

**MODELADO Y SIMULACIÓN DEL FLUJO EN EL SISTEMA DE ESCAPE EN  
MOTORES DE COMBUSTIÓN INTERNA DIESEL 4 TIEMPOS**

**JUAN PABLO CONSUEGRA TORRES**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA  
BUCARAMANGA**

**2014**

**MODELADO Y SIMULACIÓN DEL FLUJO EN EL SISTEMA DE ESCAPE EN  
MOTORES DE COMBUSTIÓN INTERNA DIESEL 4 TIEMPOS**

**JUAN PABLO CONSUEGRA TORRES**

**Trabajo de grado para optar al título de Magister en Ingeniería Mecánica**

**Director:**

**JORGE LUIS CHACÓN VELASCO PhD**

**Codirector:**

**DAVID ALFREDO FUENTES DÍAZ PhD**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA  
BUCARAMANGA**

**2014**

## DEDICATORIA

A Dios por tantas cosas que me ha dado en la vida y es el que ha hecho posible que todo esto se diera.

A mi madre, por su amor, cariño y calor humano.

A mi padre, por sus consejos que me ayudaron a ser quien soy.

A mi hermana, por sus cuidados e indiscutible ejemplo.

A mi hermano, constante amigo y gran apoyo en mi vida.

A mi familia, participes en mi formación personal.

A mi novia, quien me ha brindado todo su amor, cariño y apoyo.

A mis amigos de infancia, por su gran amistad.

A mis compañeros de carrera, por ayudar en la realización de este grado.

Y a todas las personas que ayudaron para que de una u otra forma este proyecto se lograra.

## **AGRADECIMIENTOS**

Como autor del proyecto expreso mi sincero agradecimiento al personal docente y a todas las personas que contribuyen con la evolución de la Universidad Industrial de Santander.

A los profesores Jorge Luis Chacón Velasco y David Alfredo Fuentes Díaz director y codirector del proyecto por su impecable orientación.

A mi familia, por el constante apoyo.

A mis compañeros y amigos.

Gracias...

## CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>17</b>
<b>PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....</b>	<b>19</b>
<b>MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN.....</b>	<b>21</b>
<b>ESTADO DEL ARTE.....</b>	<b>22</b>
<b>1. CONCEPTOS GENERALES.....</b>	<b>24</b>
1.1 Operación de un motor encendido por chispa.....	24
1.2 Operación de un motor encendido por compresión.....	28
1.3 La Mecánica de fluidos e hipótesis del medio continuo.....	31
<b>2. CARACTERÍSTICAS DE LOS MODELOS DE FLUJO PARA MOTORES DE COMBUSTIÓN INTERNA ALTERNATIVOS.....</b>	<b>32</b>
2.1 Modelos para el análisis del flujo en los múltiples de admisión y escape.....	32
2.1.1 Modelos de flujo cuasi-estacionario.....	33
2.1.2 Métodos de llenado y vaciado.....	33
2.1.3 Modelos de acción de ondas o dinámica de gases.....	34
2.1.4 Métodos del tipo CFD (Computational Fluid Dynamics).....	34
2.1.5 Descripción del modelo a utilizar.....	35
<b>3. MODELADO Y SIMULACIÓN DE FLUJO EN EL SISTEMA DE ESCAPE EN MCI 4 TIEMPOS DIESEL.....</b>	<b>36</b>
3.1 Ecuaciones de la mecánica de fluidos.....	36
3.2 Ecuaciones de conservación.....	37
3.2.1 Ecuación de continuidad.....	38
3.2.2 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.....	40
3.2.3 Ecuación de la energía.....	47
3.2.4 Ecuaciones de cierre.....	59
3.2.5 Ecuación diferencial general.....	60
3.3 Discretización de las ecuaciones.....	61
3.3.1 El método de volúmenes finitos.....	62
3.4 La malla alternada.....	77
3.5 Algoritmo SIMPLE.....	79
3.5.1 Secuencia de operaciones.....	95

<b>3.6 Solución del sistema de ecuaciones.</b> .....	<b>97</b>
3.6.1 Algoritmo de Thomas para matriz tri-diagonal. ....	98
<b>4. RESULTADOS Y VALIDACIÓN DE LA HERRAMIENTA COMPUTACIONAL.....</b>	<b>101</b>
<b>5. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES .....</b>	<b>122</b>
<b>6. RECOMENDACIONES Y OBSERVACIONES .....</b>	<b>125</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA. ....</b>	<b>126</b>

## LISTA DE TABLAS

TABLA 1. REPRESENTACIÓN GENERALIZADA DE LAS ECUACIONES DE CONSERVACIÓN.	61
TABLA 2. VALORES DE LA INTEGRAL DE $I\theta$ DE ACUERDO AL VALOR DE $\theta$ .....	72
TABLA 3. CARACTERÍSTICAS DEL DUCTO Y FLUJO. ....	101
TABLA 4. PORCENTAJE DE ERROR PARA LOS DIFERENTES MÉTODOS. ....	102
TABLA 5. CARACTERÍSTICAS DEL MOTOR. ....	106
TABLA 6. CARACTERÍSTICAS DEL DUCTO. ....	107
TABLA 7. CARACTERÍSTICAS DEL DUCTO Y FLUJO. ....	118

## LISTA DE LAS FIGURAS

FIGURA 1. SECUENCIA DE EVENTOS EN EL CICLO DE OPERACIÓN DE UN MOTOR DE COMBUSTIÓN INTERNA 4 TIEMPOS ENCENDIDO POR CHISPA. ....	25
FIGURA 2. SECUENCIA DE EVENTOS DURANTE LOS PROCESOS DE COMPRESIÓN, COMBUSTIÓN Y EXPANSIÓN EN EL CICLO DE OPERACIÓN DE UN MOTOR DE ENCENDIDO POR COMPRESIÓN ASPIRADO NATURALMENTE. ....	29
FIGURA 3. SECUENCIA DE EVENTOS DURANTE LOS PROCESOS DE EXPANSIÓN, INTERCAMBIO DE GASES Y COMPRESIÓN EN EL CICLO DE UN MOTOR 2 TIEMPOS ENCENDIDO POR COMPRESIÓN. ....	30
FIGURA 4. VOLUMEN DE CONTROL PARA APLICAR LAS LEYES DE CONSERVACIÓN. ....	37
FIGURA 5. FLUJO DE MASA ENTRANDO Y SALIENDO DEL VC. ....	39
FIGURA 6. VOLUMEN DE CONTROL INFINITESIMAL EN MOVIMIENTO. ....	41
FIGURA 7. ESFUERZO NORMAL. ....	42
FIGURA 8. FLUJOS DE ENERGÍA ASOCIADOS A UN VC INFINITESIMAL QUE SE MUEVE CON EL FLUJO. ....	49
FIGURA 9. TRANSFERENCIA DE CALOR DESDE EL FLUIDO HACIA EL ENTORNO. ....	50
FIGURA 10. VARIACIÓN DE LA CONDUCTIVIDAD TÉRMICA DEL AIRE COMO GAS IDEAL EN FUNCIÓN DE LA TEMPERATURA. ....	55
FIGURA 11. DOMINIO UNIDIMENSIONAL. ....	62
FIGURA 12. CONVECCIÓN EN UNA MALLA UNIDIMENSIONAL. ....	64
FIGURA 13. DEFINICIÓN DE DERIVADA Y SUS APROXIMACIONES. ....	68
FIGURA 14. ESQUEMA PARA LA INTERPOLACIÓN UPWIND CUANDO EL FLUJO VA EN DIRECCIÓN POSITIVA. ....	75
FIGURA 15. DISPOSICIÓN DE LAS VARIABLES EN LA MALLA ALTERNADA. ....	78
FIGURA 16. VOLUMEN DE CONTROL PARA LA VELOCIDAD. ....	79
FIGURA 17. VOLUMEN DE CONTROL USADO EN LA DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD. ....	85
FIGURA 18. PROCEDIMIENTO DEL ALGORITMO SIMPLE. ....	96
FIGURA 19. MATRIZ TRI-DIAGONAL. ....	97
FIGURA 20. CAÍDA DE TEMPERATURA A LO LARGO DEL DUCTO. ....	102
FIGURA 21. SIMULACIÓN DE LA TEMPERATURA PARA EL CASO 1: ....	103
FIGURA 22. SIMULACIÓN DE LA PRESIÓN PARA EL CASO 1: ....	104
FIGURA 23. SIMULACIÓN DE LA VELOCIDAD PARA EL CASO 1: ....	105
FIGURA 24. ESQUEMA DEL MEDIDOR DE PRUEBAS. ....	106

FIGURA 25. VARIACIÓN DEL FLUJO MÁSSICO DE ENTRADA.....	107
FIGURA 26. VARIACIÓN DE LA TEMPERATURA DE ENTRADA.....	108
FIGURA 27. VARIACIÓN DE LA PRESIÓN DE ENTRADA.....	108
FIGURA 28. SIMULACIÓN DE LA TEMPERATURA PARA EL CASO 2 A LO LARGO DEL DUCTO:....	109
FIGURA 29. SIMULACIÓN DE LA PRESIÓN PARA EL CASO 2 A LO LARGO DEL DUCTO:.....	111
FIGURA 30. SIMULACIÓN DE LA VELOCIDAD PARA EL CASO 2 A LO LARGO DEL DUCTO:.....	112
FIGURA 31. SIMULACIÓN DE LA TEMPERATURA PARA EL CASO 2 A DIFERENTES DISTANCIAS EN EL DUCTO Y PARA UN CICLO DEL MOTOR (0,05 [S]).....	113
FIGURA 32. SIMULACIÓN DE LA PRESIÓN PARA EL CASO 2 A DIFERENTES DISTANCIAS EN EL DUCTO Y PARA UN CICLO DEL MOTOR (0,05 [S]). .....	114
FIGURA 33. SIMULACIÓN DE LA VELOCIDAD PARA EL CASO 2 A DIFERENTES DISTANCIAS EN EL DUCTO Y PARA UN CICLO DEL MOTOR (0,05 [S]).....	115
FIGURA 34. SIMULACIÓN DE LA TEMPERATURA PARA EL CASO 2 A DIFERENTES DISTANCIAS EN EL DUCTO Y PARA 10 CICLOS DEL MOTOR (0,5 [S]).....	116
FIGURA 35. SIMULACIÓN DE LA PRESIÓN PARA EL CASO 2 A DIFERENTES DISTANCIAS EN EL DUCTO Y PARA 10 CICLOS DEL MOTOR (0,5 [S]). .....	117
FIGURA 36. SIMULACIÓN DE LA VELOCIDAD PARA EL CASO 2 A DIFERENTES DISTANCIAS EN EL DUCTO Y PARA 10 CICLOS DEL MOTOR (0,5 [S]). .....	118
FIGURA 37. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS PARA LA TEMPERATURA. ....	119
FIGURA 38. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS PARA LA PRESIÓN. ....	120
FIGURA 39. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS PARA LA VELOCIDAD. ....	121

## RESUMEN

**TÍTULO:** MODELADO Y SIMULACIÓN DEL FLUJO EN EL SISTEMA DE ESCAPE EN MOTORES DE COMBUSTIÓN INTERNA DIESEL 4 TIEMPOS\*

**AUTOR:** JUAN PABLO CONSUEGRA TORRES\*\*

**PALABRAS CLAVES:** MVF, TUBERÍA DE ESCAPE, FLUJO EN DUCTOS, SIMPLE.

En el presente trabajo se desarrolló un modelo capaz de predecir el comportamiento del flujo compresible dentro de los múltiplos de escape en los Motores de Combustión Interna (MCI) teniendo en cuenta la transferencia de calor y la fricción del fluido con las paredes. Para ello se planteó un modelo matemático basado en las ecuaciones de continuidad, ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento, ecuación de la energía y la ecuación de gas ideal permitiendo conocer las variaciones de las propiedades de un flujo transitorio en el interior de los múltiplos de escape.

La solución del sistema de ecuaciones se realiza mediante la discretización por el Método de los Volúmenes Finitos (MVF) utilizando un esquema upwind de primer orden para el término convectivo y un esquema implícito para el análisis transitorio. Este sistema de ecuaciones discretizados se resuelve utilizando el algoritmo SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations) obteniéndose como resultados finales los perfiles de temperatura, presión y velocidad en diferentes puntos de los múltiplos y a su vez en función del tiempo.

Los resultados obtenidos de la simulación del flujo unidimensional y transitorio en el interior de dichos múltiplos se compararon con la teoría y con el programa COMSOL versión 4.3b.

---

\*Trabajo de Grado.

\*\*Facultad de Ingenierías Físico - mecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Director PhD Jorge Luis Chacon

## ABSTRACT

**TITLE:** MODELING AND SIMULATION OF FLOW IN THE EXHAUST SYSTEM OF INTERNAL COMBUSTION IN DIESEL FOUR STROKES ENGINES\*

**AUTHOR:** JUAN PABLO CONSUEGRA TORRES\*\*

**KEY WORDS:** FVM, EXHAUST PIPE, FLOW IN DUCTS, SIMPLE.

In the present work was developed a model capable of predict the behavior of the compressible flow inside the exhaust manifold in the Internal Combustion Engine (ICE) considered the heat transfer and the friction. For that was formulated a mathematical model base on the continuity equation, momentum quantity conservation equation, energy equation and ideal gas equation in order to know the property variations of a one-dimensional and transitory flow of the manifold intake and exhaust.

The solution to the equations system was carried by means of the discretization for the Finite Volume Method (FVM) using an upwind scheme of first order for the convective term and implicit scheme for the transitory analysis. This discretized equations system was solved to use of the SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations) algorithm from which results the temperature profiles, pressure and velocity in different points of the exhaust manifold and in function of time.

The results of the one-dimensional and transitory flow simulation in the interior of these exhaust manifold was compared with the theory and COMSOL 4.3b.

---

\*Work degree.

\*\*Faculty of Physical - mechanical Engineering. School of Mechanical Engineering. Advisor PhD Jorge Luis Chacon

## SÍMBOLOS

$\vec{a}$	Aceleración [ $m/s^2$ ].
$a_x$	Aceleración en dirección $x$ [ $N$ ].
$A$	Área [ $m^2$ ].
$A_{ext}$	Área exterior del ducto [ $m^2$ ].
$A_{int}$	Área interior del ducto [ $m^2$ ].
$\beta$	Coefficiente de expansión volumétrica [ $1/K$ ].
$C_p$	Calor específico a presión constante [ $J/(kg * K)$ ].
$C_1$	Constante para el cálculo del coeficiente de viscosidad dinámica [ $\frac{kg}{ms\sqrt{K}}$ ].
$C_2$	Constante para el cálculo del coeficiente de viscosidad dinámica [ $K$ ].
$C_f$	Coefficiente de fricción de Fanning.
$\Delta t$	Variación en el tiempo [ $s$ ].
$\Delta V$	Variación del volumen [ $m^3$ ].
$\Delta x$	Ancho del volumen de control [ $m$ ].
$D$	Diámetro del ducto [ $m$ ].
$D_{ext}$	Diámetro externo del ducto [ $m$ ].
$D_{int}$	Diámetro interno del ducto [ $m$ ].
$dx$	Distancia en $x$ [ $m$ ].
$dy$	Distancia en $y$ [ $m$ ].
$dz$	Distancia en $z$ [ $m$ ].
$e$	Energía interna [ $J/kg$ ].
$\varepsilon$	Rugosidad del ducto [ $m$ ].
$f$	Factor de fricción de Darcy-Weisbach.
$\vec{F}$	Fuerza [ $N$ ].
$F_x$	Fuerzas en dirección $x$ [ $N$ ].

$\vec{f}$	Fuerzas de campo [N].
$g$	Gravedad [ $m/s^2$ ].
$G_r$	Numero de Grashof.
$h$	Entalpia [ $J/kg$ ].
$h^0$	Entalpia de formación a la temperatura $T^0$ [ $J/kg$ ].
$h_{ext}$	Coeficiente de calor convectivo exterior [ $W/(m^2 * K)$ ].
$h_{int}$	Coeficiente de calor convectivo interior [ $W/(m^2 * K)$ ].
$k_{ext}$	Conductividad térmica del fluido exterior [ $W/(m * K)$ ].
$k_{int}$	Conductividad térmica del fluido interior [ $W/(m * K)$ ].
$k_{duct}$	Conductividad térmica del ducto [ $W/(m * K)$ ].
$m$	Masa [ $kg$ ].
$M$	Masa molar del aire [ $kg/kmol$ ].
$\mu$	Coeficiente de viscosidad dinámica [ $kg/(m * s)$ ].
$N_{u(int)}$	Numero de Nusselt para el fluido interior.
$N_{uT(ext)}$	Numero de Nusselt total exterior.
$N_{uF(ext)}$	Numero de Nusselt para convección forzada para el fluido exterior.
$N_{uN(ext)}$	Numero de Nusselt para convección natural para el fluido exterior.
$P$	Perímetro [ $m$ ].
$p$	Presión [ $N/m^2$ ].
$p'$	Corrección de la presión [ $N/m^2$ ].
$p^*$	Estimación de la presión [ $N/m^2$ ].
$P_r$	Numero de Prandtl.
$Q$	Transferencia de calor [ $W$ ].
$q_{cond}$	Transferencia de calor por conducción [ $W$ ].
$r_{ext}$	Radio exterior del ducto [ $m$ ].
$r_{int}$	Radio interior del ducto [ $m$ ].
$R$	Constante del aire como gas ideal [ $J/(kg * K)$ ].
$R_a$	Numero de Rayleigh.
$Re$	Numero de Reynolds.

$\rho$	Densidad [ $kg/m^3$ ].
$\sigma_{xx}$	Esfuerzo normal a $x$ y en dirección $x$ [ $N/m^2$ ].
$\tau$	Esfuerzo cortante [ $N/m^2$ ].
$T$	Temperatura [ $K$ ].
$T_{\infty}$	Temperatura exterior [ $K$ ].
$T^0$	Temperatura de referencia [ $K$ ].
$T^*$	Temperatura estimada [ $K$ ].
$T_f$	Temperatura de película [ $K$ ].
$T_s$	Temperatura de la superficie del ducto [ $T$ ].
$t$	Tiempo [ $s$ ].
$U$	Coefficiente global de transferencia de calor [ $W/(m^2 * K)$ ].
$u$	Velocidad en dirección $x$ [ $m/s$ ].
$u'$	Corrección de la velocidad [ $N/m^2$ ].
$u^*$	Estimación de la velocidad [ $N/m^2$ ].
$\nu$	Viscosidad cinemática [ $m^2/s$ ].
$V$	Volumen del volumen de control [ $m^3$ ].
$\vec{V}$	Velocidad [ $m/s$ ].

## INTRODUCCIÓN.

Uno de los sectores más importantes en la economía de un país es el transporte. La globalización, la crisis económica internacional, el problema del calentamiento global y los altos precios de los combustibles derivados del petróleo han ocasionado que el funcionamiento de los Motores de Combustión Interna (MCI) sea cada vez más eficiente. Para lograr una mejora en la eficiencia de los MCI es necesario comprender profundamente la operación de estos con el fin de caracterizar de la forma más detallada posible la respuesta del dispositivo ante las solicitudes aplicadas.

Hasta los años 70, la mayoría de los análisis se realizaban mediante métodos experimentales. Estos métodos experimentales involucran altos costos así como un aumento en el tiempo de diseño y puesta en marcha de los experimentos. Gracias a los avances en el campo del cálculo, a la mejora en la tecnología en hardware en las computadoras y al gran interés hacia la modelización de fenómenos físicos cada vez más complejos, hoy es posible abordar el análisis de un MCI mediante simulación computacional con resultados muy aceptables. De esta forma, el modelado y la simulación computacional se pueden tomar como una forma de ahorrar esfuerzo y dinero, reduciendo los tiempos de ensayos, y dejando la experimentación como un medio para comprobar el comportamiento simulado.

Por medio del modelado y la simulación en un MCI se puede predecir, entre otros, la potencia y torque de un motor en función de la posición del cigüeñal. Uno de los parámetros a tener en cuenta son las presiones de admisión y escape en los múltiples correspondientes. En general, los modelos consideran que las propiedades del fluido en la admisión y escape son constantes, cuando en realidad se presentan variaciones dependiendo del grado de apertura de las válvulas, entre otras. Al disponer de un sistema de cálculo más detallado es

posible brindar herramientas más eficaces durante la etapa de diseño, operación y mantenimiento.

El resultado del proyecto puede ser de gran ayuda para que la ingeniería nacional logre que los MCI produzcan mejores prestaciones, requieran menor consumo de combustible produciendo un menor impacto ambiental y de esta forma hacer del sector de transporte más competitivo para la economía nacional.

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Un aspecto importante en el diseño de los MCI es el relacionado con los múltiples de admisión y escape. Actualmente, a nivel mundial, se están aprovechando los avances tecnológicos en hardware y software para realizar modelamientos y simulaciones de los procesos en los MCI de manera que sirvan de herramienta en la etapa de diseño y mantenimiento (disminuyendo costos y tiempo en el diseño), y que ayuden en la optimización de múltiples requisitos como la reducción del consumo específico, de las emisiones contaminantes y del nivel de ruido aerodinámico emitido por los vehículos; así como el de obtener los mejores resultados en par, potencia y rendimiento.

Se debe tener en cuenta que el flujo en el interior de los sistemas de admisión y escape de los MCI es uno de los casos más complejos de la dinámica de gases ya que dicho flujo es transitorio, compresible, y se caracteriza por tener una velocidad elevada con ondas de presión de amplitud considerable y la existencia de fuertes discontinuidades de temperatura [17]. Es por eso que muchos investigadores han dedicado grandes esfuerzos al desarrollo de técnicas numéricas capaces de resolver las ecuaciones del flujo. Se han utilizado durante varias décadas un gran número de métodos estándar basados en el método de las características para estudiar y asistir el desarrollo de los sistemas de admisión y escape, así como los métodos estándar basados en técnicas de diferencias finitas (método de Lax&Wendroff). Sin embargo, estas técnicas no pueden emplearse con la precisión suficiente en problemas en los que el término fuente tiene un peso importante en el conjunto de las ecuaciones. De hecho, los mencionados métodos producen errores de conservación importantes e incluso presentan fuertes problemas de oscilación de la solución que pueden llegar a la interrupción de la ejecución del programa por aparición de propiedades físicas inconsistentes. Para la resolución de esta problemática es necesario, en primer lugar un planteamiento

adecuado del sistema de ecuaciones que incluya el término fuente, y en segundo lugar, la utilización de esquemas numéricos conservativos de carácter no oscilatorio. El método a utilizar es el Método de Volúmenes Finitos (MVF) por ser un método conservativo en cada volumen de control y por lo tanto conservativo en todo el dominio completo, permitiendo discontinuidades de las propiedades del fluido (como sucede con las ondas de choque en el interior de los múltiplos de los MCI).

Dado que los parámetros operativos del motor dependen de las condiciones de los flujos en los múltiplos de admisión y escape, entre otros, se propone crear una herramienta computacional que prediga de forma acertada las curvas características del MCI ayudando en la comprensión de los fenómenos termofluidodinámicos al interior de los motores permitiendo pronosticar de forma más acertada la potencia, el par, el rendimiento y el consumo de combustible.

## MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN.

Los MCI son altamente influenciados por el diseño de los múltiples de admisión y escape [27], siendo este último el que tiene una mayor influencia en los parámetros de rendimiento de los motores. En el caso del múltiple de escape las variables que mayor influencia tienen en el motor son: el diámetro influyendo en la presión [1, 27], la longitud de la tubería y la geometría de las conexiones (uniones) influyendo en las pérdidas de presión [27, 35] y el espesor del material influyendo en la transferencia de calor [27], entre otros.

En este proyecto se desea construir un modelo del flujo que pueda predecir de una forma bastante acertada algunas de las influencias comentadas anteriormente que ayudará a una comprensión más profunda de la variación de dichas variables, permitiendo obtener un diseño óptimo del múltiple y de esta forma poder mejorar la potencia, el par, el rendimiento y un menor consumo de combustible.

Adicionalmente, el presente proyecto permitirá el avance en las líneas de investigación de la mecánica de fluidos computacional mediante el estudio de las condiciones fluido dinámicas al interior de los conductos considerando flujo compresible.

## ESTADO DEL ARTE.

Actualmente existen diferentes métodos para resolver el sistema de ecuaciones generadas en el análisis del flujo de gases en el interior de los ductos, entre los más importantes se encuentran el método de las características, que inicialmente fue utilizado para el cálculo del flujo no estacionario unidimensional a través de conductos de sección constante [8], pero fue abandonado porque se trata de un tratamiento no conservativo y por lo tanto produce errores de conservación en masa y energía. Este fue sustituido por métodos en diferencias finitas que aportan órdenes de precisión superiores, existiendo diferentes métodos basados en estos, como los esquemas Lax&Wendroff, en [15] se puede encontrar una adaptación a este método. Uno de los problemas reportados en estos tipos de solución es que pueden presentar oscilaciones si se trata de métodos con orden de truncamiento par, esta problemática llevó en su momento a los investigadores a la utilización de esquemas Esencialmente No Oscilatorios (ENO – Essentially Non Oscillatory) [16] y los esquemas de Variación Total Decreciente (TVD – Total Variation Diminishing); en [23] se da una descripción detallada de este último esquema y en [17] se presenta un planteamiento más adecuado de las ecuaciones para el desarrollo del esquema. En [28] se muestra una descripción detallada de la mayoría de estas técnicas y en [3] se encuentra un estudio comparativo sobre la utilización de los esquemas donde se da como conclusión más importante, que todos los métodos de segundo orden con algún tipo de corrección, producen soluciones satisfactorias para la resolución del flujo por el interior de los conductos. Más recientemente, en [18] se ha utilizado el Método de los Volúmenes Finitos (MVF) donde se construyó un modelo de flujo compresible unidimensional e isoentrópico.

Gracias a los aportes en las técnicas de modelado para los MCI se han obtenido grandes aportes en los últimos años como lo expresa Mantilla, Juan M. en [30]. Se

han obtenido experimentalmente coeficientes de descarga más precisos [10, 9], y se pueden analizar una mayor cantidad de variables con este tipo de modelos [5, 29]. Así mismo, se han cambiado los métodos de solución pasando del método de las características en [6] al método de las diferencias finitas en [7, 2] y al MVF en [18]. También se ha pasado de los modelos unidimensionales para el flujo en ductos en [24] al modelado multidimensional del flujo en [34, 25]. Se hizo un estudio numérico y experimental sobre el flujo compresible en uniones de conductos en [35, 36], y en [38, 40] se estudiaron los fenómenos de transmisión de calor y balance térmico en los MCI alternativos. En [20] se compararon diferentes correlaciones de coeficientes de transmisión de calor para el interior de tubos. En [27] se llevaron a cabo estudios acerca de los efectos que el diseño de los sistemas de admisión y escape tienen en motores de combustión interna, y en [41] se desarrolló un esquema para la simulación de grandes vórtices (LES) en flujos compresibles con bajo número de Mach utilizando las ecuaciones de Navier-Stokes en tres dimensiones en coordenadas cartesianas con volúmenes de control no cartesianos.

Finalmente a nivel nacional los aportes a este tipo de temática los podemos encontrar en [39], donde se realizó una modelización de la renovación de la carga en MCI alternativos 4 tiempos, por su parte en [1] se muestra el desarrollo de un modelo de acción de ondas (MAO) de flujo isoentrópico que permitió simular el proceso de renovación de la carga de motores de combustión interna de cuatro tiempos y en [19] se realizó un estudio termofluidodinámico del proceso de renovación de la carga en motores de combustión interna alternativos. En [4] se desarrolló un software basado en web para la simulación de los procesos termofluidodinámicos de motores de combustión interna, y en [18] se hizo un modelo de flujo compresible unidimensional e isoentrópico por el MVF. Más reciente en [30] se hizo una exploración teórica del movimiento y choque de las ondas de presión y su aplicación a casos encontrados en ductos de motores reales.

## **1. CONCEPTOS GENERALES.**

El propósito de un motor de combustión interna es la producción de energía mecánica a partir de la energía química almacenada en el combustible como aparece en Heywood, J. [26]. En los motores de combustión interna la energía se libera mediante el encendido y la oxidación del combustible dentro del motor. El fluido de trabajo cambia su composición química antes y después de la combustión y es el encargado de transferir el trabajo al pistón que posteriormente se encarga de transferirlo al resto de los componentes de la cadena cinemática hasta llegar finalmente a las ruedas impulsoras del movimiento.

Cuando se habla de motores de combustión interna hay que especificar la forma en que se lleva a cabo el encendido, los cuales son:

- Encendidos por chispa
- Encendidos por compresión.

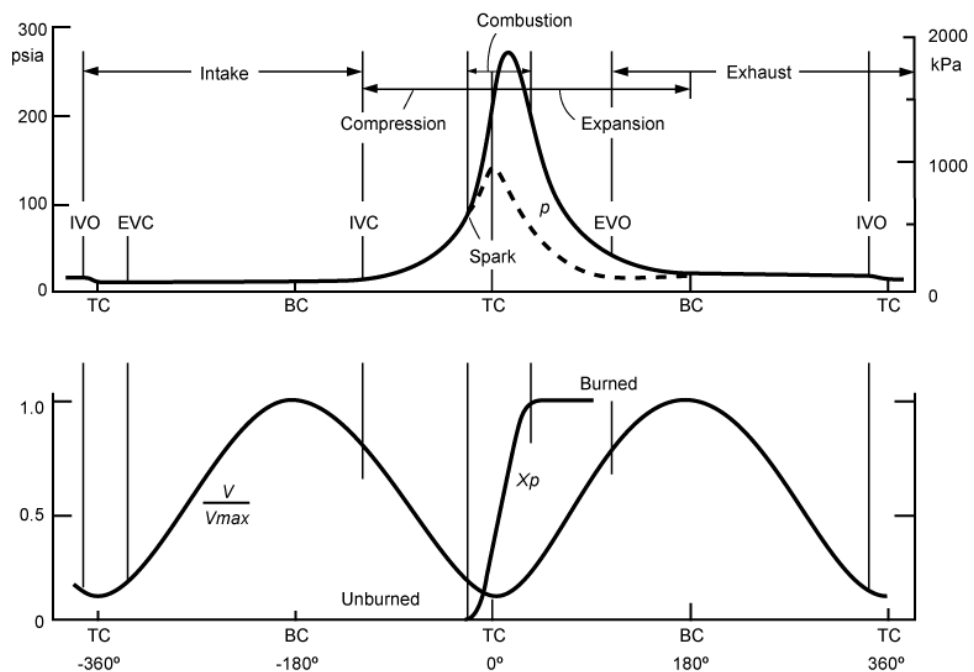
### **1.1 Operación de un motor encendido por chispa.**

En los motores encendidos por chispa el aire y el combustible se mezclan en el sistema de admisión previo a su entrada en el cilindro, usando un carburador o un sistema de inyección de combustible [26]. A veces se puede controlar la temperatura de la mezcla entrante por contacto del sistema de admisión con el de escape. La relación estándar de aire-combustible es de 15 para asegurar una combustión eficiente. El carburador es el encargado de dosificar o medir el apropiado flujo de combustible y aire al cilindro. El aire fluye a través de un Venturi (tobera convergente divergente) estableciendo una diferencia de presiones entre la entrada y la garganta que a su vez sirve como medio para impulsar el

combustible de una cámara a la garganta del Venturi pasando por una serie de orificios. Aguas abajo del Venturi se ubica la mariposa que controla el flujo combinado de aire y combustible y por lo tanto la potencia del motor. El flujo en la admisión varía de acuerdo a la posición de la mariposa que en su posición horizontal (máxima área de pasaje) genera la máxima potencia al régimen de vueltas especificado. Por lo general, el múltiple de admisión es calentado de forma de promover la evaporación y mejor mezclado del combustible en el aire.

Una alternativa común al carburador es el sistema de inyección que consiste en inyectar combustible desde un suministro de baja presión a las compuertas de admisión mediante inyectores. Hay diferentes tipos de sistemas de inyección: mecánicos mediante una bomba manejada por el motor, inyección continua, y el sistema electrónico.

Figura 1. Secuencia de eventos en el ciclo de operación de un motor de combustión interna 4 tiempos encendido por chispa.



Fuente: Heywood J., "Internal combustion engine fundamentals", McGraw Hill, 1988.

En la Figura 1 se muestra la secuencia de eventos que ocurren en el cilindro de un motor de 4 tiempos a lo largo de todo el ciclo, aquí la variable independiente es el ángulo del cigüeñal. La figura muestra la distribución de las válvulas y la relación de volumen para un motor típico en los automóviles de encendido por chispa.

Con el propósito de mantener buenos niveles de mezcla a altas velocidades la válvula de admisión, que normalmente abre antes de TC, cierra bastante después de BC. Durante la admisión, la mezcla fresca de aire y combustible se junta con los gases quemados residuales, remanentes de la carrera anterior. Una vez que la válvula se cierra, el contenido del cilindro se comprime por encima de la presión y temperatura atmosférica a medida que el volumen del cilindro se va reduciendo. Si bien existe transferencia de calor de la mezcla no quemada al pistón, cabeza de cilindro y paredes del cilindro, su efecto es pequeño. Entre 10 y 40 grados antes del TC se produce una descarga eléctrica a través de los electrodos de una bujía que arranca la carrera de combustión. Esta descarga se produce porque el distribuidor rotante e impulsado por el árbol de levas interrumpe la corriente que llega desde la batería al circuito primario de la bobina de encendida. El secundario conectado a la bujía produce un alto voltaje entre los electrodos proporcional a la variación del campo magnético. Este sistema es reemplazado ahora por circuitos electrónicos que cumplen la misma función. A partir de la descarga eléctrica se produce una llama turbulenta que se propaga a través de la mezcla de aire, combustible y gases residuales por el cilindro, extinguiéndose al llegar a las paredes de la cámara de combustión. La duración del quemado de la mezcla varía de acuerdo al diseño y la operación pero normalmente ronda entre los 40 y los 60 grados de cigüeñal, como se muestra en la Figura 1.

A medida que la masa se quema, la presión en el cilindro (línea continua en la Figura 1) se eleva por encima del nivel debido solo a la compresión (línea discontinua en la Figura 1). Debido a las diferencias en los patrones de flujo y la composición de la mezcla a través de los ciclos se encuentran curvas parecidas

pero no exactamente iguales. Existe un tiempo óptimo para el avance al encendido el cual produce el máximo torque al freno (MBT) para una masa de aire-combustible dentro del cilindro. Este tiempo óptimo es un compromiso empírico entre:

- Comenzar la combustión demasiado temprano en la carrera de compresión (cuando existe transferencia de trabajo a los gases).
- Completar la combustión demasiado tarde en la carrera de expansión (y así reducir la presión de pico).

Cerca de los  $2/3$  de la carrera de expansión se abre la válvula de escape y debido a que la presión del cilindro es mayor que la del múltiple de escape se produce un barrido. Los gases quemados fluyen a través de las válvulas de escape al múltiple de escape hasta que la presión se equilibra. La duración de este proceso depende del nivel de presión en el cilindro. Después es el pistón el encargado de desplazar los gases quemados del cilindro al múltiple. El tiempo de la válvula de escape es un compromiso entre:

- Reducción de trabajo al pistón en la carrera de expansión antes del BC.
- Reducción de trabajo del pistón después del BC.

La válvula de escape permanece abierta hasta después del TC mientras que la válvula de admisión vuelve a abrir antes de TC con lo cual existe un período en el cual ambas están abiertas denominado cruce. Si la mariposa se ubica a baja carga, la presión en la admisión estaría por debajo que la del escape produciendo un reflujo en la válvula de admisión apenas esta se abre.

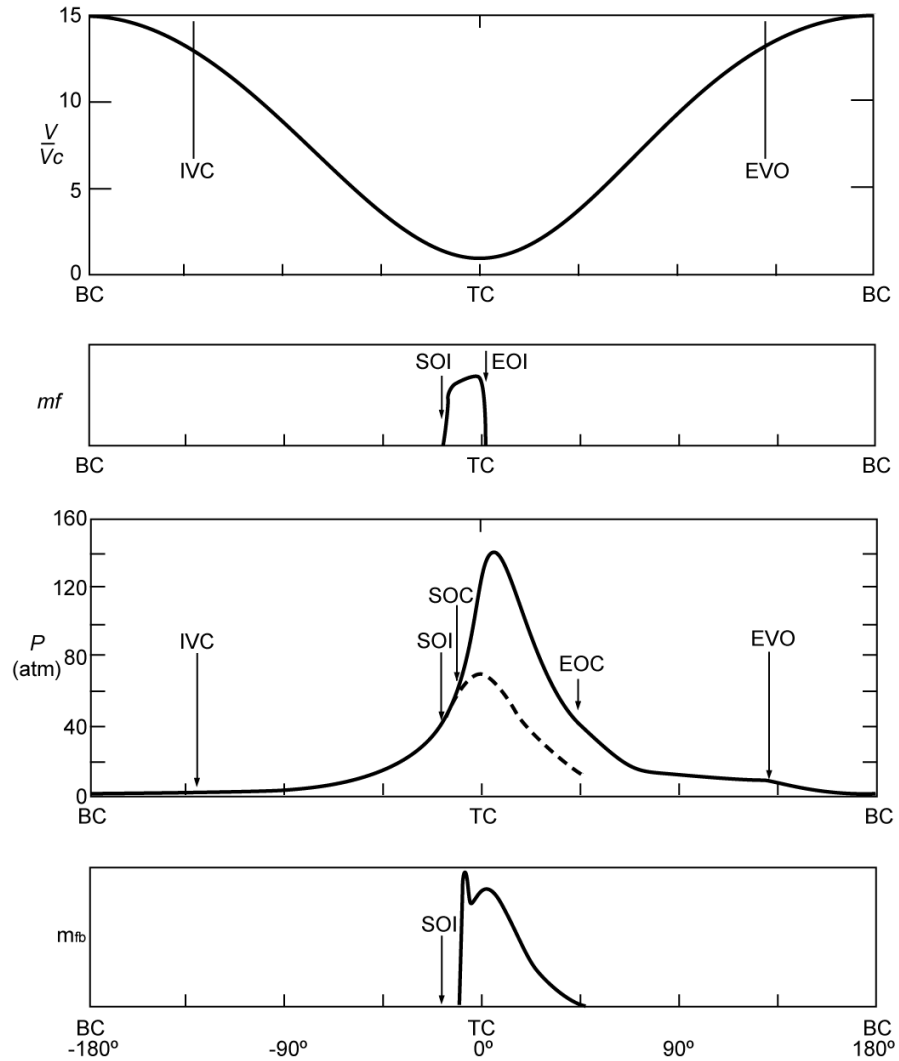
## 1.2 Operación de un motor encendido por compresión.

En los motores a ciclo Diesel o encendidos por compresión la mezcla inducida al cilindro está compuesta enteramente por aire [26]. El combustible se inyecta directamente y por separado al cilindro justo antes que la combustión se inicie. El control de la carga se consigue variando la cantidad de combustible inyectado en cada ciclo mientras que el aire para cada régimen permanece invariable. Existe una gran variedad de diseño de estos motores:

- Naturalmente aspirados donde se ingresa el aire en condiciones atmosféricas.
- Turbo cargados donde el aire se comprime mediante un dispositivo que consiste en una combinación de una turbina y un compresor manejado por el escape.
- Súper cargados donde el aire se comprime mediante una bomba o un soplador. De esta forma se puede incrementar la cantidad de aire y por ende de combustible a ser ingresado por ciclo logrando mejores potencias o disminuyendo peso y costo para una dada potencia.

La operación de un motor Diesel típico de 4 tiempos naturalmente aspirado se ilustra en la Figura 2. La relación de compresión es muy superior al caso de motores encendidos por chispa cubriendo un rango entre 12 y 24 dependiendo del tipo de motor y si es naturalmente aspirado o turbo aspirado. Los tiempos de las válvulas son similares a los de encendido por chispa.

Figura 2. Secuencia de eventos durante los procesos de compresión, combustión y expansión en el ciclo de operación de un motor de encendido por compresión aspirado naturalmente.

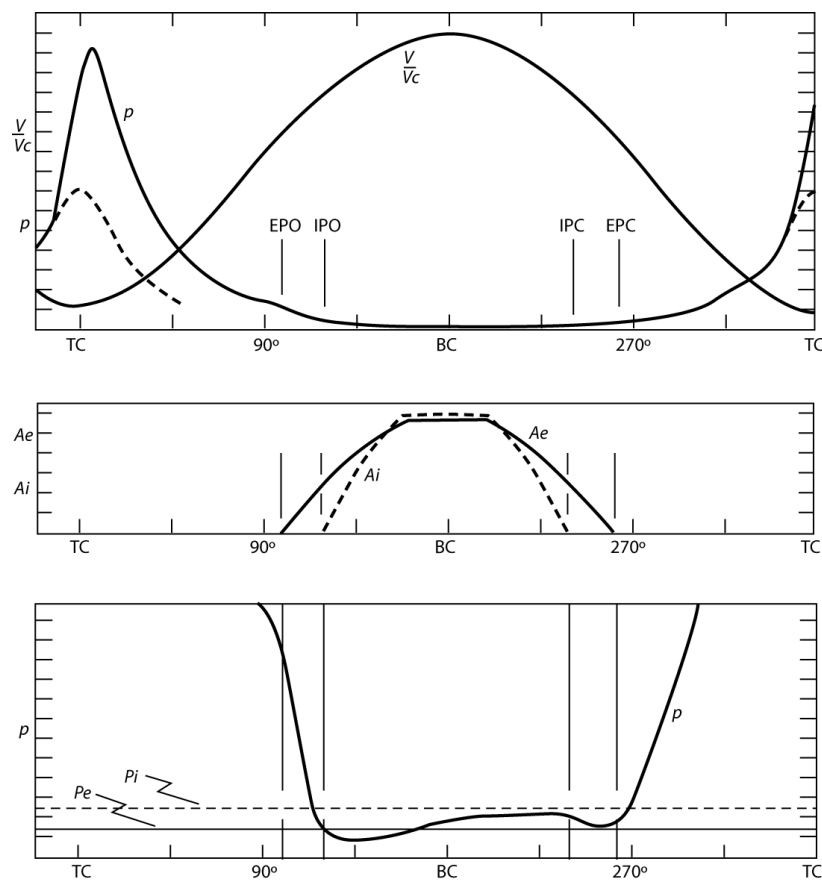


Fuente: Heywood, J., "Internal combustion engine fundamentals", McGraw Hill, 1988.

En la carrera de compresión el aire alcanza 4 MPa y 800 K como muestra la figura y aproximadamente 20 grados antes de TC se inyecta el combustible. En la Figura 2b se muestra un perfil típico de inyección. El chorro de combustible líquido se atomiza formándose una mezcla de burbujas de combustible y aire. De esta forma

el combustible líquido se evapora y se mezcla con el aire en ciertas proporciones. La presión y la temperatura del aire están por encima del punto de ignición del combustible así que en cuanto se alcanza una composición adecuada (retardo de tiempo) se produce el encendido espontáneo (autoencendido) de una mezcla heterogénea, y la presión en el cilindro se incrementa notablemente como lo muestra la Figura 2c. La llama se dispersa rápidamente en las zonas donde la mezcla está lista para encenderse y el fenómeno prosigue como lo muestra la Figura 2d. El escape es similar al caso encendido por chispa.

Figura 3. Secuencia de eventos durante los procesos de expansión, intercambio de gases y compresión en el ciclo de un motor 2 tiempos encendido por compresión.



Fuente: Heywood, J., "Internal combustion engine fundamentals", McGraw Hill, 1988.

En el caso de motores de 2 tiempos encendidos por compresión las carreras de compresión, inyección de combustible, combustión y expansión son similares a lo ya visto para el motor de 4 tiempos, lo que difiere es la admisión y el escape. En la Figura 3 vemos la secuencia de eventos en un Diesel 2 tiempos con barrido tipo lazo.

En este diseño las compuertas de admisión y escape se ubican en posiciones análogas de la carrera del pistón y se descubren cuando el pistón se aproxima al BC. Una vez que la compuerta de escape abre, la presión en el cilindro cae rápidamente durante el barrido, luego abre la de admisión y una vez que la presión cae por debajo de la correspondiente a la admisión, el aire ingresa al cilindro. Los gases quemados son desplazados hacia la salida por la masa de aire que ingresa y luego se produce el cierre de la admisión y el del escape.

### **1.3 La Mecánica de fluidos e hipótesis del medio continuo.**

La mecánica de fluidos es una rama de la mecánica de los medios continuos, que estudia el comportamiento de los fluidos (gases y líquidos) así como los esfuerzos a que estos están sometidos [37]. La característica principal que define a un fluido es su incapacidad para resistir esfuerzos cortantes, lo cual implica que carezca de forma propia y deba asumir la forma del recipiente que lo contiene. La mecánica de fluidos asume que los fluidos verifican las leyes de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento, la primera y segunda ley de la termodinámica. Pero probablemente la hipótesis más importante es la de medio continuo. Esta es la hipótesis fundamental de la mecánica de fluidos y establece que el fluido es un material continuo a lo largo del espacio que ocupa, ignorando por tanto su estructura molecular y las discontinuidades asociadas a la misma. Esto permite considerar a las propiedades del fluido (densidad, temperatura, presión, etc.) como funciones continuas. La hipótesis del medio continuo tiene validez si el camino

libre medio de las moléculas del fluido es mucho menor a la longitud característica del sistema físico.

## **2. CARACTERÍSTICAS DE LOS MODELOS DE FLUJO PARA MOTORES DE COMBUSTIÓN INTERNA ALTERNATIVOS.**

Uno de los principales objetivos del modelado matemático a corto plazo puede ser la ayuda considerable en la comprensión de ciertos fenómenos particulares, mientras que a largo plazo puede facilitar una herramienta eficaz para el diseño de motores asistido por las técnicas CAD para la optimización de diversos elementos de los MCI con respecto a diferentes requisitos como la reducción del consumo específico, la reducción de las emisiones contaminantes y la reducción del nivel de ruido aerodinámico emitido por los vehículos.

El modelado de los MCI no es una labor simple, esta conlleva diferentes ramas de la física como son la termodinámica, la mecánica de fluidos, el análisis de la turbulencia, la transferencia de calor y la aplicación de los métodos numéricos.

### **2.1 Modelos para el análisis del flujo en los múltiples de admisión y escape.**

Existen tres modelos utilizados para el análisis de los flujos a través de los múltiples de admisión y escape según Heywood, J. [26]:

### **2.1.1 Modelos de flujo cuasi-estacionario.**

Aquí se considera cada accesorio como un componente de una red en donde cada uno constituye una restricción significativa al flujo, y en donde estos están conectados por medio del flujo de gas y de las relaciones de presión a través de ellos. La restricción al flujo por cada uno de estos componentes se define por su geometría y el coeficiente de descarga, que por lo general es determinado empíricamente en condiciones de estado estacionario. El flujo de gas a través de cada componente se calcula utilizando las ecuaciones del flujo constante en una sola dimensión.

Estos métodos no son capaces de predecir la variación del rendimiento volumétrico con la velocidad del motor, ya que se considera que el volumen de los múltiples es despreciable así como la acumulación de masa entre los componentes.

### **2.1.2 Métodos de llenado y vaciado.**

Se considera que los múltiples son modelados mediante volúmenes fijos, con lo cual tienen capacidad para almacenar gas pero no pueden mostrar variaciones de presión, temperatura y otras propiedades del gas a lo largo de la dirección del flujo debido a la dinámica inestable de los gases en los múltiples. Cada volumen se trata como un volumen de control (un sistema abierto de volumen fijo) que contiene gas a un estado uniforme. De esta forma se hace imposible detectar resonancias o malas distribuciones de mezclas entre los múltiples. Sin embargo, tienen su utilidad en múltiples pequeños donde la forma es compacta y especialmente cuando se está interesado en la respuesta temporal del sistema, pero sin aumentar demasiado el costo computacional.

### **2.1.3 Modelos de acción de ondas o dinámica de gases.**

Este tipo de estrategia consiste en resolver las ecuaciones de flujo de gases (ecuación de la conservación de la masa, momento, y de la energía para el flujo compresible no estacionario) permitiendo que las variables tengan una variación espacial solo en una dirección (la dirección del flujo), y asumiendo que en la sección transversal se realiza una especie de promedio espacial de las variables de cálculo.

Adicionalmente, en la literatura reciente se encuentran aplicaciones de la CFD a los múltiples de admisión y escape, como el siguiente.

### **2.1.4 Métodos del tipo CFD (Computational Fluid Dynamics).**

Este tipo de análisis es el más complejo y costoso desde el punto de vista computacional. Esta estrategia consiste en resolver las ecuaciones de conservación de masa, momento, energía y el transporte de algunas especies en un dominio en general tridimensional y no estacionario.

De estos cuatro modelos la presente investigación utilizará el modelo del tipo CFD, debido a que este puede describir las variaciones espaciales del flujo, la presión y los cambios de velocidades a lo largo de ductos de diferentes formas y tamaños, típico en los ductos de admisión y escape de los MCI, además de representar el comportamiento tridimensional del flujo a través de los sistemas de admisión y escape.

### 2.1.5 Descripción del modelo a utilizar.

Para el análisis del modelo a utilizar se tendrán en cuenta algunas consideraciones como son:

- El flujo es transitorio (no estacionario) debido a los desplazamientos alternantes del pistón y de las válvulas.
- El fluido se tomará como aire que se comporta bajo las consideraciones de gas ideal.
- Se considerará el flujo como unidimensional, ya que la variación de las propiedades del fluido son más importantes en la dirección del flujo.
- Se despreciarán las fuerzas de cuerpo ( $\vec{f}$ ) que pueden ser por el peso o por campos electro-magnéticos.
- El flujo que entra al sistema se tomará como laminar y totalmente desarrollado.
- Se desprecia la transferencia de calor por radiación desde el tubo a los alrededores.
- Se tomará un tubo recto y de sección constante.

### **3. MODELADO Y SIMULACIÓN DE FLUJO EN EL SISTEMA DE ESCAPE EN MCI 4 TIEMPOS DIESEL.**

#### **3.1 Ecuaciones de la mecánica de fluidos.**

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los fluidos se obtienen aplicando los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica a un volumen de control del fluido. Haciendo esto se obtiene la llamada formulación integral o diferencial de las ecuaciones.

La expresión matemática que describe el comportamiento de los fluidos newtonianos consiste de tres ecuaciones acopladas, dos de tipo escalar para la densidad y la energía y una vectorial para la velocidad, en sus tres componentes. Estas ecuaciones pueden ser escritas al menos en tres formas dependiendo de las variables que se pretende estudiar:

- En forma conservativa atendiendo a las cantidades que se conservan: masa, cantidad de momento y energía.
- En forma primitiva, utilizando cantidades fácilmente medibles como la densidad, la presión y la temperatura.
- En su forma característica estableciendo velocidades relacionadas con la velocidad de propagación de las variables propias del flujo.

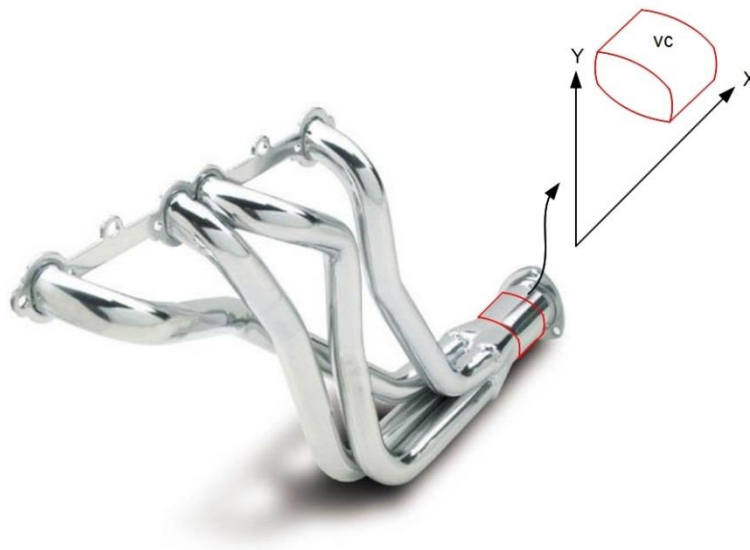
Si bien cada una de las tres formas mencionadas tiene ventajas y desventajas a la hora de su implementación, en este proyecto se trabajará solo la forma conservativa de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo viscoso teniéndose en cuenta las simplificaciones que se hicieron en el capítulo anterior.

### 3.2 Ecuaciones de conservación.

El tipo de ecuaciones diferenciales que se deducirán a continuación expresan un cierto principio a conservar. Cada ecuación emplea una cantidad física como variable dependiente y que debe existir un balance entre varios factores que ejercen alguna influencia sobre la variable.

Para el análisis se toma un Volumen de Control (VC) del sistema de escape en los MCI como se muestra en la Figura 4.

Figura 4. Volumen de control para aplicar las leyes de conservación.



Fuente: Autor.

En el presente trabajo se está interesado en la variación de las propiedades solo en una dimensión (dirección axial al ducto, eje  $x$ ) por lo que se plantearán las ecuaciones de conservación para dicha dirección.

Todas las propiedades serán funciones de la posición y el tiempo de manera que es necesario escribir las propiedades tal como  $\rho(x, t)$ ,  $p(x, t)$ ,  $T(x, t)$  y  $V(x, t)$  para la densidad, presión, temperatura y velocidad respectivamente. Para evitar

confusiones, no se escribirán las propiedades indicando todas las variables de las cuales depende, y solo se escribirá la propiedad entendiéndose que depende tanto de la posición como del tiempo.

### 3.2.1 Ecuación de continuidad.

Para un VC infinitesimal fijo en el espacio el principio básico de conservación de la masa se puede expresar de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Creación de masa} \\ \text{dentro del VC} \end{array} \right\} = \{0\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Masa que se} \\ \text{acumula en el VC} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de masa} \\ \text{que entra al VC} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de masa} \\ \text{que sale del VC} \end{array} \right\} \quad (1)$$

La masa que se acumula es la variación del producto entre la densidad y el volumen con respecto al tiempo y se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \, dx \, dy \, dz) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(dx \, dy \, dz) \quad (2)$$

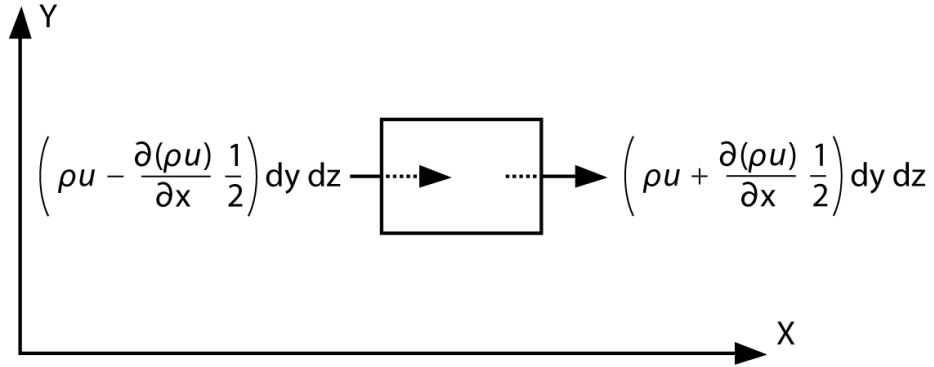
donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $t$  es el tiempo y  $dx, dy, dz$  son las dimensiones del elemento en  $x, y$  y  $z$  respectivamente.

El flujo de masa que cruza las fronteras del VC está dado por el producto de la densidad, el área y la velocidad normal a la superficie, a partir de la Figura 5 se observa que el flujo másico a través del VC es:

$$\left( \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} dx \right) dy \, dz - \left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} dx \right) dy \, dz \quad (3)$$

donde  $u$  es la velocidad del fluido en la dirección del flujo (Velocidad en  $x$ ).

Figura 5. Flujo de masa entrando y saliendo del VC.



Fuente: Autor.

Los flujos que están dirigidos hacia el VC producen un incremento de la masa dentro del VC y por consiguiente tienen un signo positivo, mientras que los flujos que salen del VC tienen un signo negativo y tienden a disminuir la masa.

Reemplazando las ecuaciones (2) y (3) en (1) se tiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} (dx dy dz) = \left( \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} dx \right) dy dz - \left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} dx \right) dy dz \quad (4)$$

Después de agrupar y simplificar términos semejantes en la ecuación (4), la ecuación de la conservación de la masa o ecuación de continuidad se puede expresar como:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

### 3.2.2 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.

Otro principio físico de conservación es la segunda ley de Newton ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ).

La deducción de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se hará para un VC infinitesimal moviéndose a lo largo de una línea de corriente con velocidad  $u$  igual a la velocidad local del flujo en cada punto como se muestra en la Figura 6, se hace de esta forma porque es más conveniente tanto para la deducción de la ecuación de la cantidad de movimiento y la ecuación de la energía que se mostrará en la siguiente sección.

Cuando se aplica la segunda ley de Newton expresada arriba a un VC infinitesimal del fluido y considerando solamente la componente  $x$  da:

$$F_x = ma_x \quad (6)$$

donde  $F_x$  y  $a_x$  son las componentes escalares en  $x$  de la fuerza y la aceleración respectivamente. Considerando el lado izquierdo de la ecuación (6) se sabe que el VC en movimiento experimenta una serie de fuerzas en la dirección  $x$ , las cuales son:

- Fuerzas de cuerpo: Las cuales actúan directamente sobre el volumen de masa del VC. Estas fuerzas actúan “a distancia” a través o por medio de la acción de un campo como por ejemplo el campo gravitacional, eléctrico o magnético.
- Fuerzas de superficie: Las cuales actúan sobre las superficies del VC. Se puede deber a dos tipos de fuerzas: (a) a la distribución de presión que actúa sobre la superficie, impuesta por el fluido que rodea exteriormente el elemento, y (b) a la distribución del esfuerzo cortante o de tensión que

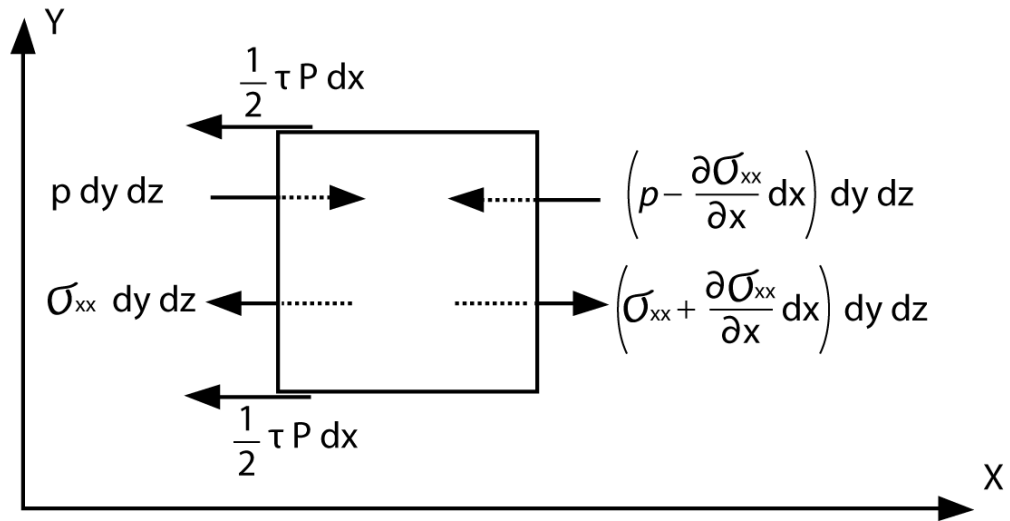
actúa sobre la superficie, también impuesto por el fluido exterior “empujando” o “jalando” la superficie por medio de fricción.

Las fuerzas de cuerpo se definen como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fuerzas de cuerpo} \\ \text{sobre el VC} \\ \text{actuando en direccion } x \end{array} \right\} = \rho f_x(dx dy dz) \quad (7)$$

Las fuerzas de superficies en dirección  $x$  ejercidas sobre el VC se muestran en la Figura 6.

Figura 6. Volumen de control infinitesimal en movimiento.



Fuente: Autor.

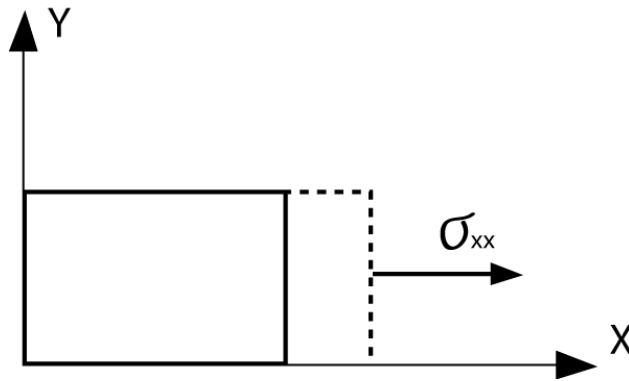
Para el VC en movimiento se puede escribir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fuerzas de superfie} \\ \text{sobre el VC} \\ \text{actuando en direccion } x \end{array} \right\} = \left[ p - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy dz + \left[ \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) - \sigma_{xx} \right] dy dz - \tau P dx \quad (8)$$

donde  $p$  es la presión,  $\sigma_{xx}$  es el esfuerzo normal,  $\tau$  es el esfuerzo cortante debido a la fricción con las paredes del ducto y  $P$  es el perímetro.

Los esfuerzos cortante y normal en el fluido están relacionados con el cambio de la deformación del fluido con el tiempo, como se muestra en la Figura 7 para el plano  $xy$  el esfuerzo normal ( $\sigma_{xx}$ ) está relacionado con el cambio de volumen del elemento, este es normalmente pequeño pero es importante cuando el gradiente de velocidad es alto (ondas de choque).

Figura 7. Esfuerzo normal.



Fuente: Autor.

La suma de las fuerzas en dirección  $x$ , está dada por la suma de las ecuaciones (7) y (8). Sumando y cancelando términos semejantes se obtiene:

$$F_x = \underbrace{\rho f_x dx dy dz}_{\text{Fuerzas de cuerpo}} + \underbrace{\left[ -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right] dx dy dz - \tau P dx}_{\text{Fuerzas de superficie}} \quad (9)$$

Como se mencionó en la sección 2.1.5 se despreciarán los aportes realizados por las fuerzas de cuerpo al fluido, para lo cual se tiene:

$$F_x = \left[ -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right] dx dy dz - \tau P dx \quad (10)$$

En el presente trabajo se tiene un fluido con un comportamiento Newtoniano, donde Stokes estableció que:

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{V})$$

Para un flujo unidimensional da:

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (11)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad dinámica y se trabajará como en [18] y [11]:

En los gases el coeficiente de viscosidad ( $\mu$ ) es el resultado del movimiento aleatorio de las moléculas, lo que hace que la temperatura influya fuertemente en este y en proporciones menores la presión. El coeficiente de viscosidad dinámica ( $\mu$ ) se trabajó como en [19]:

$$\mu = \frac{C_1 T^{3/2}}{T + C_2} \quad (12)$$

donde  $T$  es la temperatura,  $C_1$  y  $C_2$  son constantes. Esta ecuación se considera válida por los grandes porcentajes de nitrógeno que poseen los gases en el escape y en donde las constantes  $C_1$  y  $C_2$  son:

$$C_1 = 1,458 \times 10^{-6} \left[ \frac{kg}{ms\sqrt{K}} \right]$$

$$C_2 = 110,4[K]$$

El esfuerzo cortante debido a la fricción con las paredes del ducto se trabajará según [14] como:

$$\tau = C_f \frac{\rho u^2}{2} \quad (13)$$

donde  $C_f$  es el coeficiente de fricción de Fanning definido como:

$$C_f = \frac{f}{4} \quad (124)$$

donde  $f$  es el factor de fricción de Darcy–Weisbach que se puede encontrar por medio de la ecuación de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2,0 * \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (15)$$

El valor de  $f$  en la ecuación (15) aparece de forma implícita por lo que se utilizará el Método de Newton Raphson para encontrar el valor de  $f$  y como primera iteración se utilizará la relación de Haaland explicita aproximada como:

$$f = \frac{1}{\left\{ -1,8 * \log \left[ \frac{6,9}{Re} + \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right)^{1,11} \right] \right\}^2} \quad (16)$$

donde  $\varepsilon$  y  $D$  son la rugosidad y el diámetro del ducto respectivamente y  $Re$  es el número de Reynolds que se define como:

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} \quad (17)$$

Ahora considerando el lado derecho de la ecuación (6), la masa del fluido dentro del VC está dada por:

$$m = \rho \, dx \, dy \, dz \quad (18)$$

La aceleración del VC es el cambio de la velocidad en el tiempo, la componente de la aceleración en dirección  $x$ , denotada por  $a_x$  es simplemente el cambio de  $u$  en el tiempo, y debido a que se está considerando un VC que se mueve con el fluido, el cambio de la velocidad está definido por la derivada sustancial:

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \quad (19)$$

Reemplazando las ecuaciones (10), (18) y (19) en (6) se tiene:

$$\left[ -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right] dx \, dy \, dz - \tau P dx = (\rho \, dx \, dy \, dz) \left( \frac{Du}{Dt} \right)$$

Simplificando y reagrupando nos da:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\tau P}{dy \, dz} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \quad (20)$$

La ecuación (20) es una ecuación en derivadas parciales obtenida directamente a partir de una aplicación del principio fundamental a un VC infinitesimal. Sin embargo, debido a que el VC se está movimiento con el flujo, la ecuación (20) está expresada en forma no conservativa, para escribirla en forma conservativa se utiliza la definición de la derivada sustancial:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla u \quad (21)$$

Expandiendo la siguiente derivada:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Y reagrupando,

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (22)$$

Recordando el vector identidad para la divergencia del producto de un escalar por un vector:

$$\nabla \cdot (\rho u \vec{V}) = u \nabla \cdot (\rho \vec{V}) + (\rho \vec{V}) \cdot \nabla u$$

Reagrupando:

$$(\rho \vec{V}) \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) - u \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \quad (23)$$

Sustituyendo las ecuaciones (22) y (23) en la ecuación (21) se tiene:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) - u \nabla \cdot (\rho \vec{V})$$

ó

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] + \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) \quad (24)$$

Escribiendo la ecuación (24) para un flujo unidimensional:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} \quad (25)$$

donde el término entre corchetes en la ecuación (25) es el lado izquierdo de la ecuación de la conservación de la masa o ecuación de continuidad dada en la ecuación (5); por lo que este término es igual a cero. Entonces, la ecuación (25) se reduce a:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} \quad (26)$$

Sustituyendo la ecuación (26) en la ecuación (20) nos da la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento en forma conservativa como:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\tau P}{dy dz} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \quad (27)$$

### 3.2.3 Ecuación de la energía.

Ahora se aplicará el principio físico donde la energía se conserva. Para la deducción de la ecuación de la energía se usará un VC infinitesimal que se mueve con el flujo (como se hizo con la ecuación de la cantidad de movimiento). El principio físico que la energía se conserva es nada más que *la primera ley de la termodinámica*. Cuando se aplica al modelo de flujo de un VC infinitesimal moviéndose con el flujo, la primera ley establece que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de energía} \\ \text{dentro del VC} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo neto de calor} \\ \text{dentro del VC} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Trabajo realizado sobre} \\ \text{el VC debido a las} \\ \text{fuerzas de superficie} \end{array} \right\} \quad (28)$$

Primero se evaluará el cambio de energía dentro del VC con el tiempo. En la termodinámica clásica, generalmente se trabaja con sistemas estacionarios, en este caso, la energía que aparece en la formulación de la primera ley de la

termodinámica es la *energía interna*. La *energía interna* es simplemente la energía de cada molécula o átomo, sumada en todos los átomos y moléculas del sistema. Ahora, considerando un medio en movimiento, el término energía incluido en el cambio de la energía dentro del VC debe considerar la energía producto del movimiento del VC. Entonces, el fluido tiene dos contribuciones a su energía:

- La energía interna debida al movimiento molecular aleatorio,  $e$  (por unidad de masa).
- La energía cinética debido al movimiento traslacional del elemento fluido. La energía cinética por unidad de masa es  $V^2/2$ .

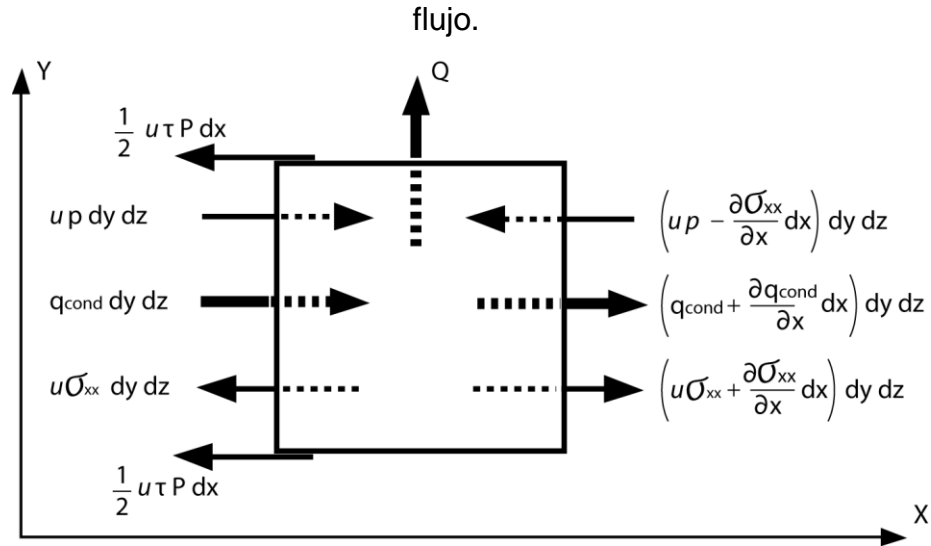
Entonces, el VC en movimiento tiene energía cinética y energía interna; de manera que la suma de ellas representa la energía total. La energía total es entonces  $e + V^2/2$ . Debido a que se está analizando un VC que se mueve con el flujo, el cambio de energía por unidad de masa está determinado por la derivada sustancial. Si la masa del VC es  $\rho dx dy dz$ , se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de energía} \\ \text{dentro del VC} \end{array} \right\} = \rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{V^2}{2} \right) dx dy dz \quad (29)$$

Ahora se centrará la atención en el flujo neto de calor dentro del VC. El flujo de calor es debido:

- Calentamiento volumétrico, tal como la absorción o emisión de radiación.
- Transferencia de calor a través de las superficies, debido a gradientes de temperatura, como el caso de conducción y convección térmica.

Figura 8. Flujos de energía asociados a un VC infinitesimal que se mueve con el



Fuente: Autor.

En la Figura 8, el calor transferido por conducción térmica entrando al VC en movimiento es  $q_{cond} dx dy dz$ , y el calor transferido neto dentro del VC es:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo neto de calor} \\ \text{dentro del VC} \end{array} \right\} &= - \left[ q_{cond} - \left( q_{cond} + \frac{\partial q_{cond}}{\partial x} dx \right) \right] dy dz - Q \\ &= - \frac{\partial q_{cond}}{\partial x} dx dy dz - Q \end{aligned} \quad (30)$$

donde  $Q$  es la transferencia de calor desde el fluido hacia el entorno y según [33] el aporte generado por  $q_{cond}$  se puede despreciar, quedando la ecuación (30) como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo neto de calor} \\ \text{dentro del VC} \end{array} \right\} = -Q \quad (31)$$

La transferencia de calor desde el fluido hacia el entorno se puede observar en la Figura 9, donde  $Q$  esta dado por:

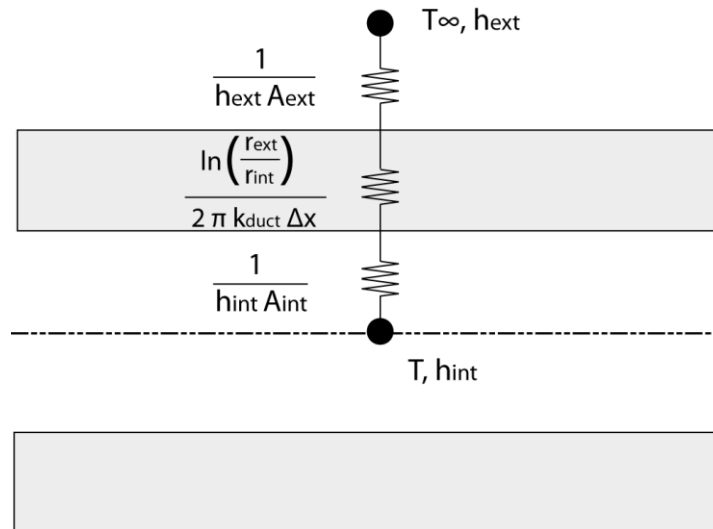
$$Q = \frac{(T - T_{\infty})}{\frac{1}{UA}} \quad (32)$$

donde  $T_{\infty}$  es la temperatura exterior,  $A$  es el área que es igual al perímetro por el ancho del VC,  $\frac{1}{UA}$  la resistencia global,  $U$  es el coeficiente global de transferencia de calor y  $UA$  está dado por:

$$UA = \frac{1}{\frac{1}{h_{int}A_{int}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{int}}\right)}{2\pi k_{duct}\Delta x} + \frac{1}{h_{ext}A_{ext}}} \quad (33)$$

donde  $h_{int}$  es el coeficiente de calor convectivo del fluido interior,  $r_{ext}$  y  $r_{int}$  son el radio exterior e interior del ducto respectivamente,  $k_{duct}$  es la conductividad térmica del ducto,  $h_{ext}$  es el coeficiente de calor convectivo del fluido exterior,  $A_{int}$  y  $A_{ext}$  son el área interior y exterior respectivamente y  $\Delta x$  es el ancho del VC.

Figura 9. Transferencia de calor desde el fluido hacia el entorno.



Fuente: Autor.

La conductividad térmica  $k_{duct}$  se obtuvo haciendo una aproximación de los valores mediante un Rotational Model del programa CurveExpert Professional 1.5.0 con datos tomados de [31]:

$$k_{duct} = a + b * \cos(c * T_s + d) \quad (34)$$

donde  $T_s$  es la temperatura de la superficie del ducto y  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son constantes que toman los siguientes valores:

$$a = 38,76520772254727$$

$$b = 13,02153211692467$$

$$c = 0,003203816556341828$$

$$d = -0,831480724171671$$

El coeficiente de calor convectivo  $h_{int}$  está definido como:

$$h_{int} = \frac{Nu_{(int)}k_{int}}{D_{int}} \quad (35)$$

donde  $k_{int}$  es la conductividad térmica del fluido interior,  $D_{int}$  el diámetro interior del ducto y  $Nu_{(int)}$  es el número de Nusselt interior que se tomará de la relación de Gnielinski quien modifico la segunda ecuación de Petukhov como:

$$Nu_{(int)} = \frac{(f/8)(Re - 1000)P_r}{1 + 12,7(f/8)^{0,5}(P_r^{2/3} - 1)} \left( \begin{array}{l} 0,5 \leq P_r \leq 2000 \\ 3 \times 10^3 < Re < 5 \times 10^6 \end{array} \right) \quad (36)$$

donde  $P_r$  es el número de Prandtl.

El coeficiente de calor convectivo del fluido exterior  $h_{ext}$  se encuentra como:

$$h_{ext} = \frac{N_{uT(ext)}k_{ext}}{D_{ext}} \quad (37)$$

donde  $k_{ext}$  es la conductividad térmica del fluido exterior,  $D_{ext}$  el diámetro exterior del ducto y  $N_{uT(ext)}$  es el número de Nusselt total exterior. Para el fluido exterior se deben evaluar las propiedades a la temperatura de película definida como:

$$T_f = \frac{1}{2}(T_s + T_\infty) \quad (38)$$

donde  $T_f$  es la temperatura de la película.

El número de Nusselt total exterior se expresa como:

$$N_{uT(ext)} = (N_{uF(ext)}^n + N_{uN(ext)}^n)^{1/n} \quad (39)$$

donde  $N_{uF(ext)}$  es el Nusselt para convección forzada,  $N_{uN(ext)}$  es el Nusselt para convección natural y  $n$  es un número entre 3 y 4 dependiendo de la configuración geométrica. Se ha observado que  $n = 3$  correlaciona bien con los datos experimentales para superficies verticales y los valores más grandes de  $n$  resultan más apropiados para las superficies horizontales. Para el presente proyecto se supondrá que la disposición del ducto es de forma horizontal por lo que se tomará para  $n$  un valor de 4.

Para el  $N_{uF(ext)}$  se tomará de la relación propuesta por Churchill y Bernstein como:

$$N_{uF(ext)} = 0,3 + \frac{0,62Re^{1/2}P_r^{1/3}}{[1 + (0,4/P_r)^{2/3}]^{1/4}} \left[ 1 + \left( \frac{Re}{282000} \right)^{5/8} \right]^{4/5} \quad (P_r > 0,2) \quad (40)$$

Y para el  $N_{uN(ext)}$  se tomará como:

$$N_{uN(ext)} = \left[ 0,6 + \frac{0,387R_a^{1/6}}{\left[ 1 + \left( \frac{0,559}{P_r} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right]^2 \quad (R_a \leq 10^{12}) \quad (41)$$

donde  $R_a$  es el número de Rayleigh definido como:

$$R_a = G_r P_r \quad (42)$$

donde  $G_r$  es el número de Grashof dado como:

$$G_r = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)D_{ext}^3}{\nu^2} \quad (43)$$

donde  $g$  es la gravedad,  $\beta$  es el coeficiente de expansión volumétrica y  $\nu$  es la viscosidad cinemática. El coeficiente de expansión volumétrica para gases ideales se define como:

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (44)$$

La viscosidad cinemática es:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (45)$$

El número de Prandtl ( $P_r$ ) se define como:

$$P_r = \frac{\mu C_p}{k} \quad (46)$$

donde  $C_p$  es el calor específico a presión constante:

$$C_p = \left( \frac{a + bT + cT^2 + dT^3}{M} \right) \quad (47)$$

donde  $M$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son la masa molar y las constantes características del aire respectivamente:

$$M = 28,97 \text{ (kg/kmol)}$$

$$a = 28,11$$

$$b = 0,1967 \times 10^{-2}$$

$$c = 0,4802 \times 10^{-5}$$

$$d = -1,966 \times 10^{-9}$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  se tomaron de [13] y se cumplen para un rango de temperatura de:

$$273 \text{ (K)} \leq T \leq 1800 \text{ (K)}$$

La conductividad térmica del fluido interior y exterior ( $k_{int}$  y  $k_{ext}$ ) se obtuvo haciendo una aproximación de los valores mediante un Rotational Model del programa CurveExpert Professional 1.5.0 con datos tomados de [14] para aire como gas ideal, dicha aproximación dio la ecuación (48) y en la Figura 10 se observa la gráfica en el programa CurveExpert para dichos datos:

$$k_{int} = k_{ext} = \frac{a + bT}{1 + cT + dT^2} \quad (48)$$

donde las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son las siguientes:

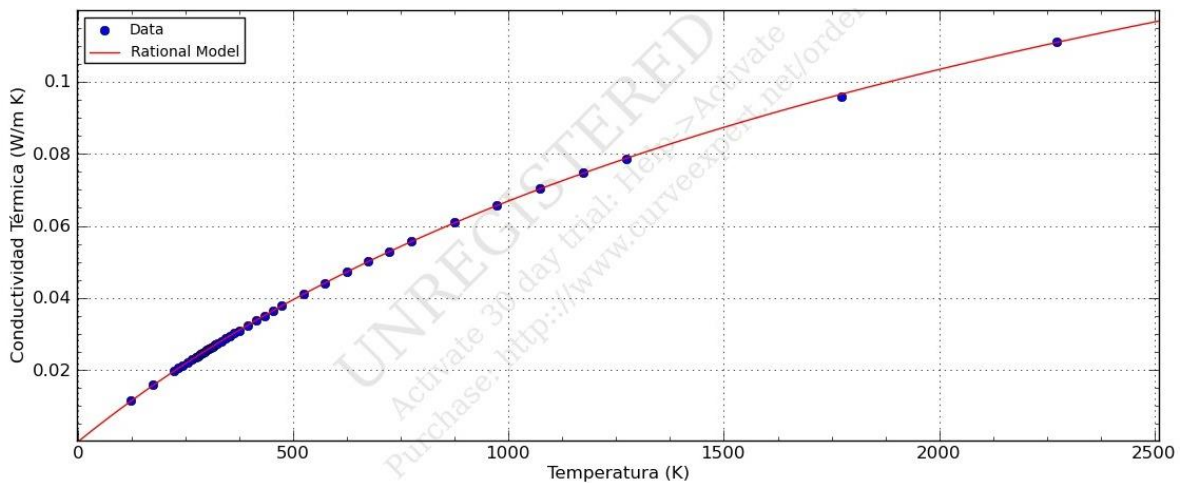
$$a = 0,000174468698265576$$

$$b = 0,00009680018097764748$$

$$c = 0,0004612649785231345$$

$$d = -0,00000001210055011777511$$

Figura 10. Variación de la conductividad Térmica del aire como gas ideal en función de la Temperatura.



Fuente: Autor.

Finalmente se abordará el trabajo realizado sobre el VC debido a las fuerzas de superficie. El trabajo realizado por las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo en movimiento es igual al producto de la fuerza y la componente de la velocidad en dirección de la fuerza, por ejemplo, el trabajo realizado por  $\sigma_{xx} dy dz$  es  $u\sigma_{xx} dy dz$ .

El fluido en movimiento se mostró en la Figura 8 donde se observa explícitamente el trabajo realizado sobre cada una de las caras debido a las fuerzas de superficie en la dirección del flujo.

Considerando todas las fuerzas de superficie mostradas en la Figura 8, el trabajo neto sobre el VC en movimiento es:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} \text{Trabajo realizado sobre} \\ \text{el VC debido a las} \\ \text{fuerzas de superficie} \end{array} \right\} \\
& = \left[ up - \left( up + \frac{\partial(up)}{\partial x} dx \right) \right] dy dz \\
& + \left[ \left( u\sigma_{xx} + \frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x} dx \right) - u\sigma_{xx} \right] dy dz - u\tau P dx
\end{aligned}$$

Simplificando y agrupando términos semejantes se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trabajo realizado sobre} \\ \text{el VC debido a las} \\ \text{fuerzas de superficie} \end{array} \right\} = \left[ -\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x} \right] dx dy dz - u\tau P dx \quad (49)$$

La forma final de la ecuación de la energía se obtiene sustituyendo las ecuaciones (29), (31) y (49) y en la ecuación (27):

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{V^2}{2} \right) dx dy dz = -Q + \left[ -\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x} \right] dx dy dz - u\tau P dx$$

Simplificando y organizando se obtiene:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{V^2}{2} \right) = -\frac{\partial(pu)}{\partial x} - \frac{u\tau P}{dy dz} - \frac{Q}{dx dy dz} + \frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x} \quad (50)$$

La ecuación anterior es la forma no conservativa de la ecuación de la energía, en términos de la energía total  $e + V^2/2$ . La ecuación en forma no conservativa resultante se obtuvo a partir de la aplicación de los principios físicos a un VC en movimiento. Como en el caso de la ecuación de la cantidad de movimiento, la ecuación (50) se puede presentar de forma conservativa.

Repitiendo los mismos pasos realizados desde la ecuación (21) a (26) como se muestra a continuación:

$$\rho \frac{D(e + V^2/2)}{Dt} = \rho \frac{\partial(e + V^2/2)}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \quad (51)$$

Expandiendo la siguiente derivada:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \right] = \rho \frac{\partial(e + V^2/2)}{\partial t} + \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Y reagrupando,

$$\rho \frac{\partial(e + V^2/2)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \right] - \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (52)$$

Recordando el vector identidad para la divergencia del producto de un escalar por un vector,

$$\nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \right] = \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \nabla \cdot (\rho \vec{V}) + (\rho \vec{V}) \cdot \nabla \left( e + \frac{V^2}{2} \right)$$

Reagrupando:

$$(\rho \vec{V}) \cdot \nabla \left( e + \frac{V^2}{2} \right) = \nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \right] - \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \quad (53)$$

Sustituyendo las ecuaciones (52) y (53) en la ecuación (50) se tiene:

$$\rho \frac{D(e + V^2/2)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \right] - \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \right] - \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \nabla \cdot (\rho \vec{V})$$

ó

$$\rho \frac{D(e + V^2/2)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \right] - \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \right] \quad (54)$$

Escribiendo la ecuación (54) para un flujo unidimensional:

$$\rho \frac{D(e + V^2/2)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \right] - \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) u \right] \quad (55)$$

donde el término  $\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right]$  en la ecuación (55) es el lado izquierdo de la ecuación de la conservación de la masa o ecuación de continuidad dada en la ecuación (5); por lo que este término es igual a cero. Reemplazando  $V^2$  por  $u^2$  en la ecuación (55) se tiene:

$$\rho \frac{D(e + u^2/2)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) u \right] \quad (56)$$

Sustituyendo la ecuación (56) en la ecuación (50) nos da la forma conservativa de la ecuación de la energía:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) u \right] = - \frac{\partial (pu)}{\partial x} - \frac{u\tau P}{dy dz} - \frac{Q}{dx dy dz} + \frac{\partial (u\sigma_{xx})}{\partial x} \quad (57)$$

El sistema de ecuaciones formadas por (5), (27) y (57) forman un sistema de ecuaciones no lineales acopladas, y por lo tanto es muy difícil resolverlas analíticamente. Hasta la fecha no existe una solución general para estas ecuaciones, por ello en general su resolución implica recurrir al análisis numérico mediante mecánica de fluidos computacional (CFD).

### 3.2.4 Ecuaciones de cierre.

En este momento se tienen cinco incógnitas ( $\rho$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $T$  y  $e$ ) y solo tres ecuaciones principales (5), (27) y (57). El conjunto de ecuaciones se completa al incorporar dos ecuaciones algebraicas, una es la ecuación termodinámica de estado y la otra es la ecuación de estado fundamental.

- **Ecuación termodinámica de estado.**

Esta ecuación relaciona la densidad con la temperatura y la presión:

$$\rho = \rho(p, T)$$

Para un gas ideal se puede escribir de la siguiente forma:

$$p = \rho RT \quad (58)$$

donde  $R$  es la constante del aire definida como:

$$R = 0,287 \text{ (kJ/kg * K)}$$

- **Ecuación de estado fundamental.**

Esta ecuación relaciona la energía interna con la temperatura y la presión.

$$e = e(T, p)$$

donde se puede escribir de la siguiente forma:

$$e = h - \frac{p}{\rho} \quad (59)$$

donde  $h$  es la entalpía y se puede expresar como:

$$h = h^0 + \int_{T^0}^T C_p dT + \int_{P_1}^{P_2} \left( v - T \left( \frac{dv}{dT} \right)_P \right) dP \quad (60)$$

donde el tercer término de la ecuación(60), la integral con respecto a la presión, se vuelve cero para gases ideales, por lo tanto la ecuación queda:

$$h = h^0 + \int_{T^0}^T C_p dT \quad (61)$$

donde  $T^0$  es una temperatura de referencia,  $h^0$  es la entalpía de formación a la temperatura  $T^0$  y  $C_p$  se encuentra de la ecuación (47).

### 3.2.5 Ecuación diferencial general.

Para simplificar la forma de las ecuaciones (5), (27) y (57) se puede escribirla ecuación general que se muestra a continuación:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\phi V_x)}{\partial x} = -\frac{\partial(p\phi_1)}{\partial x} + S + \frac{\partial(\phi_2\sigma_{xx})}{\partial x} \quad (62)$$

donde los valores de  $\phi$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Representación generalizada de las ecuaciones de conservación.

ECUACIÓN	$\phi$	$\phi_1$	$\phi_2$	$S$
Continuidad	1	0	0	0
Cantidad de movimiento	$u$	1	1	$-\frac{\tau P}{dy dz}$
Energía	$e + \frac{u^2}{2}$	$u$	$u$	$-\frac{u\tau P}{dy dz} - \frac{Q}{dx dy dz}$

Fuente: Autor.

### 3.3 Discretización de las ecuaciones.

Para la discretización de las ecuaciones se necesita que el dominio físico del problema sea discretizado, asignando las variables dependientes a cada uno de los puntos discretos dentro del dominio de cálculo, obteniéndose en cada punto una ecuación algebraica que relaciona los valores de las variables de flujo para un conjunto de puntos (que llamaremos nodos). Dichas ecuaciones se obtienen de la ecuación diferencial que gobierna la variable y por lo tanto expresa la misma información física que la ecuación diferencial.

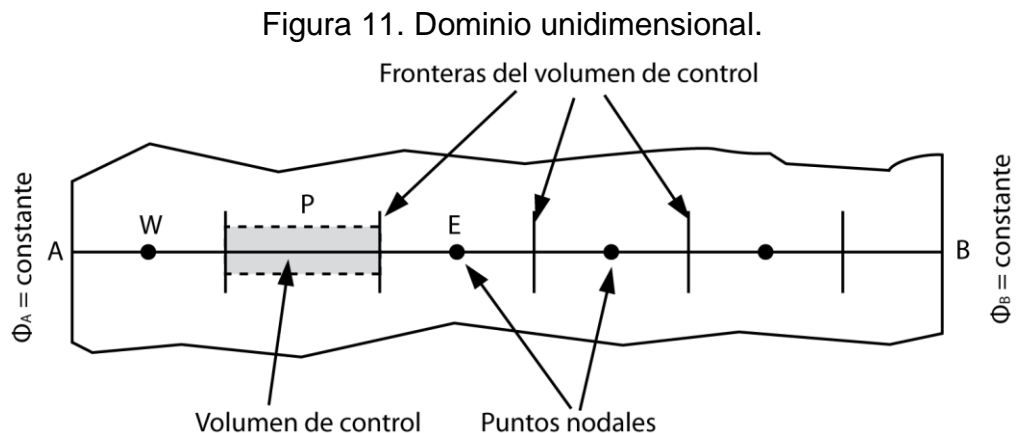
El valor de la variable en un nodo influye sobre la distribución de esta variable solamente en los nodos vecinos a este nodo. A medida que el número de nodos crece, la solución de las ecuaciones discretizadas debe tender a la solución exacta de la ecuación diferencial. Esta discretización es lo que hace posible el sustituir las ecuaciones diferenciales por ecuaciones algebraicas simples.

Existen al menos tres métodos numéricos para resolver problemas de mecánica de fluidos; Métodos de Diferencias Finitas (MDF), Métodos de Elementos Finitos (MEF) y Métodos de volúmenes finitos (MVF). Para el desarrollo del presente proyecto se trabajó con el MVF.

### 3.3.1 El método de volúmenes finitos.

El MVF divide el dominio de cálculo en un número determinado de volúmenes de control (VC) que no se solapan entre sí (como los mostrados en la Figura 11), tal que existe un VC en cada punto o nodo de la malla. Es decir, el nodo de la malla contiene la información (promedio) que representa al volumen de control que lo rodea y la ecuación en derivadas parciales se integra en cada uno de los volúmenes de control. Para evaluar estas integrales se asumen ciertos perfiles de variación de la variable. El resultado es la ecuación de discretización para cada uno de los volúmenes de control y relaciona el valor de la variable en distintos nodos.

La característica más atractiva del MVF es que este método es conservativo en cada VC y será conservativo en todo el dominio completo si se discretizan apropiadamente los flujos en los contornos de los VC. Esta característica está presente para cualquier número de puntos en la malla y no justo cuando el número de nodos llega a ser considerable. Aún cuando la malla sea burda, la solución exhibe balances integrales exactos.



Fuente: Fuentes, David, "Mecánica de fluidos computacional", Universidad Industrial de Santander, 2009.

Una ventaja del MVF es su directa aplicación al espacio físico y la fácil interpretación en mallas curvilíneas que permite usarse en mallas estructuradas y en mallas no estructuradas.

Cuando se trata de dominios móviles (deformación de la malla) la formulación del sistema se vuelve un poco más engorrosa, debido a que, al no ser constantes los dominios de integración, existen ciertos términos que no pueden ser extraídos directamente de las integrales y es necesario aplicar previamente el teorema del transporte de Reynolds. Para el desarrollo de este proyecto no se tendrá en cuenta la deformación de la malla debido a que la geometría en el múltiple de escape siempre será constante para un problema dado.

El MVF sigue los siguientes pasos para encontrar los valores de la variable en el dominio.

### **3.3.1.1 Generación de la malla.**

El primer paso en el MVF es dividir el dominio en VC discretos. Las ecuaciones de conservación (ecuaciones (5), (27) y (57)) se aplican a un VC que se define alrededor o entre los puntos de la malla. Las técnicas numéricas para la discretización espacial difieren esencialmente en la disposición de los VC y en la técnica de discretización.

- **Disposición de los volúmenes de control.**

La disposición de los volúmenes de control en un mallado puede definirse de diversas formas. Comúnmente se utilizan las disposiciones denominadas como centrada en la celda y la centrada en el vértice. En el caso de VC centrados en la celda las variables se definen en el centro de la misma. En el otro caso tanto las

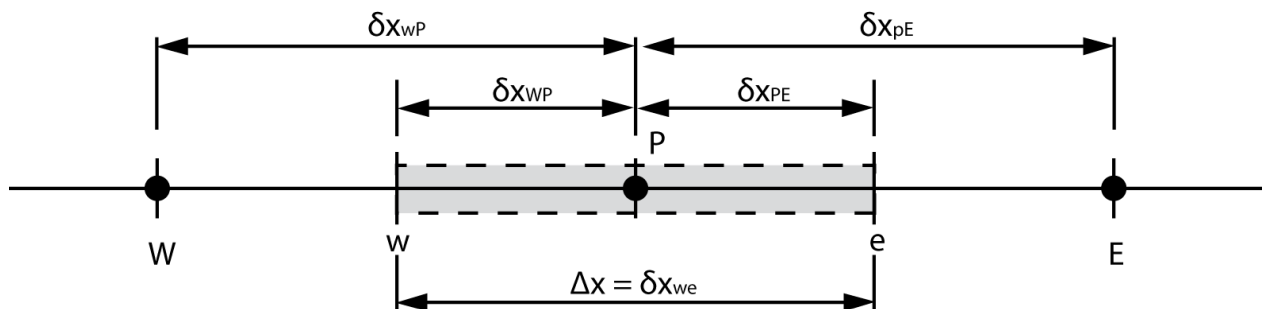
variables como la geometría se definen en los nodos del mallado. Estas disposiciones se extienden fácilmente a elementos triangulares y a mallas no estructuradas.

En una retícula cartesiana estos dos métodos de construir los volúmenes de control muestran obviamente la misma precisión, pero para un mallado curvilíneo presenta diferentes errores. Cerca de un contorno geométrico, los diferentes modos de construir el VC requieren diferentes técnicas para expresar la condición de contorno. Para el presente proyecto se trabajó con la disposición centrada en la celda como la mostrada en la Figura 11.

Para la disposición centrada en la celda se debe establecer una nomenclatura a los volúmenes en el espacio entre las fronteras A y B (ver Figura 11). Las fronteras (o caras) del VC quedan posicionadas en la parte media entre volúmenes adyacentes. Cada nodo está limitado por un VC o celda. Es una práctica común establecer VC cerca de la frontera de tal forma que las fronteras físicas coincidan con las fronteras del VC.

En la Figura 12 se muestra la convención usual en métodos de CFD para una malla unidimensional.

Figura 12. Convección en una malla unidimensional.



Fuente: Fuentes, David, "Mecánica de fluidos computacional", Universidad Industrial de Santander, 2009.

Un nodo general se identifica con la letra  $P$  y sus vecinos en una geometría unidimensional, los nodos al oeste y al este, se identifican con las letras  $W$  y  $E$  respectivamente. La cara del lado oeste del VC está definida con la letra  $w$ , mientras que la de la cara este con la letra  $e$ . Las distancias entre los nodos  $W$  y  $P$ , y entre los nodos  $P$  y  $E$ , se identifican por  $\delta x_{WP}$  y  $\delta x_{PE}$  respectivamente. Similarmente, las distancias entre la cara  $w$  y el punto  $P$  y la cara  $e$  y el punto  $P$  se definen como  $\delta x_{wP}$  y  $\delta x_{Pe}$  respectivamente. La Figura 11 muestra el VC con ancho igual a  $\Delta x = \delta x_{we}$ .

### 3.3.1.2 Discretización de las ecuaciones por el MVF.

El paso clave del MVF es la integración de las ecuaciones que rigen el comportamiento de la propiedad en un VC para obtener una ecuación discretizada en su punto nodal  $P$ . Aplicando el MVF a la ecuación diferencial general (62) queda:

$$\begin{aligned}
& \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{VC} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{VC} \frac{\partial(\rho\phi u)}{\partial x} dV \right] dt \\
& = - \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{VC} \frac{\partial(p\phi_1)}{\partial x} dV \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{VC} S dV \right] dt \\
& + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{VC} \frac{\partial(\phi_2\sigma_{xx})}{\partial x} dV \right] dt
\end{aligned} \tag{63}$$

Volviendo a escribir la ecuación (63) en las ecuaciones de conservación, reemplazando el valor de  $\sigma_{xx}$  dado por la ecuación (11), aplicando el MVF, integrando espacialmente y ordenando se tiene:

- Ecuación de continuidad:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{V_C} \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dV \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{V_C} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dV \right] dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} [\rho \Delta V] dt = \int_t^{t+\Delta t} [A(\rho u)_w - A(\rho u)_e] dt \quad (64)$$

- Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{V_C} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dV \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{V_C} \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} dV \right] dt$$

$$= - \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{V_C} \frac{\partial(p)}{\partial x} dV \right] dt - \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{V_C} \left( \frac{\tau P}{dy dz} \right) dV \right] dt$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{V_C} \frac{\partial(\sigma_{xx})}{\partial x} dV \right] dt$$

$$\Rightarrow \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} [\rho u \Delta V] dt$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} [A(\rho u u)_w - A(\rho u u)_e] dt + \int_t^{t+\Delta t} [A(p)_w - A(p)_e] dt - \int_t^{t+\Delta t} [\tau P \Delta x] dt$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} \frac{4}{3} \left[ A \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - A \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \right] dt \quad (65)$$

- Ecuación de la energía:

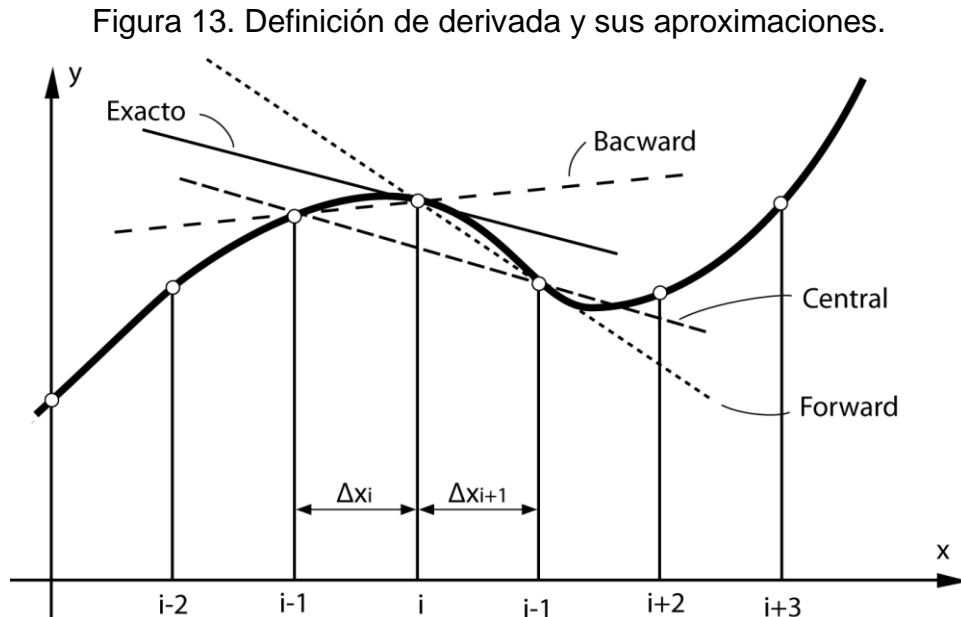
$$\begin{aligned}
& \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \right] dV \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{VC} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) u \right] dV \right] dt \\
&= - \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{VC} \frac{\partial (pu)}{\partial x} dV \right] dt - \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{VC} \left( \frac{u\tau P}{dy dz} \right) dV \right] dt \\
&\quad - \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{VC} \frac{Q}{dx dy dz} dV \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{VC} \frac{\partial (u\sigma_{xx})}{\partial x} dV \right] dt \\
\Rightarrow & \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \Delta V \right] dt \\
&= \int_t^{t+\Delta t} \left[ A \left( \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) u \right)_w - A \left( \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) u \right)_e \right] dt \\
&+ \int_t^{t+\Delta t} [A(pu)_w - A(pu)_e] dt - \int_t^{t+\Delta t} [u\tau P \Delta x] dt - \int_t^{t+\Delta t} [Q] dt \\
&+ \int_t^{t+\Delta t} \frac{4}{3} \left[ A \left( u\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - A \left( u\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \right] dt \tag{66}
\end{aligned}$$

donde  $VC$  indica la integración sobre el volumen de control y  $A$  es el área transversal del VC que para el presente trabajo es constante.

Observando las ecuaciones (65) y (66) aparece el término  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , para lo cual se tiene que saber la variación de la velocidad  $u$  con respecto a  $x$ , y para ello se utiliza la interpretación de la derivada.

- **Derivación.**

En la Figura 13 se muestra la interpretación geométrica de la derivada. La primera deriva  $\partial\phi/\partial x$  en el punto  $x_i$  es la pendiente de la línea tangente en este punto y en la Figura 13 se nombra como Exacto.



Fuente: Ferziger, J.H, "Computational Methods for Fluid Dynamics", Springer, 2002.

La pendiente en el punto  $x_i$  puede ser aproximada como la pendiente que pasa por dos puntos cercanos a la curva. La línea denominada como "Bacward" es una aproximación de la derivada en  $x_i$  usando una línea que pasa a través de los puntos  $x_{i-1}$  y  $x_i$ , la línea denominada como "Central" es una aproximación de la derivada en  $x_i$  usando una línea que pasa a través de los puntos  $x_{i-1}$  y  $x_{i+1}$  y la línea denominada como "Forward" es una aproximación de la derivada en  $x_i$  usando una línea que pasa a través de los puntos  $x_i$  y  $x_{i+1}$ .

Por lo tanto se puede reemplazar la derivada parcial  $\partial\phi/\partial x$  de una variable  $\phi$  en un punto  $x_i$  mediante:

- Diferencia Bacward (Bacward Difference Schemes (BDS)):

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + O(\Delta x) \quad (67)$$

- Diferencia Centrada (Central Difference Schemes (CDS)):

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + O(\Delta x)^2 \quad (68)$$

- Diferencia Forward (Forward Difference Schemes (FDS)):

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} + O(\Delta x) \quad (69)$$

donde el símbolo  $O(\Delta x)$  es una notación matemática que representa “términos de orden  $\Delta x$ ” que para el caso de la Diferencia Bacward y Forward es de primer orden de exactitud y para la Diferencia Centrada es de segundo orden de exactitud.

Reemplazando las derivadas espaciales de la forma  $\frac{\partial\phi}{\partial x}$  por una Diferencia Centrada de segundo orden como la mostrada en la ecuación (68) y utilizando la nomenclatura de CFD en las ecuaciones (64), (65) y (66) se tiene:

- Ecuación de continuidad:

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} [\rho\Delta V] dt = \int_t^{t+\Delta t} [A(\rho u)_w - A(\rho u)_e] dt \quad (70)$$

- Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned}
& \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} [\rho u \Delta V] dt \\
&= \int_t^{t+\Delta t} [A(\rho u u)_w - A(\rho u u)_e] dt + \int_t^{t+\Delta t} [A(p)_w - A(p)_e] dt - \int_t^{t+\Delta t} [\tau P \Delta x] dt \\
&+ \int_t^{t+\Delta t} \frac{4}{3} \left[ A(\mu)_e \frac{(u)_E - (u)_P}{\delta x_{PE}} - A(\mu)_w \frac{(u)_P - (u)_W}{\delta x_{WP}} \right] dt \quad (71)
\end{aligned}$$

- Ecuación de la energía:

$$\begin{aligned}
& \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \Delta V \right] dt \\
&= \int_t^{t+\Delta t} \left[ A \left( \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) u \right)_w - A \left( \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) u \right)_e \right] dt \\
&+ \int_t^{t+\Delta t} [A(pu)_w - A(pu)_e] dt - \int_t^{t+\Delta t} [u\tau P \Delta x] dt - \int_t^{t+\Delta t} [Q] dt \\
&+ \int_t^{t+\Delta t} \frac{4}{3} \left[ A(u\mu)_e \frac{(u)_E - (u)_P}{\delta x_{PE}} - A(u\mu)_w \frac{(u)_P - (u)_W}{\delta x_{WP}} \right] dt \quad (72)
\end{aligned}$$

- **Discretización temporal.**

La integración temporal puede basarse en métodos explícitos o implícitos.

Los métodos explícitos tienen los algoritmos más simples, ya que se evalúa el operador de estado estacionario desde el estado inicial conocido, y el nuevo estado puede calcularse para cada celda, de forma desacoplada. Los métodos explícitos se adaptan bien a mallas estructuradas y no estructuradas. La vectorización y paralelización del algoritmo se hace de manera simple. Sin embargo, el paso temporal de un método explícito viene condicionado por la estabilidad numérica, en función de la mayor velocidad de onda presente, y en flujos viscosos en función del número de Reynolds de la celda.

Los métodos implícitos tienen la ventaja de ser incondicionalmente estables, o por lo menos permiten un paso temporal mucho más grande que los métodos explícitos. Pero el costo computacional por cada paso temporal es mucho más alto, debido a la inversión de matrices de gran tamaño. La estructura recursiva de los algoritmos de inversión es una desventaja para la vectorización y paralelización de los métodos implícitos. Pero actualmente los métodos implícitos pueden vectorizarse con el mismo alto grado de eficiencia que los métodos explícitos con algoritmos apropiados, compiladores optimizados y suficiente capacidad de memoria.

Para este trabajo se utilizará el método implícito por las ventajas respecto al método explícito, además se usará una Diferencia Forward de primer orden como la mostrada en la ecuación (69) para la derivada parcial en el tiempo, por lo tanto los primeros términos en las ecuaciones de (70), (71) y (72) quedan de la siguiente forma:

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} [\phi] dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{(\phi)_P^{t+\Delta t} - (\phi)_P^t}{\Delta t} \right] dt = (\phi)_P^{t+\Delta t} - (\phi)_P^t \quad (73)$$

donde el subíndice  $P$  denota los valores para el nodo  $P$ , los superíndices  $t$  y  $t + \Delta t$  denotan los valores para el tiempo y  $\frac{\partial}{\partial t} [\phi]$  se reemplazó por una Diferencia Forward de primer orden como  $\left[ \frac{(\phi)_P^{t+\Delta t} - (\phi)_P^t}{\Delta t} \right]$ .

También hay que realizar las otras integrales con respecto al tiempo en las ecuaciones (70), (71) y (72), para ello es necesario asumir cierta variación de las variables respecto del tiempo. Se pueden usar las variables en el tiempo  $t$  o  $\Delta t$  para calcular la integral temporal o una combinación de las variables en los tiempos  $t$  y  $\Delta t$ . En este punto se generalizará la solución introduciendo un parámetro  $\theta$  entre 0 y 1 y entonces se puede escribir las integrales  $I_\phi$  de las variables  $\phi$  respecto del tiempo como:

$$I_\phi = \int_t^{t+\Delta t} [\phi] dt = [\theta \phi_P^{t+\Delta t} + (1 - \theta) \phi_P^t] \Delta t \quad (74)$$

de donde, de acuerdo al valor de  $\theta$  la ecuación (74) tendrá los valores mostrados en la Tabla 2.

Tabla 2. Valores de la integral de  $I_\phi$  de acuerdo al valor de  $\theta$ .

$\theta$	<b>1</b>	<b>1/2</b>	<b>0</b>
$I_\phi$	$\phi_P^{t+\Delta t} \Delta t$	$\frac{1}{2} (\phi_P^{t+\Delta t} + \phi_P^t) \Delta t$	$\phi_P^t \Delta t$

Fuente: Fuentes, David, "Mecánica de fluidos computacional", Universidad Industrial de Santander, 2009.

En la Tabla 2 se han destacado los valores de la integral  $I_\theta$  para  $\theta$  de manera que si  $\theta = 0$  se usa la variable en el tiempo  $t$  (anterior) y el esquema resultante se conoce como esquema explícito, si  $\theta = 1/2$  se usa un promedio entre la variables en el tiempo  $t$  y en el tiempo  $t + \Delta t$  y el esquema resultante se conoce como esquema implícito, finalmente si  $\theta = 1$  se usa la variable en el tiempo  $t + \Delta t$  y el esquema resultante se conoce como esquema completamente implícito. Siguiendo con la elección del método implícito donde  $\theta = 1$  y la ecuación (74) tomaría la siguiente forma:

$$I_\theta = \int_t^{t+\Delta t} [\emptyset] dt = \emptyset_P^{t+\Delta t} \Delta t \quad (75)$$

De esta forma, sabiendo cómo se van a discretizar las ecuaciones (70), (71) y (72) tanto espacial como temporalmente se pueden expresar de la siguiente manera:

- Ecuación de continuidad:

$$[(\rho)_P^{t+\Delta t} - (\rho)_P^t] \Delta V = [A(\rho u)_W^{t+\Delta t} - A(\rho u)_E^{t+\Delta t}] \Delta t \quad (76)$$

- Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} & [(\rho u)_P^{t+\Delta t} - (\rho u)_P^t] \Delta V \\ &= [A(\rho u u)_W^{t+\Delta t} - A(\rho u u)_E^{t+\Delta t}] \Delta t + [A(p)_W^{t+\Delta t} - A(p)_E^{t+\Delta t}] \Delta t \\ &- [P(\tau)_P^{t+\Delta t}] \Delta x \Delta t \\ &+ \frac{4}{3} \left[ \frac{A(\mu)_E^{t+\Delta t} [(u)_E^{t+\Delta t} - (u)_P^{t+\Delta t}]}{\delta x_{PE}} \right. \\ &\left. - \frac{A(\mu)_W^{t+\Delta t} [(u)_P^{t+\Delta t} - (u)_W^{t+\Delta t}]}{\delta x_{WP}} \right] \Delta t \end{aligned} \quad (77)$$

- Ecuación de la energía:

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \right)_P^{t+\Delta t} - \left( \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \right)_P^t \right] \Delta V \\
& = \left[ A \left( \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) u \right)_w^{t+\Delta t} - A \left( \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) u \right)_e^{t+\Delta t} \right] \Delta t \\
& + [A(pu)_w^{t+\Delta t} - A(pu)_e^{t+\Delta t}] \Delta t - [P(u\tau)_P^{t+\Delta t}] \Delta x \Delta t - Q^{t+\Delta t} \Delta t \\
& + \frac{4}{3} \left[ \frac{A(u\mu)_e^{t+\Delta t} [(u)_E^{t+\Delta t} - (u)_P^{t+\Delta t}]}{\delta x_{PE}} \right. \\
& \left. - \frac{A(u\mu)_w^{t+\Delta t} [(u)_P^{t+\Delta t} - (u)_W^{t+\Delta t}]}{\delta x_{WP}} \right] \Delta t \tag{78}
\end{aligned}$$

En las ecuaciones (76), (77) y (78) se tienen los valores de las variables no solo en los nodos sino también en las fronteras  $w$  y  $e$ , para ello se debe realizar una interpolación de los valores de las propiedades con los nodos adyacentes a las fronteras.

- **Interpolación.**

En las ecuaciones (76), (77) y (78) se requiere el valor de las variables en otros puntos diferentes a los nodos (como son en las fronteras  $w$  y  $e$ ) y la forma de encontrar estos valores es haciendo una interpolación.

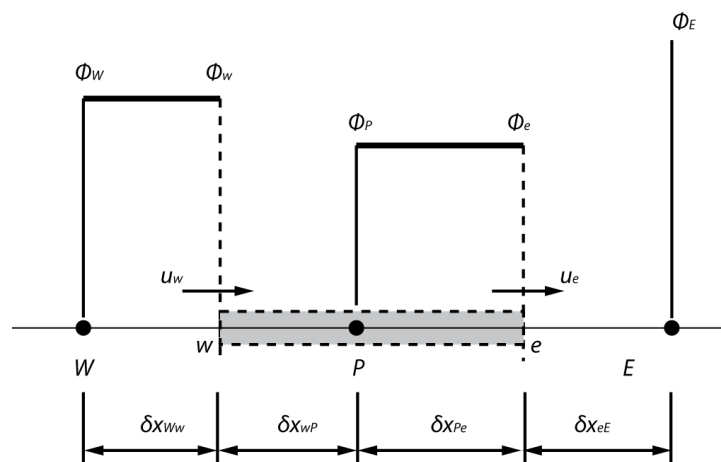
Existen numerosas posibilidades para realizar tal interpolación entre las que se encuentran:

- Interpolación upwind.
- Interpolación lineal.

- Interpolación upwind cuadrática.
- Interpolaciones de mayor orden.

Para nuestro problema se escoge una interpolación upwind que aproxima el valor de  $\phi$  en la frontera por el valor de  $\phi$  aguas arriba como se muestra en la Figura 14.

Figura 14. Esquema para la interpolación upwind cuando el flujo va en dirección positiva.



Fuente: Fuentes, David, "Mecánica de fluidos computacional", Universidad Industrial de Santander, 2009.

Los valores de  $\phi$  para las diferentes fronteras se tiene:

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & \text{si } (\vec{V} \cdot \vec{n})_e > 0 \\ \phi_E & \text{si } (\vec{V} \cdot \vec{n})_e < 0 \end{cases} \quad (79)$$

$$\phi_w = \begin{cases} \phi_W & \text{si } (\vec{V} \cdot \vec{n})_e > 0 \\ \phi_P & \text{si } (\vec{V} \cdot \vec{n})_e < 0 \end{cases} \quad (80)$$

Para nuestro caso se tiene que  $(\vec{V} \cdot \vec{n})_e > 0$ , por lo que el valor de  $\phi_e$  se tomará como  $\phi_p$  y el valor de  $\phi_w$  como  $\phi_w$ .

Expresando la ecuación de la energía en función de la entalpia y utilizando el método upwind en las ecuaciones (76), (77) y (78) se tiene:

- Ecuación de continuidad:

$$[(\rho)_p^{t+\Delta t} - (\rho)_p^t] \Delta V = [A(\rho)_w^{t+\Delta t} (u)_w^{t+\Delta t} - A(\rho)_p^{t+\Delta t} (u)_e^{t+\Delta t}] \Delta t \quad (81)$$

- Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} & [(\rho u)_p^{t+\Delta t} - (\rho u)_p^t] \Delta V \\ &= [A(\rho)_w^{t+\Delta t} (u)_w^{t+\Delta t} (u)_w^{t+\Delta t} - A(\rho)_p^{t+\Delta t} (u)_e^{t+\Delta t} (u)_e^{t+\Delta t}] \Delta t \\ &+ [A(p)_w^{t+\Delta t} - A(p)_p^{t+\Delta t}] \Delta t - [P(\tau)_p^{t+\Delta t}] \Delta x \Delta t \\ &+ \frac{4}{3} \left[ \frac{A(\mu)_p^{t+\Delta t} [(u)_E^{t+\Delta t} - (u)_P^{t+\Delta t}]}{\delta x_{PE}} \right. \\ &\left. - \frac{A(\mu)_w^{t+\Delta t} [(u)_P^{t+\Delta t} - (u)_W^{t+\Delta t}]}{\delta x_{WP}} \right] \Delta t \end{aligned} \quad (82)$$

- Ecuación de la energía:

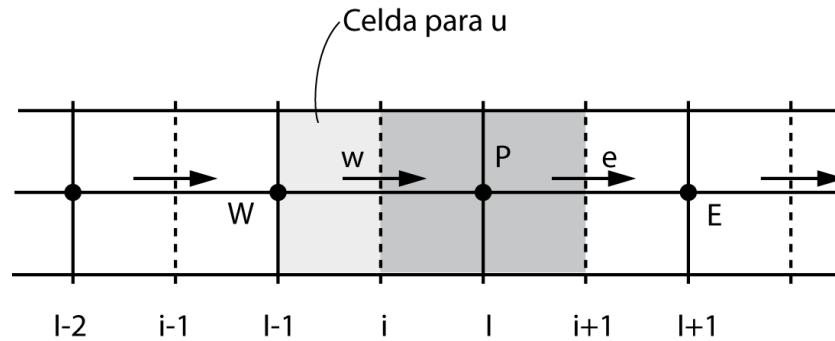
$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \rho \left( h + \frac{u^2}{2} \right) - p \right)_P^{t+\Delta t} - \left( \rho \left( h + \frac{u^2}{2} \right) - p \right)_P^t \right] \Delta V \\
& = \left[ A(\rho)_W^{t+\Delta t} (u)_W^{t+\Delta t} \left( (h)_W^{t+\Delta t} + \frac{(u^2)_W^{t+\Delta t}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - A(\rho)_P^{t+\Delta t} (u)_e^{t+\Delta t} \left( (h)_P^{t+\Delta t} + \frac{(u^2)_e^{t+\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta t - [P(u)_P^{t+\Delta t} (\tau)_P^{t+\Delta t}] \Delta x \Delta t \\
& \quad - Q^{t+\Delta t} \Delta t \\
& \quad + \frac{4}{3} \left[ \frac{A(\mu)_P^{t+\Delta t} (u)_e^{t+\Delta t} [(u)_E^{t+\Delta t} - (u)_P^{t+\Delta t}]}{\delta x_{PE}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{A(\mu)_W^{t+\Delta t} (u)_W^{t+\Delta t} [(u)_P^{t+\Delta t} - (u)_W^{t+\Delta t}]}{\delta x_{WP}} \right] \Delta t \tag{83}
\end{aligned}$$

### 3.4 La malla alternada.

Al almacenar las velocidades y las otras variables escalares como la presión y la temperatura en los mismos nodos del volumen de control se puede dar el caso que un campo de presión altamente no uniforme pueda actuar como un campo uniforme en las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad.

Un remedio a este problema es usar una malla alternada (o desplazada) para las componentes de la velocidad. La idea es evaluar las variables escalares como la presión y la temperatura en el centro del VC y la velocidad en una malla desplazada del VC como se muestra en la Figura 15.

Figura 15. Disposición de las variables en la malla alternada.



Fuente: Fuentes, David, “Mecánica de fluidos computacional”, Universidad Industrial de Santander, 2009.

Las variables escalares se guardan en los nodos marcados con (•) mientras que las velocidades están definidas en las caras de las celdas entre los nodos y están indicadas mediante flechas horizontales (→).

Una ventaja de la disposición de la malla alternada es que la solución proporciona las velocidades en los puntos exactos donde se requieren para los cálculos escalares de convección-difusión, de este modo no se necesita interpolar para calcular las velocidades en las caras de las celdas.

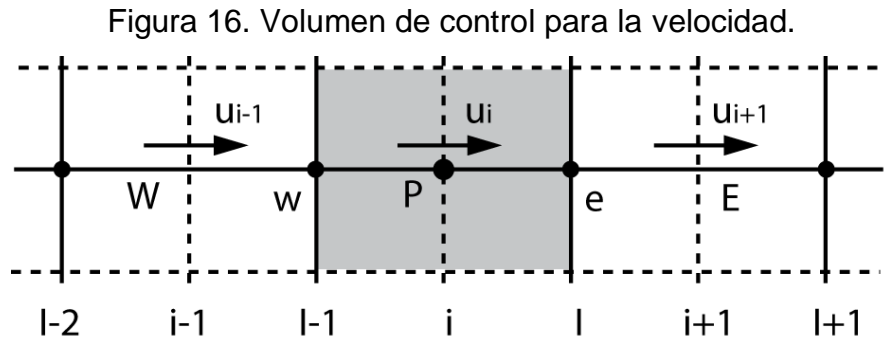
Esta ventaja tiene un precio ya que un programa de computador basado en una malla alternada debe acarrear con toda la indexación y la información de geometría sobre la localización de las componentes de la velocidad y debe ejecutar ciertas interpolaciones tediosas. Aun así, las ventajas de usar una malla alternada son mayores que los perjuicios que se pudieran presentar y es por esta razón que en el presente trabajo se tomara una malla alternada atrasada dado que la localización de la velocidad se encuentra a una distancia de  $-\frac{1}{2}\Delta x$  como se muestra en la Figura 15.

### 3.5 Algoritmo SIMPLE.

Los problemas con la no linealidad de las ecuaciones de cantidad de movimiento y el acoplamiento entre las ecuaciones de transporte se abordan adoptando una estrategia de solución iterativa como el algoritmo SIMPLE.

El algoritmo SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations) fue presentado inicialmente por Patankar y Spalding [32] y es esencialmente un procedimiento para la corrección de la estimación de la presión en una malla alternada.

El método se ilustra para un volumen de control como el mostrado en la Figura 16 en coordenadas cartesianas.



Fuente: Fuentes, David, "Mecánica de fluidos computacional", Universidad Industrial de Santander, 2009.

Planteando la ecuación de cantidad de movimiento para el volumen de control de la Figura 16 se tiene:

$$\begin{aligned}
& [(\rho u)_P^{t+\Delta t} - (\rho u)_P^t] \Delta V \\
&= [A(\rho u u)_e^{t+\Delta t} - A(\rho u u)_w^{t+\Delta t}] \Delta t + [A(p)_w^{t+\Delta t} - A(p)_e^{t+\Delta t}] \Delta t \\
&\quad - [P(\tau)_P^{t+\Delta t}] \Delta x \Delta t \\
&\quad + \frac{4}{3} \left[ \frac{A(\mu)_e^{t+\Delta t} [(u)_E^{t+\Delta t} - (u)_P^{t+\Delta t}]}{\delta x_{PE}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{A(\mu)_w^{t+\Delta t} [(u)_P^{t+\Delta t} - (u)_W^{t+\Delta t}]}{\delta x_{WP}} \right] \Delta t \tag{84}
\end{aligned}$$

Organizando y aplicando la interpolación upwind se tiene:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{(\rho)_w^{t+\Delta t} + (\rho)_e^{t+\Delta t}}{2} \right] \Delta V (u)_P^{t+\Delta t} - \left[ \frac{(\rho)_w^t + (\rho)_e^t}{2} \right] \Delta V (u)_P^t \\
&= \left[ A \Delta t (\rho)_e^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_P^{t+\Delta t} + (u)_E^{t+\Delta t}}{2} \right] \right] (u)_P^{t+\Delta t} \\
&\quad - \left[ A \Delta t (\rho)_w^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_W^{t+\Delta t} + (u)_P^{t+\Delta t}}{2} \right] \right] (u)_W^{t+\Delta t} \\
&\quad + [A(p)_w^{t+\Delta t} - (A)_e(p)_e^{t+\Delta t}] \Delta t - \Delta x \Delta t P \left[ \frac{(\tau)_w^{t+\Delta t} + (\tau)_e^{t+\Delta t}}{2} \right] \\
&\quad + \left[ \frac{4\Delta t}{3\Delta x} A(\mu)_e^{t+\Delta t} \right] (u)_E^{t+\Delta t} - \left[ \frac{4\Delta t}{3\Delta x} A(\mu)_e^{t+\Delta t} \right] (u)_P^{t+\Delta t} \\
&\quad - \left[ \frac{4\Delta t}{3\Delta x} A(\mu)_w^{t+\Delta t} \right] (u)_P^{t+\Delta t} + \left[ \frac{4\Delta t}{3\Delta x} A(\mu)_w^{t+\Delta t} \right] (u)_W^{t+\Delta t} \tag{85}
\end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes y organizando se tiene:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{4\Delta t}{3\Delta x} A(\mu)_w^{t+\Delta t} - A\Delta t(\rho)_w^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_W^{t+\Delta t} + (u)_P^{t+\Delta t}}{2} \right] \right] (u)_W^{t+\Delta t} \\
& + \left[ A\Delta t(\rho)_e^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_P^{t+\Delta t} + (u)_E^{t+\Delta t}}{2} \right] - \left[ \frac{(\rho)_w^{t+\Delta t} + (\rho)_e^{t+\Delta t}}{2} \right] \Delta V \right. \\
& \left. - \frac{4\Delta t}{3\Delta x} [A(\mu)_w^{t+\Delta t} + A(\mu)_e^{t+\Delta t}] \right] (u)_P^{t+\Delta t} + \left[ \frac{4\Delta t}{3\Delta x} A(\mu)_e^{t+\Delta t} \right] (u)_E^{t+\Delta t} \\
& = [A(p)_e^{t+\Delta t} - A(p)_w^{t+\Delta t}] \Delta t + \Delta x \Delta t P \left[ \frac{(\tau)_w^{t+\Delta t} + (\tau)_e^{t+\Delta t}}{2} \right] \\
& - \left[ \frac{(\rho)_w^t + (\rho)_e^t}{2} \right] \Delta V (u)_P^t \tag{86}
\end{aligned}$$

Expresando la ecuación (86) para una variable  $i$  (donde  $i$  da el número del nodo en el ducto) se tiene:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{4\Delta t}{3\Delta x} A(\mu)_{i-1}^{t+\Delta t} - A\Delta t(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_{i-1}^{t+\Delta t} + (u)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] \right] (u)_{i-1}^{t+\Delta t} \\
& + \left[ A\Delta t(\rho)_i^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_i^{t+\Delta t} + (u)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] - \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] \Delta V \right. \\
& \left. - \frac{4\Delta t}{3\Delta x} [A(\mu)_{i-1}^{t+\Delta t} + A(\mu)_i^{t+\Delta t}] \right] (u)_i^{t+\Delta t} + \left[ \frac{4\Delta t}{3\Delta x} A(\mu)_i^{t+\Delta t} \right] (u)_{i+1}^{t+\Delta t} \\
& = [A(p)_i^{t+\Delta t} - A(p)_{i-1}^{t+\Delta t}] \Delta t + \Delta x \Delta t P \left[ \frac{(\tau)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\tau)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] \\
& - \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^t + (\rho)_i^t}{2} \right] \Delta V (u)_i^t \tag{87}
\end{aligned}$$

Expresando la ecuación (87) en términos de coeficientes se tiene:

$$a_i(u)_{i-1}^{t+\Delta t} + b_i(u)_i^{t+\Delta t} + c_i(u)_{i+1}^{t+\Delta t} = d_i \quad (88)$$

donde los coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ , y  $d_i$  para la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento son:

$$a_i = \left[ \frac{4\Delta t}{3\Delta x} A(\mu)_{i-1}^{t+\Delta t} - A\Delta t(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_{i-1}^{t+\Delta t} + (u)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] \right] \quad (89)$$

$$b_i = \left[ A\Delta t(\rho)_i^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_i^{t+\Delta t} + (u)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] - \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] \Delta V \right. \\ \left. - \frac{4\Delta t}{3\Delta x} [A(\mu)_{i-1}^{t+\Delta t} + A(\mu)_i^{t+\Delta t}] \right] \quad (90)$$

$$c_i = \left[ \frac{4\Delta t}{3\Delta x} A(\mu)_i^{t+\Delta t} \right] \quad (91)$$

$$d_i = [A(p)_i^{t+\Delta t} - A(p)_{i-1}^{t+\Delta t}] \Delta t + \Delta x \Delta t P \left[ \frac{(\tau)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\tau)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] \\ - \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^t + (\rho)_i^t}{2} \right] \Delta V (u)_i^t \quad (92)$$

El objetivo del algoritmo SIMPLE es mejorar la estimación de la presión  $p^*$  tal que el campo de velocidad principal resultante este progresivamente más cerca de satisfacer la ecuación de continuidad. La propuesta es que la presión corregida se puede obtener a partir de:

$$p = p^* + p' \quad (93)$$

donde  $p'$  es la corrección de la presión. Ahora, se necesita conocer cuál es la respuesta de las componentes de la velocidad a estos cambios en la presión. Se pueden introducir las correspondientes correcciones de velocidad  $u'$  de forma similar:

$$u = u^* + u' \quad (94)$$

Con un campo de presión estimado  $p^*$ , se resuelve la ecuación de cantidad de movimiento (88) con lo que se obtienen la velocidad  $u^*$  por medio de:

$$a_i(u^*)_{i-1}^{t+\Delta t} + b_i(u^*)_i^{t+\Delta t} + c_i(u^*)_{i+1}^{t+\Delta t} = d_i^* \quad (95)$$

donde el coeficiente  $d_i^*$  es:

$$d_i^* = [A(p^*)_i^{t+\Delta t} - A(p^*)_{i-1}^{t+\Delta t}] \Delta t + \Delta x \Delta t P \left[ \frac{(\tau)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\tau)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] - \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^t + (\rho)_i^t}{2} \right] \Delta V (u)_i^t \quad (96)$$

La sustitución del campo correcto de presión  $p$  en las ecuaciones de cantidad de movimiento produce el campo correcto de velocidad  $u$ . La ecuación (88) vincula el campo correcto de velocidades con el campo correcto de presiones.

Restando la ecuación (95) de la ecuación (88) produce:

$$a_i[(u)_{i-1}^{t+\Delta t} - (u^*)_{i-1}^{t+\Delta t}] + b_i[(u)_i^{t+\Delta t} - (u^*)_i^{t+\Delta t}] + c_i[(u)_{i+1}^{t+\Delta t} - (u^*)_{i+1}^{t+\Delta t}] = d_i - d_i^* \quad (97)$$

donde  $d_i - d_i^*$  es:

$$d_i - d_i^* = A[(p)_i^{t+\Delta t} - (p^*)_i^{t+\Delta t}] - A[(p)_{i-1}^{t+\Delta t} - (p^*)_{i-1}^{t+\Delta t}] \quad (98)$$

Usando las fórmulas de corrección (93) y (94), la ecuación (97) se puede describir como:

$$a_i(u')_{i-1}^{t+\Delta t} + b_i(u')_i^{t+\Delta t} + c_i(u')_{i+1}^{t+\Delta t} = d_i' \quad (99)$$

donde el coeficiente  $d_i'$  es:

$$d_i' = A(p')_i^{t+\Delta t} - A(p')_{i-1}^{t+\Delta t} \quad (100)$$

En la ecuación (99) se quitan los términos  $a_i(u')_{i-1}^{t+\Delta t}$  y  $c_i(u')_{i+1}^{t+\Delta t}$  con el objetivo de simplificar la ecuación (99) para la corrección de la velocidad. La omisión de estos términos es la principal aproximación del algoritmo SIMPLE. Con esto en mente, se obtiene:

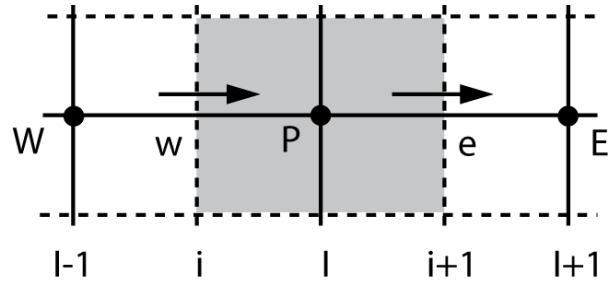
$$(u')_i^{t+\Delta t} = \frac{1}{b_i} [A(p')_i^{t+\Delta t} - A(p')_{i-1}^{t+\Delta t}] \quad (101)$$

Reemplazando la ecuación (101) en la ecuación (94) da:

$$(u)_i^{t+\Delta t} = (u^*)_i^{t+\Delta t} + \frac{1}{b_i} [A(p')_i^{t+\Delta t} - A(p')_{i-1}^{t+\Delta t}] \quad (102)$$

Hasta este punto solamente se ha considerado la ecuación de cantidad de movimiento, pero el campo de velocidad también está sujeto a la restricción de satisfacer la ecuación de continuidad. La continuidad se satisface para el volumen de control escalar mostrado en la Figura 17.

Figura 17. Volumen de control usado en la discretización de la ecuación de continuidad.



Fuente: Fuentes, David, "Mecánica de fluidos computacional", Universidad Industrial de Santander, 2009.

La ecuación de continuidad para el volumen de control de la Figura 17 es:

$$[(\rho)_P^{t+\Delta t} - (\rho)_P^t] \Delta V = [A(\rho u)_w^{t+\Delta t} - A(\rho u)_e^{t+\Delta t}] \Delta t \quad (103)$$

La ecuación (103) se puede expresar como:

$$\Delta V(\rho)_P^{t+\Delta t} - \Delta V(\rho)_P^t = A\Delta t(\rho)_w^{t+\Delta t}(u)_w^{t+\Delta t} - A\Delta t(\rho)_e^{t+\Delta t}(u)_e^{t+\Delta t} \quad (104)$$

Suponiendo una variación lineal de la densidad en las fronteras se tiene:

$$\begin{aligned} & \Delta V(\rho)_P^{t+\Delta t} - \Delta V(\rho)_P^t \\ &= A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_W^{t+\Delta t} + (\rho)_P^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_w^{t+\Delta t} \\ & - A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_P^{t+\Delta t} + (\rho)_E^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_e^{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (105)$$

Expresando la ecuación (105) nuevamente para la variable  $i$ :

$$\begin{aligned}
& \Delta V(\rho)_i^{t+\Delta t} - \Delta V(\rho)_i^t \\
&= A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_i^{t+\Delta t} \\
&\quad - A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_{i+1}^{t+\Delta t} \quad (106)
\end{aligned}$$

La sustitución de las velocidades corregidas de la ecuación (102) en la ecuación de continuidad (106) da:

$$\begin{aligned}
& \Delta V(\rho)_i^{t+\Delta t} - \Delta V(\rho)_i^t \\
&= A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] \left[ (u^*)_i^{t+\Delta t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{b_i} [A(p')_i^{t+\Delta t} - A(p')_{i-1}^{t+\Delta t}] \right] \\
&\quad - A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] \left[ (u^*)_{i+1}^{t+\Delta t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{b_{i+1}} [A(p')_{i+1}^{t+\Delta t} - A(p')_i^{t+\Delta t}] \right] \quad (107)
\end{aligned}$$

Organizando la ecuación (107) se tiene:

$$\begin{aligned}
& \Delta V(\rho)_i^{t+\Delta t} - \Delta V(\rho)_i^t \\
&= A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] (u^*)_i^{t+\Delta t} \\
&+ \frac{A^2\Delta t}{b_i} \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] (p')_i^{t+\Delta t} \\
&- \frac{A^2\Delta t}{b_i} \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] (p')_{i-1}^{t+\Delta t} \\
&- A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] (u^*)_{i+1}^{t+\Delta t} \\
&- \frac{A^2\Delta t}{b_{i+1}} \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] (p')_{i+1}^{t+\Delta t} \\
&+ \frac{A^2\Delta t}{b_{i+1}} \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] (p')_i^{t+\Delta t} \tag{108}
\end{aligned}$$

Reagrupado la ecuación (108) se tiene:

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{A^2\Delta t}{b_i} \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] \right] (p')_{i-1}^{t+\Delta t} \\
& + \left[ \frac{A^2\Delta t}{b_i} \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] + \frac{A^2\Delta t}{b_{i+1}} \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] \right] (p')_i^{t+\Delta t} \\
& - \left[ \frac{A^2\Delta t}{b_{i+1}} \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] \right] (p')_{i+1}^{t+\Delta t} \\
& = \Delta V(\rho)_i^{t+\Delta t} - \Delta V(\rho)_i^t + A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] (u^*)_{i+1}^{t+\Delta t} \\
& - A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] (u^*)_i^{t+\Delta t} \tag{109}
\end{aligned}$$

Expresando la ecuación (109) por medio de coeficientes se tiene:

$$e_i(p')_{i-1} + f_i(p')_i + g_i(p')_{i+1} = k_i \quad (110)$$

donde los coeficientes  $e_i$ ,  $f_i$ ,  $g_i$  y  $k_i$  para la ecuación de continuidad son:

$$e_i = \left[ -\frac{A^2 \Delta t}{b_i} \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] \right] \quad (111)$$

$$f_i = \left[ \frac{A^2 \Delta t}{b_i} \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] + \frac{A^2 \Delta t}{b_{i+1}} \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] \right] \quad (112)$$

$$g_i = \left[ -\frac{A^2 \Delta t}{b_{i+1}} \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] \right] \quad (113)$$

$$k_i = \left[ \Delta V(\rho)_i^{t+\Delta t} - \Delta V(\rho)_i^t + A \Delta t \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] (u^*)_{i+1}^{t+\Delta t} \right. \\ \left. - A \Delta t \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] (u^*)_i^{t+\Delta t} \right] \quad (114)$$

La ecuación (110) representa la ecuación de continuidad discretizada como una ecuación para la corrección de presión  $p'$ . El término  $k_i$  en la ecuación es el desbalance en la ecuación de continuidad producto del campo de velocidad incorrecto  $u^*$ . Resolviendo la ecuación (110) se puede obtener en todos los puntos el campo de corrección de presión  $p'$ . Una vez que se conoce el campo de corrección de presión se puede obtener el campo correcto de presión mediante la ecuación (93) y finalmente las velocidades a través de la ecuación (102).

Planteando la ecuación de conservación de la energía para el volumen de control de la Figura 17 se tiene:

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \rho \left( h + \frac{u^2}{2} \right) - p \right)_P^{t+\Delta t} - \left( \rho \left( h + \frac{u^2}{2} \right) - p \right)_P^t \right] \Delta V \\
& = \left[ A(\rho u)_w^{t+\Delta t} \left( h + \frac{u^2}{2} \right)_w^{t+\Delta t} - A(\rho u)_e^{t+\Delta t} \left( h + \frac{u^2}{2} \right)_e^{t+\Delta t} \right] \Delta t \\
& - [P(\tau u)_P^{t+\Delta t}] \Delta x \Delta t - Q^{t+\Delta t} \Delta t \\
& + \frac{4}{3} \left[ \frac{A(\mu u)_e^{t+\Delta t} [(u)_E^{t+\Delta t} - (u)_P^{t+\Delta t}]}{\delta x_{PE}} \right. \\
& \left. - \frac{A(\mu u)_w^{t+\Delta t} [(u)_P^{t+\Delta t} - (u)_W^{t+\Delta t}]}{\delta x_{WP}} \right] \Delta t \tag{115}
\end{aligned}$$

La ecuación (115) se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
& \Delta V(\rho)_P^{t+\Delta t} (h)_P^{t+\Delta t} + \Delta V(\rho)_P^{t+\Delta t} \left( \frac{(u^2)_P^{t+\Delta t}}{2} \right) - \Delta V(\rho)_P^{t+\Delta t} - \Delta V(\rho)_P^t (h)_P^t \\
& - \Delta V(\rho)_P^t \left( \frac{(u^2)_P^t}{2} \right) + \Delta V(\rho)_P^t \\
& = A\Delta t(\rho)_w^{t+\Delta t} (u)_w^{t+\Delta t} (h)_w^{t+\Delta t} + A\Delta t(\rho)_w^{t+\Delta t} (u)_w^{t+\Delta t} \left( \frac{(V_x^2)_w^{t+\Delta t}}{2} \right) \\
& - A\Delta t(\rho)_e^{t+\Delta t} (u)_e^{t+\Delta t} (h)_e^{t+\Delta t} - A\Delta t(\rho)_e^{t+\Delta t} (u)_e^{t+\Delta t} \left( \frac{(u^2)_e^{t+\Delta t}}{2} \right) \\
& - P\Delta x\Delta t(\tau)_P^{t+\Delta t} (u)_P^{t+\Delta t} - Q^{t+\Delta t}\Delta t \\
& + \frac{4A\Delta t}{3\Delta x} (\mu)_e^{t+\Delta t} (u)_e^{t+\Delta t} [(u)_E^{t+\Delta t} - (u)_P^{t+\Delta t}] \\
& - \frac{4A\Delta t}{3\Delta x} (\mu)_w^{t+\Delta t} (u)_w^{t+\Delta t} [(u)_P^{t+\Delta t} - (u)_W^{t+\Delta t}] \tag{116}
\end{aligned}$$

Suponiendo una variación lineal de algunas propiedades se tiene:

$$\begin{aligned}
& \Delta V(\rho)_P^{t+\Delta t} (h)_P^{t+\Delta t} + \Delta V(\rho)_P^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u^2)_w^{t+\Delta t} + (u^2)_e^{t+\Delta t}}{4} \right] - \Delta V(\rho)_P^{t+\Delta t} \\
& - \Delta V(\rho)_P^t (h)_P^t - \Delta V(\rho)_P^t \left[ \frac{(u^2)_w^t + (u^2)_e^t}{4} \right] + \Delta V(\rho)_P^t \\
& = A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_W^{t+\Delta t} + (\rho)_P^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_W^{t+\Delta t} (h)_W^{t+\Delta t} \\
& + A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_W^{t+\Delta t} + (\rho)_P^{t+\Delta t}}{2} \right] \left( \frac{(u^3)_w^{t+\Delta t}}{2} \right) \\
& - A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_P^{t+\Delta t} + (\rho)_E^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_e^{t+\Delta t} (h)_e^{t+\Delta t} \\
& - A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_P^{t+\Delta t} + (\rho)_E^{t+\Delta t}}{2} \right] \left( \frac{(u^3)_e^{t+\Delta t}}{2} \right) \\
& - P\Delta x\Delta t (\tau)_P^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_w^{t+\Delta t} + (u)_e^{t+\Delta t}}{2} \right] - Q^{t+\Delta t}\Delta t \\
& + \frac{4A\Delta t}{3\Delta x} \left[ \frac{(\mu)_P^{t+\Delta t} + (\mu)_E^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_e^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_e^{t+\Delta t} + (u)_{ee}^{t+\Delta t}}{2} \right. \\
& \left. - \frac{(u)_w^{t+\Delta t} + (u)_e^{t+\Delta t}}{2} \right] \\
& - \frac{4A\Delta t}{3\Delta x} \left[ \frac{(\mu)_W^{t+\Delta t} + (\mu)_P^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_w^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_w^{t+\Delta t} + (u)_e^{t+\Delta t}}{2} \right. \\
& \left. - \frac{(u)_{ww}^{t+\Delta t} + (u)_w^{t+\Delta t}}{2} \right] \tag{117}
\end{aligned}$$

Aplicando la interpolación upwind y simplificando se tiene:

$$\begin{aligned}
& \Delta V(\rho)_P^{t+\Delta t} (h)_P^{t+\Delta t} + \Delta V(\rho)_P^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u^2)_W^{t+\Delta t} + (u^2)_E^{t+\Delta t}}{4} \right] - \Delta V(\rho)_P^{t+\Delta t} \\
& - \Delta V(\rho)_P^t (h)_P^t - \Delta V(\rho)_P^t \left[ \frac{(u^2)_W^t + (u^2)_E^t}{4} \right] + \Delta V(\rho)_P^t \\
& = A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_W^{t+\Delta t} + (\rho)_P^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_W^{t+\Delta t} (h)_W^{t+\Delta t} \\
& + A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_W^{t+\Delta t} + (\rho)_P^{t+\Delta t}}{2} \right] \left( \frac{(u^3)_W^{t+\Delta t}}{2} \right) \\
& - A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_P^{t+\Delta t} + (\rho)_E^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_E^{t+\Delta t} (h)_P^{t+\Delta t} \\
& - A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_P^{t+\Delta t} + (\rho)_E^{t+\Delta t}}{2} \right] \left( \frac{(u^3)_E^{t+\Delta t}}{2} \right) \\
& - P\Delta x\Delta t (\tau)_P^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_W^{t+\Delta t} + (u)_E^{t+\Delta t}}{2} \right] - Q^{t+\Delta t} \Delta t \\
& + \frac{4A\Delta t}{3\Delta x} \left[ \frac{(\mu)_P^{t+\Delta t} + (\mu)_E^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_E^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_{ee}^{t+\Delta t} - (u)_w^{t+\Delta t}}{2} \right] \\
& - \frac{4A\Delta t}{3\Delta x} \left[ \frac{(\mu)_W^{t+\Delta t} + (\mu)_P^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_W^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_e^{t+\Delta t} - (u)_{ww}^{t+\Delta t}}{2} \right] \tag{118}
\end{aligned}$$

Expresando la ecuación (118) nuevamente para la variable  $i$ :

$$\begin{aligned}
& \Delta V(\rho)_i^{t+\Delta t} (h)_i^{t+\Delta t} + \Delta V(\rho)_i^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u^2)_i^{t+\Delta t} + (u^2)_{i+1}^{t+\Delta t}}{4} \right] - \Delta V(\rho)_i^{t+\Delta t} \\
& - \Delta V(\rho)_i^t (h)_i^t - \Delta V(\rho)_i^t \left[ \frac{(u^2)_i^t + (u^2)_{i+1}^t}{4} \right] + \Delta V(\rho)_i^t \\
& = A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_i^{t+\Delta t} (h)_{i-1}^{t+\Delta t} \\
& + A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] \left( \frac{(u^3)_i^{t+\Delta t}}{2} \right) \\
& - A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_{i+1}^{t+\Delta t} (h)_i^{t+\Delta t} \\
& - A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] \left( \frac{(u^3)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right) \\
& - P\Delta x\Delta t (\tau)_i^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_i^{t+\Delta t} + (u)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] - Q^{t+\Delta t} \Delta t \\
& + \frac{4A\Delta t}{3\Delta x} \left[ \frac{(\mu)_i^{t+\Delta t} + (\mu)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_{i+1}^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_{i+2}^{t+\Delta t} - (u)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] \\
& - \frac{4A\Delta t}{3\Delta x} \left[ \frac{(\mu)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\mu)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_i^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_{i+1}^{t+\Delta t} - (u)_{i-1}^{t+\Delta t}}{2} \right] \tag{119}
\end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes y organizando se tiene:

$$\begin{aligned}
& - \left[ A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_i^{t+\Delta t} \right] (h)_{i-1}^{t+\Delta t} \\
& + \left[ \Delta V(\rho)_i^{t+\Delta t} + A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_{i+1}^{t+\Delta t} \right] (h)_i^{t+\Delta t} \\
& = \Delta V(p)_i^{t+\Delta t} - \Delta V(\rho)_i^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u^2)_i^{t+\Delta t} + (u^2)_{i+1}^{t+\Delta t}}{4} \right] \\
& + A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] \left( \frac{(u^3)_i^{t+\Delta t}}{2} \right) \\
& - A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] \left( \frac{(u^3)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right) \\
& - P\Delta x\Delta t (\tau)_i^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_i^{t+\Delta t} + (u)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] - Q^{t+\Delta t}\Delta t \\
& + \frac{4A\Delta t}{3\Delta x} \left[ \frac{(\mu)_i^{t+\Delta t} + (\mu)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_{i+1}^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_{i+2}^{t+\Delta t} - (u)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] \\
& - \frac{4A\Delta t}{3\Delta x} \left[ \frac{(\mu)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\mu)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_i^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_{i+1}^{t+\Delta t} - (u)_{i-1}^{t+\Delta t}}{2} \right] \\
& + \Delta V(\rho)_i^t (h)_i^t - \Delta V(p)_i^t + \Delta V(\rho)_i^t \left[ \frac{(u^2)_i^t + (u^2)_{i+1}^t}{4} \right] \tag{120}
\end{aligned}$$

Expresando la función (120) en términos de coeficientes se tiene:

$$l_i(h)_{i-1} + m_i(h)_i = n_i \tag{121}$$

donde los coeficientes  $l_i$ ,  $m_i$ , y  $n_i$  para la ecuación de continuidad son:

$$l_i = \left[ -A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_i^{t+\Delta t} \right] \tag{122}$$

$$m_i = \left[ \Delta V(\rho)_i^{t+\Delta t} + A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_{i+1}^{t+\Delta t} \right] \quad (123)$$

$$\begin{aligned} n_i = & \left[ \Delta V(p)_i^{t+\Delta t} - \Delta V(\rho)_i^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u^2)_i^{t+\Delta t} + (u^2)_{i+1}^{t+\Delta t}}{4} \right] \right. \\ & + A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\rho)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] \left( \frac{(u^3)_i^{t+\Delta t}}{2} \right) \\ & - A\Delta t \left[ \frac{(\rho)_i^{t+\Delta t} + (\rho)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] \left( \frac{(u^3)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right) \\ & - P\Delta x\Delta t (\tau)_i^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_i^{t+\Delta t} + (u)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] - Q^{t+\Delta t}\Delta t \\ & + \frac{4A\Delta t}{3\Delta x} \left[ \frac{(\mu)_i^{t+\Delta t} + (\mu)_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_{i+1}^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_{i+2}^{t+\Delta t} - (u)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] \\ & - \frac{4A\Delta t}{3\Delta x} \left[ \frac{(\mu)_{i-1}^{t+\Delta t} + (\mu)_i^{t+\Delta t}}{2} \right] (u)_i^{t+\Delta t} \left[ \frac{(u)_{i+1}^{t+\Delta t} - (u)_{i-1}^{t+\Delta t}}{2} \right] \\ & \left. + \Delta V(\rho)_i^t (h)_i^t - \Delta V(p)_i^t + \Delta V(\rho)_i^t \left[ \frac{(u^2)_i^t + (u^2)_{i+1}^t}{4} \right] \right] \quad (124) \end{aligned}$$

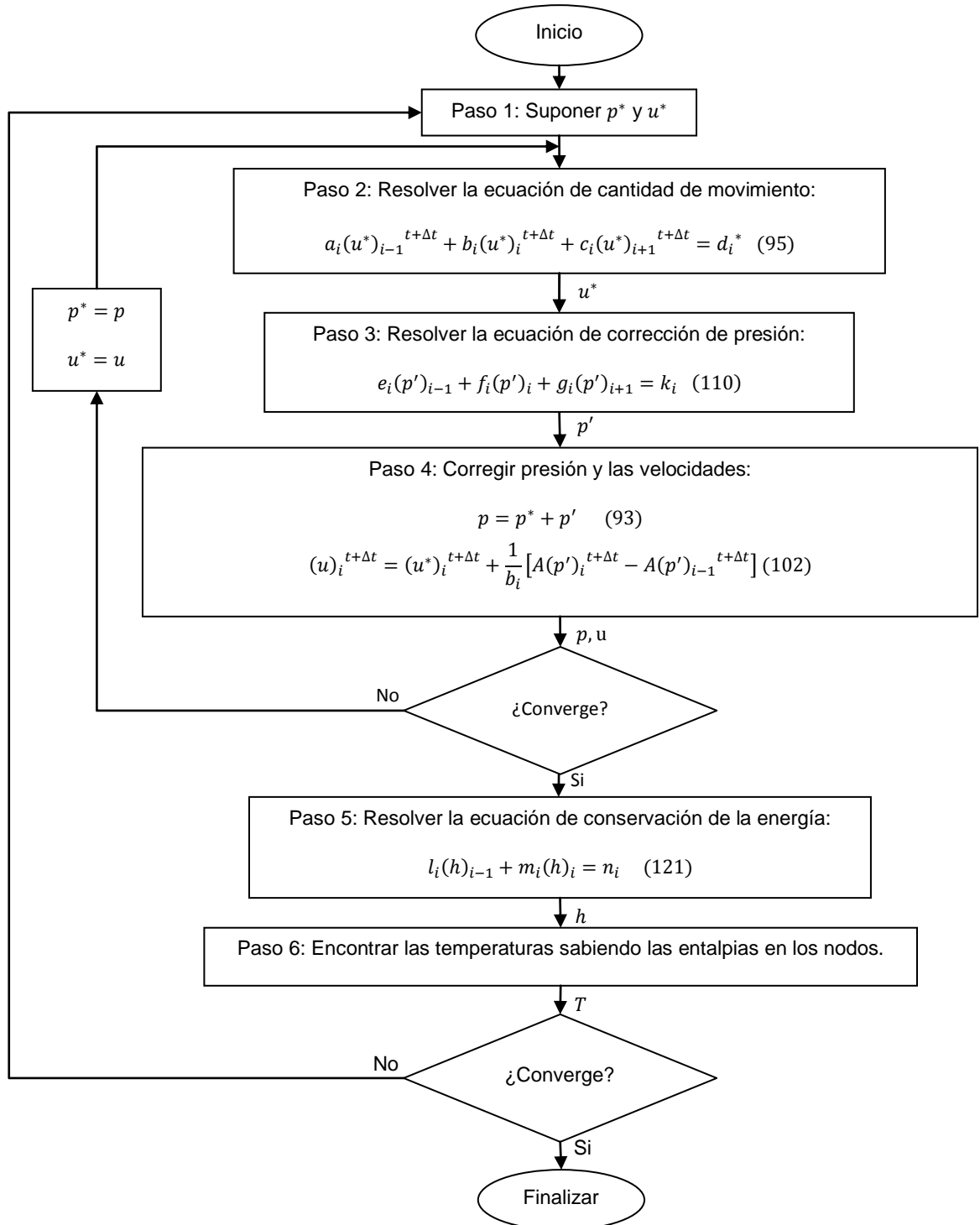
### 3.5.1 Secuencia de operaciones.

Las operaciones en orden de ejecución son:

1. Estimar el campo de presión  $p^*$ .
2. Resolver la ecuación de cantidad de movimiento (95) para obtener  $u^*$ .
3. Resolver la ecuación para  $p'$  (ecuación (110)).
4. Calcular  $p$  a partir de la ecuación (93) y calcular  $u$  con la ecuación (102).
5. Se resuelve la ecuación de conservación de la energía (ecuación (121)) que está influenciada por el campo de flujo y se encuentra la entalpía en todos los nodos.
6. Encontrar las temperaturas sabiendo las entalpías en todos los nodos (ecuación (61)).
7. Tratar la nueva presión  $p$  como presión estimada  $p^*$ , la velocidad  $u$  como la velocidad estimada  $u^*$  y la temperatura  $T$  como la temperatura estimada  $T^*$  para la siguiente iteración y retornar al paso 2. Repetir hasta que se obtenga una convergencia satisfactoria.

En la Figura 18 se observa un diagrama de flujo que resume el procedimiento del algoritmo SIMPLE.

Figura 18. Procedimiento del algoritmo SIMPLE.



Fuente: Autor.

### 3.6 Solución del sistema de ecuaciones.

Al implementar el algoritmo SIMPLE se producen un sistema de ecuaciones que se pueden escribir de forma genérica como:

$$[A(\emptyset)]\{\emptyset\} = \{Q\} \quad (125)$$

donde  $\{\emptyset\}$  es el vector de valores nodales desconocidos,  $[A(\emptyset)]$  es una matriz tri-diagonal que contiene los coeficientes algebraicos que surgen del proceso de discretización y se muestra en la Figura 19, y  $\{Q\}$  es el vector solución.

Figura 19. Matriz tri-diagonal.

$$[A(\emptyset)] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Fuente: Autor.

Para poder desarrollar esta clase de matrices, Thomas desarrolló una técnica para resolver rápidamente sistemas tri-diagonales (TDMA). El algoritmo de Thomas (TDMA) es un método directo para situaciones uni-dimensionales, pero se puede aplicar iterativamente, de una forma línea por línea, para resolver problemas multidimensionales. Esta técnica no es tan costosa desde el punto de vista computacional y tiene la ventaja de requerir una mínima cantidad de memoria.

A continuación se hace una breve descripción de este algoritmo tomado de [22].

### 3.6.1 Algoritmo de Thomas para matriz tri-diagonal.

Para deducir el algoritmo de Thomas, inicialmente se aplicará el procedimiento de eliminación de Gauss a una matriz tri-diagonal  $[A(\emptyset)]$ , esto significa llevar la matriz  $[A(\emptyset)]$  a una matriz triangular superior. Para esto se tomará la ecuación matricial dada en la ecuación (125) donde la matriz  $[A(\emptyset)]$  es una matriz tri-diagonal de la forma como aparece en la Figura 19.

Debido a que todos los elementos de la columna 1 por debajo de la fila 2 son cero, el único elemento a eliminar en la fila 2 es  $a_{21}$ . Entonces, si se reemplaza la fila 2 por  $R_2 - (a_{21}/a_{11})R_1$ , la fila 2 será:

$$[0 \quad a_{22} - (a_{21}/a_{11})a_{12} \quad a_{23} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (126)$$

Similarmente, solamente se debe eliminar el elemento  $a_{32}$  en la columna 2 de la fila 3; el elemento  $a_{43}$  en la fila 4 y así sucesivamente. El elemento eliminado en sí mismo no se necesita calcular. De hecho, guardar el elemento multiplicador  $em = (a_{21}/a_{11})$ , etc., en lugar del elemento eliminado permite que el procedimiento se use como un método de factorización LU. Como se observa, solamente los elementos en cada diagonal se afectan en el proceso de eliminación. La eliminación de las filas 2 a la n se realiza como sigue:

$$a_{i,i} = a_{i,i} - \left( \frac{a_{i,i-1}}{a_{i-1,i-1}} \right) a_{i-1,i} \quad (i = 2, \dots, n) \quad (127)$$

De esta manera el proceso de eliminación involucra solamente  $2n$  multiplicaciones para poner la matriz  $[A(\emptyset)]$  en su forma triangular superior.

Los elementos del vector  $\{Q\}$  también se afectan en el proceso de eliminación. El primer elemento  $q_1$  permanece inalterado, el segundo elemento  $q_2$  es:

$$q_2 = q_2 - (a_{21}/a_{11})q_1 \quad (128)$$

Los elementos subsecuentes del vector  $\{Q\}$  se cambian de una forma similar. El procesado del vector  $\{Q\}$  requiere una operación de multiplicación, debido a que el elemento multiplicador  $em = (a_{21}/a_{11})$ , ya se encuentra calculado. De tal manera que el proceso de eliminación total, incluyendo el vector  $\{b\}$ , requiere solamente  $3n$  operaciones de multiplicación.

La matriz tri-diagonal  $[A(\emptyset)]$  de  $n \times n$  se puede almacenar en una matriz  $[A']$  de  $n \times 3$  dado que no se necesitan almacenar los ceros. La primera columna de la matriz  $[A']$ , los elementos  $a'_{i,1}$  corresponden a la matriz subdiagonal de la matriz  $[A(\emptyset)]$ , con elementos  $a_{i,i-1}$ . La segunda columna de la matriz  $[A']$ , con elementos  $a'_{i,2}$  corresponden a los elementos en la diagonal de la matriz  $[A(\emptyset)]$ , elementos  $a_{i,i}$ . La tercera columna de la  $[A']$ , con elementos  $a'_{i,3}$  corresponden a la superdiagonal de la matriz  $[A(\emptyset)]$  con elementos  $a_{i,i+1}$ . Los elementos  $a'_{1,1}$  y  $a'_{n,3}$  no existen. De esta forma:

$$[A'] = \begin{bmatrix} - & a'_{1,2} & a'_{1,3} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ a'_{3,1} & a'_{3,2} & a'_{3,3} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n-1,1} & a'_{n-1,2} & a'_{n-1,3} \\ a'_{n,1} & a'_{n,2} & - \end{bmatrix} \quad (129)$$

Cuando se eliminan los elementos de la columna 1 de la matriz  $[A']$ , esto es, los elementos  $a'_{i,1}$ , los elementos de la columna 2 de la matriz  $[A']$  serán:

$$a'_{1,2} = a'_{1,2} \quad (130)$$

$$a'_{i,2} = a'_{i,2} - (a'_{i,1}/a'_{i-1,2})a'_{i-1,3} \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (131)$$

El vector  $\{Q\}$  se modifica como:

$$q_1 = q_1 \quad (132)$$

$$q_i = q_i - (a'_{i,1}/a'_{i-1,2})q'_{i-1,3} \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (133)$$

Después que se evalúen  $a'_{i,2}$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) y el vector  $\{Q\}$ , se realiza la sustitución regresiva como sigue:

$$\phi_n = q_n/a'_{n,2} \quad (134)$$

$$\phi_i = q_i - (a'_{i,1}/a'_{i-1,2})a'_{i-1,3} \quad (i = n - 1, n - 2, \dots, 1) \quad (135)$$

#### 4. RESULTADOS Y VALIDACIÓN DE LA HERRAMIENTA COMPUTACIONAL

El presente programa realiza la simulación del comportamiento del flujo de los gases al interior de los múltiples de escape en los MCI con flujo de entrada tanto estable como transitorio y con diferentes geometrías del ducto, en los siguientes casos se muestran algunos de ellos:

**Caso 1:** Para este caso se trabajó con un ducto de 1 [in] y espesor estándar (Schedule STD) las características del este ducto y del flujo de entrada aparecen en la Tabla 3.

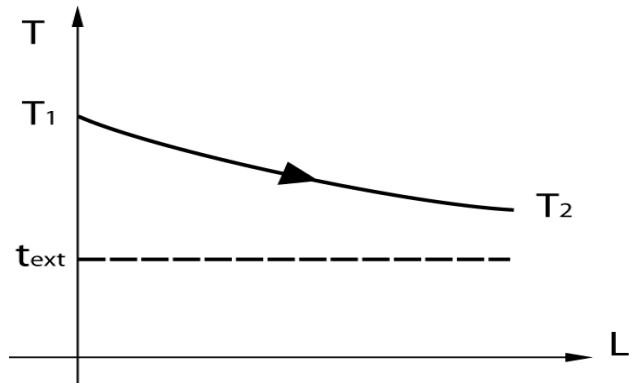
Tabla 3. Características del ducto y flujo.

Diámetro interno	0,02664 [m]
Espesor	0,00338 [m]
Rugosidad	$1,0e - 4$
Longitud	3 [m]
Flujo másico	0,01 [kg/s]
Temperatura	800 [K]

Fuente: Autor.

Como el fluido que entra al ducto tiene mayor temperatura que el fluido de los alrededores se producirá una transferencia de calor desde el ducto a los alrededores dando una caída de temperatura exponencial teórica como se observa en la Figura 20.

Figura 20. Caída de Temperatura a lo largo del ducto.



Fuente: Autor.

Teniendo este comportamiento se compararon los resultados dados por el programa con dos métodos utilizados para los intercambiadores de calor:

1. Se comparó la transferencia de calor total  $Q$  que sale del ducto dada por el programa contra la encontrada por el método de la Diferencia de Temperatura Media Logarítmica (LMTD).
2. Se comparó la temperatura de salida del ducto dada por el programa versus la obtenida por el método de la Efectividad  $\varepsilon$ .

Adicionalmente se comparó la caída de presión dada por el programa contra el valor teórico mostrándose los resultados en la Tabla 5.

Tabla 4. Porcentaje de error para los diferentes métodos.

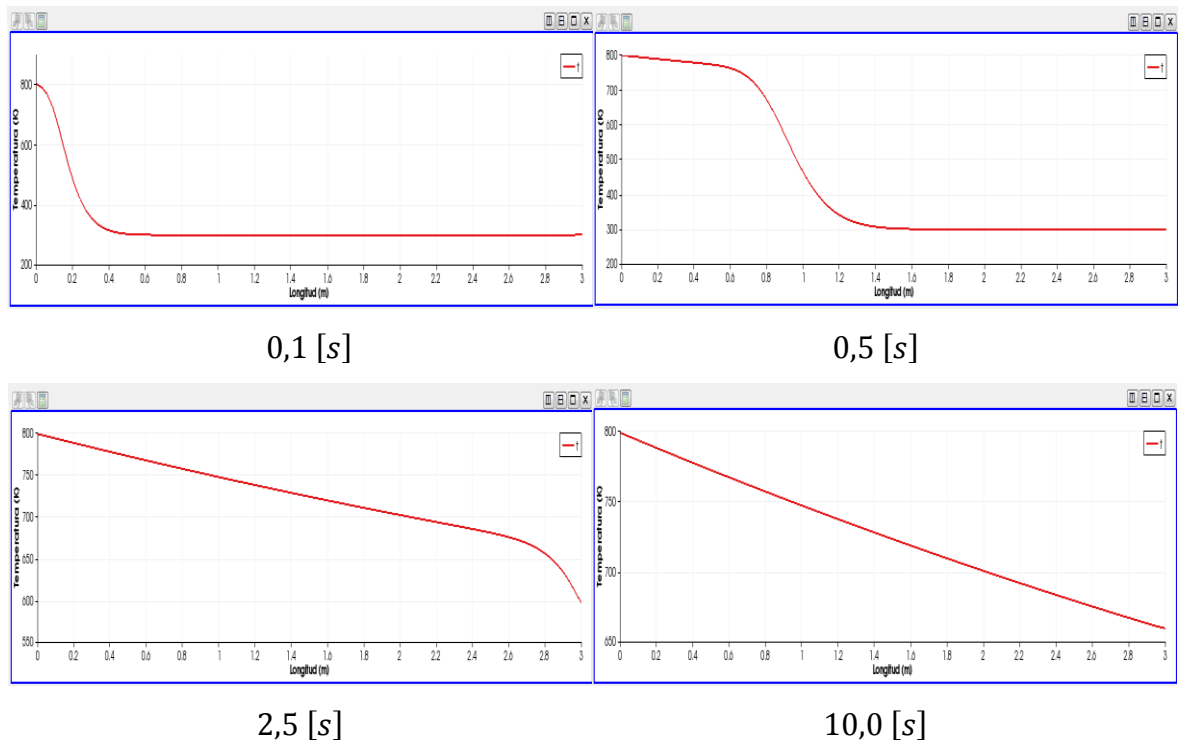
MÉTODO	Error
LMTD	0,3052 %
Efectividad $\varepsilon$	0,7447 %
Caída de Presión	0,043075 %

Fuente: Autor.

A continuación se visualizan los resultados obtenidos de la simulación para el caso 1, los resultados dados por el programa se exportaron y se visualizaron en ParaView versión 3.10.1 obteniéndose las gráficas de las variaciones de Temperatura, Presión y Velocidad (Figuras 21, 22 y 23 respectivamente).

En la Figura 21 se presentan los tiempos de simulación 0,1 [s], 0,5 [s], 2,5 [s] y 10,0 [s] respectivamente para la variación de la Temperatura del fluido dentro del ducto, en esta figura se observa una variación de la Temperatura a lo largo del ducto teniendo una propagación de onda característica para el flujo en los ductos de escape en los MCI (como se menciona en [1]) y después de cierto tiempo la variación de esta propiedad no cambia (ver para el tiempo 10,0 [s]) teniendo un comportamiento acorde a la teoría y mostrado en la Figura 20.

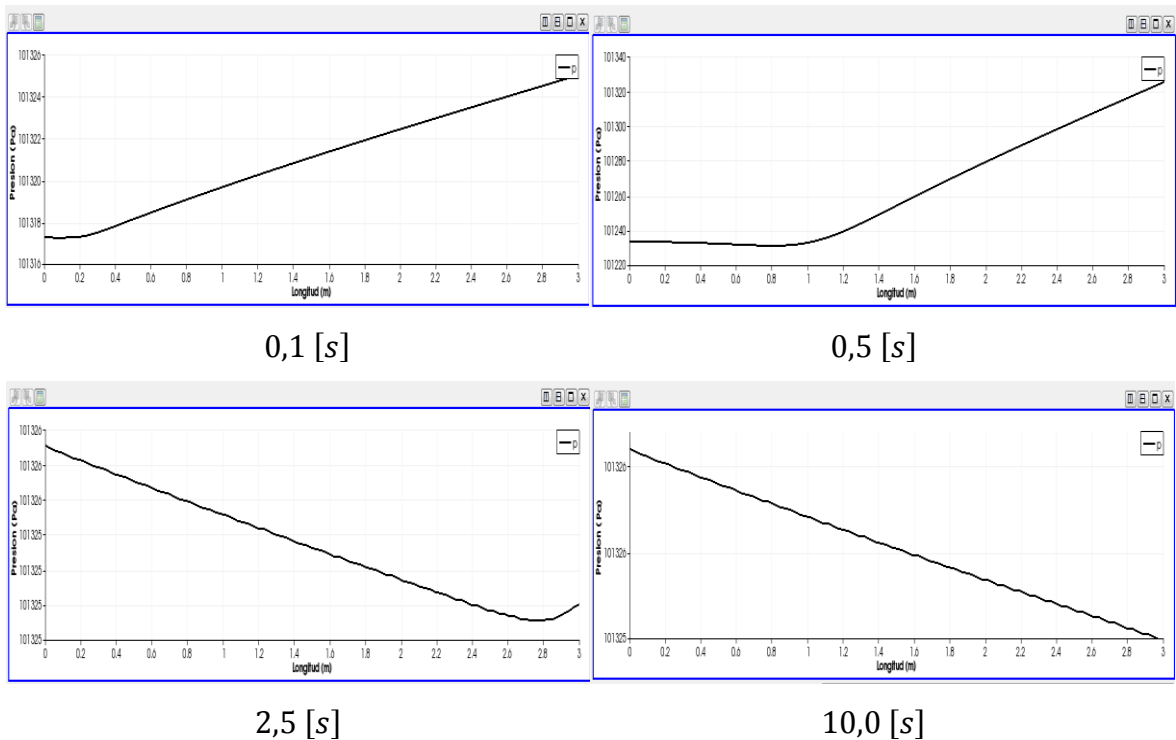
Figura 21. Simulación de la Temperatura para el caso 1:



Fuente: Autor.

La Figura 22 muestra los tiempos de simulación 0,1 [s], 0,5 [s], 2,5 [s] y 10,0 [s] respectivamente para la variación de la Presión del fluido dentro del ducto, en esta figura se observa un comportamiento de la presión altamente variable para los primeros tiempos debido a la expansión de los gases de escape en el ducto y a todos los fenómenos de la dinámica de los gases asociados al mismo.

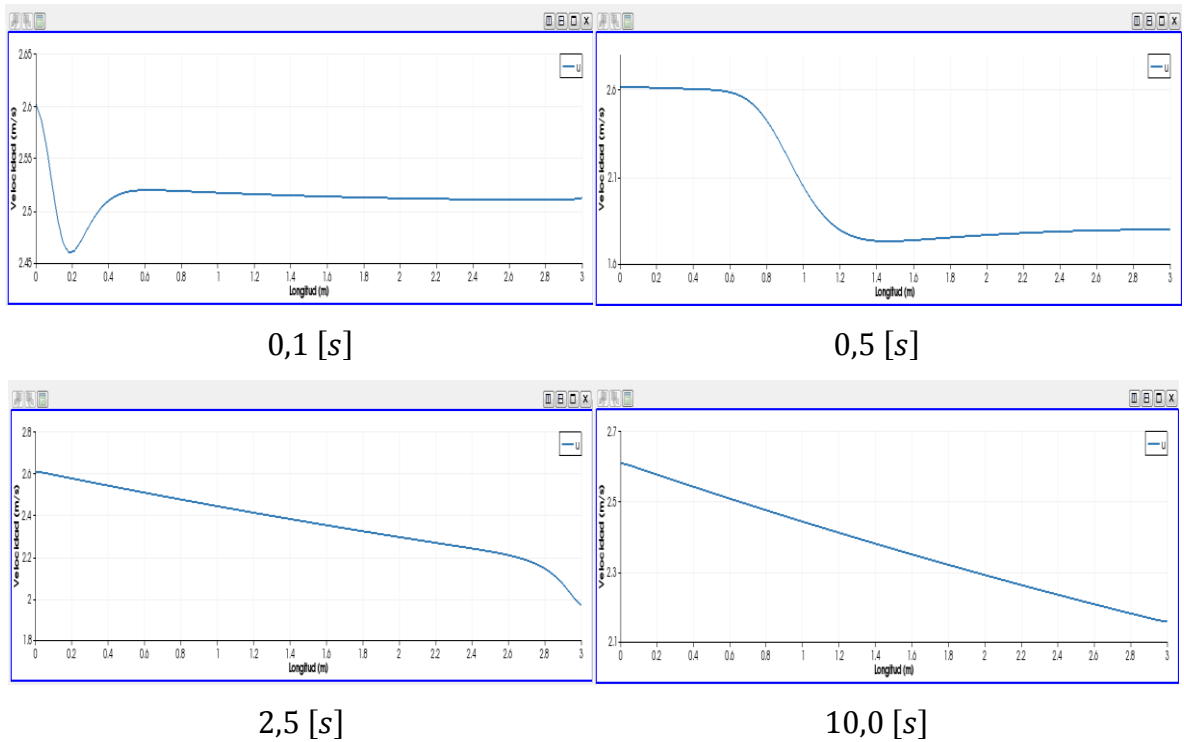
Figura 22. Simulación de la Presión para el caso 1:



Fuente: Autor.

Para la Figura 23 se muestran los tiempos de simulación 0,1 [s], 0,5 [s], 2,5 [s] y 10,0 [s] respectivamente para la variación de la Velocidad del fluido dentro del ducto e igualmente se observa una variación de la Velocidad a lo largo del ducto teniendo una propagación de onda y después de cierto tiempo la variación de esta propiedad no cambia (ver para el tiempo 10,0 [s]).

Figura 23. Simulación de la Velocidad para el caso 1:

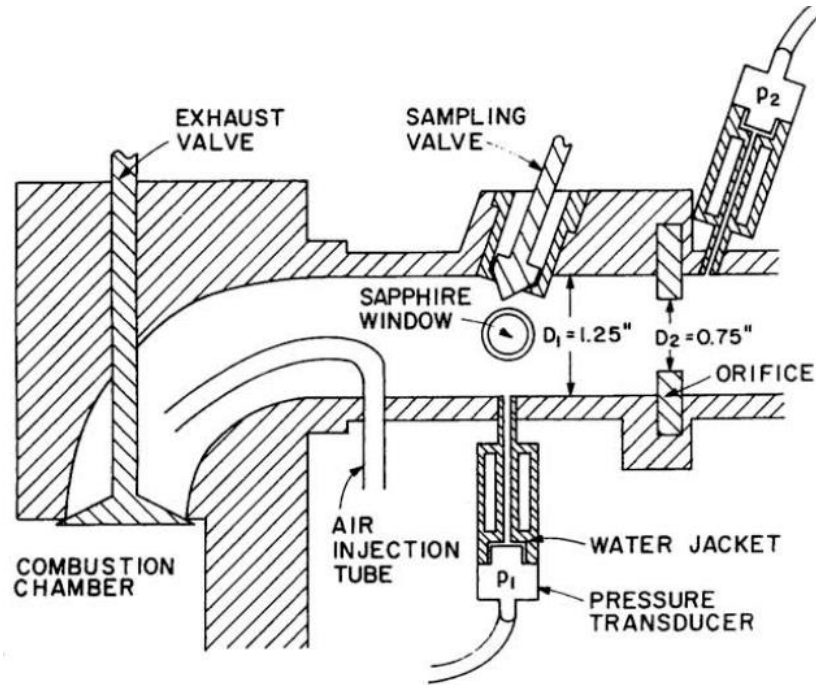


Fuente: Autor.

**Caso 2:** Se procedió a simular el flujo en el interior del ducto teniendo una variación de las propiedades del flujo de entrada, esto viene dado por la apertura y cierre de las válvulas de escape de los MCI.

Para este caso se trabajó con los datos obtenidos en [42] donde se utilizó una instalación como la que se muestra en la Figura 24, estos resultados se observan en las Figuras 25, 26 y 27.

Figura 24. Esquema del medidor de pruebas.



Fuente: Heywood J, "Time-Resolved Measurements of Hydrocarbon Mass Flowrate in the Exhaust of a Spark-Ignition Engine".

Las características del motor con el que se trabajó en [42] se muestran en la Tabla 5 y en la Tabla 6 aparecen las características del ducto utilizado para simular el comportamiento de los gases de escape.

Tabla 5. Características del motor.

Velocidad	1200 [RPM]
Relación equivalente (Combustible/Aire)	1,2
Relación de compresión	7

Fuente: Heywood J, "Time-Resolved Measurements of Hydrocarbon Mass Flowrate in the Exhaust of a Spark-Ignition Engine".

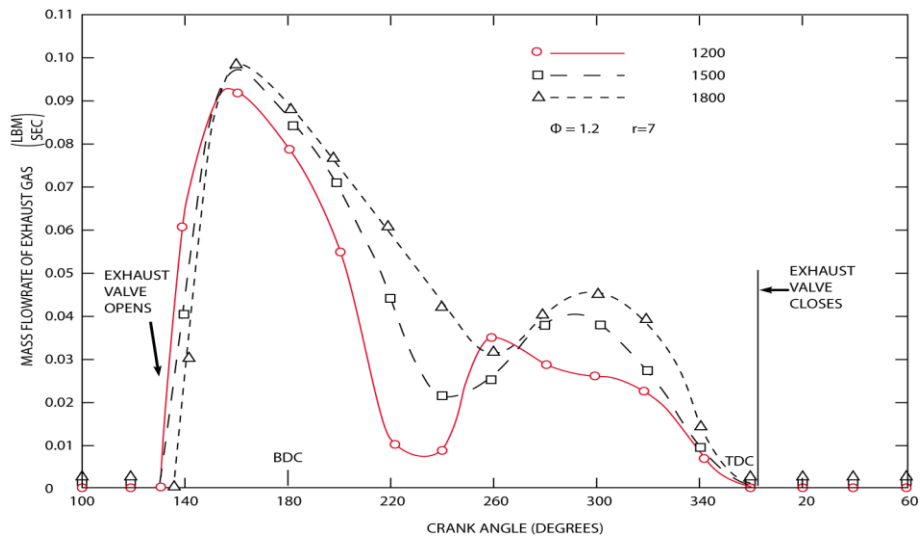
Tabla 6. Características del ducto.

Diámetro interno	0,03504[m]
Espesor	0,00356 [m]
Rugosidad	1,0e - 4
Longitud	1,0 [m]

Fuente: Autor.

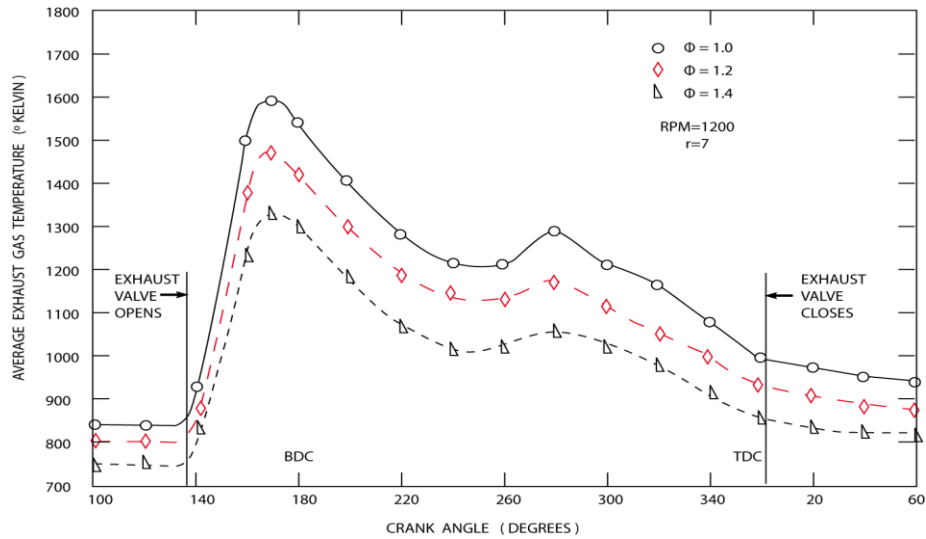
Los resultados que se muestran en las Figuras 25 y 26 se utilizan como parámetros de entrada para el modelo, mientras que los que aparecen en la Figura 27 son de comparación de los resultados obtenidos en la simulación (esto debido a que la presión depende de las resistencias que el flujo encuentra aguas abajo), así que como condición de frontera para la presión no se utilizó un parámetro de entrada sino una condición a la salida del ducto igual a la presión atmosférica.

Figura 25. Variación del flujo másico de entrada.



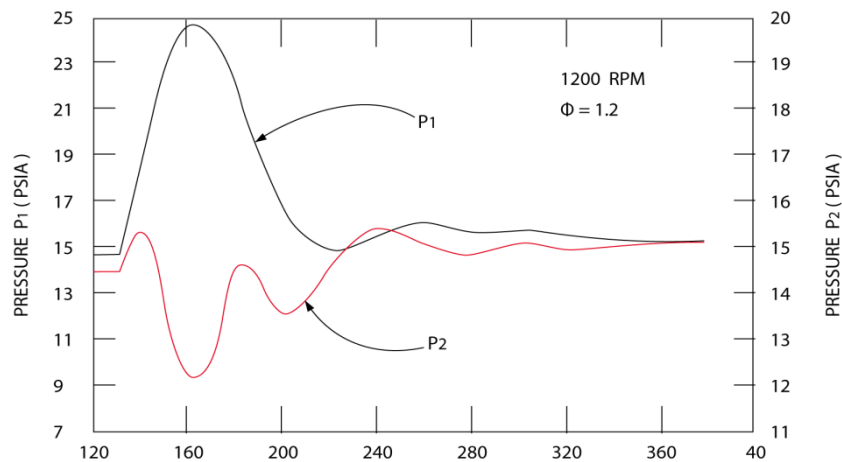
Fuente: Heywood J, "Time-Resolved Measurements of Hydrocarbon Mass Flowrate in the Exhaust of a Spark-Ignition Engine".

Figura 26. Variación de la Temperatura de entrada.



Fuente: Heywood J, "Time-Resolved Measurements of Hydrocarbon Mass Flowrate in the Exhaust of a Spark-Ignition Engine".

Figura 27. Variación de la Presión de entrada.



Fuente: Heywood J, "Time-Resolved Measurements of Hydrocarbon Mass Flowrate in the Exhaust of a Spark-Ignition Engine".

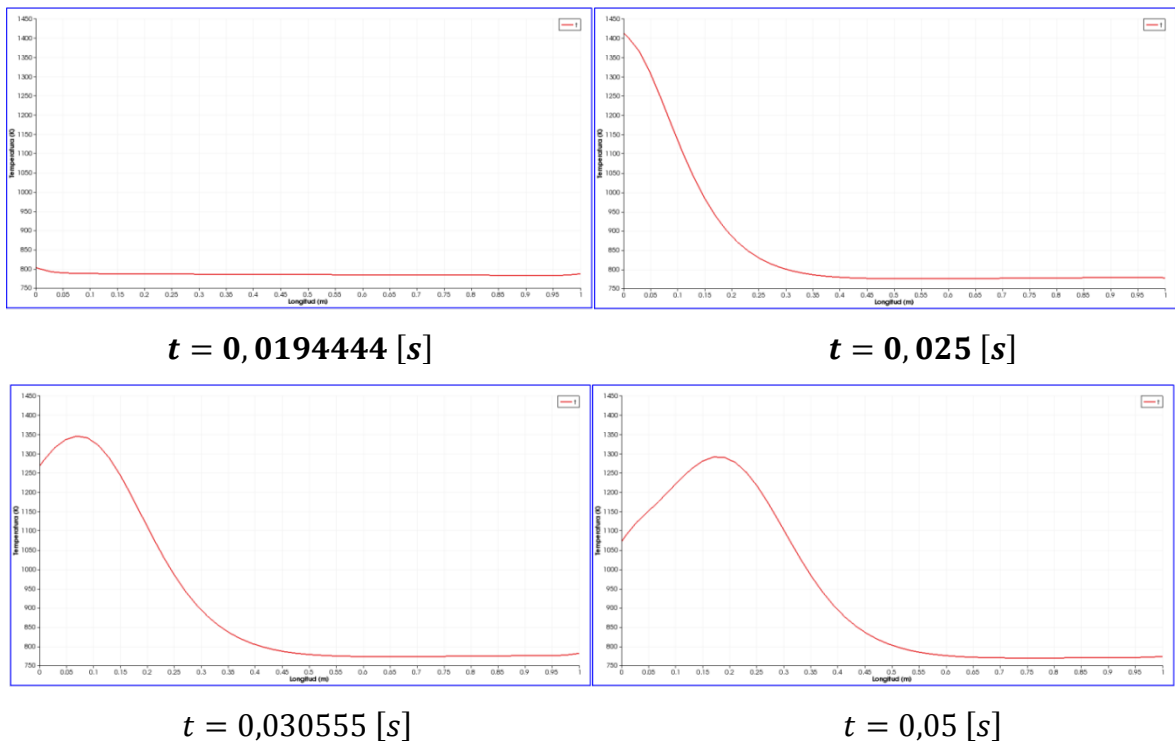
A continuación se visualizan los resultados obtenidos de la simulación para el caso 2, los resultados dados por el programa se exportaron y se visualizaron en ParaView versión 3.10.1 obteniéndose las gráficas de las variaciones de

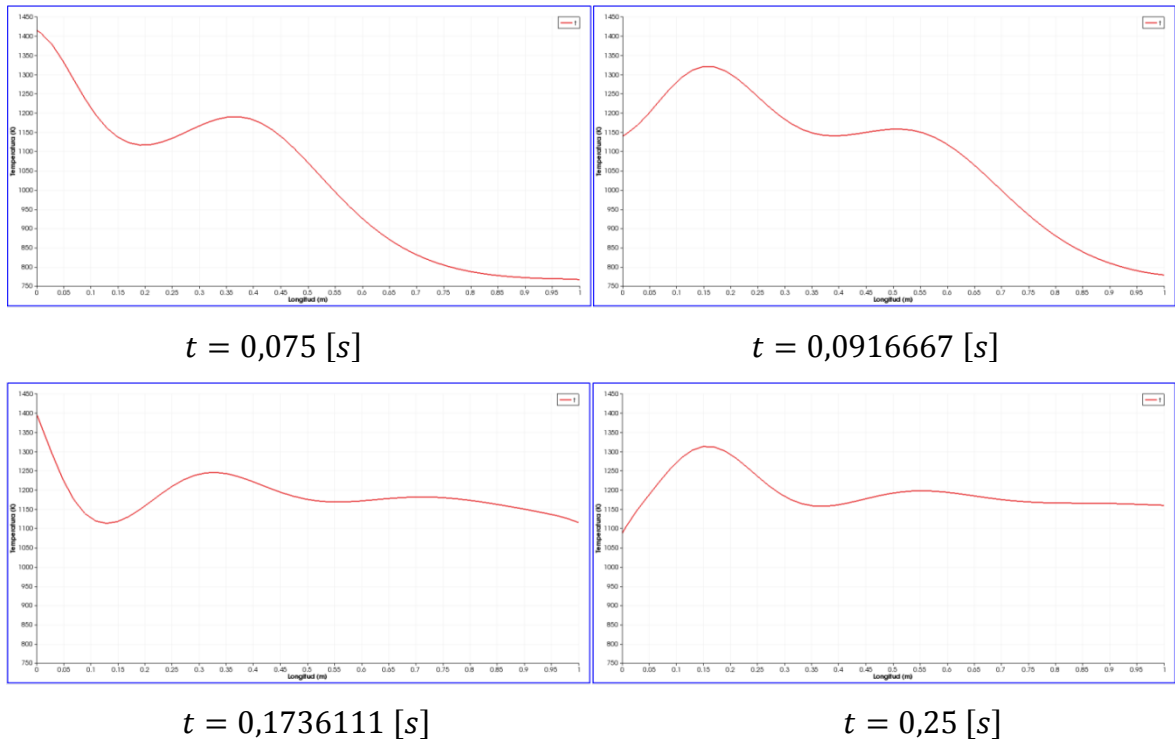
Temperatura, Presión y Velocidad a lo largo del ducto para varios tiempos de simulación (Figuras 28, 29 y 30 respectivamente).

La duración del ciclo para un motor de 7200 [RPM] como el utilizado es de 0,05 [s], así que los tiempos escogidos para mostrar los resultados en las Figuras 28, 29 y 30 deben ser diferentes a los múltiplos de 0,05 [s] y así observar como varían las propiedades de entrada en las respectivas gráficas.

Como parámetro inicial ( $t = 0,0$  [s]) se utilizó que las propiedades del fluido en el interior del ducto son constantes, la variación de estas propiedades se da cuando la válvula de escape se abre dando una variación en las condiciones de entrada y este comportamiento se da para el tiempo  $t = 0,018777$  [s].

Figura 28. Simulación de la Temperatura para el caso 2 a lo largo del ducto:



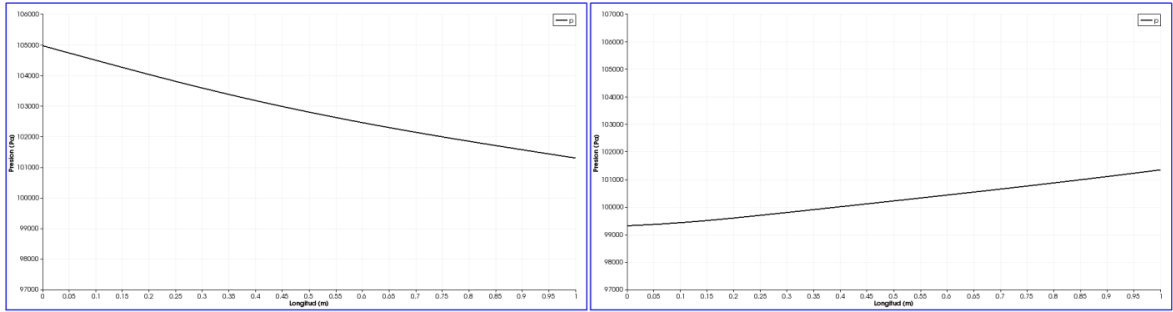


Fuente: Autor.

En la Figura 28 se observa que la Temperatura de entrada para los diferentes tiempos de simulación varía, esta variación de la propiedad de entrada hace que la Temperatura del fluido a lo largo del ducto cambie tratando de estabilizarse para los VC más lejanos a la entrada del ducto y para varios ciclos de simulación ( $t = 0,25 [s]$ ).

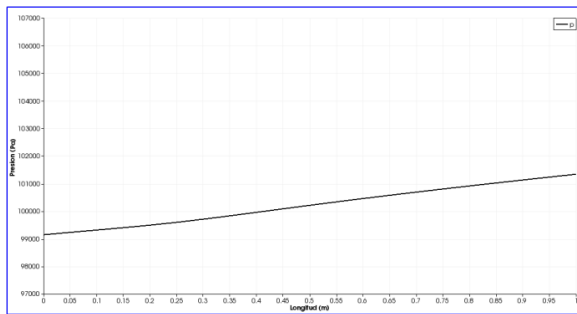
La Figura 29 muestra la variación de la Presión del fluido interior a lo largo del ducto para diferentes tiempos de simulación, en esta figura se observa un comportamiento cíclico de la Presión dado por el movimiento alternativo del pistón.

Figura 29. Simulación de la Presión para el caso 2 a lo largo del ducto:

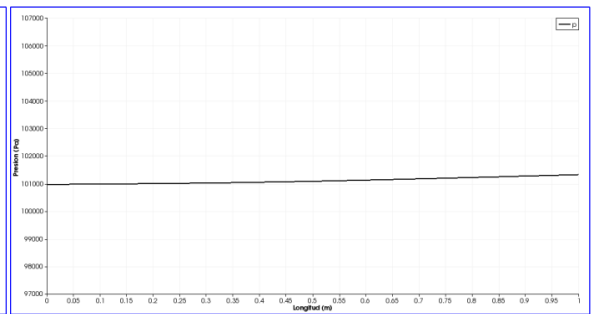


$t = 0,0194444 [s]$

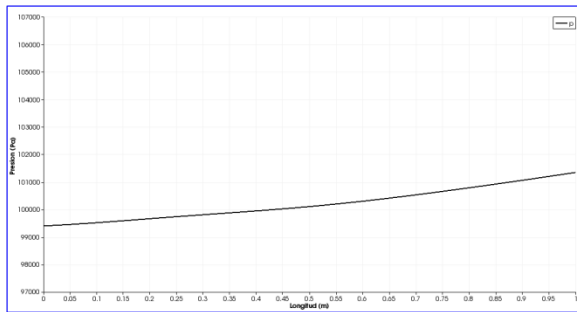
$t = 0,025 [s]$



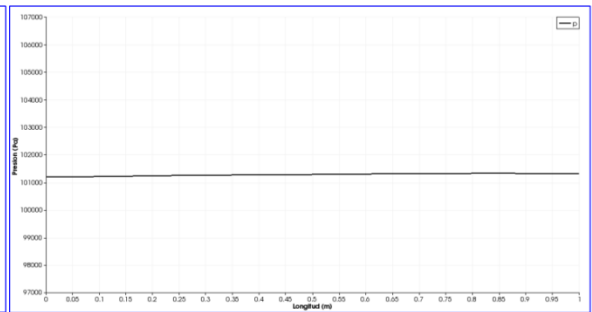
$t = 0,030555 [s]$



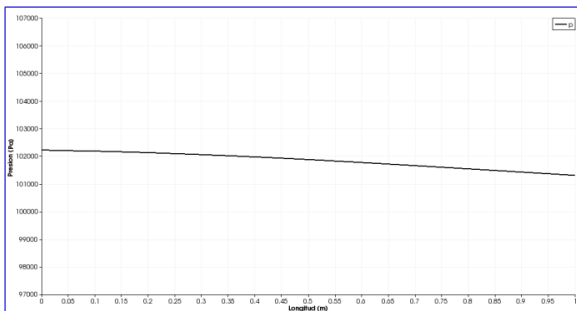
$t = 0,05 [s]$



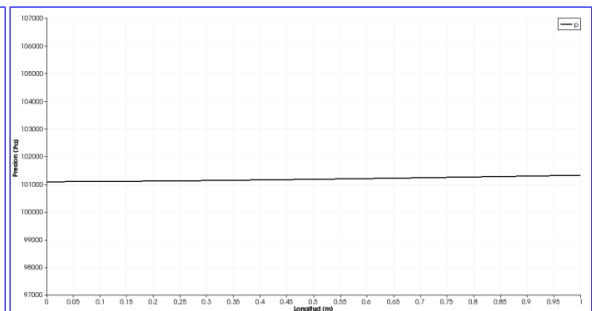
$t = 0,075 [s]$



$t = 0,0916667 [s]$



$t = 0,1736111 [s]$

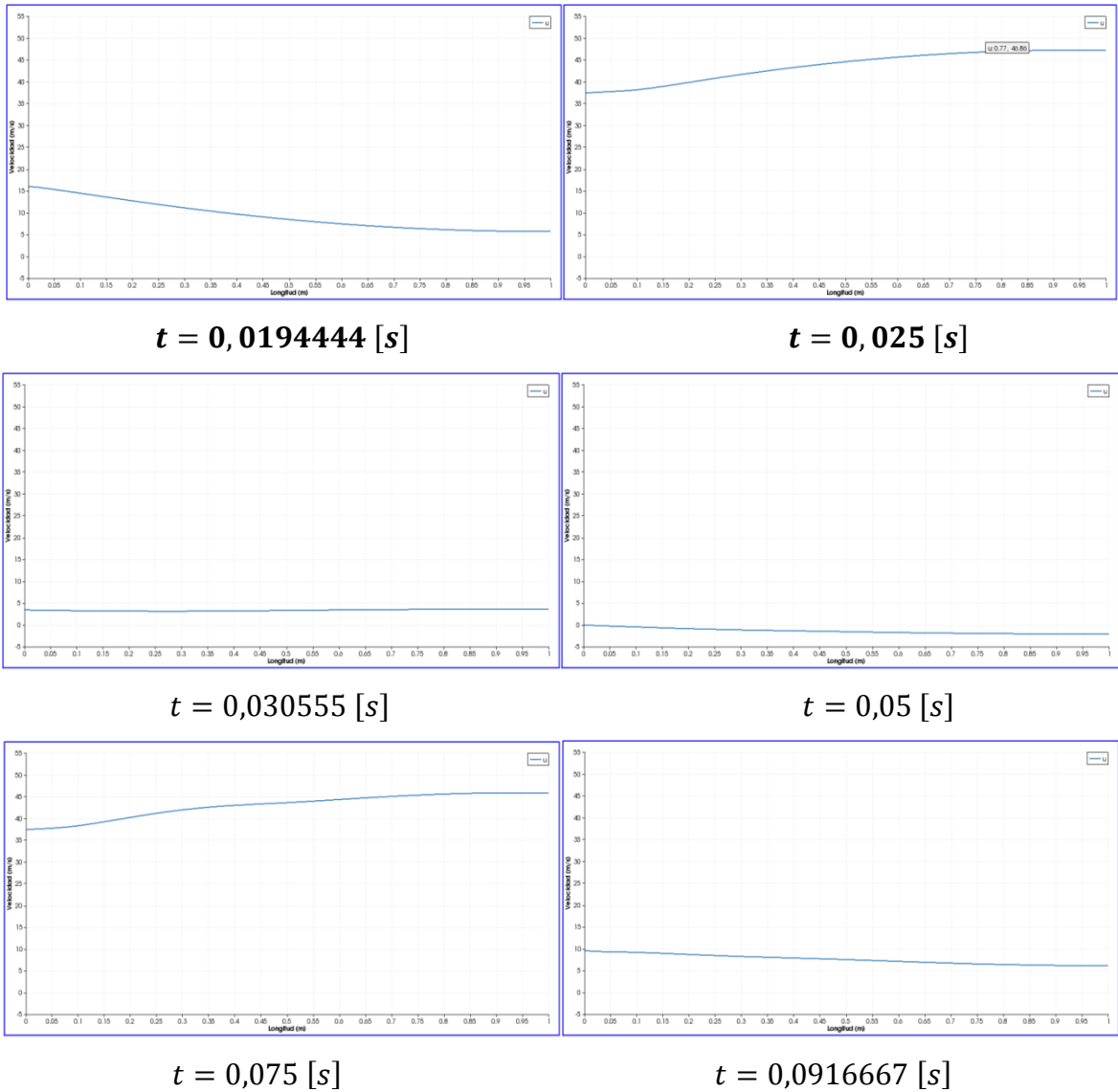


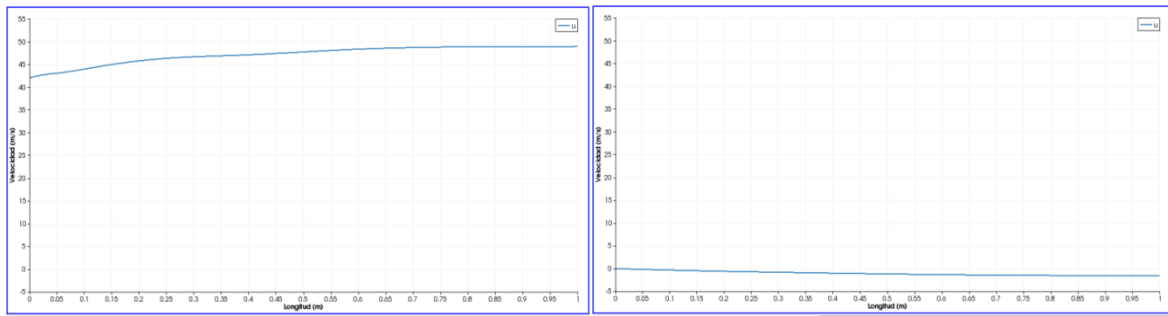
$t = 0,25 [s]$

Fuente: Autor.

La Figura 30 muestra la variación de la Velocidad del flujo a lo largo del ducto para diferentes tiempos de simulación e igualmente en esta figura se observa un comportamiento cíclico de la Velocidad dado por el movimiento alternativo del pistón.

Figura 30. Simulación de la Velocidad para el caso 2 a lo largo del ducto:





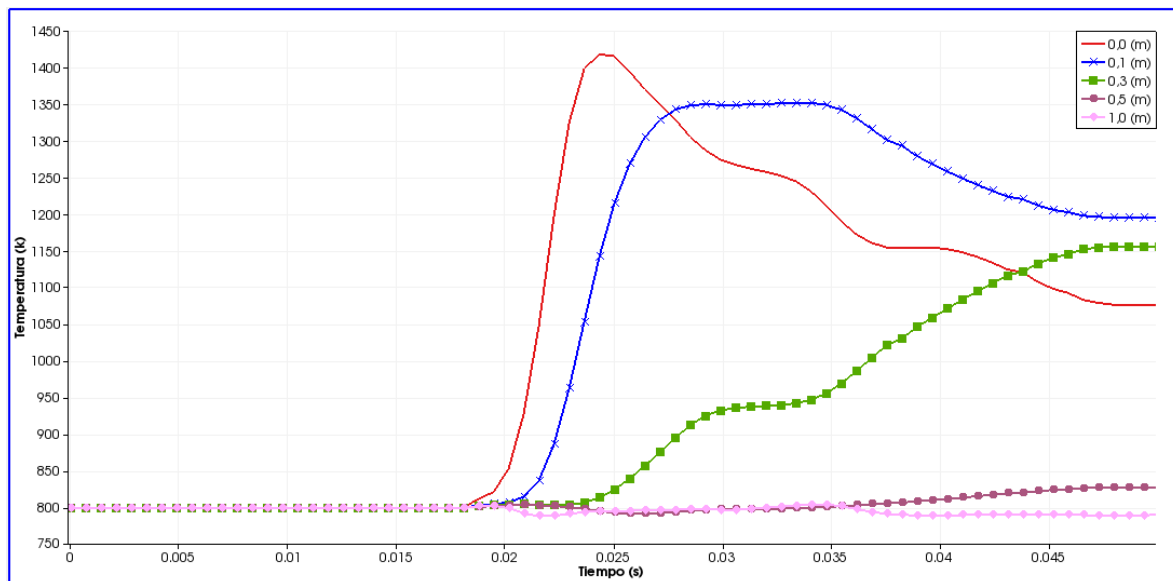
$t = 0,1736111 [s]$

$t = 0,25 [s]$

Fuente: Autor.

La Figura 31 muestra la variación de la Temperatura para un ciclo del motor para varias distancias a lo largo del ducto, estas distancias son tomadas respecto a la entrada del flujo al ducto.

Figura 31. Simulación de la Temperatura para el caso 2 a diferentes distancias en el ducto y para un ciclo del motor (0,05 [s]).

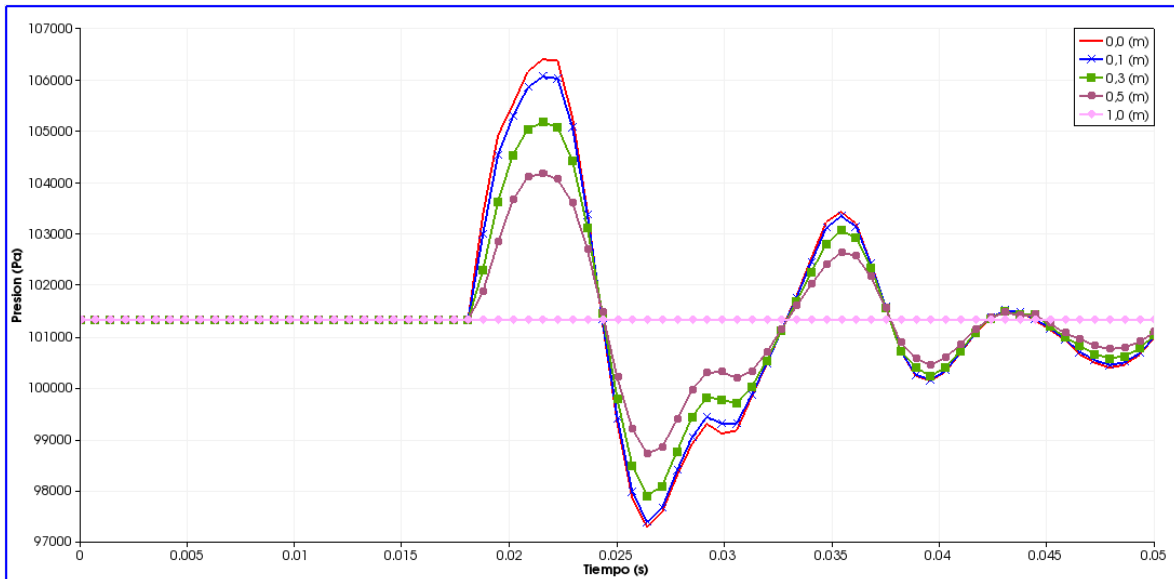


Fuente: Autor.

En la Figura 31 se observa que al aumentar la distancia del punto de análisis (por ejemplo para 0,5 (m)) la Temperatura trata de seguir el mismo comportamiento que el de la entrada pero presentándose una respuesta más tardía.

La Figura 32 muestra la variación de la Presión para un ciclo del motor y para varias distancias a lo largo del ducto.

Figura 32. Simulación de la Presión para el caso 2 a diferentes distancias en el ducto y para un ciclo del motor (0,05 [s]).

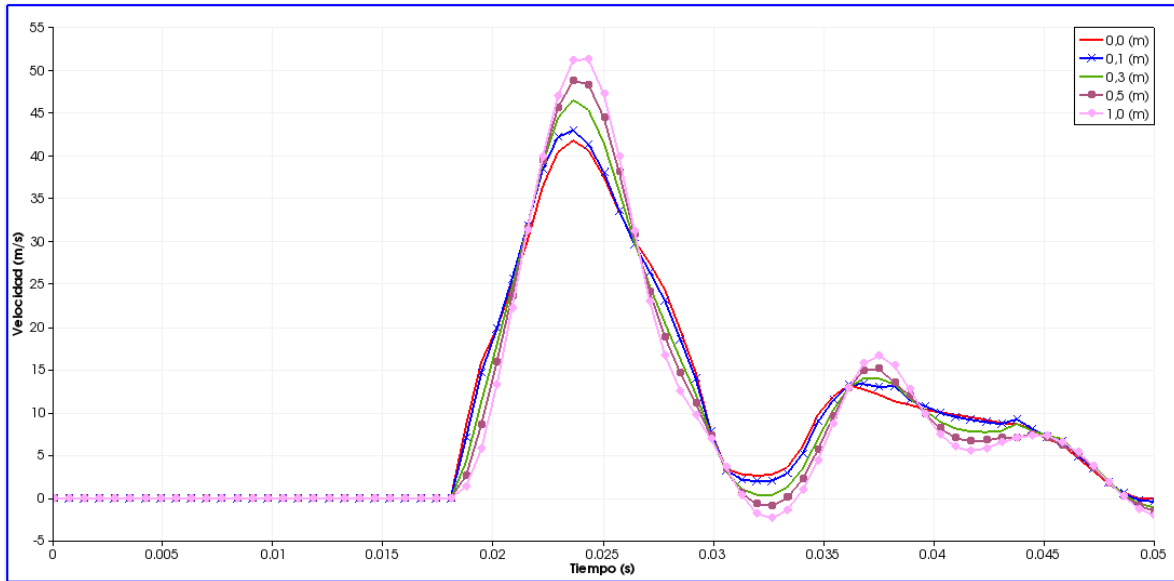


Fuente: Autor.

En la Figura 32 se observa que la Presión para el VC que se encuentra a 1,0 [m] es constante, esto se debe a que para esa distancia, se tiene es una condición de frontera de salida igual a la presión atmosférica que no varía en el tiempo. También, se ve que a medida que se aleja el VC de control de la entrada del ducto su Presión tiene menos amplitud, esto se debe a que el flujo tiene menos resistencia por fricción aguas abajo.

En la Figura 33 se muestra la variación de la Velocidad del flujo para un ciclo del motor y para varias distancias a lo largo del ducto.

Figura 33. Simulación de la Velocidad para el caso 2 a diferentes distancias en el ducto y para un ciclo del motor (0,05 [s]).

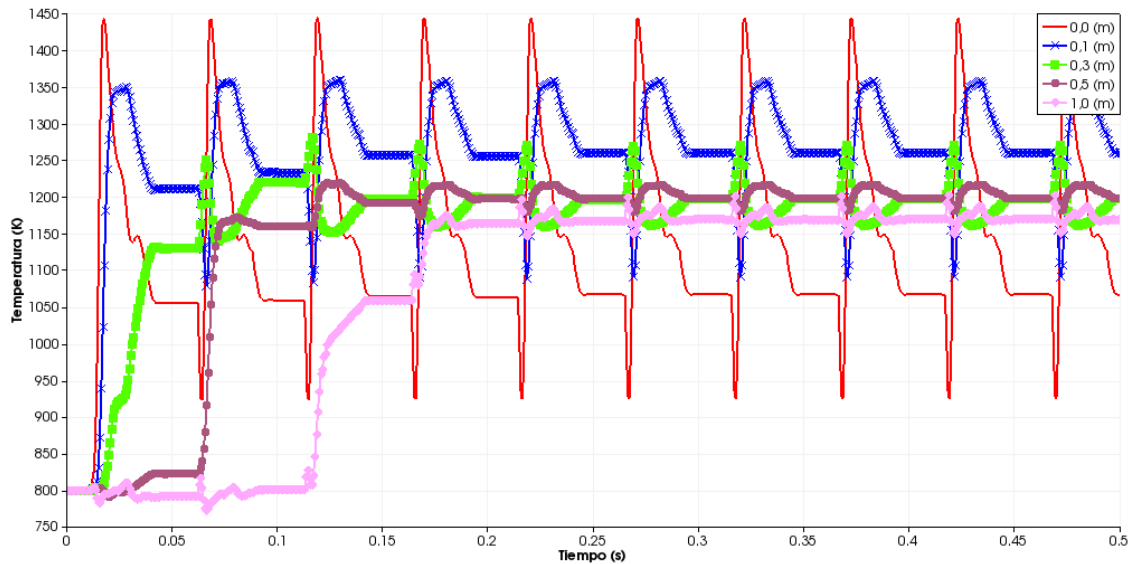


Fuente: Autor.

Para la Figura 33 se observa que a medida que se aleja el VC de control de la entrada del ducto la Velocidad tiene mayor amplitud, esto es debido a que el gradiente de Presión para esos VC es mayor.

Las siguientes figuras (Figuras 34, 35 y 36) muestran la variación de la Temperatura, Presión y Velocidad respectivamente para 10 ciclos del motor y para varias distancias a lo largo del ducto, se tomaron varios ciclos para poder observar el comportamiento de las propiedades bajo régimen estable.

Figura 34. Simulación de la Temperatura para el caso 2 a diferentes distancias en el ducto y para 10 ciclos del motor (0,5 [s]).

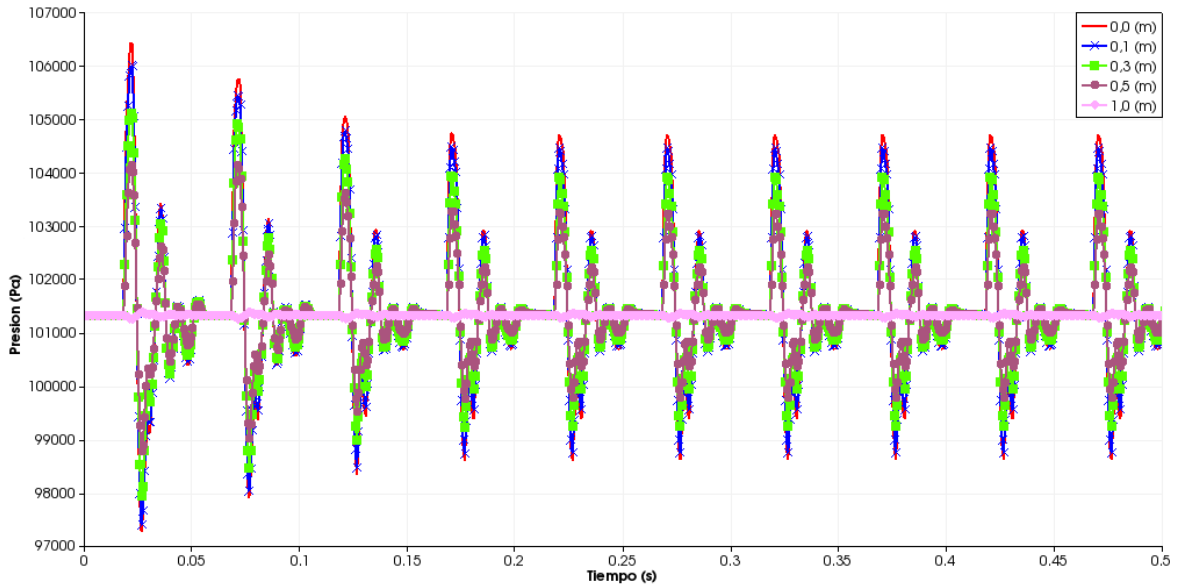


Fuente: Autor.

En la Figura 34 se observa que a medida que pasa el tiempo y cuando el VC se aleja de la entrada (por ejemplo para 0,5 [m] y 1,0 [m]) la Temperatura del fluido en el interior del ducto aumenta y se estabiliza.

Para la Figura 35 se observa un comportamiento de la variación de la presión en la entrada del ducto (ver para 0,0 (m)) muy parecido al que se obtuvo experimentalmente en la bibliografía [42] (ver Figura 27 para P2, presión en el ducto de escape), la diferencia se debe a que en la presente simulación no se contó con las mismas características del ducto utilizadas en la medición de los datos obtenidos en [42].

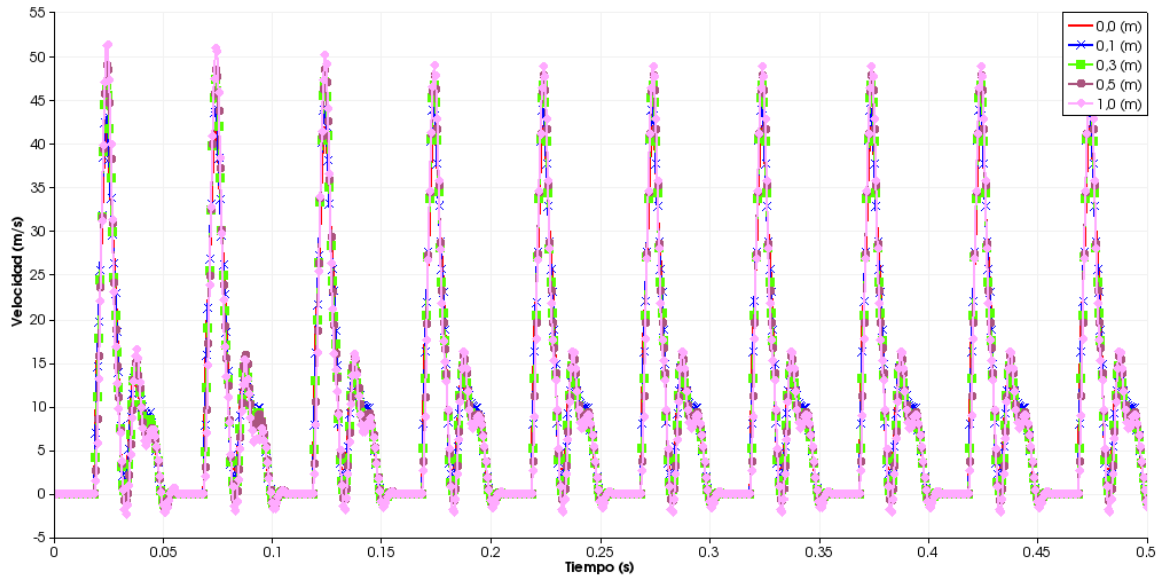
Figura 35. Simulación de la Presión para el caso 2 a diferentes distancias en el ducto y para 10 ciclos del motor (0,5 [s]).



Fuente: Autor.

En las Figuras 35 y 36 se observa una variación cíclica de las propiedades (Presión y Velocidad respectivamente) debido al movimiento periódico del pistón en los MCI y una estabilización cíclica de las propiedades al pasar el tiempo cuando se llega a un régimen estable de las condiciones de entrada del ducto.

Figura 36. Simulación de la Velocidad para el caso 2 a diferentes distancias en el ducto y para 10 ciclos del motor (0,5 [s]).



Fuente: Autor.

**Caso 3:** Para este caso se utilizó un flujo con propiedades constantes a la entrada del ducto y se comparó con una simulación realizada en COMSOL versión 4.3b.

Las características del ducto y del flujo que se utilizaron para la simulación en el presente proyecto se muestran en la Tabla 7.

Tabla 7. Características del ducto y flujo.

Diámetro interno	0,05251 [m]
Espesor	0,00391 [m]
Rugosidad	$1,0e - 4$
Longitud	5 [m]
Flujo másico	0,005 [kg/s]
Temperatura	800 [K]
Presión	1 [MPa]

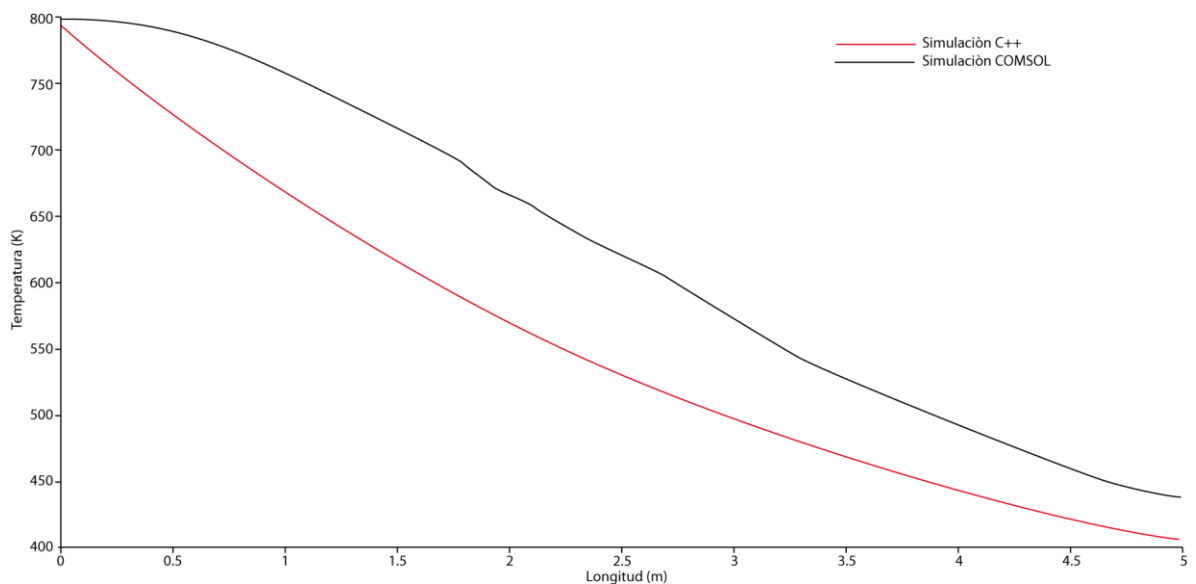
Fuente: Autor.

Para COMSOL se utilizaron las mismas características del flujo como parámetros de entrada mostradas en la Tabla 7 y se trabajó con las propiedades que trae para el aire (considerado como gas ideal) y del material del ducto (Steel AISI 4340).

Analizando los 2 programas de simulación, el presente proyecto y COMSOL se cuenta con diferencias importantes: para el presente proyecto se trabajó con el Método de Volúmenes Finitos y se realizó un simulación unidimensional mientras que COMSOL trabaja con el Método de Elementos Finitos y se realizó una simulación tridimensional, estas diferencias hacen que los resultados no sean los mismos pero la comparación con este programa sirve para verificar la tendencia de los resultados.

En las siguientes figuras (Figuras 37, 38 y 39) se pueden observar las comparaciones de los resultados de la variación de la Temperatura, Presión y Velocidad respectivamente dadas por la simulación en C++ contra los obtenidos por COMSOL versión 4.3b.

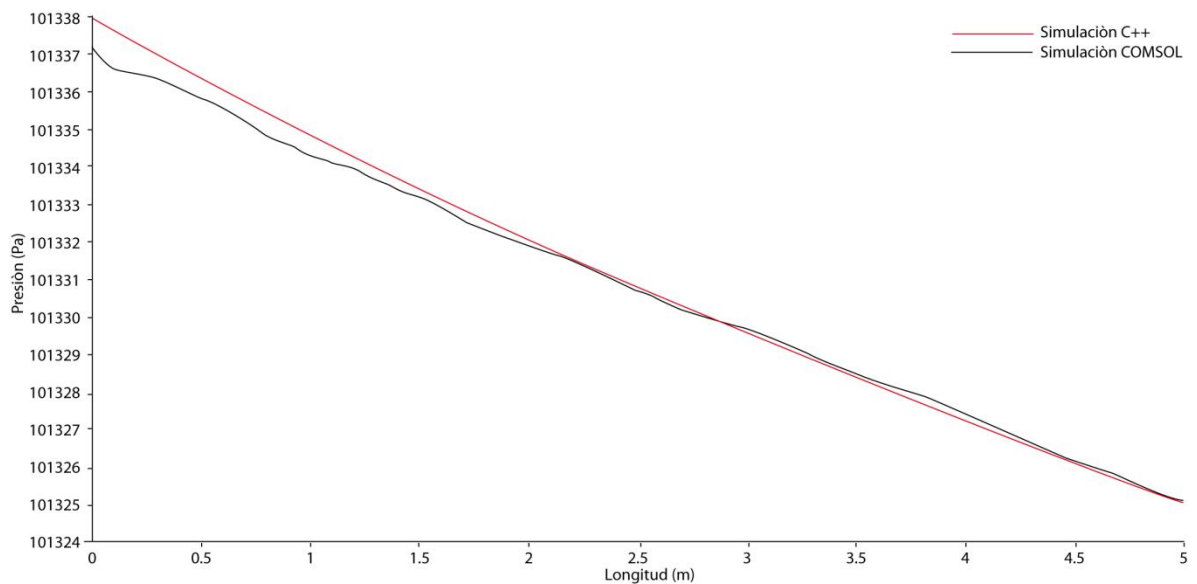
Figura 37. Comparación de los resultados para la Temperatura.



Fuente: Autor.

En la Figura 37 se observa una caída de Temperatura exponencial de acuerdo a lo comentado al inicio de esta sección y siguiendo la misma tendencia de la teoría (ver Figura 20) típica para un intercambiador de calor de una sola corriente, la diferencia con los valores obtenidos COMSOL se debe a las diferencias en las propiedades de los materiales.

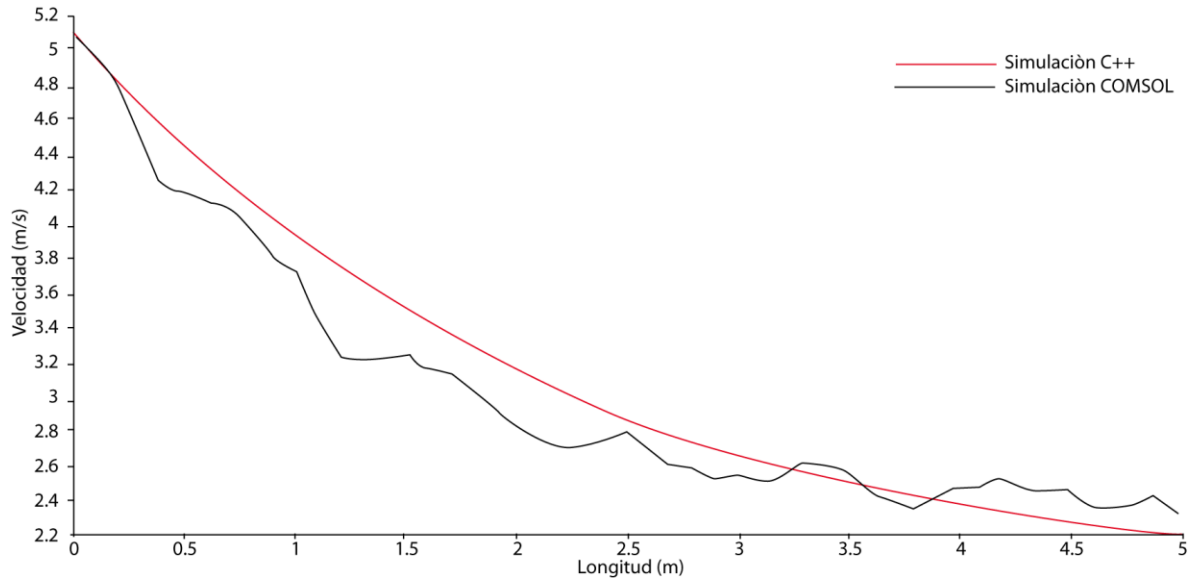
Figura 38. Comparación de los resultados para la presión.



Fuente: Autor.

Para la Figura 38 se observa la misma tendencia con una caída de Presión casi lineal conforme a la teoría de la termofluidodinámica, la diferencia de los valores obtenidos en la simulación respecto a los arrojados por COMSOL se debe a la diferencia del factor de fricción de la tubería utilizada en COMSOL.

Figura 39. Comparación de los resultados para la Velocidad.



Fuente: Autor.

En la Figura 39 se observa una caída de la Velocidad exponencial conforme a la teoría de la termofluidodinámica e igualmente la diferencia de los valores obtenidos en la simulación respecto a los arrojados por COMSOL se debe a la diferencia del factor de fricción de la tubería utilizada en COMSOL.

## 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Para el análisis en CFD se debe verificar que se cumplan las siguientes características [22]:

1. Consistencia.
2. Estabilidad.
3. Convergencia.
4. Precisión.
5. Conservación.
6. Solución acotada.

En el método utilizado (método SIMPLE) como primera iteración se asume la velocidad del fluido como un valor conocido para resolver la ecuación de cantidad de movimiento, este valor puede diferir significativamente del valor que se encuentra en dicha ecuación para las primeras iteraciones, de esta forma, se cumple con la **consistencia** de las ecuaciones cuando se tenga el campo de la velocidad correcto.

El modelo presentado es condicionalmente **estable** por lo que se definieron unos parámetros de relajación para la corrección de presión ( $\alpha = 0,1$ ), corrección de velocidad ( $\beta = 1,0 - \alpha$ ) y corrección de energía ( $\min(\alpha; 0,3)$ ) para que el proceso sea estable. Los valores óptimos de estos parámetros de relajación dependen, entre otros factores, del avance en el tiempo y este último depende del tamaño de los volúmenes de control.

La **convergencia** del método utilizado es baja, para la simulación presentada la norma del residuo másico alcanzó valores menores a  $1,0e - 7$  para más de 160 iteraciones.

Los resultados obtenidos tienen una **precisión** satisfactoria pero una baja **exactitud** cómo se pudo observar en las Figuras 37, 38 y 39. Esto se debe a varios factores:

- El modelo utilizado es unidimensional mientras que en COMSOL se tuvo en cuenta la variación de las propiedades en las tres dimensiones.
- Como material del ducto se utilizó en COMSOL el acero que se encuentra por defecto (Steel AISI 4340, sin poder cambiar las propiedades de dicho material) mientras que para el modelo presentado se utilizó un acero con rugosidad de  $\varepsilon = 1,0e - 4$  (tomado de [31]), además de la rugosidad esta diferencia en el material se ve reflejado en la conductividad térmica del mismo afectando por lo tanto la transferencia de calor.
- Para el modelo se utilizó el método de los volúmenes finitos mientras que COMSOL utiliza el método de elementos finitos.

La propiedad de la **conservación** se cumple al satisfacer el criterio de convergencia del máximo valor permitido para el residuo másico y Los resultados encontrados para el método utilizado son **acotados** cuando la solución converge.

Como conclusiones se tiene:

1. Analizando los 3 casos mostrados se encontró que aunque no se tienen los mismos valores que los obtenidos experimentalmente para la Presión (Figura 27) ni para la Temperatura, Presión y Velocidad dados por COMSOL (Figuras 37, 38 y 39) el modelo utilizado muestra la misma tendencia por lo que se considera que el modelo utilizado es el correcto.

2. La solución de las ecuaciones de la mecánica de fluidos se puede llevar a cabo al tratar las ecuaciones como un acoplamiento de las ecuaciones de difusión con las ecuaciones de convección – difusión para el flujo de los gases de escape en los MCI.
3. El método SIMPLE ha probado ser un método iterativo efectivo para resolver las ecuaciones de Navier Stokes aplicadas al flujo dentro de un ducto.
4. El uso de un valor de referencia para la ecuación de corrección de presión en el método SIMPLE introduce un error en el residuo másico que no afecta significativamente los resultados.
5. El uso del esquema upwind para el término convectivo y esquema implícito para el análisis transitorio en el método SIMPLE da un proceso que es condicionalmente estable de acuerdo al valor del parámetro de relajación y el avance en el tiempo seleccionado.
6. El análisis realizado respecto a la transferencia de calor que se simuló da buenos resultados, esto se ve claramente en los porcentajes de errores mostrados en la Tabla 4 lo que indica una buena tendencia de los resultados de la simulación.
7. La predicción de los resultados obtenidos en la simulación demostró ser buena para predecir el flujo de los gases en los ductos de escape de los MCI.

## 6. RECOMENDACIONES Y OBSERVACIONES

1. En el presente trabajo se simuló el flujo de un fluido a lo largo de un tubo en régimen laminar utilizando el Método de Volúmenes Finitos. Como mejoras para hacer una simulación más cercana a la realidad se puede tener en cuenta lo siguiente:
  - a. Considerar la composición real del fluido que sale del cilindro incluyendo el planteamiento de las ecuaciones de conservación de especies.
  - b. Tener en cuenta la variación de las propiedades en 2 o 3 dimensiones.
  - c. Tener en cuenta la turbulencia del flujo por medio de los modelos  $k - \varepsilon$  u otros.
  - d. Tener en cuenta la unión de ductos típico en los múltiples de escape de los MCI.
  - e. Considerar la variación del diámetro a lo largo de los ductos.
2. Para el presente trabajo de grado se puede mejorar la convergencia utilizando diferentes métodos de solución como los métodos SIMPLER, SIMPLEC, PISO u otros.
3. Para una validación más precisa se recomienda utilizar el software OpenWAM del laboratorio CMT de la Universidad Politécnica de Valencia UPV.
4. Para validar completamente el modelo se necesita el diseño y construcción de una instalación experimental en la escuela de ingeniería mecánica para ajustar y calibrar debidamente el modelo.

## BIBLIOGRAFÍA.

- [1] Agudelo R. John, Sánchez Carlos A., Agudelo Andrés F., “Aplicación de un Modelo de Acción de Ondas al Estudio de la Renovación de la Carga en Motores de Cuatro Tiempos”, Ingeniería & Desarrollo, vol. 18, pp 87-104, Noviembre 2005.
- [2] Álvarez J., Callejón I., “Máquinas Térmicas Motoras”, Alfa omega, México, 2005.
- [3] Arnau F. J., “Aportaciones al Cálculo Numérico para el Modelado del Flujo Compresible Unidimensional en Conductos de M.C.I.A.”, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, España, (2003).
- [4] Barbosa M. José M., Salcedo S. Juan F., “Herramienta Educativa en la Web Basada en la Simulación de los Procesos Termofluidodinámicos de Motores de Combustión Interna, SIMTA 1.0”, Tesis de Ingeniería, Universidad Industrial de Santander, Colombia, 2007.
- [5] Bayraktar, H., “Experimental and Theoretical Investigation of Using Gasoline-Ethanol Blends in Spark-Ignition Engines”, Renewable Energy, Vol. 30, pp. 1733-1747, 2005.
- [6] Benson, R., “A numerical solution of unsteady flow problems”, Int. J. Mech. Sci., Vol. 6, pp.117-144, 1964.
- [7] Blair G., “Design and Simulation of Four – Stroke Engines”, SAE International, pp. 153-317, 1999.

- [8] Blair G., et al., "An Unsteady Flow Analysis of Exhaust Systems for Multicylinder Automobile Engines", SAE Paper 700123, (1970).
- [9] Blair G., Mackey, D., Ashe, M., Chatfield, G., "Exhaust tuning on Four-Stroke Engine; Experimentation and simulation", SAE Paper 2001-01-1797, 2001.
- [10] Blair G., McBurney, D., McDonald, P., McKernan, P., Fleck, R., "Some Fundamental Aspects of the Discharge Coefficients of Cylinder Porting and Ducting Restrictions", SAE paper 980764, 1998.
- [11] Blazek J., "Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications", ELSEVIER, Netherlands, 2001.
- [12] Bourdarias C., Gerbi, S., "A Conservative Model for Unsteady Flows in Deformable Closed Pipes and its Implicit Second-Order Finite Volume Discretization", Computers & Fluids, Vol 37, pp. 1225-1237, 2008.
- [13] Cengel Y., Boles M., "Termodinámica: un Enfoque Práctico", 6 ed., McGraw Hill, México, 2009.
- [14] Cengel Y., Boles M., "Transferencia de Calor y Masa: un Enfoque Práctico", 3 ed., Mc Graw Hill, México, 2007.
- [15] Corberán S. J. M., A. Pérez, "Desarrollo de un Nuevo Esquema para el Cálculo del Flujo no Estacionario Unidimensional en Conductos de Sección Variable", II Cong. Métodos Numéricos en Ingeniería, Vol. II, 1993.
- [16] Corberán S. J. M., Gascón M. Ll., "Estudio comparativo de esquemas en diferencias finitas para el cálculo del flujo unidimensional no estacionario", Actas X Cong. Nac. Ing. Mecánica 4, 1992.

- [17] Corberán S. J. M., Royo P. R., Gascón M. Ll., “Esquemas Numéricos Avanzados para el Cálculo del Flujo por el Interior de los Motores de Combustión Interna Alternativos”, *Mecánica Computacional*, Vol. 13, Noviembre 2004.
- [18] Cuadrado Ilba, Cadavid Francisco, Agudelo John, Sánchez Carlos, “Modelado de Flujo Compresible Unidimensional y Homocéntrico por el Método de Volúmenes Finitos”, *Dyna*, Vol. 75, pp. 199-210, julio 2008.
- [19] Cuadrado, Ilba. “Estudio Termofluidodinámico del proceso de renovación de la carga en motores de combustión interna alternativos”, Tesis de Maestría. Universidad de Antioquia, 2007.
- [20] Dolz, V. R., “Contribución al Modelado de la Transmisión de Calor en los Motores y su Aplicación en el Aprovechamiento Energético de los Gases de Escape Durante los Transitorios de Carga”, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, España, 2006.
- [21] Ferziger J., Peric M., “Computational Methods for Fluid Dynamics”, 3 ed., Springer, Berlin, 2002.
- [22] Fuentes D., David, A., “Mecánica de Fluidos Computacional”, Universidad Industrial de Santander, 2009.
- [23] Gascón Ll., “Estudio de Esquemas en Diferencias Finitas para el Cálculo del Flujo Compresible Unidimensional, no Estacionario y no Isoentrópico”, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica Valencia, España, 1995.
- [24] Gonzalo C. Luis, “Simulación del Flujo no Estacionario en los Colectores de Admisión y Escape de un Motor Policilíndrico”, Tesis Doctoral, Universidad de las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas de Gran Canaria, Gran Canaria, 1998.

- [25] Haworth D., "A Review of Turbulent Combustion Modeling for Multidimensional in-Cylinder CFD", SAE Paper 2005-01-0993, 2005.
- [26] Heywood Jhon B., "Internal combustion engine fundamentals", McGraw Hill, 1988.
- [27] Kesgin Ugur, "Study on The Design of Inlet and Exhaust System of a Stationary Internal Combustion Engine", Energy Conversion & management, 46, pp. 2258-2287, 2005.
- [28] Laney, C. B., "Computational Gasdynamics", Cambridge University Press, (1998).
- [29] Mantilla J., Galeano, C., Ochoa J., "Prediseño y Simulación de un Sistema de Inyección Directa para un Motor de Combustión Interna de dos Tiempos", Revista Scientia et Técnica, Año 13, No. 34, 2007, pp. 267-272.
- [30] Mantilla Juan M., Falla Camilo A., Gómez Jorge A., "Simulación del flujo de Gas en Ductos de Escape de Motores de Combustión Interna. Primera parte: Aspectos Teóricos", Revista Ingeniería e Investigación, vol. 29, pp 115-125, Abril 2009.
- [31] Mills A., "Transferencia de Calor", McGraw Hill, Madrid, 1999.
- [32] Patankar S., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Taylor & Francis, 1980.
- [33] Payri F., Desantes J., "Motores de Combustión Interna Alternativos", Reverté S.A, 2011.

- [34] Pedroche S., D. F., “Contribución a la Simulación Numérica Multidimensional del Flujo en Motores de Combustión Interna Alternativos”, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España, 1994.
- [35] Pérez G. José, “Estudio Numérico y Experimental del Flujo Compresible Estacionario en Uniones de Conductos”, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cartagena, Cartagena, España, 2006.
- [36] Pérez G. José., Sanmiguel R. E., Hernández G. J., Viedma, A., “Numerical and Experimental Investigations on Internal Compressible Flow at T-Type Junctions”, *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol 31, pp. 61-74, 2006.
- [37] Ramajo Damian E., “Simulación Computacional de los Procesos Fluido dinámicos en el Interior de Motores de Combustión Interna”, Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, 2008.
- [38] Romero P., Carlos A., “Contribución al Conocimiento del Comportamiento Térmico y la Gestión Térmica de los Motores de Combustión Interna Alternativos”, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España, 2009.
- [39] Sánchez C., Valencia A., “Modelación de la Renovación de la Carga en Motores de Combustión Interna Alternativos 4 Tiempos”, Proyecto de fin de carrera, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, 2003.
- [40] Varol Yasin, Oztop Hakan F., Firat Mujdat, Koca Ahmet, “CFD Modeling of Heat Transfer and Fluid Flow Inside a Pent-Roof Type Combustion Chamber Using Dynamic Model”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol 37, pp. 1366-1375, 2010.

[41] Xu Xiaofeng, Lee Joon, Pletcher Richard, "A Compressible Finite Volume Formulation for Large Eddy Simulation of Turbulent Pipe Flows at Low Mach Number in Cartesian Coordinates", Journal of Computational Physics, Vol 203, pp. 22-48, 2005.

[42] Tabaczynski R., Heywood Jhon B., Keck J, "Time-Resolved Measurements of Hydrocarbon Mass Flowrate in the Exhaust of a Spark-Ignition Engine", Society of Automotive Engineers, Detroit, 1972.