

ESTUDIO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DEL FENÓMENO DE AUTORESONANCIA CICLOTRÓNICA ESPACIAL

MSc. EDUARDO ALBERTO OROZCO OSPINO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
GRUPO DE FÍSICA Y TECNOLOGÍA DEL PLASMA Y CORROSIÓN
BUCARAMANGA
2012

ESTUDIO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DEL FENÓMENO DE AUTORESONANCIA CICLOTRÓNICA ESPACIAL

TESIS REALIZADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL TÍTULO DE
DOCTOR EN CIENCIAS NATURALES (FÍSICA)

MSc.EDUARDO ALBERTO OROZCO OSPINO

DIRECTOR: VALERIY D. DUGAR-ZHABON, PH.D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
GRUPO DE FÍSICA Y TECNOLOGÍA DEL PLASMA Y CORROSIÓN
BUCARAMANGA
2012

*A Mis padres, Rafael y Nancy;
a mi esposa amada, Karina Paola;
a mis hermanos Jorge, Monica, Martha y
Javier; y a las memorias de mi cuñado
Jeiler y de mi tío Peyo....*

AGRADECIMIENTOS

Al mejor de todos los científicos..., Dios.

Al Doctor Valeriy Dugar-Zhabon, por darme el privilegio de investigar el apasionante fenómeno de la autoresonancia espacial y por sus enseñanzas académicas y personales que lo han convertido en un modelo a seguir.

Al Doctor Anatoly Umnov (Universidad rusa de la amistad de los pueblos, Moscú), por las asesorías impartidas previas al inicio de mi doctorado relacionadas con la simulación autoconsistente de sistemas de muchas partículas cargadas.

A los Doctores Alan Phelps y Kevin Ronald por su colaboración durante mi pasantía de investigación en la división de Física del Plasma de la Universidad de Strathclyde (Escocia). Sus opiniones fueron muy motivantes.

A mis padres, por apoyarme en esta travesía; en ocasiones justificada más por la pasión científica que por la razón.

A mi esposa Karina, por la paciencia demostrada en este largo camino. Espero poder compensarte, "...te daré una vida sabrosa; tu felicidad será doble, porque la mujer conforme se merece muchas cosas..."

A mis hermanos, por llenar los vacíos que he dejado en mi familia por culpa de la Ciencia. O tal vez por mi culpa.

A Herling González, por socializar sus conocimientos relacionados con la librería *OpenGL*.

A mis compañeros del grupo de Física del Plasma, Mao, Ely, Freddy, Ana María, Henry, Carlos y todos los que de alguna manera me apoyaron.

A mis amigos, Jader, Chucho, Toño, Juanca y todos los compañeros de posgrado.

Al Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación (COLCIENCIAS), por el soporte financiero. Sin este no hubiera sido posible desarrollar plenamente este estudio.

A todos los que olvidé en este momento y merecen ser citados aquí.

“...Y Sara concibió y dio a Abraham un hijo en su vejez, en el tiempo que Dios le había dicho...”

Génesis 21:1

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DEL FENÓMENO DE AUTORESONANCIA CICLOTRÓNICA ESPACIAL.*

Autor: Eduardo Alberto Orozco Ospino.†

Palabras Claves: haz de electrones, autoresonancia ciclotrónica, cavidad aceleradora, método PIC.

DESCRIPCIÓN:

Se presenta un estudio analítico y numérico de un nuevo método de aceleración ciclotrónica resonante de electrones por ondas transversales eléctricas estacionarias, con polarización circular y frecuencia constante, en campos magnéticos estáticos no homogéneos con simetría axial. La principal característica de este método consiste en el mantenimiento continuo de las condiciones de resonancia ciclotrónica a lo largo de las trayectorias tridimensionales helicoidales de los electrones, a pesar del crecimiento de sus masas relativistas. Esto se logra mediante un incremento apropiado del campo magnético a lo largo de la dirección de propagación del haz de electrones. Este método de aceleración fue propuesto por el profesor Valeriy D. Dugar-Zhabon, director del grupo de investigación de *Física y Tecnología del Plasma y Corrosión (FITEK)* de la *Universidad Industrial de Santander (UIS)* y fue denominado *Spatial AutoResonance Acceleration (SARA)*.

En la primera parte de esta tesis se estudia la aceleración continua de un electrón por un campo de microondas en un campo magnetostático no homogéneo, mediante solución numérica de la ecuación relativista de Newton-Lorentz. En esta parte, el perfil de campo magnético es determinado por el método de prueba y error. La siguiente parte es dedicada al estudio analítico del mecanismo *SARA*, donde se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas y no lineales las cuales describen la evolución temporal de la diferencia de fase entre la velocidad transversal del electrón y el campo eléctrico de microondas, la energía y la velocidad longitudinal del electrón durante su movimiento en la dirección del aumento del campo magnético. A partir de este conjunto de ecuaciones se deriva una expresión analítica que garantiza el mantenimiento del régimen de aceleración *SARA*. En la tercera parte, se realiza un análisis numérico del efecto de la carga espacial sobre las condiciones de resonancia de haces de electrones de diferentes intensidades utilizando el método *Particle-in-cell (PIC)* y una aproximación electrostática. Finalmente se estudia numéricamente el efecto de un campo electrostático externo axialmente simétrico sobre la eficiencia en la ganancia de energía en el régimen *SARA*.

* Tesis

† Facultad de Ciencias, Doctorado en Ciencias Naturales (Física). Director: Valeriy D. Dugar-Zhabon, Ph.D.

ABSTRACT

TITLE: ANALYTICAL AND NUMERICAL STUDY OF SPACE CYCLOTRON AUTORESONANCE PHENOMENON.*

Author: Eduardo Alberto Orozco Ospino.†

KEY WORDS: electrons beam, cyclotron autoresonance, accelerator cavity, PIC method.

DESCRIPTION:

An analytical and numerical study of a new method of cyclotron resonant acceleration of electrons by a circular polarized standing electromagnetic wave in an axisymmetric steady-state magnetic field is presented. The principal characteristic of this method is to maintain the electrons in the space cyclotron autoresonance regime in his 3D helical trajectories despite the increase of the electron relativistic mass. It is reached through an appropriate increase of the magnetic field along electron beam propagation. This method was proposed by professor Valeriy D. Dugar-Zhabon, director of research group of *Física y Tecnología del Plasma y Corrosión (FITEK)* of the *Universidad Industrial de Santander (UIS)* and it was called *Spatial AutoResonance Acceleration (SARA)*.

The continuous acceleration of an electron by a microwave field in a inhomogeneous magnetostatic field was studied in the first part of the thesis through numerical solution of the relativistic Newton-Lorentz equation. In this part, the magnetic field profile is determined by the trial-and-error method. The next part is dedicated to analytical study of *SARA* mechanism where a set of nonlinear coupled differential equations which describe the time evolution of the phase difference between the velocity transversal component and the electric microwave field, the energy and longitudinal velocity of electron during its motion in the sense of the magnetic field increase is obtained. An analytical expression for the magnetic field configuration which guarantees the maintenance of the *SARA* acceleration regime is derived from this set of equations. In the third part, a numerical analysis of the effect of the spatial charge on the resonance conditions of electrons beam of different intensities is made using Particle-in-Cell method and an electrostatic approximation. Finally an impact of an axisymmetric electrostatic field on the electron energy gain efficiency in the *SARA* regime is studied numerically.

* Thesis.

† Facultad de Ciencias, Doctorado en Ciencias Naturales (Física). Director: Valeriy D. Dugar-Zhabon, Ph.D.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	18
1. PRELIMINARES	22
1.1. Autoresonancia	22
1.1.1. Mecanismos de Autoresonancia	23
1.2. Dinámica de las partículas	24
1.2.1. Aproximación de partícula simple	24
1.2.2. Simulación computacional	24
1.2.3. Modelos de Partículas	25
1.2.4. Sistemas no correlacionados (Acolisionales)	27
2. AUTORESONANCIA CICLOTRÓNICA ESPACIAL	31
2.1. Descripción general del fenómeno y del sistema físico	31
2.2. Estudio numérico del mecanismo <i>SARA</i> en la aproximación de una sola partícula	33
2.2.1. Resultados y discusión	36

ÍNDICE GENERAL	13
3. ESTUDIO ANALÍTICO DEL MECANISMO SARA	45
3.1. Modelo SARA	45
3.1.1. Zonas de aceleración longitudinal	48
3.1.2. Ecuaciones que caracterizan la aceleración tipo SARA	50
3.2. Sostenimiento de la aceleración tipo SARA	55
3.3. Resultados y discusión	59
4. EFECTO DEL CAMPO AUTOCONSISTENTE	62
4.1. Sistema Físico y Modelo de Simulación	62
4.2. Resultados y discusión	67
5. EFECTO DE UN CAMPO ELECTROSTÁTICO SOBRE LA EFICIENCIA DE LA ACELERACIÓN SARA DE UN ELECTRÓN	78
5.1. Modelo de simulación	78
5.2. Resultados y discusión	81
CONCLUSIONES	84
BIBLIOGRAFÍA	87

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	Ciclo computacional para un modelo de simulación de partículas. . . .	30
2.1.	Modelo de sistema físico para el estudio del mecanismo <i>SARA</i> , 1-Cavidad resonante cilíndrica, 2-Bobinas con corriente, 3-Guía de onda para la inyección de microondas (una de dos), 4-Perfil del campo eléctrico (caso particular modo TE_{111}), 5-Cañón de electrones, 6-Trayectoria típica de un electrón.	32
2.2.	Perfil del campo magnético en el plano $y = 0$	35
2.3.	Trayectoria de un electrón inyectado en $r = 0$	36
2.4.	Evolución de la energía del electrón para diferentes posiciones radiales de inyección. $r_0 = 0,0cm$ (línea verde), $r_0 = 0,5cm$ (línea roja) y $r_0 = 1,0cm$ (línea azul), usando la onda polarizada circularmente.	37
2.5.	<i>Banda de aceleración</i> y dependencia de la diferencia de fase φ con la coordenada longitudinal z : $r_0 = 0,0cm$ (línea verde), $r_0 = 0,5cm$ (línea roja) y $r_0 = 1,0cm$ (línea azul), usando la onda polarizada circularmente.	38
2.6.	Dependencia de la diferencia del radio de Larmor con la coordenada longitudinal z : $r_0 = 0,0cm$ (línea verde), $r_0 = 0,5cm$ (línea roja) y $r_0 = 1,0cm$ (línea azul), usando la onda polarizada circularmente.	40
2.7.	Evolución espacial de la energía del electrón para diferentes energías de inyección: $W_i = 12, 14$ y $16 keV$, considerando los dos casos: onda circularmente polarizada y onda linealmente polarizada equivalente.	41

2.8.	<i>Zonas de aceleración longitudinal</i> (caso particular TE_{112}) y dependencia de la diferencia de fase φ con la coordenada longitudinal z para diferentes energías de inyección: $W_i = 12, 14$ y 16 keV, considerando los dos casos: onda circularmente polarizada y onda linealmente polarizada equivalente.	42
2.9.	Diferencia de fase φ en función del tiempo, asociada con la componente circular izquierda de la onda linealmente polarizada, para el caso $W_i = 14$ keV.	43
2.10.	Dependencia de velocidad longitudinal con la posición longitudinal z para diferentes energías de inyección: $W_i = 12, 14$ y 16 keV, considerando los dos casos: onda circularmente polarizada y onda linealmente polarizada equivalente.	44
3.1.	(a) Disposición mutua entre la trayectoria del electrón y los campos eléctrico y magnético estático; (b) Proyección de la trayectoria del electrón sobre un plano transversal y definición de los ángulos que caracterizan el movimiento: $\omega_c = d\psi/dt$, donde ψ es la fase absoluta de la velocidad transversal $\vec{v}_\perp$ y φ es el ángulo entre $\vec{v}_\perp$ y $\vec{E}$	46
3.2.	Aproximación del perfil de campo magnético en el plano $y=0$	59
3.3.	Comparación de la evolución espacial de la energía del electrón: Modelo SARA (línea roja), simulación numérica con campos exactos (línea verde) y simulación numérica con campo magnético estático aproximado (línea azul).	60
3.4.	Comparación de la evolución espacial de la velocidad longitudinal del electrón: modelo SARA (línea roja), simulación numérica con campos exactos (línea verde) y simulación numérica con campo magnético estático aproximado (línea azul).	61
3.5.	Comparación de la evolución espacial de la diferencia de fase φ : modelo SARA (línea roja), simulación numérica con campos exactos (línea verde) y simulación numérica con campo magnético estático aproximado (línea azul).	61
4.1.	Diferencia de fase entre la velocidad transversal de los electrones del haz de 0.1-A y la componente eléctrica del campo de microondas después de 14.05 ciclos de microondas.	67

4.2.	Componentes transversal β_T y longitudinal β_Z de la velocidad de los electrones del haz de 0.1-A despues de 14.05 ciclos de microondas.	68
4.3.	Energía de los electrones del haz de 0.1-A después de 14.05 ciclos de microondas.	69
4.4.	Diferencia de fase entre la velocidad transversal de los electrones del haz de 1.0 A y la componente eléctrica del campo de microondas después de 9.72 ciclos de microondas.	70
4.5.	Componentes transversal β_T y longitudinal β_Z de la velocidad de los electrones del haz de 1-A después de 9.72 ciclos de microondas.	71
4.6.	Energía de los electrones del haz de 1.0 A después de 9.72 ciclos de microondas.	72
4.7.	Magnitud de la componente transversal del campo eléctrico autoconsistente despues de 9.72 ciclos de microondas para el caso del haz de 1 A en los planos: (a) $z=0.2$ cm, (b) $z=d/4$, (c) $z=d/2$ y (d) $z=3d/4$	73
4.8.	Componente longitudinal del campo eléctrico autoconsistente despues de 9.72 ciclos de microondas para el caso del haz de 1.0 A en los planos: (a) $z=0.2$ cm, (b) $z=d/4$, (c) $z=d/2$ y (d) $z=3d/4$	74
4.9.	Diferencia de fase entre la velocidad transversal de los electrones del haz de 5.0 A y la componente eléctrica del campo de microondas después de 6.6 ciclos de microondas.	75
4.10.	Componentes transversal β_T y longitudinal β_Z de la velocidad de los electrones del haz de 5-A despues de 6.6 ciclos de microondas.	75
4.11.	Energía de los electrones del haz de 5.0 A despues de 6.6 ciclos de microondas.	76
4.12.	Distribución de energía en los haces de 0.1 A (linea verde), 1.0 A (linea roja) y 5.0 A (linea azul) después de 14.05, 9.72 y 6.6 ciclos de microondas, respectivamente.	76
4.13.	Comparación entre la energía transferida por el campo eléctrico al haz de 0.1 A (linea verde), 1.0 A (linea roja) y 5.0 A (linea azul); y el cambio de energía como una función del tiempo (círculos, triangulos y cuadrados, respectivamente).	77

5.1.	Cavidad resonante con campo electrostático.	79
5.2.	Perfil del potencial electrostático en el plano $y = 0$	81
5.3.	Evolución espacial de la energía del electrón para diferentes caídas de potencial entre las superficies circulares de la cavidad: $\Delta V = 0, 20, 30$ y 40 kV	82
5.4.	Evolución espacial de la velocidad longitudinal del electrón para diferentes caídas de potencial entre las superficies circulares de la cavidad: $\Delta V = 0, 20, 30$ y 40 kV	83

INTRODUCCIÓN

El auto-mantenimiento de la interacción ciclotrónica resonante entre un electrón y una *onda transversal electromagnética* que se propaga a lo largo de un *campo magnético homogéneo*, en donde la condición de resonancia ciclotrónica es preservada por sí misma a pesar de la variación de la masa relativista de la partícula fue estudiado inicialmente por A. Kolomenskii y A. Levedev en el año 1962 [1] e independientemente por V. Davydovskii [2]. Este fenómeno conocido como autoresonancia ha llamado la atención de la comunidad científica, principalmente en aplicaciones relacionadas con aceleradores de partículas que permitan alcanzar altas energías.

Se han realizado numerosos estudios teóricos y experimentales para encontrar las condiciones óptimas para la aceleración autoresonante de electrones en campos magnéticos homogéneos ([3]- [14]). Entre estos trabajos, H. R. Jory and A. W. Trivelpiece investigaron teórica y experimentalmente el movimiento relativista de partículas cargadas en campos combinados de *ondas planas de gran amplitud, con polarizaciones lineal y circular, y un campo estacionario homogéneo* paralelo a la dirección de propagación de la onda, utilizando guías de ondas y cavidades resonantes [4]; sin incluir los efectos de carga espacial del haz de partículas y los campos inducidos por este. Posteriormente, R. Pakter con coinvestigadores mostraron que los efectos producidos por la carga espacial impone límites sobre la aceleración [9].

Las condiciones de resonancia ciclotrónica electrónica (*RCE*) también se pueden mantener en el tiempo a través del mecanismo *GYRAC* propuesto por K. S. Golovanivsky ([16]- [20]). En este caso, los electrones son capturados en el plano medio de una trampa magnética tipo espejo y son acelerados azimutalmente a muy altas energías por microondas, debido a que el nivel de *campo magnético crece en el tiempo* con una razón requerida para compensar el crecimiento de la masa relativista. En sus investigaciones, K. S. Golovanivsky obtuvo las ecuaciones que describen la evolución de la fase y la energía de la partícula en los casos debilmente relativista y ultrarelativista [16,17], demostrando que el límite superior alcanzable está relacionado con las pérdidas por radiación sincrotrónica y analizando los efectos desestabilizantes de dicha radiación sobre

la dinámica de la partícula [19]. Posteriormente y basándose en el mecanismo *GYRAC*, O. Gal estudió analíticamente el funcionamiento de un *acelerador de electrones cíclico autoresonante* [21].

En el año 1989, R. Shpitalnik y coinvestigadores estudiaron el fenómeno de autoresonancia ciclotrónica utilizando *ondas estacionarias y campos magnéticos estacionarios axialmente simétricos*. En este esquema se analiza el *movimiento planar* de un electrón, compensando el incremento de su masa relativista con el *incremento del campo magnético en dirección radial* [22]. Posteriormente realizan un estudio numérico del acelerador de microondas autoresonante (*AMA*) [23]. Este esquema, novedoso en su momento, está conformado por una *onda electromagnética viajera y un campo magnetostático no homogéneo*, el cual se ajusta espacialmente en la dirección de propagación del haz (longitudinal) para contribuir al mantenimiento de las condiciones de resonancia ciclotrónica; sin embargo, el incremento del campo magnético en la dirección de propagación del haz causa una disminución progresiva de la componente longitudinal de su velocidad debido al efecto espejo. Basados en este concepto se desarrollaron otros estudios teóricos y experimentales que permitieron reportar en 1996 los primeros resultados experimentales relacionados con la operación de un *acelerador cíclico autoresonante (CARA)* [24, 25].

En 1990, V. Milantév presentó los resultados de un estudio detallado sobre los principales mecanismos de aceleración autoresonante en campos magnéticos homogéneos propuestos hasta ese momento y sus principales aplicaciones [26].

Cabe destacar que, en general, la interacción entre muchas partículas cargadas con campos electromagnéticos es un problema muy complejo que solo puede estudiarse con detalle mediante técnicas experimentales y/o mediante simulación computacional, en la cual se utilizan métodos matemáticos que garantizan una precisión adecuada. El problema original es simplificado mediante un modelo físico, aunque su solución sigue siendo condicionada por las leyes fundamentales que gobiernan dicho fenómeno. Una de las técnicas que ha jugado un papel muy importante en el estudio de la dinámica de haces electrónicos y otros sistemas de muchas partículas es la denominada “*Particle-in-cell*” (*PIC*) o partícula en celda ([27]- [37]). Usando esta técnica de modelamiento numérico, V. Dugar-Zhabon con coinvestigadores realizaron investigaciones de la dinámica de un plasma *RCE* en una trampa magnética *mínimo-B* [33, 34], a partir de las cuales encontraron que la aceleración de electrones hasta altas energías puede ser atribuido a un *automantenimiento de las condiciones RCE en algunas trayectorias de los electrones moviéndose en el campo magnético altamente no homogéneo*.

También vale la pena mencionar que el fenómeno de resonancia ciclotrónica electrónica también se ha utilizado en el diseño de fuentes de rayos X [20, 38] así como en la

generación de ondas de frecuencias del orden de cientos de GHz, a partir de haces electrónicos en rotación ciclotrónica en sistemas tipo Girotrón, lo cual puede servir como fuente de radiación electromagnética para la producción de microcircuitos integrados [39].

El calentamiento de plasmas por *pulsos de microondas* en una trampa magnética adiabática tipo espejo observado en los experimentos también fue relacionada a una interacción ciclotrónica autoresonante de los electrones con las microondas [32, 40].

En esta tesis se presenta un análisis teórico y experimentos numéricos de un nuevo método de aceleración autoresonante de electrones por *ondas estacionarias*, utilizando un *campo magnético estático y no homogéneo que varía principalmente en la dirección de propagación del electrón*, el cual hemos llamado *Spatial AutoResonance Acceleration (SARA)*. Los primeros resultados referentes a este tema fueron reportados por V. Dugar-Zhabon y coinvestigadores en [41] y posteriormente se profundiza el estudio en [43]- [45]. La tesis esta organizada de la siguiente manera.

El capítulo 1 muestra aspectos básicos relacionados con el fenómeno de autoresonancia ciclotrónica, así como una breve descripción del método *PIC*. Este capítulo no solo es introducido como contextualización sino también que servirá de punto de partida para el presente estudio, así como para establecer similitudes y/o diferencias con algunos mecanismos de interacción autoresonante existentes.

En el capítulo 2 se realiza una descripción conceptual del mecanismo *SARA* así como del sistema físico utilizado para su estudio teórico. Seguidamente se presentan los resultados de los experimentos numéricos para estudiar las principales características de la dinámica de un electrón en condiciones de aceleración tipo *SARA*. Es importante resaltar que en el estudio realizado en el presente documento se incluyen algunas mejoras comparadas con los publicados previamente, tal como la inclusión del campo magnético de microondas; razón por la cual los parámetros utilizados en los experimentos numéricos presentan ciertas variaciones [42].

En el capítulo 3 se realiza un estudio analítico del mecanismo *SARA*, donde se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas y altamente no lineales que describen la evolución temporal de: la diferencia de fase entre la velocidad transversal del electrón y el campo eléctrico de microondas, la energía y la velocidad longitudinal del electrón, a medida que avanza hacia la región de mayor intensidad del campo magnetostático. En este capítulo también se describe un método que permite obtener la expresión matemática de perfiles de campo magnetostático que garanticen el sosten-

imiento de la aceleración en el mecanismo *SARA* [43].

En el capítulo 4 se muestran los resultados de la simulación computacional, utilizando el método *PIC* y una aproximación electrostática, para analizar el efecto del campo eléctrico autoconsistente asociado con la distribución de carga espacial de un haz de electrones en condiciones *SARA*. Los resultados muestran que si los parámetros de un haz de electrones y los campos externos son elegidos apropiadamente, el haz puede acelerarse en condiciones de autoresonancia ciclotrónica espacial sin efectos significativos de desfocalización y dispersión de la energía [44, 45].

Finalmente, con el propósito de prolongar la interacción autoresonante en campos electromagnéticos estacionarios, en el capítulo 5 se estudia numéricamente el efecto de un campo electrostático externo axialmente simétrico, el cual se incluye para oponerse a la fuerza diamagnética que desacelera el electrón a medida que penetra las regiones de mas intensidad del campo magnético estático utilizado para guiar las partículas.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1 Autoresonancia

La condición de resonancia ciclotrónica entre una partícula cargada y una *onda transversal electromagnética* que se propaga a lo largo de un *campo magnético homogéneo* $\vec{B}_{est} = B_0 \hat{z}$, está dada por la expresión [1, 2]:

$$\omega - kv_z = \omega_{c0}/\gamma \equiv \omega_c, \quad (1.1)$$

en donde, ω y k representan la frecuencia y el número de onda de la onda respectivamente, v_z es la componente longitudinal de la velocidad de la partícula, γ el factor relativista y $\omega_{c0} = -qB_0/m_0$ es la frecuencia ciclotrónica clásica, en la cual q y m_0 son la carga y la masa de reposo de la partícula, respectivamente. En este mecanismo, la condición de resonancia es preservada por sí misma (Autoresonancia) a pesar de la variación de la masa relativista y la componente longitudinal de la velocidad v_z . La compensación se logra a partir del corrimiento Doppler, el cual aumenta a medida que el electrón aumenta su velocidad longitudinal conforme gana energía.

1.1.1. Mecanismos de Autoresonancia

Onda viajera y campo magnético estático no homogéneo

Cuando $\vec{B}_{est}$ no es homogéneo, pero axialmente simétrico, se puede aproximar por medio de la expresión:

$$\vec{B}_{est} = -(1/2) [dB_0(z)/dz] [x\hat{e}_x + y\hat{e}_y] + B_0(z)\hat{e}_z, \quad (1.2)$$

en donde $B_0(z)$ es una función que crece a lo largo de la dirección de propagación del haz, contribuyendo al mantenimiento de las condiciones de resonancia ciclotrónica. Este crecimiento, a su vez, produce mediante la fuerza diamagnética una disminución progresiva de la componente longitudinal de la velocidad de la partícula, imponiendo una limitante adicional a la aceleración [23, 25].

Onda Estacionaria y campo magnético estático homogéneo

En este caso, se utiliza una onda estacionaria correspondiente a un modo cilíndrico TE_{111} . A diferencia del caso presentado con las ondas viajeras, la mayor parte de la energía de la partícula está asociada a su movimiento transversal. Aunque este caso no corresponde a un mecanismo de aceleración autoresonante, dado que la condición de resonancia

$$\omega = \omega_c, \quad (1.3)$$

no puede ser sostenida por no existir ningún mecanismo para compensar el crecimiento de la masa relativista, este método de aceleración presenta cierta importancia por tener algunas similitudes con el mecanismo *SARA*.

Onda Estacionaria y campo magnético variable con el tiempo

Este mecanismo, denominado *GYRAC*, utiliza una cavidad resonante cilíndrica excitada con un modo TE_{111} y un campo magnético variable en el tiempo para acelerar partículas cargadas cuyas trayectorias son circunferencias localizadas en el plano medio de la cavidad; el cual es aproximado en esta región por la expresión:

$$\vec{B} = B_0[1 + b(t)]\hat{z}, \quad (1.4)$$

en donde, $B_0 = -m_0\omega/q$ corresponde al valor del campo magnético de resonancia clásica, siendo ω la frecuencia de la onda estacionaria y $b(t)$ una función adimensional que crece con una razón requerida que permite mantener la igualdad (1.3), a pesar del incremento de la masa relativista de la partícula. Este esquema tiene implícito el *campo eléctrico betatrónico*, generado por el campo magnético variable en el tiempo, el cual contribuye a la aceleración tangencial de la partícula ([16]- [21]).

1.2 Dinámica de las partículas

1.2.1. Aproximación de partícula simple

El fenómeno de autoresonancia entre una partícula cargada y una onda electromagnética puede ser estudiado a partir de la ecuación de movimiento:

$$d(\gamma m_0 \vec{v})/dt = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \vec{F}_s, \quad (1.5)$$

y la ecuación de balance de la energía:

$$d(\gamma m_0 c^2)/dt = q\vec{v} \cdot \vec{E} + \vec{F}_s \cdot \vec{v}, \quad (1.6)$$

donde $\vec{E} = \vec{E}_{hf}$ y $\vec{B} = \vec{B}_{est} + \vec{B}_{hf}$ representan los campos eléctrico y magnético en la posición de la partícula, siendo $\vec{E}_{hf}$ y $\vec{B}_{hf}$ los campos asociados a la onda plana con *polarización lineal o con polarización circular* ([1]- [8]) y $\vec{v}$ y $\vec{F}_s$ representan la velocidad de la partícula y la fuerza de frenado de radiación sincrotrónica, respectivamente. En general, la radiación sincrotrónica impone límites a la aceleración de la partícula.

1.2.2. Simulación computacional

El punto de partida de la ciencia computacional enfocada a la investigación científica es un modelo matemático del fenómeno físico de interés. Las ecuaciones del modelo matemático son aproximadas en forma algebraica discreta la cual se puede someter a solución numérica. Las ecuaciones algebraicas discretas describen el *modelo de simulación* el cual, cuando se expresa como una secuencia de instrucciones a la computadora proporciona el *programa de simulación computacional*. El computador y el programa permiten la evolución del modelo de sistema físico a investigar en *experimentos computacionales*.

Los métodos de discretización utilizados en la obtención de modelos de simulación incluyen métodos de diferencias finitas, métodos de elementos finitos y los *métodos de partículas*. *Modelos de partículas* es un término genérico para la clase de modelo de simulación donde la representación discreta del fenómeno físico involucra el uso de partículas interactuantes [28].

1.2.3. Modelos de Partículas

Se identifican tres tipos principales de modelos de simulación de partículas; el modelo partícula-partícula (PP), el modelo partícula-malla (PM) y el modelo partícula-partícula-malla (P^3M). La elección de un modelo depende del fenómeno investigado así como del costo computacional [28].

Método Partícula-Partícula

El método PP es conceptual y computacionalmente el más simple. El estado del sistema físico en algún tiempo t es descrito por el conjunto de posiciones y velocidades de las partículas $\{\vec{x}_i(t), \vec{v}_i(t) \mid i = 1, N_p\}$. En cada paso de tiempo se calculan estos datos obteniendo las fuerzas de interacción entre cada par de partículas y resolviendo las ecuaciones de movimiento para obtener el estado del sistema en un tiempo ligeramente posterior $t + Dt$.

Como ejemplo, consideremos un sistema de N_p cargas puntuales interactuando por fuerzas de acción a distancia Coulombianas. El número de operaciones realizadas en un ciclo computacional del método PP para el cálculo de las fuerzas es del orden de $10N_p^2 - N_p$. Típicamente, unos pocos miles de pasos de tiempo son necesarios para obtener resultados útiles a partir de un experimento computacional por lo que la suma directa del método PP es viable solo para sistemas de hasta aproximadamente miles de partículas si las fuerzas son de largo alcance. Si las fuerzas entre las partículas son de corto alcance, diferente de cero solo para los vecinos más cercanos N_n , entonces la dependencia con N_p^2 se cambia por $N_p N_n$.

Método Partícula-Malla

El método PM explota la formulación de la fuerza sobre las partículas causada por los campos eléctrico y magnético descritos por las ecuaciones de Maxwell. El ciclo temporal del método PM difiere del método PP solo en el cálculo de las fuerzas y consiste de tres pasos:

- (i) Asignación de la carga a los puntos de malla,
- (ii) Resolver la ecuación de Poisson sobre la malla,
- (iii) Calcular las fuerzas a partir de los potenciales definidos en la malla e interpolar las fuerzas en las posiciones de las partículas.

En este caso, el número de operaciones realizadas para el cálculo de las fuerzas en un ciclo computacional, correspondientes al ejemplo PP de las N_p cargas puntuales, es del orden de $\alpha N_p + \beta(N)$; donde N representa el número de puntos de malla; y α y β dependen del algoritmo particular PM utilizado. Para realizar una comparación con el método PP se consideran los siguientes valores característicos asociados a algoritmos muy utilizados, $\alpha = 20$ y $\beta(N) = 5N^3 \log_2 N^3$, para una malla tridimensional ($N \times N \times N$). Tomando $N = 32$ y $N_p = 10^5$ partículas, y una computadora con un rendimiento de 1 MFLOPS, obtenemos tiempo de CPU $= (20 \times 10^5 + 5 \times 32^3 \times 15) \times 1\mu s \simeq 4,46s$; mientras que para el método PP se obtiene un tiempo de CPU $= (10 \times 10^{10} - 10^5) \times 1\mu s \simeq 1,16$ días. Se puede ver que la pérdida de precisión en los potenciales y los campos de fuerzas es compensada con una ganancia enorme de rapidez de cálculo. Solo aquellos campos que tengan longitudes de onda mas grande que el espaciamiento de la malla pueden ser representados aproximadamente por valores de malla.

Método Partícula-Partícula-Partícula-Malla

El método P^3M combina las ventajas de los métodos PP y PM y es utilizado para la simulación de sistemas correlacionados con fuerzas de corto alcance. En este método, las fuerzas entre partículas son divididas en dos partes,

$$\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{ij}^{sr} + \vec{F}_{ij}^m, \quad (1.7)$$

donde $\vec{F}_{ij}^{sr}$ representa la fuerza de corto alcance, la cual varía rápidamente y es diferente de cero solo para pequeñas distancias entre partículas, y $\vec{F}_{ij}^m$ es suficientemente suave para ser representada precisamente en una malla. El número de operaciones realizadas en un ciclo computacional del método P^3M para el cálculo de las fuerzas es del orden de $\alpha N_p + \beta(N) + \gamma N_n N_p$.

1.2.4. Sistemas no correlacionados (Acolisionales)

Como se mostró previamente, el método mas apropiado para la simulación computacional de sistemas acolisionales, como un haz de electrones que es acelerado mediante el mecanismo *SARA*, es el método *PM*; en donde la asignación de la carga a la malla y la interpolación de la fuerza requieren de un cuidado especial.

Un sistema acolisional puede ser descrito en el marco del sistema de ecuaciones auto-consistentes de Vlasov-Maxwell:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{V} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} - e(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (1.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.10)$$

Aquí f_e es la función de distribución de los electrones. La densidad de carga $\rho(\vec{r}, t)$ y la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}, t)$ se obtienen a partir de la función de distribución f_e mediante las expresiones:

$$\rho(\vec{r}, t) = -e \int f_e d\vec{p}, \quad \vec{J}(\vec{r}, t) = -e \int \vec{V} f_e d\vec{p} \quad (1.11)$$

Método Particle-In-Cell (PIC)

Debido a que los sistemas reales frecuentemente están constituidos por un gran número de partículas, se realizan aproximaciones adicionales para hacer las simulaciones *PM* mas eficientes. El método *PIC* puede ser considerado como una *aproximación de elementos finitos*, pero con elementos finitos moviéndose y superponiéndose [29]. La formulación matemática del método *PIC* es obtenida asumiendo que la función de distribución de cada especie de partícula está dada por la superposición de muchos elementos (llamados partículas computacionales o superpartículas). Para un sistema constituido solo por electrones esta se aproxima por la expresión:

$$f_e(\vec{r}, \vec{p}, t) \cong \sum_{k=1}^N S(\vec{r}, \vec{r}_k(t)) \delta(\vec{p} - \vec{p}_k(t)), \quad (1.12)$$

donde $S(\vec{r}, \vec{r}_k(t))\delta(\vec{p}-\vec{p}_k(t))$ representa la función de distribución de un gran número de partículas que se encuentran cercanas entre sí en el espacio de fase, lo cual constituye una superpartícula; siendo $S(\vec{r}, \vec{r}_k(t)) = S_x(x-x_k)S_y(y-y_k)S_z(z-z_k)$ la función que describe el método de ponderación de carga de las partículas sobre la malla computacional (*función de forma espacial*) y N es el número de superpartículas.

El metodo *PIC* desarrollado en los años 50's se basó utilizando una delta de Dirac también como función de forma en el espacio, pero en la actualidad las funciones de forma espacial se basan en el uso de los denominados b-splines. El primer b-spline es la función “top hat” $b_0(\xi)$ definida como:

$$b_0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| < 1/2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (1.13)$$

Los b-splines subsecuentes, b_l se obtienen por integración sucesiva por medio de la siguiente fórmula generatriz:

$$b_l(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' b_0(\xi - \xi') b_{l-1}(\xi'). \quad (1.14)$$

Basados en los b-splines, la función de forma espacial es elegida como:

$$S_x(x - x_k) = \frac{1}{\Delta_p} b_l \left(\frac{x - x_k}{\Delta_p} \right), \quad (1.15)$$

donde Δ_p representa el tamaño de las superpartículas, el cual, por simplicidad se elige igual al tamaño de la celda Δx . Similarmente se elige $S_y(y - y_k)$ y $S_z(z - z_k)$. En esta tesis se utiliza b-splines de orden cero, b_0 , una elección referida como *Cloud In Cell* porque la superpartícula es una nube cuadrada en el espacio de fase con ancho infinitesimal en la dirección de la velocidad y un tamaño finito en el espacio.

La nomenclatura estandar del método *PIC* define la *función de interpolación* como:

$$W(x_i - x_k) = \int S_x(x - x_k) b_0 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right) dx. \quad (1.16)$$

Es crucial recordar la diferencia entre la función de forma y la función de interpolación. La función de interpolación es la convolución de la función de forma con la función “top hat” de ancho igual a la celda. Para el caso $\Delta_p = \Delta x$, la expresión (1.16) puede escribirse como:

$$W(x_i - x_k) = b_{l+1} \left(\frac{x - x_k}{\Delta x} \right), \quad (1.17)$$

la cual permite calcular directamente la densidad de carga en los puntos de malla e interpolar los campos sin necesidad de integración. En el caso *1D*, este proceso se reduce a:

$$\rho_i = \sum_p \frac{q_k}{\Delta x} W(x_i - x_k) \quad (1.18)$$

y

$$E_p = \sum_i E_i W(x_i - x_k), \quad (1.19)$$

respectivamente; donde $e_k = -eN_e$ representa la carga de una superpartícula (N_e es el número de partículas que conforman una superpartícula).

Las superpartículas satisfacen las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{V}_k, \quad \frac{d(\gamma m_k \vec{V}_k)}{dt} = e_k(\vec{E} + \vec{V}_k \times \vec{B}), \quad (1.20)$$

donde $m_k (= N_e m_e)$ representa la masa de una superpartícula. $\vec{E}$ y $\vec{B}$ representan los campos eléctrico y magnético que actúan sobre las superpartículas, los cuales son interpolados de la forma (1.19).

Debido a que $e_k/m_k = -e/m_e$, las superpartículas satisfacen las mismas ecuaciones de movimiento que las partículas reales (ó físicas) y pueden describir los efectos colectivos del sistema.

El método *PIC* ha sido ampliamente utilizado ([28]- [37]) y su implementación, representada esquemáticamente en la figura 1.1, se reduce al siguiente ciclo computacional en un paso de tiempo:

- (i) Calcular la densidad de carga $\rho(\vec{X}_j)$ y densidad de corriente $\vec{J}(\vec{X}_j)$ en los puntos de malla, a partir de las posiciones $\{\vec{X}_i\}$ y velocidades $\{\vec{V}_i\}$ de las superpartículas.
- (ii) Calcular los campos $\vec{E}_S(\vec{X}_j)$ y $\vec{B}_S(\vec{X}_j)$ en los puntos de malla a partir de $\rho(\vec{X}_j)$ y $\vec{J}(\vec{X}_j)$.
- (iii) Calcular la fuerza $\{\vec{F}_i\}$ sobre las superpartículas a partir de los campos $\vec{E}(\vec{X}_j)$ y $\vec{B}(\vec{X}_j)$.
- (iv) Calcular las nuevas posiciones $\{\vec{X}_i\}$ y velocidades $\{\vec{V}_i\}$ de las superpartículas a partir de las ecuaciones de movimiento.

Cuando no se toma en consideración el efecto de retardo de los campos generados por las partículas y, adicionalmente, el campo magnético asociado a las corrientes es despreciable en comparación con los campos externos, se puede realizar una aproximación adicional denominada *aproximación electrostática*; en donde se introduce el campo eléctrico autoconsistente a partir del potencial eléctrico calculado en cada paso de tiempo computacional.

El método PIC 3D es elegido no solo por su rendimiento sino porque es el menos difusivo numéricamente en comparación con otras técnicas de simulación de sistemas de muchas partículas que garantizan alta precisión de cálculo [30].

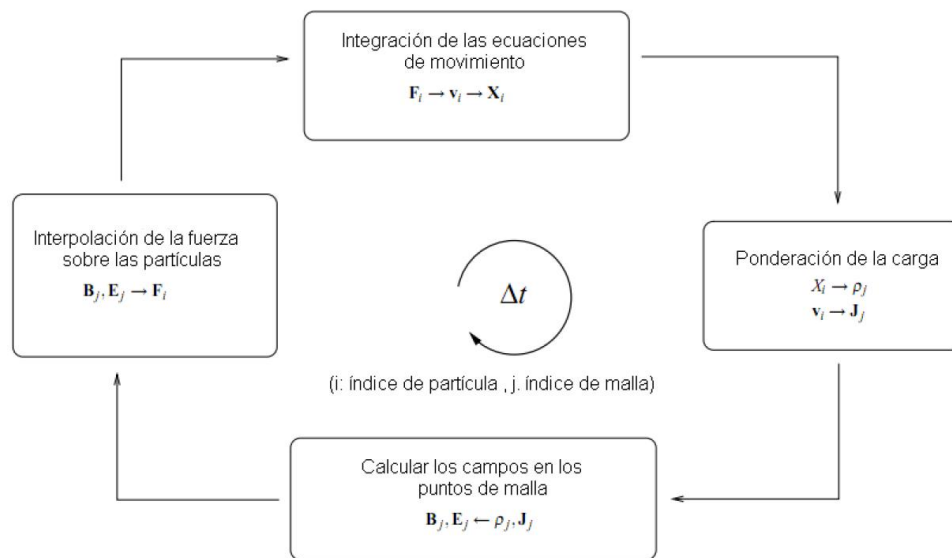


Figura 1.1: Ciclo computacional para un modelo de simulación de partículas.

CAPÍTULO 2

AUTORESONANCIA CICLOTRÓNICA ESPACIAL

2.1 Descripción general del fenómeno y del sistema físico

Consideremos el movimiento helicoidal de un electrón a lo largo de un *campo magnético estático axialmente simétrico* acelerado por una *onda transversal eléctrica estacionaria*. En el caso particular $\vec{B} = B_0 \hat{k}$, la resonancia ciclotrónica se obtendrá siempre que la frecuencia ω de la onda electromagnética coincida con la frecuencia ciclotrónica electrónica:

$$\omega_c = \frac{eB_0}{\gamma m_e}, \quad (2.1)$$

donde e y m_e representan la carga y la masa del electrón, respectivamente, y γ es el factor relativista. Esta condición se cumplirá solo al inicio del movimiento debido a la ganancia de energía del electrón.

Si se utiliza un *campo magnético no homogéneo* cuya magnitud se varía principalmente en la dirección de propagación del electrón, la dependencia de la frecuencia ciclotrónica será de la forma ²:

$$\omega_c = \frac{eB(z)}{\gamma m_e}. \quad (2.2)$$

²Como se demuestra en el capítulo 3, esta expresión corresponde al caso de resonancia exacta en cavidades cuya longitud es mucho mayor que su radio. En general la dependencia de la frecuencia ciclotrónica con los parámetros del sistema es mas compleja.

A partir de la ec.(2.2) se puede ver que *para mantener las condiciones de resonancia se puede compensar el aumento del factor relativista mediante un incremento apropiado del campo magnético en la dirección de propagación del electrón*. Esta es la idea fundamental del mecanismo *SARA*, cuyo estudio teórico se basa en el sistema físico mostrado en la Fig. 2.1. La cavidad resonante cilíndrica (de un metal no magnético) tiene como función acumular la energía de las microondas. La presión de gas residual en la cavidad se considera del orden de 10^{-6} Torr, valor característico para generadores de microondas tales como el magnetrón o klistron, entre otros. Bajo estas condiciones, el camino libre medio de los electrones acelerados es del orden de 1 km, el cual es mucho mayor que las dimensiones características de la cavidad resonante; razón por la cual se utilizará la aproximación de vacío en todo el estudio. Las bobinas con corriente d. c., se utilizan para generar el campo magnético axialmente simétrico con un perfil longitudinal apropiado para mantener las condiciones de resonancia ciclotrónica a lo largo de las trayectorias de los electrones. Las guías de onda mutuamente perpendiculares y acopladas a la cavidad transportan energía de microondas en modos rectangulares TE_{10} desfasados a $\frac{\pi}{2}$, la cual es inyectada en la cavidad para excitar un modo TE_{11P} ($P = 1, 2, 3, \dots$) con polarización circular derecha³. El cañón de electrones inyecta el haz de electrones por un extremo de la cavidad a lo largo de su eje, el cual es acelerado por el campo eléctrico de microondas a lo largo de toda su trayectoria.

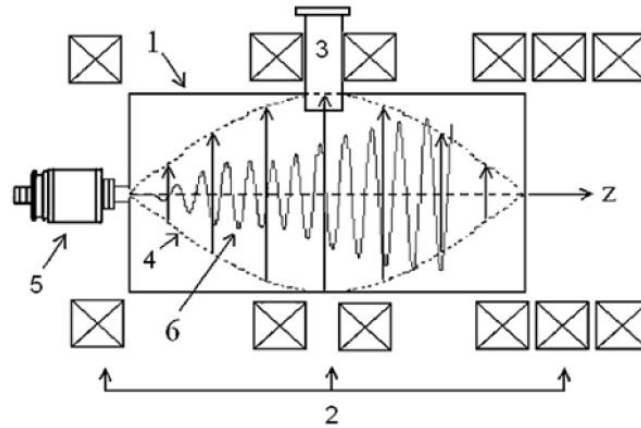


Figura 2.1: Modelo de sistema físico para el estudio del mecanismo *SARA*, 1-Cavidad resonante cilíndrica, 2-Bobinas con corriente, 3-Guía de onda para la inyección de microondas (una de dos), 4-Perfil del campo eléctrico (caso particular modo TE_{11P}), 5-Cañón de electrones, 6-Trayectoria típica de un electrón.

³Otra posibilidad es utilizar una sola guía de onda para excitar un modo TE_{11P} con polarización lineal, el cual puede expresarse como la superposición de dos ondas circulares (derecha e izquierda), porque el electrón solo interactuará efectivamente con la componente circular derecha.

2.2 Estudio numérico del mecanismo *SARA* en la aproximación de una sola partícula

Las componentes de los campos eléctrico y magnético de un modo cilíndrico TE_{11p} polarizado circularmente excitado en la cavidad están dadas por:

$$E_r^c = -2E_{0c} \frac{J_1(K_{\perp}r)}{K_{\perp}r} \text{sen}(K_{\parallel}z) \cos(\theta - \omega t), \quad (2.3)$$

$$E_{\theta}^c = 2E_{0c} J_1'(K_{\perp}r) \text{sen}(K_{\parallel}z) \text{sen}(\theta - \omega t), \quad (2.4)$$

$$B_r^c = 2E_{0c} \frac{K_{\parallel}}{\omega} J_1'(K_{\perp}r) \cos(K_{\parallel}z) \cos(\theta - \omega t), \quad (2.5)$$

$$B_{\theta}^c = -2E_{0c} \frac{K_{\parallel}}{\omega} \frac{J_1(K_{\perp}r)}{K_{\perp}r} \cos(K_{\parallel}z) \text{sen}(\theta - \omega t), \quad (2.6)$$

$$B_z^c = 2E_{0c} \frac{K_{\perp}}{\omega} J_1(K_{\perp}r) \text{sen}(K_{\parallel}z) \cos(\theta - \omega t), \quad (2.7)$$

donde $K_{\perp} = S_{11}/a$ con $S_{11} = 1,841$, $K_{\parallel} = p\pi/d$, d y a representan la longitud y el radio de la cavidad, respectivamente, E_{0c} es la máxima amplitud del campo eléctrico y

$$\omega = c(K_{\parallel}^2 + K_{\perp}^2)^{1/2} \quad (2.8)$$

es la frecuencia angular de la onda electromagnética.

Cuando $K_{\perp}r < 1$ la función de Bessel es aproximada como $J_1(K_{\perp}r) \cong K_{\perp}r/2$, entonces las ecs. (2.3)-(2.7) representarán una onda plana estacionaria polarizada circularmente. Si en lugar de excitar un modo TE_{11p} polarizado circularmente se excita uno polarizado linealmente, este puede expresarse mediante la superposición de dos ondas polarizadas circularmente, de derecha e izquierda; pero el electrón interactuará efectivamente con la componente circular derecha; por lo tanto se obtendrá una situación equivalente siempre que $E_{0l} = 2E_{0c}$, donde E_{0l} representa la máxima amplitud del campo eléctrico correspondiente al modo cilíndrico TE_{11p} polarizado linealmente, descrito por los campos eléctrico y magnético cuyas componentes están dadas por:

$$E_r^l = -\frac{2E_{0l}}{K_{\perp}r} J_1(K_{\perp}r) \text{sen}\theta \text{sen}(K_{\parallel}z) \text{sen}\omega t, \quad (2.9)$$

$$E_{\theta}^l = -2E_{0l} J_1'(K_{\perp}r) \cos\theta \text{sen}(K_{\parallel}z) \text{sen}\omega t, \quad (2.10)$$

Tabla 2.1: Parámetros del sistema de bobinas

Bobina	$R_i(cm)$	$R_e(cm)$	$L_b(cm)$	$J(A/mm^2)$	$z(cm)$
1	6,0	20,0	6,0	1,48	-5,75
2	6,0	20,0	7,5	1,23	9,25
3	6,0	20,0	10,0	1,29	22,75

$$B_r^l = 2E_{0l} \frac{K_{\parallel}}{\omega} J_1'(K_{\perp}r) \cos\theta \cos(K_{\parallel}z) \cos\omega t, \quad (2.11)$$

$$B_{\theta}^l = -\frac{2E_{0l}}{K_{\perp}r} \frac{K_{\parallel}}{\omega} J_1(K_{\perp}r) \sin\theta \cos(K_{\parallel}z) \cos\omega t, \quad (2.12)$$

$$B_z^l = 2E_{0l} \frac{K_{\perp}}{\omega} J_1(K_{\perp}r) \cos\theta \sin(K_{\parallel}z) \cos\omega t. \quad (2.13)$$

En el caso estudiado, una cavidad de 4,54 *cm* de radio y 20 *cm* de longitud, se excita en el modo TE_{112} con un campo de microondas de 2,45 *GHz*. En las simulaciones se consideran los dos tipos de polarización, circular y lineal, con amplitudes de $E_{0c} = 7 \text{ kV/cm}$ y $E_{0l} = 14 \text{ kV/cm}$, respectivamente. El radio de la cavidad se eligió mas grande que el máximo radio de Larmor esperado.

Por otra parte, el campo magnético estático es generado por un sistema de tres bobinas con corriente. Las componentes $B_r(r, z)$ y $B_z(r, z)$ se calculan sobre una malla rectangular de 26×81 puntos ubicada en un plano (r, z) de la cavidad. Las componentes B_r y B_z en las posición del electrón se calculan utilizando el método de de interpolación bilineal. Las componentes rectangulares del campo magnético en la dirección transversal se introducen indirectamente utilizando las coordenadas (x, y) del electrón: $B_x = (x/r)B_r$ y $B_y = (y/r)B_r$.

Los parámetros de las bobinas se muestran en la tabla 2.1, donde R_i , R_e , L_b y z representan el radio interno, el radio externo, el ancho y la posición de cada bobina, respectivamente y J es la densidad de corriente. En la figura 2.2 se muestra el perfil bidimensional del campo magnético en unidades de $B_0 = m_e\omega/e$ ($= 0,0875 \text{ T}$, en este caso).

El movimiento del electrón es descrito por la ecuación de Newton-Lorentz, la cual puede ser escrita en forma adimensional como:

$$\frac{d\vec{U}}{d\tau} = \vec{g} + \frac{\vec{U}}{\gamma} \times \vec{b}, \quad (2.14)$$

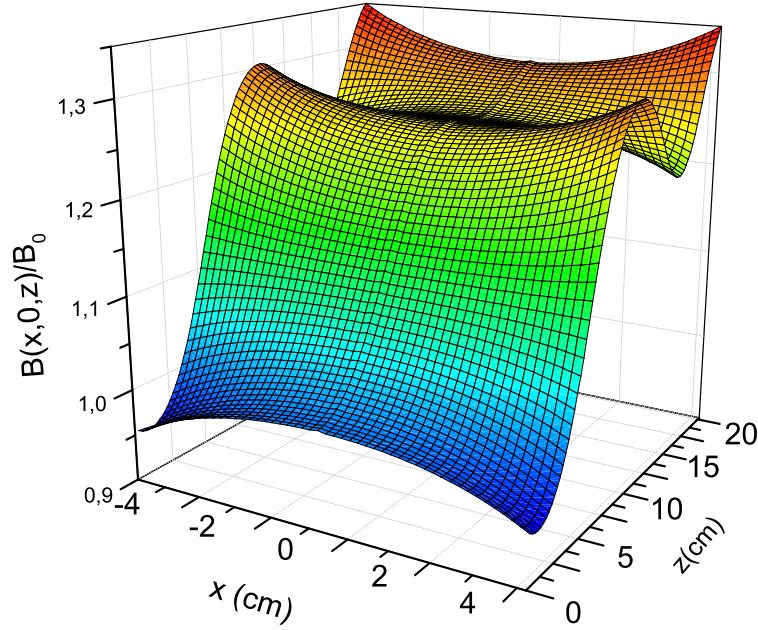


Figura 2.2: Perfil del campo magnético en el plano $y = 0$.

donde:

$\vec{U} = \vec{P}/m_e c$, es el momento del electrón; $\vec{g} = \vec{E}/(-B_0 c)$, es el campo eléctrico de microondas, $\vec{b} = \vec{B}/(-B_0)$, es el campo magnético; $\tau = \omega t$, el tiempo adimensional; y $\gamma = (1 + U^2)^{1/2}$, es el factor relativista.

Utilizando un esquema leap-frog, la ecuación (2.14) puede escribirse en diferencias centradas como:

$$\frac{\vec{U}^{n+1/2} - \vec{U}^{n-1/2}}{\Delta\tau} = \vec{g}^n + \frac{\vec{U}^{n+1/2} + \vec{U}^{n-1/2}}{2} \times \vec{b}^n. \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) se resuelve numéricamente usando el método de Boris [27], para determinar el valor de la posición y el momentum en cada paso de tiempo. En los cálculos la posición y todas las longitudes se expresan en unidades del radio de Larmor relativista $r_{l0} = c/\omega$.

2.2.1. Resultados y discusión

En los experimentos numéricos, el electrón se inyecta en la cavidad a lo largo del eje z a través de tres puntos radiales: $0,0$; $0,5$ y $1,0$ cm y para la energía de inyección se eligieron los valores: 12 , 14 y 16 keV . La figura 2.3 muestra la trayectoria espiral de un electrón inyectado a lo largo del eje de la cavidad, $r_0 = 0$, con una energía de 14 keV , utilizando el modo TE_{112} con polarización circular. Los perfiles de campos magnéticos que garantizan el mantenimiento de la autoresonancia fueron encontrados mediante el método de ajustes sucesivos y los resultados obtenidos corresponden a estos campos. La proyección de la trayectoria del electrón sobre un plano transversal es espiral. El radio de cada una de las espiras es un radio de Larmor determinado por la energía del electrón y el valor local del campo magnético.

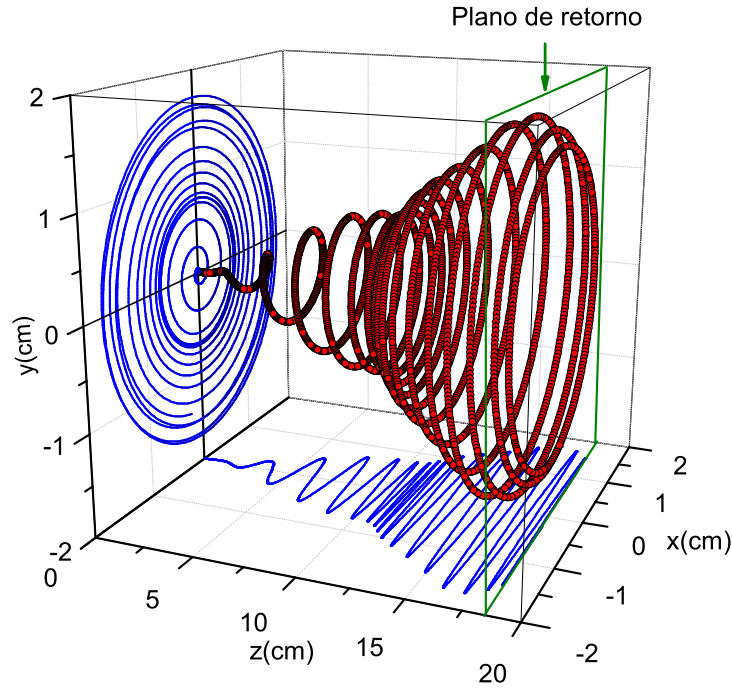


Figura 2.3: Trayectoria de un electrón inyectado en $r = 0$.

Dependencia del punto de inyección. Polarización circular

La evolución de la energía del electrón para diferentes puntos de inyección se muestra en la Fig.2.4. Se puede ver que cuando el electrón es inyectado a lo largo del eje de la cavidad, se detiene en el plano $z = 18,7 \text{ cm}$ debido a la fuerza diamagnética asociada al “*gradiente de campo magnético*”. En el plano $z = 17 \text{ cm}$, el electrón alcanza una energía de 250 keV . Como se muestra en la Fig.2.4, cuanto mayor es la posición radial menor es la eficiencia de la aceleración. Para la posición $z = 17 \text{ cm}$, la energía del electrón inyectado en $r_0 = 0,5 \text{ cm}$ es 230 keV , mientras que el electrón que inicia en $r_0 = 1,0 \text{ cm}$ alcanza solo 200 keV . Bajo estas condiciones, la eficiencia de la aceleración para el caso $r_0 > 0$ es menor que para el caso $r_0 = 0$. Todos los electrones que son inyectados a través de un orificio de $0,5 \text{ cm}$ de diámetro se detienen entre las posiciones $z = 18 \text{ cm}$ y $z = 19 \text{ cm}$ y la dispersión de la energía de estos electrones no es mayor del 10% . La igualdad

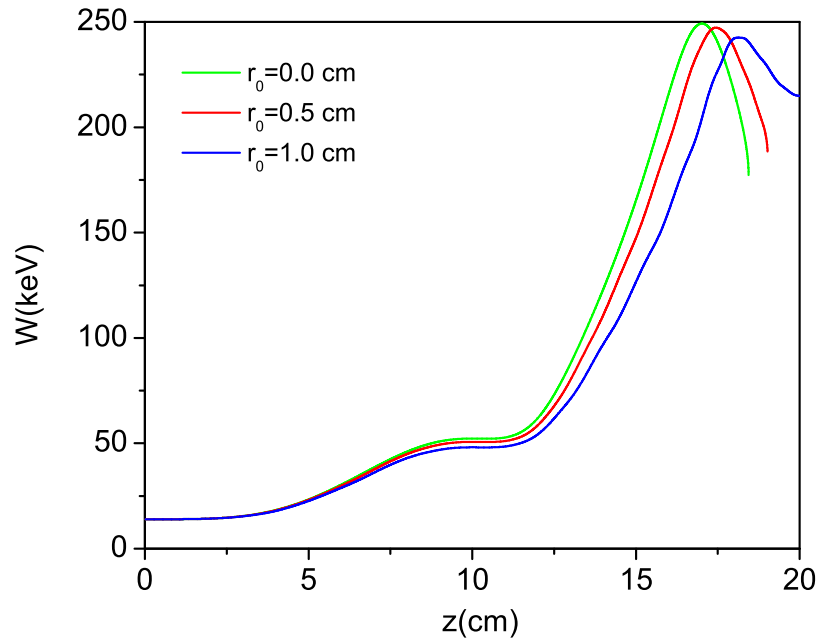


Figura 2.4: Evolución de la energía del electrón para diferentes posiciones radiales de inyección. $r_0 = 0,0 \text{ cm}$ (línea verde), $r_0 = 0,5 \text{ cm}$ (línea roja) y $r_0 = 1,0 \text{ cm}$ (línea azul), usando la onda polarizada circularmente.

entre la frecuencia ciclotrónica y la frecuencia del campo electromagnético garantiza la aceleración autoresonante; sin embargo, el campo electromagnético puede transferir energía al electrón siempre que la diferencia entre la fase de la componente transversal

de la velocidad del electrón $\varphi_{v\perp}$ y la fase del campo eléctrico $\varphi_{\vec{E}}$, $\varphi = \varphi_{v\perp} - \varphi_{\vec{E}}$ se encuentre en el intervalo $(\pi/2, 3\pi/2)$, al cual se le denominará *banda de aceleración* a partir de aquí. La Fig.2.5 muestra la evolución de la diferencia de fase a medida que

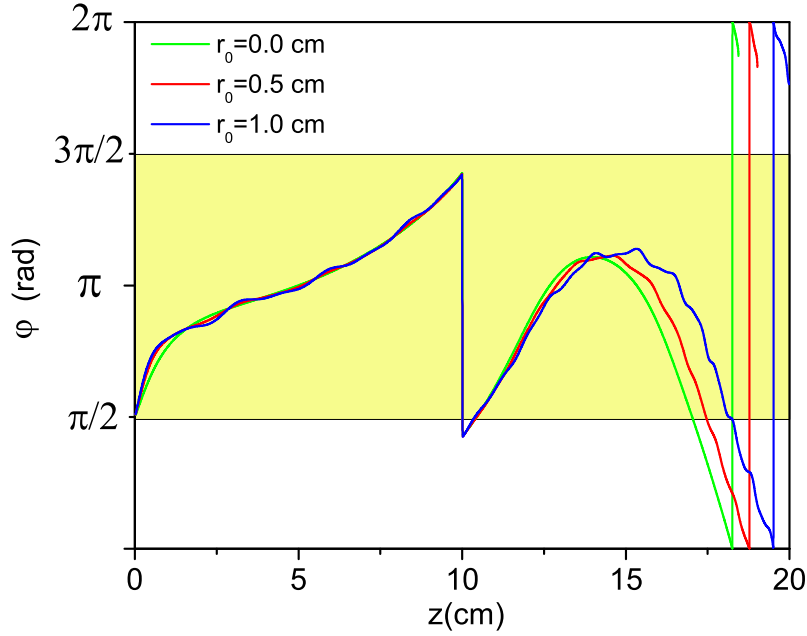


Figura 2.5: *Banda de aceleración* y dependencia de la diferencia de fase φ con la coordenada longitudinal z : $r_0 = 0,0\text{cm}$ (línea verde), $r_0 = 0,5\text{cm}$ (línea roja) y $r_0 = 1,0\text{cm}$ (línea azul), usando la onda polarizada circularmente.

electrón avanza a lo largo del eje z . La diferencia de fase inicial $\varphi|_{z=0} = \pi/2$, se debe a la deflexión producida por la componente transversal del campo magnético de microondas. En este punto el campo eléctrico tiene un nodo y no produce ningún efecto sobre el electrón. Las rotaciones ciclotrónicas conducen a una tendencia rápida de φ hacia π , el valor correspondiente a la resonancia exacta. Este fenómeno en la teoría de aceleradores es conocido como autofocalización. En este caso, esto ocurre aproximadamente en una distancia de 5 cm del plano $z = 0$ (ver Fig. 2.5). Todos los electrones en la región $0\text{ cm} < z < 2,5\text{ cm}$ se encuentran en la banda de aceleración, $\varphi \cong \pi$; sin embargo sus energías no cambian considerablemente porque el campo eléctrico TE_{112} sigue siendo pequeño en esta región. Luego, en el intervalo entre $z = 5\text{ cm}$ y $z = 8\text{ cm}$, se observa un incremento gradual de la energía del electrón. A pesar de que el electrón se encuentra en la banda de aceleración, la razón de crecimiento de la energía no es relativamente grande debido a que la fase se aleja del valor correspondiente a la resonancia exacta (ver

Fig.2.5). El campo eléctrico en el plano $z = 10 \text{ cm}$ es nulo, donde la diferencia de fase cambia desde $\varphi \cong 3\pi/2$ hasta $\varphi \cong \pi/2$ para todas las partículas, debido a que la fase de la onda electromagnética estacionaria cambia π al pasar del nodo; sin embargo, este salto no aleja a φ de la banda de aceleración. A medida que las partículas continúan penetrando en la cavidad, la diferencia de fase se aproxima al valor de resonancia exacta (ver Fig.2.5); por tal razón, en la vecindad de $z = 15 \text{ cm}$ donde el campo de microondas alcanza un máximo, la energía de microondas es transferida efectivamente a los electrones. El hecho de que la razón de incremento de la energía es mayor en la segunda mitad de la onda estacionaria TE_{112} también está relacionada con el tiempo de interacción entre la partícula y la onda, el cual depende de la velocidad longitudinal del electrón. Para los tres casos presentados, la energía del electrón decrece cerca de la pared lateral de la cavidad debido a que φ sale de la banda de aceleración.

La Fig.2.6 muestra la variación del radio de Larmor a medida que el electrón avanza en la cavidad. Se puede ver que el radio de Larmor del electrón, cuyo centro de guía se mueve a lo largo del eje de campo magnético cambia suavemente. En el caso $r_0 > 0$, se observan ciertas oscilaciones, las cuales surgen porque el campo magnético es no homogéneo radialmente y su valor varía casi periódicamente a medida que el electrón sigue su trayectoria espiral. Cuanto mas grande es la posición radial inicial mayor es la amplitud de oscilación.

Dependencia de la energía de inyección. Polarizaciones circular y lineal

Como se muestra en la Fig.2.7, la ganancia de la energía de los electrones a lo largo de su trayectoria depende de su energía inicial. El electrón con una energía de inyección de 12 keV se acelera hasta alcanzar un valor máximo de 270 keV cuando llega al plano $z = 17 \text{ cm}$ y luego se detiene en el plano $z = 18$. Una situación similar se presenta con el electrón inyectado con una energía de 14 keV , el cual alcanza un valor máximo de la energía de 248 keV en la misma posición. Cuando la energía de inyección se incrementa, por ejemplo a 16 keV , el tiempo de interacción entre el campo de microondas y el electrón disminuye, razón por la cual se produce una transferencia de energía menos efectiva, alcanzando un valor máximo de 230 keV , hasta que finalmente impacta con la superficie lateral de la cavidad (ver Fig.2.7).

La evolución de la diferencia de fase φ para cada caso se muestra en la Fig. 2.8. Esta guarda una relación directa con la Fig.2.7, la cual puede ser establecida de un modo similar al utilizado anteriormente con la Fig.2.5. Notese que, omitiendo las pequeñas

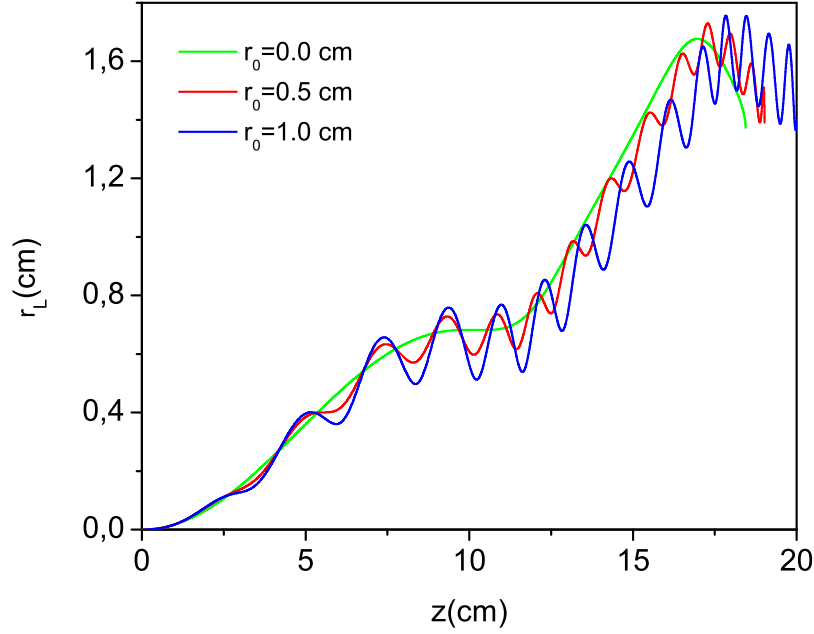


Figura 2.6: Dependencia de la diferencia del radio de Larmor con la coordenada longitudinal z : $r_0 = 0,0\text{cm}$ (línea verde), $r_0 = 0,5\text{cm}$ (línea roja) y $r_0 = 1,0\text{cm}$ (línea azul), usando la onda polarizada circularmente.

fluctuaciones, los resultados obtenidos para el caso del modo TE_{112} de la onda circularmente polarizada de amplitud $E_{0c} = 7 \text{ kV/cm}$ son exactamente iguales a los obtenidos con la onda linealmente polarizada de amplitud $E_{0l} = 14 \text{ kV/cm}$. Las fluctuaciones son causadas por la interacción del electrón con la componente circular izquierda de la onda linealmente polarizada. La Fig.2.9 muestra la gráfica correspondiente a la diferencia de fase φ entre la velocidad transversal del electrón y la fase de dicha componente, en función del tiempo en unidades del periodo de microondas, para el caso $W_i = 14 \text{ keV}$. Nótese que, a diferencia de la fase asociada con la componente circular derecha de la onda linealmente polarizada (ver Fig. 2.8), en este caso la fase se cambia rápidamente entre la *banda de aceleración* y fuera de esta; razón por la cual la interacción con esta componente es poco efectiva, originando las pequeñas oscilaciones.

La Fig.2.10 muestra la evolución espacial de la velocidad longitudinal del electrón con diferentes energías iniciales. En todos los casos los electrones disminuyen su velocidad longitudinal, incluso hasta detenerse dentro de la cavidad, debido al *efecto espejo* causado por el incremento del campo magnético a lo largo de la dirección de propagación

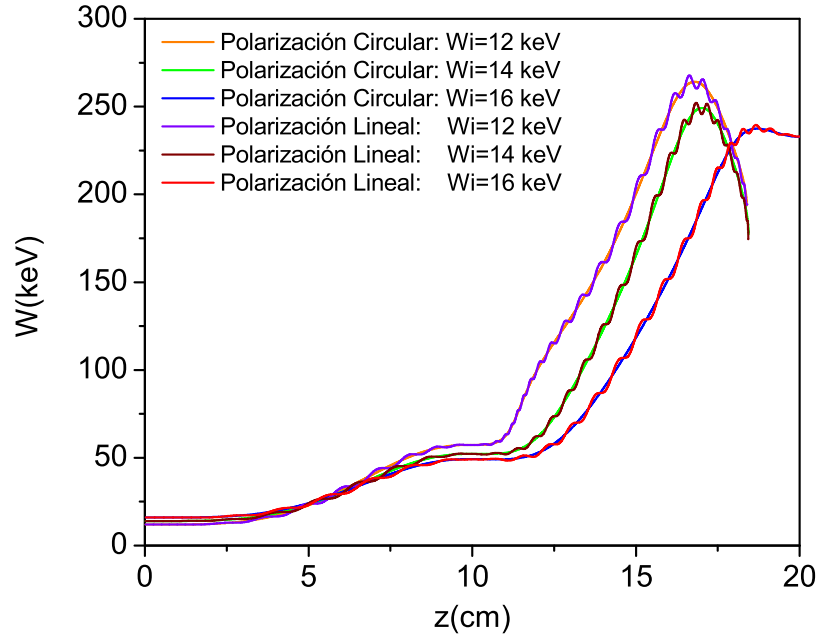


Figura 2.7: Evolución espacial de la energía del electrón para diferentes energías de inyección: $W_i = 12, 14$ y 16 keV, considerando los dos casos: onda circularmente polarizada y onda linealmente polarizada equivalente.

de los electrones ⁴; sin embargo, este decrecimiento no es monótono por dos razones: (i) la presencia de mínimos locales del campo magnético estático, en este caso en el rango (12–14) cm (ver Fig. 2.2), el cual provoca un ligero incremento de la velocidad longitudinal, detectable solo para el caso de energía inicial $W_i = 14$ keV y (ii) la fuerza longitudinal sobre el electrón causada por la componente transversal del campo magnético de microondas, la cual varía aproximadamente como⁵ $F_z^{hf} \simeq -ev_\theta E_0^c(K_\parallel/\omega) \sin\varphi \cos(K_\parallel z)$, en donde v_θ representa la componente azimutal de la velocidad del electrón. Puesto que el campo magnético no transfiere energía al electrón, el incremento (o disminución) de la velocidad longitudinal está acompañado de la disminución (incremento) de su rapidez transversal; a pesar de ello, este campo afecta indirectamente el valor de φ y por consiguiente es un factor determinante en el proceso de transferencia de energía por parte del campo eléctrico de microondas. En el caso particular de un modo TE_{112} , como

⁴Hay dos factores principales que limitan la energía adquirida por el electrón a través del mecanismo *SARA*, la fuerza diamagnética y la fuerza de radiación sincrotrónica

⁵Esta dependencia se analiza con detalle en el capítulo siguiente (ver ecuación 3.11), por ahora solo se utilizará esta expresión y sus implicaciones con el fin de comprender el comportamiento de la Fig. 2.10.

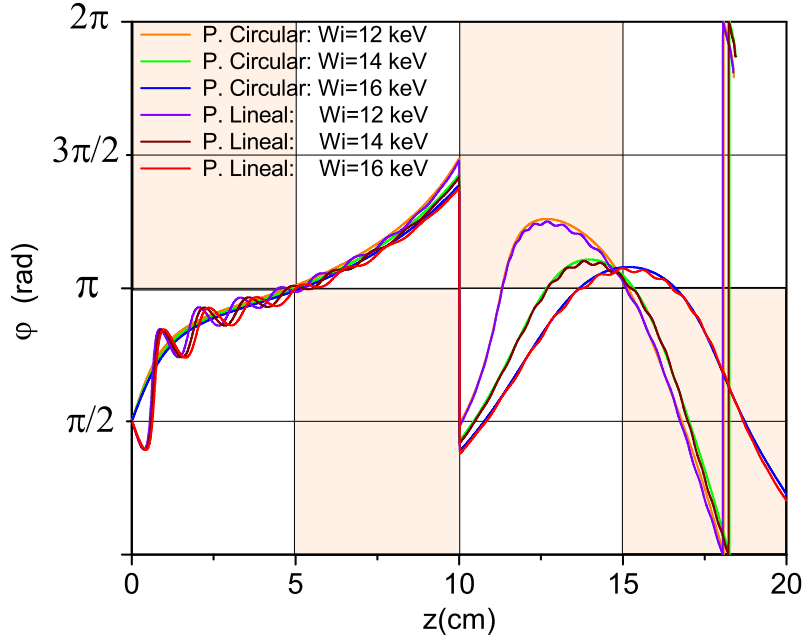


Figura 2.8: Zonas de aceleración longitudinal (caso particular TE_{112}) y dependencia de la diferencia de fase φ con la coordenada longitudinal z para diferentes energías de inyección: $W_i = 12, 14$ y 16 keV, considerando los dos casos: onda circularmente polarizada y onda linealmente polarizada equivalente.

el considerado en esta simulación, las *zonas de aceleración longitudinal* ($F_z^{hf} > 0$) son aquellas que cumplen una de las siguientes condiciones: (i) $0 < z < d/4$ y $\pi < \varphi < 2\pi$, (ii) $d/4 < z < d/2$ y $0 < \varphi < \pi$, (iii) $d/2 < z < 3d/4$ y $\pi < \varphi < 2\pi$ y (iv) $3d/4 < z < d$ y $0 < \varphi < \pi$; las cuales se muestran explícitamente en la figura 2.8. Por ejemplo, el electrón inyectado con una energía $W_i = 12$ keV se mantiene fuera de estas zonas cuando se mueve en la primera parte de la cavidad, en donde su energía y obviamente su velocidad azimutal v_θ no aumentan significativamente; razón por la cual este efecto desacelerador no es apreciable (ver figuras 2.7 y 2.10). Posteriormente, en la posición $z = 11$ cm el electrón ingresa a la *zona de aceleración longitudinal* en donde se produce un incremento apreciable de su velocidad longitudinal hasta alcanzar un máximo local en la posición $z = 14,5$ cm en donde los efectos son contrarestados con los de la fuerza diamagnética, la cual empieza a prevalecer debido a que F_z^{hf} disminuye hasta cero en la posición $z = 15$ cm (ver figura 2.10).

En el intervalo $15 < z < 17$ cm la fase cambia desde π hasta $\pi/2$ con lo cual aumenta el valor de F_z^{hf} a medida que se aleja de la posición $z = 15$ cm; sin embargo su efec-

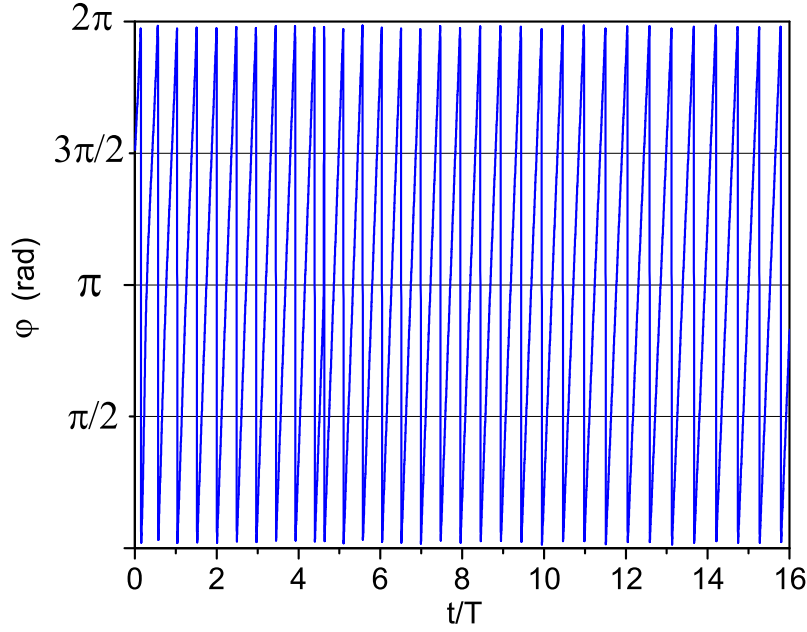


Figura 2.9: Diferencia de fase φ en función del tiempo, asociada con la componente circular izquierda de la onda linealmente polarizada, para el caso $W_i = 14 \text{ keV}$.

to sigue siendo relativamente débil y apenas ocasiona una disminución en la razón de decrecimiento de la velocidad longitudinal causada por la fuerza diamagnética. Finalmente, el electrón sale de la *zona de aceleración* en la posición $z = 18 \text{ cm}$ en donde se combinan los dos efectos desaceleradores, provocando una caída abrupta de la velocidad longitudinal del electrón hasta detenerse en $z = 18,5 \text{ cm}$. Algo muy similar ocurre con los electrones inyectados con energías de 14 keV y 16 keV , salvo que este último nunca sale de la *zona de aceleración* al final del movimiento, a tal punto que el efecto de F_z^{hf} prevalece sobre el de la fuerza diamagnética. De hecho, el valor de F_z^{hf} se incrementa conforme el electrón se acerca a la pared opuesta de la cavidad donde finalmente impacta (ver figuras 2.8 y 2.10) .

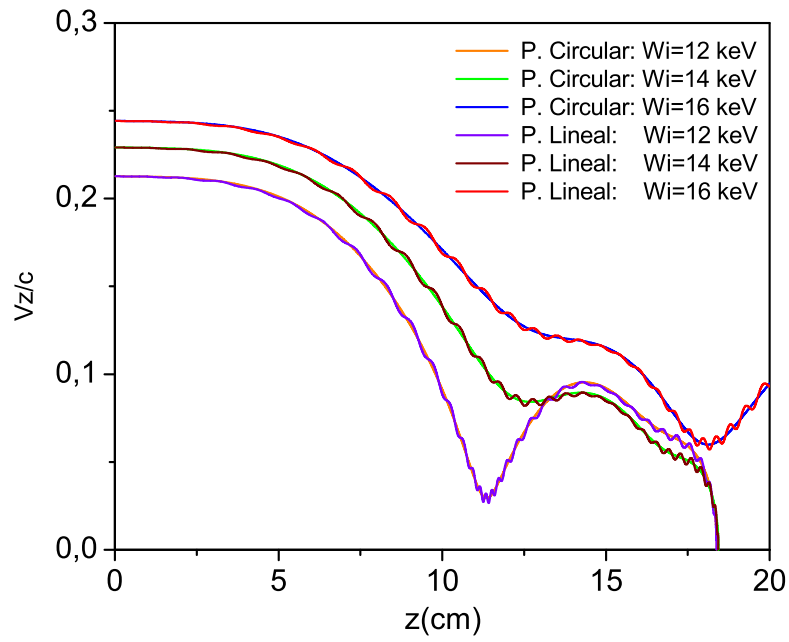


Figura 2.10: Dependencia de velocidad longitudinal con la posición longitudinal z para diferentes energías de inyección: $W_i = 12, 14$ y 16 keV, considerando los dos casos: onda circularmente polarizada y onda linealmente polarizada equivalente.

CAPÍTULO 3

ESTUDIO ANALÍTICO DEL MECANISMO SARA

Como se sigue del análisis de los datos obtenidos en el capítulo anterior, la elección del perfil del campo magnetostático es crucial para la eficiencia del mecanismo *SARA*. Hasta el momento se han utilizado diferentes perfiles de campo magnético mediante los cuales ha sido posible el autosostenimiento de la aceleración tipo *SARA*, los cuales se han determinado mediante ajustes sucesivos; sin embargo, no se ha descrito una expresión matemática de un perfil de campo magnético apropiado para dicho autosostenimiento. La respuesta a esta pregunta, así como la relación existente entre los parámetros que caracterizan el movimiento *SARA* se presentan a continuación mediante el desarrollo de un modelo analítico utilizando la aproximación de una sola partícula [43].

3.1 Modelo SARA

El movimiento del electrón en condiciones de aceleración tipo *SARA* es descrito por la ecuación de movimiento (ver ec. 1.5):

$$d(\gamma m_e \vec{v})/dt = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (3.1)$$

en la cual se ha despreciado la fuerza de frenado de radiación sincrotrónica porque los rangos de energía considerados no son suficientemente altos; $\vec{E} = \vec{E}^{hf}$ y $\vec{B} = \vec{B}^{hf} + \vec{B}^b$ representan los campos eléctrico y magnético que actúan sobre el electrón, respectivamente; en donde los superíndices “*hf*” y “*b*” hacen referencia al campo de microondas

(i) $\text{sen}(p\pi/d) = |\text{sen}(p\pi/d)|$:

en este caso, la expresión (3.2) se puede escribir como:

$$\vec{E}^{hf+} \cong E_0^c \left(\text{sen } \varphi^+ \hat{r} + \cos \varphi^+ \hat{\theta} \right) \left| \text{sen} \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \right|, \quad (3.4)$$

en donde se ha sustituido φ por φ^+ , la cual representa la diferencia de fase entre la velocidad transversal del electrón y el *campo eléctrico positivo* $\vec{E}^{hf+}$.

Es importante mencionar que la variable φ utilizada en (3.2) realmente corresponde a φ^+ y también es utilizada en el segundo caso, el cual se estudia a continuación:

(ii) $\text{sen}(p\pi/d) = -|\text{sen}(p\pi/d)|$:

en este caso, la expresión (3.2) conduce a:

$$\vec{E}^{hf-} \cong -E_0^c \left(\text{sen } \varphi^+ \hat{r} + \cos \varphi^+ \hat{\theta} \right) \left| \text{sen} \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \right|. \quad (3.5)$$

Nótese que la expresión (3.5) puede obtenerse a partir de (3.4) mediante la sustitución $\varphi^+ \rightarrow \varphi^+ \pm \pi$; por lo tanto φ^+ presentará discontinuidades en las posiciones $\xi = \xi_k$. Por otra parte, $\varphi^+ = \varphi^- \pm \pi$; donde φ^- denota la diferencia de fase entre la velocidad transversal del electrón y el *campo eléctrico negativo* $\vec{E}^{hf-}$, el cual coincide con la dirección del campo eléctrico en esta región. De este modo, la expresión (3.5) se reduce a:

$$\vec{E}^{hf-} \cong E_0^c \left(\text{sen } \varphi^- \hat{r} + \cos \varphi^- \hat{\theta} \right) \left| \text{sen} \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \right|. \quad (3.6)$$

El par de ecuaciones (3.4) y (3.6) se puede escribir en forma compacta como:

$$\vec{E}^{hf\pm} \cong E_0^c \left(\text{sen } \varphi^\pm \hat{r} + \cos \varphi^\pm \hat{\theta} \right) \left| \text{sen} \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \right|, \quad (3.7)$$

donde $\varphi^\pm$ representa la diferencia de fase entre la velocidad transversal del electrón y el campo eléctrico de microondas; tal que: $\varphi^\pm = \varphi^+$ cuando $\text{sen}(p\pi z/d) > 0$ y $\varphi^\pm = \varphi^-$ cuando $\text{sen}(p\pi z/d) < 0$.

A partir de este análisis es evidente que las formulaciones (3.2) y (3.7) son completamente equivalentes, pero por razones matemáticas se utilizará la expresión (3.2).

Por otra parte, para describir el campo magnético producido por las bobinas $\vec{B}^b$, se utiliza la expresión:

$$\vec{B}^b \cong -\frac{1}{2}r \frac{dB_z^b(z)}{dz} \hat{r} + B_z^b(z) \hat{z}, \quad (3.8)$$

donde

$$B_z^b(z) \cong B_0[\gamma_0 + b(z)], \quad (3.9)$$

en la cual $B_0 = m_e \omega / e$ representa el valor del campo magnético correspondiente a la resonancia ciclotrónica exacta para la masa en reposo del electrón, ω es la frecuencia del campo electromagnético, $\gamma_0 = [1 - (v_{z0}/c)^2]^{-1/2}$ es el factor relativista asociado a la velocidad v_{z0} del electrón en el punto $z = 0$, donde c representa la velocidad de la luz, $b(z)$ es una función adimensional que determina el perfil del campo magnético, asumiendo $b(0) = 0$.

Teniendo en cuenta que $B_r, B_\theta \ll B_z$, donde $B_z \cong B_z^{hf}$ y $v_\theta \gg v_r$, se pueden realizar las siguientes aproximaciones: $v_z B_\theta \ll v_\theta B_z$ y $v_r B_\theta \ll v_\theta B_r$. Bajo estas consideraciones y utilizando las expresiones (3.2)-(3.9), las componentes radial y axial de la fuerza de Lorentz sobre un electrón inyectado a lo largo del eje de la cavidad están dadas por:

$$F_r \cong -e \left\{ v_\theta B_0 [\gamma_0 + b(z)] + v_z E_0^c \left(\frac{p\pi/d}{\omega} \right) \cos \varphi \cos \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \right\} - e E_0^c \sin \varphi \sin \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \quad (3.10)$$

y

$$F_z \cong ev_r E_0^c \frac{(p\pi/d)}{\omega} \cos \varphi \cos \left(\frac{p\pi z}{d} \right) - ev_\theta E_0^c \frac{(p\pi/d)}{\omega} \sin \varphi \cos \left(\frac{p\pi z}{d} \right) - ev_\theta \left(\frac{1}{2} r \frac{dB_z^c}{dz} \right), \quad (3.11)$$

respectivamente. La Ec.(3.10) corresponde a la fuerza centrípeta y la ecuación (3.11) a la suma de la fuerza longitudinal ejercida por el campo magnético de microondas (los dos primeros términos) y la fuerza diamagnética ocasionada por la no homogeneidad del campo magnético estático, la cual actúa en la dirección opuesta al gradiente de la magnitud del campo magnético e impide el avance del electrón hacia regiones de mayor intensidad. Este es uno de los aspectos que diferencian el mecanismo *SARA* de otros tipos de aceleración.

3.1.1. Zonas de aceleración longitudinal

La fuerza longitudinal ejercida por el campo de microondas F_z^{hf} puede acelerar a los electrones en determinadas condiciones, lo cual condujo en el capítulo anterior a la

identificación de una *zona de aceleración longitudinal* en la gráfica φ vs z en el caso particular de un modo TE_{112} (ver figura 2.8). Esta zona se puede obtener en el caso general de un modo TE_{11p} teniendo en cuenta que $v_r \ll v_\theta$, lo cual permite realizar la siguiente aproximación:

$$F_z^{hf} \simeq -ev_\theta E_0^c \frac{(p\pi/d)}{\omega} \sin \varphi \cos \left(\frac{p\pi z}{d} \right); \quad (3.12)$$

por lo tanto, F_z^{hf} contribuirá al avance longitudinal del electrón siempre que:

$$\sin \varphi \cos (p\pi z/d) < 0. \quad (3.13)$$

Para analizar esta desigualdad es conveniente considerar los siguientes casos:

caso 1: $\sin(p\pi/d) = |\sin(p\pi/d)|$; el cual se presenta siempre que:

$$2k < p(z/d) < 2k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K_{max}, \quad (3.14)$$

donde $K_{max} < p/2$ (mayor número entero menor que $p/2$). En este rango espacial se debe(n) considerar únicamente el(los) subintervalo(s) que satisface(n) cualquiera de las dos condiciones adicionales que se presentan a continuación:

a) $\cos(p\pi z/d) > 0$, es decir:

$$2k' - 1/2 < p(z/d) < 2k' + 1/2, \quad k' = 0, 1, 2, \dots, K'_{max}, \quad (3.15)$$

donde $K'_{max} < (p + 1/2)/2$ (mayor número entero menor que $(p + 1/2)/2$).

Con esta condición, la desigualdad (3.13) se reduce a: $\sin \varphi^+ < 0$; por lo tanto:

$$\pi < \varphi^+ < 2\pi. \quad (3.16)$$

b) $\cos(p\pi z/d) < 0$, es decir:

$$2k' + 1/2 < p(z/d) < 2k' + 3/2, \quad k' = 0, 1, 2, \dots, K'_{max}. \quad (3.17)$$

Con esta condición, la desigualdad (3.13) se reduce a: $\sin \varphi^+ > 0$; por lo tanto:

$$0 < \varphi^+ < \pi. \quad (3.18)$$

caso 2: $\sin(p\pi/d) = -|\sin(p\pi/d)|$; el cual se presenta siempre que:

$$2k + 1 < p(z/d) < 2k + 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K_{max}. \quad (3.19)$$

Al igual que en el caso 1, en este rango espacial solo se debe(n) considerar únicamente el(los) subintervalo(s) que satisface(n) cualquiera de las dos condiciones adicionales que se presentan a continuación:

a) $\cos(p\pi z/d) > 0$, es decir:

$$2k' - 1/2 < p(z/d) < 2k' + 1/2, \quad k' = 0, 1, 2, \dots, K'_{max}. \quad (3.20)$$

Con esta condición, la desigualdad (3.13) se reduce a: $\sin \varphi^+ < 0$; pero: $\varphi^+ = \varphi^- \pm \pi$; por lo tanto: $\sin \varphi^- > 0$; de donde:

$$0 < \varphi^- < \pi. \quad (3.21)$$

b) $\cos(p\pi z/d) < 0$, es decir:

$$2k' + 1/2 < p(z/d) < 2k' + 3/2, \quad k' = 0, 1, 2, \dots, K'_{max}. \quad (3.22)$$

Con esta condición, la desigualdad (3.13) se reduce a: $\sin \varphi^+ > 0$; o bien: $\sin \varphi^- < 0$; por lo tanto:

$$\pi < \varphi^- < 2\pi. \quad (3.23)$$

Las relaciones (3.14)-(3.23) definen las *zonas de aceleración longitudinal* en un diagrama φ vs z . En el caso particular $p = 1$, son aquellas definidas por: (i) $0 < z < d/2$ y $\pi < \varphi < 2\pi$ y (ii) $d/2 < z < d$ y $0 < \varphi < \pi$; mientras que en el caso $p = 2$ están dadas por: (i) $0 < z < d/4$ y $\pi < \varphi < 2\pi$, (ii) $d/4 < z < d/2$ y $0 < \varphi < \pi$, (iii) $d/2 < z < 3d/4$ y $\pi < \varphi < 2\pi$ y (iv) $3d/4 < z < d$ y $0 < \varphi < \pi$. El caso $p = 2$ se representó gráficamente en la figura 2.8.

3.1.2. Ecuaciones que caracterizan la aceleración tipo SARA

A partir de la Ec.(3.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} \gamma m_e \frac{v_{\perp}^2}{r} &= e \left\{ v_{\theta} B_0 [\gamma_0 + b(z)] + v_z E_0^c \left(\frac{p\pi/d}{\omega} \right) \cos \varphi \cos \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \right\} \\ &+ e E_0^c \sin \varphi \sin \left(\frac{p\pi z}{d} \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde:

$$\gamma = [1 - (v_{\perp}^2 + v_z^2)]^{-1/2} \quad (3.25)$$

y $v_{\perp}^2 = v_r^2 + v_{\theta}^2$; por lo tanto, la frecuencia ciclotrónica local del electrón $\omega_c(z) = v_{\perp}(z)/r(z)$ ($v_{\perp} \cong v_{\theta}$, donde $r(z) \neq 0$) puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \omega_c(\xi) &= \gamma^{-1} \{ [\gamma_0 + b(\xi)] - g_0(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{-1/2} \sin \varphi \sin(p\pi\xi/\delta) \\ &- g_0(p\pi/\delta)(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{-1/2} u_z \cos \varphi \cos(p\pi\xi/\delta) \} \omega, \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde $g_0 = E_0^c/(-B_0c)$ representa la amplitud del campo eléctrico adimensional, $u_z = v_z/c$, $\xi = z/r_l$, $\delta = d/r_l$ y $r_l = c/\omega$ es el *radio de Larmor relativista*.

En el caso particular $K_{\parallel} \ll K_{\perp}$ se tiene que $\omega \cong cK_{\perp}$ (ver ec.(2.8)) y $(p\pi/\delta)u_z = (v_z/c)(K_{\parallel}/K_{\perp}) \ll 1$; por lo tanto, la ec.(3.26) se reduce a:

$$\omega_c(\xi) \cong \gamma^{-1} \{ [\gamma_0 + b(\xi)] - g_0(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{-1/2} \sin \varphi \sin(p\pi\xi/\delta) \} \omega. \quad (3.27)$$

En el caso de un modo TE_{111} se puede ver que el mantenimiento de la condición de resonancia exacta a lo largo de toda la trayectoria conduce a ⁶:

$$\omega_c(\xi) = \gamma^{-1} [\gamma_0 + b(\xi)] \omega, \quad (3.28)$$

o bien:

$$\omega_c(z) = \frac{eB_z(z)}{\gamma me} \cong \frac{eB(z)}{\gamma me}. \quad (3.29)$$

Por lo tanto, en este caso, *el campo magnético debe crecer a lo largo de la dirección de propagación del electrón a una razón tal que compense exactamente el incremento del factor relativista para mantener la condición de resonancia*. La ec.(3.29) fue el punto de partida para la aceleración tipo SARA (ver ec.(2.2)); sin embargo, en el caso general descrito por la ec.(3.26), la frecuencia ciclotrónica depende del campo de microondas, incluso cuando $\varphi = \pi$; por lo tanto, el perfil del campo magnético $b(\xi)$ debe ser cambiado para compensar tanto el incremento del factor relativista como las variaciones en la frecuencia ciclotrónica asociadas con el campo de microondas. Adicionalmente, debido a que no se puede mantener la condición de resonancia exacta, la aceleración autoresonante se considera favorable cuando el electrón se mantenga en la *banda de aceleración*, principalmente en la vecindad de $\varphi = \pi$.

La evolución temporal de la diferencia de fase es descrita por la expresión:

$$\dot{\varphi} = \omega_c(\xi)/\omega - 1, \quad (3.30)$$

⁶Una vez se ha alcanzado la condición de resonancia $\varphi = \pi$, esta no puede ser mantenida a lo largo de toda la trayectoria para modos TE_{11p} cuando $p \neq 1$, debido a la presencia de nodos del campo eléctrico en donde la fase de la onda cambia abruptamente un ángulo π .

donde el punto denota el operador $d/d\tau$, en la cual $\tau = \omega t$ (tiempo normalizado). Sustituyendo la ecuación (3.26) en la ecuación (3.30), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \gamma^{-1} \{ [\gamma_0 - \gamma + b(\xi)] - g_0(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{-1/2} \sin \varphi \sin(p\pi\xi/\delta) \\ &- g_0(p\pi/\delta)(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{-1/2} u_z \cos \varphi \cos(p\pi\xi/\delta) \}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Por otra parte, la ecuación (3.11) puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{d(\gamma m_e v_z)}{dt} &\cong ev_r E_0^c \frac{(p\pi/d)}{\omega} \cos \varphi \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \\ &- ev_\perp E_0^c \frac{(p\pi/d)}{\omega} \sin \varphi \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) - \frac{m_e v_\perp^2/2}{B_0(\omega_c/\omega)} \frac{dB_z^c}{dz}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde v_r es calculado a partir de la expresión: $r \cong v_\perp/\omega_c = [u_\perp/(\dot{\varphi} + 1)]r_l$, en la cual $u_\perp = v_\perp/c$. De este modo, el radio de larmor del electrón normalizado, $r^* = r/r_l$, está dado por:

$$r^* = \frac{(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{1/2}}{\dot{\varphi} + 1} \quad (3.33)$$

a partir de la cual se obtiene la velocidad radial normalizada ($u_r = v_r/c$):

$$u_r = \frac{(\gamma^{-3}\dot{\gamma} - u_z\dot{u}_z)(\dot{\varphi} + 1) - \ddot{\varphi}(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)}{(\dot{\varphi} + 1)^2(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{1/2}}. \quad (3.34)$$

Utilizando la ecuación (3.25) y la expresión (3.34), la ecuación (3.32) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{v_\perp^2 + v_z^2}{c^2}\right)^{-3/2} \left[\frac{v_\perp v_z}{c^2} \frac{dv_\perp}{dt} + \left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}\right) \frac{dv_\perp}{dt} \right] = \\ \frac{e}{m_e} \left(\frac{c}{\omega}\right) E_0^c(p\pi/d) \left[\frac{(\gamma^{-3}\dot{\gamma} - u_z\dot{u}_z)(\dot{\varphi} + 1) - \ddot{\varphi}(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)}{(\dot{\varphi} + 1)^2(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{1/2}} \right] \cos \varphi \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \\ - \frac{e}{m_e} \left(\frac{v_\perp}{\omega}\right) E_0^c(p\pi/d) \sin \varphi \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) - \frac{v_\perp^2}{2(\dot{\varphi} + 1)} \frac{db(z)}{dz}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

A partir de la ecuación (3.25), se obtiene:

$$v_\perp = [1 - \gamma^{-2} - (v_z/c)^2]^{1/2} c \quad (3.36)$$

y

$$\frac{dv_\perp}{dt} = c \left[1 - \gamma^{-2} - \left(\frac{v_z}{c}\right)^2 \right]^{-1/2} \left[\gamma^{-3} \frac{d\gamma}{dt} - \frac{v_z}{c^2} \frac{dv_z}{dt} \right]. \quad (3.37)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.36) y (3.37) en la ecuación (3.35), normalizando variables y después de un procedimiento convencional se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{u}_z = & \gamma^{-1} \left\{ -\frac{g_0 \left(\frac{p\pi}{\delta}\right) [\gamma^{-3}\dot{\gamma}(\dot{\varphi}+1) - \ddot{\varphi}(1-\gamma^{-2}-u_z^2)] \cos \varphi \cos \left(\frac{p\pi\xi}{\delta}\right)}{(\dot{\varphi}+1) \left[(\dot{\varphi}+1)(1-\gamma^{-2}-u_z^2)^{1/2} - g_0 \left(\frac{p\pi}{\delta}\right) u_z \cos \varphi \cos \left(\frac{p\pi\xi}{\delta}\right) \gamma^{-1} \right]} \right. \\ & + \left[\frac{(\dot{\varphi}+1)(1-\gamma^{-2}-u_z^2)^{1/2}}{(\dot{\varphi}+1)(1-\gamma^{-2}-u_z^2)^{1/2} - g_0 \left(\frac{p\pi}{\delta}\right) u_z \cos \varphi \cos \left(\frac{p\pi\xi}{\delta}\right) \gamma^{-1}} \right] \times \\ & \left. \left[g_0 \left(\frac{p\pi}{\delta}\right) (1-\gamma^{-2}-u_z^2)^{1/2} \sin \varphi \cos \left(\frac{p\pi\xi}{\delta}\right) - \frac{1-\gamma^{-2}-u_z^2}{2(\dot{\varphi}+1)} \frac{db(\xi)}{d\xi} - u_z \dot{\gamma} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Por otra parte, la evolución temporal de γ es obtenida a partir de la potencia transferida:

$$d(\gamma m_e c^2)/dt = -e \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (3.39)$$

la cual se reduce a:

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -\frac{1}{\omega m_e c^2} \left\{ E_0^c \sin \varphi \sin \left(\frac{p\pi z}{d}\right) v_r + E_0^c \cos \varphi \sin \left(\frac{p\pi z}{d}\right) v_\theta \right\}. \quad (3.40)$$

Aquí $v_\theta \approx v_\perp$. Sustituyendo las expresiones (3.34) y (3.36) en (3.40) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = & -\frac{1}{B_0 c^2} \left\{ E_0^c \sin \varphi \sin \left(\frac{p\pi z}{d}\right) \frac{(\gamma^{-3}\dot{\gamma} - u_z \dot{u}_z)(\dot{\varphi}+1) - \ddot{\varphi}(1-\gamma^{-2}-u_z^2)}{(\dot{\varphi}+1)^2 (1-\gamma^{-2}-u_z^2)^{1/2}} c \right. \\ & \left. + E_0^c \cos \varphi \sin \left(\frac{p\pi z}{d}\right) (1-\gamma^{-2}-u_z^2)^{1/2} c \right\}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Finalmente, después de algunas operaciones se obtiene:

$$\dot{\gamma} = g_0 \left\{ \frac{(\dot{\varphi}+1)(1-\gamma^{-2}-u_z^2) \cos \varphi - \frac{u_z \dot{u}_z (\dot{\varphi}+1) + \ddot{\varphi}(1-\gamma^{-2}-u_z^2)}{\dot{\varphi}+1} \sin \varphi}{(\dot{\varphi}+1)(1-\gamma^{-2}-u_z^2)^{1/2} - g_0 \gamma^{-3} \sin \varphi \sin \left(\frac{p\pi\xi}{\delta}\right)} \right\} \sin \left(\frac{p\pi\xi}{\delta}\right) \quad (3.42)$$

Una aproximación adicional puede contribuir a la fácil interpretación de la ecuación (3.42). Excepto la región del movimiento inicial, ver figura (2.3), en la aceleración tipo *SARA* las variaciones en la energía están asociadas principalmente al incremento de la componente azimutal de la velocidad del electrón $v_\theta (>> v_r)$; de este modo, la ecuación (3.42) se aproxima a:

$$\dot{\gamma} \cong g_0 (1-\gamma^{-2}-u_z^2)^{1/2} \cos \varphi \sin \left(\frac{p\pi\xi}{\delta}\right). \quad (3.43)$$

Puesto que $g_0 < 0$, el electrón incrementará su energía siempre que:

$$\cos \varphi \sin \left(\frac{p\pi\xi}{\delta}\right) < 0, \quad (p = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.44)$$

Consideremos los dos casos posibles:

$$(i) \sin(p\pi/\delta) = |\sin(p\pi/\delta)| > 0:$$

en este caso, la condición (3.44) se reduce a:

$$\cos\varphi^+ < 0, \quad (3.45)$$

$$(ii) \sin(p\pi/\delta) = -|\sin(p\pi/\delta)| < 0:$$

en este caso, la condición (3.44) conduce a:

$$\cos\varphi^+ > 0. \quad (3.46)$$

pero $\varphi^+ = \varphi^- \pm \pi$; por lo tanto, la condición (3.46) se puede expresar como:

$$\cos\varphi^- < 0. \quad (3.47)$$

Al comparar las condiciones (3.45) y (3.47) se puede ver que, en cualquier región, el electrón ganará energía siempre que:

$$\cos\varphi < 0. \quad (3.48)$$

la cual define la *banda de aceleración*: $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$.

Finalmente, la función $\xi = \xi(\tau)$ se deduce a partir de la expresión:

$$\dot{\xi} = u_z. \quad (3.49)$$

Las ecuaciones (3.31), (3.38), (3.42) y (3.49) forman un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas no lineales; las cuales describen la evolución temporal de la energía, la diferencia de fase, la velocidad longitudinal y la coordenada longitudinal del electrón durante su movimiento en las condiciones *SARA*. Este conjunto de ecuaciones puede resolverse numéricamente utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden bajo las siguientes condiciones iniciales:

$$\varphi(\tau_0) = \varphi_0^S, \quad (3.50)$$

$$\gamma(\tau_0) = \gamma_0^S, \quad (3.51)$$

$$u_z(\tau_0) = u_{z0}^S, \quad (3.52)$$

$$\xi(\tau_0) = \xi_0^S. \quad (3.53)$$

Las condiciones iniciales se expresan en un tiempo $\tau_0 \neq 0$ porque en el punto de inyección $\xi(0) = 0$, el factor $(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{-1/2}$ causa una singularidad en la Ec.(3.31). Esto ocurre porque la definición $\omega_c = v_\perp/r$ es valida solo cuando $r \neq 0$. Para evitar esta singularidad se resuelve numéricamente la ecuación de Newton-Lorentz (3.1) en la vecindad del punto de inyección utilizando coordenadas rectangulares; a partir de la cual se obtienen las condiciones iniciales (3.50)-(3.53).

Las ecuaciones *SARA* se pueden convertir a las ecuaciones correspondientes al esquema de aceleración ciclotrónica en un campo magnético homogéneo que se incrementa en el tiempo para mantener las condiciones de resonancia cuando se hacen las siguientes sustituciones: $b(\xi) \rightarrow b(\tau)$, $\sin(p\pi\xi/\delta) \rightarrow 1$ ($\cos(p\pi\xi/\delta) \rightarrow 0$) y naturalmente $u_z = 0$. Por lo tanto, las ecuaciones (3.31) y (3.43), se reducen a:

$$\dot{\varphi} = \gamma^{-1}[\gamma_0 - \gamma + b(\tau)] - g_0\gamma^{-1}(1 - \gamma^{-2})^{-1/2}\sin\varphi, \quad (3.54)$$

$$\dot{\gamma} = g_0(1 - \gamma^{-2})^{1/2}\cos\varphi. \quad (3.55)$$

Estas ecuaciones son similares a las ecuaciones obtenidas en [18] y [21] para el mecanismo *GYRAC*, excepto por el término correspondiente a la radiación sincrotrónica.

3.2 Sostenimiento de la aceleración tipo SARA

Uno de los problemas principales en cualquier mecanismos autoresonante consiste en mantener las condiciones de aceleración durante dicho proceso. En la aceleración tipo *SARA* el problema se reduce a obtener un perfil de campo magnético que garantice el sostenimiento de la aceleración. Una forma de determinarlo consiste en realizar una aproximación polinomial de la función $b(\xi)$:

$$b(\xi) \cong \alpha^{(1)}\xi + \alpha^{(2)}\xi^2 + \dots + \alpha^{(N)}\xi^N \quad (3.56)$$

y sustituirla en las ecuaciones (3.31) y (3.38). De este modo se pueden resolver las ecuaciones *SARA* (o mediante simulación numérica descrita en la sección 2.2), iterando sobre un conjunto de parámetros: $\{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(N)}\}$, lo cual permitirá identificar los perfiles que conducen a un sostenimiento de la aceleración y entre estos el más conveniente.

Otro enfoque consiste en utilizar una función $\varphi(\xi)$ preestablecida, la cual debe permanecer en la banda de aceleración $\pi/2 < \varphi(\xi) < 3\pi/2 \forall \xi$ y cuyo valor inicial es $\varphi(0) = \pi/2$, para deducir un perfil del campo magnético $b(\xi)$ que garantice el mantenimiento del régimen de aceleración a lo largo de la trayectoria del electrón. Para ello se utiliza la ecuación (3.31), a partir de la cual se puede ver que $b(\xi)$ debe ser consistente con la expresión :

$$b(\xi) = [u_z(d\varphi/d\xi) + 1]\gamma - \gamma_0 + g_0(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{-1/2} [\text{sen}\varphi \text{sen}(p\pi\xi/\delta) + (p\pi/\delta)u_z \cos\varphi \cos(p\pi\xi/\delta)], \quad (3.57)$$

a partir de la cual se obtiene:

$$\frac{db(\xi)}{d\xi} = u_z^{-1} \frac{db(\tau)}{d\tau}, \quad (3.58)$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{db(\tau)}{d\tau} = & \dot{\gamma}[u_z(d\varphi/d\xi) + 1] + \gamma[\dot{u}_z(d\varphi/d\xi) + u_z^2(d^2\varphi/d\xi^2)] \\ & - g_0(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{-3/2}(\gamma^{-3} - u_z)[\text{sen}\varphi \text{sen}(p\pi\xi/\delta) + (p\pi/\delta)u_z \cos\varphi \cos(p\pi\xi/\delta)] \\ & + g_0(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{-1/2} \{u_z(d\varphi/d\xi) \cos\varphi \text{sen}(p\pi\xi/\delta) + (p\pi/\delta)u_z \text{sen}\varphi \cos(p\pi\xi/\delta) \\ & + (p\pi/\delta)[\dot{u}_z \cos\varphi \cos(p\pi\xi/\delta) - u_z^2(d\varphi/d\xi) \text{sen}\varphi \cos(p\pi\xi/\delta) - (p\pi/\delta)u_z^2 \cos\varphi \text{sen}(p\pi\xi/\delta)]\}. \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.58) en (3.38) y despejando $\dot{u}_z$, se obtiene:

$$\dot{u}_z = \frac{f_4 + f_5 \{f_6 + f_7[f_8 + f_9 + f_{10}(f_{11} + f_{12})] - u_z \dot{\gamma}\}}{\gamma + f_1(f_2 + f_3)}, \quad (3.59)$$

donde:

$$f_1 = -\frac{1 - \gamma^{-2} - u_z^2}{(u_z \frac{d\varphi}{d\xi} + 1)[(u_z \frac{d\varphi}{d\xi} + 1)(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{1/2} - g_0(\frac{p\pi}{\delta})u_z \gamma^{-1} \cos\varphi \cos(\frac{p\pi\xi}{\delta})]},$$

$$f_2 = g_0 \left(\frac{p\pi}{\delta} \right) \frac{d\varphi}{d\xi} \cos\varphi \cos \left(\frac{p\pi\xi}{\delta} \right),$$

$$f_3 = -\frac{u_z^{-1}}{2} \left(u_z \frac{d\varphi}{d\xi} + 1 \right) \left[\gamma(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{1/2} \frac{d\varphi}{d\xi} + g_0 \left(\frac{p\pi}{\delta} \right) \cos\varphi \cos \left(\frac{p\pi\xi}{\delta} \right) \right],$$

$$f_4 = -\frac{g_0(p\pi/\delta)[\gamma^{-3}\dot{\gamma}(u_z \frac{d\varphi}{d\xi} + 1) - u_z^2 \frac{d^2\varphi}{d\xi^2}(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)] \cos\varphi \cos(p\pi\xi/\delta)}{(u_z \frac{d\varphi}{d\xi} + 1)[(u_z \frac{d\varphi}{d\xi} + 1)(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{1/2} - g_0(\frac{p\pi}{\delta})u_z \gamma^{-1} \cos\varphi \cos(\frac{p\pi\xi}{\delta})]},$$

$$f_5 = \frac{(u_z \frac{d\varphi}{d\xi} + 1)(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{1/2}}{(u_z \frac{d\varphi}{d\xi} + 1)(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{1/2} - g_0(\frac{p\pi}{\delta})u_z\gamma^{-1}\cos\varphi\cos(\frac{p\pi\xi}{\delta})},$$

$$f_6 = g_0(p\pi/\delta)(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{1/2}\sin\varphi\cos(p\pi\xi/\delta),$$

$$f_7 = -\frac{u_z^{-1}(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)}{2\left(u_z \frac{d\varphi}{d\xi} + 1\right)},$$

$$f_8 = \dot{\gamma} \left(u_z \frac{d\varphi}{d\xi} + 1\right) + \gamma u_z^2 \frac{d^2\varphi}{d\xi^2},$$

$$f_9 = -\frac{g_0(\gamma^{-3} - u_z) \left[\sin\varphi\sin\left(\frac{p\pi\xi}{\delta}\right) + \left(\frac{p\pi}{\delta}\right)u_z\cos\varphi\cos\left(\frac{p\pi\xi}{\delta}\right)\right]}{(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{3/2}},$$

$$f_{10} = g_0(1 - \gamma^{-2} - u_z^2)^{-1/2},$$

$$f_{11} = u_z \frac{d\varphi}{d\xi} \cos\varphi \sin\left(\frac{p\pi\xi}{\delta}\right) + \left(\frac{p\pi}{\delta}\right)u_z \sin\varphi \cos\left(\frac{p\pi\xi}{\delta}\right)$$

y

$$f_{12} = -\left(\frac{p\pi}{\delta}\right)u_z^2 \frac{d\varphi}{d\xi} \sin\varphi \cos\left(\frac{p\pi\xi}{\delta}\right) - \left(\frac{p\pi}{\delta}\right)^2 u_z^2 \cos\varphi \sin\left(\frac{p\pi\xi}{\delta}\right).$$

Resolviendo las ecuaciones diferenciales (3.42), (3.49) y (3.59) con las condiciones iniciales (3.51)-(3.53), se puede obtener primero las funciones γ , u_z y ξ y luego el perfil del campo magnético utilizando Ec.(3.57). La singularidad en Ec.(3.59) puede tratarse del mismo modo que la singularidad de Ec.(3.31).

Para determinar un perfil del campo magnético que garantice la aceleración del electrón se debe tener en cuenta que el sostenimiento continuo de la resonancia exacta solo es posible en el caso particular $p = 1$ porque si $p \neq 1$, la fase φ salta un ángulo π en cada nodo de la onda estacionaria.

Para el caso $p = 1$, la diferencia de fase es considerada como:

$$\varphi(\xi) = \frac{\pi}{1 + \exp[-10\xi/\Delta\xi]}, \quad (3.60)$$

cuyas derivadas, $d\varphi/d\xi$ y $d^2\varphi/d\xi^2$, son funciones continuas. Aquí δ y $\Delta\xi$ son las longitudes normalizadas de la cavidad y la zona donde la diferencia de fase varía, respectivamente. Se puede notar que $\varphi(0) = \pi/2$ y $\varphi \rightarrow \pi$ cuando $\xi > \Delta\xi$, lo cual considera el

efecto del campo magnético de microondas en el punto de inyección y el automantenimiento de la resonancia, respectivamente. Basados en los criterios anteriores se puede afirmar que la diferencia de fase dada por la expresión (3.60) es una función consistente con la naturaleza del fenómeno estudiado o equivalentemente que es una función “*bien comportada*”.

Para el caso $p = 2$, la diferencia de fase en el nodo del campo de microondas, que divide la cavidad en dos partes, cambia π (*rad*). El cumplimiento de la expresión:

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \frac{\pi\{1+\exp[-10(\delta/4)/\Delta\xi]\}}{1+\exp[-10\xi/\Delta\xi]} & \text{si } 0 \leq \xi \leq \delta/4, \\ \frac{\pi\{2-\frac{1}{1+\exp[10(\xi-\delta/2)/\Delta\xi]}\}}{2-\frac{1}{1+\exp[-10(\delta/4)/\Delta\xi]}} & \text{si } \delta/4 < \xi < \delta/2, \\ \pi - \frac{\pi}{1+\exp[10(\xi-\delta/2)/\Delta\xi]} & \text{si } \delta/2 < \xi \leq \delta, \end{cases} \quad (3.61)$$

garantiza el mantenimiento del régimen de la aceleración. Se puede notar que $\varphi(0) = \pi/2$ y $\varphi|_{(\delta/2)-} - \varphi|_{(\delta/2)+} = \pi$. Se debe advertir que a pesar de que en este caso $d\varphi/d\xi$ también es continua, $d^2\varphi/d\xi^2$ presenta una discontinuidad en $\xi = \delta/4$; sin embargo, para fines prácticos, dicha discontinuidad es despreciable cuando $\Delta\xi \lesssim 0,3\delta$.

3.3 Resultados y discusión

A continuación se presentan los resultados obtenidos a partir del estudio analítico hecho en la sección 3.1. Primero se estudia el caso $B_z(z) = B_z(0, z)$ que fue calculado en la sección 2.2 mediante el método de aproximaciones sucesivas. La función $b(z_i) = B(0, z_i)/B_0 - 1$ se determinó en 81 puntos sobre el eje z donde la derivada $db(z_i)/dz_i$ se encuentra numéricamente. Los valores $b(z)$ y $db(z)/dz$ fueron calculados usando el método de interpolación lineal. El campo magnético que se muestra en la figura 3.2 se determina utilizando la aproximación (3.8)-(3.9). En esta aproximación la componente radial $B_r(r, z)$ es insignificante en comparación con la componente longitudinal, causando una no homogeneidad radial casi imperceptible, dada por la expresión $(1/8)B_0r^2[db(z)/dz]^2/[\gamma_0 + b(z)]$. A pesar de esto, dicha componente no debe ser ignorada porque la fuerza diamagnética depende de ella.

La figura 3.3 muestra la evolución espacial de la energía utilizando: (a) el modelo SARA

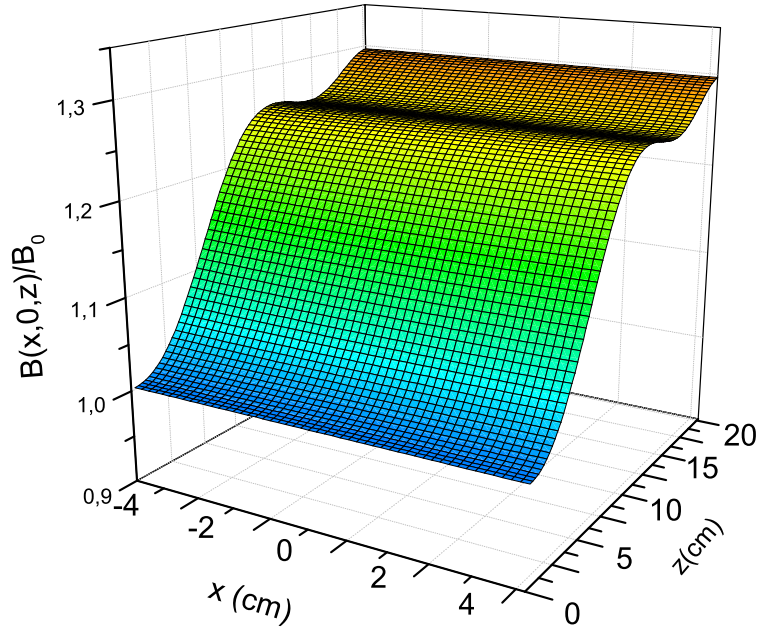


Figura 3.2: Aproximación del perfil de campo magnético en el plano $y=0$.

con los datos del campo magnético utilizado en la sección 2.2 (línea roja), simulación numérica de la ecuación de Newton-Lorentz considerando: (b) campos exactos (línea verde) y (c) campo magnético estático aproximado, mostrado en la figura 3.2 (línea

azul). Los resultados fueron obtenidos para un electrón inyectado con una energía de 12 keV en una cavidad con los mismos parámetros utilizados en la sección 2.2. La diferencia entre los dos primeros casos observada en la región $z \geq 11 \text{ cm}$, donde el radio de Larmor es relativamente grande ($0,7 - 1,6 \text{ cm}$), es atribuida principalmente a la diferencia entre las no homogeneidades transversales de los campos magnéticos estáticos producido por las bobinas. Con el perfil utilizado en la sección 2.2 (insertado en la figura 3.3) la fuerza diamagnética es más intensa, la cual produce variaciones significativas en la velocidad longitudinal del electrón (ver figura 3.4). Estas variaciones no afectan directamente la energía del electrón, pero ejercen una influencia directa sobre la diferencia de fase φ (ver ecuación (3.31)), conduciendo a una situación diferente en el proceso de transferencia de energía del campo de microondas (ver figura 3.5).

Por el contrario, cuando se realiza la simulación numérica de la ecuación de Newton-

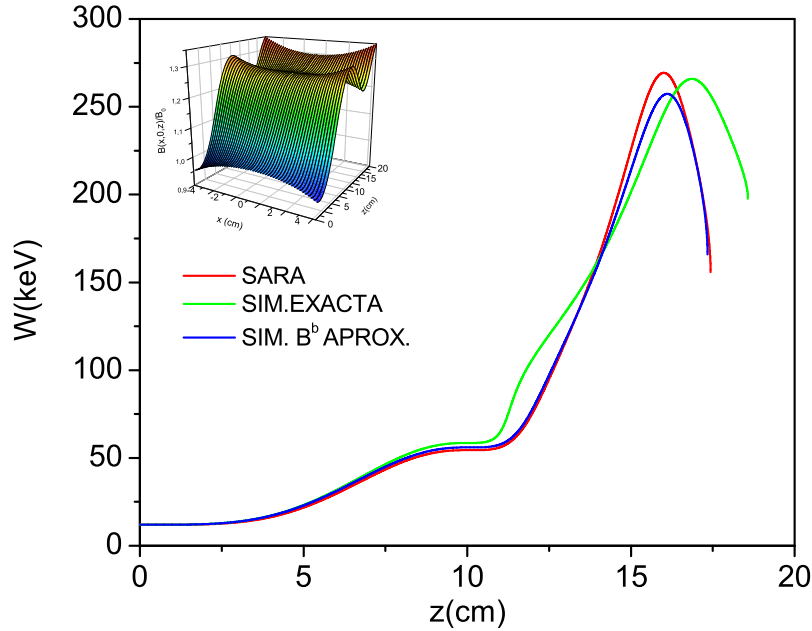


Figura 3.3: Comparación de la evolución espacial de la energía del electrón: Modelo SARA (línea roja), simulación numérica con campos exactos (línea verde) y simulación numérica con campo magnético estático aproximado (línea azul).

Lorentz con el campo magnético estático aproximado del modelo SARA, las diferencias mencionadas anteriormente se reducen significativamente (ver figuras: 3.3-3.5), a tal punto que la máxima diferencia en la energía del electrón solo es del orden del 5 % (ver figura 3.3).

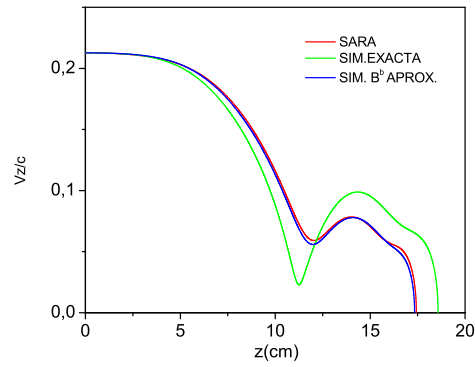


Figura 3.4: Comparación de la evolución espacial de la velocidad longitudinal del electrón: modelo SARA (línea roja), simulación numérica con campos exactos (línea verde) y simulación numérica con campo magnético estático aproximado (línea azul).

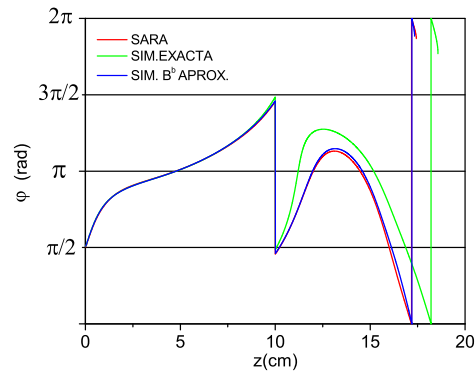


Figura 3.5: Comparación de la evolución espacial de la diferencia de fase φ : modelo SARA (línea roja), simulación numérica con campos exactos (línea verde) y simulación numérica con campo magnético estático aproximado (línea azul).

CAPÍTULO 4

EFECTO DEL CAMPO AUTOCONSISTENTE

Hasta el momento se ha realizado un estudio analítico y numérico del fenómeno *SARA* utilizando la aproximación de una sola partícula. Esta aproximación es válida en aquellos casos en donde la concentración electrónica del haz es tan baja que pueden despreciarse los campos que genera en comparación con los campos externos. El estudio del efecto del campo autogenerado (autoconsistente) solo puede hacerse por métodos experimentales o utilizando técnicas numéricas para su simulación computacional. A continuación se presenta el estudio numérico del efecto del campo autoconsistente sobre la interacción autoresonante espacial utilizando haces de electrones de diferente intensidad, utilizando el método PIC [44, 45].

4.1 Sistema Físico y Modelo de Simulación

El sistema físico y los parámetros para la realización de los experimentos numéricos son idénticos a los presentados en la sección 2.2 (ver figura 2.1): la cavidad cilíndrica es excitada con un modo TE_{112} de $2,45\text{ GHz}$ polarizado circularmente, con una amplitud de 7 kV/cm . El radio a y la longitud de la cavidad d son $4,54\text{ cm}$ y 20 cm , respectivamente. En este estudio se realizan aproximaciones en las expresiones de los campos eléctrico y magnético de microondas en la región $r < a/S_{11}$, partiendo de las

componentes cilíndricas (2.3)-(2.7), las cuales conducen a:

$$\vec{E}^{hf} = E_0^c(\hat{i}\cos\omega t + \hat{j}\sin\omega t)\sin(2\pi z/d), \quad (4.1)$$

and

$$\begin{aligned} \vec{B}^{hf} = & -E_0^c(K_{\parallel}/\omega)(\hat{i}\cos\omega t + \hat{j}\sin\omega t)\cos(2\pi z/d) \\ & -E_0^c(K_{\perp}/\omega)\cos(\theta - \omega t)\sin(2\pi z/d)\hat{k}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

en donde se ha elegido igual a cero la fase inicial del campo eléctrico. La componente B_z^{hf} no se toma en cuenta en las simulaciones porque es pequeña en comparación con la componente z del campo magnético estático $\vec{B}^b$; el cual es generado por un conjunto de bobinas con parámetros iguales a los de la tabla 2.1 de la sección 2.2. El cañón de electrones inyecta el haz de electrones en la cavidad a lo largo de su eje, el cual es tomado como un eje z .

El campo eléctrico autoconsistente es calculado en aproximación electrostática. De este modo, los efectos colectivos son incluidos en la ecuación de movimiento a través de los potenciales eléctricos obtenidos como una solución de la ecuación de Poisson en cada paso de tiempo $\Delta t = 2\pi/250\omega$:

$$\frac{\partial^2 \Phi(\vec{r}')}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r}')}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r}')}{\partial z'^2} = -\frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0}, \quad (4.3)$$

Donde: $0 \leq x' \leq L_x$, $0 \leq y' \leq L_y$, $0 \leq z' \leq d$, $x' = x + a$, $y' = y + a$, $z' = z$ y $L_x = L_y = 2a$. La Ec.(4.3) se puede escribir en forma adimensional, introduciendo las siguientes variables: $\Phi^* = \Phi/(-B_0 c r_{l0})$ y $\rho^* = \rho r_{l0}/(\varepsilon_0 B_0 c)$, donde $B_0 = m_e \omega / e$ es el campo magnético correspondiente a la resonancia clásica exacta del electrón y $r_{l0} = c/\omega$ es el radio de Larmor relativista, $x'^* = x'/r_{l0}$, $y'^* = y'/r_{l0}$ y $z'^* = z'/r_{l0}$. La densidad de carga en los puntos de malla $\rho(i\Delta x', j\Delta y', k\Delta z')$ se determina a partir de la distribución espacial usando el método *PIC* ([27], [28]).

La Ec.(4.3) es resuelta numéricamente con las condiciones de frontera de Dirichlet:

$$\Phi^*|_S = 0, \quad (4.4)$$

Donde S es la superficie definida por los planos $x'^* = 0, L_x^*$; $y'^* = 0, L_y^*$; $z'^* = 0, L_z^*$. Aquí $L_x^* = L_x/r_{l0}$, $L_y^* = L_y/r_{l0}$ y $L_z^* = d/r_{l0}$. La condición de frontera (4.4) es diferente a la usada en el modelo físico (ver figura 2.1); sin embargo, este cambio no perturba el campo eléctrico en la región ocupada por el haz de electrones. Estas condiciones de frontera son predeterminadas por el método de la transformada rápida de Fourier (FFT) aplicada para el cálculo de potenciales eléctricos.

El potencial normalizado y la densidad de carga son expandidos en una serie doble de Fourier:

$$f^*(x'^*, y'^*, z'^*) = \sum_{K_1, K_2=0}^{\infty} F_{K_1, K_2}(z'^*) \sin(K_1 \pi x'^*/L_x^*) \sin(K_2 \pi y'^*/L_y^*), \quad (4.5)$$

donde,

$$F_{K_1, K_2}(z'^*) = \frac{4}{L_x^* L_y^*} \int_0^{L_y^*} \int_0^{L_x^*} f^* \sin(K_1 \pi x'^*/L_x^*) \sin(K_2 \pi y'^*/L_y^*) dx'^* dy'^*. \quad (4.6)$$

y $F_{K_1, K_2}(z'^*) = U_{K_1, K_2}(z'^*)$ si $f^* = \Phi^*$, y $F_{K_1, K_2}(z'^*) = V_{K_1, K_2}(z'^*)$ si $f^* = \rho^*$.

Siguiendo un procedimiento similar al utilizado en el cálculo de potenciales $2D$ [35], se sustituyen las expresiones (4.5) y (4.6) en la ecuación (4.3) normalizada, obteniendo:

$$\frac{d^2 F_{K_1, K_2}(z'^*)}{dz'^{*2}} - \left(\frac{K_1^2}{L_x^{*2}} + \frac{K_2^2}{L_y^{*2}} \right) \pi^2 F_{K_1, K_2}(z'^*) = V_{K_1, K_2}(z'^*), \quad (4.7)$$

donde $K_1 = 0, 1, 2, \dots, \infty$ y $K_2 = 0, 1, 2, \dots, \infty$.

Ahora se puede discretizar el problema en las direcciones x' y y' mediante el truncamiento de la expansión de Fourier mediante la solución de la ecuación (4.7) para $K_1 = 0, 1, 2, \dots, I$ y $K_2 = 0, 1, 2, \dots, J$. Este truncamiento es equivalente a la discretización en las direcciones x' y y' con los puntos de malla equidistantes $(x'_i, y'_j) = (iL_x^*/I, jL_y^*/J)$. La discretización en la dirección z' se realiza dividiendo L_z^* en segmentos de igual longitud $\delta z'^* = L_z^*/(N+1)$ y aproximando la derivada d^2/dz'^{*2} en la forma de diferencia centrada de segundo orden. Por lo tanto, dado que $L_x^* = L_y^* = L^*$, para $K_1 = 0, 1, 2, \dots, I$, $K_2 = 0, 1, 2, \dots, J$ y $k = 1, 2, \dots, N$ se obtiene:

$$F_{K_1, K_2, k-1} - [2 + (K_1^2 + K_2^2) \eta^2] F_{K_1, K_2, k} + F_{K_1, K_2, k+1} = V_{K_1, K_2, k} (\delta z'^*)^2 \quad (4.8)$$

Aquí, $F_{K_1, K_2, k} \equiv F_{K_1, K_2}(z'_k)$, $V_{K_1, K_2, k} \equiv V_{K_1, K_2}(z'_k)$ y $\eta = \pi \delta z'^*/L^*$. Las condiciones de frontera en la dirección z' se reducen a:

$$F_{K_1, K_2, 0} = F_{K_1, K_2, N+1} = 0 \quad (4.9)$$

para $K_1 = 0, 1, 2, \dots, I$, $K_2 = 0, 1, 2, \dots, J$.

Con las aproximaciones realizadas, las expresiones (4.5) y (4.6) se reducen a:

$$f^*(i, j, k) = \sum_0^I \sum_0^J F_{K_1, K_2, k} \sin(K_1 i \pi / I) \sin(K_2 j \pi / J), \quad (4.10)$$

y

$$F_{K_1, K_2, k} = \frac{4}{IJ} \sum_0^I \sum_0^J f^*(i, j, k) \sin(K_1 i \pi / I) \sin(K_2 j \pi / J), \quad (4.11)$$

respectivamente.

Las expresiones (4.8) y (4.9) constituyen un conjunto de $(I+1)(J+1)$ ecuaciones matriciales desacopladas, en donde los valores $V_{K_1, K_2, k}$ se determinan a través de la Ec.(4.11) con $f^* = \rho^*$ utilizando la transformada rápida de Fourier (*FFT*). Esta ecuación matricial tridiagonal es resuelta para obtener los valores $U_{K_1, K_2, k}$. Finalmente, los valores $\Phi^*(i, j, k)$ son reconstruidos a partir de la (4.10) con $F_{K_1, K_2, k} = U_{K_1, K_2, k}$.

La componente x del campo autoconsistente en los puntos de malla (i, j, k) en el paso de tiempo $\tau^n = n\Delta\tau$, donde $\tau = \omega t$, se determina como:

$$(g_{i,j,k}^{sn})_x = \frac{\Phi^{*n}(i-1, j, k) - \Phi^{*n}(i+1, j, k)}{2\Delta x'^*}, \quad (4.12)$$

Las componentes y y z se determinan de un modo similar.

Retomando la ecuación relativista de Newton-Lorentz en diferencias finitas (Ver Ec.(2.15)):

$$\frac{\vec{U}^{n+1/2} - \vec{U}^{n-1/2}}{\Delta\tau} = \vec{g}^n + \frac{\vec{U}^{n+1/2} + \vec{U}^{n-1/2}}{2} \times \vec{b}^n, \quad (4.13)$$

Donde:

$\vec{U} = \vec{P}/m_e c$, $\vec{g}^n = \vec{E}^n/(-B_0 c)$, $\vec{b}^n = \vec{B}^n/(-B_0)$ y $\gamma = (1+U^2)^{1/2}$ es el factor relativista, n es el índice de paso de tiempo, $\vec{g}^n$ es el vector del campo eléctrico total constituido por los campos eléctricos de microonda $\vec{g}^{wn}$ y autoconsistente $\vec{g}^{sn}$, $\vec{g}^n = \vec{g}^{wn} + \vec{g}^{sn}$ y $\vec{b}^n$ es el campo magnético total constituido por los campos magnéticos de microonda $\vec{b}^{wn}$ y estático $\vec{b}^b$, $\vec{b}^n = \vec{b}^{wn} + \vec{b}^{sn}$. El paso de tiempo en la simulación se considera relativamente pequeño porque en las condiciones de resonancia los parámetros del movimiento del electrón cambian muy rápidamente. Se considera la ecuación relativista de movimiento no solo porque los electrones pueden alcanzar altas energías bajo las condiciones de autoresonancia espacial sino también por la sensibilidad de la resonancia ciclotrónica con la diferencia de fase entre la componente eléctrica del campo TE_{112} y la velocidad transversal del electrón. La ecuación (4.13) es resuelta numéricamente para todas las superpartículas utilizando el método de Boris [27]. Para el n -ésimo paso de la simulación, la coordenada x de la l -ésima superpartícula se calcula de acuerdo a la relación $x_l^{*n+1} = x_l^{*n} + U_{xl}^{n+1/2} \Delta\tau / \gamma_l^{n+1/2}$, donde $x^* = x/r_{l0}$. Las otras dos componentes se determinan de un modo similar.

La solución numérica simultánea de la ecuación de Newton-Lorentz y la ecuación de Poisson permite encontrar la trayectoria del haz, velocidad y energía de las partículas, así como la diferencia de fase entre la velocidad transversal las partículas y el campo eléctrico de microondas.

Para verificar los resultados, se calcula el balance de energía entre la energía de microondas trasferida al haz y el cambio de energía del haz para los mismos intervalos de tiempo.

El código computacional se elaboró en lenguaje de programación C++, en el cual se utilizó la librería *fftw* para el cálculo del potencial eléctrico usando Transformada rápida de Fourier⁷. La visualización de la simulación computacional se hizo a través de la librería gráfica *OpenGL*⁸.

⁷<http://www.fftw.org/>

⁸<http://www.opengl.org/>

4.2 Resultados y discusión

Para analizar la influencia del campo eléctrico autoconsistente sobre las condiciones de autoresonancia ciclotrónica espacial, se realizaron tres experimentos numéricos: (a) $I_0 = 0,1 A$ de densidad electrónica $n = 8,5 \times 10^8 cm^{-3}$; (b) $I_0 = 1 A$, $n = 8,5 \times 10^9 cm^{-3}$; y 3) $I_0 = 5 A$, $n = 4,25 \times 10^{10} cm^{-3}$. Los otros parámetros: $R_{Beam} = 0,2 cm$, $W_{inj} = 14 keV$ y el tamaño de la malla : $I \times J \times N = 128 \times 128 \times 100$ se tomaron iguales en todas las simulaciones. La rata de inyección utilizada fue de $4,25 \times 10^3$ superpartículas por ciclo de microondas. La simulación computacional se detiene cuando una pequeña fracción de superpartículas (10^2) alcanzan la posición donde su velocidad longitudinal es cero o impactan la cavidad.

La Fig.4.1 muestra la diferencia de fase entre la velocidad transversal de los electrones y el campo de microondas después de 14.05 ciclos de microondas para el caso de una haz de 0.1 A (puntos rojos) y la evolución espacial de la fase para el movimiento de una sola partícula presentado en la sección 2.2 (línea verde).

Se puede ver que en el punto de inyección la diferencia de fase sigue influenciada por

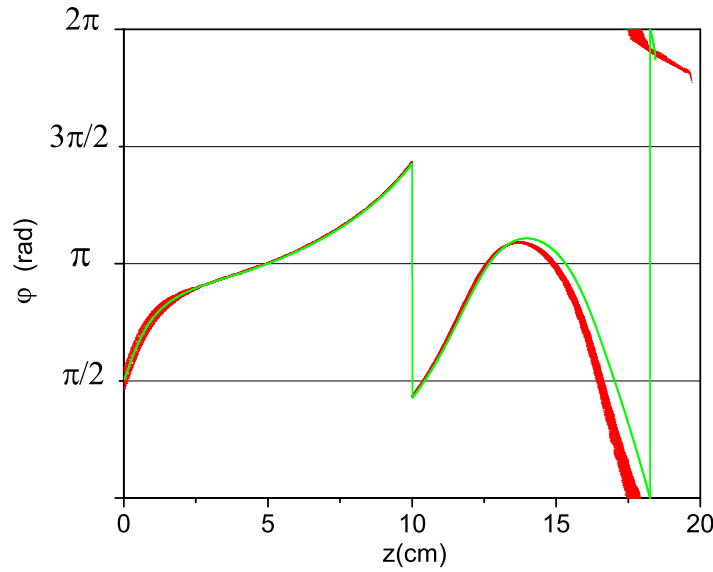


Figura 4.1: Diferencia de fase entre la velocidad transversal de los electrones del haz de 0.1-A y la componente eléctrica del campo de microondas después de 14.05 ciclos de microondas.

la componente magnética del campo de microondas; sin embargo el campo eléctrico autoconsistente produce una ligera desviación de la fase, casi imperceptible, de algunas

partículas alrededor de $\varphi = \pi/2$. En la región $0 < z < 2,5 \text{ cm}$ los electrones entran en fase rápidamente por el efecto del campo de microondas, acercándose al límite de la resonancia exacta. El comportamiento ilustrado por el haz de electrones de 0.1 A no difiere considerablemente al presentado por una partícula simple, razón por la cual el hecho de que el número de electrones en la banda de aceleración no sea mayor que el obtenido (72.7%) no puede ser atribuido a ningún efecto desfavorable del campo auto-consistente (Ver Fig.4.1). En este caso la focalización del haz de electrones no presenta ningún problema.

Fig.4.2 muestra la comparación del parámetro $\beta = v/c$ después de 14,05 ciclos de mi-

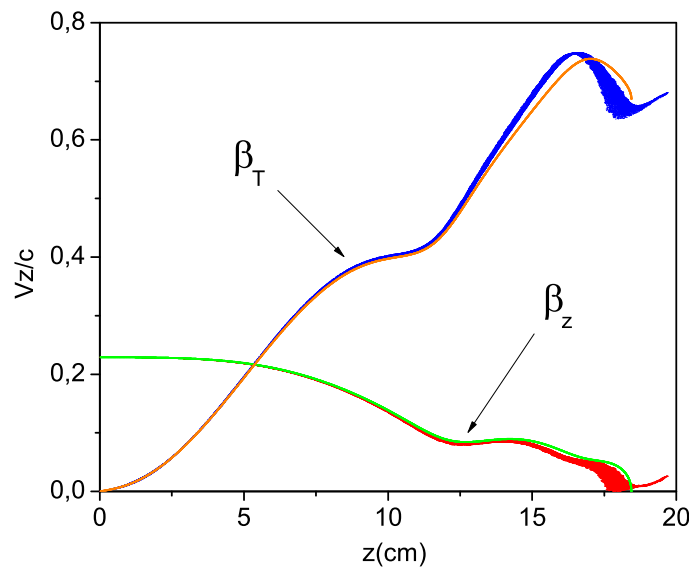


Figura 4.2: Componentes transversal β_T y longitudinal β_Z de la velocidad de los electrones del haz de 0.1-A después de 14.05 ciclos de microondas.

croondas asociado con el movimiento transversal (β_T , puntos azules) y longitudinal (β_Z , puntos rojos) con los resultados obtenidos con aproximación de una sola partícula (Ver Fig.2.10). En este caso el campo eléctrico autoconsistente contribuye al mejoramiento de las condiciones de aceleración en la región $10 < z < 17 \text{ cm}$ y los electrones del haz ganan energía de 260 KeV (Ver Fig.4.3).

Para el caso de un haz de 1 A se obtiene un comportamiento similar al presentado por el haz de 0.1 A; sin embargo, el efecto del campo autoconsistente es más apreciable. Fig.4.4 muestra la diferencia de fase entre las velocidades transversales de los electrones y el campo de microondas después de 9,72 periodos de microondas. En este caso casi la

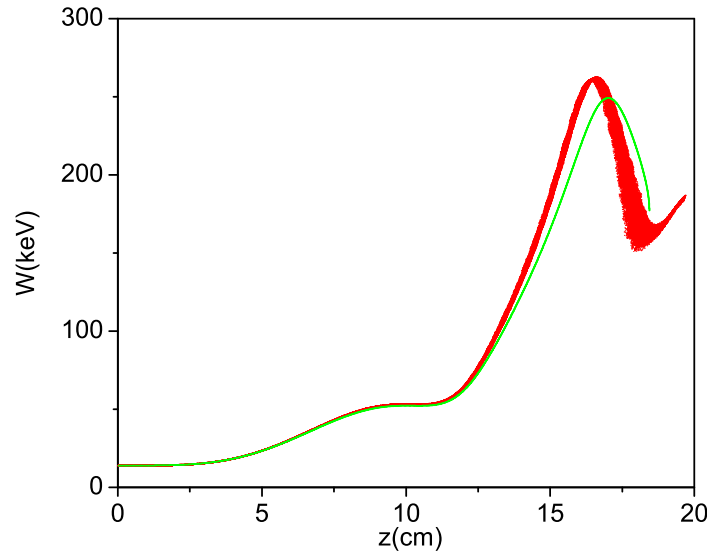


Figura 4.3: Energía de los electrones del haz de 0.1-A después de 14.05 ciclos de microondas.

totalidad de los electrones permanecen en la banda de aceleración (92.27 %); A pesar de ello se produce una desviación significativa de la diferencia de fase entre la velocidad transversal de los electrones y la componente eléctrica del campo de microondas en el punto de inyección comparada con el caso del haz de 0.1 A; sin embargo, a medida que el campo eléctrico de microondas se incrementa conforme los electrones se alejan del punto de inyección, se produce una focalización de la fase en $z = 2,6$ cm. A pesar de ello, la dispersión en la fase vuelve a ser evidente en las región $z > 10$ cm, la cual está relacionada con las variaciones en las velocidades de los electrones asociadas al campo autoconsistente (ver Figs. 4.5, 4.7 y 4.8). La combinación de estos efectos originan la dispersión en la energía del haz, hasta alcanzar un valor máximo del orden del 30 % en $z = 14$ cm, pero luego se reduce hasta alcanzar un 5 % en la posición $z = 18$ cm, donde los electrones alcanzan la máxima energía (ver Fig.4.6).

Las figuras 4.7 y 4.8 muestran la topografía de la magnitud de la componente transversal y la componente z del campo autoconsistente, respectivamente; en planos transversales a lo largo del eje del sistema: $z = 0,2$ cm, $d/4$, $d/2$, $3d/4$ después de 9.72 ciclos de microondas en el caso del haz de 1.0 A. Las máximas intensidades del campo eléctrico transversal en dichos planos son 0.7, 1.1, 2.0 y 1.25 kV/cm, respectivamente; mientras que las máximas intensidades del campo eléctrico longitudinal son 1.1, 0.16, 0.8 y 0.7 kV/cm, respectivamente.

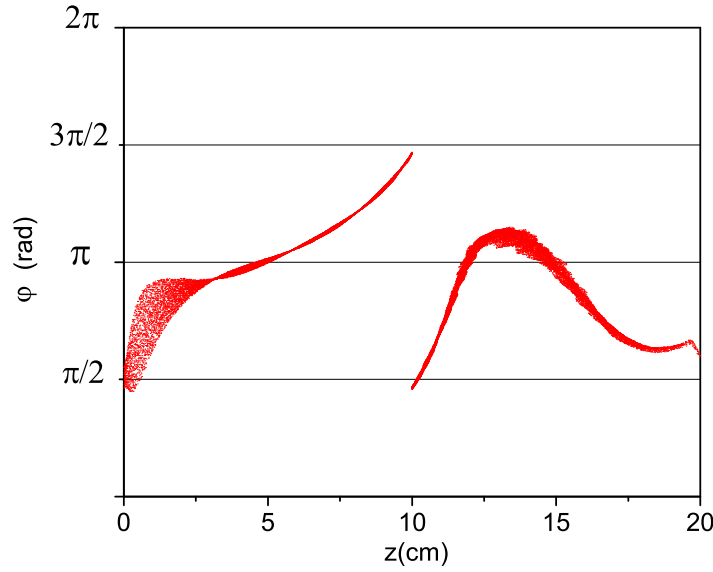


Figura 4.4: Diferencia de fase entre la velocidad transversal de los electrones del haz de 1.0 A y la componente eléctrica del campo de microondas después de 9.72 ciclos de microondas.

Para el caso de un haz de 5A, la diferencia de fase después de 6,6 ciclos de microondas se muestra en la figura 4.9. Se puede ver que en el punto de inyección la diferencia de fase se encuentra en todos los valores posibles $[0, 2\pi]$ porque en la posición $z = 0$ el campo eléctrico de microondas es nulo y los electrones se encuentran solo bajo la influencia del campo de microondas y el campo eléctrico autoconsistente. En este caso, este último es tan intenso que fuerza a los electrones a moverse en todas las direcciones radiales, abarcando todos los ángulos con respecto al eje del haz. Posteriormente, los electrones se presenta la focalización de la fase en $z = 4$ cm, aunque esta nos es exacta para todos los electrones debido a la fuerte influencia del campo eléctrico autoconsistente.

En la región $5 < z < 10$ cm los electrones son desacelerados por la componente longitudinal del campo autoconsistente, la fuerza diamagnética y porque los electrones se encuentran fuera de la *zona de aceleración longitudinal*. Los electrones se acumulan en la posición $z = 10$ cm, lo cual resulta en un incremento de la velocidad longitudinal en la región $z > 10$ cm (ver Fig. 4.5).

Para el movimiento transversal se observan algunas oscilaciones causadas por la componente transversal del campo eléctrico autoconsistente, las cuales causan el movimiento azimutal de los electrones alrededor del centro del haz. Sin embargo, estas oscilaciones

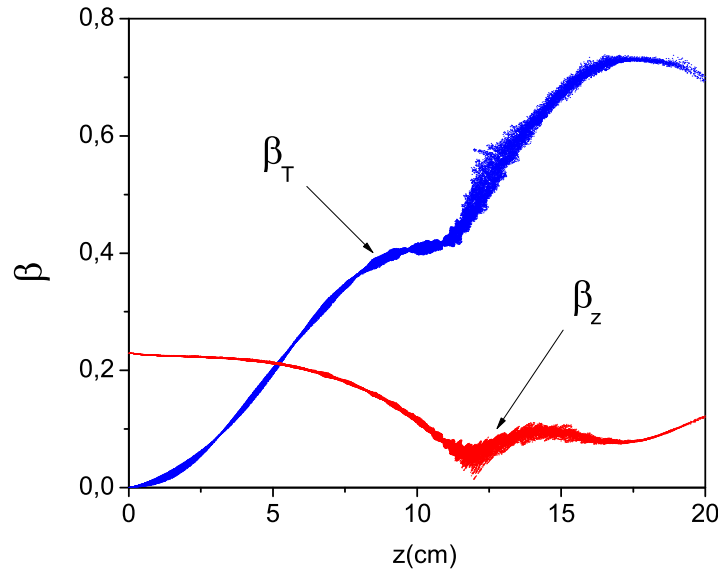


Figura 4.5: Componentes transversal β_T y longitudinal β_z de la velocidad de los electrones del haz de 1-A después de 9.72 ciclos de microondas.

no afectan significativamente las condiciones de resonancia (ver Fig.4.9).

Fig.4.11 muestra la energía de las partículas después de 6.6 ciclos de microondas para el caso 3). Se puede notar que en la región $z < 2,5$ cm se presenta una disminución de la energía de los electrones, la cual es causada por la influencia de la componente longitudinal del campo autoconsistente. Nótese que aquí el efecto de la acumulación de los electrones en $z = 10$ cm es mas pronunciado que el caso del haz de 1 A, impulsando los electrones son impulsados hasta valores cercanos a la velocidad de inyección. Este efecto es poco deseable porque disminuye el tiempo de interacción entre los electrones y la onda, lo cual se manifiesta por el hecho de que la energía máxima alcanzada por los electrones es solo 125 keV. En este caso, la dispersión de la energía es mas significativa.

La figura 4.12 muestra la distribución de energía en el instante en que los primeros electrones alcanzan el plano de retorno o impactan la cavidad para los haces de 0.1, 1.0 y 5.0 A. En los dos primeros casos se observa un pico en 50 keV debido a que la energía del electrón se mantiene aproximadamente constante en el rango de 8 a 12 cm (Ver Figs. 4.3 y 4.6). Este pico es mas pronunciado en el caso del haz de 1.0 A debido a que la componente longitudinal del campo eléctrico autoconsistente reduce considerablemente la velocidad de los electrones alrededor de la posición $z=12.5$ cm (ver Fig. 4.5), razón por la cual se encuentran mayor tiempo cerca del nodo del campo eléctrico de microon-

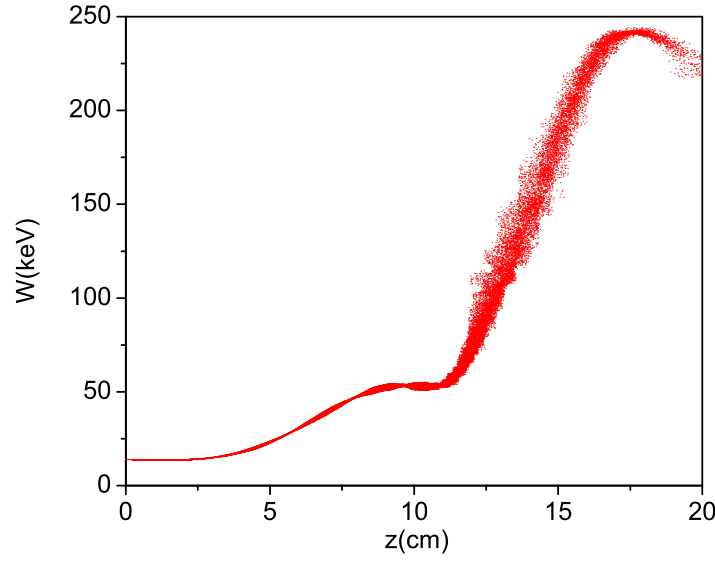


Figura 4.6: Energía de los electrones del haz de 1.0 A después de 9.72 ciclos de microondas.

das donde no hay transferencia de energía por parte de este campo. En el caso del haz de 5.0 A, la anchura del pico es significativa debido a la dispersión de la energía causada por el campo eléctrico autoconsistente (Ver Fig.4.11). Se debe resaltar que casi toda la totalidad de los electrones son acelerados hasta alcanzar una energía de 260 keV, 240 keV y 125 keV en los haces de 0.1 A, 1.0 A y 5.0 A, respectivamente. Para verificar los resultados obtenidos se realizó la comparación entre el cambio de energía del haz de electrones y la energía transferida por el campo eléctrico autoconsistente y el campo de microondas. La coincidencia de las curvas demuestra que los resultados obtenidos son confiables en el marco de la aproximación electrostática (Ver Fig.4.13).

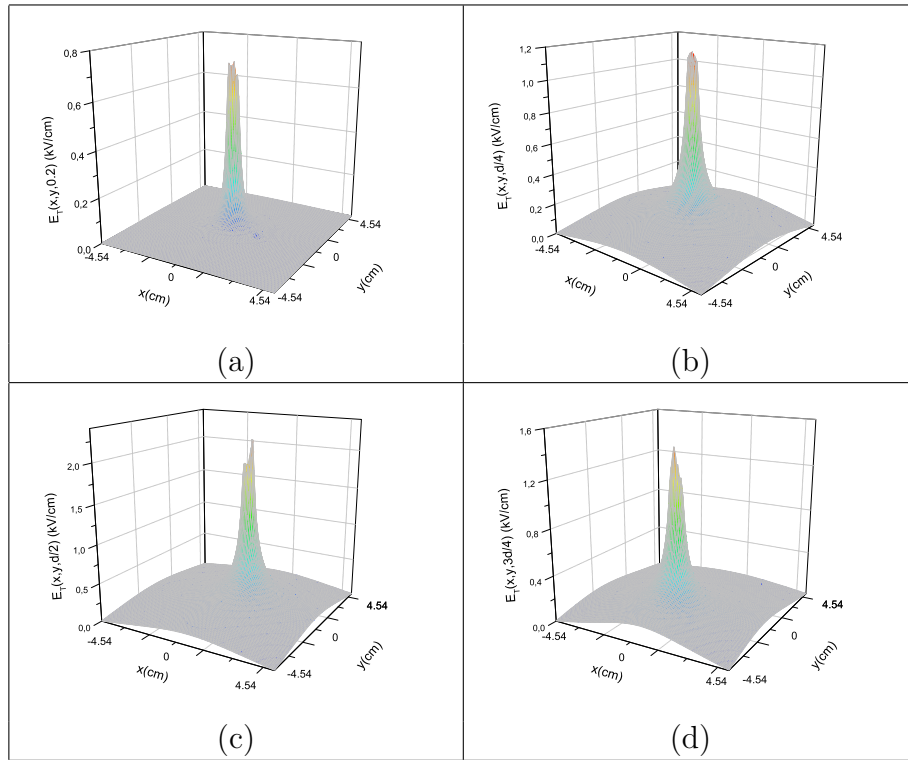


Figura 4.7: Magnitud de la componente transversal del campo eléctrico autoconsistente despues de 9.72 ciclos de microondas para el caso del haz de 1 A en los planos: (a) $z=0.2$ cm, (b) $z=d/4$, (c) $z=d/2$ y (d) $z=3d/4$.

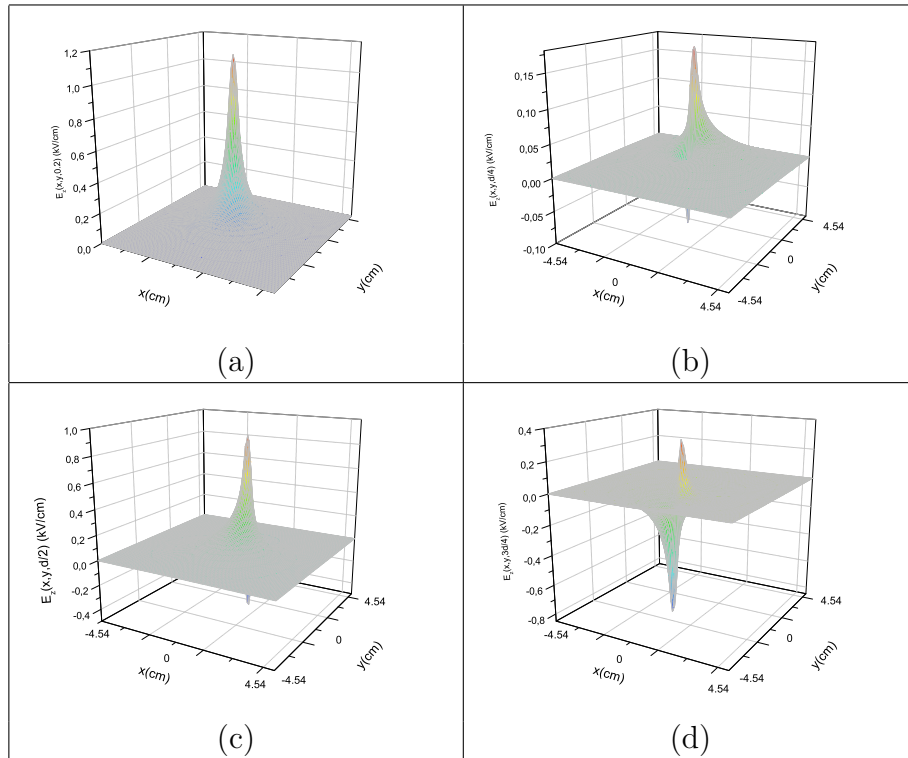


Figura 4.8: Componente longitudinal del campo eléctrico autoconsistente despues de 9.72 ciclos de microondas para el caso del haz de 1.0 A en los planos: (a) $z=0.2$ cm, (b) $z=d/4$, (c) $z=d/2$ y (d) $z=3d/4$.

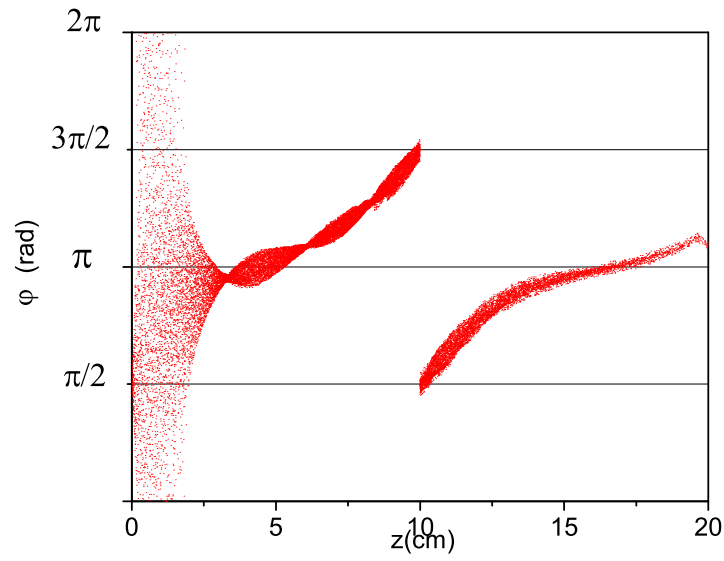


Figura 4.9: Diferencia de fase entre la velocidad transversal de los electrones del haz de 5.0 A y la componente eléctrica del campo de microondas después de 6.6 ciclos de microondas.

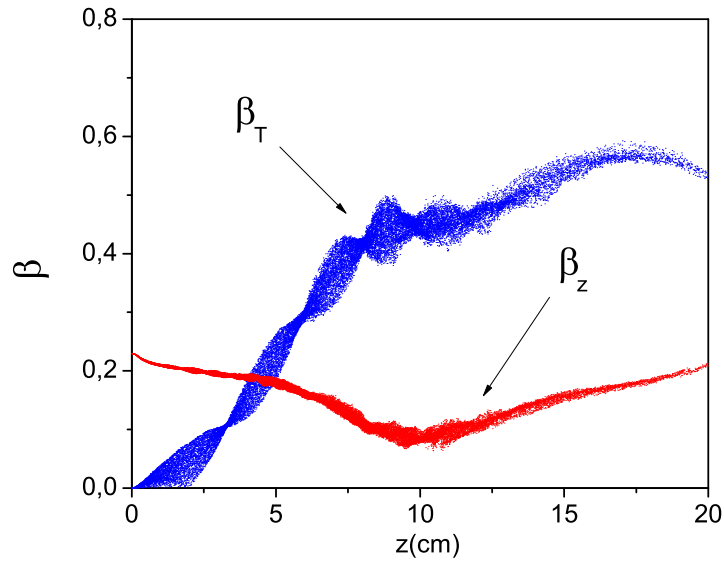


Figura 4.10: Componentes transversal β_T y longitudinal β_z de la velocidad de los electrones del haz de 5-A después de 6.6 ciclos de microondas.

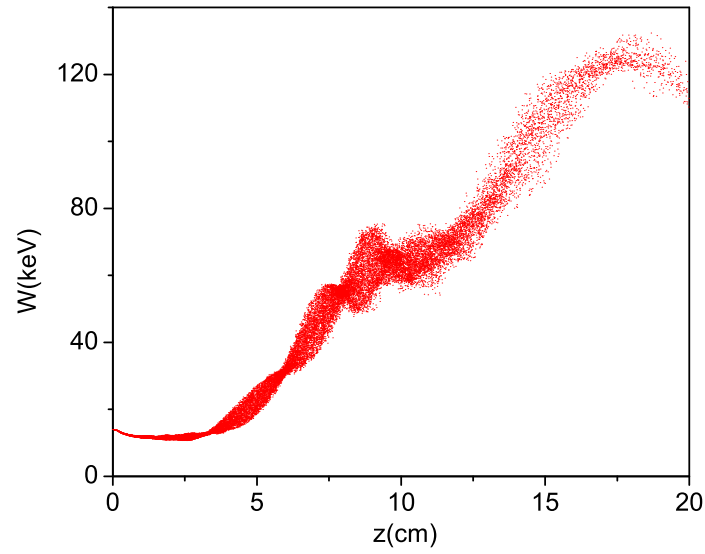


Figura 4.11: Energía de los electrones del haz de 5.0 A después de 6.6 ciclos de microondas.

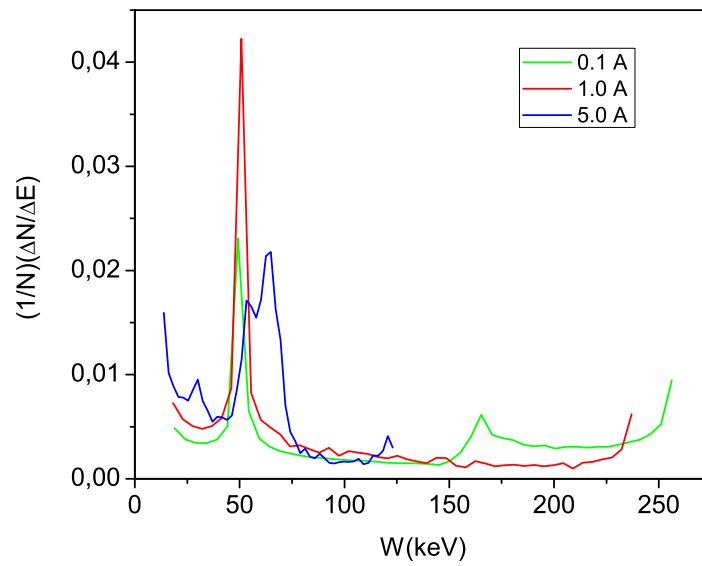


Figura 4.12: Distribución de energía en los haces de 0.1 A (línea verde), 1.0 A (línea roja) y 5.0 A (línea azul) después de 14.05, 9.72 y 6.6 ciclos de microondas, respectivamente.

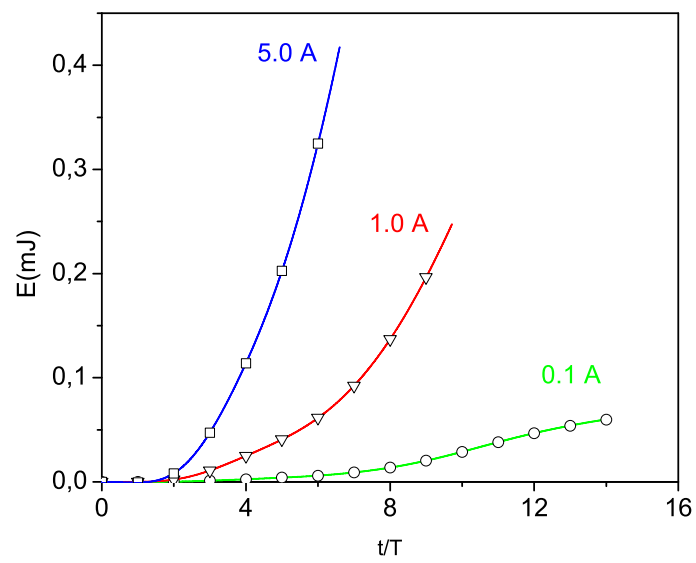


Figura 4.13: Comparación entre la energía transferida por el campo eléctrico al haz de 0.1 A (línea verde), 1.0 A (línea roja) y 5.0 A (línea azul); y el cambio de energía como una función del tiempo (círculos, triángulos y cuadrados, respectivamente).

CAPÍTULO 5

EFECTO DE UN CAMPO ELECTROSTÁTICO SOBRE LA EFICIENCIA DE LA ACELERACIÓN *SARA* DE UN ELECTRÓN

5.1 Modelo de simulación

Como se ha mencionó anteriormente, el primer factor limitante del mecanismo *SARA* es la fuerza diamagnética; la cual está asociada a la no homogeneidad longitudinal del campo magnetostático y que se opone al avance de los electrones hacia regiones de mayor intensidad del campo magnético. Una forma de aumentar la efectividad de la aceleración consiste en asistir el movimiento longitudinal de los electrones mediante un campo electrostático que puede ser generado mediante el aislamiento de las tres superficies que conforman la cavidad resonante y sometiendo las caras circulares a una diferencia de potencial, como se muestra en la figura 5.1, en donde se asume que el espesor de la capa aislante es despreciable comparado con la longitud de onda asociada al campo de microondas.

En este caso, la simulación se realiza de un modo similar al descrito en la sección 2.2, con la única diferencia que el campo eléctrico normalizado $\vec{g}$ que aparece en la ecuación de movimiento (2.14) ahora representa la superposición del campo electrostático que ha sido generado en la cavidad y el campo de microondas descrito por las expresiones (2.3)-(2.7), el cual no se ve afectado por la inclusión de la capa aislante.

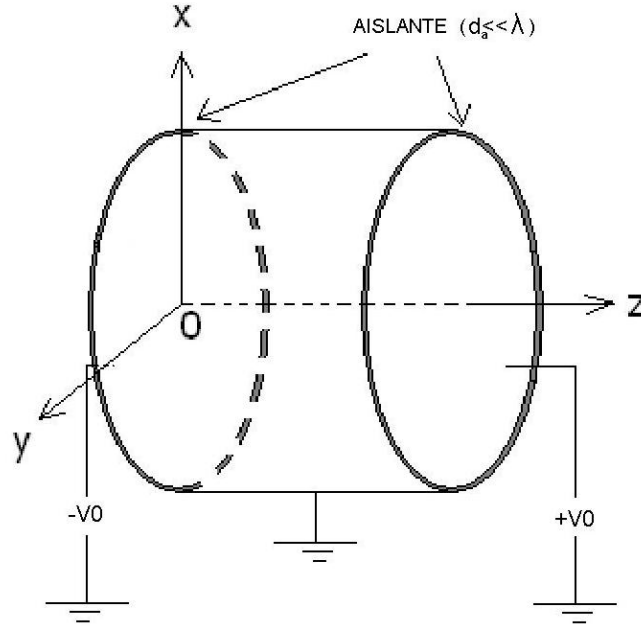


Figura 5.1: Cavidad resonante con campo electrostático.

Para calcular el campo electrostático primero se calcula el potencial eléctrico correspondiente $\Phi^{el}(r, z)$ en los puntos de una malla rectangular partiendo de la ecuación de Laplace ; la cual, después de expresarla en diferencias finitas centradas de segundo orden, conduce a [36]:

$$\Phi^{el}(i, j) = \frac{1/2}{1 + (\Delta z/\Delta r)^2} \left\{ (\Delta z/\Delta r)^2 \left[\frac{2i+1}{2i} \Phi^{el}(i+1, j) + \frac{2i-1}{2i} \Phi^{el}(i-1, j) \right] + \Phi^{el}(i, j+1) + \Phi^{el}(i, j-1) \right\} \quad (5.1)$$

para $i \neq 0$.

Mientras que:

$$\Phi^{el}(0, j) = \frac{1/2}{1 + 2(\Delta z/\Delta r)^2} \left\{ \Phi^{el}(0, j+1) + \Phi^{el}(0, j-1) + 4(\Delta z/\Delta r)^2 \Phi^{el}(1, j) \right\} \quad (5.2)$$

donde $\Phi^{el}(i, j)$ corresponde al potencial eléctrico calculado en el punto $(i\Delta r, j\Delta z)$; Δr y Δz corresponden a los tamaños de los pasos en dirección radial y axial, respectivamente.

Para determinar Φ^{el} en todos los puntos de la malla se resuelven las ecuaciones (5.1)-(5.2) numéricamente, utilizando el método de iterativo de sobrerrelajación sucesiva (SOR) con condiciones de frontera de Dirichlet determinadas por el valor del potencial

en cada superficie de la cavidad.

Las componentes cilíndricas del campo electrostático en los puntos de malla que no se encuentran en la frontera⁹, se determinan a partir de las expresiones:

$$E_r^{el}(i, j) = -\frac{\Phi^{el}(i+1, j) - \Phi^{el}(i-1, j)}{2\Delta r} \quad (5.3)$$

y

$$E_z^{el}(i, j) = -\frac{\Phi^{el}(i, j+1) - \Phi^{el}(i, j-1)}{2\Delta z}. \quad (5.4)$$

A partir de estos valores se determinan las componentes rectangulares del campo electrostático, de un modo similar al descrito en la sección 2.2 para el cálculo de las componentes rectangulares del campo magnetostático.

⁹El campo eléctrico en los puntos sobre la frontera se determina utilizando diferencias finitas adelantadas, o retrasadas, de primer orden.

5.2 Resultados y discusión

En el caso estudiado, una cavidad de $132,9 \text{ cm}$ de radio y 200 cm de longitud se excita en el modo TE_{111} polarizado circularmente de 100 MHz y 3 kV/cm de amplitud. Los potenciales asociados a cada superficie de la cavidad se consideran como $V(z = 0) = -V_0$, $V(z = L_c) = V_0$ y $V(r = r_c) = 0$. En la figura 5.2 se muestra el perfil bidimensional del potencial electrostático en unidades de V_0 .

En los experimentos numéricos, se consideran tres campos electrostáticos, obtenidos

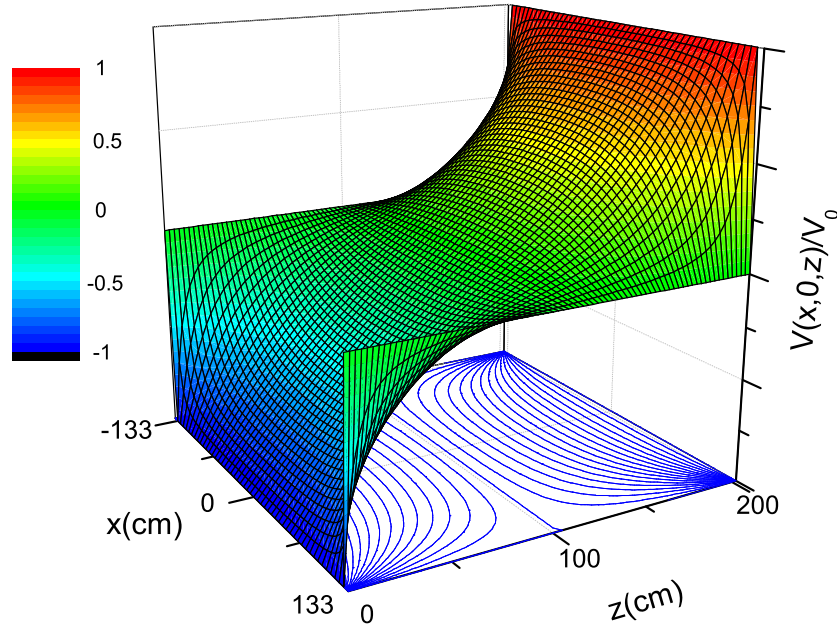


Figura 5.2: Perfil del potencial electrostático en el plano $y = 0$.

con $V_0 = 10, 15 \text{ y } 20 \text{ kV}$, respectivamente.

En todos los casos se consideran electrones inyectados en la cavidad a lo largo del eje z con una energía de 50 keV . El campo magnetostático producido por las bobinas se describe por la expresión:

$$\vec{B}(r, z) = (-1/2)[r dB_z(z)/dz]\hat{r} + B_z(z)\hat{z}, \quad (5.5)$$

en la cual

$$B_z(z) = B_0[\gamma_0 + b(z)], \quad (5.6)$$

donde γ_0 representa el factor relativista asociado a la velocidad del electrón en $z = 0$ y B_0 el valor del campo magnético correspondiente a la resonancia clásica. El perfil longitudinal del campo magnético se considera lineal $b(z) = \alpha z$, donde $\alpha = \gamma_0(R_m - 1)/L_c$. L_c representa la longitud de la cavidad resonante y $R_m = 1,8$ la relación de espejo.

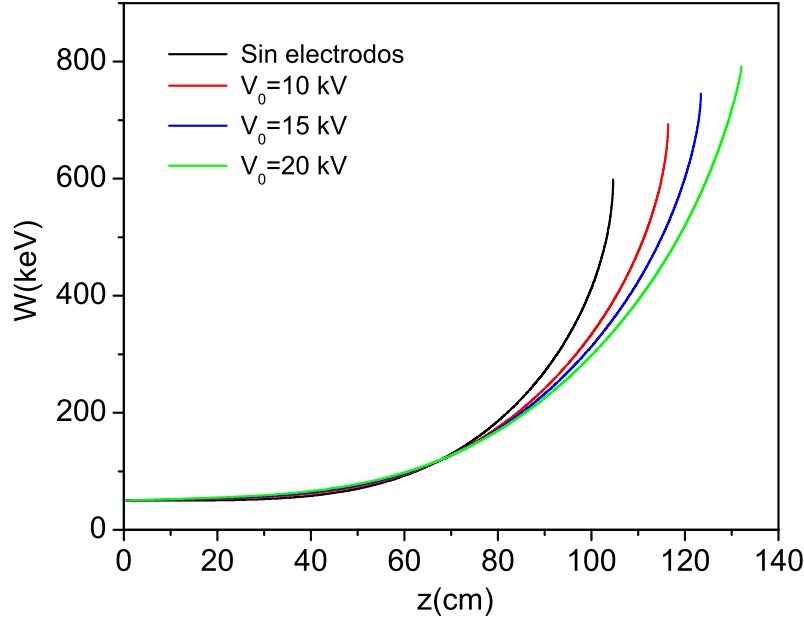


Figura 5.3: Evolución espacial de la energía del electrón para diferentes caídas de potencial entre las superficies circulares de la cavidad: $\Delta V = 0, 20, 30$ y 40 kV .

La figura 5.3 muestra que el campo electrostático favorece el movimiento longitudinal contrarestando la fuerza diamagnética; lo cual permite prolongar el tiempo de la interacción resonante. A pesar de que el campo electrostático actúa como un acelerador lineal, los cambios en las energías asociados a este efecto solo son del orden de $\Delta V/2$ en todos los casos considerados, debido a que los electrones se detienen aproximadamente en la mitad de la cavidad resonante (ver figuras 5.2 y 5.3); por lo tanto, el incremento adicional en la energía del electrón es producido por el efecto del campo de microondas. Nótese que en ausencia de campo electrostático el electrón alcanza una energía de 600 keV , la cual se incrementa hasta 700 keV cuando se aplica una diferencia de potencial de 20 kV . A medida que se incrementa la diferencia de potencial, el campo

de microondas transfiere mas energía hasta alcanzar 800 keV para el caso de 40 kV . El efecto acelerador del campo electrostático se manifiesta en la figura 5.4; sin embargo, tanto en presencia de campo electrostático como en ausencia de este, las partículas no logran alcanzar el extremo opuesto de la cavidad debido a que su velocidad longitudinal disminuye hasta cero en los planos $z = 104 \text{ cm}$ (sin campo) y $z = 116, 122 \text{ y } 132 \text{ cm}$ (con campo), por la acción de la fuerza diamagnética.

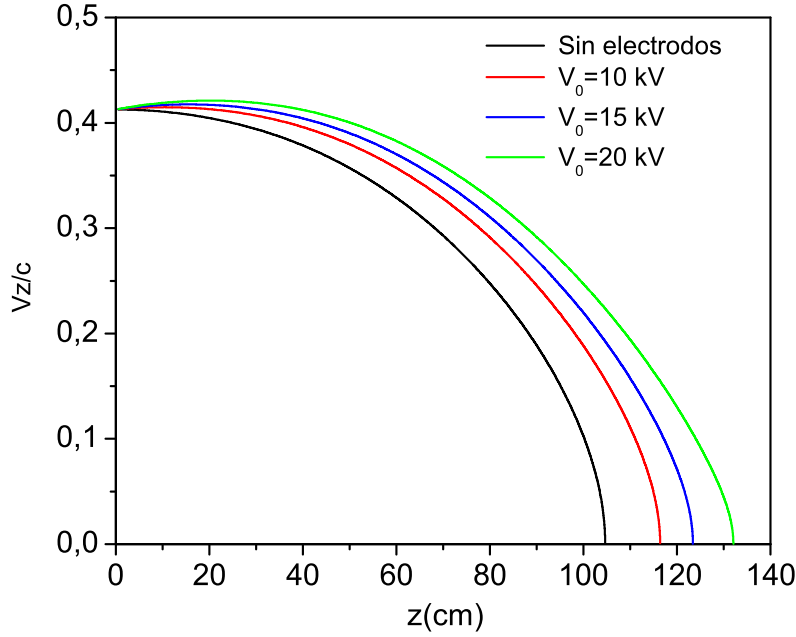


Figura 5.4: Evolución espacial de la velocidad longitudinal del electrón para diferentes caídas de potencial entre las superficies circulares de la cavidad: $\Delta V = 0, 20, 30 \text{ y } 40 \text{ kV}$.

Es importante mencionar que en ausencia del campo electrostático no fue posible alcanzar mayores energías variando los parámetros del experimento; sin embargo, el campo electrostático permite elevar la energía del haz por medio del ajuste de la diferencia de potencial entre las caras opuestas de la cavidad, de tal manera que se puede usar todo el espacio de la cavidad para la aceleración autoresonante de los electrones. El hecho que el haz no alcance la pared opuesta de la cavidad evidencia que el campo electrostático todavía no es óptimo y los parámetros asociados al campo de microondas y la energía de inyección deben ser modificados; sin embargo, es claro que la energía máxima alcanzada por el electrón se puede aumentar significativamente.

CONCLUSIONES

1) Se demostró mediante experimentos numéricos que la idea de la aceleración de electrones en condiciones de resonancia ciclotrónica electrónica en campos magnetostáticos no homogéneos que crecen principalmente en la dirección de propagación de los electrones es viable.

2) Al elegir el perfil del campo magnetostático para la realización del mecanismo *SARA* se debe tener en cuenta que este debe garantizar el mantenimiento de las condiciones cercanas a la resonancia exacta de los electrones, es decir en la *banda de aceleración* $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$.

3) Se presentó un estudio analítico y numérico de un nuevo método de aceleración autoresonante ciclotrónica de electrones en campos magnetostáticos no homogéneos (mecanismo *SARA*). Se demostró que los resultados obtenidos analíticamente coinciden muy bien (con una precisión de 5 %) con las soluciones exactas, en situaciones de baja no homogeneidad transversal del campo magnetostático.

4) En los mecanismos de aceleración autoresonante, cuanto más cerca se encuentren las partículas cargadas de las condiciones de resonancia exacta, $\varphi = \pi$, el proceso de transferencia de energía de microondas es más eficiente; sin embargo en el mecanismo *SARA* dicha condición no garantiza mayor eficacia de la aceleración de las partículas debido a que la fuerza diamagnética que actúa sobre las partículas se incrementa más rápido produciendo una mayor reducción de su velocidad longitudinal en comparación con la situación en donde el movimiento se produce en condiciones más alejadas de la resonancia exacta, lo cual disminuye el tiempo de interacción con la onda y por consiguiente el de ganancia de energía. Este efecto combinado con la influencia que tiene el campo magnético de microondas sobre el movimiento longitudinal de las partículas son determinantes en la energía máxima alcanzada por las partículas. Precisamente esta es una de las razones por las cuales definir un criterio que permita obtener los parámetros

para lograr una aceleración óptima no es trivial.

5) Se encontró la expresión analítica para el campo magnetostático que garantiza la aceleración de electrones en el mecanismo *SARA* como una función de la frecuencia, amplitud y modo de microondas; energía y velocidad longitudinal del electrón, así como de una función preestablecida $\varphi(z)$ que define la diferencia de fase entre la velocidad transversal del electrón y el campo eléctrico de microondas en función de la coordenada longitudinal z del electrón. El comportamiento de esta función debe ser tal que cumpla la condición inicial $\varphi(0) = \pi/2$, la cual toma en cuenta el efecto del campo magnético de microondas sobre la diferencia de fase inicial. En el caso $p \neq 1$, también se debe cumplir la condición $\varphi(z_k^-) - \varphi(z_k^+) = \pi$, donde $z_k = k(z/p)$ y $k = 1, 2, 3, \dots, p-1$, para considerar el salto en la diferencia de fase causado por la presencia de los nodos del campo eléctrico de microondas en las posiciones z_k . Las derivadas $d\varphi/d\xi$ y $d^2\varphi/d\xi^2$ deben ser continuas en todo el espacio, incluso en las posiciones z_k en donde la discontinuidad debe ser removible, es decir $d\varphi(z_k^-)/d\xi = d\varphi(z_k^+)/d\xi$ y $d^2\varphi(z_k^-)/d\xi^2 = d^2\varphi(z_k^+)/d\xi^2$.

6) Se estudió numericamente el movimiento autoresonante en aproximación de una partícula así como los casos de haces de electrones con corrientes hasta 5A y energías iniciales longitudinales en el rango de 10-15 keV. Las simulaciones muestran que los haces de electrones pueden ser acelerados bajo las condiciones de autoresonancia espacial sin desfocalización y efectos de dispersión de energía significativos si los parámetros del haz y los de los campos externos se eligen apropiadamente.

7) Se mostró que el campo electrostático longitudinal puede compensar efectivamente la fuerza diamagnética de tal manera que la eficacia de la aceleración *SARA* aumenta alrededor del 30 % con parámetros no optimizados, inclusive.

8) El mecanismo *SARA* es eficiente energéticamente debido a que utiliza ondas electromagnéticas estacionarias y la aceleración de los electrones a lo largo de sus trayectorias helicoidales se produce principalmente en condiciones cercanas a la resonancia exacta.

9) La rápida focalización de la diferencia de fase φ para cada electrón en la vecindad del punto de inyección resulta ventajoso porque evita el problema de la incertidumbre de la fase del campo eléctrico de microondas, convirtiendolo así en un aspecto irrelevante en el proceso de aceleración autoresonante.

10) El modelo de sistema físico propuesto para la realización del mecanismo *SARA*

es relativamente simple puesto que involucra campos de microondas estacionarios y campos magnetostáticos, razón por la cual lo hace atractivo para su implementación práctica.

11) El estudio realizado es el primer paso del proceso de establecimiento de una base teórica de un nuevo tipo de aceleradores ciclicos compactos que permitan alcanzar energías del orden de decenas de Mega-electron-voltios.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A.A. Kolomenskii and A. N. Levedek, *Sov. Phys. Dokl.*,**7**, 492 (1962).
- [2] V. Ya. Davydovskii, *The possibility of accelerating charged particles by electromagnetic waves in a constant magnetic field*, *Sov. Phys. JETP.*,**16**, 629 (1963).
- [3] C. Roberts and S. Buchsbaum, *Motion of a charged particle in a constant magnetic field and a transverse electromagnetic wave propagating along the field*, *Phys. Rev.*,**135**, A381 (1964).
- [4] H. R. Jory and A. W. Trivelpiece, *Charged-particle motion in large-amplitude fields*, *J. Appl. Phys.*,**39**, 3053 (1968).
- [5] A. Loeb and L. Friedland, *Autoresonant laser accelerator*, *Phys. Rev. A*, **33**, 1828 (1986).
- [6] A. Loeb, L. Friedland and S. Eliezer, *Autoresonant laser acceleration of guided “quasineutral” electrons-positrons beams*, *Phys. Rev. A*, **35**, 1692 (1987).
- [7] K. H. Tsui, *Electron beam acceleration by cyclotron-autoresonance interaction*, *Phys. Rev. E*, **51**, 649 (1995).
- [8] Y. Salamin, F. Faisal and C. Keitel, *Exact analysis of ultrahigh laser-induced acceleration of electrons by cyclotron autoresonance*, *Phys. Rev. A*, **62**, 053809 (2000).
- [9] R. Pakter, I. L. Caldas, F. Couto, T. Caetano and F. B. Rizzato, *Chaotic dynamics induced by space-charge Waves in cyclotron resonance accelerators*, *Phys. Rev. E*, **54**, 4202 (1996).
- [10] W. H. Miner, P. Vitello and A. T. Drobot, *Theory and numerical simulation of a TE_{111} gyroresonant accelerator*, *IEEE Trans. Micr. Tech.*,**MTT-32**, 1293 (1984).

- [11] D. B. McDermott, D. S. Furuno and N. C. Luhmann, Jr., *Production of relativistic, rotating electron beams by gyroresonant RF acceleration in a TE_{111} cavity*, J.Appl. Phys., **58**, 4501 (1985).
- [12] Q. F. Li, S. Y. Park and J. L. Hirshfield, *Theory of gyrotron traveling-wave amplifiers*, IEEE Trans. Micr. Tech., **MTT-34**, 1044 (1986).
- [13] A. P. Ishkov, Izv. Vusov, Fizičeska, **2**, 176 (1970).
- [14] C. Chen, Phys. fluids B, **3**, 2933 (1991).
- [15] M. L. Sloan and W. E. Drummond, *Autoresonant accelerator concept*, Phys. Rev. Lett., **31**, 1234 (1973).
- [16] K. S. Golovanivsky, *Autoresonant acceleration of electrons at nonlinear ECR in a magnetic field which is smoothly growing in time*, Phys. Scr., **22**, 126 (1980).
- [17] K. S. Golovanivsky, *Gyromagnetic autoresonance at ultrarelativistic energies*, Phys. Scr., **25**, 491 (1982).
- [18] K. S. Golovanivsky, *The gyromagnetic autoresonance*, IEEE Trans. Plasma Sci., **PS-11**, 28 (1983).
- [19] K. S. Golovanivsky, *Gyromagnetic autoresonance. Phase stability in a photon regime*, Phys. Scr., **29**, 464 (1984).
- [20] K. Golovanivsky, V. Dougar-Jabon and D. Reznikov, Phys. Rev. E, **52**, 2969 (1995).
- [21] O. Gal, *GYRAC: A compact, cyclic electron accelerator*, IEEE Trans. Plasma Sci., **17**, 622 (1989).
- [22] R. Shpitalnik, J. L. Hirshfield and L. Friedland, *Isochronous electron cyclotron acceleration*, Part. Accel., **25**, 1 (1989).
- [23] R. Shpitalnik, C. Cohen, F. Dothan and L. Friedland, *Autoresonance microwave accelerator*, J.Appl. Phys., **70**, 1101 (1991).
- [24] B. Hafizi, P. Sprangle and J. L. Hirshfield, *Electron beam quality in a cyclotron autoresonance accelerator*, Phys. Rev. E, **50**, 3077 (1994).
- [25] M. A. LaPointe, R. B. Yoder, C. Wang, A. K. Ganguly and J. L. Hirshfield, *Experimental demonstration of high efficiency electron cyclotron autoresonance acceleration*, Phys. Rev. Lett., **76**, 2718 (1996).

- [26] V. Milantév, *Cyclotron autoresonance and its applications*, Phys. Uspekhi, **40**, 1 (1997).
- [27] C. Birdsall and A. Langdon, *Plasma physics via computer simulation*, (Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 1991).
- [28] R. Hockney and J. Eastwood, *Computer simulation using particles*. (Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 1988).
- [29] G. Lapenta, *Particle In Cell Method- A brief description of the PIC Method*, (Centrum voor Plasma astrofysica, Katholieke Universiteit Leuven).
- [30] G. Lapenta, F. Inoya, J. U. Brachbioll, *Particle in cell simulation od glow discharges in complex geometries*, IEEE Trans. Plasma Sci., **23**, 769-779 (1995).
- [31] D. Bruhwiler et al, *Particle-in-cell simulations of Plasma accelerators and electron-neutral collisions*, Phys. Rev. ST-AB, **4**, 101302 (2001).
- [32] N. Luhmann and A. Trivelpiece, *Properties of an rf produced magnetically confined nonneutral hot electron plasma*, Phys. Fluids, **21**, 2038 (1978).
- [33] V. Dougar-Jabon, A. Umnov and D. Suescun, Rev. Sci. Instrum., **73**, 629 (2002).
- [34] V. Dougar-Jabon, A. Umnov and D. Suescun, *Properties of plasma in a ECR minimum-B trap via numerical modeling*, Phys. Scr., **70**, 38 (2004).
- [35] R. Fitzpatrick, *Computational physics: An introductoty course*, (Texas University, 2006).
- [36] M. N. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetism*, (ISBN 0-8493-1395-3), Sec. 3.10.
- [37] B. Terzic, I. Pogorelov and C. Bohn, *Particle-in-Cell beam dynamics simulations with a wavelet-based Poisson solver*, Phys. Rev. ST-AB, **10**, 034201 (2007).
- [38] O. Manuilenko and J. Lee, *Theoretical modelling of an X-ray source based on stochastic acceleration of charged particles at electron cyclotron resonance*, plasma sources Sci. Tech., **14**, 98 (2005).
- [39] J. Hirshfield and V. Granatstein, *The electron cyclotron maser—and historical survey*, IEEE transaction on Microwave theory and techniques, **25**, 6, 522 (1977).

- [40] K. F. Sergeichev, D. M. Karfidov and N. A. Lukina, *Electron cyclotron resonance acceleration of electrons to relativistic energies by a microwave field in a mirror trap*, Plasma Phys. Reports, **33**, 455 (2007).
- [41] A. Martínez, A. Umnov and V. Dugar-Zhabon, *Simulación de la aceleración de electrones por la onda TE_{113} de 2,45 Ghz*, Rev. Col. de Fís., **38 2**, 858 (2006).
- [42] V. Dugar-Zhabon, **E. A. Orozco** and A. Umnov, *Modeling of electron cyclotron resonance acceleration in a stationary inhomogeneous magnetic field*, Phys. Rev. ST-AB, **11**, 041302 (2008).
- [43] V. Dugar-Zhabon and **E. A. Orozco**, *Cyclotron spatial autoresonance acceleration model*, Phys. Rev. ST-AB, **12**, 041301 (2009).
- [44] V. Dugar-Zhabon and **E. A. Orozco**, *Simulation of electron beam acceleration by electromagnetic field in static inhomogeneous magnetic field*, J. Plasma Fusion Res. SERIES, **8**, (2009). (Ponencia presentada en: “XIV International Congress on Plasma Physics”, 4-12 September, 2008, Fukuoka, Japan).
- [45] V. Dugar-Zhabon and **E. A. Orozco**, *Three-Dimensional Particle-In-Cell Simulation of Spatial Autoresonance Electron-Beam Motion*, IEEE transaction on Plasma Science. **38**, 10, 2980 (2010). (Ponencia presentada en: “XXI International Conference on Numerical Simulations of Plasma”, 6-9 October, 2009, Lisbon, Portugal)