existe entre el baricentro del elemento que se está analizando (i) al baricentro del elemento normal(n).

De acuerdo a la definición de transmisibilidad (T) que es la facilidad del medio para permitir el flujo de fluidos a través de él y de la facilidad del fluido para desplazarse a través del medio, puede representar las ecuaciones anteriores de la siguiente forma:

Para el petróleo,

$$T_{o(i,n)} = \left(c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o \mu_o} \right)_{i,n} \frac{S_{ij}}{\Delta L} \quad (58)$$

$$\left(c_1 \frac{kK_{ro}}{B_o \mu_o}\right)_{i,n} \left(\frac{(P_o - \rho_{ocy}gZ)_n - (P_o - \rho_{ocy}gZ)_i}{\Delta L}\right) S_{ij} = T_{o(i,n)}((P_o - \rho_{ocy}gZ)_n - (P_o - \rho_{ocy}gZ)_i) \quad (59)$$

Para el agua,

$$T_{w(i,n)} = \left(c_1 \frac{kK_{rw}}{B_w \mu_w}\right)_{i,n} \frac{S_{ij}}{\Delta L} \quad (60)$$

$$\left(c_1 \frac{kK_{rw}}{B_w \mu_w}\right)_{i,n} \left(\frac{(P_o - P_{cwo} - \rho_{wcy}gZ)_n - (P_o - P_{cwo} - \rho_{wcy}gZ)_i}{\Delta L}\right) S_{ij} = T_{w(i,n)}((P_o - P_{cwo} - \rho_{wcy}gZ)_n - (P_o - P_{cwo} - \rho_{wcy}gZ)_i) \quad (61)$$

Para el término temporal se desarrolla la integral volumétrica.

Para el agua,

$$\frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_V \left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right) dV \right) = \frac{V}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right) \quad (62)$$

V es el volumen de la celda en este caso el volumen del tetraedro que se está analizando.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right) = \frac{S_w}{B_w} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\phi}{B_w} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \phi S_w \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_w}\right) \quad (63)$$

En el término temporal se está suponiendo que hay variación de la porosidad (ϕ), de la saturación de agua (S_w) y del factor volumétrico en el tiempo, se debe

colocar estas variables en función de las variables del modelo que son la presión de petróleo (P_o) y la saturación de agua (S_w).

La porosidad depende de la presión debido a la compresibilidad de la roca, la cual usualmente se asume constante ($\approx 10^{-6}$ a 10^{-7} psi^{-1}) y se puede definir como:

$$C_{roca} = \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial P} \right)_{T=const} \quad (64)$$

Integrando esta ecuación se obtiene:

$$C_{roca} \int_{P_{ref}}^P \partial P = \int_{\phi_{ref}}^{\phi} \frac{\partial \phi}{\phi} \quad (65)$$

$$\phi = \phi_{ref} e^{C_{roca}(P-P_{ref})} \quad (66)$$

Mediante la definición de la compresibilidad de la roca se va a pasar la variación de la porosidad en el tiempo a variación por la presión.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi_{ref} e^{C_{roca}(P-P_{ref})} \left(C_{roca} \frac{\partial P}{\partial t} \right) \quad (67)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi C_{roca} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (68)$$

Para la derivada del factor volumétrico del agua se puede aproximar por la ecuación de compresibilidad de los líquidos.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_w} \right) = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{B_w} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (69)$$

$$C_w = \left(\frac{1}{B_w} \frac{\partial B_w}{\partial P} \right)_{T=const} \quad (70)$$

$$B_w = B_{wref} e^{C_w(P-Pref)} \quad (71)$$

$$\frac{1}{B_w} = \frac{e^{-C_w(P-Pref)}}{B_{wref}} \quad (72)$$

Esta ecuación de compresibilidad del agua es válida para yacimientos cuya presión está por encima de la presión de burbuja ($P > P_b$).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_w} \right) = \frac{e^{-C_w(P-Pref)}}{B_{wref}} \left(-C_w \frac{\partial P}{\partial t} \right) \quad (73)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_w} \right) = \frac{-C_w}{B_w} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (74)$$

El término temporal para la ecuación del agua en función de las variables del modelo (P_o, S_w) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{V}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) = \frac{V\phi}{c_2} \left(C_{roca} \frac{S_w}{B_w} \frac{\partial P_o}{\partial t} + \frac{1}{B_w} \frac{\partial S_w}{\partial t} - S_w \frac{C_w}{B_w} \frac{\partial P_o}{\partial t} \right) \quad (75)$$

Las derivadas de la presión del petróleo y la saturación de agua en el tiempo se aproximan de la siguiente forma:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} \approx \frac{S_w^{t+1} - S_w^t}{\Delta t} \quad (76)$$

$$\frac{\partial P_o}{\partial t} \approx \frac{P_o^{t+1} - P_o^t}{\Delta t} \quad (77)$$

Donde el superíndice t indica el tiempo actual y $t+1$ el tiempo posterior. En términos discretos la ecuación temporal del agua para el elemento i quedaría:

$$\frac{V_i \phi_i}{c_2} \left(C_{roca} \frac{S_{wi}^t}{B_{wi}^t} \left(\frac{P_{oi}^{t+1} - P_{oi}^t}{\Delta t} \right) + \frac{1}{B_{wi}^t} \left(\frac{S_{wi}^{t+1} - S_{wi}^t}{\Delta t} \right) - S_{wi}^t \frac{C_{wi}}{B_{wi}^t} \left(\frac{P_{oi}^{t+1} - P_{oi}^t}{\Delta t} \right) \right) \quad (78)$$

Se utilizaran los siguientes coeficientes para el manejo de los términos de esta ecuación:

$$C_{wsi} = \frac{V_i \phi_i}{c_2 B_{wi}^t \Delta t} \quad (79)$$

C_{wsi} es el coeficiente para el agua referente a los cambios de saturación en el elemento i.

$$C_{wpi} = \frac{V_i \phi_i}{c_2 B_{wi}^t \Delta t} (C_{roca} - C_{wi}) S_{wi}^t \quad (80)$$

C_{wpi} es el coeficiente para el agua referente a los cambios de presión en el elemento i.

En términos discretos la ecuación temporal del agua para el elemento i con los coeficientes quedaría:

$$C_{wsi} (S_{wi}^{t+1} - S_{wi}^t) + C_{wpi} (P_{oi}^{t+1} - P_{oi}^t) \quad (81)$$

Ahora para la ecuación del petróleo se realiza un procedimiento análogo.

Desarrollamos la integral volumétrica,

$$\frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_V \left(\frac{\phi(1-S_w)}{B_o} \right) dV \right) = \frac{V}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi(1-S_w)}{B_o} \right) \quad (82)$$

Se deriva los términos en función del tiempo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi(1-S_w)}{B_o} \right) = \frac{(1-S_w)}{B_o} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\phi}{B_o} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \phi(1-S_w) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_o} \right) \quad (83)$$

Se coloca las derivadas en función de las variables del modelo (P_o , S_w), para derivar el factor volumétrico del petróleo en función de la presión se utilizan la siguiente expresión válida para yacimientos con presión por encima de la presión de burbuja ($P > P_b$).

$$C_o = \left(\frac{1}{B_o} \frac{\partial B_o}{\partial P} \right)_{T=const} \quad (84)$$

$$B_o = B_{ob} e^{C_o(P-P_b)} \quad (85)$$

$$\frac{1}{B_o} = \frac{e^{-C_o(P-P_b)}}{B_{ob}} \quad (86)$$

P_b se refiere a la presión de burbuja y B_{ob} es el factor volumétrico de formación del petróleo para esta presión.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_o} \right) = \frac{e^{-C_o(P-P_b)}}{B_{ob}} \left(-C_o \frac{\partial P}{\partial t} \right) \quad (87)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_o} \right) = \frac{-C_o}{B_o} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (88)$$

El término temporal para la ecuación del petróleo en función de las variables del modelo (P_o, S_w) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{V}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi(1-S_w)}{B_o} \right) = \frac{V\phi}{c_2} \left(C_{roca} \frac{(1-S_w)}{B_o} \frac{\partial P_o}{\partial t} - \frac{1}{B_o} \frac{\partial S_w}{\partial t} - (1 - S_w) \frac{C_o}{B_o} \frac{\partial P_o}{\partial t} \right) \quad (89)$$

En términos discretos la ecuación temporal del petróleo para el elemento i quedaría:

$$\frac{V_i \phi_i}{c_2} \left(C_{roca} \frac{(1-S_{wi}^t)}{B_{oi}^t} \left(\frac{P_{oi}^{t+1} - P_{oi}^t}{\Delta t} \right) - \frac{1}{B_{oi}^t} \left(\frac{S_{wi}^{t+1} - S_{wi}^t}{\Delta t} \right) - (1 - S_{wi}^t) \frac{C_{oi}}{B_{oi}^t} \left(\frac{P_{oi}^{t+1} - P_{oi}^t}{\Delta t} \right) \right) \quad (90)$$

Agrupando la ecuación en coeficientes se tiene:

$$C_{opi} = \frac{V_i \phi_i}{c_2 B_{oi}^t \Delta t} (C_{roca} - C_{oi})(1 - S_{wi}^t) \quad (91)$$

C_{opi} es el coeficiente para el petróleo referente a los cambios de presión en el elemento i.

$$C_{osi} = - \frac{V_i \phi_i}{c_2 B_{oi}^t \Delta t} \quad (92)$$

C_{osi} es el coeficiente para el petróleo referente a los cambios de saturación en el elemento i.

En términos discretos la ecuación temporal del petróleo para el elemento i con los coeficientes quedaría:

$$C_{osi}(S_{wi}^{t+1} - S_{wi}^t) + C_{opi}(P_{oi}^{t+1} - P_{oi}^t) \quad (93)$$

3.5 MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DE FLUJO BIFÁSICO EN EL TIEMPO

La discretización conduce a un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales y estas ecuaciones pueden ser linealizadas en diferentes formas o solucionadas iterativamente, esto se refiere al nivel de tiempo al cual serán evaluados los parámetros dependientes del tiempo que tienen que ver la formulación de las ecuaciones. Así que, según sea la formulación, los parámetros de la discretización espacial serán evaluados en el tiempo t ó $t+1$. De esta forma se tienen alternativas de solución implícitas, explícitas o semi-implícitas.

Una alternativa a las formulaciones es el método IMPES (implícito en presión y explícito en saturación), este método surgió en el trabajo de Sheldon et al. (1959),

y Stone y Gardner (1961). Su idea básica consiste en la solución de la presión de una fase de manera implícita y la saturación de manera explícita. Así se tiene una solución de la presión en el nuevo paso de tiempo ($t+1$) y se evalúan luego la saturación de la fase como función del valor de presión calculada. Al plantear esto, las presiones capilares y transmisibilidades son evaluadas explícitamente (tiempo t). Esta formulación supone un ahorro en el tiempo de simulación, debido a que se realizan menos operaciones aritméticas para la solución no simultánea de las ecuaciones. Sin embargo, en algunos casos, esta formulación tiene la desventaja de presentar problemas de estabilidad. Tal situación se puede presentar cuando hay grandes variaciones en las saturaciones en un paso de tiempo. Algunas veces, es posible mantener la estabilidad de la solución, restringiendo el tamaño del paso de tiempo, no obstante, esto implica un incremento en el tiempo de las corridas.

Por otra parte, se tienen los métodos de solución simultánea, que fueron propuestos por primera vez por Douglas et al. (Douglas, Peaceman, y Rachford 1959) y luego se extendió por Coats et al. (Abrigos, Nielsen, Terhune, y Weber, 1967), y Sheffield (Sheffield, 1969). Estos métodos fueron aplicados inicialmente a problemas de flujo multifásico inmiscible. Aziz y Settari (1979) realizaron un análisis de la estabilidad de los métodos de solución simultánea semi-implícito y totalmente implícitos y llegaron a la conclusión de que satisfacen el balance de materia y son incondicionalmente estables. Cuando se habla de un método de solución simultánea totalmente implícito, significa que se evalúan todas las variables e inclusive las dependientes de éstas, en el tiempo $t+1$. Esto genera un sistema altamente no lineal que es linealizado mediante el método de Newton a través del cálculo de las derivadas de las ecuaciones constitutivas con respecto a cada una de sus variables, generando de esta forma una matriz jacobiana, la cual es solucionada iterativamente hasta su convergencia. En cuanto a los métodos de solución simultánea semi-implícitos, los cuales fueron usados en el presente trabajo consisten en dejar implícitas (tiempo $t+1$) las variables principales (P_o y S_w) de las ecuaciones constitutivas y explícitas (tiempo t) las variables

dependientes de estas (K_{ro} , B_o , μ_o , ρ_o , K_{rw} , B_w , μ_w , ρ_w , Q_w , Q_o). Por tanto, se genera un sistema lineal que es resuelto por un solucionador lineal iterativo para mayor eficiencia computacional.

3.5.1 Método de solución simultánea semi-implícito para ecuaciones de flujo bifásico en medios porosos

Partiendo de las ecuaciones 58 y 59 discretizada con el método de volúmenes finitos para el petróleo, se plantea los términos correspondientes a la transmisibilidad del petróleo explícitamente,

$$T_{o(i,n)}^t = \left(C_1 \frac{k k_{ro}^t}{B_o^t \mu_o^t} \right)_{i,n} \frac{S_{ij}}{\Delta L_{i,n}} \quad (94)$$

Acoplando la ecuación de flujo de petróleo para un elemento tetraédrico i se obtiene:

$$\sum_{j=1}^4 T_{o(i,n_j)}^t \left((P_o^{t+1} - \gamma_o^t Z)_{n_j} - (P_o^{t+1} - \gamma_o^t Z)_i \right) \pm Q_{ocn}^t = C_{osi} (S_{wi}^{t+1} - S_{wi}^t) + C_{opi} (P_{oi}^{t+1} - P_{oi}^t) \quad (95)$$

La sumatoria hace referencia a cada una de las caras del tetraedro (4) y γ_o es el gradiente hidrostático del petróleo ($\rho_o g$). Ahora reacomodando la ecuación donde los términos explícitos van a la derecha y los términos implícitos a la izquierda.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^4 \left(T_{o(i,n_j)}^t P_{on_j}^{t+1} \right) - \sum_{j=1}^4 \left(T_{o(i,n_j)}^t - C_{opi} \right) P_{oi}^{t+1} - C_{osi} S_{wi}^{t+1} = \\ & -C_{osi} S_{wi}^t - C_{opi} P_{oi}^t - \sum_{j=1}^4 T_{o(i,n_j)}^t \left(\gamma_{oi}^t Z_i - \gamma_{on_j}^t Z_{n_j} \right) \mp Q_{ocn}^t \quad (96) \end{aligned}$$

Para el caso para el agua, la transmisibilidad explícita es:

$$T_{w(i,n)}^t = \left(c_1 \frac{k k_{rw}^t}{B_w^t \mu_w^t} \right)_{i,n} \frac{S_{ij}}{\Delta L_{i,n}} \quad (97)$$

En el caso del agua se debe tener en cuenta que se tiene la variación de la presión capilar agua-petróleo en función de la distancia. Por lo general esta propiedad está en función de la saturación de agua, por tanto se debe expresar esta variación en estos términos.

$$\frac{\Delta P_{cow}}{\Delta L} = \frac{\Delta P_{cow}}{\Delta S_w} \frac{\Delta S_w}{\Delta L} \quad (98)$$

Reacomodando la ecuación de flujo de agua,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^4 T_{w(i,n_j)}^t \left((P_o^{t+1} - P_{cwo}^t - \gamma_w^t Z)_{n_j} - (P_o^{t+1} - P_{cwo}^t - \gamma_w^t Z)_i \right) = \\ & \sum_{j=1}^4 \left(T_{w(i,n_j)}^t P_{on_j}^{t+1} \right) - \sum_{j=1}^4 \left(T_{w(i,n_j)}^t \right) P_{oi}^{t+1} + \sum_{j=1}^4 T_{w(i,n_j)}^t \left(\gamma_{wi}^t Z_i - \gamma_{wn_j}^t Z_{n_j} \right) - \\ & \sum_{j=1}^4 T_{w(i,n_j)}^t \left(P_{cwo(n_j)}^t - P_{cwoi(i)}^t \right) \quad (99) \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned}
\left(P_{cwo(n_j)}^t - P_{cwoi(i)}^t\right) &= \Delta P_{cow(i,n_j)}^t = \left(\frac{\Delta P_{cow}}{\Delta SW}\right)_{(i,n_j)}^t \Delta SW_{(i,n_j)}^{t+1} = \\
\left(\frac{\Delta P_{cow}}{\Delta SW}\right)_{(i,n_j)}^t &\left(SW_{(n_j)}^{t+1} - SW_{(i)}^{t+1}\right) \quad (99)
\end{aligned}$$

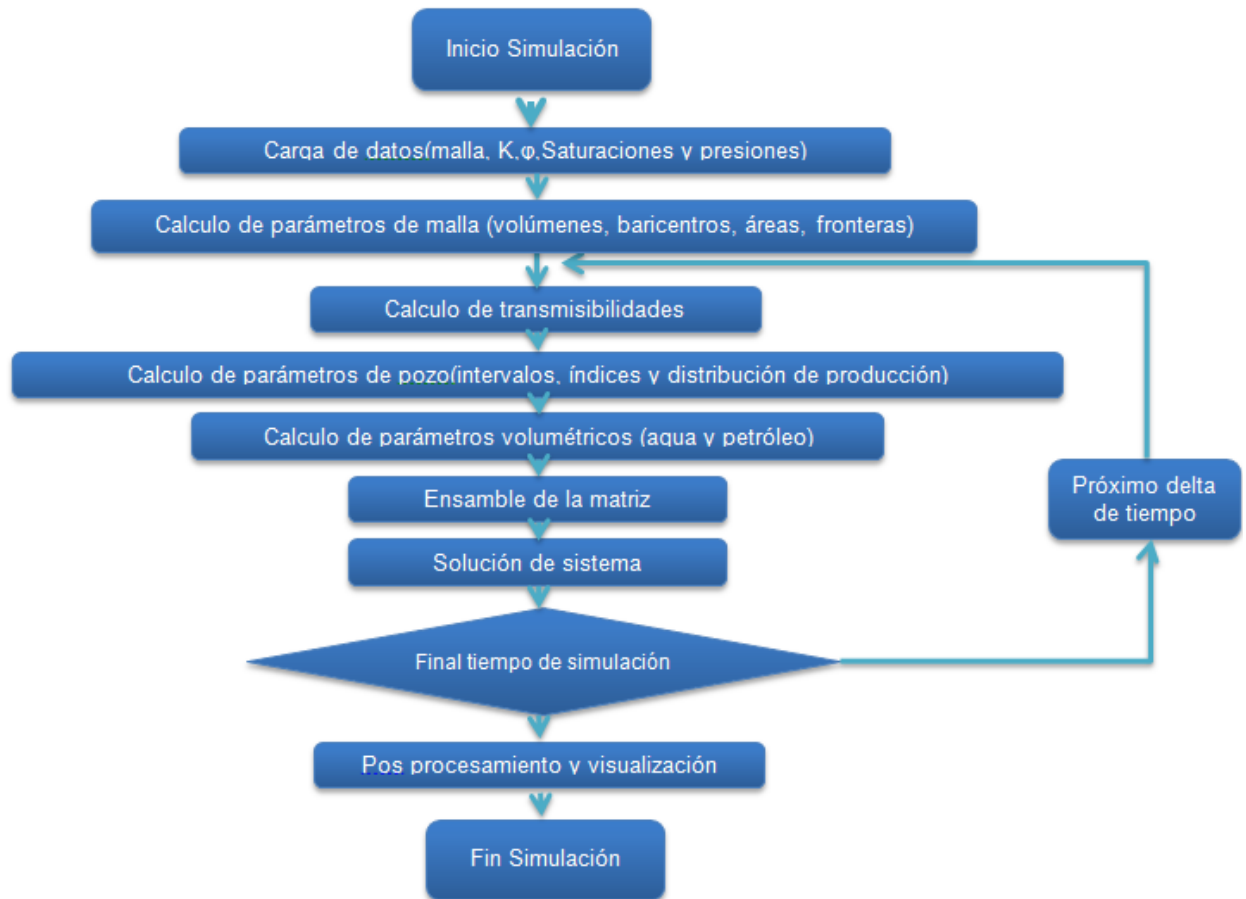
Reacomodando la ecuación del agua, donde los términos explícitos van a la derecha y los términos implícitos a la izquierda, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^4 \left(T_{w(i,n_j)}^t P_{on_j}^{t+1}\right) - \sum_{j=1}^4 \left(T_{w(i,n_j)}^t - C_{wpi}\right) P_{oi}^{t+1} \\
&\quad - \sum_{j=1}^4 \left(T_{w(i,n_j)}^t \left(\frac{\Delta P_{cow}}{\Delta SW}\right)_{(i,n_j)}^t SW_{(n_j)}^{t+1}\right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^4 \left(T_{w(i,n_j)}^t \left(\frac{\Delta P_{cow}}{\Delta SW}\right)_{(i,n_j)}^t - C_{wsi}\right) SW_i^{t+1} \\
&= -C_{wsi} S_{wi}^t - C_{wpi} P_{oi}^t - \sum_{j=1}^4 T_{w(i,n_j)}^t \left(\gamma_{wi}^t Z_i - \gamma_{wn_j}^t Z_{n_j}\right) \mp Q_{wcn}^t \quad (100)
\end{aligned}$$

4. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO COMPUTACIONAL

Este capítulo describe los detalles de la herramienta computacional partiendo de un diagrama general y especificando en detalle cada una de las etapas. El diagrama general de aplicación es el siguiente:

Figura 20. Diagrama de flujo general de la aplicación.

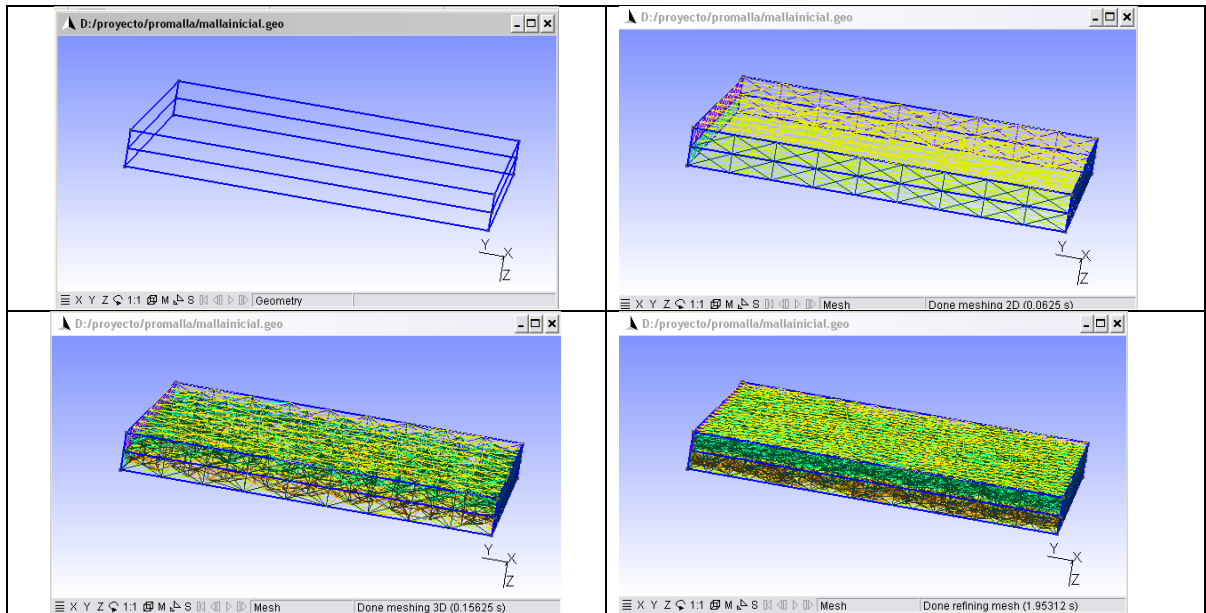


Fuente El autor.

La malla tetraédrica para la simulación fue creada en dos etapas con herramientas software de carácter libre. La primera etapa fue crear el cascaron del modelo y

una malla preliminar, el cual se realizó en el software Gmsh⁴, como se muestra en las siguientes figuras:

Figura 21. Generación de la malla tetraédrica en Gmsh.



Fuente: El autor.

La segunda etapa fue el control de calidad de la malla debido a que se estaba obteniendo volúmenes por debajo del 0.01% con respecto al volumen mayor. La herramienta utilizada para este procedimiento fue el Tetgen⁵.

4.1 CARGA DE DATOS

La información requerida para las simulaciones numéricas se debe dar elemento por elemento dado que la aplicación, no tiene un módulo geoestadísticos o de interpolación espacial para distribuir las propiedades petrofísicas.

⁴ GEUZAINÉ Christophe and REMACLE Jean François, Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, Version 2.6.1, 2012.

⁵ SI Hang, TetGen: A Quality Tetrahedral Mesh Generator and Three-Dimensional Delaunay Triangulator, Numerical Mathematics and Scientific Computing Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlin, 2006.

Los archivos requeridos son:

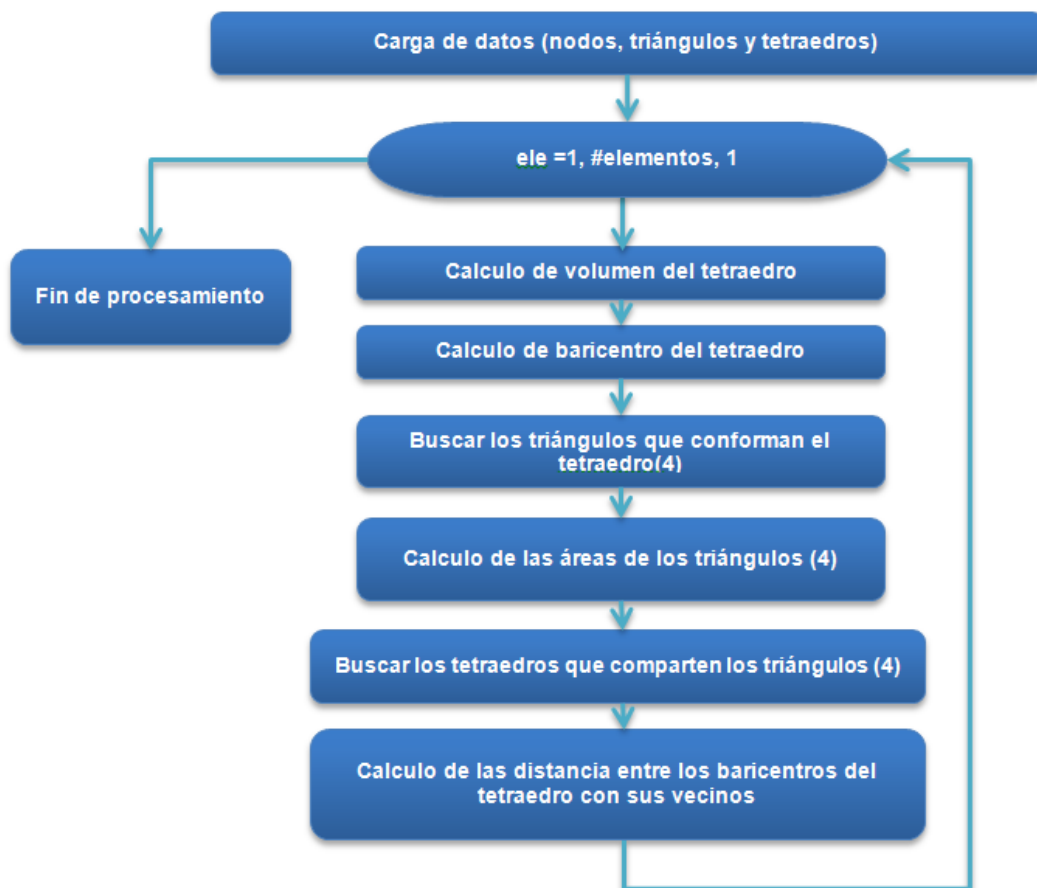
- Archivo de la malla tetraédrica: contiene la información de los nodos, triángulos y tetraedros. El formato de malla utilizado es el Medit INRIA Mesh. Ver anexo 1.
- Permeabilidad: Por lo general esta propiedad en la industria petrolera se da en tres direcciones X, Y y Z. Por tanto se debe dar los valores K_x , K_y y K_z para cada elemento.
- Porosidad: Esta propiedad se ingresa en fracción para cada elemento.
- Saturación: El modelo de flujo de fluidos establecido es bifásico (agua-petróleo), por tanto se requiere solo una saturación en este caso se ingresa la saturación de petróleo para cada celda.
- Presiones: Se ingresa la presión de petróleo para cada celda.
- Datos de permeabilidad relativa: Corresponde a los datos de permeabilidad relativa del agua y el petróleo en función de la saturación de agua.
- PVT agua: Corresponde a la propiedades del agua del yacimiento, las cuales son: compresibilidad, factor volumétrico, viscosidad a una presión de referencia.
- PVT petróleo: Corresponde a la propiedades del petróleo del yacimiento, las cuales son: compresibilidad, factor volumétrico, viscosidad, gas en solución a la presión de burbuja.
- Datos de pozos: Es la información requerida para la ubicación y producción de los pozos.
- Tiempos de simulación: Son los tiempos donde se realiza el reporte las variables principales (presión y saturaciones).

El formato del archivo de ingreso se coloca como anexo, ver anexo 2.

4.2 CÁLCULO DE PARÁMETROS DE LA MALLA

Básicamente consiste en procesar los datos ingresados en el archivo de malla para obtener los datos requeridos por la aplicación (volúmenes, áreas, y otros). El proceso se explica a través del siguiente diagrama de flujo:

Figura 22. Cálculo de parámetros de la malla tetraédrica.



Fuente: El autor.

Este proceso es costoso computacionalmente tanto por el almacenamiento como por el tiempo de cómputo, debido a que tienen que interactuar cada elemento con todos los demás. En el caso de las fronteras se detectan durante la búsqueda de

los tetraedros vecinos con los triángulos que conforman al tetraedro que se analiza, si no se encuentra un tetraedro que comparta uno o varios de los triángulos se considera que este elemento está en la frontera y se coloca un valor cero como marcador de esta frontera.

4.3 CÁLCULO DE LAS TRANSMISIBILIDADES

Este es uno de los procesos de mayor cuidado en la aplicación debido a la sensibilidad de las variables. A continuación se expone como se realizó el proceso de cálculo. Esta propiedad debe ser calculada en el baricentro del triángulo que intercepta al tetraedro con el tetraedro vecino

- Permeabilidades en la dirección normal a la cara del tetraedro:

La permeabilidad dada en el archivo comprenden las direcciones X, Y y Z, pero cada tetraedro de la malla tiene una dirección diferente es sus caras normales. Para determinar dichas direcciones se usa la siguiente ecuación:

$$K_n = K_x K_y K_z \sqrt{K_y^2 K_z^2 \cos^2 \alpha + K_x^2 K_z^2 \cos^2 \beta + K_x^2 K_y^2 \cos^2 \gamma} \quad (101)$$

Donde los cosenos son las componentes unitarias del vector normal a la cara del tetraedro.

Para calcular en el baricentro del triángulo intercepto, se de la siguiente forma:

$$K_c = \frac{2K_i}{K_i + K_n} \quad (102)$$

Donde i es el identificador del elemento analizado y n es la permeabilidad del elemento normal a una de las caras de este.

➤ Permeabilidades relativas:

Esta propiedad induce en los modelos de flujo de fluidos fuertes cambios (no linealidades fuertes), debido a que está en función de las saturaciones. Para el cálculo se utiliza la siguiente expresión:

$$K_{rc} = \omega K_{ri} + (1 - \omega) K_{rn} \quad (103)$$

Donde ω está en función del potencial de petróleo,

$$\omega = \begin{cases} 1 & \Phi_{oi} > \Phi_{on} \\ 0.5 & \Phi_{oi} = \Phi_{on} \\ 0 & \Phi_{oi} < \Phi_{on} \end{cases}$$

K_r se obtiene a través de una interpolación lineal en los datos K_{rw} con el valor de saturación de la celda.

➤ Factor volumétrico de formación:

El cálculo de esta propiedad se realiza en función de la compresibilidad tomando como referencia los datos ingresados de factor volumétrico y presión, y aplicando las ecuaciones 71 y 85.

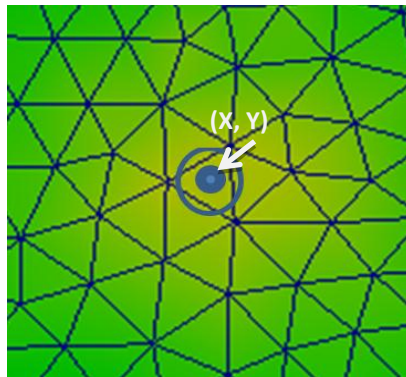
$$B_{lc} = \frac{B_{li} + B_{ln}}{2} \quad l = o, w \quad (104)$$

4.4 CÁLCULO DE PARÁMETROS DE POZO

Para el cálculo de parámetros de pozo se requiere inicialmente seleccionar los elementos que hacen parte del pozo, para ello se usan las coordenadas X,Y dadas y se hace una búsqueda donde los baricentros de los elementos que este dentro de un radio son seleccionados como elementos del pozo. El radio de búsqueda se determina en función del radio del círculo inscrito dentro del elemento de mayor volumen con la siguiente expresión:

$$r_t = \frac{\sqrt{6}}{12} (6volumen)^{\frac{1}{3}} \quad (105)$$

Figura 23. Ubicación de los pozos.



Fuente: El autor.

Con los elementos seleccionados se inicia el cálculo del aporte de cada elemento con respecto al flujo total del pozo. Para este cálculo se asume que la caída de presión en todas las celdas es la misma y los pozos son verticales.

- **Cálculo de índice de productividad**

$$\lambda_l = \frac{K_{rl}}{\mu_l} \quad l = o, w \quad (106)$$

λ_l es la movilidad de las fases.

Ahora se van a plantear la expresión para calcular una constante PID denominado factor cuasi-estacionario del índice de productividad.

$$PID = \frac{0.00708K_{habs}h}{Ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right)+S} \quad (107)$$

Donde,

r_e y r_w son los radios del yacimiento y el pozo respectivamente.

S es el factor de daño.

h es el espesor neto.

K_{habs} es la permeabilidad absoluta horizontal.

Para el cálculo de la permeabilidad absoluta horizontal se realiza con la siguiente expresión:

$$K_{habs} = \sqrt{K_x K_y} \quad (108)$$

r_e se aproxima al radio equivalente del elemento, en este caso será el radio de la esfera inscrita en el tetraedro.

$$r_e \approx \frac{\sqrt{6}}{12} (6volumen_{tetraedro})^{\frac{1}{3}} \quad (109)$$

Para el espesor neto se aproxima a $2r_e$.

El valor de PID debe ser calculado para cada conexión de los pozos. Finalmente el índice de productividad (IP) se calcula de la siguiente forma:

$$IP = \frac{\lambda_l}{B_l} PID \quad (110)$$

- **Control por tasa de producción de petróleo Q_o :**

Para el cálculo de la tasa de producción de petróleo que aporta cada conexión k (elemento interceptado por las coordenadas del pozo) de un total de conexiones N_k , se utiliza la siguiente expresión:

$$Q_{ok} = Q_o \frac{[PID \frac{\lambda_o}{B_o}]_k}{\sum_{i=1}^{N_k} [PID \frac{\lambda_o}{B_o}]_i} \quad (111)$$

La producción de agua está dada por:

$$Q_{wk} = Q_{ok} \left(\frac{\lambda_w/B_w}{\lambda_o/B_o} \right)_k \quad (112)$$

- **Control por tasa de producción de agua Q_w :**

$$Q_{wk} = Q_w \frac{[PID \frac{\lambda_w}{B_w}]_k}{\sum_{i=1}^{N_k} [PID \frac{\lambda_w}{B_w}]_i} \quad (113)$$

La producción de agua está dada por:

$$Q_{ok} = Q_{wk} \left(\frac{\lambda_o/B_o}{\lambda_w/B_w} \right)_k \quad (114)$$

- **Control de tasa de inyección:**

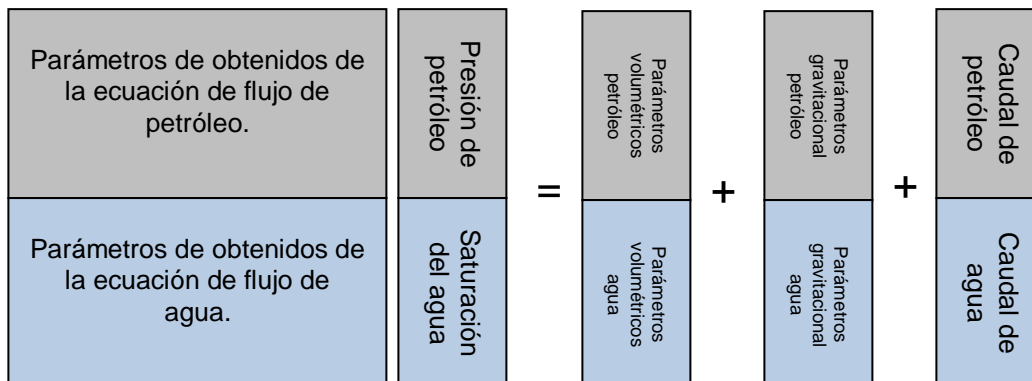
Cuando se tiene un pozo inyector de agua, es necesario especificar la tasa de inyección y el índice de inyectividad WI. Para calcular la tasa de inyección de cada conexión del pozo se usa la siguiente expresión:

$$Q_{wk} = Q_w \frac{[WI(\lambda_o + \lambda_w)]_k}{\sum_{i=1}^{N_k} [WI(\lambda_o + \lambda_w)]_i} \quad (115)$$

4.5 ENSAMBLE DE LA MATRIZ

La matriz que se obtiene de este modelamiento es una matriz asimétrica y cuando la simulación está dominada por cambios de saturación tiende a un sistema mal condicionado. Los coeficientes de esta matriz están conformados por las transmisibilidades y las constantes volumétricas (COP, COS, CWP, CWS) del agua y del petróleo de acuerdo a la discretización planteada en el capítulo 3 de este trabajo. Las variables del sistema son la presión de petróleo (Po) y la saturación de agua (Sw) para cada elemento. Por lo tanto, si se tiene n elementos en la malla, se tienen 2nx2n variables y 2nx2n ecuaciones. La forma como están distribuidas las variables dentro de la matriz se presenta en el siguiente esquema:

Figura 24. Esquema de distribución de las variables dentro matriz.



Fuente: El autor.

En cuanto a los elementos de la matriz se puede decir que más del 99% son valores nulos (0), dado que por cada ecuación se tiene un máximo de 6 valores diferentes de cero. Por ejemplo una de las mallas que se trabajó contenía 2422 tetraedros, por tanto el sistema lineal sería de 4844×4844 , por cada 4844 valores por ecuación tan solo 6 eran diferentes de 0, esto da un total de 29064 datos no nulos frente a 23435272 nulos, un 0.13 % de toda la matriz contiene información diferente de cero para esta malla.

4.6 SOLUCIÓN DEL SISTEMA LINEAL

La matriz ensamblada del modelamiento de flujo de fluidos presentaba dos grandes problemas: matrices inmensas y con alto grado de dispersión y matrices asimétricas mal condicionadas.

El problema de dispersión y tamaño de la matriz aumenta enormemente el consumo de memoria y el tiempo de cómputo. Sea el valor nulo o no el sistema asigna memoria y tiene en cuenta estos valores en los procesos iterativos de cálculo. La forma de solucionar esta dificultad es usando formatos de almacenamiento comprimido por fila y por columna que son los más generales para el almacenamiento de matrices dispersas, puesto que no toman en cuenta el patrón de esparcidad de la matriz y no almacenan elementos innecesarios.

Para el presente trabajo se utilizó el formato de almacenamiento comprimido por fila (CRS) que guarda los elementos subsecuentes diferentes de cero de las filas de la matriz en localidades adyacentes de memoria. Por ejemplo, asumiendo que tenemos una matriz dispersa no-simétrica A (figura 25), entonces se crean tres vectores para almacenar la matriz (figura 26): uno para números en punto flotante (val) y los otros dos enteros (ia , id). El vector val almacena los valores de los elementos diferentes de cero de la matriz A en el orden que ellos se obtienen

cuando se recorre la matriz por filas. El vector id almacena los índices de las columnas de los elementos del vector val y el vector ia almacena las posiciones que inician una fila. A continuación se presenta un esquema de este formato.

Figura 25. Ejemplo de matriz dispersa.

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 13 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 22 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 41 & 0 & 0 & 44 & 0 & 0 & 47 \\ 0 & 0 & 53 & 0 & 55 & 0 & 0 \\ 0 & 62 & 0 & 0 & 0 & 66 & 0 \\ 0 & 0 & 73 & 0 & 75 & 0 & 77 \end{pmatrix}$$

Fuente: El autor.

Figura 26. Formato de matriz comprimida CRS.

ia	0	3	5	7	10	12	14	17	Índice de filas									
id	0	2	5	1	3	1	2	0	3	6	2	4	1	5	2	4	6	Índice de columna
val	11	13	16	22	24	32	33	41	44	47	53	55	62	66	73	75	77	Valor

Fuente: El autor.

Con respecto al problema de simetría y mal acondicionamiento de la matriz que afecta la solución del sistema lineal se utilizó el método iterativo de gradiente biconjugado (BCG) que se basa en el método de gradiente conjugado con la diferencia de que la matriz no tiene que ser simétrica. Si la matriz es simétrica, entonces el método es equivalente al gradiente conjugado. Este método a diferencia del gradiente conjugado no garantiza la convergencia en n iteraciones. La siguiente figura presenta el pseudocódigo de este método.

Figura 27. Seudocódigo método de gradiente biconjugado.

```


$$\mathbf{g}_0 \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}, \text{ gradiente inicial}$$


$$\tilde{\mathbf{g}}_0 \leftarrow \mathbf{g}_0, \text{ pseudo-gradiente inicial}$$


$$\mathbf{p}_0 \leftarrow -\mathbf{g}_0, \text{ dirección de descenso inicial}$$


$$\tilde{\mathbf{p}}_0 \leftarrow \mathbf{p}_0, \text{ pseudo-dirección de descenso inicial}$$


$$\varepsilon, \text{ tolerancia. } k \leftarrow 0$$

    mientras  $\mathbf{g}_k \neq \mathbf{0}$ , es decir  $\|\mathbf{g}_k\| > \varepsilon$ 

$$\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{A}\tilde{\mathbf{p}}_k$$


$$\tilde{\mathbf{w}} \leftarrow \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{p}}_k$$


$$\alpha_k \leftarrow -\frac{\tilde{\mathbf{g}}_k^T \mathbf{g}_k}{\tilde{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{w}}$$


$$\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$$


$$\mathbf{g}_{k+1} \leftarrow \mathbf{g}_k + \alpha_k \mathbf{w}$$


$$\tilde{\mathbf{g}}_{k+1} \leftarrow \tilde{\mathbf{g}}_k + \alpha_k \tilde{\mathbf{w}}$$


$$\beta_k \leftarrow \frac{\tilde{\mathbf{g}}_{k+1}^T \mathbf{g}_{k+1}}{\tilde{\mathbf{g}}_k^T \mathbf{g}_k}$$


$$\mathbf{p}_{k+1} \leftarrow -\mathbf{g}_{k+1} + \beta_{k+1} \mathbf{p}_k$$


$$\tilde{\mathbf{p}}_{k+1} \leftarrow -\tilde{\mathbf{g}}_{k+1} + \beta_{k+1} \tilde{\mathbf{p}}_k$$


$$k \leftarrow k+1$$


```

Fuente: Tomado de VARGAS Miguel, <http://www.cimat.mx/~miguelvargas>.

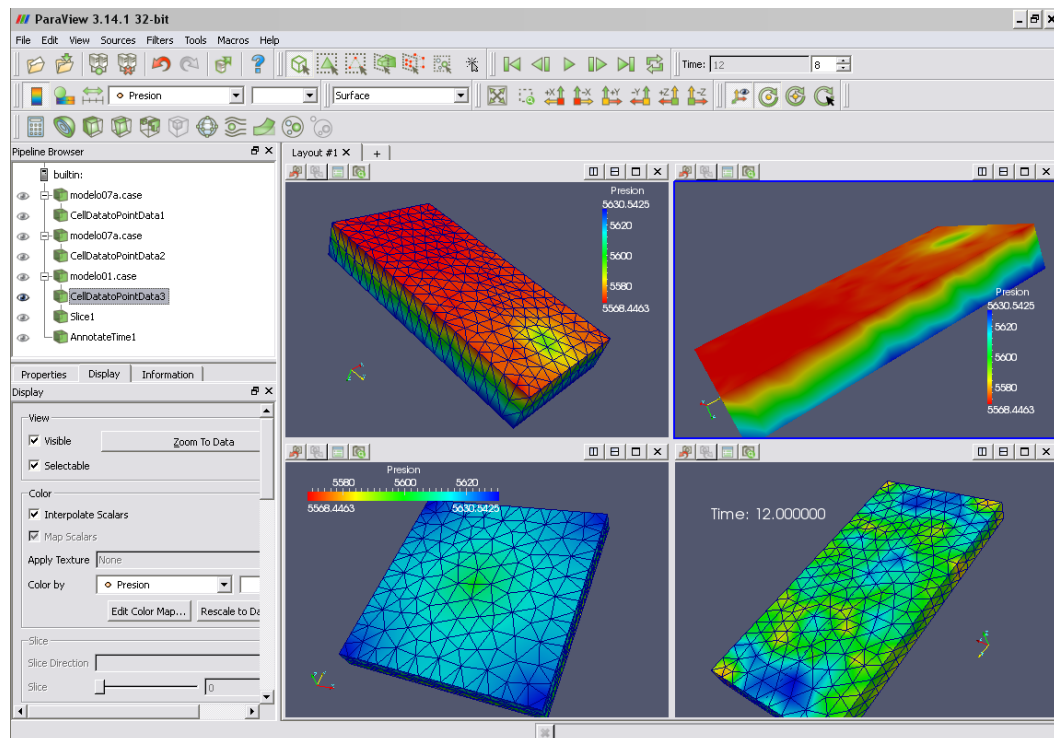
Este método fue implementado en el formato de matriz CRS y posteriormente fueron implementadas dos variantes más del método: gradiente biconjugado estabilizado y gradiente biconjugado preconditionado.

4.7 POSPROCESAMIENTO Y VISUALIZACIÓN

Para el posprocesamiento y visualización de la información se utilizó paraview⁶ que es un software de código abierto y multi-plataforma, para el análisis de datos y la visualización de aplicaciones secuencial o en paralelo. Se puede usar para el análisis de datos cualitativo y cuantitativo de forma interactiva en 3D.

Paraview fue desarrollado para analizar grandes conjuntos de datos, se puede ejecutar en supercomputadoras así como en ordenadores portátiles y llegar a analizar conjuntos de datos a escala de teras de información. Para ver el formato de datos que recibe paraview ver anexo 3.

Figura 28. Visualización en ParaView.



Fuente: El autor.

⁶ <http://www.paraview.org/paraview/project/about.html>

5. MODELOS PLANTEADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presenta algunos ejemplos de flujo de fluidos bifásico en medio porosos resueltos con el modelo computacional, con el objetivo de validar la formulación numérica propuesta en el capítulo 3. A su vez estos modelos fueron implementados en el simulador comercial de diferencias finitas Eclipse 100, para realizar una comparación de resultados. Los modelos planteados se dividen en dos partes: primera parte son modelos con producción primaria (solo pozos productores) donde básicamente se observan grandes cambios en la presión y muy pocos en la saturación por el efecto de descompresión del yacimiento. En la segunda se evalúa un proceso de recobro secundario de inyección de agua donde el cambio de presión es muy poco con respecto a los cambios de saturación. Se debe tener en cuenta que al ser un modelo bifásico (Agua-petróleo) significa que la presión está por encima de la presión de burbuja de lo contrario se obtendría un modelo trifásico debido a la liberación del gas en solución. En cuanto a las condiciones de frontera serán cerradas debido a que no cuenta con un módulo para la inserción de acuíferos.

5.1 MODELOS DE YACIMIENTOS CON PRODUCCIÓN PRIMARIA

Como primera medida se presentan las propiedades de roca y fluidos tenidas en cuenta para la implementación de estos modelos:

5.1.1 Propiedades de roca del yacimiento

Tabla 2. Propiedades de la roca.

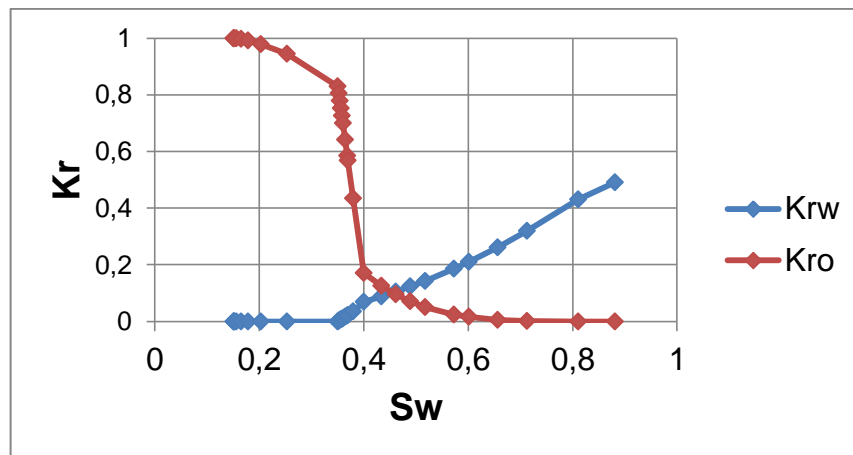
Propiedad	símbolo	valor	unidades
Porosidad	\emptyset	0.21	
Compresibilidad de la roca	Co	1.00E-06	1/psia
Permeabilidad en X	Kx	100	mDarcy
Permeabilidad en Y	Ky	100	mDarcy
Permeabilidad en Z	Kz	15	mDarcy

Fuente: El autor

Como se puede observar este modelo será homogéneo e isotrópico con respecto a la dirección horizontal.

Las curvas de permeabilidad relativa agua-petróleo del modelo son:

Figura 29. Curvas de permeabilidad relativa agua-petróleo del modelo.



Fuente: El autor.

Los datos de las curvas de permeabilidad relativa fueron tomados del noveno caso comparativo de la SPE⁷ al igual que los datos de los fluidos.

5.1.2 Propiedades de los fluidos del yacimiento

Tabla 3. Propiedades del petróleo.

Propiedad	símbolo	valor	unidades
Presión de burbuja	Pb	4000	psia
Factor volumétrico de formación a Pb	Bob	1.12	Rb/STB
Viscosidad a Pb	μ_{ob}	0.94	Cp
Densidad del petróleo	ρ_o	44.98	Lb/ft ³
Densidad del gas	ρ_g	0.0702	Lb/ft ³
Gas en solución	Rs	1.5	scf/STB

Fuente: Tomados de Killough, J.E, Ninth SPE Comparative Solution Project: A Reexamination of Black-Oil Simulation, SPE 29110.

Tabla 4. Propiedades del agua.

Propiedad	símbolo	valor	unidades
Presión de referencia	Pref	3600	psia
Factor volumétrico de formación a Pref	Boref	1.0034	Rb/STB
Viscosidad a Pref	μ_{oref}	0.96	Cp
Compresibilidad del agua	Cw	1.00E-06	1/psia
Densidad del agua	ρ_w	63.01	Lb/ft ³

Fuente: Tomados de Killough, J.E, Ninth SPE Comparative Solution Project: A Reexamination of Black-Oil Simulation, SPE 29110.

⁵ Killough, J.E, Ninth SPE Comparative Solution Project: A Reexamination of Black-Oil Simulation, SPE 29110, University of Houston, 1995.

5.1.3 Condiciones iniciales del yacimiento

Tabla 5. Condiciones iniciales.

Propiedad	símbolo	valor	unidades
Presión inicial	Pi	5600	psia
Saturación inicial de agua	Swi	0.12	
Saturación inicial de petróleo	Soi	0.88	

Fuente: El autor.

5.1.4 Modelo geométrico del yacimiento

En el modelo geométrico se tomaron las siguientes dimensiones:

Tabla 6. Dimensiones del modelo.

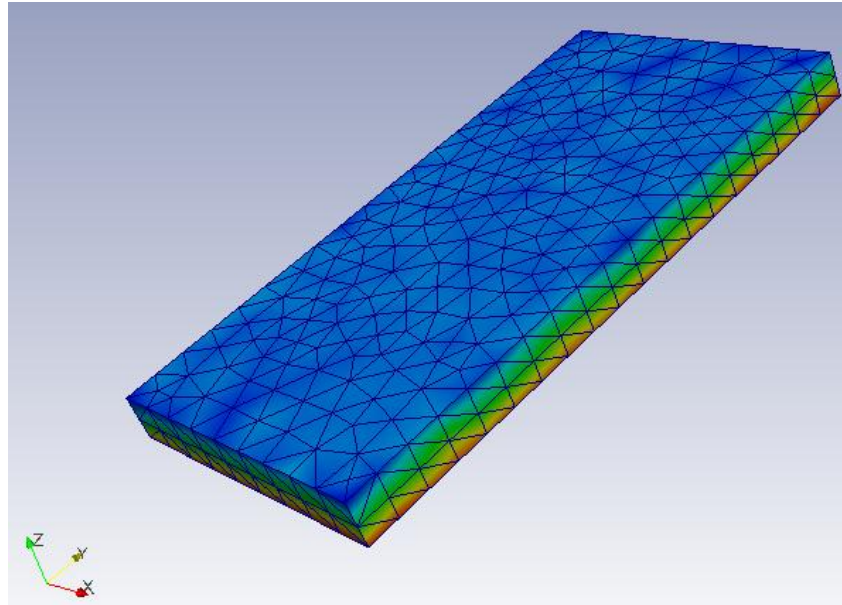
Propiedad	símbolo	valor	unidades
Longitud en X	Lx	1500	ft
Longitud en Y	Ly	3000	ft
Longitud en Z	Lz	220	ft

Fuente: El autor.

En cuanto a la geometría del modelo, se crearon tres mallas donde las dimensiones se mantienen constantes y se diferencian por el nivel de refinamiento.

Primer modelo de malla:

Figura 30. Malla tetraédrica de 2422 elementos.



Fuente: El autor.

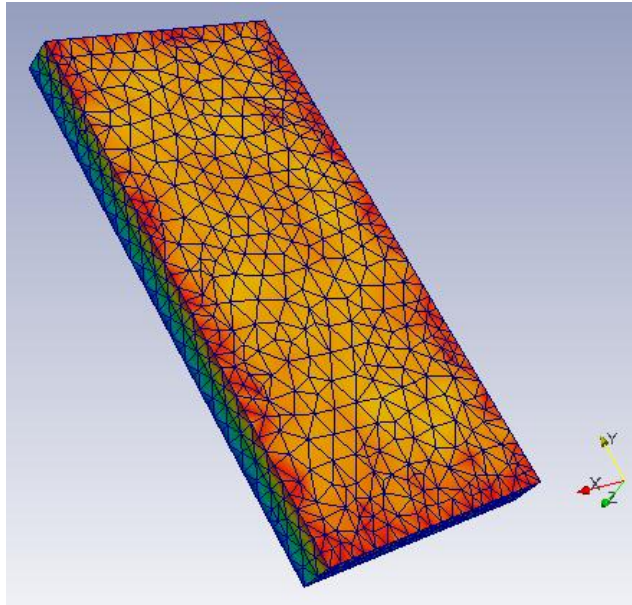
Tabla 7. Información de los elementos malla primer caso.

Propiedad	símbolo	valor	unidades
Cantidad de nodos	nodos	670	
Cantidad de triángulos	T	5349	
Cantidad de elementos	n	2422	
Volumen máximo por elemento	Vmax	823231	ft ³
Volumen mínimo por elemento	Vmin	47273.9	ft ³

Fuente: El autor.

Segundo modelo de malla:

Figura 31. Malla tetraédrica de 7948 elementos.



Fuente: El autor.

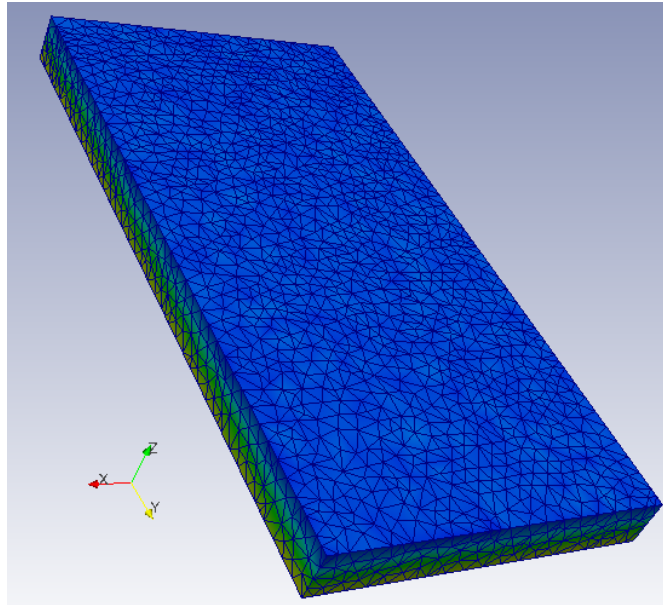
Tabla 8. Información de los elementos malla segundo caso.

Propiedad	símbolo	valor	unidades
Cantidad de nodos	nodos	1958	
Cantidad de triángulos	T	17155	
Cantidad de elementos	n	7948	
Volumen máximo por elemento	Vmax	523474	ft ³
Volumen mínimo por elemento	Vmin	7502.1	ft ³

Fuente: El autor.

Tercer modelo de malla:

Figura 32. Malla tetraédrica de 23796 elementos.



Fuente: El autor.

Tabla 9. Información de los elementos malla tercer caso.

Propiedad	símbolo	valor	unidades
Cantidad de nodos	nodos	5196	
Cantidad de triángulos	T	50442	
Cantidad de elementos	n	23796	
Volumen máximo por elemento	Vmax	89580.2	ft ³
Volumen mínimo por elemento	Vmin	6141.29	ft ³

Fuente: El autor.

5.1.5 Esquema de producción del yacimiento

En el planteamiento del esquema de producción se tienen tres casos, donde cada uno de ellos aumenta la cantidad de pozos.

Primer caso:

Tabla 10. Información del pozo primer caso.

Propiedad	símbolo	valor	unidades
Coordenadas X	X	745.3	ft
Coordenada Y	Y	1520.0	ft
Intervalos de producción	Z1,Z2	9000, 9220	ft
Producción de petróleo	Qo	720	STB/día
Radio del pozo	rw	0.16665	ft

Fuente: El autor.

Segundo caso:

Tabla 11. Información del pozo P1 del segundo caso.

Propiedad	símbolo	valor	unidades
Coordenadas X	X	745.3	ft
Coordenada Y	Y	560.0	ft
Intervalos de producción	Z1,Z2	9000, 9220	ft
Producción de petróleo	Qo	360	STB/día
Radio del pozo	rw	0.16665	ft

Fuente: El autor.

Tabla 12. Información del pozo P2 del segundo caso.

Propiedad	símbolo	valor	unidades
Coordenadas X	X	745.3	ft
Coordenada Y	Y	2490.0	ft
Intervalos de producción	Z1,Z2	9000, 9220	ft
Producción de petróleo	Qo	360	STB/día
Radio del pozo	rw	0.16665	ft

Fuente: El autor.

Tercer caso:

Tabla 13. Información del pozo P1 del tercer caso.

Propiedad	símbolo	valor	unidades
Coordenadas X	X	55	ft
Coordenada Y	Y	55	ft
Intervalos de producción	Z1,Z2	9000, 9220	ft
Producción de petróleo	Qo	240	STB/día
Radio del pozo	rw	0.16665	ft

Fuente: El autor.

Tabla 14. Información del pozo P2 del tercer caso.

Propiedad	símbolo	valor	unidades
Coordenadas X	X	745.3	ft
Coordenada Y	Y	1520.0	ft
Intervalos de producción	Z1,Z2	9000, 9220	ft
Producción de petróleo	Qo	240	STB/día
Radio del pozo	rw	0.16665	ft

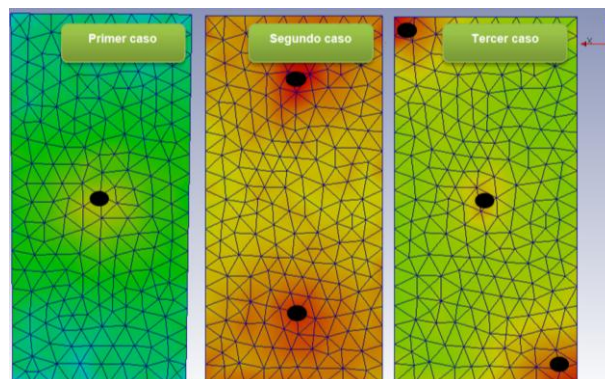
Fuente: El autor.

Tabla 15. Información del pozo P3 del tercer caso.

Propiedad	símbolo	valor	unidades
Coordenadas X	X	1465	ft
Coordenada Y	Y	2950	ft
Intervalos de producción	Z1,Z2	9000, 9220	ft
Producción de petróleo	Qo	240	STB/día
Radio del pozo	rw	0.16665	ft

Fuente: El autor.

Figura 33. Ubicación de los tres casos en el yacimiento.



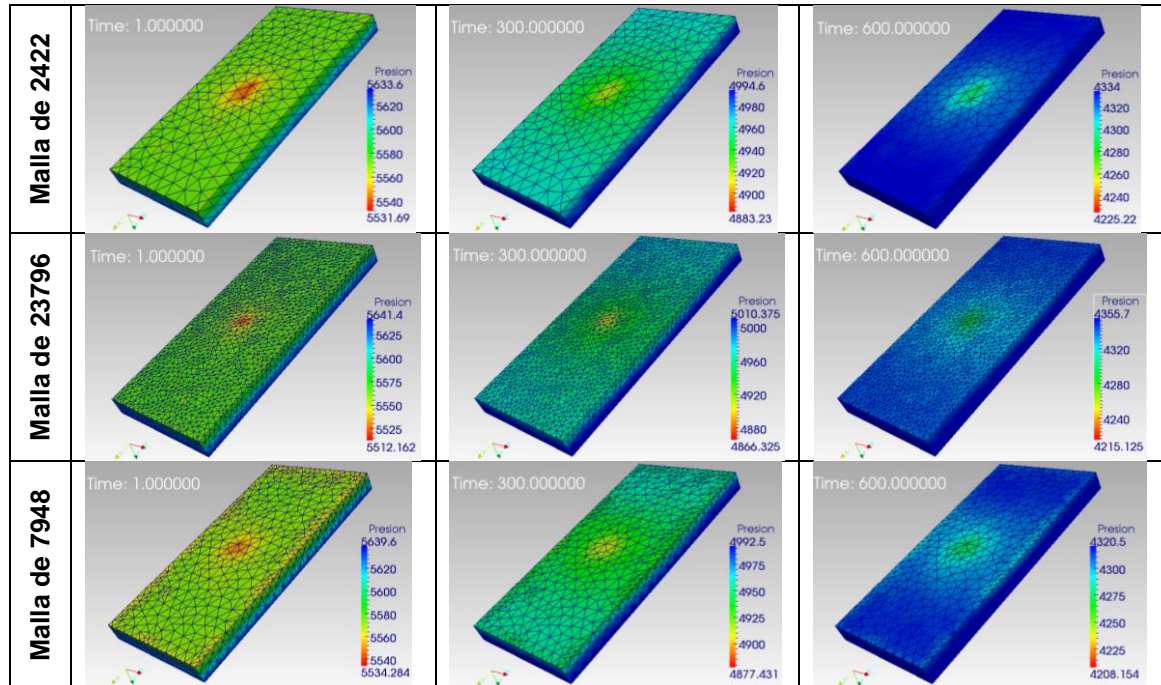
Fuente: El autor.

5.1.6 Resultados de la simulación numérica de los modelos

La presentación de los resultados de la simulación numérica del flujo de fluidos se realizará por cada esquema de producción en los diferentes modelos de mallas.

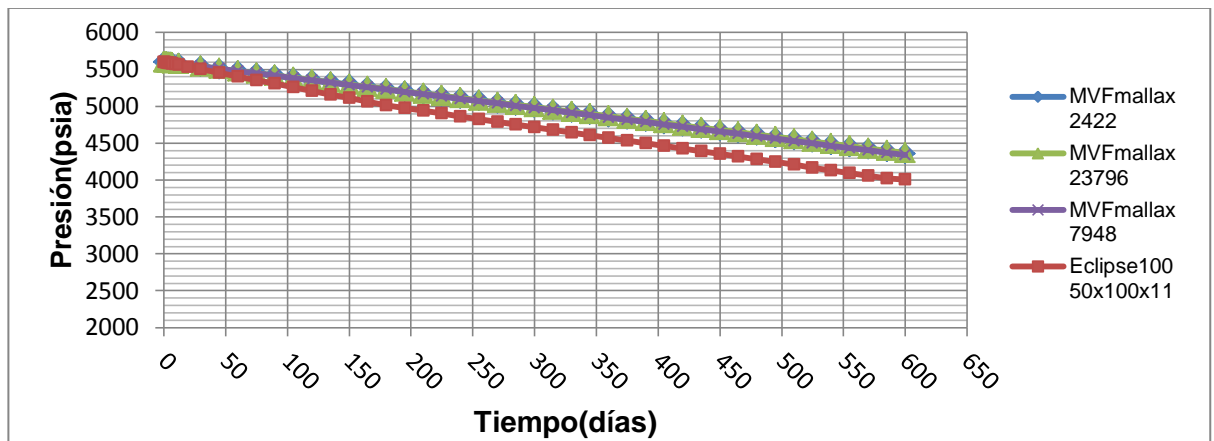
Resultados del primer caso:

Figura 34. Resultados del primer caso.



Fuente: El autor.

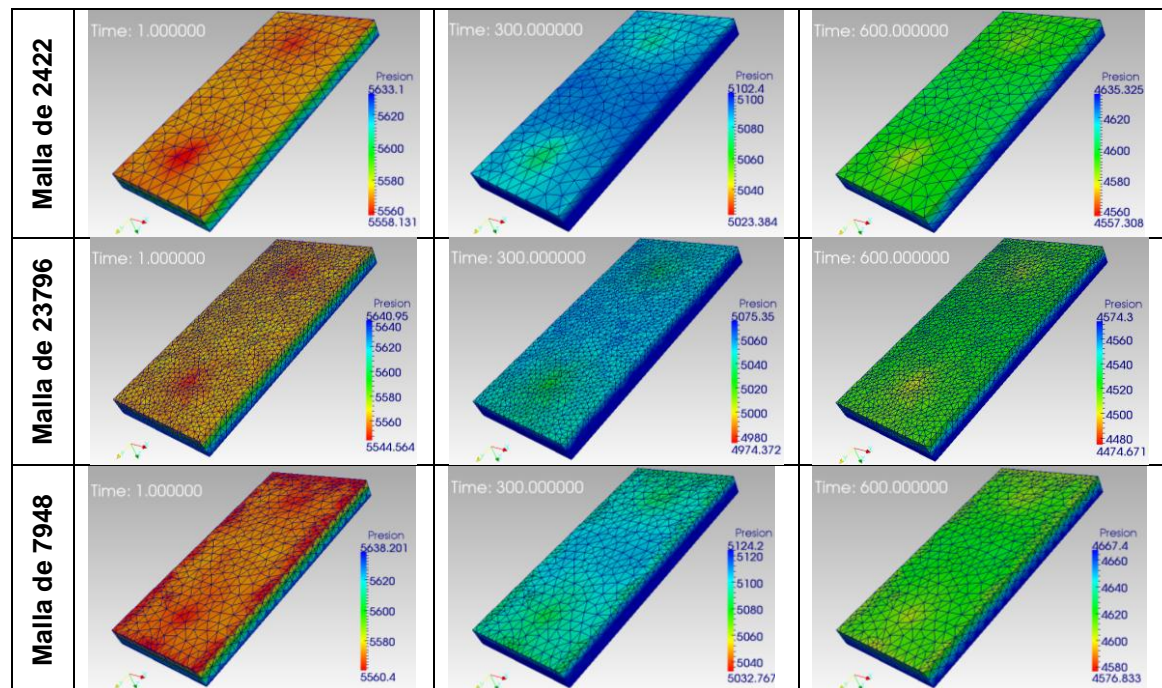
Figura 35. Comparación de resultados de la presión promedio del primer caso de producción.



Fuente: El autor.

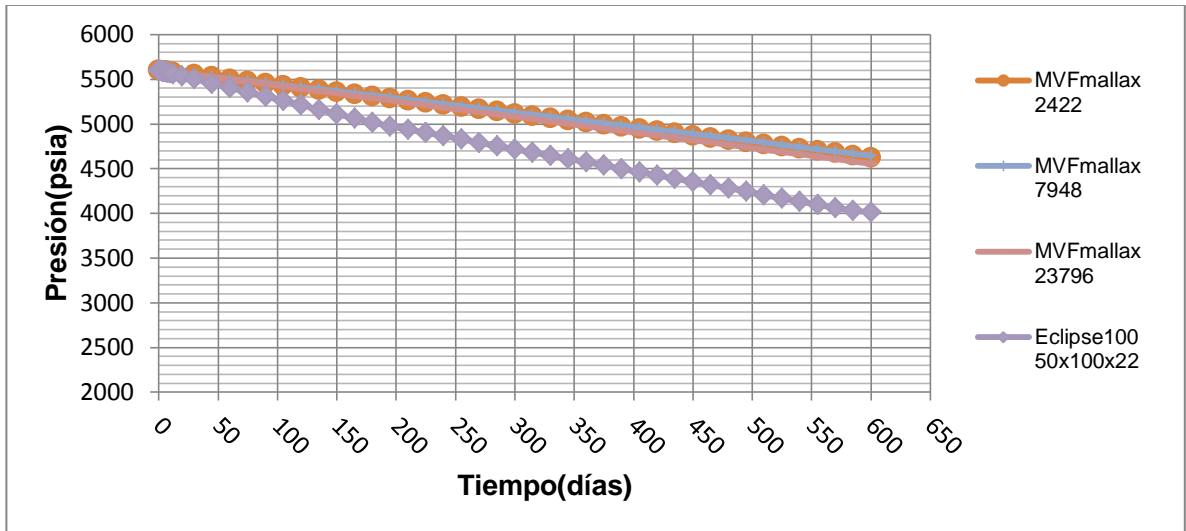
Resultados del segundo caso:

Figura 36. Resultados del segundo caso.



Fuente: El autor.

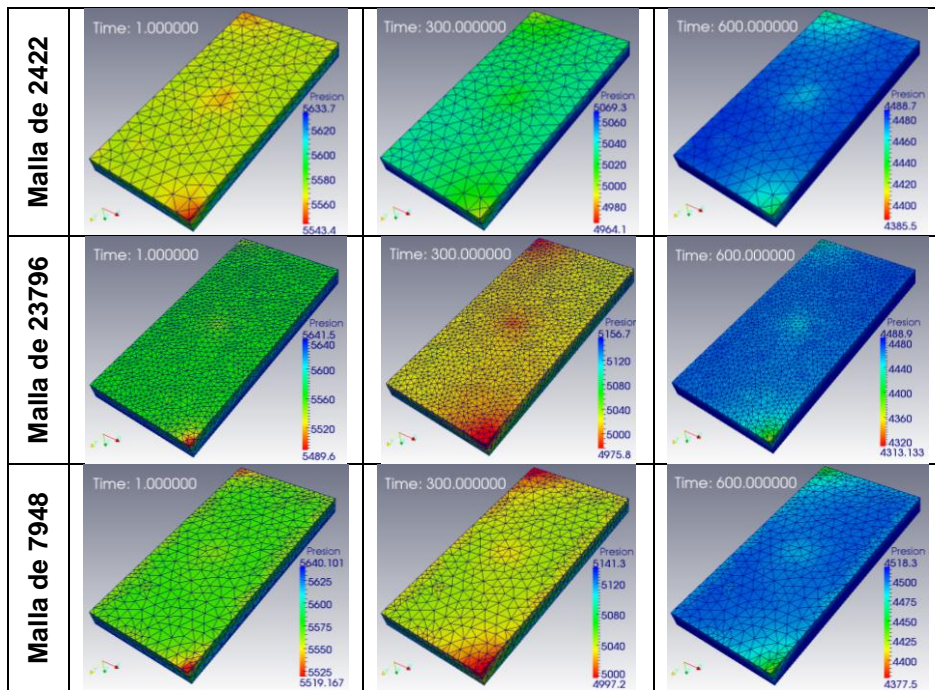
Figura 37. Comparación de resultados de la presión promedio del primer caso de producción.



Fuente: El autor.

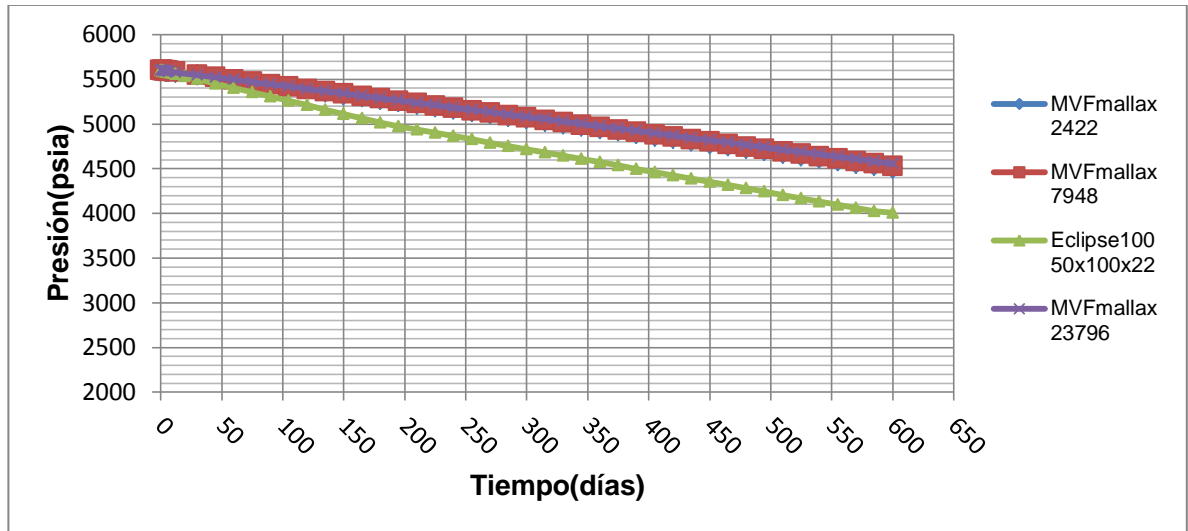
Resultados del tercer caso:

Figura 38. Resultados del tercer caso.



Fuente: El autor.

Figura 39. Comparación de resultados de la presión promedio del tercer caso de producción.



Fuente: El autor.

En cuanto los resultados se puede observar una variación en los perfiles de presión con respecto a los casos simulados en eclipse 100, se puede decir que unos de los factores influyentes es el modelamiento de los pozos. Dado que la teoría de modelamiento de pozos en simulación numérica no está desarrollada sobre mallas tetraédricas, prueba de ello lo demuestra la variación de los perfiles para los diferentes casos de producción, donde la producción del campo en todos los casos es la misma (720 STB/día). El factor que hace confiable los resultados de las simulaciones es el balance de materia que da un error del orden 10^{-7} .

5.2 PROCESO DE INYECCIÓN DE AGUA

La información de roca, fluido y condiciones iniciales utilizadas para este modelamiento será la misma que se utilizó en el modelamiento de las presiones. A continuación se expondrá la información restante.

5.2.1 Modelo geométrico del yacimiento

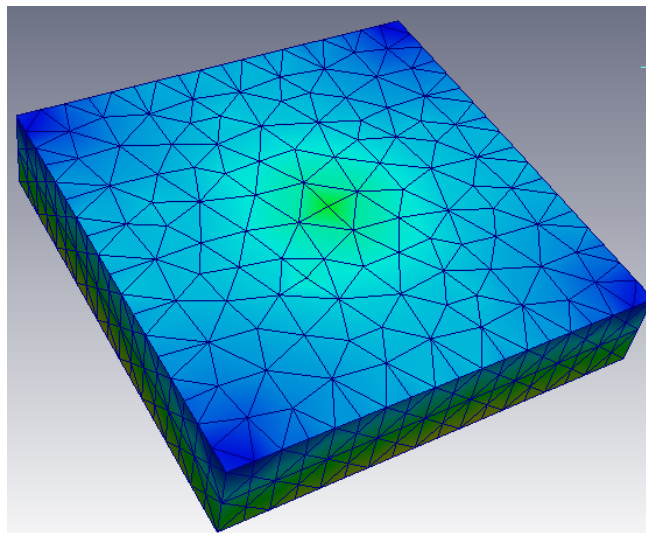
En el modelo geométrico se tomaron las siguientes dimensiones:

Tabla 16. Dimensiones del modelo.

Propiedad	símbolo	valor	unidades
Longitud en X	Lx	1000	ft
Longitud en Y	Ly	1000	ft
Longitud en Z	Lz	100	ft

Fuente: El autor.

Figura 40. Malla tetraédrica de 4433 elementos.



Fuente: El autor.

Tabla 17. Información de los elementos de la malla.

Propiedad	símbolo	valor	unidades
Cantidad de nodos	nodos	1065	
Cantidad de triángulos	T	9374	
Cantidad de elementos	n	4433	
Volumen máximo por elemento	Vmax	79595.8	ft ³
Volumen mínimo por elemento	Vmin	1361.59	ft ³

Fuente: El autor.

5.2.2 Esquema de producción del yacimiento

En el planteamiento del esquema de producción se tiene un pozo productor y un pozo inyector en las esquinas del modelo.

Tabla 18. Información del pozo productor.

Propiedad	símbolo	valor	unidades
Coordenadas X	X	512	ft
Coordenada Y	Y	512	ft
Intervalos de producción	Z1,Z2	9000 9100	ft
Producción de petróleo	Qo	236	STB/día
Radio del pozo	rw	0.16665	ft

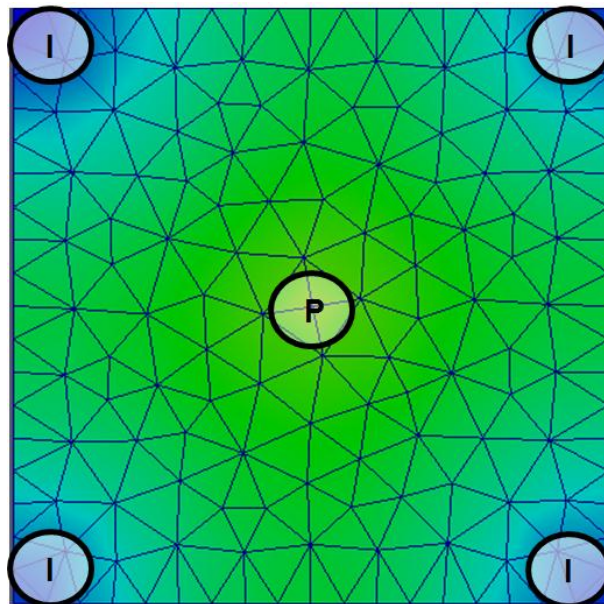
Fuente: El autor.

Tabla 19. Información de los pozos Inyectores.

Propiedad	símbolo	I1	I2	I3	I4	Unidades
Coordenadas X	X	945	55	945	55	ft
Coordenada Y	Y	945	55	55	945	ft
Intervalos de producción	Z1,Z2	9000 9100	9000 9100	9000 9100	9000 9100	ft
Producción de petróleo	Qo	67	67	67	67	STB/día
Radio del pozo	rw	0.16665	0.1665	0.1665	0.1665	ft

Fuente: El autor.

Figura 41. Ubicación de los pozos en el yacimiento.

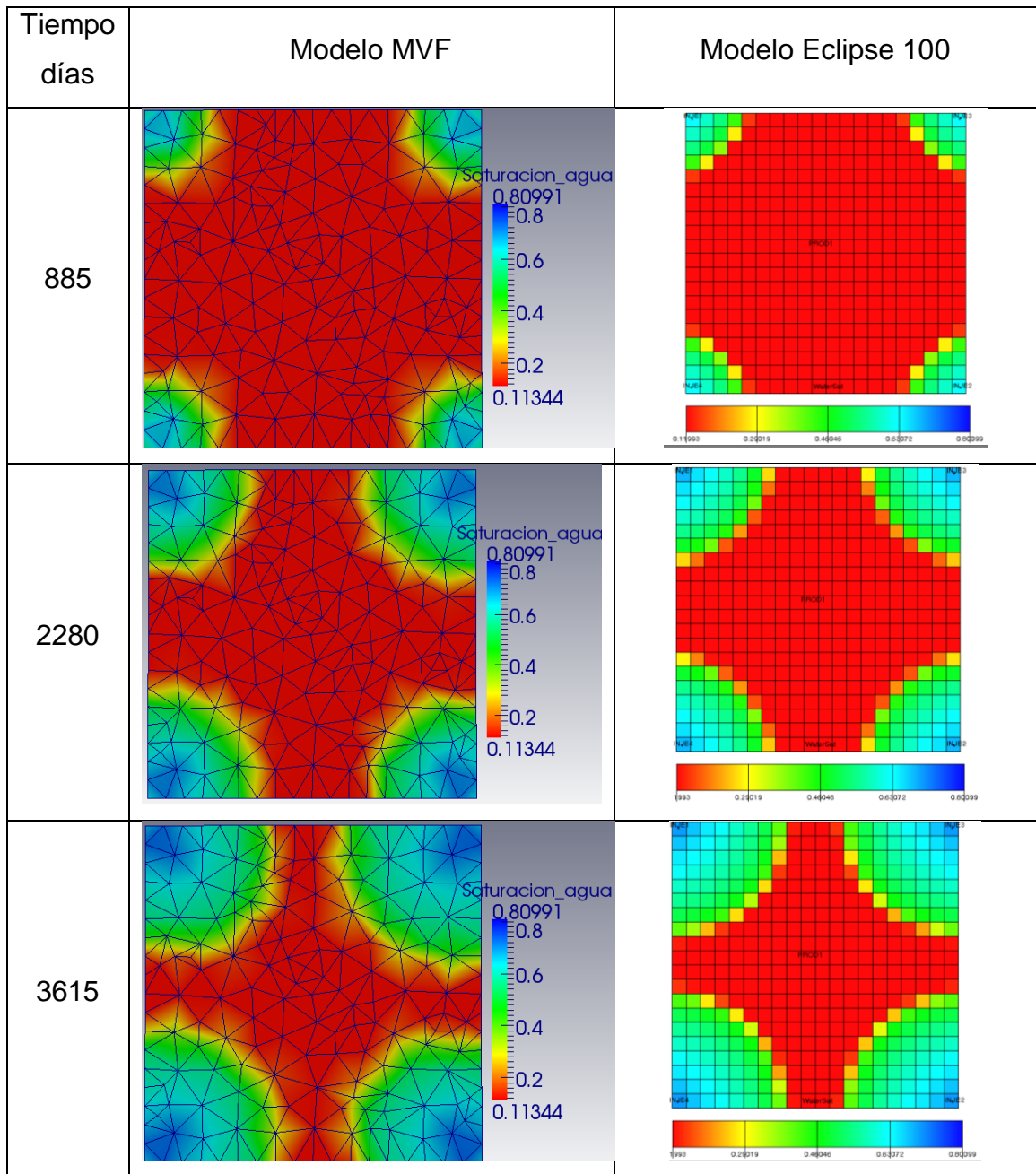


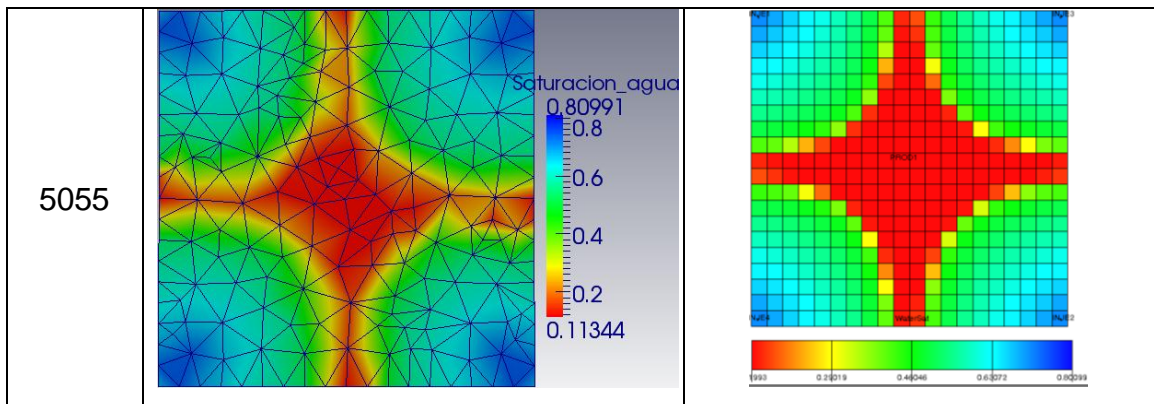
Fuente: El autor.

5.2.3 Resultados de la simulación numérica del modelo

La presentación de los resultados de la simulación numérica del flujo de fluidos con variación en la saturación se presenta junto con el modelo evaluado en Eclipse 100.

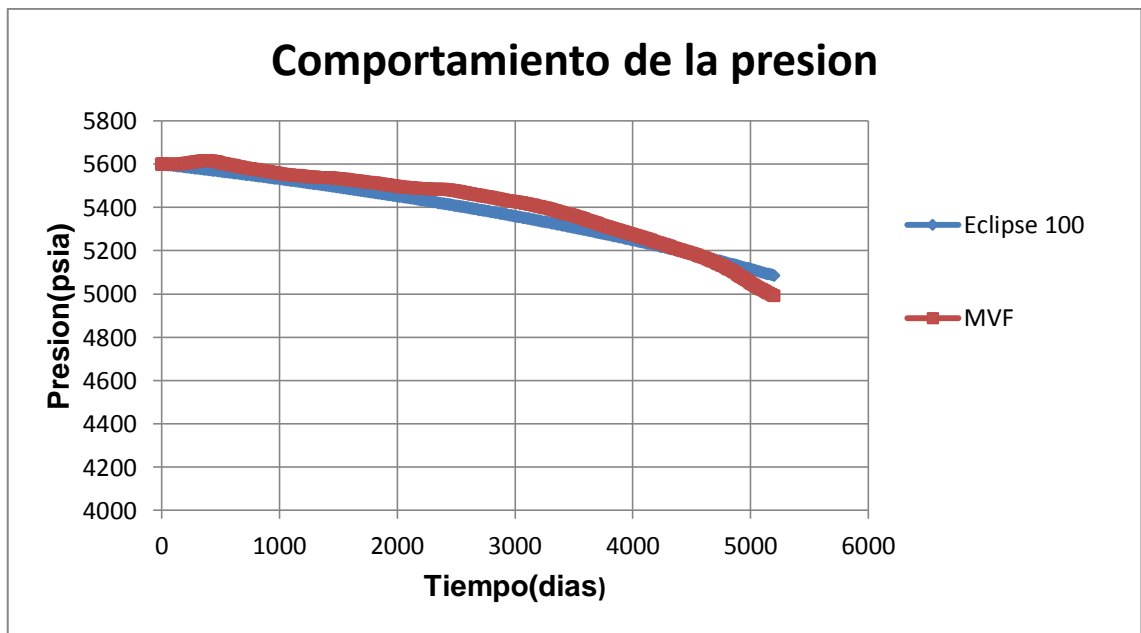
Figura 42. Resultados del proceso de inyección de agua.





Fuente: El autor.

Figura 43. Comparación de resultados de la presión promedio del modelo desarrollado y eclipse.

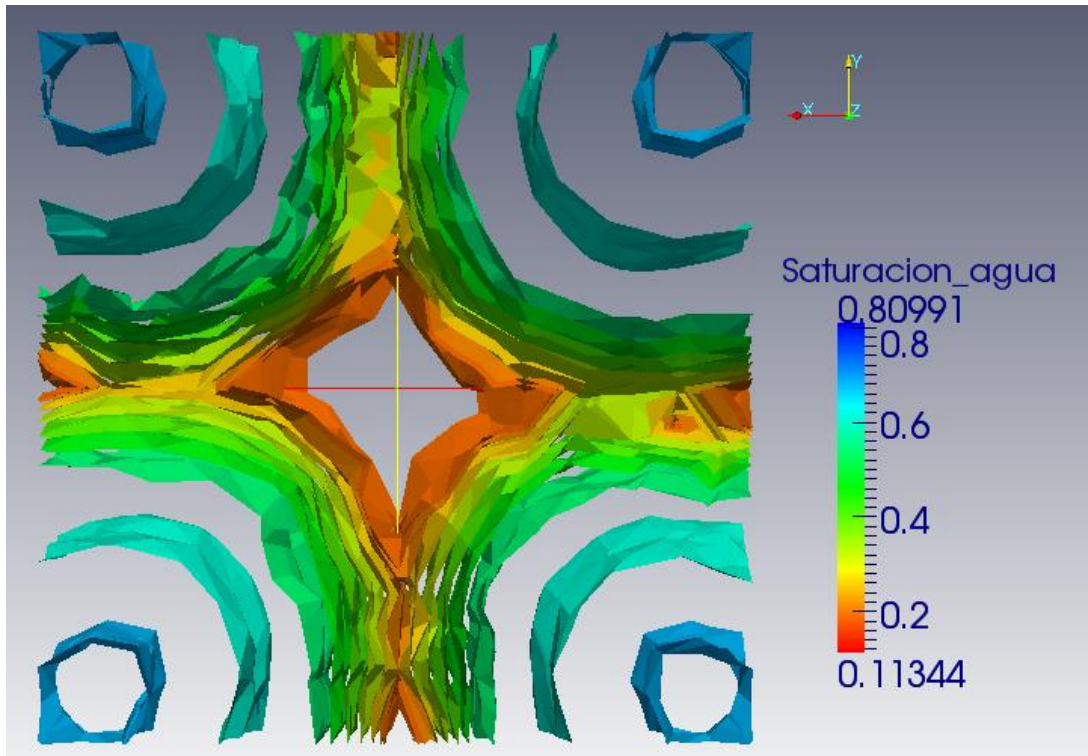


Fuente: El autor.

Los resultados de este modelo fueron de muy buena calidad, las imágenes de los frentes de avance y las curvas de presión promedio lo confirman. La complicación que se presentó fue un elevado tiempo de cómputo solucionando el sistema con el gradiente biconjugado (1500 a 2000 iteraciones por ciclo). Por otra parte el método de gradiente biconjugado preconditionado que duraba alrededor de 200 a 300 iteraciones para el caso de producción primaria no obtuvo respuesta alguna para

este caso. A continuación se presenta una figura que muestra las líneas de contorno del frente de avance en un tiempo

Figura 44. Líneas de contorno del modelo a los 5460 días.



Fuente: El autor.

Con los datos presentados se puede comprobar que la discretización en volúmenes finitos es conservativa para los modelos de flujo de fluidos bifásicos en medios porosos. Por otra parte es necesario el desarrollo de modelos de pozo para mallas no estructuradas, debido que en cercanías de estos es donde se producen los mayores cambios en la variables y los problemas de convergencia.

CONCLUSIONES

- ✓ Los resultados demuestran que la discretización de las ecuaciones de flujo de fluidos bifásicos en medios porosos con el método de volúmenes finitos adaptan bien a las mallas no estructuradas y modelan la dinámica de los fluidos.
- ✓ Cuando la dinámica de los fluidos está dominada por cambios de presión con respecto a la saturación (producción primaria), el método de solución de gradiente biconjugado preconditionado es una buena opción. El caso contrario sucede cuando los cambios fuertes son en la saturación (inyección de agua), este método se vuelve ineficiente y es necesario utilizarlo sin preconditionamiento.
- ✓ La teoría de modelamiento de pozos está planteada para celdas hexaédricas, la adaptación de esta teoría sobre elementos tetraédricos no ofrece muy buenos resultados. Por lo que se requiere replantear un modelo para este tipo de elemento o la implementación de mallas híbridas.
- ✓ La localización de los intervalos de cañoneo sobre una malla tetraédrica es compleja debido a la asimetría en la ubicación de los elementos.
- ✓ Aunque los tetraedros se adaptan a todas las formas irregulares, el refinamiento en profundidad de un modelo de yacimiento hace que se creen mallas muy densas, por tal razón se debe experimentar con otros tipos de mallas.
- ✓ Se puede decir que los resultados obtenidos en las simulaciones son confiables, debido que se tiene un error en el balance de materia del orden de 10^{-7} y los valores de las saturaciones dentro de las condiciones del modelo son conservativos.

RECOMENDACIONES

- ✓ Se propone la formulación e implementación de la fase gas para poder simular yacimientos que estén por debajo del punto de burbuja y la inyección de gas.
- ✓ Se plantea la necesidad analizar e implementar técnicas de interpolación más específicas para el tratamiento de los datos de permeabilidad relativa.
- ✓ Analizar e implementar las fuerzas capilares en el modelo, teniendo en cuenta la sensibilidad de la derivada de la presión capilar
- ✓ Se propone la realización de un módulo para inclusión de acuíferos tanto numéricos como analíticos.
- ✓ Se requiere estudio a profundidad relativo a los solver iterativos de sistemas lineales no simétricos que mejore los tiempos de cómputo.
- ✓ Se plantea la necesidad de un módulo de interpolación espacial para poder adaptar las propiedades petrofísicas con el refinamiento de la malla.
- ✓ Se requiere hacer análisis detallado sobre la adaptación de los modelos de pozos en mallas no estructuras

BIBLIOGRAFÍA

- ARONOFFSKY, J.S., Why Simulation Studies Can Be Good Or Bad. Oil and Gas J. – Nov. 1984.
- ARONOFFSKY, J.S., Common Pitfalls In Reservoir Simulation. Oil and Gas J. – Dic. 1984.
- ARAUJO, Carlos D, RINCÓN José A., MATERANO Gilberto I. y COLMAN Alejandro A., Computational Simulation Of Fluid Flow By Using Element Based Finite Volume Method On Unstructured Grids, Revista Técnica de Ingeniería. Universidad del Zulia. Vol. 31, Nº 1, 13 - 20, 2008.
- AZIZ Khalid and SETTARI Antonin, Petroleum reservoir simulation, Applied Science Publishers, 1979.
- BABUSKA, I. and AZIZ K. On the angle condition in the finite element method. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol 13, p. 214-226, 1976.
- BANZER, Carlos. CORRELACIONES NUMERICAS P.V.T, Universidad del Zulia, Maracaibo, 1996.
- BASTIAN, Peter, Numerical Computation of Multiphase Flows in Porous Media, Universit"at Kiel, Heidelberg, 1999.
- CARRICA, P. M., LARRETEGUY A. y CONVERTI, J., desarrollos en el metodo de volúmenes finitos aplicado a la resolución de las ecuaciones de navier stokes, ENIEF'90, Mar del Plata, Argentina, Noviembre 1990.

- CARRICA, P. M., LARRETEGUY A. y CONVERTI, Cálculo De Flujos Turbulentos Con El Método De Elementos Finitos Por Volúmenes De Control', ENIEF'90, Mar del Plata (1990).
- CARRILLO LEDESMA Antonio, Resolución de Grandes Sistemas de Ecuaciones Lineales, INSTITUTO DE GEOFÍSICA UNAM, 2006.
- CHEN Zhangxin, HUAN Guanren, and MA Yuanle, Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media, SIAM, Philadelphia, 2006.
- CHO W and PATRIKALAKIS N. M., COMPUTATIONAL GEOMETRY, Massachusetts Institute of Technology, 2003.
- CONVERTI J. y LARRETEGUY A., Introducción al Método de Volúmenes Finitos, Conferencia por Invitación en ENIEF'90, Mar del Plata, Noviembre 1990.
- DOBES, Jibis, DECONINCK, Herman y FORT, Jaroslav, Comparison Of Cell Centered And Vertex Centered Formulation Of Finite Volume Method, Engineering Mechanics. ISSN 1210-2717. April 2006.
- ECKEL Bruce, Thinking in C++, Volume 1 & Volume 2, Free Electronic Book. 2nd Edition, 2003.
- ERTEKIN Turgay, Basic Applied Reservoir Simulaton, SPE Textbook Series, Texas, 2001.
- ESCOBAR MACUALO, Freddy, Fundamentos de Ingeniería de yacimientos, Editorial Universidad Surcolombiana, Neiva, 2000.

- ESSENFELD, M. y BARBERII, E.: “Yacimientos de Hidrocarburos”, Fondo Editorial del Centro Internacional de Educación y Desarrollo (FONCIED), Caracas, Sep.2001.
- FANCHI John R., Principles of Applied Reservoir Simulation, Third Edition, Elsevier, 2005.
- FLORES SANCHEZ Omar, Estudio de Librerías Paralelas de Libre Distribución y Algoritmos Paralelos Iterativos Multipaso para la Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales Dispersos, Departamento de Sistemas Informáticos y Computación, UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA, 2009.
- GEUZAINÉ Christophe and REMACLE Jean Francòis, Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, Version 2.6.1, 2012.
- HASLE, Geir. LIE Knut-Andreas and Quak Ewald, Geometric Modelling, Numerical Simulation, and Optimization, springer editorial, Heidelberg, 2007.
- JARAMILLO juan, VIDAL MACIÁ ANTONIO y CORREA ZABALA Francisco, DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES SIMÉTRICOS, INDEFINIDOS, DISPERSOS Y DE GRAN DIMENSIÓN, Universidad EAFIT, Medellín, 2006.
- KEILEGAVLEN Eirik, Robust Control Volume Methods for Reservoir Simulation on Challenging Grids, department of Mathematics University of Bergen, 2009.
- KILLOUGH, J.E, Ninth SPE Comparative Solution Project: A Reexamination of Black-Oil Simulation, SPE 29110, University of Houston, 1995.
- LARRETEGUY A. y CARRICA, P. M. A Multilayer 2d Fem Approach For Solving 3d Thermal Problems In Electronic Boards For Spatial Applications, presentado en ENIEF'2000, Bariloche (2000)

- LEE, S.H., JENNY, P. y TCHELEPI, H.A, A Finite-Volume Method With Hexahedral Multiblock Grids For Modeling Flow In Porous Media, Computational Geosciences 6: 353–379, 2002.
- LUNATI, Ivan y JENNY, Patrick, A Multiscale Finite-Volume Method For Three-Phase Flow Influenced By Gravity, institute of fluid dynamics, 2006.
- MATTAX, C. C. & DALTON, R. L., Reservoir Simulation, SPE Monograph 13, Texas-USA, 1990.
- MORELLI, María de los Á., FUSARI, Marina L. y SAVIOLI Gabriela B. SIMULADOR BIFÁSICO BIDIMENSIONAL DEL DESPLAZAMIENTO DE PETRÓLEO POR AGUA, Mecánica Computacional Vol XXV, p. 2633-2647, 2006.
- MUSTAFIZ S. and ISLAM M. R. State-of-the-art Petroleum Reservoir Simulation, Department of Civil Engineering, Petroleum Science and Technology, 26: 2008, P1303–1329
- OLVERA GOMEZ, Alfredo, Estudio Sistemático de las Discontinuidades que ocurren en la Modelación de Yacimientos Petroleros, Universidad Nacional Autónoma de México, 2008.
- OSORIO, Gildardo. Curso de simulación numérica de yacimientos. Medellín: Universidad de Antioquia; 2002.
- PADRA, C. y VÉNERE, M. J. On adaptivity for diffusion problems using triangular elements. Engineering Computations, Vol 12, p. 75-84, 1995.
- PATANKAR, Suhas. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Universidad de Minnesota, Hemisphere Publishing Corporation, 1980, 192p.

- PEACEMAN, Donald. Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation. Elsevier Scientific Publishing Company, 1977. p. 173.
- PRÉVOST Mathieu , LEPAGE François, DURLOFSKY Louis and MALLET Jean-Laurent, Unstructured 3D gridding and upscaling for coarse modelling of geometrically complex reservoirs, *Petroleum Geoscience*, Vol. 11 2005, p. 339–345,2005.
- RODRIGUEZ DE LA GARZA Fernando, Fundamentos de simulación numérica de yacimientos, Universidad Nacional Autónoma de México, 2000.
- SALERI, N.G y TORONYI, R.M., ENGINEERING CONTROL IN RESERVOIR SIMULATION: Part I, Part II and Part III. SPE 18305 – 1988.
- SANTAFÉ, E.R. y SIERRA, L.E. Estudio Comparativo De Las Técnicas De Enmallado Empleadas En Simulación Numérica De Yacimientos. Universidad Industrial de Santander, Escuela de Ingeniería de Petróleos, Dic. 2004. 230p.
- SCHLUMBERGER-GEOQUEST, Simulation Software Manuals 2008, reference manual 100 y 300.
- SHI Guangren, MA Jinshan, YANG Xinshe, CHANG Junhua, WAN Jun. Finite Volume Method for Solving a Modified 3-D 3-Phase Black-Oil Hydrocarbon Secondary Migration Model, and Its Application to the Kuqa Depression of the Tarim Basin in Western China. Research Institute of Petroleum Exploration and Development, Vol. 2, No. 1, p. 1-12, 2011.
- SI Hang, TetGen: A Quality Tetrahedral Mesh Generator and Three-Dimensional Delaunay Triangulator, Numerical Mathematics and Scientific

Computing Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics , Berlin, 2006.

➤ VELAZQUEZ GUERRERO Luis Carlos, Un sistema experimental para generar mallas no-estructuradas en regiones planas irregulares, Universidad Nacional Autónoma de México, 2009.

➤ VERSTEEG, H. y MALALASEKERA, W. An introduction to computational fluid dynamics. The Finite volume method, England. AddisonWesley Longman, 1995, 275p

➤ WOLFSTEINER, Christian, GADELLE Christian, LEE Seong H. y HAMDI A. Tchelepi,, Application Of An Efficient Multiscale Finite Volume Simulator To Practical Reservoir Models, IPTC 10714, 2005.

ANEXOS

ANEXO A. FORMATO DEL ARCHIVO DE LA MALLA

El formato de malla utilizado es el Medit INRIA Mesh, a continuación se presenta un ejemplo de un archivo de malla utilizado.

Parte I. Información de los vértices.

```
MeshVersionFormatted      1

Dimension
3

#
#          Set      X      Y      Z
#          of      mesh    vertices
Vertices
670
          0          0      9000      0
          0      3000      9000      0
        1500      3000      9000      0
        1500          0      9000      0
          0          0      9100      0
          0      3000      9100      0
        1500      3000      9100      0
        1500          0      9100      0
          0          0      9220      0
          0      3000      9220      0
        1500      3000      9220      0
        1500          0      9220      0
    1333.33333          0      9000      0
    1166.66667          0      9000      0
          1000          0      9000      0
    833.333333          0      9000      0
    666.666667          0      9000      0
          500          0      9000      0
          .          .          .          .
          .          .          .          .
          .          .          .          .
          .          .          .          .
          .          .          .          .
```

Parte II. Información de los triángulos.

# # Triangles	Vertice 1 Set	Vertice 2 of	Vertice 3 Triangles	
5349				
	448	463	389	0
	448	507	463	0
	463	507	389	0
	389	507	448	0
	207	62	61	0
	207	86	62	0
	62	86	61	0
	61	86	207	0
	485	193	237	0
	485	476	193	0
	193	476	237	0
	237	476	485	0
	362	247	479	0
	362	405	247	0
	247	405	479	0
	479	405	362	0
	599	533	377	0
	599	601	533	0
	533	601	377	0
	377	601	599	0
	84	64	334	0
	84	63	64	0
	64	63	334	0
	334	63	84	0
	465	251	390	0
	465	230	251	0
	251	230	390	0
	390	230	465	0
	389	412	640	0

Parte III. Información de los tetraedros.

# # Tetrahedra	Vertice 1 Set	Vertice 2 of	Vertice 3 Tetrahedra	Vertice 4	
2422					
	448	463	389	507	0
	207	62	61	86	0
	485	193	237	476	0
	362	247	479	405	0
	599	533	377	601	0
	84	64	334	63	0
	465	251	390	230	0
	389	412	640	463	0
	322	280	180	354	0
	418	510	424	556	0
	186	370	197	302	0
	333	330	170	346	0
	164	379	535	112	0
	425	444	382	210	0
	377	427	387	265	0
	486	630	407	625	0
	334	63	217	386	0
	461	390	645	633	0
	296	447	298	286	0
	584	555	530	373	0
	590	425	416	430	0
	410	568	505	571	0
	421	416	374	252	0
	372	420	262	435	0

ANEXO B. FORMATO DE LOS DATOS DE ENTRADA

A continuación se expone el formato de los datos que ingresan a la aplicación.

#modelo	de	datos	de	entrada
#malla	de	entrada		
D1				
datos.2.mesh				
#porosidad				
D2				
poro.dat				
#permeabilidad(mD)				
D3				
perme.dat				
#presion	inicial			
D4				
presionini.dat				
#saturacion	inicial	oil		
D5				
soilini.dat				
#kr	(sw-krw-Kro-PCOW)			
D6				
	30			
	0.15109	0	1	0
	0.15123	0	0.99997	0
	0.15174	0	0.99993	0
	0.15246	0	0.99991	0
	0.15647	0	0.99951	0
	0.16585	0	0.99629	0
	0.17835	0	0.99159	0
	0.20335	0.00001	0.97883	0
	0.25335	0.00003	0.94373	0
	0.35	0.00028	0.83023	0
	0.352	0.002292	0.804277	0
	0.354	0.004304	0.778326	0
	0.356	0.006316	0.752374	0
	0.358	0.008328	0.726422	0
	0.36	0.01034	0.70047	0
	0.364395	0.015548	0.642258	0
	0.36879	0.020756	0.584046	0
	0.37	0.02219	0.56802	0
	0.38	0.03589	0.43498	0

0.4	0.06953	0.17143	0
0.43345	0.0879	0.12531	0
0.46139	0.10491	0.09498	0
0.48932	0.12329	0.07053	0
0.51725	0.14303	0.05113	0
0.57312	0.18659	0.02464	0
0.60106	0.21038	0.01619	0
0.65693	0.2619	0.00594	0
0.7128	0.31865	0.00159	0
0.81111	0.43092	0.00002	0
0.88149	0.49	0	0

#compresibilidad roca

D7

1.00E-06

#PVT PROPERTIES OF WATER(FVF-visco)

D8

3600	1.0034	1.00E-06	0.96
------	--------	----------	------

#DENSITY OIL WATER GAS

D9

44.98	63.01	0.0702
-------	-------	--------

#PVTO POIL RS FVFO VISO

D10

4000	1.5	1.12	0.94
------	-----	------	------

#temperatura del yacimiento

D11

225

#pozos

#nombre

#tipo ubicación(coor) fecha fluido estado control caudal presión skin diámetro

D12

1

P1

1	745.3	1510	9000	9220	0	1	1	1	720	0	0	0.33
---	-------	------	------	------	---	---	---	---	-----	---	---	------

#time step num de deltat y valor delta t

D13

4

7

1

1

5

1

18

48

15

#metodo de solución

1 gradiente biconjugado
2 gradiente biconjugado estabilizado
3 gradiente biconjugado estabilizado preconditionado

D14

3

ANEXO C. FORMATO DE LOS DATOS PARA PARAVIEW

Los datos de paraview están conformados por los siguientes archivos:

Modelo.case

#modelo01a.dat

FORMAT

type: ensight

GEOMETRY

model: modelo01a.geo

VARIABLE

scalar	per	element:	Porosidad	modelo01aporo.mat
vector	per	element:	Permeabilidad	modelo01aperme.mat
scalar	per	element:	Volumen_poroso	modelo01avolporo.mat
scalar	per	element:	Presion	modelo01a.pre***
scalar	per	element:	Saturacion_pet	modelo01a.so***
scalar	per	element:	Saturacion_agua	modelo01a.sw***

TIME

time	set:		1
number	of	steps:	58
filename	start	number:	0
filename	increment:		1
time	values:		

	0	1	2	3	4	5
	6	7	12	30	45	60
	75	90	105	120	135	150
	165	180	195	210	225	240
	255	270	285	300	315	330
	345	360	375	390	405	420
	435	450	465	480	495	510
	525	540	555	570	585	600
	615	630	645	660	675	690
	705	720	735	750		