

**SISTEMA ÓPTICO PARA LA EXTRACCIÓN DE PARÁMETROS
METROLÓGICOS DEL PIE**

**ALBERTO PATIÑO VANEGAS
COD. 0997203**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2004**

**SISTEMA ÓPTICO PARA LA EXTRACCIÓN DE PARÁMETROS
METROLÓGICOS DEL PIE**

ALBERTO PATIÑO VANEGAS

Trabajo de investigación presentado como requisito
Para optar al título de MAGÍSTER EN FÍSICA

Director

Dr. JAIME ENRIQUE MENESES FONSECA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2004**

AGRADECIMIENTOS

Al Doctor Jaime Meneses director del trabajo.

Gran parte de la construcción del sistema se desarrolló en el taller de la Escuela de Física de la Universidad Industrial de Santander. Agradezco al Señor Henry Sánchez quien estaba a cargo del taller por su valiosa colaboración en todo el proceso de construcción.

Agradezco al Doctor Arturo Plata por acortarme el camino en la programación de la adquisición de las cámaras y por su disposición en la solución de dudas.

Especial agradecimiento a mis amigos: Emmanuel Torres, con quien inicie el proceso de calibración de cámaras por mostrarme el mundo de las computadoras y dejarme ver su estilo de programación; Rafael Torres, por toda la óptica que aprendí con sus razonamientos e ingeniosa intuición; David Miranda con quien inicie el proceso de reconstrucción 3D automatizado; Antonio Gutiérrez, Dorian Caraballo y David Martínez por las discusiones respecto a la física y temas de la vida.

A mi familia... No hay palabras.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN GENERAL	1
CAPITULO 1. CALIBRACIÓN GEOMETRICA DE CÁMARAS.....	6
1. 2. MODELOS DE CÁMARAS.....	7
1.2.1. Modelo de cámara libre de distorsiones (Cámara Pinhole)	7
1.2. 2. Modelos de cámara con distorsiones geométricas.	10
1.2. 3. Simulación de los modelos de distorsiones geométricas.....	13
1.2.3. 2. Simulación de distorsión descentral.....	15
1.3. 1. Matriz de proyección.....	18
1.3. 2. Proceso de calibración por Transformación Lineal Directa (DLT).....	20
1.3. 3. Estimación no lineal	23
1.3. 4. Corrección de la proyección asimétrica	24
1. 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES.....	28
1.4. 1. Características de las cámaras utilizadas.....	28
1.4. 2. Proceso de calibración.....	29
1.4. 3. Parámetros intrínsecos obtenidos de la calibración.....	31
1.4. 4. Exactitud de los parámetros obtenidos.....	31
1.4. 5. Rectificación de imágenes (Corrección de distorsión)	33
1. 5. CONCLUSIÓN	35
CAPITULO 2. TÉCNICA DE RECONSTRUCCIÓN 3D POR TRIANGULACIÓN LASER	36
2.2. GEOMETRÍA DE LA TRIANGULACIÓN LÁSER USADA	37
2.2.1. CURVAS TEÓRICAS DE CALIBRACIÓN.	38
2.2.2. CURVAS DE CALIBRACIÓN EXPERIMENTALES	43
2.3. CONCLUSIONES.....	50
CAPITULO 3. SISTEMA DE RECONSTRUCCIÓN 3D IMPLEMENTADO	51
3.1. INTRODUCCIÓN	51
3.2. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA.....	51
3.3. PROCESO DE RECONSTRUCCIÓN 3D.....	53
3.3.1. Captura de las imágenes	53

3.3.2. Procesamiento de imágenes	54
3.3.3. Procesamiento de datos	56
3.4. CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA	60
3.4.1. RESOLUCIÓN	60
3.4.2. Precisión en la coordenada X	62
3.4.3. RANGO.....	63
3.5. PROCEDIMIENTO PARA MEDIR SOBRE LA IMAGEN R3D DIGITALIZADA Y CALCULAR SU PRECISIÓN.....	63
3.6. CONCLUSIONES.....	65
CAPITULO 4. SISTEMA ÓPTICO DE RECONSTRUCCIÓN 3D: APLICACIÓN A LA MEDIDA DE PARÁMETROS METROLÓGICOS DEL PIE	67
4.2. CONDICIONES DE MEDICIÓN	67
4.3. RECONSTRUCCIÓN 3D DEL PIE	68
4.3.1. Imágenes adquiridas.....	68
4.3.2. Procesamiento de imágenes	69
4.3.3. Representación 3D	71
4.4. MEDIDA DE PARÁMETROS DEL PIE.....	73
4.4.1. Parámetros podométricos básicos.....	73
4.4.2. Resultados de la medida de parámetros metrológicos sobre la reconstrucción 3D del pie.	74
4.5. CONCLUSIÓN	76
CONCLUSIONES GENERALES.....	77
REFERENCIAS.....	79
BIBLIOGRAFÍA.....	80

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1. Técnica de triangulación Láser.....	2
Fig. 2. Esquema del montaje.....	4
Fig. 3. Modelo de Cámara sin distorsión	8
Fig. 4. Imagen sin distorsión.....	13
Fig. 5. Distorsión radial positiva.....	14
Fig. 6. Distorsión radial negativa.....	14
Fig. 7. Distorsión Descentral ($P_1 = 0.00006$ y $P_2 = 0.00006$).....	15
Fig. 8. Distorsión Descentral ($P_1 = 0.00006$ y $P_2 = - 0.00006$).....	15
Fig. 9. Distorsión Prismática ($S_1 = - 0.0003$ y $S_2 = 0$).....	16
Fig. 10. Distorsión Prismática ($S_1 = - 0.0003$ y $S_2 = 0$).....	16
Fig. 11. Distorsión total (Radial, Descentral, y Prismática).....	17
Fig. 12. (o) Sin Distorsión (+) Distorsión total.....	17
Fig. 13. Proyección de perspectiva	24
Fig. 14. Imagen obtenida con la cámara derecha.....	29
Fig. 15. Imagen obtenida con la cámara izquierda.....	29
Fig. 16. Imágenes para calibración cámara derecha.....	30
Fig. 17. Imágenes para calibración cámara izquierda.....	30
Fig. 18. Puntos de control (+) sin distorsiones	32
Fig. 19. Retroproyección (cámara 1). Punto sin distorsión (+) y punto distorsionado (o).....	32
Fig. 20. Error (en píxeles) en la retroproyección para la cámara 1. Todos los puntos de un mismo color pertenecen a una misma escena.	32
Fig. 21. Error (en píxeles) en la retroproyección para la cámara 2.....	33
Fig. 22. Imagen distorsionada con su respectiva rectificación (cámara 1)	33
Fig. 23. imagen distorsionada con su respectiva rectificación (cámara 2)	34
Fig. 24. Línea láser (cámara 1)	34
Fig. 25. Línea láser (cámara 2).	34
Fig. 26. Puntos con y sin distorsión (Cám. 1)	35
Fig. 27. Puntos con y sin distorsión (Cám. 2).....	35
Fig. 28. Montaje óptico de triangulación láser.....	37
Fig. 29. Geometría de la triangulación láser.....	38
Fig. 30. Curva de conversión $Z=f(U)$	42
Fig. 31. Curva de factor de conversión mm/píxel en función de Z.....	42
Fig. 32. Sistema de coordenadas involucrados.....	43
Fig. 33. Escena de puntos en $Z = 0\text{mm}$	44
Fig. 34. Escena de puntos cada 5 mm (cámara 1).....	44
Fig. 35. Escena de puntos cada 5 mm (cámara 2).....	45
Fig. 36. Escena de puntos debidamente rectificadas (Cám. 1).....	45
Fig. 37. Escena de puntos debidamente rectificadas (Cám. 2).....	45
Fig. 38. Curva de calibración en Z (cámara 1)	46
Fig. 39. Curva de calibración en Z (cámara 2)	46
Fig. 40. Curva de calibración en Y (cámara 1)	47
Fig. 41. Curva de calibración en Y (cámara 2)	47

Fig. 42. Línea láser deformada por un cilindro (cámara 1).....	48
Fig. 43. Línea láser deformada por un cilindro (cámara 2).....	48
Fig. 44. Valores (Y,Z) obtenidos con la cámara 1	49
Fig. 45. Valores (Y,Z) obtenidos con la cámara 2	49
Fig. 46. Montaje experimental	52
Fig. 47. Cámara 1	54
Fig. 48. Cámara 2	54
Fig. 49. Cámara 1 (sin distorsión)	54
Fig. 50. Cámara 2 (sin distorsión)....	54
Fig. 51. Corte transversal de la línea láser.....	55
Fig. 52. Corte transversal de la línea láser	56
Fig. 53. Corte transversal de la línea láser.....	56
Fig. 54. Reconstrucción 3D del cilindro de prueba según la cámara 1.....	57
Fig. 55. Reconstrucción 3D del cilindro de prueba según la cámara 2.....	58
Fig. 56. Reconstrucción total del cilindro de prueba.....	58
Fig. 57. Corte en X del cilindro reconstruido y una superposición de su circunferencia.....	59
Fig. 58. Corrimiento de 1 píxel de la línea láser.	60
Fig. 59. Rango de trabajo en YZ (en mm)	63
Fig. 60. Interpolación de la parte superior del cilindro	64
Fig. 61. Curva sobre la superficie reconstruida	64
Fig. 62. Condiciones de medición	65
Fig. 63. Imágenes adquiridas con la cámara 1.....	66
Fig. 64. Imágenes adquiridas con la cámara 2.....	67
Fig. 65. Puntos representativos de imagen 5 (cámara 1).....	68
Fig. 66. Puntos representativos de imagen 3 (cámara 2).....	68
Fig. 67. Diferentes vistas de la imagen 3D digitalizada del pie.....	69
Fig. 68. Diferentes vistas de la imagen 3D digitalizada del pie con los contornos cerrados por software.....	70
Fig. 69. Algunas dimensiones básicas del pie.....	71
Fig. 70. Contorno de la garganta del pie	72
Fig. 71. Contorno del tobillo.....	73
Fig. 72. Contorno del metatarsiano, del empeine y del medio pie.....	73
Fig. 73. Altura de la garganta, del empeine y del metatarsiano.....	74

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Características de las cámaras usadas.....	28
Tabla 2. Parámetros de calibración. Todas las unidades están en píxeles.....	31
Tabla 3. Parámetros de la cámara utilizados en la simulación.....	41
Tabla 4. Secuencia de pulsos eléctricos para el desplazamiento	62
Tabla 5. Características del sistema de medida.....	65
Tabla 6. Resultado de la medida de parámetros (Figura 69) sobre el pie digitalizado.	76

TITULO*: Sistema óptico para la extracción de parámetros metrológicos del pie

AUTOR: Alberto Patiño Vanegas**

PALABRAS CLAVES: Metrología óptica, Reconstrucción 3D, Triangulación láser, Podometría, Biometría.

RESUMEN

Partiendo de la necesidad de caracterizar metrológicamente al pie con el fin de prevenir o corregir deformaciones, se diseñó y construyó un sistema óptico que facilita su reconstrucción 3D utilizando el principio de triangulación láser. El sistema es formado por los módulos: iluminación (plano láser), posicionamiento, captura de imágenes (dos sensores CCD), procesamiento de información y control de los procesos (software de control). La reconstrucción del objeto es coordinada de manera automática por el software de control, el cual enlaza los demás módulos para obtener finalmente la representación 3D del pie. El software de exploración final permite la extracción de distancias (alturas, anchos, contornos) sobre la imagen 3D, teniendo en cuenta la topografía del pie.

* Tesis

** Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Programa de Maestría en Física, Director: Jaime Meneses Fonseca

TITLE*: Optic system for the mensuration of metrological parameters of the foot

AUTHOR: Alberto Patiño Vanegas**

KEY WORDS: Optics metrology, 3D reconstruction, Laser triangulation, Foot measurement, Biometry.

ABSTRACT

Starting of the need of the foot metrological characterization with the goal of preventing or correcting deformations, an optical system that allows the foot 3D reconstruction using the triangulation principle was designed. The system is formed by the following modules: illumination (laser plane), positioning, image capture (two sensors CCD), information processing and process control (control software). The object reconstruction is automatically coordinated by the control software that links the other modules for finally obtaining the foot 3D representation. The finally exploration software allows the distance extraction (height, wide, outline) above the 3d image, having in mind the foot profile.

* Thesis

** Department of Science, Magister in Physic, Director: Jaime Meneses Fonseca

INTRODUCCIÓN GENERAL

Algunos de los problemas de salud que se observan en niños y adultos se deben a deformaciones en sus pies. Las causas de estas deformaciones pueden ser entre otras, congénitas, por accidentes o por el uso de un calzado inadecuado al tipo de pie. Si la causa de la deformación es reconocida a tiempo, se puede tratar de forma más efectiva o prevenir usando desde temprana edad un calzado adaptado al tipo de pie.

Para el tratamiento o para la prevención efectiva de deformaciones es imprescindible realizar medidas sobre el pie. El sistema que realice las medidas debe ser confiable, rápido y que almacene sistemáticamente la información, permitiendo al ortopedista realizar una valoración y un seguimiento detallado de la deformación. Para el sector industrial la realización de un sistema de medida podométrico que sea rápido y preciso, permitirá la elaboración de una horma estándar para la construcción de calzado de uso cotidiano, la cual, favorecerá el normal desarrollo del pie y será diseñado según necesidades y costumbres de la región.

Las medidas para establecer el nivel de deformación o el tipo de pie, se hacen de manera estándar con cintas métricas o con podómetros los cuales generalmente tienen una resolución de milímetros ^[1,2]. Esta técnica no permite medir con exactitud contornos ni protuberancias y tampoco permite el almacenamiento sistemático de las medidas. Por lo anterior, es necesario implementar un sistema de medida 3D que permita extraer información morfológica o geométrica del pie.

Debido a la forma externa del pie y a la futura aplicación, se le imponen las siguientes condiciones al sistema de medida:

- a) La resolución debe ser igual o inferior a 1 mm para hacerlo comparable con la cinta métrica.
- b) El objeto presenta un campo de observación de 32cmx12cmx12cm a cerca de 180° de rotación. Esto impone la utilización de varios sistemas de adquisición.
- c) El tiempo total de adquisición de imágenes debe ser lo suficientemente pequeño para evitar movimientos del pie por fatiga.

Debido a las características no invasivas, facilidad de implementación, amplio rango de campo de observación y resoluciones adecuadas, los sistemas ópticos de reconstrucción 3D han adquirido una fuerte importancia en la generación de sistemas de medida industriales y biomédicos. Dentro del amplio rango de métodos ópticos, la técnica de triangulación láser ofrece características interesantes, destacándose la facilidad en la implementación y reconstrucción de objetos complicados (discontinuidades, sombras, etc.).

Fig. 1. Técnica de triangulación Láser



Principalmente, la técnica de triangulación láser consiste en iluminar el cuerpo a reconstruir con un patrón especial que puede ser un punto, una línea, una cuadrícula, franjas, etc. En este caso, se utilizó una línea láser. La intersección entre la iluminación proyectada y la superficie del pie a reconstruir, produce una línea única, la cual se observa deformada desde un ángulo diferente al de proyección. La cantidad de deformación dependerá de la forma y dimensiones del

pie. Es así, como la superficie 3D del pie es codificada en una imagen 2D deformada de la línea (ver figura 1).

Debido a la forma externa del pie y a su aplicación, el sistema de medida se construyó con las siguientes características:

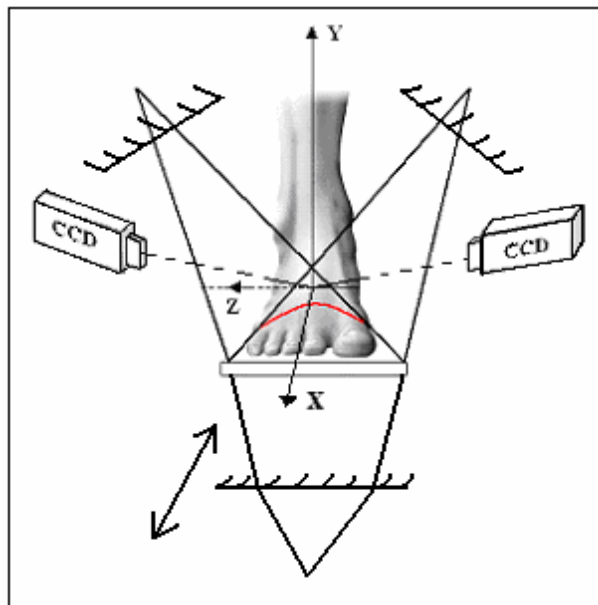
- a) La resolución es inferior a un milímetro.
- b) El pie a reconstruir, no debe tener deformaciones exageradas y sus dimensiones deben ocupar un volumen inferior a 28cmx12cmx12cm (largo, ancho y alto).
- c) Se utilizan dos sistemas de adquisición y un plano láser los cuales se desplazan simultáneamente realizando un escáner sobre la superficie del pie. La persona no debe mover su pie durante el proceso de adquisición de imágenes. El tiempo que dura el escáner garantiza que la persona no mueva su pie por fatiga.
- d) El sistema obtiene una imagen 3D digitalizada de la superficie superior del pie (180° de observación). El software de exploración 3D final permite la medida de distancias, que tienen en cuenta la superficie del pie.

El sistema consta principalmente de las siguientes unidades (ver figura 2):

- a) **Iluminación y captura.** Posee una cabeza óptica que aprovecha un haz láser para generar un plano de luz. Mediante un sistema de espejos, el plano láser se proyecta sobre la superficie del pie. Las imágenes de la curva de intersección entre el plano láser y la superficie del pie son capturadas con dos cámaras CCD que garantizan 180° de observación.
- b) **Desplazamiento:** Permite desplazar el plano láser junto con las dos cámaras, para barrer todo el campo de observación del cuerpo.

- c) **Control.** Sincroniza la unidad de desplazamiento y la de captura para obtener las respectivas imágenes a medida que se realiza el escáner de la superficie del pie.

Fig. 2. Esquema del montaje



En el procesamiento de las imágenes obtenidas, se distinguen principalmente las siguientes etapas:

- Corrección de aberraciones geométricas:** donde se rectifican las imágenes a través de los parámetros de las cámaras, obtenidos en un proceso previo de calibración de las cámaras usadas.
- Tratamiento de imágenes:** que permite obtener los puntos representativos de cada línea deformada.
- Reconstrucción 3D:** donde se realiza la conversión de una imagen 2D a una imagen 3D a partir de las curvas de conversión previamente obtenidas para cada cámara. Las dos vistas laterales tridimensionales del pie obtenidas con cada cámara, se unifican en uno solo para obtener la representación 3D final del pie.

d) **Medición:** Donde se realizan las medidas de algunos parámetros sobre la imagen 3D digital del pie.

En este manuscrito, se describe el sistema de reconstrucción construido. En el capítulo 1, se muestra el proceso seguido de calibración geométrica de las cámaras usadas que permiten liberar las imágenes de aberraciones geométricas. En el capítulo 2, se describe la técnica de triangulación láser y la forma como se obtuvieron las curvas experimentales que convierten las coordenadas de la imagen en coordenadas del mundo de los puntos sobre la superficie del pie. En la sección 3, se especifica el proceso de caracterización del sistema de medida construido y en el capítulo 4, se describe como se utiliza el sistema de reconstrucción para la medida de parámetros sobre la imagen 3D del pie.

CAPITULO 1

CALIBRACIÓN GEOMÉTRICA DE CÁMARAS

1. 1. INTRODUCCIÓN

La calibración de cámaras se considera como un elemento importante en visión por computador. La precisión con que se haga la calibración de una cámara, es vital en aplicaciones que involucran medidas cuantitativas sobre su imagen.

Muchas cámaras actuales no son perfectas y contienen una variedad de aberraciones, esto se evidencia en una imagen borrosa y distorsionada. Para medidas geométricas, es más importante que la imagen no tenga distorsiones que la calidad de la imagen misma. Es decir, la posición de un punto en una imagen borrosa puede obtenerse de la posición del centro del punto borroso. Pero, si la posición del punto no es exacto, el resultado que depende de las coordenadas de su imagen puede ser erróneo. Entonces se hace necesario, realizar una corrección de las distorsiones de la imagen (calibración geométrica) antes de realizar cualquier medida sobre ella.

Las cámaras comúnmente usadas en visión computacional tienen las siguientes características: a) La resolución espacial de la imagen esta definida por la digitalización espacial y ésta es relativamente baja. Por ejemplo, una CCD típica tiene un arreglo de sensores alrededor de 640x480 píxeles; b) Las lentes usadas para formar el objetivo, poseen imperfecciones; c) el ensamblaje de las cámaras contiene una considerable cantidad de desalineamientos de sus componentes. Por ejemplo, el arreglo de sensores CCD puede no estar perpendicular al eje óptico del objetivo y la intersección del eje óptico con el plano imagen puede no coincidir con el centro del arreglo de sensores.

Uno de los aspectos de la calibración de una cámara en el contexto de un sistema de visión artificial, es el proceso de determinar los parámetros intrínsecos, es decir, la geometría interna de la cámara y sus características ópticas, y/o, los parámetros extrínsecos, es decir, las coordenadas de posición y orientación del plano imagen de la cámara (Frame) respecto a cierto sistema de coordenadas en el mundo real.

Como el método de reconstrucción empleado requiere realizar medidas sobre la imagen y las cámaras utilizadas presentan una imagen con distorsiones fuertes, en este capítulo, se describe el análisis de algunos modelos de cámaras y algunas técnicas empleadas para su calibración geométrica. En la sección 1.2, se describe el modelo de una cámara libre de distorsiones y modelos de cámaras que tienen en cuenta algunos tipos de distorsiones. En la sección 1.3, se describe el método usado para la calibración de las cámaras empleadas en el sistema de reconstrucción construido y en la sección 1.4, se muestran los resultados obtenidos de tal calibración.

1. 2. MODELOS DE CÁMARAS

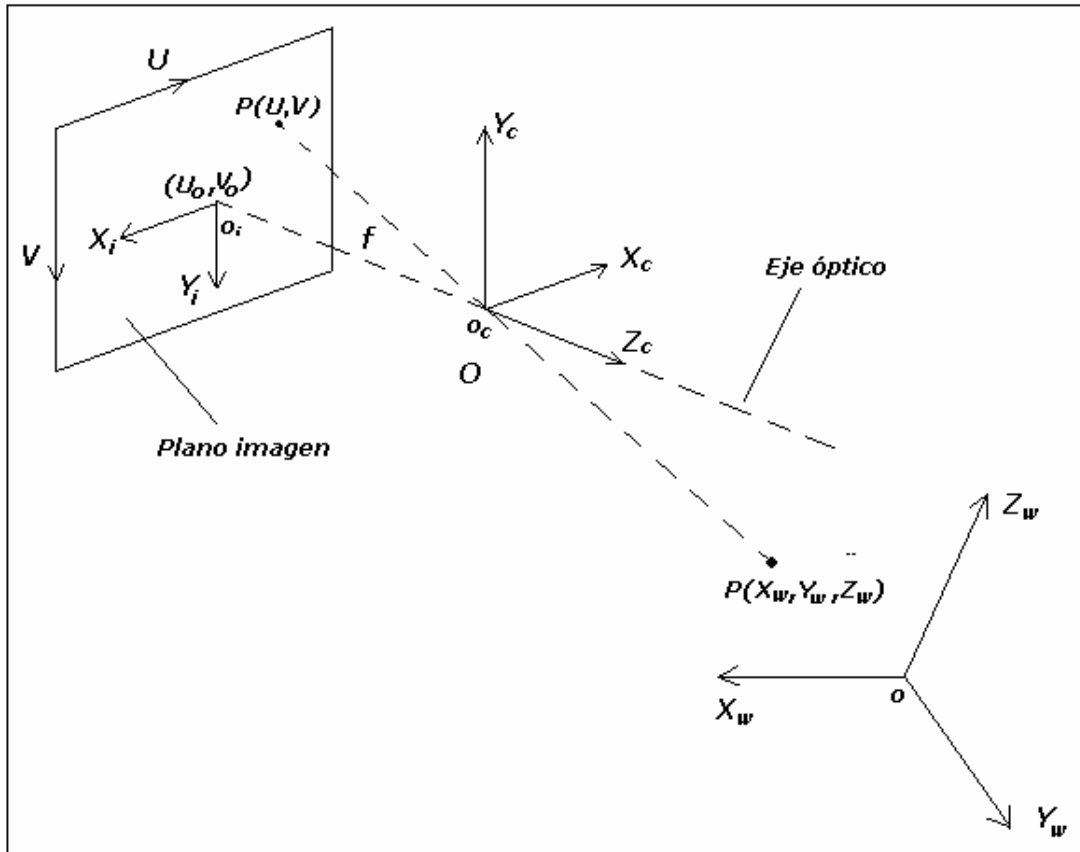
Se describen dos tipos de modelos de cámaras ^[3]. El primero es el de cámara libre de distorsiones, que despreja toda distorsión óptica. El segundo modelo toma en cuenta varios tipos de distorsiones geométricas.

1.2.1. Modelo de cámara libre de distorsiones (Cámara Pinhole)

El modelo de cámara pinhole esta basado en el principio de colinealidad, donde la información del mundo se proyecta en el plano imagen por una línea recta a través de un centro de proyección llamado Centro Óptico. El plano imagen se encuentra situado a una distancia llamada Distancia Focal del centro óptico. El Eje Óptico es

la línea perpendicular al plano de la imagen y que pasa por el centro óptico (ver Fig. 3)

Fig. 3. Modelo de Cámara sin distorsión



Sea $(O; X_w, Y_w, Z_w)$ la representación de las coordenadas de cualquier punto P en un sistema de referencia fijo del mundo (espacio donde se encuentra el objeto), y sea $(O_c; X_c, Y_c, Z_c)$ la representación de las coordenadas del mismo punto en un sistema de coordenadas cuyo origen coincide con el centro óptico (O_c) y su eje Z_c coincide con el eje óptico. El plano imagen, el cual corresponde al plano que contiene al arreglo de sensores, se asume paralelo al plano (X_c, Y_c) y a la distancia f de su origen, donde f representa la longitud focal. En el plano imagen, se define el sistema de coordenadas $(O_i; X_i, Y_i)$ centrado en el punto principal del plano imagen O_i (punto de intersección del plano imagen con el eje óptico) y

donde X_i , y Y_i , son ejes paralelos a los ejes X_c y Y_c respectivamente. La posición del correspondiente píxel en la imagen digitalizada se denota por (U,V) y la posición del píxel del punto principal O_i por (U_o,V_o) . La coordenada (U,V) puede ser considerada como el numero de fila y columna que ocupa el punto imagen en un arreglo de sensores CCD. Se debe resaltar que debido a un posible desalineamiento en el arreglo de sensores, O_i no necesariamente coincide con el centro geométrico del plano imagen.

Para expresar cualquier punto objeto P en el sistema coordenado de la imagen, primero necesitamos transformarlo a las coordenadas de la cámara (X_c, Y_c, Z_c) . Esta transformación consiste de una rotación y una traslación, y puede ser desarrollada usando la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{pmatrix} + T \quad (1)$$

Donde, $R = (r_{ij})$ es una matriz de rotación que define la orientación de la cámara y $T = (t_j)^T$ es un vector de traslación que define la posición de la cámara. Usando el modelo pinhole, la proyección del punto (X_c, Y_c, Z_c) sobre el plano imagen se expresa como:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \frac{f}{Z_c} \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \end{pmatrix} \quad (2)$$

Como es usual en muchos programas de visualización de imágenes, las unidades de las coordenadas de la imagen (U,V) es en píxeles y están medidos respecto a un punto ubicado en la esquina superior izquierda. Entonces, unos coeficientes K_x, K_y son necesarios para cambiar las coordenadas (X_i, Y_i) con unidades en el

sistema métrico a las coordenadas (U,V) en píxeles . Finalmente, las correspondientes coordenadas del punto imagen en píxeles (U,V) son obtenidas de la proyección (X_i,Y_i) aplicando la siguiente transformación:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_x X_i \\ K_y Y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_o \\ V_o \end{pmatrix} \quad (3)$$

1.2. 2. Modelos de cámara con distorsiones geométricas.

Las distorsiones geométricas se refieren a las posiciones de los puntos que forman la imagen en el sistema coordenado del plano imagen. Como un resultado de algunos tipos de imperfecciones en el diseño y ensamblaje de las lentes, la expresión (3) no es correcta y debe ser remplazada por expresiones que tomen en cuenta explícitamente los errores en la posición introducida por estas imperfecciones. La cantidad de error δ_i en la posición (U,V) a lo largo de cada coordenada, usualmente depende de la posición del punto:

$$\begin{pmatrix} U' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_x(U,V) \\ \delta_y(U,V) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Donde, las coordenadas (U',V') son las correspondientes coordenadas con distorsión. Para corregirla, se necesita analizar varias fuentes de distorsiones y modelar sus efectos en el plano imagen.

1.2.2.1. Distorsión Radial

La distorsión radial causa un desplazamiento hacia adentro o hacia fuera a lo largo del radio. Este tipo de distorsión es causado principalmente por defectos en el radio de curvatura de las lentes. La cantidad de distorsión radial de una lente

perfectamente centrada a lo largo de cada coordenada cartesiana de la imagen puede ser representada por:

$$\begin{aligned}\delta_{xr} &= k_1 U(U^2 + V^2) + k_2 U(U^2 + V^2)^2 + O[(U, V)^5] \\ \delta_{yr} &= k_1 V(U^2 + V^2) + k_2 V(U^2 + V^2)^2 + O[(X_p, Y_p)^5]\end{aligned}\quad (5)$$

Donde K_1 , k_2 son constantes que determinan la cantidad y dirección de la distorsión y $O[(U, V)^5]$ son los términos de orden mayores que cuatro.

1.2.2. 2. Distorsión Descentral

Provocada por la falta de colinealidad de los centros ópticos. Produce desplazamientos radiales y tangenciales que pueden ser descritos por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\delta_{xd} &= P_1(3U^2 + V^2) + 2P_2 UV + O[(U, V)^4] \\ \delta_{yd} &= 2P_1 UV + P_2(U^2 + 3V^2) + O[(U, V)^4]\end{aligned}\quad (6)$$

Donde P_1 y P_2 son constantes que determinan la cantidad y dirección de la distorsión, así como el eje de máxima distorsión tangencial.

1.2.2. 3. Distorsión prismática

Se origina por las imperfecciones en las lentes durante su diseño y fabricación, así como en el montaje de la óptica en la cámara. Causa desplazamientos radiales y tangenciales. Este tipo de imperfección puede ser adecuadamente modelado por la adjunción de un delgado prisma al eje óptico del sistema, causando una cantidad adicional de distorsión radial y tangencial. Tal distorsión se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\delta_{xp} &= S_1(U^2 + V^2) + O[(U, V)^4] \\ \delta_{yp} &= S_2(U^2 + V^2) + O[(U, V)^4]\end{aligned}\tag{7}$$

Donde S_1 y S_2 son constantes que determinan la cantidad y dirección de la distorsión, así como el eje de máxima distorsión tangencial.

1.2.2. 4. Distorsión Total

Aunque la distorsión descentral y la distorsión prismática tienen unos coeficientes similares, modelan dos tipos diferentes de distorsiones, las dos tienen diferentes ejes de máxima distorsión tangencial. Cuando todas las distorsiones están presentes, La distorsión efectiva puede ser modelada por la adición de sus expresiones correspondientes.

Combinando (5), (6) y (7), se obtiene la cantidad total de distorsión a lo largo de cada eje. Asumiendo que términos de orden más alto que tres son despreciables, se obtiene:

$$\begin{aligned}\delta_x(U, V) &= (g_1 + g_3)U^2 + g_4UV + g_1V^2 + k_1U(U^2 + V^2) \\ \delta_y(U, V) &= g_2U^2 + g_3UV + (g_2 + g_4)V^2 + k_1V(U^2 + V^2)\end{aligned}\tag{8}$$

donde,

$$\begin{aligned}g_1 &= S_1 + P_1, \\ g_2 &= S_2 + P_2, \\ g_3 &= 2P_1, \\ g_4 &= 2P_2\end{aligned}$$

Un apropiado modelo de cámara para aproximar la calibración puede ser derivado combinando el modelo pinhole con la corrección para la distorsión radial y tangencial:

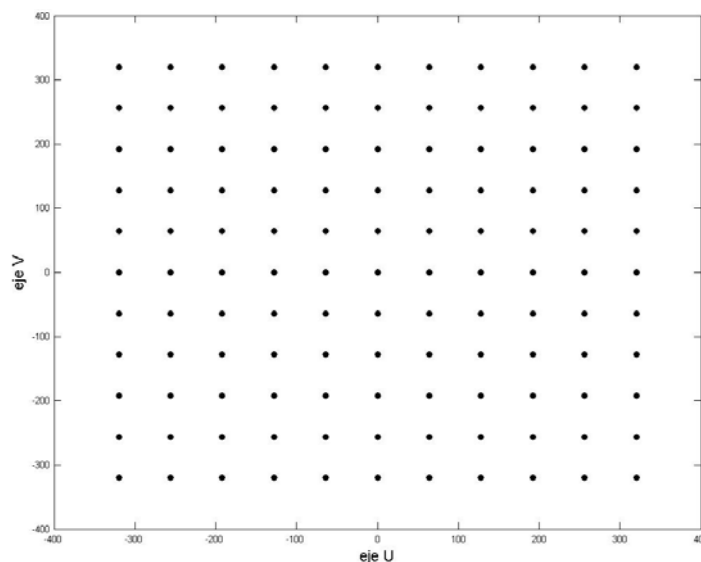
$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x(X_i + \delta_x) \\ K_y(Y_i + \delta_y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

En este modelo, el conjunto de parámetros intrínsecos es alterado por los coeficientes de distorsión.

1.2. 3. Simulación de los modelos de distorsiones geométricas.

Para realizar una adecuada calibración de cámaras se hizo necesario tener una idea de los tipos de distorsiones que poseen sus imágenes. La serie de experimentos consistió en escoger un arreglo de datos sintéticos sin distorsión (Fig. 4) y valores para los diferentes coeficientes de distorsión. Luego, se adicionó a los datos sintéticos la cantidad de distorsión de acuerdo a su correspondiente expresión para observar sus efectos. De esta manera, se pretende establecer la forma típica de la imagen para cada distorsión, que posteriormente servirá para identificar la distorsión en imágenes experimentales.

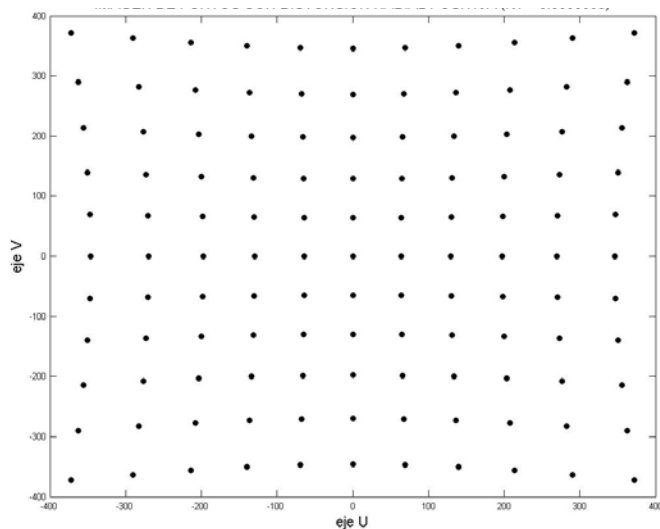
Fig. 4. Imagen sin distorsión



1.2.3. 1. Simulación de distorsión radial.

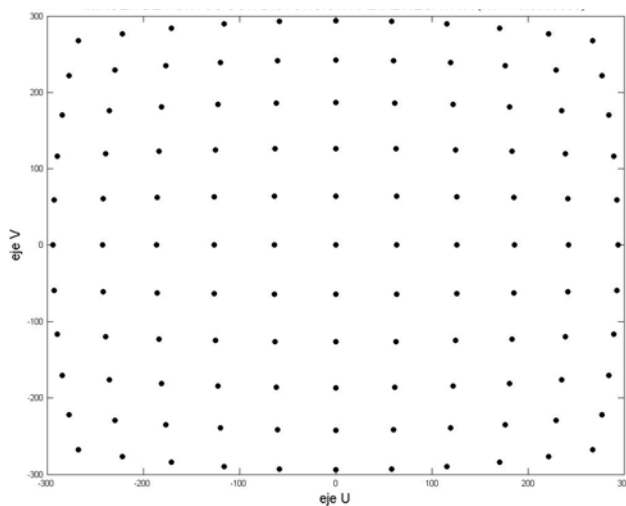
Se utilizó un valor del coeficiente de distorsión radial positivo y otro negativo ($k_1=0.0000008$ y $k_1=-0.0000008$) y se modeló de acuerdo a la ecuación (5). Los resultados se observan en la Fig.5 y la Fig. 6 respectivamente.

Fig. 5. Distorsión radial positiva.



Un desplazamiento radial positivo, causa que puntos exteriores se esparzan incrementando la escala. A esta distorsión se le llama Distorsión Barrilete.

Fig. 6. Distorsión radial negativa.



Un desplazamiento radial negativo, causa que puntos exteriores se aglomeren disminuyendo la escala. A esta distorsión se le llama Distorsión Almohadilla.

1.2.3. 2. Simulación de distorsión descentral.

Se modeló de acuerdo a las expresiones (6). Los resultados se observan en la Fig. 7 y la Fig. 8. respectivamente.

Fig. 7. Distorsión Descentral ($P_1 = 0.00006$ y $P_2 = 0.00006$)

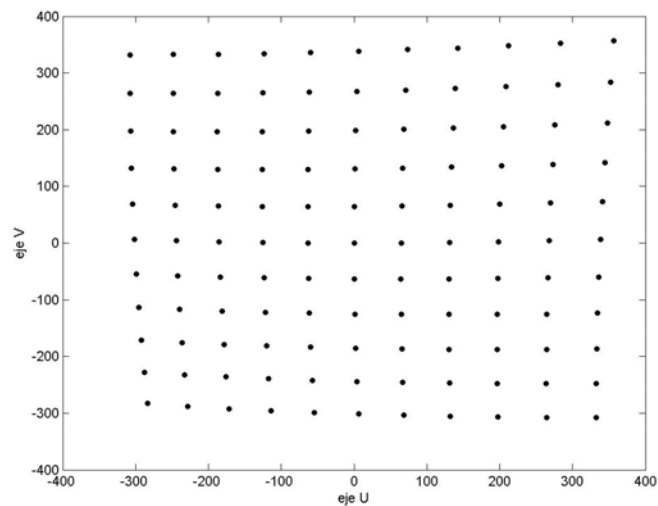
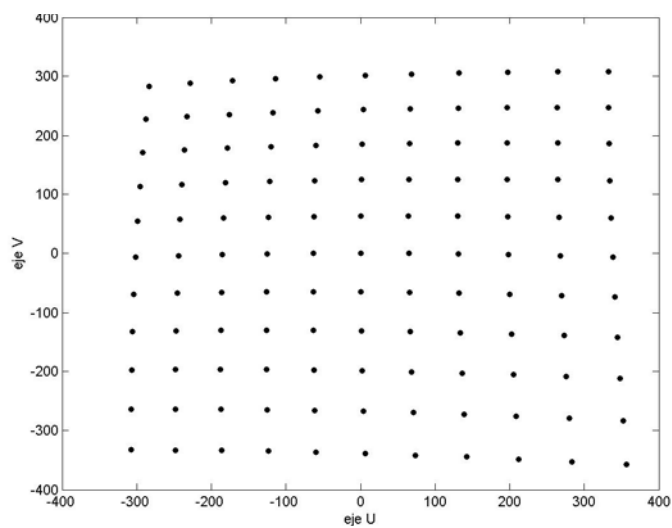


Fig. 8. Distorsión Descentral ($P_1 = 0.00006$ y $P_2 = -0.00006$)



1.2.3. 3. Simulación de distorsión prismática.

Fig. 9. Distorsión Prismática ($S_1 = -0.0003$ y $S_2 = 0$)

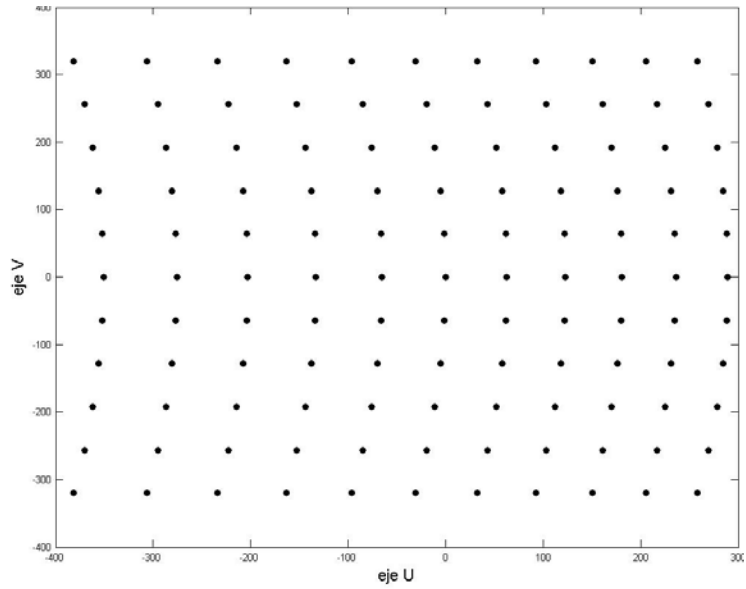
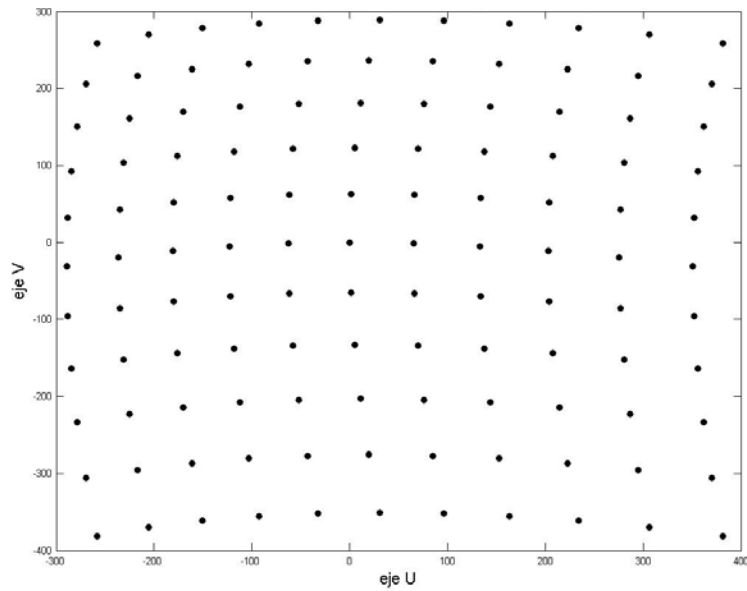


Fig. 10. Distorsión Prismática ($S_1 = -0.0003$ y $S_2 = 0$)



1.2.3. 4. Simulación de distorsión total.

Se usaron los siguientes coeficientes de distorsión:

Radial ($k_1 = -0.0000005$); Descentral ($P_1 = 0.00004$ y $P_2 = 0.00003$) y Prismática ($S_1 = -0.0001$; $S_2 = -0.0001$). Los resultados se observan en las Fig. 11 y 12.

Fig. 11. Distorsión total (Radial, Descentral, y Prismática)

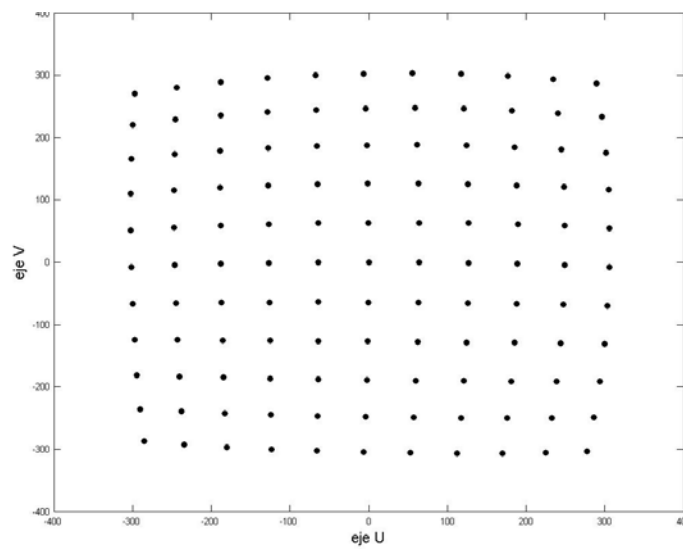
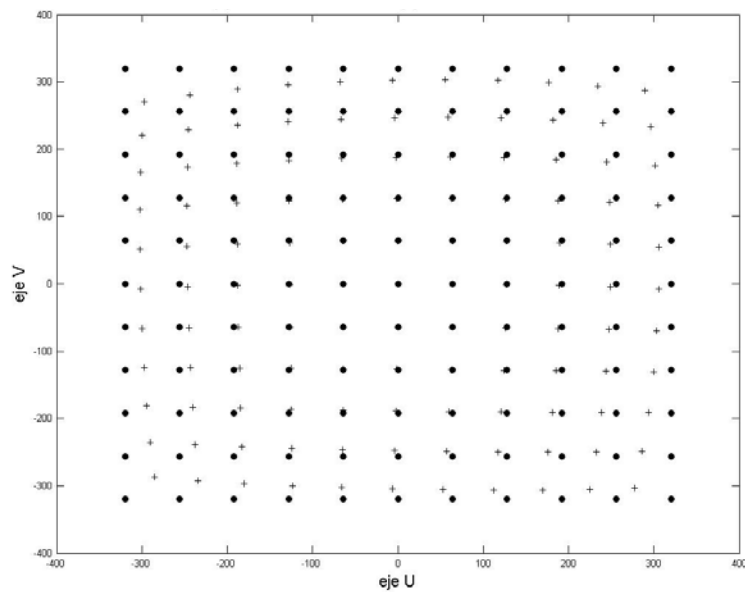


Fig. 12. (o) Sin Distorsión (+) Distorsión total



1. 3. PROCESO DE CALIBRACIÓN

La calibración se puede definir en este caso, como el proceso de determinación de los parámetros involucrados en el proceso de captura de la imagen:

- **Parámetros intrínsecos**

K_x, K_y : Factores de escala

f : Distancia focal

U_o, V_o : Punto principal

$\delta x, \delta y$: Distorsión geométrica

- **Parámetros Extrínsecos**

T : Vector de traslación

R : Matriz de rotación

1.3. 1. Matriz de proyección.

La matriz de proyección M establece la relación matricial entre las coordenadas del mundo, medidas en unidades del sistema métrico y las coordenadas laterales de la cámara, medidas en píxeles:

$$\begin{pmatrix} nU \\ nV \\ n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Donde $n = Z_c/f$ es el factor que permite pasar de las coordenadas (X_c, Y_c, Z_c) al plano imagen (U, V) .

De acuerdo a las ecuaciones (1), (2), (3) y (4), la relación matricial se puede escribir así:

$$\begin{bmatrix} nU \\ nV \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & 0 & (U_0 + K_x \delta_x) / f & 0 \\ 0 & K_y & (V_0 + K_y \delta_y) / f & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Si no se consideran las distorsiones, se tiene:

$$\begin{bmatrix} nU \\ nV \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{m}_1 & m_{14} \\ \bar{m}_2 & m_{24} \\ \bar{m}_3 & m_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Donde,

$$\bar{m}_j = [m_{j1} \quad m_{j2} \quad m_{j3}] = K_j f \bar{r}_j + U_j \bar{r}_3$$

$$m_{j4} = f K_j t_j + U_j t_3$$

$$\bar{r}_j = [r_{j1} \quad r_{j2} \quad r_{j3}]$$

$j = 1, 2, 3.$

$$U_1 = U_0 \quad K_1 = K_x$$

$$U_2 = V_0 \quad ; \quad K_2 = K_y$$

$$U_3 = 1 \quad K_3 = 0$$

El procedimiento de calibración utilizado ^[4], consiste en computar linealmente los valores de los parámetros iniciales. Los valores finales se obtienen con una minimización no lineal. Se compensa además la distorsión causada por la proyección asimétrica y la corrección de la imagen es desarrollada con un modelo empírico inverso que aproximadamente compensa la distorsión radial y tangencial. En las sesiones siguientes, se describen estos procesos.

1.3. 2. Proceso de calibración por Transformación Lineal Directa (DLT)

Se realiza una calibración en dos pasos: En primer lugar se calculan los elementos de la Matriz de Proyección y a partir de ella se obtienen los parámetros intrínsecos y extrínsecos.

- **Obtención de los elementos de la matriz de proyección (sin distorsión)**

$$\begin{bmatrix} nU \\ nV \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$m_{31}X_w U + m_{32}Y_w U + m_{33}Z_w U + m_{34}U - m_{11}X_w - m_{12}Y_w - m_{13}Z_w - m_{14} = 0 \quad (14)$$

$$m_{31}X_w V + m_{32}Y_w V + m_{33}Z_w V + m_{34}V - m_{21}X_w - m_{22}Y_w - m_{23}Z_w - m_{24} = 0 \quad (15)$$

Se obtiene un sistema de la forma $A\bar{m} = 0$ cuya solución trivial es:

$$\bar{m} = 0$$

Para obtener una solución no trivial de m , se debe realizar una apropiada normalización. Se usa entonces, la restricción $m_{34}=1$ y la ecuación puede ser resuelta con una técnica inversa:

$$L \equiv \frac{1}{m_{34}} M = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ L_5 & L_6 & L_7 & L_8 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$X_f = \frac{X_w L_1 + Y_w L_2 + Z_w L_3 + L_4}{X_w L_9 + Y_w L_{10} + Z_w L_{11} + 1} \quad (17)$$

$$Y_f = \frac{X_w L_5 + Y_w L_6 + Z_w L_7 + L_8}{X_w L_9 + Y_w L_{10} + Z_w L_{11} + 1}$$

Con N puntos conocidos $(X_{wi}, Y_{wi}, Z_{wi}, U_i, V_i)$ se obtiene un sistema con 11 incógnitas y $2N$ ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} X_{w1} & Y_{w1} & Z_{w1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_{w1}U_1 & -Y_{w1}U_1 & -Z_{w1}U_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{w1} & Y_{w1} & Z_{w1} & 1 & -X_{w1}V_1 & -Y_{w1}V_1 & -Z_{w1}V_1 \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ X_{wN} & Y_{wN} & Z_{wN} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_{wN}U_N & -Y_{wN}U_N & -Z_{wN}U_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{wN} & Y_{wN} & Z_{wN} & 1 & -X_{wN}V_N & -Y_{wN}V_N & -Z_{wN}V_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_N \\ V_N \end{pmatrix} \quad (18)$$

A partir de los parámetros L y considerando el significado físico de la matriz M se obtienen sus elementos.

$$M = \frac{1}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} L \quad (19)$$

El problema de la normalización, es que una singularidad es introducida si el valor correcto de m_{34} es cero. En su lugar se usa $m_{34} = 1$, sujeto a la restricción $|\bar{m}_3| = 1$ la cual es singularmente libre. Se resuelve el problema de optimización dividiendo el conjunto de variables en dos, las que están sujetas a restricción y las que no, empleando las técnicas de multiplicadores de Lagrange:

$$\min_{y,z} \|Cy + Dz\|^2 \quad ; \quad \text{sujeto a } \|z\|^2 = 1 \quad (20)$$

$$\min_{y,z} R = \|Cy + Dz\|^2 + \lambda \cdot (1 - \|z\|^2) \quad (21)$$

▪ **Calculo de los parámetros intrínsecos y extrínsecos.**

Una vez obtenida la matriz de perspectiva M, se pueden obtener los parámetros de calibración:

- **Parámetros intrínsecos**

Coordenadas del punto principal:

$$\begin{aligned} U_o &= \bar{m}_1 \cdot \bar{m}_3^T \\ V_o &= \bar{m}_2 \cdot \bar{m}_3^T \end{aligned} \quad (22)$$

Distancias focales en x , y:

$$\begin{aligned} f_x^2 &= \bar{m}_1 \cdot \bar{m}_1^T - [\bar{m}_1 \cdot \bar{m}_3^T] \\ f_y^2 &= \bar{m}_2 \cdot \bar{m}_2^T - [\bar{m}_2 \cdot \bar{m}_3^T] \end{aligned} \quad (23)$$

- **Parámetros Extrínsecos**

Matriz de Rotación

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= \frac{\bar{m}_1 - U_o \bar{r}_3}{fK_x} \\ \bar{r}_2 &= \frac{\bar{m}_2 - V_o \bar{r}_3}{fK_y} \\ \bar{r}_3 &= \bar{m}_3 \end{aligned} \quad (24)$$

Vector de traslación

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{m_{14} - U_o t_3}{fK_x} \\ t_2 &= \frac{m_{24} - V_o t_3}{fK_y} \\ t_3 &= m_{34} \end{aligned} \quad (25)$$

1.3. 3. Estimación no lineal

Ya que no se requieren iteraciones, DLT es computacionalmente rápida. Pero, tiene dos desventajas:

- Generalmente, los efectos de las distorsiones no son corregidos ya que las distorsiones de las lentes no siempre pueden ser incorporadas.
- Debido al objetivo de construir un algoritmo no iterativo, las restricciones en los parámetros intermedios no son consideradas. En consecuencia, en presencia de ruido la solución intermedia no satisface las restricciones y la aproximación de la solución final es relativamente pobre.

Con cámaras reales, las imágenes observadas están siempre contaminadas por ruido. Si las partes sistemáticas de la medida del error son compensadas, es conveniente asumir que el error es ruido gaussiano blanco. Entonces, la mejor estimación para los parámetros de la cámara pueden ser obtenidos por la minimización de las diferencias entre el modelo y las N observaciones (U'_i, V'_i) , donde, $i=1, \dots, N$. En el caso de ruido gaussiano, la función objetivo es expresada como una suma de diferencias cuadráticas:

$$F = \sum_{i=1}^N (U'_i - U_i)^2 + \sum_{i=1}^N (V'_i - V_i)^2 \quad (26)$$

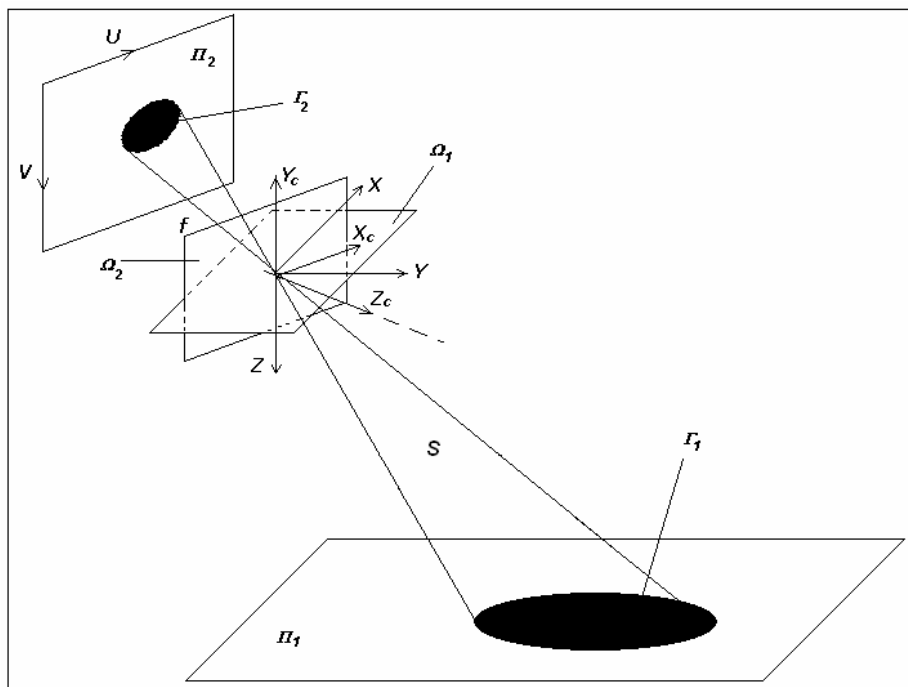
Debido a la naturaleza no lineal del modelo de cámara, la estimación simultánea de los parámetros involucrados se obtiene aplicando un algoritmo iterativo. Para este problema, el método de optimización de Levenberg-Marquardt proporciona una rápida convergencia. Sin embargo, sin unos valores iniciales apropiados de los parámetros, la optimización puede caer en un mínimo local y causar que la calibración falle. Este problema se puede resolver usando como valores iniciales, los parámetros obtenidos desde la DLT para la optimización.

Si se usa una tarjeta coplanar para obtener los puntos de control, se introduce una singularidad que limita el número de parámetros que pueden ser estimados desde una simple vista. Por ello, se requieren múltiples vistas para solucionar todos los parámetros intrínsecos, donde el número de parámetros extrínsecos aumenta a seis por cada perspectiva.

1.3. 4. Corrección de la proyección asimétrica

La proyección de perspectiva es una transformación que generalmente no conserva la forma. Objetos 2D y 3D con un área de proyección diferente de cero son distorsionados si ellos no son coplanares con el plano imagen. Se realiza un análisis para círculos por su formulación analítica simple y que son una forma muy común en muchos objetos. La proyección de perspectiva distorsiona la forma circular en el plano imagen, dependiendo del ángulo y desplazamiento entre la superficie del objeto y la del plano imagen (Fig. 13).

Fig. 13. Proyección de perspectiva



Los rayos que llegan desde Γ_1 , forman un cono inclinado cuya superficie S se puede expresar como:

$$(X - \alpha Z)^2 + (Y - \beta Z)^2 = \gamma^2 Z^2 \quad (27)$$

Donde, α y β , especifica la inclinación del cono y γ especifica la agudeza del cono. La transformación desde Ω_1 a Ω_2 se expresa con la siguiente rotación:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{pmatrix} \quad (28)$$

Expresando la ecuación (27) del cono en coordenadas de la cámara (X_c, Y_c, Z_c) y luego realizando la intersección del cono S con el plano imagen Π_2 , se obtiene la superficie Γ_2 :

$$\begin{aligned} & (n^2 + k^2 - r^2)X_c^2 + 2(kl + np - rs)X_c Y_c + (l^2 + p^2 - s^2)Y_c^2 \\ & + 2(km + nq - rt)X_c + 2(lm + pq - st) + m^2 + q^2 - t^2 = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \text{Donde, } \quad k &= a_{11} - ta_{31}, & n &= a_{21} - sa_{31}, & r &= \gamma a_{31} \\ l &= a_{12} - ta_{32}, & p &= a_{22} - sa_{32}, & s &= \gamma a_{32} \\ m &= (a_{13} - ta_{33})f, & q &= (a_{23} - sa_{33})f, & t &= \gamma a_{33}f \end{aligned}$$

De la ecuación (29) se nota que la proyección es una curva cuadrática y puede ser un círculo, una elipse, una parábola o una hipérbola. Debido al limitado campo de visión, en la práctica será, un círculo o una elipse cuyo centro puede ser expresado como:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_c &= \frac{(kp - nl)(lq - pm) - (ks - lr)(tl - ms) - (ns - pr)(wp - qs)}{(kp - nl)^2 - (ks - lr)^2 - (ns - pr)^2} \\ \tilde{V}_c &= \frac{(kp - nl)(mn - kq) - (ks - lr)(mr - kt) - (ns - pr)(qr - nt)}{(kp - nl)^2 - (ks - lr)^2 - (ns - pr)^2}\end{aligned}\quad (30)$$

Para encontrar la proyección del centro del círculo, se considera la situación donde el radio del círculo es cero, es decir $\gamma = 0$ y se obtiene la posición del punto proyectado, que debido a la simetría del círculo, también es la posición del centro del círculo:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_0 &= \frac{(lq - pm)}{(kp - nl)} \\ \tilde{V}_0 &= \frac{(mn - kq)}{(kp - nl)}\end{aligned}\quad (31)$$

En general, el centro de la elipse y el centro del círculo proyectado no coinciden cuando el radio es diferente de cero. Se puede usar el método del centro de gravedad para estimar el centro de la elipse. Sin embargo, lo que se quiere es conocer la proyección del centro del círculo cuya localización esta desviada y puede ser corregida usando las ecuaciones (29) y (30).

Para corregir el error de proyección, se computan los parámetros de la cámara recursivamente, cuando los parámetros obtenidos en la estimación por mínimos cuadrados son usados para evaluar las ecuaciones (29) y (30). Las coordenadas observadas en la imagen (U_i, V_i) son entonces corregidas con la siguiente formula:

$$\begin{aligned}U'_i &= U_i - K_x(\tilde{U}_{c,i} - \tilde{U}_{o,i}) \\ V'_i &= V_i - K_y(\tilde{V}_{c,i} - \tilde{V}_{o,i})\end{aligned}\quad (32)$$

Corregir la proyección de perspectiva es muy importante en reconstrucción 3D por triangulación láser, cuando se usan patrones de puntos circulares que son vistos a un ángulo de inclinación para realizar las curvas de calibración.

1.3. 5. Corrección de la imagen

El modelo de cámara dado por la ecuación (9) expresa la proyección de los puntos 3D sobre el plano imagen. Sin embargo, no da una solución directa al problema de la retroproyección, en el cual se quiere recobrar la imagen como si fuese vista sin distorsiones. Si se consideran las componentes radial y tangencial de la distorsión, se puede notar que no hay una solución analítica al problema del mapeo inverso. En la literatura especializada^[2] se encontró, que la ecuación (9) puede ser remplazada por la siguiente expresión que compensa las distorsiones, de tal forma que el máximo error en el residuo es menor de 0.01 píxel, en presencia de una cantidad considerable de distorsión:

$$\begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{bmatrix} = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} \tilde{U}' + \tilde{U}'(a_1 r^2 + a_2 r^4) + 2a_3 \tilde{U}' \tilde{V}' + a_4 (r^2 + 2\tilde{U}'^2) \\ \tilde{V}' + \tilde{V}'(a_1 r^2 + a_2 r^4) + a_3 (r^2 + 2\tilde{V}'^2) + 2a_4 \tilde{U}' \tilde{V}' \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$G = (a_5 r^2 + a_6 \tilde{U}' + a_7 \tilde{V}' + a_8) r^2 + 1 \quad (34)$$

Donde, $\tilde{U}' = (U - U_0)/K_x$, $\tilde{V}' = (V - V_0)/K_y$ y $r = \sqrt{\tilde{U}'^2 + \tilde{V}'^2}$

Los coeficientes a_1, \dots, a_8 pueden ser resueltos en cada iteración usando una técnica de mínimos cuadrados, hasta cuando se encuentre el residuo más pequeño, o directamente, cuando se encuentre el resultado optimo deseado.

Para encontrar los parámetros desconocidos del modelo inverso, N puntos $(\tilde{U}_i, \tilde{V}_i)$ y $(\tilde{U}'_i, \tilde{V}'_i)$ deben ser generados de tal forma que cubran la totalidad del área imagen. Se define entonces,

$$\begin{aligned} \bar{U}_i &= [-\tilde{U}'_i r_i^2 \quad -\tilde{U}'_i r_i^4 \quad -2\tilde{U}'_i \tilde{V}'_i \quad -(r_i^2 + 2\tilde{U}'_i{}^2) \quad \tilde{U}'_i r_i^4 \quad \tilde{U}'_i \tilde{U}'_i r_i^2 \quad \tilde{U}'_i \tilde{V}'_i r_i^2 \quad \tilde{U}'_i r_i^2]^\top \\ \bar{V}_i &= [-\tilde{V}'_i r_i^2 \quad -\tilde{V}'_i r_i^4 \quad -(r_i^2 + 2\tilde{V}'_i{}^2) \quad -2\tilde{U}'_i \tilde{V}'_i \quad \tilde{V}'_i r_i^4 \quad \tilde{V}'_i \tilde{U}'_i r_i^2 \quad \tilde{V}'_i \tilde{V}'_i r_i^2 \quad \tilde{V}'_i r_i^2]^\top \\ T &= [\bar{U}_1 \quad \bar{V}_1 \quad \dots \quad \bar{U}_i \quad \bar{V}_i \quad \dots \quad \bar{U}_N \quad \bar{V}_N] \\ p &= [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8] \\ e &= [\tilde{U}'_1 - \tilde{U}_1 \quad \tilde{V}'_1 - \tilde{V}_1 \quad \dots \quad \tilde{U}'_N - \tilde{U}_N \quad \tilde{V}'_N - \tilde{V}_N] \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones (33) y (34), se obtiene la siguiente relación:

$$e = Tp \quad (35)$$

El vector p es estimado en una detección por mínimos cuadrados :

$$\hat{p} = (T^T T)^{-1} T^T e \quad (36)$$

Los parámetros computados basados en la ecuación (36) se usan en las ecuaciones (33) y (34) para corregir las coordenadas arbitrarias de la imagen (U,V). Las coordenadas actuales son entonces obtenidas por interpolación basados sobre las coordenadas generadas $(\tilde{U}_i, \tilde{V}_i)$ y $(\tilde{U}'_i, \tilde{V}'_i)$.

1. 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

1.4. 1. Características de las cámaras utilizadas

En el sistema de reconstrucción construido, se utilizaron dos cámaras convencionales con las siguientes características dadas por el fabricante:

Tabla 1. Características de las cámaras usadas.

CAMARA	TECNOLOGIA	OBJETIVO	Nº SENSORES
1	CCD	3.6 mm	640X480
2	CCD	3.6 mm	640X480

Las cámaras utilizadas, presentan una fuerte distorsión como se observa en las figuras 13 y 14. Ambas presentan principalmente distorsiones de tipo radial y

tangencial, lo que implicó realizar un proceso de calibración antes de trabajar con sus imágenes.

Fig. 14. Imagen obtenida con la cámara derecha.

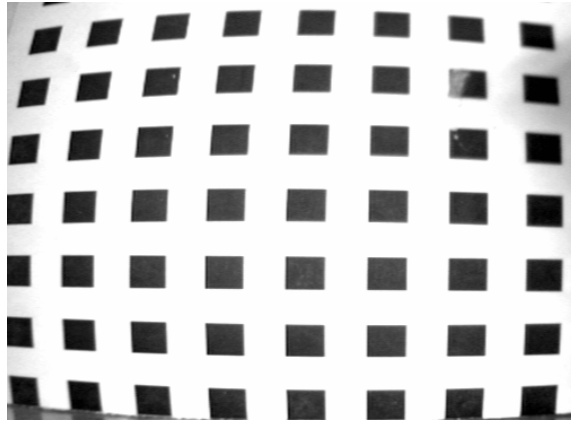
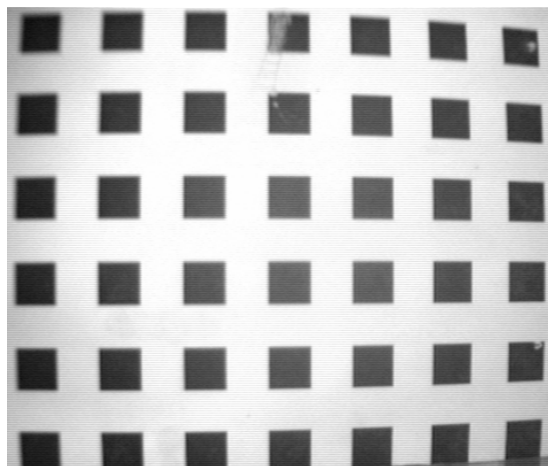


Fig. 15. Imagen obtenida con la cámara izquierda.



1.4. 2. Proceso de calibración

Las cámaras utilizadas, se calibraron utilizando el procedimiento descrito anteriormente y propuesto inicialmente por Jaén Heikkila y Olli Silven^[2]. El proceso esta sometido a las siguientes restricciones:

- No se tienen en cuenta las distorsiones prismáticas

- Solo se consideran términos menores al quinto orden en la componente radial del modelo de distorsión.

Como el proceso de calibración requiere de N puntos conocidos en el espacio objeto ($O_w; X_w, Y_w, Z_w$) y sus correspondientes posiciones en el espacio imagen (U, V), se utilizó como patrón de referencia una cuadrícula de 1cm ubicada en posiciones conocidas en el espacio objeto.

Las figuras 16 y 17 muestran un arreglo de las 12 imágenes de las diferentes perspectivas de la escena que sirvió para establecer los puntos de control para la calibración de las cámaras 1 y 2 respectivamente. La separación entre cuadros negros en cada cámara fue de 1 cm.

Fig. 16. Imágenes para calibración cámara derecha.

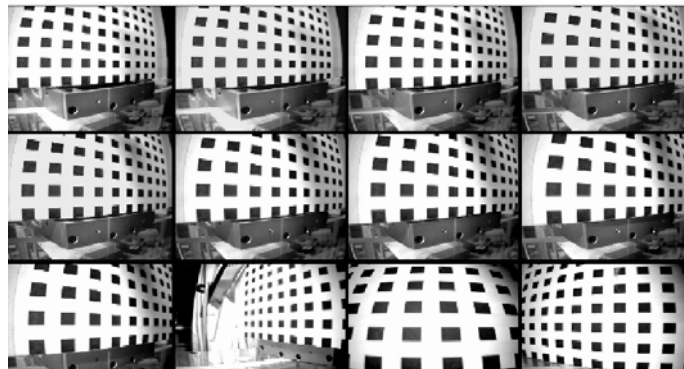
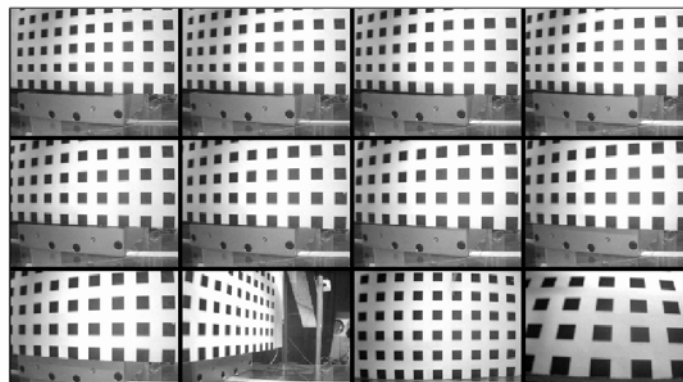


Fig. 17. Imágenes para calibración cámara izquierda.



1.4. 3. Parámetros intrínsecos obtenidos de la calibración

Utilizando algoritmos implementados en MatLab, se encontraron los parámetros de calibración geométrica para cada cámara (ver tabla 2).

Tabla 2. Parámetros de calibración. Todas las unidades están en píxeles.

PARAMETRO	CAMARA 1	CAMARA 2
f.Kx	545.458 ±32.548	798.574 ± 6.972
f.Ky	459.319 ± 16.987	245.252 ± 6.502
U _o	344.909 ±10.420	382.989 ± 7.762
V _o	240.69 ±5.375	245.252 ± 5.377
f ³ .k ₁	- 0.3722 ± 0.0392	-0.4196 ± 0.0212
f ⁵ .k ₂	0.1368 ± 0.0346	0.1672 ± 0.0863
f ² .P ₁	- 0.0027 ± 0.0022	0.0006 ± 0.0016
f ² .P ₂	0.0004 ± 0.0043	-0.0017 ± 0.0013
Tamaño imagen	640x480	640x480

1.4. 4. Exactitud de los parámetros obtenidos.

A partir de una imagen teórica libre de aberraciones y con los parámetros calculados, se reconstruye una imagen con distorsiones. Las posiciones se comparan con las experimentales y se halla un error.

Se escogió una de las imágenes utilizadas, para mostrar la exactitud de los parámetros de calibración obtenidos para la cámara1. La figura 18 muestra los puntos de control en forma de cruz como deberían verse en la imagen libre de distorsiones. Mientras que la figura 19, muestra una retroproyección utilizando los parámetros obtenidos de la calibración. La figura 20, muestra el error en la retroproyección, para todas las imágenes utilizadas en la calibración de la cámara 1. Resultados similares se obtuvieron para la cámara 2 (Fig. 21).

Fig. 18. Puntos de control (+) sin distorsiones

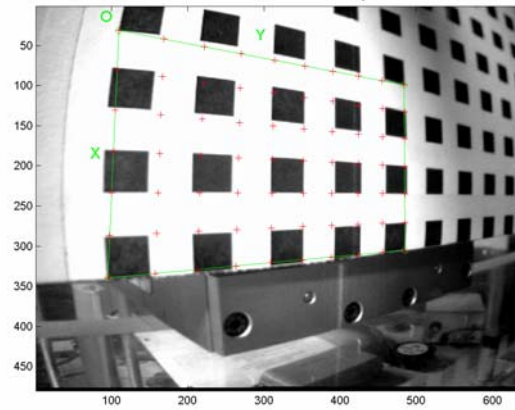


Fig. 19. Retroproyección (cámara 1). Punto sin distorsión (+) y punto distorsionado (o).

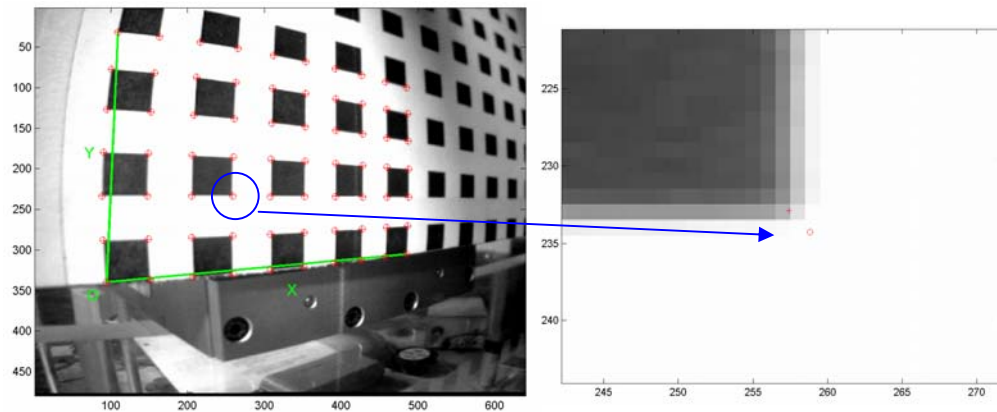


Fig. 20. Error (en píxeles) en la retroproyección para la cámara 1. Todos los puntos de un mismo color pertenecen a una misma escena.

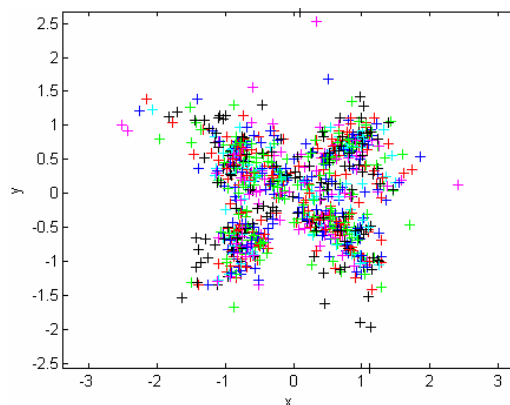
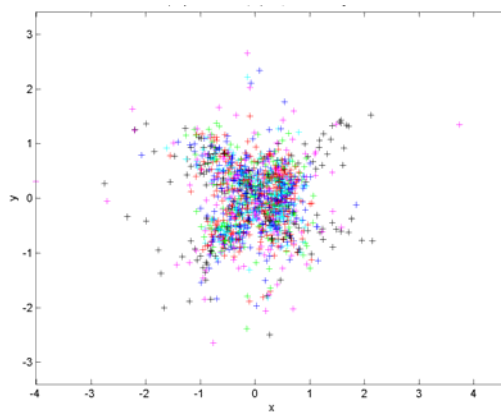


Fig. 21. Error (en píxeles) en la retroproyección para la cámara 2.



1.4. 5. Rectificación de imágenes (Corrección de distorsión)

Una vez obtenidos los parámetros de calibración, se pueden utilizar para corregir las distorsiones y obtener una imagen “libre” de aberraciones geométricas. Las figuras 22 y 23 muestran una de las escenas utilizadas para la calibración de la cámara 1 y 2 respectivamente, con su respectiva rectificación utilizando los parámetros obtenidos registrados en la tabla 2.

Fig. 22. Imagen distorsionada con su respectiva rectificación (cámara 1)

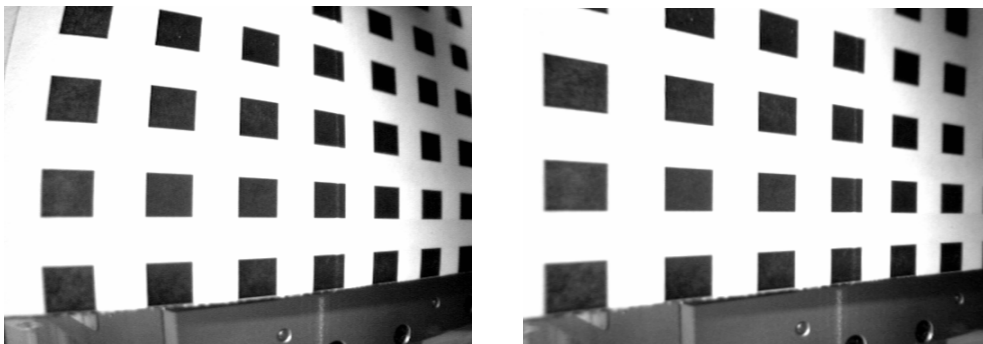
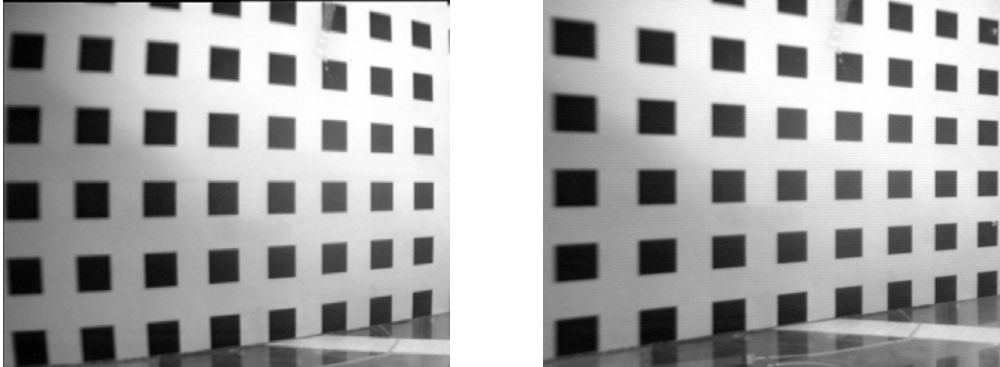


Fig. 23. Imagen distorsionada con su respectiva rectificación (cámara 2)



Una prueba más para la calibración realizada, se muestra en las figuras 24 y 25, donde se observan las imágenes capturadas por las dos cámaras, cuando una línea láser intercepta a la superficie de un cilindro, junto con una superposición de los puntos representativos de tal línea. Las figuras 26 y 27, muestran los puntos representativos de la línea obtenidos sin realizar previamente la rectificación de la imagen y los obtenidos después de realizar la rectificación.

Fig. 24. Línea láser (cámara 1)

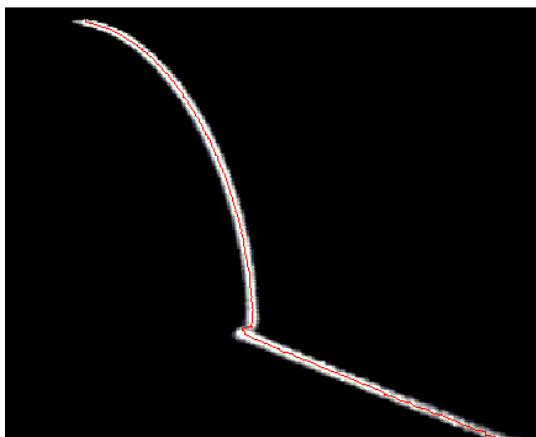


Fig. 25. Línea láser (cámara 2)

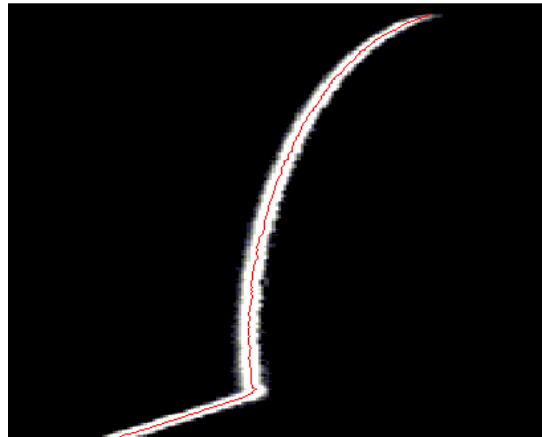


Fig. 26. Puntos con y sin distorsión (Cám. 1)

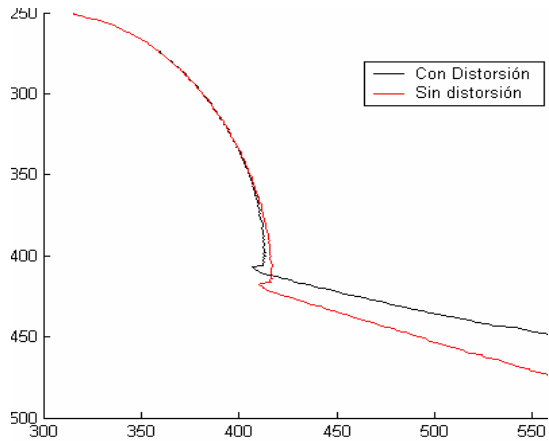
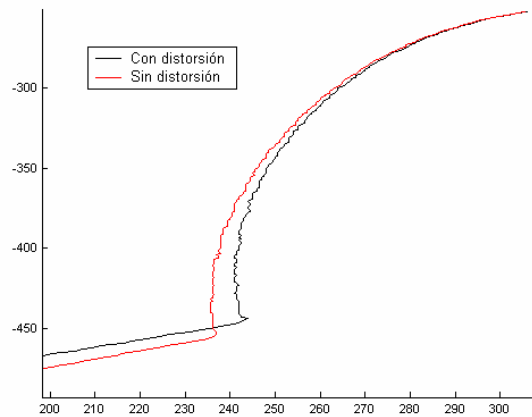


Fig. 27. Puntos con y sin distorsión (Cám. 2)



1. 5. CONCLUSIÓN

El análisis de los modelos de distorsiones y del proceso de calibración, permiten tener una idea más clara del funcionamiento de la herramienta utilizada, en la corrección de las aberraciones geométricas. La calibración de cámaras es una solución cuando se desea construir sistemas de reconstrucción 3D que utilicen cámaras convencionales que presentan imágenes con fuertes distorsiones.

Se calcularon los parámetros intrínsecos y extrínsecos para cada cámara utilizada, con los que se permite liberar las imágenes utilizadas en el proceso de reconstrucción de las distorsiones geométricas. Las figuras 26 y 27, muestran errores de varios píxeles cuando no se rectifican previamente las imágenes, lo que puede representar errores en la reconstrucción final.

CAPITULO 2

TÉCNICA DE RECONSTRUCCIÓN 3D POR TRIANGULACIÓN LÁSER

2.1. INTRODUCCIÓN

Las cámaras digitales nos proporcionan una imagen en intensidad luminosa 2D del cuerpo en estudio. No se obtiene información en esta imagen sobre la topografía del cuerpo, a menos que se conozca cómo está codificada la información 3D en la imagen 2D a la cual se tiene acceso. La técnica de triangulación láser es la base de varios sistemas que codifican información 3D en una imagen 2D cuando se necesita reconstruir la topografía de objetos con precisión de milímetros. Es necesario entonces, hallar las relaciones matemáticas que permitan obtener de las coordenadas de la imagen, dadas generalmente en píxeles, las respectivas coordenadas de la superficie del objeto a digitalizar, dadas en unidades del sistema métrico.

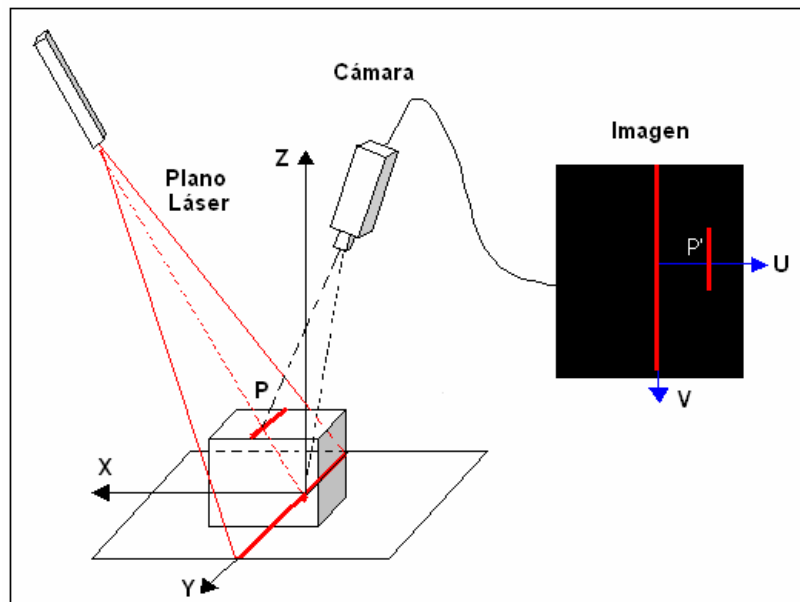
En este capítulo, se realiza un análisis de la geometría de la triangulación usada con el fin de determinar teóricamente las diferentes relaciones entre las coordenadas del mundo real y las coordenadas de la imagen codificada de la superficie del cuerpo. Además, conocer los diferentes parámetros que permiten construir un sistema adaptado a la topografía del pie.

En la sección 2.2, se describe la geometría del sistema de triangulación láser usado que permite obtener las relaciones teóricas entre las coordenadas de la superficie del objeto en el mundo real, a través de las coordenadas de su imagen. En la sección 2.3, se describe el proceso seguido en la obtención experimental de tales relaciones y en la sección 2.4, las conclusiones respectivas.

2.2. GEOMETRÍA DE LA TRIANGULACIÓN LÁSER USADA

Principalmente, la técnica de triangulación óptica consiste en iluminar el cuerpo con un patrón que puede ser un punto láser, una línea láser, una cuadrícula, franjas, etc. La intersección entre la iluminación proyectada y la superficie del cuerpo a reconstruir, produce un único patrón deformado dependiendo de la forma y dimensiones del cuerpo. Por ejemplo, La figura 28, representa un montaje óptico de reconstrucción 3D por triangulación que utiliza un plano láser. Cuando se proyecta la línea láser sobre la superficie plana (XY), llamado plano de referencia, la imagen 2D capturada por un sistema de observación libre de aberraciones, debe ser una línea recta (línea de referencia). Cuando se coloca un objeto sobre el plano XY, la imagen es una línea deformada debido a la topografía del objeto. La cantidad de desplazamiento que sufre cada punto de la línea en la imagen 2D capturada respecto a la línea de referencia, está relacionada con la altura (Z) del objeto en ese punto. Es así, como una característica 3D es codificada en una imagen 2D.

Fig. 28. Montaje óptico de triangulación láser.



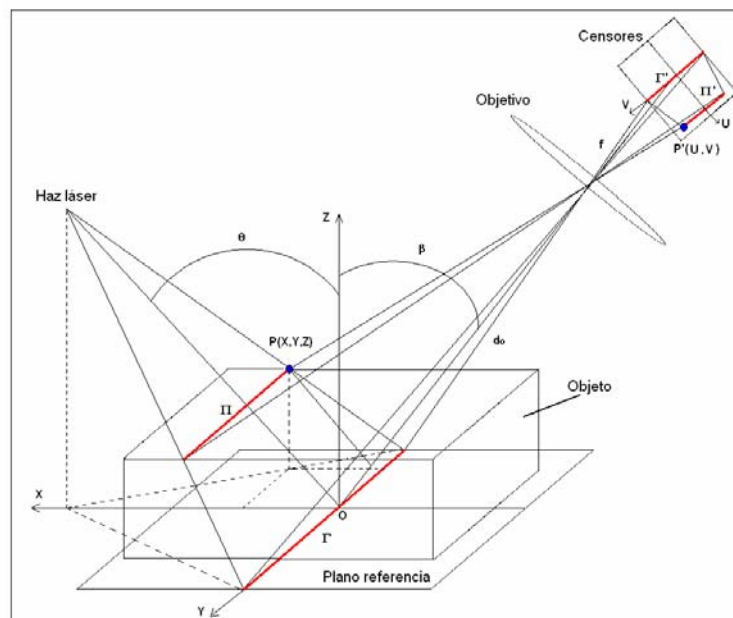
La idea principal es obtener las curvas de calibración que permiten encontrar las coordenadas de un punto cualquiera $P(X,Y,Z)$ sobre la curva de intersección entre la superficie del objeto a reconstruir y el plano láser, a partir de las coordenadas $P'(U,V)$ de la imagen de tal intersección capturada con una cámara.

2.2.1. CURVAS TEÓRICAS DE CALIBRACIÓN.

La figura 29, muestra un esquema del montaje y los parámetros de la geometría del sistema de triangulación. Se suponen las siguientes condiciones:

- El eje del plano láser y el eje óptico del objetivo de la cámara están en un mismo plano, el cual es perpendicular al plano de referencia XY .
- El objeto se coloca sobre el plano XY de referencia de tal forma que quede dentro de la profundidad de campo tanto del haz láser como de la cámara.
- El objetivo de la cámara se considera libre de aberraciones en donde su sistema óptico se aproxima a una lente delgada, con su eje óptico interceptando al plano imagen en su centro.

Fig. 29. Geometría de la triangulación láser



Un haz plano de luz láser es proyectado oblicuamente un ángulo θ sobre el plano XY (plano de referencia) formando una línea luminosa Γ . Un sistema de observación que forma un ángulo β con la normal del plano de referencia, captura la imagen de Γ en Γ' . Al ubicar el objeto, el haz es interceptado en Π formándose su imagen en Π' .

Usando la ley de Gauss para las lentes delgadas, se puede mostrar que la coordenada Z de un punto P sobre la línea de intersección está relacionada con la coordenada U de su imagen P' según la expresión:

$$Z(U) = \frac{U \cos \beta}{M \cos(\theta + \beta) \left[\tan(\beta + \theta) + \frac{U}{f} \right]} \quad (37)$$

Donde $M \cong f/d_o$, siendo f la focal efectiva del objetivo de la cámara y d_o la distancia desde O hasta el centro del sistema óptico del objetivo.

Para el caso cuando el eje óptico del sistema de observación es perpendicular al plano de referencia ($\theta = 0^\circ$), la expresión (37) queda:

$$Z(U) = \frac{U}{M \left[\tan(\beta) + \frac{U}{f} \right]} \quad (38)$$

Para el mismo caso cuando $\theta = 0^\circ$, se obtiene la expresión que permite encontrar la coordenada Y del mismo punto P en el mundo real:

$$Y(U, V) = \frac{d_o}{f} V - \frac{\cos(\beta)}{M \left[\tan(\beta) + \frac{U}{f} \right]} UV \quad (39)$$

Para obtener más información sobre la topografía del cuerpo, se realiza un barrido de la línea láser sobre la superficie del objeto en interés en la dirección del eje X, de tal forma que si se realizan n barridos a intervalos de desplazamientos ΔX , entonces, la respectiva coordenada X de todos los puntos sobre la n-sima línea será:

$$X = n\Delta X \quad (40)$$

Es decir, conociendo los parámetros del sistema óptico y obteniendo las coordenadas (U,V) sobre la imagen de la línea láser, se pueden calcular las coordenadas (X,Y,Z) para cada punto usando las ecuaciones (38), (39) y (40).

Para observar la forma de las curvas dadas por las ecuaciones (38) y (39), se realizó una simulación. Como el valor de las coordenadas (U,V), es obtenido de la imagen 2D capturada por el sistema de observación, sus unidades están en píxeles. Para realizar una adecuada simulación en donde las unidades de las coordenadas del mundo real resulten en mm, es necesario realizar la conversión de mm a píxeles. Para esto, es necesario conocer el número y el tamaño del arreglo de sensores de la cámara.

Si la cámara tiene mxn píxeles y todo el arreglo es de tamaño MxN (en mm), el factor de conversión en la dirección de U (K_x) y en la dirección de V (K_y) será respectivamente,

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{M}{m} \\ K_y &= \frac{N}{n} \end{aligned} \quad (\text{en mm/pixel}) \quad (41)$$

La ecuación (38) queda entonces,

$$Z(U) = \frac{K_x U}{M \left[\tan(\beta) + \frac{K_x U}{f} \right]} \quad (U \text{ en píxel y } Z \text{ en mm}) \quad (42)$$

Y de la ecuación (39), se obtiene la relación entre la razón $F = Y/V$, (factor de conversión mm/píxel) y la respectiva coordenada Z del espacio objeto:

$$F(Z) = \frac{Y}{V} = K_y \frac{d_o}{f} - \frac{K_y \cos(\beta)}{f} Z \quad (Z \text{ en mm y } Y/V \text{ en mm/píxel}) \quad (43)$$

Para realizar la simulación, se utilizaron los parámetros de una de las cámaras usadas, los cuales estaban especificados por el fabricante y la distancia de observación en el montaje de triangulación construido:

Tabla 3. Parámetros de la cámara utilizados en la simulación

f	3.6 mm
d_o	80 mm
θ	0°
β	45°
mxn	640x480
MxN	8.8 x6.6mm

Se remplazaron los datos de la tabla 1 en (42) y los resultados se muestran en la Fig. 30. La relación entre Z y U , se puede aproximar a una relación cuadrática. Efectivamente, realizando un ajuste cuadrático a los datos dados por tal ecuación, se obtiene:

$$Z = - 0.00042U^2 + 0.25U + 0.74 \quad (44)$$

De igual forma, se remplazaron los datos de la tabla 1 en (43) y los resultados se muestran en la Fig. 31.

Fig. 30. Curva de conversión $Z=f(U)$

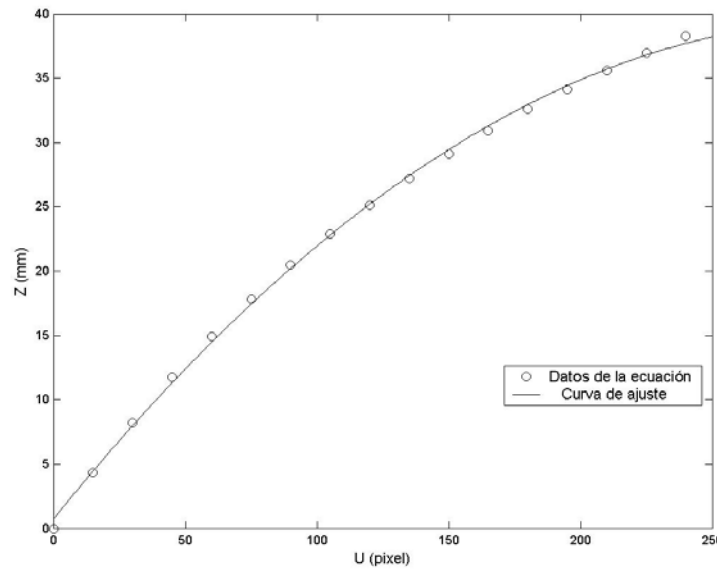
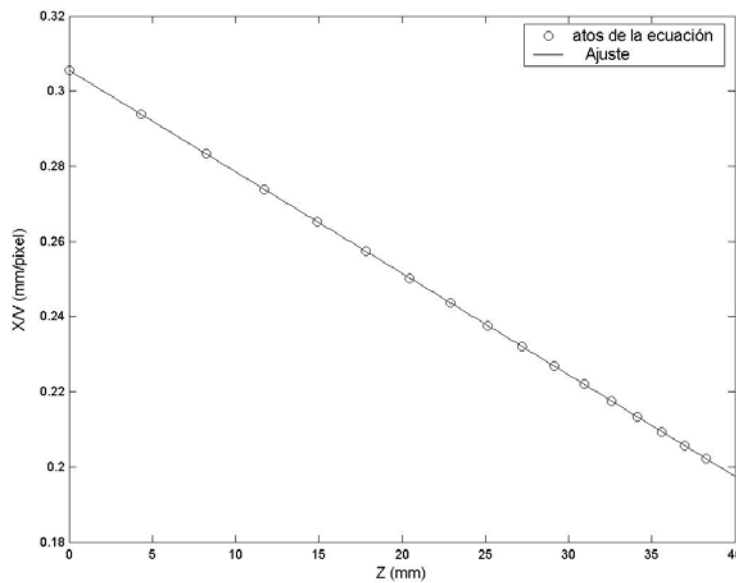


Fig. 31. Curva de factor de conversión mm/píxel en función de Z



La relación entre F y Z, se puede aproximar a una relación cuadrática, ya que los valores de Z se obtienen de los valores de U cuya relación es aproximadamente cuadrática. Efectivamente, realizando un ajuste cuadrático a los datos dados por tal ecuación, se obtiene:

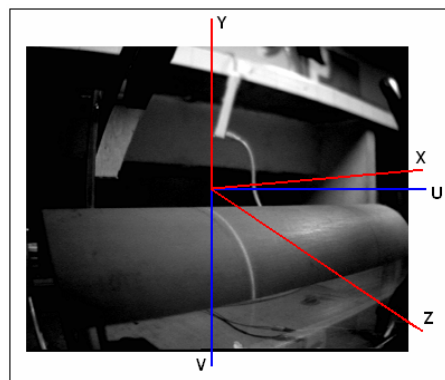
$$F = Y/V = - 4e-19Z^2 - 0.0097Z + 0.31 \quad (45)$$

La forma de las curvas nos indican que existe una relación no lineal entre (U,V) y Z , lo cual es típico del modelo geométrico no telecéntrico dado en el cálculo de las ecuaciones.

2.2.2. CURVAS DE CALIBRACIÓN EXPERIMENTALES

En el sistema de reconstrucción construido, se utilizaron dos cámaras CCD. Para cada cámara se obtuvieron curvas de calibración experimentales. Las figuras 32, muestra una imagen capturada por una de las cámaras cuando una línea láser se proyecta sobre un cilindro a una posición X conocida. El objetivo es encontrar una relación experimental entre las coordenadas (U,V) (medidas en píxeles) y su respectiva coordenada (Y,Z) (medido en mm). El origen del sistema (X,Y,Z) se escogió de tal forma que su proyección sobre el plano imagen coincidiera con el punto principal O que corresponde a la intersección del eje óptico de la cámara con el plano de los sensores.

Fig. 32. Sistema de coordenadas involucrados

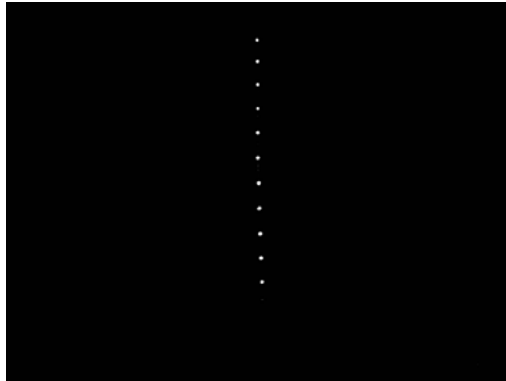


El procedimiento para la obtención de las curvas experimentales fué el siguiente:

- Se construyó una escena de puntos blancos alineados a lo largo del eje Y en el sistema coordenado (X,Y,Z) (Figura 6), sobre un fondo negro. Los puntos estaban igualmente espaciados a una distancia de 1 cm entre punto y punto, de tal forma, que al proyectar la línea láser sobre ellos, se observara una

imagen de puntos blancos a lo largo del eje V en la imagen, para una coordenada U. (Fig. 33).

Fig. 33. Escena de puntos en $Z = 0\text{mm}$.



- Se desplazó la escena de puntos a lo largo del eje Z cada 5 mm. Y se capturaron las respectivas imágenes. La figura 34 y 35 muestra una superposición de las imágenes de las escenas desplazadas para cada cámara respectivamente.

Fig. 34. Escena de puntos cada 5 mm (cámara 1).

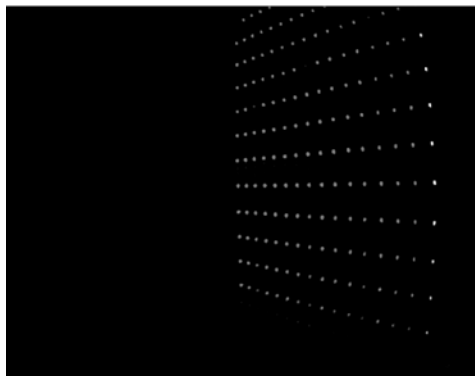


Fig. 35. Escena de puntos cada 5 mm (cámara 2).



- Debido a las distorsiones geométricas, cada cámara ha sido previamente calibrada y cada imagen es debidamente rectificadas. La figura 36 y 37, muestra una imagen de la superposición de tales imágenes rectificadas para cada cámara .

Fig. 36. Escena de puntos debidamente rectificados (Cám. 1).

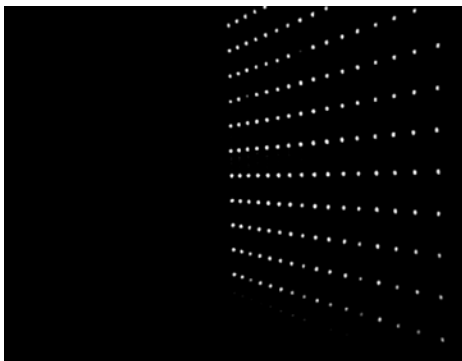
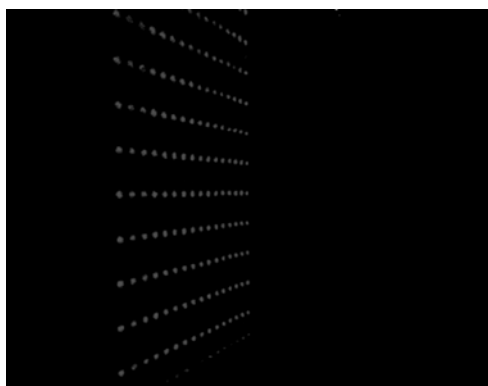


Fig. 37. Escena de puntos debidamente rectificados (Cám. 2).



Sobre la imagen rectificada, cada serie de puntos en dirección V posee una coordenada U y corresponde a una posición Z . Extrayendo la coordenada U para cada posición Z , se pueden obtener las curvas de calibración de cada cámara. Se encontró la mejor relación entre Z y U , realizando un ajuste de tipo cuadrático (Fig. 38 y 39). Las relaciones encontradas son:

Cámara 1:

$$Z(U) = -0.0005 U^2 + 0.4046U + 0.9631 \quad (U \text{ en píxel, } Z \text{ en mm}) \quad (46)$$

Cámara 2:

$$Z(U) = -0.0011 U^2 + 0.6358U + 0.7189 \quad (U \text{ en píxel, } Z \text{ en mm}) \quad (47)$$

Fig. 38. Curva de calibración en Z (cámara 1)

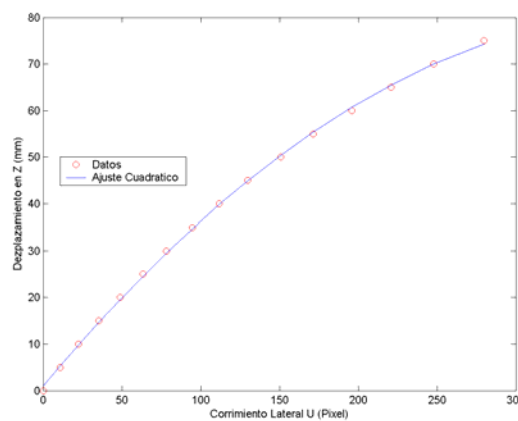
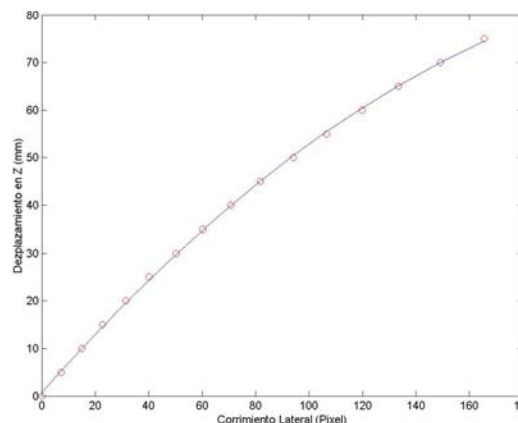


Fig. 39. Curva de calibración en Z (cámara 2)



- De igual forma, se encontró la relación mm/píxel con cada posición en Z, para obtener la coordenada Y respectiva (Fig. 40 y 41). Las relaciones encontradas son:

Cámara 1:

$$F = Y/V = - 0.0000005 Z^2 - 0.0016450Z + 0.3105639 \quad (\text{mm/píxel}) \quad (48)$$

Cámara 2:

$$F = Y/V = - 0.000002 Z^2 - 0.001126Z + 0.278103 \quad (\text{mm/píxel}) \quad (49)$$

Fig. 40. Curva de calibración en Y (cámara 1)

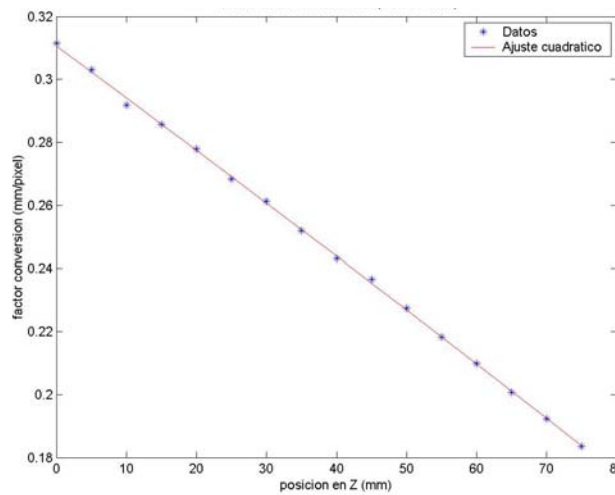
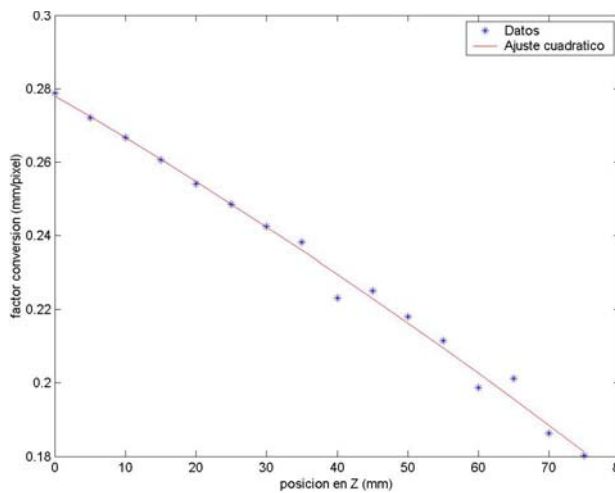


Fig. 41. Curva de calibración en Y (cámara 2)



Para probar las curvas de calibración obtenidas con cada cámara, se colocó un objeto de forma cilíndrica (Fig. 42 y 43) y se obtuvieron las respectivas coordenadas (Y,Z) del mundo, a través de sus respectivas coordenadas (U,V) en su imagen .

Fig. 42. Línea láser deformada por un cilindro (cámara 1)

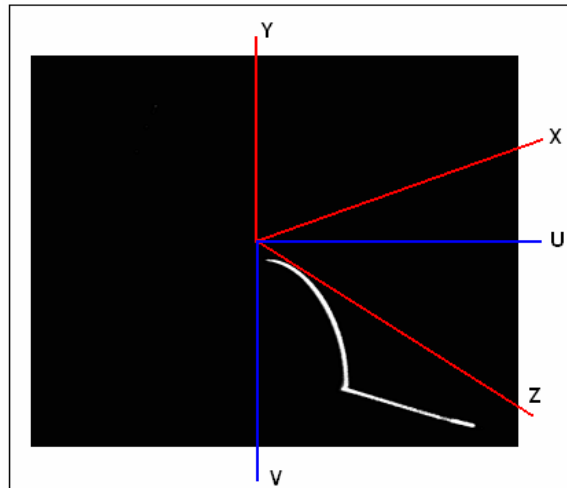
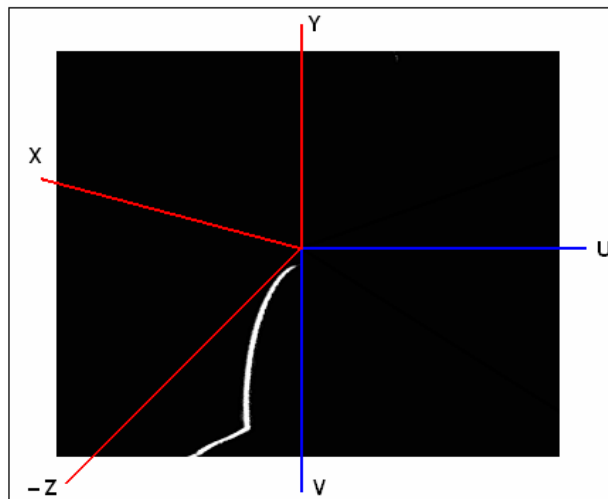


Fig. 43. Línea láser deformada por un cilindro (cámara 2)



A cada imagen se le extraen los puntos representativos (U,V) de la línea deformada. Para obtener la respectiva coordenada Z, se reemplaza la coordenada U en la ecuación (46) y (47). Luego, se reemplaza la coordenada Z obtenida en la

ecuación (48) y (49) para obtener el factor de calibración F respectivo para multiplicarlo por la coordenada V y así obtener la respectiva coordenada Y . Los valores obtenidos se muestran en la figura 44 para la cámara 1, y en la figura 45 para la cámara 2.

Fig. 44. Valores (Y,Z) obtenidos con la cámara 1

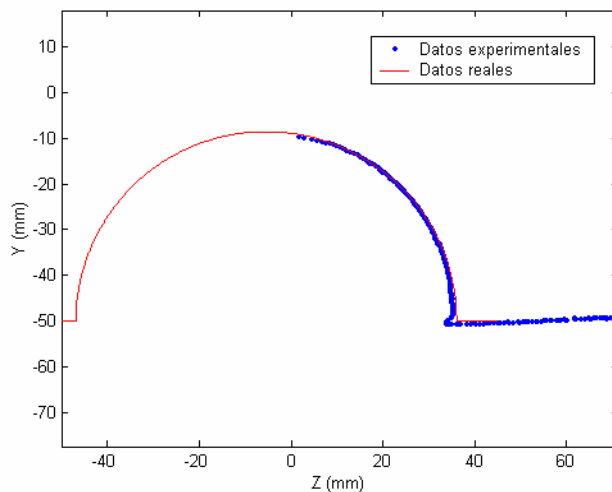
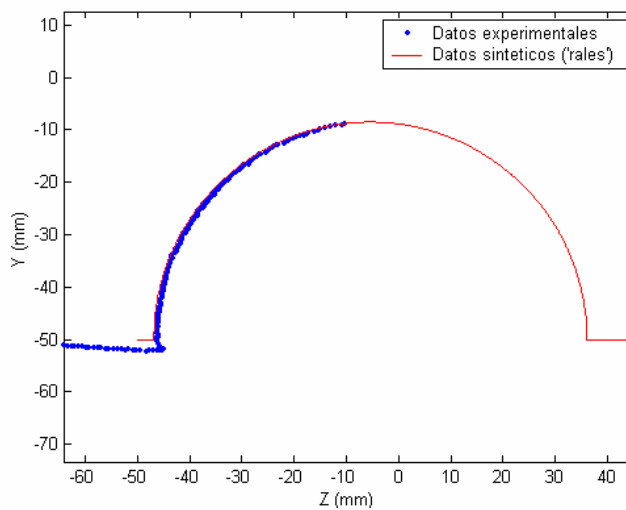


Fig. 45. Valores (Y,Z) obtenidos con la cámara 2



2.3. CONCLUSIONES

Las curvas experimentales obtenidas con cada cámara (ecuaciones 46, 47, 48, 49), concuerdan en el orden, con las curvas teóricas (ecuaciones 44 y 45). Se debe principalmente, a que el modelo teórico considerara a las lentes delgadas y sin distorsiones geométricas y cuando se le corrigen las distorsiones a las escenas de puntos antes de obtener las curvas experimentales de calibración, se puede considerar a las cámaras usadas sin distorsiones geométricas apreciables.

Se escogió el objeto de prueba de forma cilíndrica, ya que al interceptar el plano láser con su superficie, la curva obtenida es una circunferencia y cualquier reconstrucción que se realice de esta intersección debe conservar su forma circular. Se observa que las coordenadas (Y,Z) obtenidas a través de las curvas experimentales funcionan, ya que mantienen la forma circular y las dimensiones del objeto tal como lo muestran las dos figuras anteriores.

CAPITULO 3. SISTEMA DE RECONSTRUCCIÓN 3D IMPLEMENTADO

3.1. INTRODUCCIÓN

Generalmente, la técnica de reconstrucción por triangulación consiste básicamente de un sistema de iluminación láser, un sistema de observación y un sistema de desplazamiento. Cuando el objeto a reconstruir debe permanecer en reposo, a veces es necesario utilizar varios sistemas de observación con su respectivo patrón de iluminación, los cuales en conjunto deben desplazarse realizando un escáner sobre el objeto, para obtener una imagen 3D digitalizada que pueda ser vista desde varias direcciones.

En este capítulo, se describe el sistema de reconstrucción implementado. En la sección 3.2, se describe el montaje, en la sección 3.3, se muestra el proceso utilizado en la reconstrucción, en la sección 3.4, se determinan las características del sistema y en la sección 3.5 se describe un procedimiento para medir longitudes sobre la imagen reconstruida.

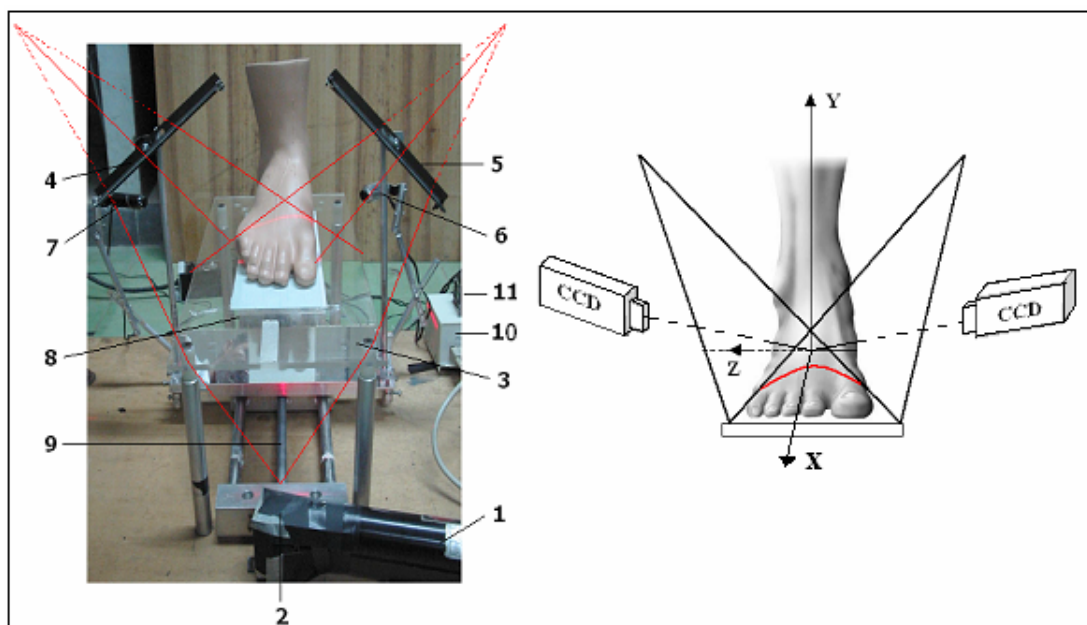
3.2. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

El sistema construido (Fig. 46), consta de los siguientes módulos:

- Módulo de iluminación
 1. Láser
 2. Sistema óptico (formador del plano láser)
 3. espejo 1
 4. espejo 2
 5. espejo 3
- Módulo de adquisición de imágenes
 6. Cámara CCD 1.
 7. Cámara CCD 2.
- Módulo de desplazamiento
 8. Motor paso a paso
 9. tornillo sin fin
- Módulo de control
 10. Interfaz de control del motor

11. Conmutador de canales de entrada de video

Fig. 46. Montaje experimental



El sistema de iluminación está diseñado de tal forma, que el plano láser incide a 45° sobre el espejo 3. Los espejos 4 y 5 reflejan el haz haciendo que el plano láser incida perpendicular a la plataforma donde va apoyado el objeto, formándose una curva cerrada cuando intercepta la superficie del objeto a reconstruir (línea continua sobre el pie). Las cámaras 6 y 7 forman un ángulo de inclinación respecto al plano láser y están ubicadas de tal forma que la imagen del origen del sistema de referencia escogido del mundo se forme en el punto principal de cada cámara. Todo el sistema de espejos y las dos cámaras se desplazan simultáneamente a medida que el tornillo sin fin gira con ayuda del motor paso a paso 8, el cual está acoplado en uno de sus extremos. El módulo de desplazamiento y el de iluminación están alineados de tal forma que cuando todo el sistema se desplaza, siempre se mantiene cerrada la curva de intersección entre el plano láser y la superficie del cuerpo. Los sistemas de captura de imágenes y desplazamiento son controlados a través del computador. Cada cámara CCD genera una señal video que es digitalizada usando una tarjeta de

adquisición Meteor II RGB. El desplazamiento de las cámaras CCD y el plano láser se controlan usando una interfase digital a través del puerto paralelo.

3.3. PROCESO DE RECONSTRUCCIÓN 3D

Se describe el proceso de reconstrucción de un objeto de forma cilíndrica. El proceso esta dividido en 3 etapas:

- Captura de las imágenes
- Procesamiento de las imágenes
 - Corrección de distorsión
 - Extracción de las coordenadas (U,V) de los puntos representativos de cada línea.
- Procesamiento de datos
 - Obtención de las coordenadas (X,Y,Z) para cada cámara
 - Unificación de sistemas de coordenadas

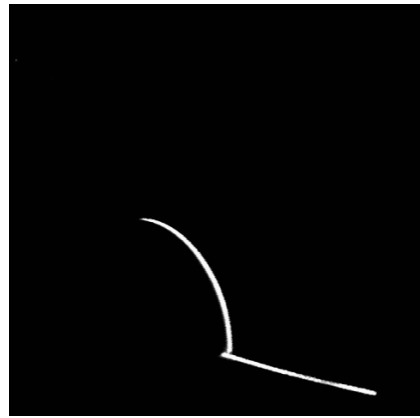
3.3.1. Captura de las imágenes

Una interfase grafica, programada en Visual C++, activa el módulo de desplazamiento y el módulo de adquisición de imágenes, en función de los parámetros definidos por el usuario. Principalmente la interfase necesita el intervalo de desplazamiento Δx y el número total de imágenes N . Así, el desplazamiento total en X es $X_T = N\Delta x$. Para cada posición sobre el eje X , la interfaz adquiere y almacena secuencialmente las imágenes de cada CCD y envía los impulsos al motor paso a paso a través de la interfaz análogo digital, para activar el modulo de desplazamiento. De esta manera al recorrer todo el X_T , se han almacenado $2N$ imágenes en niveles de gris, del plano láser deformado por la superficie del cuerpo. Las figuras 47 y 48 muestran las imágenes capturadas por cada cámara en una posición X del sistema de desplazamiento, para el objeto cilíndrico de prueba.

Fig. 47. Cámara 1



Fig. 48. Cámara 2



3.3.2. Procesamiento de imágenes

- **Corrección de la distorsión.** Antes de realizar cualquier medida sobre las imágenes capturadas, cada una es debidamente rectificadas con ayuda de los parámetros obtenidos en el proceso de calibración de las cámaras. Las figuras 47 y 48, muestran una de las imágenes rectificadas para cada cámara.

Fig. 49. Cámara 1 (sin distorsión)



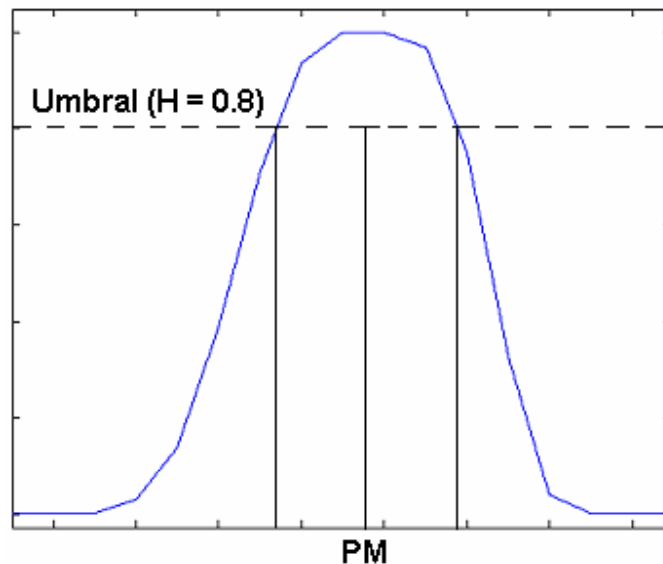
Fig. 50. Cámara 2 (sin distorsión)



- **Extracción de las coordenadas (U,V).** Realizando un corte transversal a la línea láser, su distribución en intensidad es Gaussiana (DG) (Fig. 51). Se puede asumir que las coordenadas (U,V) de los puntos que representan la

intersección del plano láser con la superficie del cuerpo a reconstruir son en aproximación, las coordenadas **(U,V)** de la posición central de la DG.

Fig. 51. Corte transversal de la línea láser



Para obtener estos puntos, inicialmente se realiza un pretratamiento “clásico” para reducir la influencia del speckle y del ruido de fondo debido a la iluminación ambiental. Posteriormente, se realiza una binarización, utilizando el rango de valores en niveles de gris (NG) de la Distribución Gaussiana (DG) de la línea láser. Se definió un umbral de binarización según el criterio siguiente:

$$\text{Umbral} = I_{\min} + (I_{\max} - I_{\min})H \quad (50)$$

Donde I_{\min} e I_{\max} son los valores de las intensidades mínimas y máximas respectivamente de la DG y H es un valor entre 0 y 1 que se ajusta dependiendo del nivel de ruido de toda la imagen. La posición del punto medio (**PM**) del rango de píxeles con NG superior al valor del umbral, define la posición central de la DG. Las figuras 52 y 53 muestran los puntos representativos de la línea láser capturada para las cámaras 1 y 2 respectivamente usando un valor $H = 0.8$.

Fig. 52. Corte transversal de la línea láser

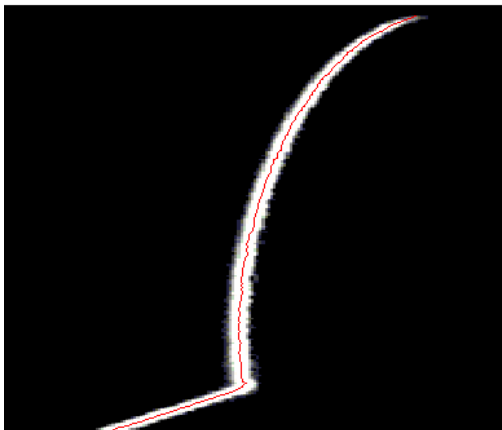
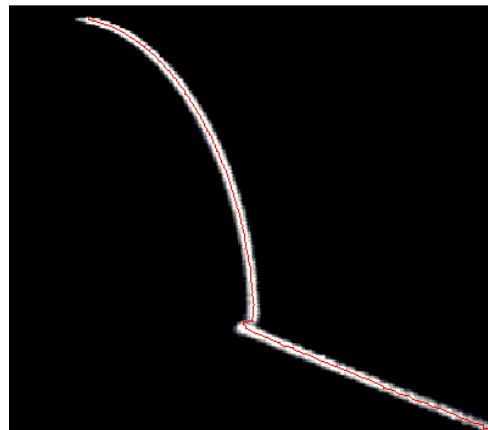


Fig. 53. Corte transversal de la línea láser



3.3.3. Procesamiento de datos

- **Obtención de las coordenadas (X,Y,Z)**

Para describir el proceso de cálculo de las coordenadas (X,Y,Z) de la superficie del cuerpo en el mundo real a partir su proyección (U,V) sobre el plano imagen y de su respectiva posición en el sistema de desplazamiento, se establecen las siguientes convenciones:

Δx : intervalo de desplazamientos (en mm) del barrido de la línea láser sobre el objeto a lo largo del eje X.

N : número de imágenes por cada cámara.

N: orden en la captura imágenes ($n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$).

(U₁,V₁) : coordenadas de un punto sobre la línea central de la imagen de la cámara 1.

(U₂,V₂) : coordenadas de un punto sobre la línea central de la imagen de la cámara 2.

(X₁,Y₁,Z₁): coordenadas correspondientes al punto **(U₁,V₁)** en el sistema coordenado del objeto.

(X_2, Y_2, Z_2) : coordenadas correspondientes al punto (U_2, V_2) en el sistema coordinado del objeto.

G_1 : curva de calibración en Z para la cámara 1 (ecuación 46).

G_2 : curva de calibración en Z para la cámara 2 (ecuación 47).

F_1 : curva de conversión mm/ íxel en Y para la camara1 (ecuación 48).

F_2 : curva de conversión mm/ íxel en Y para la camara2 (ecuación 49).

Las coordenadas (X, Y, Z) se obtienen con las siguientes relaciones:

- **Para la cámara 1:**

$$Z_1 = g_1(U_1)$$

$$Y_1 = V_1 \cdot F_1(Z_1); \quad (51)$$

$$X_1 = n \cdot \Delta x$$

- **Para la cámara 2:**

$$Z_2 = g_2(U_2)$$

$$Y_2 = V_2 \cdot F_2(Z_2); \quad (52)$$

$$X_2 = n \cdot \Delta x$$

Las figuras 54 y 55, muestran la reconstrucción realizada por cada cámara con ayuda de las relaciones respectivas

Fig. 54. Reconstrucción 3D del cilindro de prueba según la cámara 1.

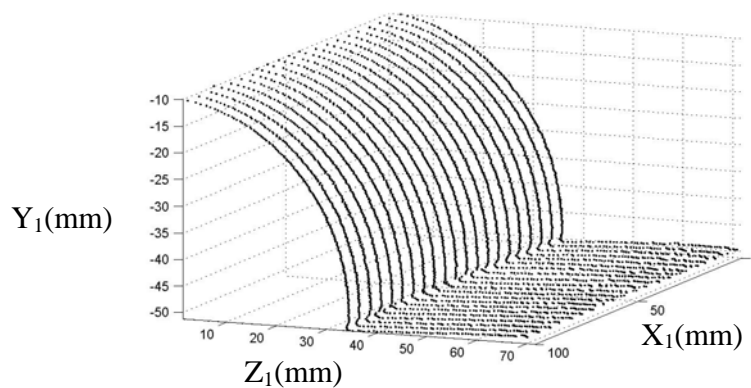
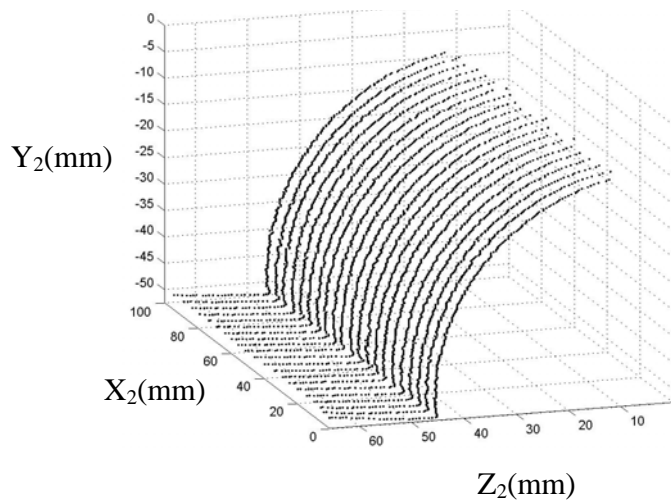


Fig. 55. Reconstrucción 3D del cilindro de prueba según la cámara 2.



- **Unificación de sistemas de coordenadas.**

Como el sistema fue alineado de tal forma que la proyección del origen del sistema coordinado (X,Y,Z) sobre el plano imagen coincidiera con el origen de las coordenadas de la imagen (U,V) y el eje Y se alineó paralelo al eje V, las coordenadas obtenidas con cada cámara se pueden unificar en uno solo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 X &= [X_1 , X_2] \\
 Y &= [Y_1 , Y_2] \\
 Z &= [Z_1 , - Z_2]
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

Fig. 56. Reconstrucción total del cilindro de prueba.

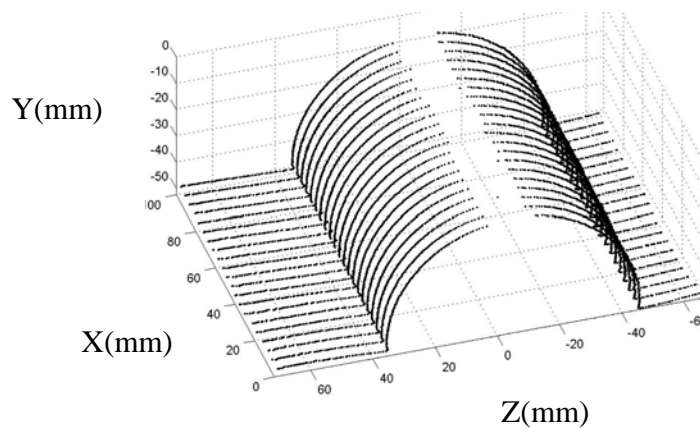
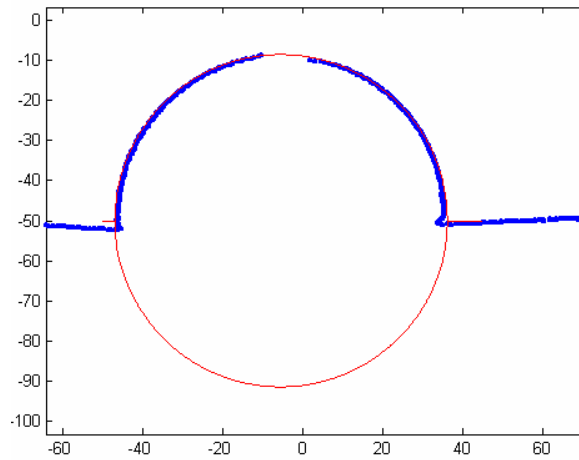
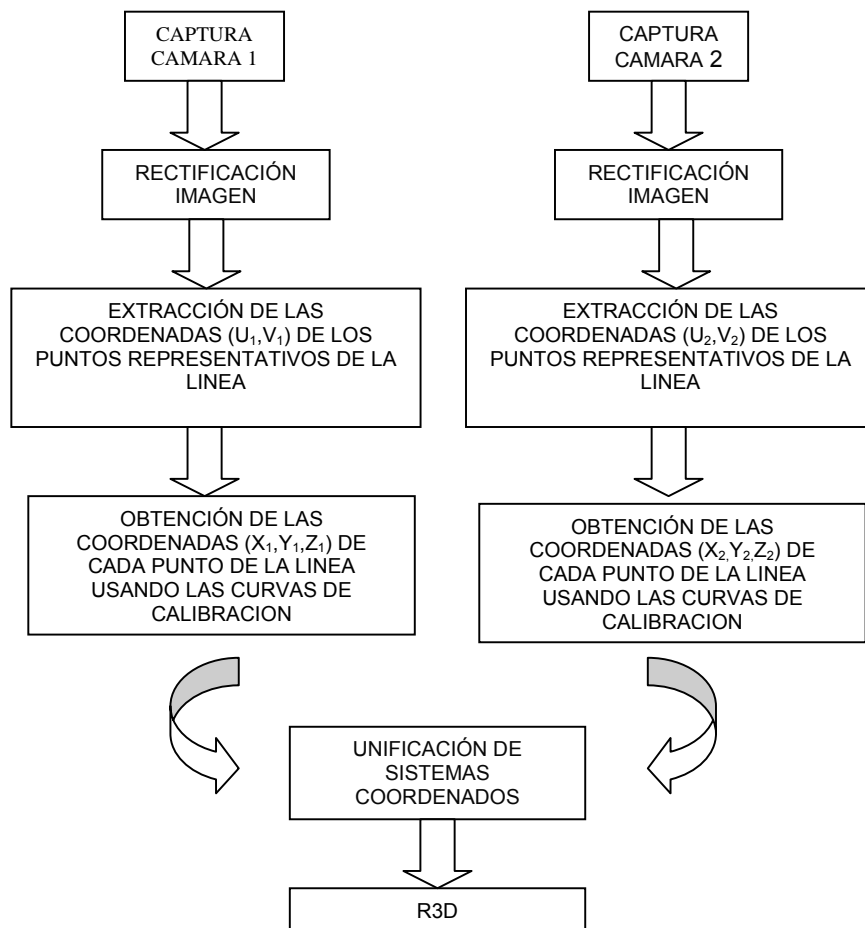


Fig. 57. Corte en X del cilindro reconstruido y una superposición de su circunferencia.



En general, el proceso de reconstrucción se muestra en el siguiente esquema:



3.4. CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA

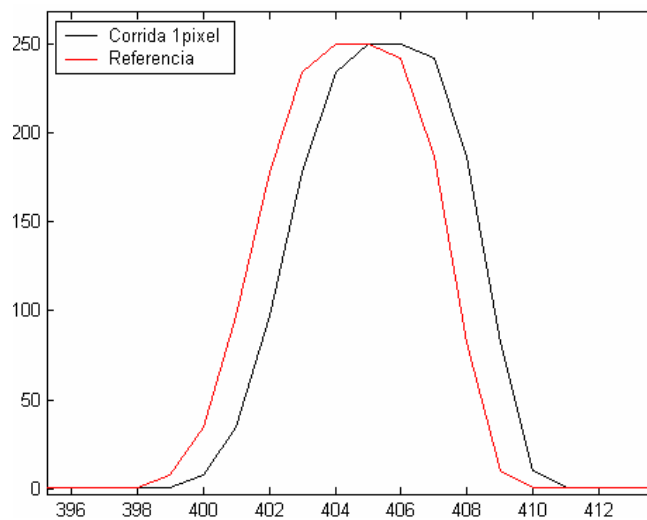
3.4.1. RESOLUCIÓN

Como la línea láser cubre varios sensores (aproximadamente 11 píxeles), la resolución sobre los ejes Y esta determinada por el tamaño y separación de estos. Mientras que en Z, la resolución esta determinada por el desplazamiento mas pequeño medible por el sistema, equivalente a 1 píxel en el eje U de cada CCD.

Resolución en Z.

Como la coordenada **Z** de un punto sobre la imagen se mide por el desplazamiento **U** que sufre respecto a la línea de referencia, entonces, el mínimo valor de Z (δZ) que se puede medir será aquel que desplace su imagen en un píxel (Fig. 58).

Fig. 58. Corrimiento de 1 píxel de la línea láser.



Para encontrar la resolución en Z para cada cámara, se reemplaza $U = 0$ píxel y $U = 1$ píxel en la curva de calibración en Z para la cámara respectiva (ecuac. 46 y 47):

- Para la cámara 1.

$$\delta Z_1 = Z_1(1) - Z_1(0) = 0.41 \text{ mm}$$

- Para la cámara 2.

$$\delta Z_2 = Z_2(1) - Z_2(0) = 0.63 \text{ mm}$$

Resolución en Y.

La resolución en Y se define como la máxima separación en mm equivalente a una separación de un píxel en dirección del eje V. Para calcularla δY , se utilizan las ecuaciones 48 y 49 haciendo $Z = 0$, valor mínimo de Y/V . Así, haciendo $V = 1$ se obtienen:

- Para la cámara 1:

$$\delta Y_1 = 0.31 \text{ mm}$$

- Para la cámara 2:

$$\delta Y_2 = 0.28 \text{ mm}$$

Resolución en X.

Esta dado por el intervalo de desplazamiento Δx que se escoja en el sistema de posicionamiento. Para este caso,

$$\Delta x = 5 \text{ mm}$$

La precisión en la determinación de la coordenada X, depende del error que se introduce en el desplazamiento del motor para ajustar el intervalo de desplazamiento Δx .

3.4.2. Precisión en la coordenada X

Para lograr que el sistema de posicionamiento se desplazara cada $\Delta x = 5\text{mm}$, se envió una determinada cantidad de pulsos eléctricos digitales al motor paso a paso acoplado al tornillo sin fin. La secuencia de pulsos ajustada se muestra en la tabla 4.

Tabla 4. Secuencia de pulsos eléctricos para el desplazamiento

$\Delta X(\text{mm})$	pulsos	$\Delta x(\text{mm})$	pulsos	$\Delta x(\text{mm})$	pulsos	$\Delta x(\text{mm})$	pulsos
0-5	530	70-75	520	140-145	520	210-215	520
5-10	530	75-80	510	145-150	500	215-220	500
10-15	520	80-85	530	150-155	530	220-225	520
15-20	500	85-90	500	155-160	510	225-230	520
20-25	500	90-95	520	160-165	530	230-235	520
25-30	530	95-100	520	165-170	530	235-240	520
30-35	520	100-105	510	170-175	510	240-245	490
35-40	520	105-110	520	175-180	530	245-250	520
40-45	520	110-115	500	180-185	510	250-255	500
45-50	520	115-120	500	185-190	530	255-260	520
50-55	510	120-125	520	190-195	500	260-265	520
55-60	510	125-130	520	195-200	520	265-270	520
60-65	530	130-135	520	200-205	520	270-275	520
65-70	530	135-140	520	205-210	500	275-280	520

Cada orden en la secuencia fue la necesaria para completar los 5mm siguientes, hasta cubrir 280 mm. La diferencia entre el número de pulsos para desplazar el mismo Δx se debe a la irregularidad del paso de rosca en el tornillo. Una vez programada la secuencia de pulsos eléctricos, se repitió el desplazamiento en diferentes días y a diferentes horas. Se calculó el error en cada posición lográndose una desviación promedio de la coordenada X de:

$$\delta_{\text{prom}X} = 0.5 \text{ (mm)}$$

de tal forma que la precisión en la medida de la coordenada X esta dada por:

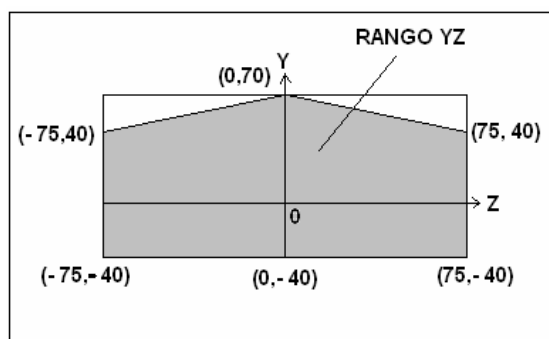
$$X = N\Delta x \pm \delta_{\text{prom}X}$$

Donde, $\delta_{\text{prom}X} = 0.5\text{mm}$ y $\Delta x = 5\text{mm}$.

3.4.3. RANGO.

Las dimensiones máximas que debe tener un objeto para su reconstrucción 3D, están limitadas por las distancias de observación de las cámaras, su ángulo de visión y por el máximo desplazamiento en X que permita la plataforma de apoyo del objeto. El rango de trabajo en X para el sistema construido fue de **280mm** y para Y y Z están especificados en la figura 59.

Fig. 59, Rango de trabajo en YZ (en mm)



3.5. PROCEDIMIENTO PARA MEDIR SOBRE LA IMAGEN R3D DIGITALIZADA Y CALCULAR SU PRECISIÓN.

La longitud **L** de una curva sobre una superficie digitalizada, formada por **N** puntos de coordenadas (X_i, Y_i, Z_i) con $i = 1 \dots N$, se puede calcular aproximadamente con la siguiente expresión:

$$L = \sum_{i=1}^{N-1} \sqrt{(\Delta X_i)^2 + (\Delta Y_i)^2 + (\Delta Z_i)^2} \quad (54)$$

Donde, $\Delta X_i = X_{i+1} - X_i$
 $\Delta Y_i = Y_{i+1} - Y_i$
 $\Delta Z_i = Z_{i+1} - Z_i$

Teniendo los errores δx , δy , δz , al medir las coordenadas (X,Y,Z) respectivamente se calcula el error absoluto como $EL = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2}$:

Para la CCD 1:

$$EL_1 = 0.71\text{mm}$$

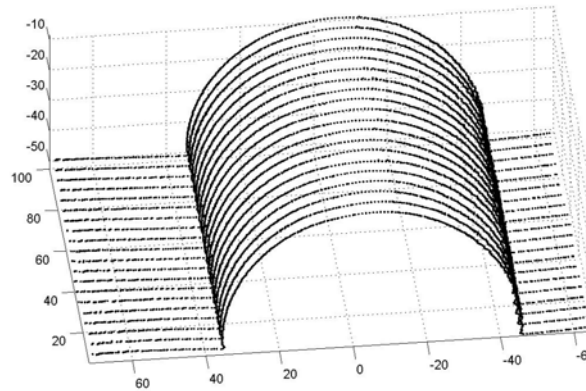
Para la CCD 2:

$$EL_2 = 0.85\text{mm}$$

Procedimiento de medición sobre el cilindro.

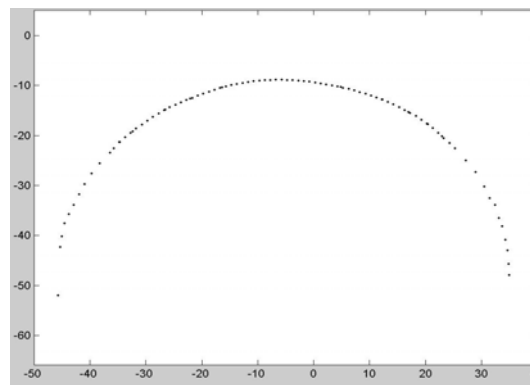
- Para realizar medidas de contorno sobre el cilindro reconstruido, primero se interpola la parte superior que no es vista por ninguna de las dos cámaras. La figura 60, muestra el resultado después de realizada la interpolación.

Fig. 60, Interpolación de la parte superior del cilindro



- Se determinan las coordenadas de los puntos que forman la curva que se quiere medir. Por ejemplo, la figura 61 muestra un arco de circunferencia sobre el cilindro.

Fig. 61, Curva sobre la superficie reconstruida



- Se calculan todos los intervalos de distancias entre los puntos consecutivos utilizando la expresión (54). Finalmente, la longitud L será la suma todas los intervalos y su error absoluto el máximo entre EL_1 y EL_2 . De tal forma que la medida con su precisión será:

$$L \pm EL_2$$

Para la curva considerada, se estimó un valor para su longitud de:

$$L = 126.34 \pm 0.85 \text{ mm.}$$

El cilindro reconstruido tiene un radio de **40mm**, con lo que su media circunferencia tiene una longitud de **125.66 mm**. El error relativo de la longitud medida respecto a este valor, es del **0.54%**.

3.6. CONCLUSIONES

Las imágenes capturadas por cada cámara, sufre toda una serie de tratamientos digitales con el fin de obtener una reconstrucción precisa del objeto. Específicamente, cada coordenada en la imagen pasa por una corrección de distorsión y dos curvas de calibración con el fin de obtener las coordenadas en el espacio objeto (X,Y,Z).

Las características del sistema de medida se especifican en la siguiente tabla:

Tabla 5. Características del sistema de medida

CARACTERÍSTICA		CÁMARA 1	CÁMARA 2
RESOLUCIÓN	X (mm)	5.00	5.00
	Y (mm)	0.31	0.28
	Z (mm)	0.41	0.63
EXACTITUD EN LA MEDIDA DE LONGITUD DE CURVAS		± 0.85 (mm)	
RANGO (XYZ)		280mmx110mmx150mm	

Las condiciones en que se construya el sistema, facilita la reconstrucción. En el montaje, se hizo mucho énfasis en el alineamiento de las cámaras, del plano láser

y del sistema de posicionamiento. Cualquier pequeño error, causa un desacoplamiento a la hora de colocar las dos imágenes reconstruidas con cada cámara, en un mismo sistema coordinado.

CAPITULO 4

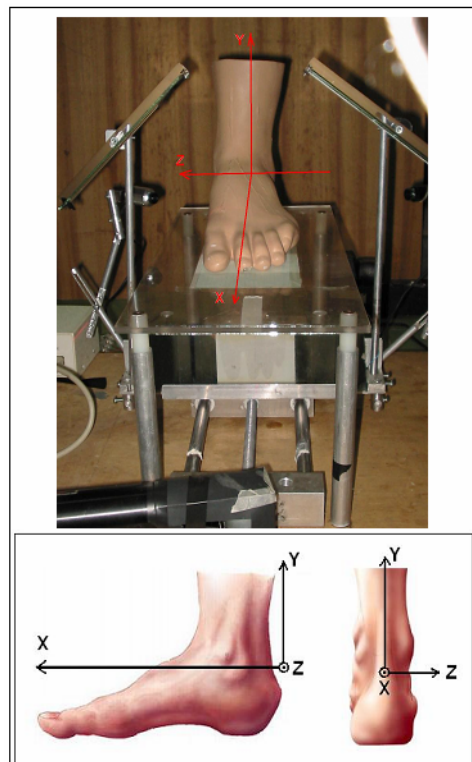
SISTEMA DE RECONSTRUCCIÓN 3D: APLICACIÓN A LA MEDIDA DE PARÁMETROS METROLÓGICOS DEL PIE

4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo, se describe como se utiliza el sistema construido en la reconstrucción del pie, con el propósito de medir algunos parámetros podométricos sobre su imagen 3D digitalizada. El proceso utilizado en la reconstrucción es el mismo que el descrito en el capítulo 3. En la sesión 4.2, se describen las condiciones en que la persona debe colocar el pie sobre la plataforma, en la sesión 4.3. se muestran las imágenes adquiridas e imágenes de la reconstrucción final desde diferentes perspectivas y en la sesión 4.4, algunas medidas sobre la imagen reconstruida.

4.2. CONDICIONES DE MEDICIÓN

Fig. 62. Condiciones de medición



La persona coloca el pie sobre la plataforma, de tal forma que el eje del pie quede a lo largo del eje X, comenzando en la coordenada $Z = 0$ (Fig. 62) Durante el barrido de la línea, el pie debe permanecer estático.

4.3. RECONSTRUCCIÓN 3D DEL PIE

Se muestra a continuación, el proceso de reconstrucción.

4.3.1. Imágenes adquiridas

Las imágenes adquiridas por la cámara 1 y 2 durante el barrido de la línea láser se muestran en la figuras 63 y 64 respectivamente. La secuencia comienza por cada fila.

Fig. 63. Imágenes adquiridas con la cámara 1.

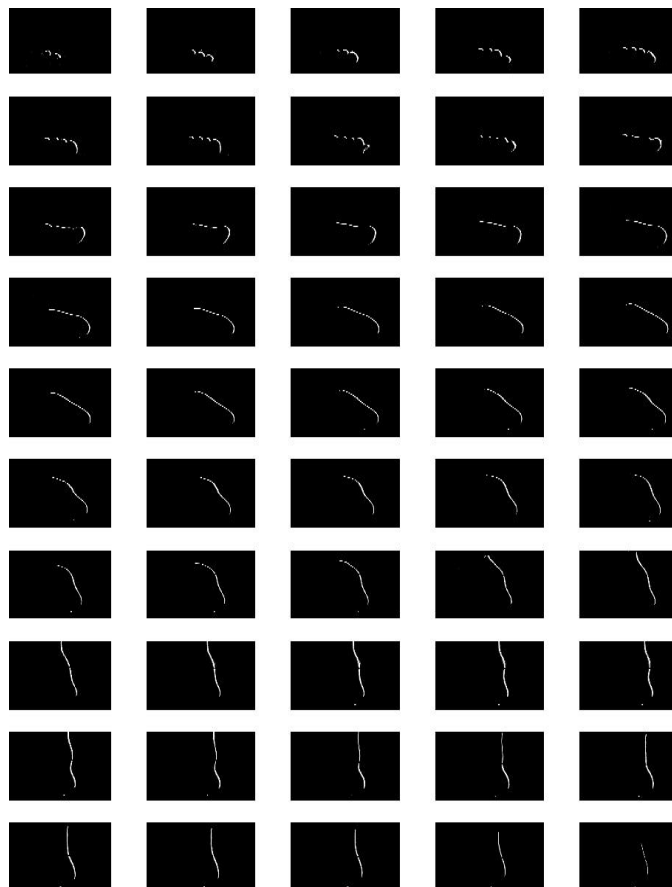
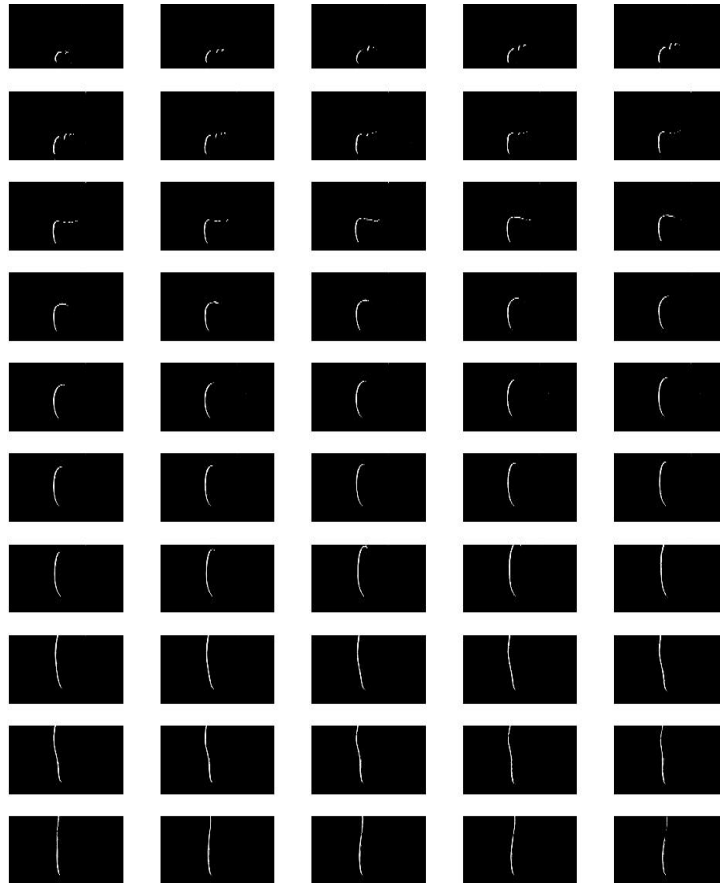


Fig. 64. Imágenes adquiridas con la cámara 2.



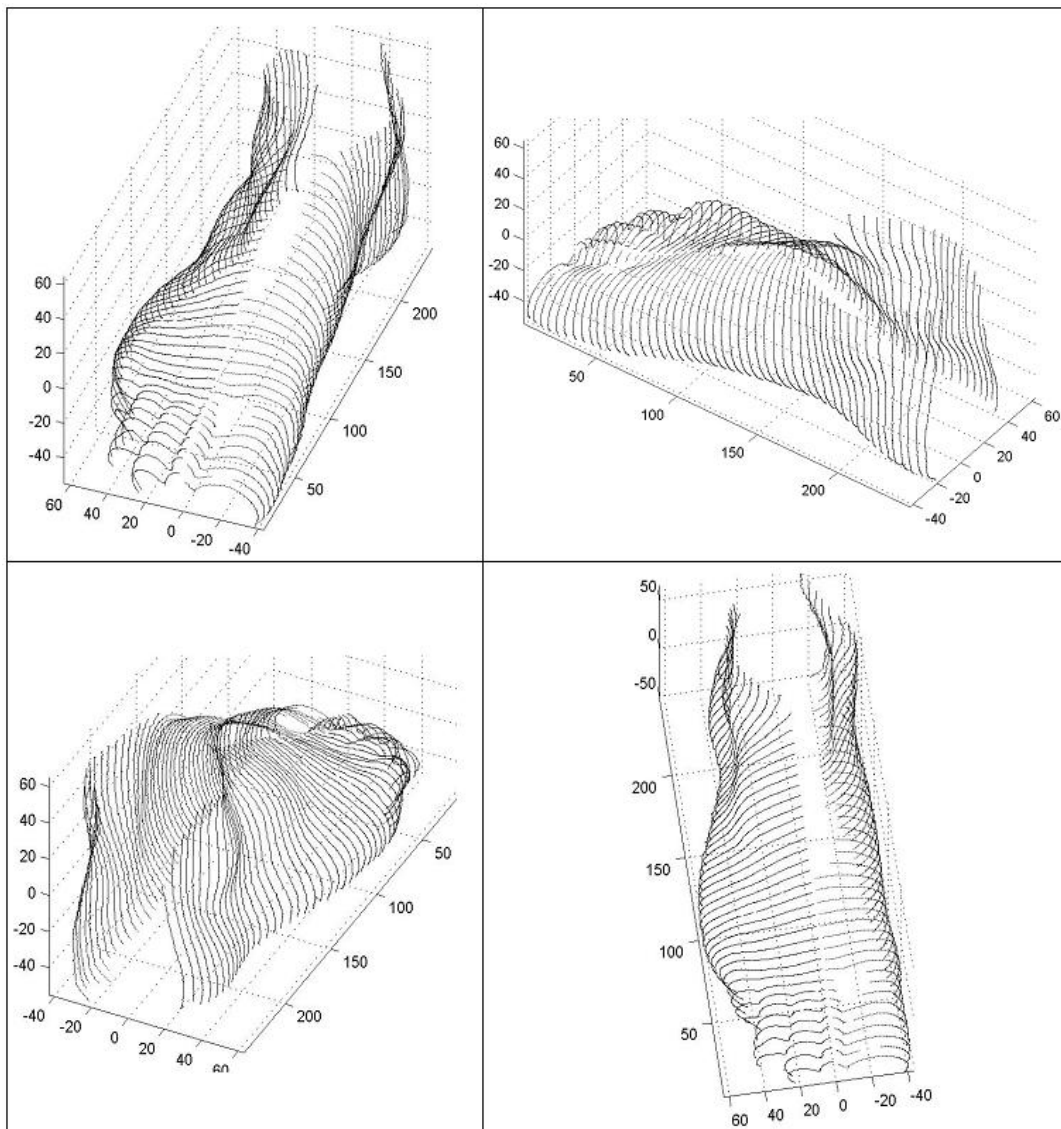
4.3.2. Procesamiento de imágenes

Para obtener los puntos representativos de cada línea, primero se realiza una binarización de la imagen escogiendo el valor del umbral de intensidad de acuerdo a la expresión descrita en el capítulo anterior. Debido al problema de sombras por la perspectiva del sistema de observación, algunas imágenes presentan una discontinuidad en la línea láser, principalmente en la parte de los dedos del pie, además, después de la binarización quedan regiones que no pertenecen a la línea resultado de ruido ambiental y reflexiones parásitas. Con el fin de eliminar regiones parásitas que no pertenecen a la línea láser, se definió un umbral de

4.3.3. Representación 3D

Se aplica a los datos obtenidos de cada línea, el proceso descrito en el capítulo anterior para obtener una representación 3D del pie. Los resultados se muestran en la figura 67.

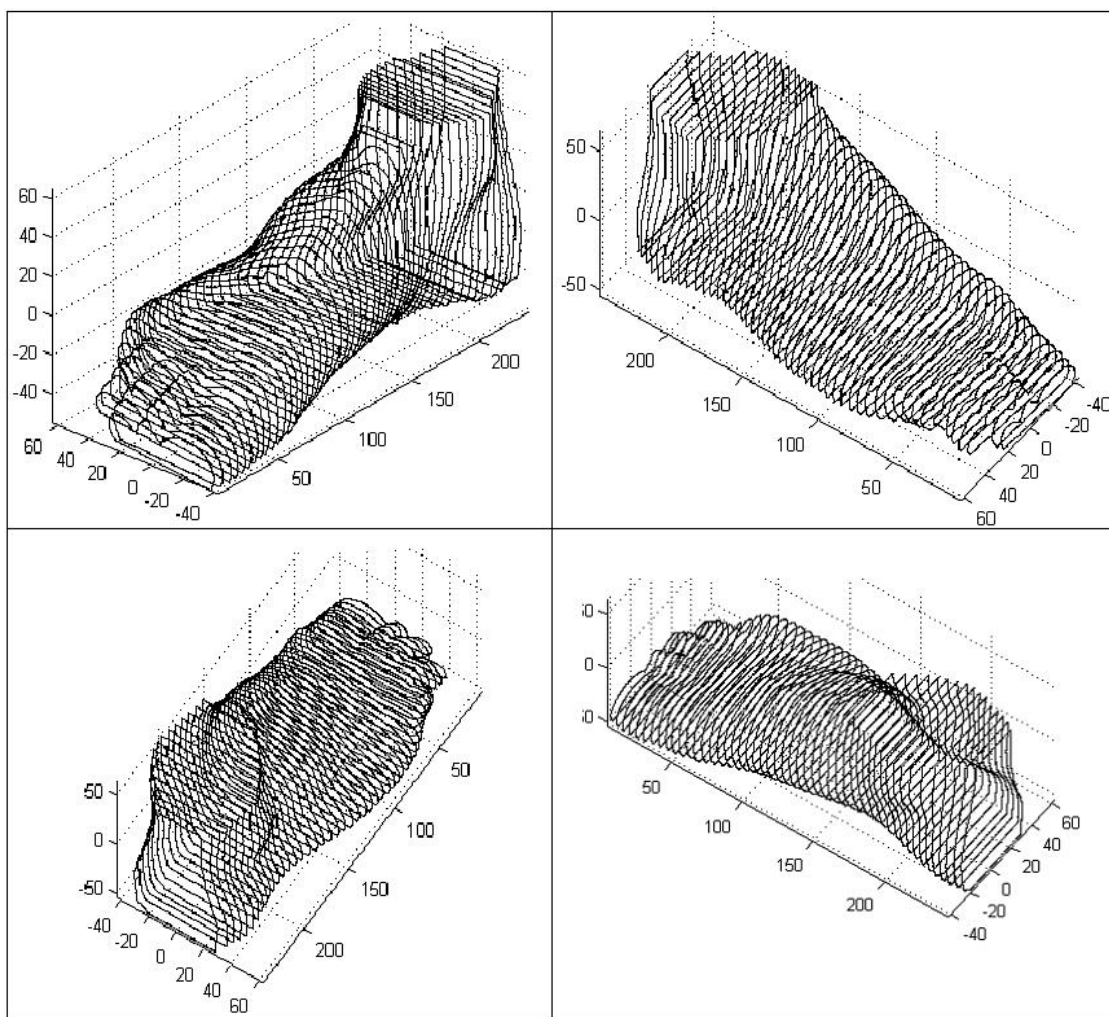
Fig. 67. Diferentes vistas de la imagen 3D digitalizada del pie



Para obtener los contornos continuos, las partes superiores se unieron con el algoritmo de interpolación spline cúbico. Como el pie está apoyado en la

plataforma, la imagen de la planta del pie es un plano. De tal forma que los puntos de menos altura en cada línea del pie se unieron con una línea recta. Los resultados se muestran en la figura 68.

Fig. 68. Diferentes vistas de la imagen 3D digitalizada del pie con los contornos cerrados por software.

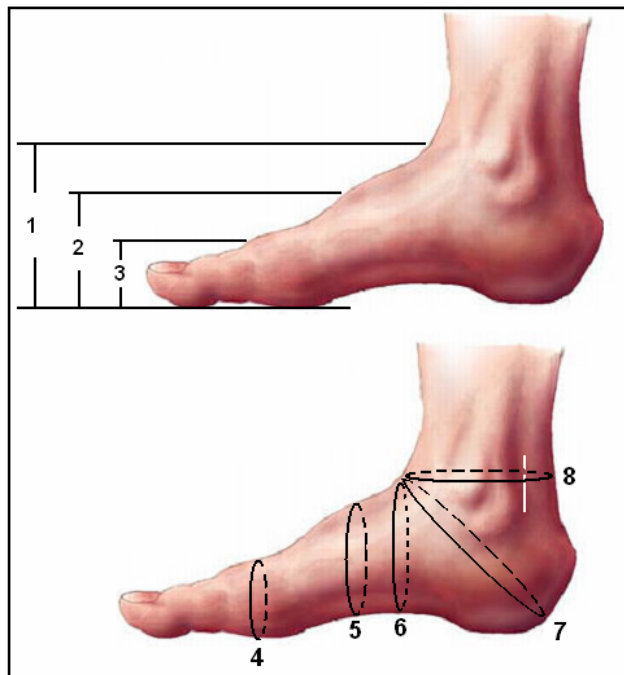


4.4. MEDIDA DE PARÁMETROS DEL PIE

4.4.1. Parámetros podométricos básicos.

Partiendo de la forma exterior y la estructura del pie, así como su posición con respecto a la pierna, incluyendo sus funciones estáticas y dinámicas; se distinguen en el pie un grupo de regiones que permiten obtener medidas que han sido estandarizadas para la fabricación de accesorios ortopédicos, incluyendo su reproducción en forma de horma para el uso industrial^[1,2]. Algunas de estas dimensiones se muestran en la figura 69.

Fig. 69. Algunas dimensiones básicas del pie



De acuerdo a la figura 69, se tiene:

1. Altura de la garganta del pie
2. Altura del empeine
3. Altura del metatarsiano
4. Contorno metatarsiano
5. Contorno del empeine

6. Contorno del medio pie
7. Contorno de la garganta del pie
8. Contorno del tobillo

4.4.2. Resultados de la medida de parámetros metroológicos sobre la reconstrucción 3D del pie.

Empleado el procedimiento descrito en el capítulo tres, para la medida de longitud de curvas sobre la imagen reconstruida, se midieron algunos parámetros podométricos. Las figuras 70 – 73, muestran los puntos de cada curva y los resultados se consignaron en la tabla 6.

Fig. 70. Contorno de la garganta del pie

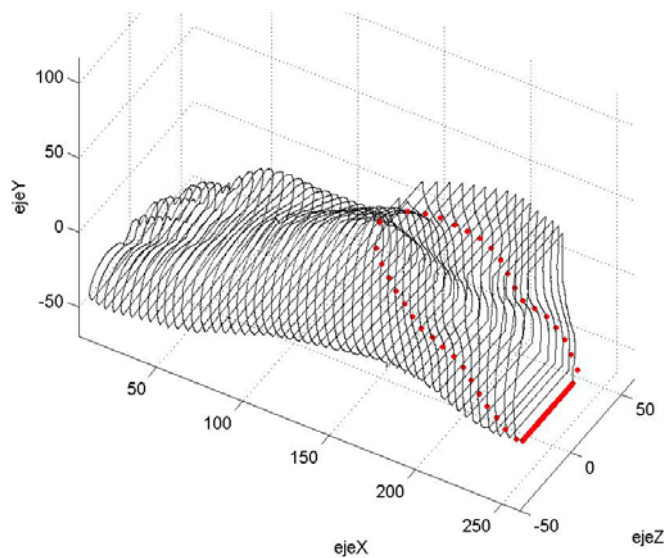


Fig. 71. Contorno del tobillo

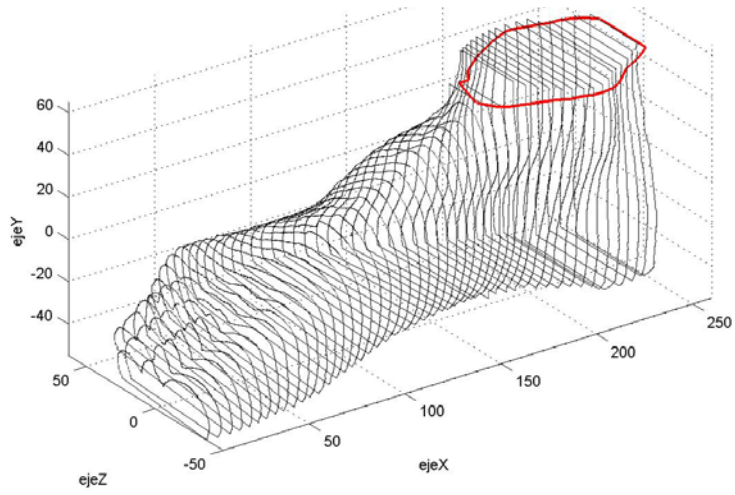


Fig. 72. Contorno del metatarsiano, del empeine y del medio pie

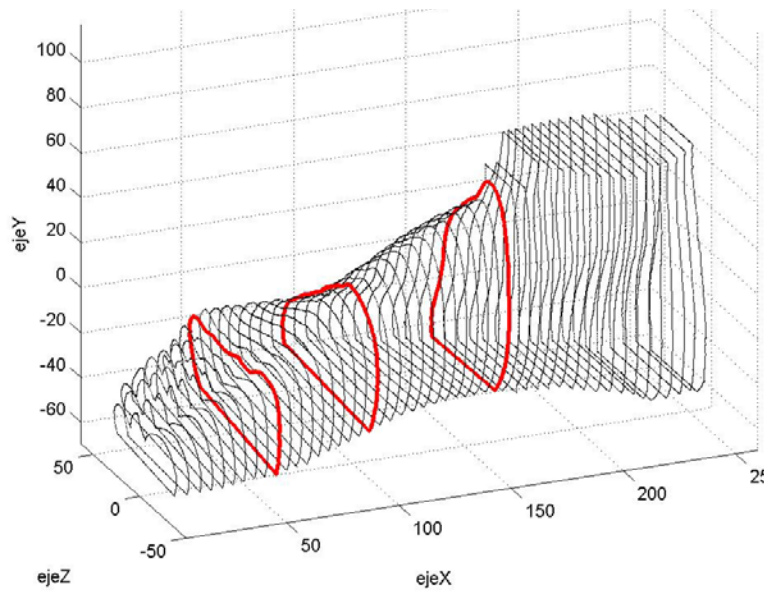


Fig. 73. Altura de la garganta, del empeine y del metatarsiano.

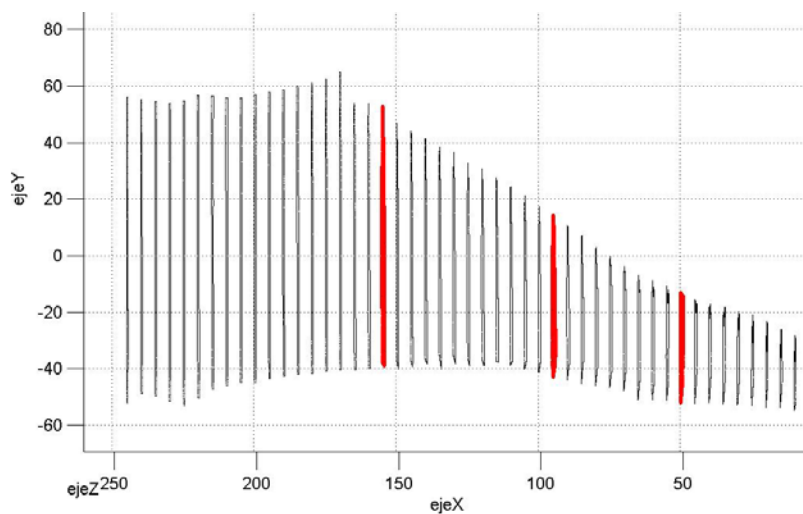


Tabla 6. Resultado de la medida de parámetros (Figura 69) sobre el pie digitalizado.

PARAMETRO	VALOR MEDIDO CON EL SISTEMA (mm)	VALOR MEDIDO CON CINTA (mm)	ERROR RELATIVO
1	89.58	93.00	3.68%
2	58.32	60.00	2.80%
3	41.17	40.00	2.93%
4	250.43	260.00	3.68%
5	258.75	275.00	5.91%
6	280.46	285.00	1.59%
7	354.44	365.00	2.89%
8	256.97	250.00	2.79%

4.5. CONCLUSIÓN

Con el sistema de reconstrucción construido, se logró obtener una imagen 3D digitalizada del pie que puede ser vista desde varias direcciones. La caracterización del sistema de reconstrucción permite estimar algunos valores de parámetros podometricos sobre su imagen digitalizada, con una precisión aceptable.

CONCLUSIONES GENERALES

1. Se diseñó y construyó un sistema de medida que permite obtener una imagen 3D a 180° de observación.
2. Para obtener la reconstrucción del cuerpo se utilizó la técnica de triangulación láser, incorporando dos cámaras CCD y un plano láser desplazables. Para ello fue necesario recurrir a:
 - La calibración de cada una de las cámaras por la fuerte aberración geométrica que presentan sus imágenes. Se calcularon sus parámetros intrínsecos y extrínsecos.
 - La rectificación de cada una de las imágenes obtenidas en el proceso de escáner de la línea láser sobre el objeto a reconstruir, con ayuda de los parámetros obtenidos en la calibración de las cámaras.
 - La obtención de la forma experimental de las curvas de calibración, que permitieron encontrar la relación entre las coordenadas de la imagen y las coordenadas del espacio objeto.
3. Las características del sistema de medida construido, se resumen en la siguiente tabla:

CARACTERÍSTICA		CÁMARA 1	CÁMARA 2
RESOLUCIÓN	X (mm)	5.00	5.00
	Y (mm)	0.31	0.28
	Z (mm)	0.41	0.63
EXACTITUD EN LA MEDIDA DE LONGITUD DE CURVAS		± 0.85 (mm)	
RANGO (XYZ)		280mmx110mmx150mm	

4. Se utilizó el sistema en la extracción de parámetros podométricos del pie.
Se calcularon los siguientes (Figura 69):

- Altura de la garganta del pie
- Altura del empeine
- Altura del metatarsiano
- Contorno metatarsiano
- Contorno del empeine
- Contorno del medio pie
- Contorno de la garganta del pie
- Contorno del tobillo

REFERENCIAS

- [1] Camargo L. Julio C. Estudio técnico para la elaboración de calzado de calle en cuero. Trabajo de grado, escuela de diseño Industrial, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 1998.
- [2] Granados Q. Jacqueline y Luna G. Edgar. Estudio biométrico pediátrico de la población infantil de dos a seis años del área metropolitana de Bucaramanga. Trabajo de grado, escuela de diseño Industrial, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 1998.
- [3] Weng, J., Cohen, P. y Herniou,(1992) Camera calibration with distortion models and accuracy evaluation. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence PAMI – 14(10): 965-980.
- [4] Heikkilä J. y Silvén O. A Tour-step camera calibration procedure with implicit image correction. Infotech Oulu and Department of Electrical Engineering, University of Oulu, FIN – 90570 Oulu, Finland.
- [5] Meneses J. Système optique pour la mesure des déformations de la voûte plantaire sous charge statique. Thèse Docteur de L'Université de Franche-Comté, Francia.
- [6] Leu M.C. and Ji Z. Design of optical triangulation devices, Optics and Laser Technology, 21(5), 1989, 335 – 338.
- [7] Patiño A., Miranda D. y Meneses Jaime. Scanner 3D de objetos a 360° de observación. Revista Colombiana de Física, 35(1), 2003, 188 – 191
- [8] Patiño A. y Torres E. Guía de robots autónomos utilizando una cámara CCD, transformada de Hough y Transformada de perspectiva inversa. VII simposio de tratamiento de señales, imágenes y visión artificial. Bucaramanga, 2002.

BIBLIOGRAFÍA

1. VERLEYSEN, Jules. *Compendio de podología*. Barcelona: Ed. Paraninfo Madrid. 1977. P. 123.
2. GIANNISTRAS, Nicholas J. *Trastornos de pie*. Salvat editores S.A.1979. P. 65-75.
3. R. Ange. Tecnología, cursos profesionales, zapatería, fabricación manual de calzado. Paraninfo. Madrid 1976 Vol.3 P.34-36.
4. VILADOT, A. *Lecciones sobre patología del pie*. Barcelona: Litofisian. 1979. P. 123-140.
5. Huellas Plantares, Morfología funcional deportiva. P.22-23.
6. ASSOCIATION DE POSTUROPODIE INTERNATIONALE (API). *Pied, équilibre & mouvement*. París: Masson, 2000
7. CORNU, J.Y., GHARBI, T., MENESES, J., BONNANS, V., CARDOT, J.C. *Propriétés visco-élastiques du pied : exploration et implication posturale*. En : ed. Pied, équilibre & mouvement. Paris : Masson, 2000, p. 53-66.
8. CORNU, J.Y., GHARBI, T., MENESES, J., GUYOT, J. Exploration fonctionnelles biomécaniques d'usage courant et tendon d'achille : nouvelles réalisations et perspectives. In : Hérisson C, Rodineau J., aboukrat P., eds. Le tendon d'Achille et sa pathologie, mise au point actualités podologie, médecine et Chirurgie du pie. 5^e série. Montpellier : Sauramps médical, 1999, 21-23.
9. TAKEDA, Mitsuo, INA, Hideki and KOBAYASHI, Seiji. *Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer based topography and interferometry*. J.Opt.Soc.Am. 72, 1982, 156-160
10. HOVANESIAN, J. Der, TAFRALIAN, M. *New moiré difference method for biomechanics studies*, School of Engineering, Okland University, Rochester, Michigan 48063, USA, section 3.5 - 3.9.
11. YEE R., Soung, GRIFFIN, Paul M. *Three – dimensional imaging system*, Optical Engineering, 33(6), June 1994, 2070 – 2075.

12. HAUSLER, G., MAUL, M. *Telecentric scanner for 3-D sensing*, Optical Engineering, 24(6), Nov. 1985, 978-980.
13. GODHWANI, Arjun, BHATIA, Gulab, VANNIER, Michael W. *Calibration of a multisensor structured light range scanner*, Optical Engineering 33(4), April 1994, 1359 – 1367.
14. CIELO, P. and LAMONTAGNE, M. *Improvement of subpixel resolution in triangulation ranging by astigmatic spot projection and wide – aperture line array imaging*, Optical and Laser Technology, 20(1), Feb. 1988, 19 – 24.
15. WINECKER. R. and TIZIANI, H. J. *Topometry of technical and biological objects by fringe projection*, Applied Optics, 34(19), July 1995, 3644 – 3650.
16. TAKEDA, Mitsuo and MUTOH, Kazuhiro. *Fourier transforms profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes*, Applied Optics, 22(24), Dec. 1983, 3977 – 3982.
17. LIN, Jin-Feng and SU, Xian-Yu. *Two-dimensional Fourier transform profilometry for the automatic measurement of three-dimensional object shapes*, Optical Engineering, 34(11), Nov. 1995, 3297-3302.
18. SU, Xian-Yu, BALLY, G. Von and VUKICEVIC, D. *Phase-stepping grating profilometry: utilization of intensity modulation analysis in complex objects evaluation*, Optics Communications, 98(1,2,3), 1993, 141-150.
19. NOURI, Taoufik. *Three-dimensional scanner based on fringe projection*, Optical Engineering 34(7), July 1995, 1961-1963.
20. P. SANDOZ, G. TRIBILLON, H. PERRIN, *High resolution profilometry by using phase calculation algorithms for spectroscopic analysis of white light interferograms*, Journal of Moderns Optics, 43(4) 1996. 701-708,
21. P. SANDOZ, *an algorithm for profilometry by white-light phase-shifting interferometry* Journal of Moderns Optics, 43(8), 1996. 1545-1554.
22. P. SANDOZ, G. TRIBILLON, T. GHARBI, R. DEVILLERS, *Roughness measurement by confocal microscopy for brightness characterization and surface waviness visibility evaluation.*, Wear, 201, Dec 1996.186-192,

23. COSTA, Manuel F. M., *Surface inspection by an optical triangulation method.* Optical Engineering, 35(9), September 1996, 2743-2747.
24. CORNU, J.Y., GHARBI, T., BONNANAS, V., MENESES, JAIME, VERDENET, J., GUYOT, J., CARDOT, J.C. *Podologia courante: quelle place pour les explorations fonctionnelles biomecaniques? Podologie 1999*
25. CORNU, J.Y., GHARBI, T., V., MENESES, JAIME. *Explorations fonctionnelles biomecaniques d'usage courant et tendon d'aqchille : nouvelles realisations et perspectives.*
26. KOUCHI, Makiko y TSUTSUMI, Emiko. *Relation between the medial axis of the foot outline and 3-D foot shape. Ergonomics, 39(6), 1996, 853-861*
27. OATIS, A. Carol. *Biomechanics of the foot and ankle under static conditions. 68(12), 1988, 1815-1821.*
28. NIGG, B. M. *Biomechanical and orthopedic concepts in sport shoe construction. Medicine and science in sports and exercise, 24(5), 1992, 595-602.*