

Álgebra máx-plus y una aplicación a los Cuadrados Latinos

Lina Liceth Palomino Niño

Trabajo de Grado para optar al título de Matemática

Director

Rafael Fernando Isaacs Giraldo

Magister en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2019

A mis padres, Lina y Leo.

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos

- ★ Al profesor **Rafael F. Isaacs** que, como director de este trabajo, me ha orientado, apoyado, corregido y motivado a continuar con mis estudios.
- ★ A mis padres, **Lina** y **Leonardo** que, desde el primer momento en el que decidí empezar mi etapa universitaria me han apoyado y ayudado lo suficiente para que pudiera cumplir uno de mis sueños.
- ★ A mis hermanos **Karen** y **Camilo** por su inmenso cariño y apoyo incondicional.
- ★ A **Ludwing** que durante los últimos tres años me ha acompañado y motivado a ser cada vez mejor.
- ★ A todo aquel que durante los últimos años me brindó su amistad. En especial agradezco a mis amigos que hice en la universidad, por su apoyo moral, por darme fuerzas en momentos difíciles y por todas las alegrías que pasamos. Mis mejores recuerdos de la universidad son gracias a ustedes.
- ★ A cada profesor que contribuyó en mi formación como matemática.

Tabla de Contenido

Introducción	10
1. Preliminares	12
1.1. Conceptos básicos en teoría de grafos	12
2. Álgebra máx-plus	19
2.1. Definiciones y propiedades algebraicas básicas	19
2.2. Matrices y vectores	25
2.3. Matrices y Grafos	33
2.4. Valores y vectores propios	39
3. Álgebra máx-plus y cuadrados latinos	61
3.1. Cuadrados latinos	61
3.2. Propiedades de los cuadrados latinos	63
3.3. Valores y vectores propios	69
Referencias Bibliográficas	74

Lista de Figuras

Figura 1.	Grafo con dos subgrafos fuertemente conexos.	14
Figura 2.	Grafo asociado a la matriz A .	15
Figura 3.	Grafo asociado a la matriz B .	19
Figura 4.	Grafo asociado a la matriz A .	34
Figura 5.	$G(B)$ y $G^c(B)$ del Ejemplo 2.46 respectivamente.	45
Figura 6.	Grafo asociado a la matriz $G(A_\lambda)$	47

Resumen

Título: Álgebra máx-plus y una aplicación a los Cuadrados Latinos *

Autor: Lina Liceth Palomino Niño **

Palabras Clave: Álgebra máx-plus, Grafos, Valores y vectores propios, Cuadrados Latinos.

Descripción: El álgebra máx-plus se define sobre el conjunto $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dotado con las operaciones $a \oplus b = \max\{a, b\}$ y $a \otimes b = a + b$, estas operaciones son asociativas, conmutativas y distributivas. En este conjunto, el elemento neutro es $\varepsilon = -\infty$ y el elemento unidad es $e = 0$. Con estas operaciones, \mathbb{R}_ε tiene estructura de semianillo que además es idempotente respecto a \oplus .

En el primer capítulo se introducen algunos resultados preliminares sobre la teoría de grafos. En el segundo capítulo se presentan conceptos básicos y se estudian algunas propiedades algebraicas que satisfacen las operaciones \oplus y \otimes en el conjunto \mathbb{R}_ε . Se definen las matrices y vectores, se estudia la relación que existe entre los grafos y las matrices ya que, toda matriz cuadrada puede ser representada mediante un grafo ponderado y los pesos de los caminos de dicho grafo pueden ser interpretados mediante las potencias de la matriz ya mencionada, finalmente se hallan los valores y vectores propios de una matriz cuadrada por medio de su grafo asociado y se muestra que toda matriz irreducible tiene valor propio único.

En el capítulo tres se definen los cuadrados latinos, se muestran algunas propiedades que satisfacen en el álgebra máx-plus como que todo cuadrado latino es una matriz irreducible y se halla su único valor propio con sus respectivos vectores propios asociados.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Rafael Fernando Isaacs Giraldo, Magister en Matemáticas.

Abstract

Title: Max-plus Algebra and an application to Latin Squares *

Author: Lina Liceth Palomino Niño **

Keywords: Max-plus algebra, Graphs, Eigenvalues and eigenvectors, Latin squares.

Description: In max-plus algebra we work with the set $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ with operations $a \oplus b = \max\{a, b\}$ and $a \otimes b = a + b$, these operations are associative, commutative and distributive. The additive and multiplicative identities are taken to be $\varepsilon = -\infty$ and $e = 0$, respectively. The set \mathbb{R}_ε with these operations is an idempotent semiring.

In the first chapter we introduce some preliminary results about graph theory. In the second chapter, basic concepts are introduced and basic properties of max-plus algebra are studied. We define the matrices and vectors in max-plus algebra and studied the relation between matrices and graphs over the max-plus semiring. The basic observation is that any square matrix can be translated into the weighted graph and that products and powers of matrices over the max-plus semiring have entries with a nice graph-theoretical interpretation. Finally, we study how to find the eigenvalues and eigenvectors of a square matrix and show that any irreducible matrix has one and only one eigenvalue.

In the third chapter we define the Latin square, we show some structural properties, prove that any Latin square is an irreducible matrix over max-plus algebra and we find the unique eigenvalue and its respective associated eigenvectors.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Rafael Fernando Isacs Giraldo, Magister en Matemáticas.

Introducción

El álgebra máx-plus aparece por primera vez en el año 1956 en el artículo “*Representation of events in nerve sets and finite automata*” (Kleene, 1956), del matemático Stephen Cole Kleene. Este álgebra se define sobre el semianillo $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dotado con las operaciones $x \oplus y = \max\{x, y\}$ y $x \otimes y = x + y$ las cuales son conmutativas, asociativas y distributivas.

El álgebra máx-plus ha encontrado aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas como combinatoria, optimización, geometría algebraica y en áreas como la física y ciencias de la computación. También es usada en teoría de control, programación de maquinas, procesos de eventos discretos, telecomunicaciones, entre otros, ver (Baccelli et al., 1993), (Cuninghame-Green, 1979), (Gaubert, 1997). Muchas de las ecuaciones que modelan el comportamiento de estas aplicaciones no son lineales en el álgebra convencional pero se ha encontrado que sí lo son en el álgebra máx-plus; esta es una de las principales razones por las cuales es tan útil en el desarrollo de estas áreas.

Teoremas clásicos del álgebra convencional tienen análogo en el álgebra máx-plus, matemáticos como Cuninghame-Green (Cuninghame-Green, 1979), Gaubert (Gaubert, 1997), Gondran and Minoux (Gondran and Minoux, 1984) han contribuido en la teoría del álgebra máx-plus lineal que se conoce hasta hoy. Ellos han estudiado conceptos como solución de sistemas de ecuaciones lineales, dependencia e independencia lineal y valores y vectores propios, estos últimos son el centro de estudio de este trabajo, cuyo objetivo tiene por estudiar la relación que tienen con la teoría de grafos en el álgebra máx-plus.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en el primer capítulo se presentan algunas definiciones y resultados en la teoría de grafos que ayudarán al desarrollo de este trabajo. En el segundo capítulo se inicia con algunas propiedades algebraicas básicas del álgebra máx-plus, se definen las matrices y vectores, se presenta la noción de grafo asociado a una matriz y su relación con los valores y vectores propios que esta tiene. En el tercer capítulo se definen los cuadrados latinos en el álgebra máx-plus; se estudian algunas de sus propiedades estructurales y se presentan los valores y vectores propios que dichos cuadrados poseen.

1. Preliminares

En este capítulo se presentan algunas definiciones y resultados básicos de la teoría grafos que son importantes para el desarrollo de este trabajo. Estas definiciones y resultados se pueden encontrar en (Baccelli et al., 1993) y (Brualdi and Cvetkovic, 2008).

1.1. Conceptos básicos en teoría de grafos

Definición 1.1 *Un grafo dirigido G , es un par (V, E) donde V es el conjunto de vértices y $E \subset V \times V$ es un conjunto de pares ordenados de vértices llamados aristas. La palabra ordenado significa que las aristas (i, j) y (j, i) se pueden distinguir. Para $(i, j) \in E$, i es llamado el vértice inicial y j el vértice final de la arista (i, j) .*

Definición 1.2 *Un camino p que va del vértice i a un vértice j , en un grafo, es una sucesión de aristas $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_{k+1})$ donde $i_1 = i$ e $i_{k+1} = j$. Al camino p se le denota por $i_1 i_2 \dots i_{k+1}$. Si todos los vértices i_1, i_2, \dots, i_{k+1} son distintos, entonces p es llamado camino elemental. Se dice que p tiene longitud k , donde k es el número de aristas y se denota $|p|_l$.*

Observación El conjunto de todos los caminos de i a j que tienen longitud k es denotado por $P(i, j, k)$.

Definición 1.3 *Un circuito de longitud k , es un camino elemental cerrado, es decir, un camino $i_1 i_2 \dots i_{k+1}$ donde $i_1 = i_{k+1}$. Cuando un circuito esté formado por una sola arista será llamado bucle.*

Observación Los caminos en $G(A)$ se pueden unir de diferentes formas para dar lugar a nuevos caminos. Por ejemplo, considere los caminos $p = i_1i_2i_3$ y $q = i_4i_5i_6i_7$ en $G(A)$, entonces un nuevo camino en $G(A)$ es dado por $p \circ q = i_1i_2i_3i_4i_5i_6i_7$. La operación \circ es llamada *concatenación de caminos*.

Definición 1.4 Dado un grafo $G = (V, E)$, un grafo $G' = (V', E')$, se dice que es subgrafo de G si $V' \subset V$ y si E' consiste en el conjunto de aristas de G las cuales tienen su vértice inicial y final en V' .

Definición 1.5 Se dice que un grafo $G = (V, E)$ es fuertemente conexo si para cualquier $i, j \in V$, con $i \neq j$, existe un camino que conecta a i con j .

Definición 1.6 Sean $i, j \in V$ dos vértices de un grafo. Se dice que i se comunica con j , denotado como $i \mathcal{R} j$ si y solo si, existe un camino de i a j y un camino de j a i .

Entonces V se divide en clases de equivalencia V_1, V_2, \dots, V_q con respecto a \mathcal{R} . Note que cada V_r , con $r \in \{1, \dots, q\}$ corresponde a un subgrafo $G_r = (V_r, E_r)$ que es fuertemente conexo, donde E_r es un subconjunto de E con aristas que contienen tanto su vértice inicial como el vértice final en V_r .

Definición 1.7 Los subgrafos que corresponden a las clases de equivalencia determinadas por \mathcal{R} son los subgrafos fuertemente conexos de $G = (V, E)$.

Ejemplo 1.8 El grafo que se presenta en la Figura 1. tiene dos subgrafos fuertemente conexos que corresponden a los subgrafos compuestos por los vértices $\{1, 2, 3, 4\}$ y $\{5, 6, 7\}$ respectivamente.

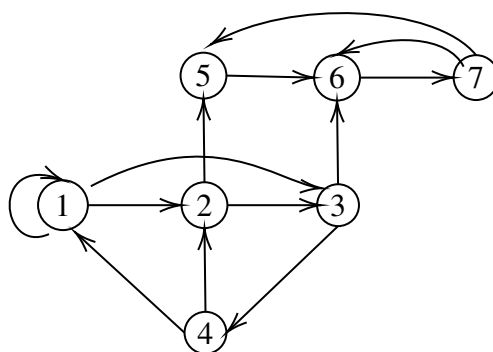


Figura 1. Grafo con dos subgrafos fuertemente conexos.

Definición 1.9 Un grafo $G = (V, E)$ es llamado ponderado si a cada elemento $(i, j) \in E$ se le asocia un peso $w(i, j)$.

Desde ahora se hablará siempre de grafos dirigidos ponderados que por brevedad, serán llamados simplemente como grafos.

Definición 1.10 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. El grafo asociado a la matriz A es un grafo $G(A) = (V, E)$ que tiene n vértices. Los vértices en $G(A)$ son denotados como $1, 2, \dots, n$. Se dice que hay una arista del vértice i al vértice j siempre que $a_{ji} \neq 0$ con $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

El peso de un camino $p = i_1 i_2 i_3 \dots i_k i_{k+1}$ en $G(A)$ es denotado como $|p|_w$ y se define como el producto de los pesos de todas las aristas que conforman a p .

Ejemplo 1.11 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

el grafo asociado $G(A)$ a la matriz A se muestra en la Figura 2. Si se considera el circuito $p = 1321$ se tiene que $|p|_w = -2$.

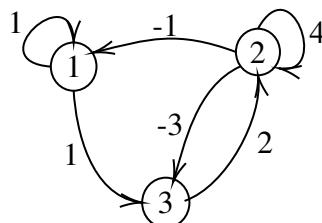


Figura 2. Grafo asociado a la matriz A .

Definición 1.12 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se dice que A es irreducible si no existe una matriz de permutación P de orden n tal que

$$P^T A P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

donde A_{11} y A_{22} son matrices cuadradas de tamaño $k \times k$ y $(n - k) \times (n - k)$ respectivamente con $1 \leq k \leq n - 1$. Si existe tal matriz de permutación P diremos que A es reducible.

Cabe resaltar que una matriz de permutación P es una matriz cuadrada de orden n que tiene exactamente un 1 en cada fila y cada columna y 0 en las demás componentes. Estas matrices corresponden a permutaciones de la siguiente manera: Sea $\sigma = k_1 k_2 \dots k_n$ una permutación

de $\{1, 2, \dots, n\}$. Sea $P = [P]_{ij}$ una matriz de orden n definida como

$$[P]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k_i \\ 0 & \text{si } j \neq k_i. \end{cases}$$

Entonces P es una matriz de permutación.

Ejemplo 1.13 Considere la siguiente matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\sigma = 31452$, la matriz de permutación P queda definida como

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$P^T B P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz B es reducible.

Teorema 1.14 Una matriz cuadrada A es irreducible si y solo si su grafo asociado $G(A)$ es fuertemente conexo.

Demostración Para la primera implicación veamos que si $G(A)$ no es fuertemente conexo entonces A es reducible. Si $G(A)$ no es fuertemente conexo, existen vértices distintos, digamos

i, j tales que no existe un camino que va de i a j . Sea \mathcal{I} el conjunto de vértices que se pueden conectar por un camino que inicia en i y \mathcal{J} el conjunto de los que no. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, k\}$ y $\mathcal{J} = \{k+1, k+2, \dots, n\}$. Con esta numeración de vértices la matriz A tiene estructura de bloque triangular superior.

Para el recíproco veamos que si A es reducible entonces el grafo asociado $G(A)$ no es fuertemente conexo. Si A es reducible, existe una matriz de permutación P tal que

$$P^T A P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

donde A_{11} y A_{22} son matrices cuadradas de tamaño $k \times k$ y $(n-k) \times (n-k)$ respectivamente con $1 \leq k \leq n-1$. Si los vértices $\{1, 2, \dots, k\}$ en $G(P^T A P)$ corresponden a las primeras k filas de $P^T A P$ y $\{n-k, n-k+1, \dots, n\}$ a las filas restantes, entonces $G(P^T A P)$ no es fuertemente conexo, ya que $a_{ji} = 0$ si $1 \leq i \leq k$ y $k+1 \leq j \leq n$. Con esta nueva numeración de filas y columnas de A se concluye que $G(A)$ no es fuertemente conexo. \square

Ejemplo 1.15 *Considere la matriz B dada en el Ejemplo 1.13. El grafo asociado $G(B)$ se muestra en la Figura 3. Este grafo no es fuertemente conexo porque no existe una arista que comunique al vértice 2 con el vértice 4, por Teorema 1.14 la matriz B no es irreducible.*

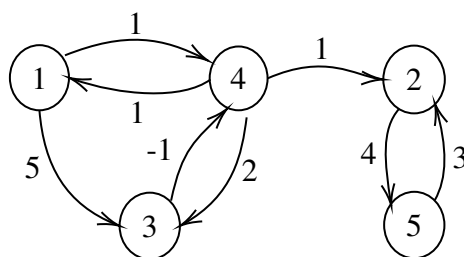


Figura 3. Grafo asociado a la matriz B .

2. Álgebra máx-plus

En este capítulo se estudiarán algunas de las propiedades algebraicas que satisfacen las operaciones que definen a la estructura conocida como álgebra máx-plus, se incluyen los conceptos de matrices, vectores y operaciones entre estos; también se muestran algunos resultados de teoría de grafos. Estas definiciones y resultados se pueden encontrar en (Heidergot et al., 2005) y (Butkovič, 2010).

2.1. Definiciones y propiedades algebraicas básicas

El *álgebra máx-plus* se define sobre el conjunto $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ donde \mathbb{R} es el conjunto de los números reales y el elemento menos infinito se denota como $\varepsilon = -\infty$.

Definición 2.1 *Dados $x, y \in \mathbb{R}_\varepsilon$. Definimos las operaciones suma y producto, denotadas \oplus y \otimes respectivamente, como:*

$$x \oplus y = \max\{x, y\} \text{ y } x \otimes y = x + y.$$

Ejemplo 2.2 $20 \oplus 8 = \max\{20, 8\} = 20$ y $-5 \otimes 32 = -5 + 32 = 27$

En el álgebra máx-plus, $\varepsilon = -\infty$ es el elemento neutro ya que

$$x \oplus \varepsilon = \max\{x, -\infty\} = \max\{-\infty, x\} = \varepsilon \oplus x = x, \forall x \in \mathbb{R}_\varepsilon$$

y el elemento unidad es $e = 0$

$$x \otimes e = x + 0 = 0 + x = e \otimes x = x, \forall x \in \mathbb{R}_\varepsilon.$$

Es importante resaltar que la operación \otimes tiene prioridad sobre \oplus . Considere el siguiente ejemplo:

$$15 \otimes 2 \oplus -9 \otimes 2$$

Note que $(15 \otimes 2) \oplus (-9 \otimes 2) = 17$ mientras que $15 \otimes (2 \oplus -9) \otimes 2 = 19$.

A continuación damos una lista de las propiedades algebraicas que se satisfacen en el álgebra máx-plus.

Proposición 2.3 *Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}_\varepsilon$ las operaciones \oplus y \otimes satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Conmutativa:* $x \oplus y = y \oplus x$ y $x \otimes y = y \otimes x$,
2. *Asociativa:* $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ y $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$,
3. *Distributiva de \otimes sobre \oplus :* $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$,
4. *Elemento neutro:* $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$,

5. *Elemento unidad:* $x \otimes e = e \otimes x = x$,

6. *Inverso multiplicativo:* Si $x \neq \varepsilon$, entonces existe un único elemento y tal que $x \otimes y = e$,

7. *Elemento absorbente respecto a la multiplicación:* $x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$,

8. *Idempotente respecto a la suma:* $x \oplus x = x$.

Demostración Se presenta la demostración de la propiedad 3, ya que las demás propiedades se consideran inmediatas.

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}_\varepsilon$, se sigue que

$$\begin{aligned} x \otimes (y \oplus z) &= x + \text{máx}\{y, z\} \\ &= \text{máx}\{x + y, x + z\} \\ &= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z). \end{aligned}$$

□

Definición 2.4 Sean $x \in \mathbb{R}_\varepsilon$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Se define la n -ésima potencia del elemento x como:

$$x^{\otimes n} = \underbrace{x \otimes x \otimes x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_{n\text{-veces}}.$$

Cuando $n = 0$, entonces $x^{\otimes 0} = e$.

Observación La exponenciación se reduce a la multiplicación usual, es decir:

$$x^{\otimes n} = \underbrace{x + x + x + x + \dots + x}_n = n \times x.$$

Ejemplo 2.5

$$9^{\otimes 8} = 8 \times 9 = 72,$$

de forma similar, se tiene para el caso en el que n sea un número negativo:

$$3^{\otimes -5} = -5 \times 3 = -15.$$

Ahora se presentan las leyes de los exponentes en el álgebra máx-plus:

Proposición 2.6 Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}_\varepsilon$, se cumple:

$$1. x^{\otimes n} \otimes x^{\otimes m} = x^{\otimes (n \otimes m)},$$

$$2. (x^{\otimes n})^{\otimes m} = x^{\otimes (n^{\otimes m})},$$

$$3. x^{\otimes 1} = x,$$

$$4. x^{\otimes n} \otimes y^{\otimes n} = (x \otimes y)^{\otimes n}.$$

Demostración Para $m, n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}_\varepsilon$, entonces:

$$1. x^{\otimes n} \otimes x^{\otimes m} = n \times x + m \times x = (n + m) \times x = x^{\otimes (n \otimes m)},$$

$$2. (x^{\otimes n})^{\otimes m} = (n \times x)^{\otimes m} = m \times (n \times x) = (m \times n) \times x = x^{\otimes (n^{\otimes m})},$$

$$3. x^{\otimes 1} = 1 \times x = x,$$

$$4. x^{\otimes n} \otimes y^{\otimes m} = n \times x + n \times y = n \times (x + y) = (x \otimes y)^{\otimes n}.$$

□

Continuando con el estudio de las propiedades del álgebra máx-plus, encontramos que es un ejemplo de una estructura algebraica llamada *semianillo*.

Definición 2.7 *Un semianillo es un conjunto no vacío \mathcal{R} dotado con dos operaciones binarias*

$\oplus_{\mathcal{R}}$ y $\otimes_{\mathcal{R}}$, *tales que*

- $\oplus_{\mathcal{R}}$ *es asociativo, conmutativo y tiene elemento neutro.*
- $\otimes_{\mathcal{R}}$ *es asociativo, distributivo respecto a $\oplus_{\mathcal{R}}$ y tiene elemento unidad.*
- *El elemento neutro es absorbente respecto a $\otimes_{\mathcal{R}}$.*

Definición 2.8 *Un semianillo \mathcal{R} cuya operación $\oplus_{\mathcal{R}}$ es idempotente, es llamado semianillo idempotente o dioide.*

Como el álgebra máx-plus es un semianillo idempotente respecto a \oplus , se tiene que los elementos distintos de ε en \mathbb{R}_{ε} no tienen inverso aditivo.

Teorema 2.9 *La idempotencia de \oplus en el semianillo \mathbb{R}_{ε} , implica que los elementos en $\mathbb{R}_{\varepsilon} \setminus \{\varepsilon\}$ no tienen inverso aditivo.*

Demostración Sea $a \neq \varepsilon$. Suponga que a tiene inverso aditivo, es decir, existe $b \in \mathbb{R}_\varepsilon \setminus \{\varepsilon\}$ tal que

$$a \oplus b = \varepsilon,$$

sumando a en ambos lados de la ecuación se tiene

$$\begin{aligned} a \oplus (a \oplus b) &= a \oplus \varepsilon \\ &= a, \end{aligned}$$

haciendo uso de la propiedad asociativa y el hecho de que \mathbb{R}_ε es idempotente respecto a \oplus , obtenemos que

$$\begin{aligned} a &= a \oplus (a \oplus b) \\ &= (a \oplus a) \oplus b \\ &= a \oplus b \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, pues $a \neq \varepsilon$. Concluimos así que ningún elemento en \mathbb{R}_ε tiene inverso aditivo. □

Usando la operación \oplus , es posible definir un orden en el álgebra máx-plus. A continuación se presenta la definición formal.

Definición 2.10 Decimos que $a \leq b$, donde \leq es el orden natural de los números reales, si $a \oplus b = b$, para todo $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$.

2.2. Matrices y vectores

Definición 2.11 El conjunto de todas las matrices de orden $n \times m$ en el álgebra máx-plus es denotado por $\mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$, donde n es el número de filas y m el número de columnas.

Sea $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$. Para $n \in \mathbb{N}$, definimos $\underline{n} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. La matriz A se escribe como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

La entrada de A en la i -ésima fila y en la j -ésima columna es a_{ij} para $i \in \underline{n}$ y $j \in \underline{m}$. Algunas veces escribiremos $[A]_{ij}$.

La suma y producto de matrices y vectores en álgebra máx-plus son definidas de forma análoga a las operaciones usuales $+$ y \times de matrices.

Definición 2.12 Sean $A, B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$. Se define la suma de matrices $A \oplus B$ como:

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \text{máx}\{a_{ij}, b_{ij}\}, \text{ para } i \in \underline{n} \text{ y } j \in \underline{m}.$$

Ejemplo 2.13 Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & e \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 8 & 7 \end{pmatrix},$$

entonces

$$[A \oplus B]_{11} = 4 \oplus 2 = \text{máx}\{4, 2\} = 4,$$

$$[A \oplus B]_{12} = 5 \oplus \varepsilon = \text{máx}\{5, -\infty\} = 5,$$

$$[A \oplus B]_{21} = 1 \oplus 8 = \text{máx}\{1, 8\} = 8,$$

$$[A \oplus B]_{22} = e \oplus 7 = \text{máx}\{0, 7\} = 7,$$

teniendo como resultado la matriz

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.14 Sean $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times l}$ y $B \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{l \times m}$. Se define el producto $A \otimes B$ como:

$$[A \otimes B]_{ij} = \bigoplus_{k=1}^l a_{ik} \otimes b_{kj} = \text{máx}_{k \in \underline{l}} \{a_{ik} + b_{kj}\}, \text{ para } i \in \underline{n} \text{ y } j \in \underline{m}.$$

Note que $A \otimes B \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times m}$.

Ejemplo 2.15 Considere las matrices A y B dadas en el ejemplo 2.13. El producto de A por B es:

$$[A \otimes B]_{11} = 4 \otimes 2 \oplus 5 \otimes 8 = \text{máx}\{4 + 2, 5 + 8\} = 13,$$

$$[A \otimes B]_{12} = 4 \otimes \varepsilon \oplus 5 \otimes 7 = \text{máx}\{4 + (-\infty), 5 + 7\} = 12,$$

$$[A \otimes B]_{21} = 1 \otimes 2 \oplus e \otimes 8 = \text{máx}\{1 + 2, 0 + 8\} = 8,$$

$$[A \otimes B]_{22} = 1 \otimes \varepsilon \oplus e \otimes 7 = \text{máx}\{1 + (-\infty), 0 + 7\} = 7,$$

se obtiene como resultado la matriz

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Observación Note que para un par de matrices $A, B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$ se cumple que $A \oplus B = B \oplus A$ pero no siempre es cierto que $A \otimes B = B \otimes A$. Considere las matrices del ejemplo 2.13, el producto de B por A se presenta a continuación:

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}.$$

Es claro que $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Ahora se define el producto de un escalar por una matriz.

Definición 2.16 Sea $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times m}$ y un escalar $\alpha \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$, se define:

$$[\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes a_{ij}, \text{ para } i \in \underline{n} \text{ y } j \in \underline{m}.$$

Ejemplo 2.17 Sea A la matriz dada en el ejemplo 2.13 y sea $\alpha = 8$, entonces:

$$[8 \otimes A]_{11} = 8 \otimes 4 = 8 + 4 = 12,$$

$$[8 \otimes A]_{12} = 8 \otimes 5 = 8 + 5 = 13,$$

$$[8 \otimes A]_{21} = 8 \otimes 1 = 8 + 1 = 9,$$

$$[8 \otimes A]_{22} = 8 \otimes e = 8 + 0 = 8,$$

así, el producto de $8 \otimes A$ es

$$8 \otimes A = \begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.18 Llamamos matriz nula a la matriz $\mathcal{E}(n, m)$ de orden $n \times m$ cuyas componentes son todas iguales a ε y se define la matriz $E(n, m)$ de tamaño $n \times m$ como:

$$[E(n, m)]_{ij} = \begin{cases} e & \text{si } i = j \\ \varepsilon & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

cuando $n = m$, decimos que $E(n, n)$ es la matriz identidad.

Proposición 2.19 Sean A, B, C matrices con ordenes compatibles y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_\varepsilon$, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $A \oplus B = B \oplus A$,
2. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ y $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$,
3. $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$ y $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$,
4. $A \oplus \mathcal{E}(n, m) = A = \mathcal{E}(n, m) \oplus A$,
5. $A \otimes E(m, m) = A = E(n, n) \otimes A$,
6. $A \oplus A = A$.

Demostración Se presentan las demostraciones de las propiedades 2 y 3 para el producto de matrices ya que las demás se consideran inmediatas.

Sean las matrices $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times p}$, $B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{p \times q}$ y $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q \times m}$, entonces la ij -ésima entrada de $(A \otimes B) \otimes C$ está dada por

$$\begin{aligned}
 [(A \otimes B) \otimes C]_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^q \left(\bigoplus_{l=1}^p a_{il} \otimes b_{lk} \right) \otimes c_{kj} \\
 &= \bigoplus_{k=1}^q \bigoplus_{l=1}^p a_{il} \otimes b_{lk} \otimes c_{kj} \\
 &= \bigoplus_{l=1}^p a_{il} \otimes \left(\bigoplus_{k=1}^q b_{lk} \otimes c_{kj} \right) \\
 &= [A \otimes (B \otimes C)]_{ij},
 \end{aligned}$$

por último, considere las matrices $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times p}$ y $B, C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{p \times m}$, entonces la ij -ésima entrada de $A \otimes (B \oplus C)$ está dada por

$$\begin{aligned}
 [A \otimes (B \oplus C)]_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^p a_{ik} \otimes (b_{kj} \oplus c_{kj}) \\
 &= \bigoplus_{k=1}^p (a_{ik} \otimes b_{kj} \oplus a_{ik} \otimes c_{kj}) \\
 &= \left(\bigoplus_{k=1}^p a_{ik} \otimes b_{kj} \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^p a_{ik} \otimes c_{kj} \right) \\
 &= [A \otimes B]_{ij} \oplus [A \otimes C]_{ij},
 \end{aligned}$$

para $i \in \underline{n}$ y $j \in \underline{m}$. □

Observación Note que en $\mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$ la suma de matrices es conmutativa, asociativa, idempotente y tiene elemento nulo $\mathcal{E}(n, m)$. Para $\mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ el producto de matrices es asociativo, \otimes es distributivo respecto \oplus , tiene elemento unidad $E(n, n)$ y $\mathcal{E}(n, n)$ es absorbente respecto a \otimes , por lo tanto $(\mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}, \oplus, \otimes, \mathcal{E}, E)$ es un semianillo idempotente no conmutativo.

Al igual que en el álgebra lineal, en el álgebra máx-plus es posible definir a partir de una matriz dada, su matriz transpuesta, su traza y su k -ésima potencia.

Definición 2.20 Sea $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$. La transpuesta de la matriz A es denotada por A^T y es definida como:

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji}, \text{ para } i \in \underline{n} \text{ y } j \in \underline{m}.$$

Definición 2.21 Sea $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times n}$. La traza de la matriz A , notada como $tr(A)$, se define como:

$$tr(A) = \bigoplus_{i=1}^n a_{ii}, \text{ para } i \in \underline{n}.$$

Definición 2.22 Sean $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times n}$ y k un entero positivo, la k -ésima potencia de A es denotada por $A^{\otimes k}$ y se define como:

$$A^{\otimes k} = \underbrace{A \otimes A \otimes A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{k\text{-veces}}.$$

Cuando $k = 0$, entonces $A^{\otimes 0} = E$.

Sea $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times n}$. Note que cuando $k = 2$, la ij -ésima entrada de $A^{\otimes 2}$ con $i, j \in \underline{n}$ es dada por

$$\begin{aligned} [A^{\otimes 2}]_{ij} &= \bigoplus_{l=1}^n a_{il} \otimes a_{lj} \\ &= \text{máx}_{1 \leq l \leq n} \{a_{il} + a_{lj}\}, \end{aligned}$$

cuando $k = 3$, la ij -ésima entrada de $A^{\otimes 3}$ es

$$\begin{aligned} [A^{\otimes 3}]_{ij} &= \bigoplus_{l_2=1}^n a_{il_2} \otimes \left(\bigoplus_{l_1=1}^n a_{l_2 l_1} \otimes a_{l_1 j} \right) \\ &= \text{máx}_{1 \leq l_1, l_2 \leq n} \{a_{il_2} + a_{l_2 l_1} + a_{l_1 j}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ij -ésima entrada de $A^{\otimes k}$ es dada por

$$\begin{aligned} [A^{\otimes k}]_{ij} &= \bigoplus_{l_{k-1}=1}^n a_{il_{k-1}} \otimes \dots \otimes \left(\bigoplus_{l_1=1}^n a_{l_2 l_1} \otimes a_{l_1 j} \right) \\ &= \max_{1 \leq l_1, \dots, l_{k-1} \leq n} \{a_{il_{k-1}} + \dots + a_{l_2 l_1} + a_{l_1 j}\}. \end{aligned}$$

Ahora considere $\alpha \in \mathbb{R}_\varepsilon$ y $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$, la ij -ésima entrada de $(\alpha \otimes A)^{\otimes k}$ es

$$\begin{aligned} [(\alpha \otimes A)^{\otimes k}]_{ij} &= \max_{1 \leq l_1, \dots, l_{k-1} \leq n} \{(\alpha + a_{il_{k-1}}) + \dots + (\alpha + a_{l_2 l_1}) + (\alpha + a_{l_1 j})\} \\ &= \underbrace{\alpha + \alpha + \dots + \alpha}_{k\text{-veces}} + \left(\max_{1 \leq l_1, \dots, l_{k-1} \leq n} \{a_{il_{k-1}} + \dots + a_{l_2 l_1} + a_{l_1 j}\} \right) \\ &= \alpha^{\otimes k} \otimes [A^{\otimes k}]_{ij}. \end{aligned}$$

Se concluye que $(\alpha \otimes A)^{\otimes k} = \alpha^{\otimes k} \otimes A^{\otimes k}$, con k un entero positivo.

Ejemplo 2.23 Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ e & 3 & 4 \\ 2 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$A^{\otimes 2} = A \otimes A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ e & 3 & 4 \\ 2 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ e & 3 & 4 \\ 2 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$tr(A) = \max\{1, 3, 1\} = 3 \text{ y } tr(A^{\otimes 2}) = \max\{2, 6, 2\} = 6.$$

Se presenta el concepto de vector en el álgebra máx-plus.

Definición 2.24 *Los elementos de $\mathbb{R}_\varepsilon^{n \times 1} = \mathbb{R}_\varepsilon^n$ son llamados vectores. La j -ésima componente de un vector $x \in \mathbb{R}_\varepsilon^n$ es denotado como x_j o $[x]_j$ con $j \in \underline{n}$.*

Definición 2.25 *Sea $u \in \mathbb{R}_\varepsilon^n$ el vector cuyas componentes son todas iguales a e , esto es $[u]_j = e$ para $j \in \underline{n}$. Este vector recibe el nombre de vector unidad.*

Observación Note que $\alpha \otimes u = \alpha$ denota al vector con todas sus componentes iguales a α con $\alpha \in \mathbb{R}_\varepsilon$.

Definición 2.26 *La j -ésima columna de la matriz $E(n, n)$ es llamado el j -ésimo vector base de \mathbb{R}_ε^n y es denotado por e_j . La j -ésima componente de e_j tiene valor e y las demás tienen valor ε .*

2.3. Matrices y Grafos

En esta sección se estudiará la relación que hay entre los grafos y matrices en el contexto del álgebra máx-plus; veremos cómo una matriz cuadrada puede ser representada mediante un grafo. Además, se presentarán resultados de utilidad para hallar los valores y vectores propios de una matriz. Muchas de las definiciones y resultados presentados en esta sección se pueden encontrar en (Baccelli et al., 1993) y (Heidergot et al., 2005).

Definición 2.27 *Sea $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$. El grafo asociado a la matriz A es $G(A) = (V, E)$ con vértices $V(A) = \underline{n}$ y aristas $E(A) = \{(i, j) \in \underline{n} \times \underline{n} : a_{ji} \neq \varepsilon\}$. Para cada $(i, j) \in E$, a_{ji} es llamado el peso de la arista.*

Definición 2.28 El peso de un camino $p = i_1 i_2 i_3 \dots i_m i_{m+1}$ de longitud m es denotado por $|p|_w$ y es igual al producto de todos los pesos de cada arista, es decir:

$$|p|_w = \bigotimes_{k=1}^m a_{i_{k+1}i_k}.$$

Definición 2.29 El peso promedio de un camino $p = i_1 i_2 i_3 \dots i_k i_{k+1}$ con longitud k se define como $|p|_w / |p|_l$.

Ejemplo 2.30 Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 8 \\ 12 & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & 10 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

El grafo asociado $G(A)$ a la matriz A se presenta en la Figura 4.

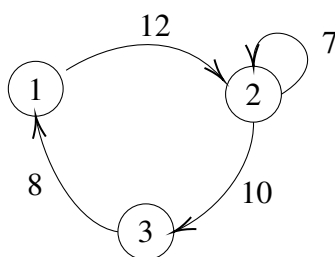


Figura 4. Grafo asociado a la matriz A .

$G(A)$ tiene como conjunto de vértices $V(A) = \{1, 2, 3\}$ y conjunto de aristas $E(A) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (2, 2)\}$. Note que en $G(A)$ hay dos circuitos, el circuito $p = 1231$ que tiene

peso $|p|_w = a_{13} + a_{21} + a_{32} = 8 + 12 + 10 = 30$ y longitud $|p|_l = 3$ y el circuito $q = 22$ cuyo peso es $|q|_w = a_{22} = 7$ y longitud $|q|_l = 1$.

Al igual que en el álgebra lineal usual, en el álgebra máx-plus se tiene la noción de matrices reducibles e irreducibles.

Definición 2.31 Una matriz $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ es irreducible si no existe una matriz de permutación P de orden n tal que

$$P^T \otimes A \otimes P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathcal{E} & A_{22} \end{pmatrix},$$

donde A_{11} y A_{22} son matrices cuadradas de tamaño $k \times k$ y $(n - k) \times (n - k)$ respectivamente con $1 \leq k \leq n - 1$. Si existe tal matriz de permutación P diremos que A es reducible.

Como se puede observar, la definición de matriz irreducible es análoga a la definición en el álgebra convencional. La única diferencia es que la matriz de permutación P tiene un único $e = 0$ en cada fila y cada columna y ε en las demás componentes.

Teorema 2.32 Una matriz cuadrada A es irreducible si y solo si su grafo asociado $G(A)$ es fuertemente conexo

Demostración La demostración es análoga a la presentada para el Teorema 1.14. □

Las potencias de una matriz cuadrada A y su grafo asociado $G(A)$ están estrechamente relacionados. Como se evidenciará en el siguiente teorema, el elemento $[A^{\otimes k}]_{ji}$ da el peso máximo de todos los caminos que tienen longitud k que van desde el vértice i al vértice j .

Teorema 2.33 Sea $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times n}$. Para todo entero $k \geq 1$

$$[A^{\otimes k}]_{ji} = \text{máx}\{|p|_w : p \in P(i, j, k)\}.$$

Si $P(i, j, k) = \emptyset$, entonces $[A^{\otimes k}]_{ji} = \varepsilon$, es decir, no existe ningún camino de longitud k desde el vértice i al vértice j en $G(A)$.

Demostración Se procede por inducción. Considere i, j dos vértices cualesquiera. Si $k = 1$, los caminos en $P(i, j, 1)$ están formados por la arista (i, j) que por definición, tienen peso $[A]_{ji} \neq \varepsilon$. Si $P(i, j, 1) = \emptyset$ entonces no existe la arista (i, j) y $[A]_{ji} = \varepsilon$. Suponga ahora que el teorema es cierto para k , veamos que se satisface para $k + 1$. Sea $p \in P(i, j, k + 1)$, este camino debe estar formado por un camino q de longitud k que conecta al vértice i con un vértice l y un camino formado por la arista (l, j) la cual tiene peso $[A]_{jl}$, es decir, $p = q \circ (l, j)$ con $q \in P(i, l, k)$. El peso máximo de cualquier camino $p \in P(i, j, k + 1)$ puede obtenerse como

$$\text{máx}_{l \in \underline{n}} ([A]_{jl} + \text{máx}\{|q|_w : q \in P(i, l, k)\}),$$

por hipótesis $\text{máx}\{|q|_w : q \in P(i, l, k)\} = [A^{\otimes k}]_{li}$, luego el peso máximo de los caminos de

longitud $k + 1$ que van de i a j puede escribirse como

$$\begin{aligned} \max_{l \in \underline{n}} \left(a_{jl} + [A^{\otimes k}]_{li} \right) &= \bigoplus_{l=1}^n a_{jl} \otimes [A^{\otimes k}]_{li} \\ &= [A \otimes A^{\otimes k}]_{ji} \\ &= [A^{\otimes(k+1)}]_{ji}. \end{aligned}$$

Ahora considere el caso en el que $P(i, j, k + 1) = \emptyset$, esto es, no existe un camino de longitud $k + 1$ que conecte a i con j , lo que implica que para cualquier vértice l no existe un camino de longitud k de i a l o que no existe la arista (l, j) o ambos. Por lo tanto, para cualquier vértice l al menos uno de los valores $[A]_{jl}$ y $[A^{\otimes k}]_{li}$ tiene valor ε y así $[A^{\otimes(k+1)}]_{ji} = \varepsilon$. \square

El siguiente ejemplo da una idea de la utilidad que puede tener el teorema anterior.

Ejemplo 2.34 *Considere un conjunto de \underline{n} ciudades y suponga que algunas de estas ciudades están conectadas por vías. Lo dicho anteriormente puede ser visto mediante un grafo en el cual sus vértices son representados por las ciudades y las aristas son representadas por las vías. Se denota dicho grafo como $G = (V, E)$, donde $V = \underline{n}$. Si hay una vía que conecta a la ciudad i con la ciudad j , entonces $(i, j) \in E$ con $i, j \in V$; a la arista (i, j) se le asocia un peso a_{ji} , donde a_{ji} corresponde a la distancia que hay entre i y j ; que la vía no exista, implica que $a_{ji} = \varepsilon$ y $(i, j) \notin E$. Suponga que alguien está interesado en saber cuál es la distancia máxima que se recorre de una ciudad en particular i a otra ciudad j en l viajes, para calcular esta distancia considere una matriz A de orden $n \times n$ cuyas entradas representan el peso de*

las aristas en G , así por Teorema 2.33, la distancia máxima que se recorre de i a j en l viajes es dada por $[A^{\otimes l}]_{ji}$, es decir, la distancia máxima es dada por el elemento (j, i) de la l -ésima potencia de A .

Definición 2.35 Para $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times n}$, se define

$$A^+ = \bigoplus_{k=1}^{\infty} A^{\otimes k}.$$

Observación El elemento $[A^{\otimes k}]_{ji}$ es el peso máximo de los caminos de longitud k que van desde un vértice i a un vértice j , así el elemento $[A^+]_{ji}$ es el peso máximo de los caminos de cualquier longitud que van de i a j .

Teorema 2.36 Sea $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times n}$ tal que cualquier circuito en $G(A)$ que tiene peso promedio menor o igual a $\varepsilon = 0$, entonces

$$A^+ = \bigoplus_{k=1}^{\infty} A^{\otimes k} = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 3} \oplus \dots \oplus A^{\otimes n} \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times n}.$$

Demostración Por definición de A^+ , se obtiene que $[A^+]_{ji} \geq \max\{[A^{\otimes k}]_{ji} : 1 \leq k \leq n\}$. Ahora considere un camino de i a j con longitud mayor que n en $G(A)$, como el número de vértices en $G(A)$ es n , dicho camino está formado por al menos un circuito y un camino de i a j con longitud menor o igual que n . Por hipótesis, todo circuito en $G(A)$ tiene peso promedio menor

o igual a e , entonces

$$A^{\otimes m} \leq A \oplus A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 3} \oplus \dots \oplus A^{\otimes n}, \text{ para todo } m \geq n.$$

Así $[A^+]_{ji} \leq \max\{[A^{\otimes k}]_{ji} : 1 \leq k \leq n\}$. Concluimos $A^+ = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 3} \oplus \dots \oplus A^{\otimes n}$. \square

2.4. Valores y vectores propios

En esta sección se estudiarán los valores y vectores propios de una matriz cuadrada A , en el sentido del álgebra máx-plus. Además se mostrará la relación que existe entre los valores y vectores propios con el grafo asociado $G(A)$. Aquí tendrán relevancia algunas de las definiciones, teoremas, y proposiciones que se presentaron en la sección Matrices y Grafos. Los resultados presentados en esta sección fueron tomados de (Baccelli et al., 1993) y (Heidergot et al., 2005).

Definición 2.37 *Sea $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$. Se dice que el escalar $\mu \in \mathbb{R}_\varepsilon$ es un valor propio de A si existe un vector $v \in \mathbb{R}_\varepsilon^n$ que contiene al menos una componente distinta de ε tal que*

$$A \otimes v = \mu \otimes v.$$

El vector v es llamado vector propio de A asociado al valor propio μ .

Note que, dada una matriz cuadrada, la definición anterior permite que ε sea un valor propio de dicha matriz y que el vector propio asociado tenga algunas de sus componentes iguales a ε .

Considere la siguiente proposición.

Proposición 2.38 Sea $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$. ε es un valor propio de A , si y solo si, A tiene al menos una columna cuyas entradas son todas iguales a ε .

Demostración Supongamos que $\mu = \varepsilon$ es un valor propio de A y $v \in \mathbb{R}_\varepsilon^n$ un vector propio asociado a μ , entonces existe $j_0 \in \underline{n}$ tal que $v_{j_0} > \varepsilon$. Por hipótesis $A \otimes v = \mu \otimes v$, por lo tanto, se satisface que

$$\bigoplus_{j=1}^n a_{ij} \otimes v_j = \mu \otimes v_i = \varepsilon, \text{ para } i, j \in \underline{n}.$$

Como $v_{j_0} > \varepsilon$, entonces $a_{ij_0} = \varepsilon$ para todo $i \in \underline{n}$; así, la matriz A tiene una columna cuyas componentes son todas iguales a ε . Ahora, suponga que la j -ésima columna de A tiene todas sus componentes iguales a ε , considere el vector v de la siguiente manera

$$v = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } i \neq j \\ \alpha & \text{si } i = j \end{cases}, \text{ para } i, j \in \underline{n},$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}_\varepsilon \setminus \{\varepsilon\}$. Note que $v \neq \varepsilon$ y es tal que $A \otimes v = \varepsilon \otimes v$. □

Ejemplo 2.39 Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 8 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

note que

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 8 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \alpha \end{pmatrix} = \mu \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \alpha \end{pmatrix}, \text{ donde } \alpha \in \mathbb{R}_\varepsilon \setminus \{\varepsilon\} \text{ y } \mu = \varepsilon.$$

Por lo tanto, ε es un valor de A y existen infinitos vectores propios asociados a μ .

Como resultado de la anterior proposición, se presenta el siguiente corolario.

Corolario 2.40 Si $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ es una matriz irreducible, entonces ε no es un valor propio de A .

Demostración Por hipótesis, A es una matriz irreducible, entonces su grafo asociado $G(A)$ es fuertemente conexo, es decir, para cada i existe j tal que $a_{ji} > \varepsilon$ donde $i, j \in \underline{n}$, por lo tanto, la i -ésima columna de A no tiene todas sus componentes iguales a ε , entonces por Proposición 2.38, ε no es un valor propio de A . □

Una matriz cuadrada puede tener más de un valor propio; más adelante, se mostrará bajo qué condiciones se cumple que el valor propio es único. Los vectores propios tampoco son únicos. El siguiente teorema deja constancia de ello.

Teorema 2.41 Sea $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ con valor propio finito μ y vector propio asociado v , entonces $\alpha \otimes v$, con $\alpha \in \mathbb{R}_\varepsilon \setminus \{\varepsilon\}$, también es un vector propio de A que corresponde al valor propio μ .

Demostración Por hipótesis μ es un valor propio de A con vector propio v , entonces

$$A \otimes v = \mu \otimes v, \tag{1}$$

multiplicando por $\alpha \in \mathbb{R}_\varepsilon \setminus \{\varepsilon\}$, en ambos lados de (1), se obtiene

$$\alpha \otimes A \otimes v = \alpha \otimes \mu \otimes v \quad (2)$$

como α es un escalar, (2) puede escribirse como

$$A \otimes \alpha \otimes v = \mu \otimes \alpha \otimes v$$

$$A \otimes (\alpha \otimes v) = \mu \otimes (\alpha \otimes v).$$

Obteniendo que $\alpha \otimes v \in \mathbb{R}_\varepsilon^n$ también es un vector propio de la matriz A que corresponde al valor propio μ . □

El conjunto de los vectores propios asociados a un valor propio recibe el nombre de *espacio propio*. El espacio propio se describirá adecuadamente más adelante, ya que para su estudio son necesarios algunos resultados que se presentarán a lo largo de la sección.

El siguiente teorema establece que todo valor propio finito de una matriz cuadrada es el peso promedio de algún circuito del grafo asociado.

Teorema 2.42 *Sea $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ una matriz con valor propio μ finito, entonces existe un circuito c en $G(A)$ tal que*

$$\mu = \frac{|c|_w}{|c|_l}.$$

Demostración Sean μ un valor propio finito de A y $v \in \mathbb{R}_\varepsilon^n$ un vector propio asociado a μ .

Como v es un vector propio de A , existe un vértice $i_1 \in \underline{n}$ tal que $v_{i_1} \neq \varepsilon$, entonces $[A \otimes v]_{i_1} =$

$\mu \otimes v_{i_1} \neq \varepsilon$, por lo tanto, existe un vértice i_2 con

$$a_{i_1 i_2} \otimes v_{i_2} = \mu \otimes v_{i_1},$$

lo que implica que $a_{i_1 i_2} \neq \varepsilon$ y $v_{i_2} \neq \varepsilon$, además $(i_2, i_1) \in E(A)$. Análogamente, se puede hallar un $i_3 \in \underline{n}$, tal que

$$a_{i_2 i_3} \otimes v_{i_3} = \mu \otimes v_{i_2},$$

donde $a_{i_2 i_3} \neq \varepsilon$, $v_{i_3} \neq \varepsilon$ y $(i_3, i_2) \in E(A)$. Siguiendo este razonamiento, se puede encontrar un vértice i_k por segunda vez, ya que el número de vértices es finito. Entonces, se ha encontrado un circuito

$$c = i_k i_{k+l-1} i_{k+l-2} \dots i_{k+1} i_k,$$

con longitud $|c|_l = l$ y peso $|c|_w = \bigotimes_{m=0}^{l-1} a_{i_{k+m} i_{k+m+1}}$, donde $i_k = i_{k+l}$. Por construcción del circuito c , se tiene que

$$\bigotimes_{m=0}^{l-1} (a_{i_{k+m} i_{k+m+1}} \otimes v_{i_{k+m+1}}) = \mu^{\otimes l} \otimes \bigotimes_{m=0}^{l-1} v_{i_{k+m}}. \quad (3)$$

Como \otimes es la suma usual $+$, entonces (3) puede escribirse como

$$\sum_{m=0}^{l-1} (a_{i_{k+m} i_{k+m+1}} + v_{i_{k+m+1}}) = l \times \mu + \sum_{m=0}^{l-1} v_{i_{k+m}}. \quad (4)$$

Además $i_k = i_{k+l}$, por lo tanto

$$\sum_{m=0}^{l-1} v_{i_{k+m+1}} = \sum_{m=0}^{l-1} v_{i_{k+m}}.$$

Sustrayendo $\sum_{m=0}^{l-1} v_{i_{k+m}}$ en ambos lados de la ecuación (4), se obtiene que

$$\sum_{m=0}^{l-1} a_{i_{k+m}i_{k+m+1}} = l \times \mu.$$

Lo cual implica que $|c|_w = l \times \mu$. Por lo tanto, el peso promedio del circuito c es

$$\frac{|c|_w}{|c|_l} = \frac{l \times \mu}{l} = \mu.$$

□

Definición 2.43 Sean $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ y $C(A)$ el conjunto de todos de circuitos en $G(A)$, se define

$$\lambda = \max_{c \in C(A)} \frac{|c|_w}{|c|_l}. \quad (5)$$

Diremos que es λ el peso promedio máximo de los circuitos en $G(A)$.

Observación Note que $C(A)$ es un conjunto finito. Si $C(A)$ es no vacío, entonces el peso promedio máximo λ se alcanza por al menos un circuito en $G(A)$, en el caso contrario, se define $\lambda = \varepsilon$. Además, si la matriz A es irreducible, λ es finito ya que $G(A)$ contiene al menos un

circuito.

Definición 2.44 Sea $c \in C(A)$. Diremos que c es un circuito crítico, si su peso promedio es máximo, es decir, si $\lambda = |c|_w/|c|_l$.

Definición 2.45 Sea $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$. El grafo que está formado por los vértices y aristas que componen a los circuitos críticos en $G(A)$ recibe el nombre grafo crítico de A y se denota como $G^c(A) = (V^c(A), E^c(A))$.

Ejemplo 2.46 Considere la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} e & e & -2 & \varepsilon \\ -1 & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -1 & -1 & e \\ \varepsilon & \varepsilon & e & e \end{pmatrix}.$$

En $G(B)$ hay cuatro circuitos críticos, $\theta = 11$, $\delta = 22$, $\rho = 343$ y $\gamma = 44$. En la Figura 5. se muestra el grafo asociado $G(B)$ y su correspondiente grafo crítico $G^c(B)$.

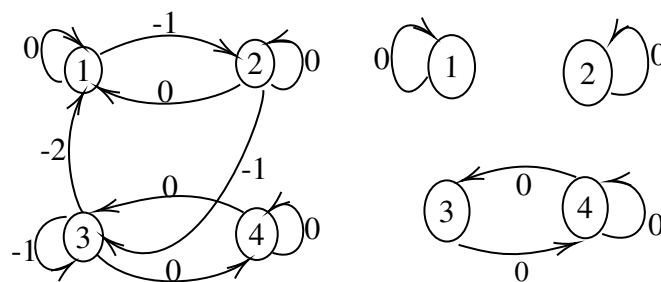


Figura 5. $G(B)$ y $G^c(B)$ del Ejemplo 2.46 respectivamente.

Cabe resaltar que el grafo crítico de una matriz irreducible no necesariamente es fuertemente conexo, basta con observar el grafo $G^c(B)$ del Ejemplo 2.46 para darse cuenta de ello.

Definición 2.47 Sean $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ y λ el peso promedio máximo de los circuitos en $G(A)$. La matriz A_λ recibe el nombre de matriz normalizada y se define como

$$A_\lambda = (-\lambda) \otimes A.$$

Observación Note que los grafos asociados de A y A_λ coinciden salvo por el peso de sus aristas. Por lo tanto, si un circuito en $G(A)$ es crítico, entonces este circuito también será crítico en $G(A_\lambda)$, teniendo como resultado que los grafos críticos $G^c(A)$ y $G^c(A_\lambda)$ coinciden, otra vez, salvo por el peso de sus aristas. Claramente, el peso promedio máximo de los circuitos en $G(A_\lambda)$ será igual a 0.

Para entender mejor lo dicho anteriormente, considere la matriz A dada en el Ejemplo 2.30. El grafo asociado $G(A)$ contiene dos circuitos, $p = 1231$ y $q = 22$, que tienen peso promedio 10 y 7 respectivamente, entonces $\lambda = 10$ y p crítico en $G(A)$, luego

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -2 \\ 2 & -3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

cuyo grafo asociado $G(A_\lambda)$ se muestra en la Figura 6. En $G(A_\lambda)$ se encuentran los circuitos

$p_1 = 1231$ y $q_1 = 22$, que tienen peso promedio 0 y -3 respectivamente, así $\lambda_1 = 0$ y p_1 es crítico en $G(A_\lambda)$.

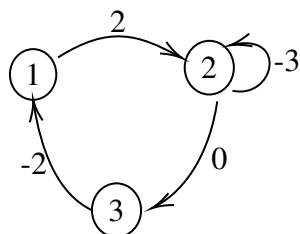


Figura 6. Grafo asociado a la matriz $G(A_\lambda)$

Ahora, como el peso promedio máximo de los circuitos en $G(A_\lambda)$ es igual a cero, por Teorema 2.36 la matriz A_λ^+ está bien definida; además como $G^c(A)$ y $G^c(A_\lambda)$ coinciden, excepto por el peso de sus aristas, se sigue

$$[A_\lambda^+]_{\eta\eta} = e = 0, \text{ para cada } \eta \in V^c(A). \tag{6}$$

Es decir, como todo vértice en $G^c(A_\lambda)$ está en un circuito y todo circuito en el grafo crítico tiene peso cero, entonces todo camino que va de ese vértice en sí mismo tiene peso cero.

Definición 2.48 Sea $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$. Se define la matriz A_λ^* como

$$A_\lambda^* = E \oplus A_\lambda^+ = \bigoplus_{k \geq 0}^n A^{\otimes k}.$$

La siguiente proposición nos garantiza la existencia de un valor propio de una matriz dada y sus respectivos vectores propios asociados, siempre que el peso promedio máximo de

los circuitos del grafo asociado sea finito.

Proposición 2.49 Sean $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times n}$ y λ el peso promedio máximo de los circuitos en $G(A)$. Entonces el número λ es un valor propio de A y la columna $[A_{\lambda}^*]_{\cdot\eta}$ es un vector propio asociado a λ , para todo vértice $\eta \in V^c(A)$.

Demostración Sea λ el peso promedio máximo de los circuitos en $G(A)$. Como se mencionó anteriormente, el peso promedio máximo de los circuitos en $G(A_{\lambda})$ es cero y por esta razón la matriz A_{λ}^+ está bien definida. La definición de A_{λ}^* , implica que la η -ésima columna de A_{λ}^* es

$$[A_{\lambda}^*]_{\cdot\eta} = [E \oplus A_{\lambda}^+]_{\cdot\eta}, \quad (7)$$

entonces la i -ésima componente del vector $[A_{\lambda}^*]_{\cdot\eta}$ satisface

$$[A_{\lambda}^*]_{i\eta} = [E \oplus A_{\lambda}^+]_{i\eta} = \begin{cases} \varepsilon \oplus [A_{\lambda}^+]_{i\eta} & \text{si } i \neq \eta \\ e \oplus [A_{\lambda}^+]_{i\eta} & \text{si } i = \eta \end{cases}.$$

De las ecuaciones (6) y (7), se tiene que para todo $\eta \in V^c(A)$

$$[A_{\lambda}^+]_{\cdot\eta} = [A_{\lambda}^*]_{\cdot\eta}. \quad (8)$$

Note que

$$\begin{aligned}
 A_\lambda^+ &= A_\lambda \oplus A_\lambda^+ \\
 &= (A_\lambda \otimes E) \oplus (A_\lambda \otimes A_\lambda^+) \\
 &= A_\lambda \otimes (E \oplus A_\lambda^+) \\
 &= A_\lambda \otimes A_\lambda^*,
 \end{aligned}$$

entonces, la ecuación (8) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
 [A_\lambda^*].\eta &= [A_\lambda \otimes A_\lambda^*].\eta \\
 &= A_\lambda \otimes [A_\lambda^*].\eta \\
 &= (-\lambda) \otimes A \otimes [A_\lambda^*].\eta,
 \end{aligned}$$

multiplicando por λ en ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \lambda \otimes [A_\lambda^*].\eta &= \lambda \otimes (-\lambda) \otimes A \otimes [A_\lambda^*].\eta \\
 &= A \otimes [A_\lambda^*].\eta.
 \end{aligned}$$

Así queda demostrado que λ es un valor propio de A y la η -ésima columna de A_λ^* es un vector propio de A , para todo $\eta \in V^c(A)$. □

Ejemplo 2.50 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que $\lambda = 8$ con circuito crítico $\rho = 22$, entonces

$$A_\lambda = -\lambda \otimes A = -8 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora se procede a calcular la matriz A_λ^+

$$A_\lambda^+ = \bigoplus_{k=1}^2 A_\lambda^{\otimes k} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto la matriz A_λ^* es

$$A_\lambda^* = E \oplus A_\lambda^+ = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por Proposición 2.49, $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A .

Anteriormente se mencionó que los valores y vectores propios de una matriz no son

únicos, sin embargo cuando la matriz es irreducible, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.51 *Sea $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times n}$. Si A es una matriz irreducible, entonces A tiene un único valor propio λ . Este valor propio es finito y corresponde al peso promedio máximo de los circuitos en $G(A)$, es decir*

$$\lambda = \max_{c \in C(A)} \frac{|c|_w}{|c|_l}.$$

Demostración Note que si A es irreducible, su grafo asociado $G(A)$ contiene al menos un circuito, entonces λ es finito y la existencia de un valor propio finito se mostró en la Proposición 2.49. Ahora, mostremos que λ es único, para ello, considere un circuito $c = i_1 i_2 i_3 \dots i_l i_{l+1}$ en $G(A)$ con longitud $|c|_l = l$ e $i_1 = i_{l+1}$. Como A es irreducible $a_{i_{k+1}i_k} \neq \varepsilon$, para $k \in \underline{l}$. Suponga μ es un valor propio finito de A y v un vector propio asociado, tal que $A \otimes v = \mu \otimes v$, por lo tanto

$$a_{i_{k+1}i_k} \otimes v_{i_k} \leq \mu \otimes v_{i_{k+1}} \text{ para } k \in \underline{l}.$$

Usando el mismo argumento para la demostración del Teorema 2.42 se obtiene que

$$\frac{|c|_w}{|c|_l} \leq \frac{l \times \mu}{l} = \mu, \quad (9)$$

para todo $c \in C(A)$. Es decir, todo valor propio μ es mayor o igual que λ . El Teorema 2.42 dice que todo valor propio finito puede obtenerse del peso promedio de algún circuito en $G(A)$, entonces μ no puede ser mayor que λ porque contradice el hecho de que λ sea peso promedio máximo de los circuitos en $G(A)$. Por lo tanto $\mu = \lambda$. \square

Ejemplo 2.52 *Considere la matriz A dada en Ejemplo 2.30. El grafo asociado $G(A)$ es fuertemente conexo, entonces A es irreducible. En $G(A)$ se encuentran los circuitos p y q cuyo peso promedio es $|p|_w/|p|_l = 10$ y $|q|_w/|q|_l = 7$ respectivamente; por Teorema 2.51, se concluye que $\lambda = \text{máx}\{10, 7\} = 10$.*

Proposición 2.53 *Sea $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$. Si A es irreducible, entonces todo vector propio $v \in \mathbb{R}_\varepsilon^n$ asociado al valor propio λ tiene todas sus componentes finitas.*

Demostración Suponga que A es irreducible, entonces el valor propio λ corresponde al peso promedio máximo de los circuitos en $G(A)$, siguiendo el razonamiento de la Proposición 2.49, se tiene que A_λ^+ está bien definida. Por otra parte, como $G(A)$ es fuertemente conexo, $G(A_\lambda)$ también lo es, así las entradas de A_λ^+ son todas distintas de ε , y como $A_\lambda^* = E \oplus A_\lambda^+$, la matriz A_λ^* también tiene todas sus entradas finitas. La proposición 2.49, dice que para cada $\eta \in V^c(A)$, la columna $[A_\lambda^*]_{\cdot\eta}$ es un vector propio de A asociado a λ , por lo tanto, los vectores propios de A tienen todas sus componentes distintas de ε . □

Ahora, pasamos a describir el conjunto de los vectores propios de una matriz dada. Las siguientes definiciones se pueden encontrar en

Definición 2.54 *Sean $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ y μ un valor propio finito. El espacio propio, notado por $V_\mu(A)$ de la matriz A , es el conjunto de todos los vectores propios de A que corresponden a μ . $V_\mu(A)$ es un espacio vectorial en el sentido del álgebra máx-plus.*

Proposición 2.55 *Sean $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ y λ el peso promedio máximo de los circuitos en $G(A)$, entonces el espacio propio de A y A_λ coinciden y ε es un valor propio de A_λ .*

Demostración Considere v un vector propio de A que corresponde a λ , entonces para todo $j \in \underline{n}$ se cumple que

$$[A \otimes v]_j = [\lambda \otimes v]_j \iff [A \otimes v]_j - \lambda = v_j \iff [A_\lambda \otimes v]_j = e \otimes v_j.$$

Por lo tanto, $V_\lambda(A)$ y $V_\lambda(A_\lambda)$ coinciden y e es un valor propio de A_λ . \square

Proposición 2.56 Sean $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ una matriz irreducible y λ un valor propio con vector propio asociado v , entonces A_λ^* tiene valor propio e con vector propio asociado v .

Demostración Como $A \otimes v = \lambda \otimes v$, se tiene $A_\lambda \otimes v = v$ y además $E \otimes v = v$, entonces

$$(E \otimes v) \oplus (A_\lambda \otimes v) = (E \oplus A_\lambda) \otimes v = v.$$

Note que $A_\lambda^* = E \oplus A_\lambda^\dagger = (E \oplus A_\lambda)^{\otimes n}$ ya que $\mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ es idempotente, así

$$\begin{aligned} A_\lambda^* \otimes v &= (E \oplus A_\lambda)^{\otimes n} \otimes v \\ &= (E \oplus A_\lambda) \otimes (E \oplus A_\lambda)^{\otimes(n-1)} \otimes v \\ &= (E \oplus A_\lambda)^{\otimes(n-1)} \otimes v \\ &= v. \end{aligned}$$

Por lo tanto, e es valor propio de A_λ^* con vector propio v . \square

El grafo de saturación de una matriz A está relacionado con su grafo crítico, es por eso

que la siguiente definición juega un papel importante en la descripción del espacio propio de A .

Definición 2.57 Sea $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times n}$ con valor propio finito μ con vector propio asociado v . Se define el grafo de saturación, denotado como $S_{\mu,v}(A)$, al conjunto de aristas (j,i) en $G(A)$ tal que $a_{ij} \otimes v_j = \mu \otimes v_i$ con $v_i, v_j \neq \varepsilon$.

Proposición 2.58 Sean $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times n}$ y μ un valor propio finito con vector propio asociado v , entonces

1. Para cada vértice i en $S_{\mu,v}(A)$, existe un circuito en $S_{\mu,v}(A)$, desde el cual se puede llegar al vértice i en un número finito de pasos.
2. Todos los circuitos en $S_{\mu,v}(A)$ tienen peso promedio igual a μ .
3. Si A es irreducible, entonces los circuitos en $S_{\mu,v}(A)$ pertenecen a $G^c(A)$.

Demostración

1. Sea i un vértice en $S_{\mu,v}(A)$, entonces existe j en $S_{\mu,v}(A)$ tal que $a_{ij} \otimes v_j = \mu \otimes v_i$ con $v_i, v_j \neq \varepsilon$, de igual forma, existe k en $S_{\mu,v}(A)$ tal que $a_{jk} \otimes v_k = \mu \otimes v_j$ con $v_j, v_k \neq \varepsilon$, repitiendo este argumento un número finito de veces, digamos m -veces, se obtiene un camino de longitud m . Si $m > n$, el camino construido debe contener al menos un circuito, ya que el número de vértices en $S_{\mu,v}(A)$ es finito.
2. Considere un circuito $c = i_1 i_2 i_3 \dots i_l i_{l+1}$ con $i_1 = i_{l+1}$ y longitud l en $S_{\mu,v}(A)$. Por defini-

ción de grafo de saturación, se tiene

$$a_{i_{k+1}i_k} \otimes v_k = \mu \otimes v_{i_{k+1}}, \text{ con } 1 \leq k \leq l.$$

Lo que implica

$$\bigotimes_{k=1}^l a_{i_{k+1}i_k} \otimes v_{i_1} = \mu^{\otimes l} \otimes v_{i_1},$$

entonces

$$\bigotimes_{k=1}^l a_{i_{k+1}i_k} = \mu^{\otimes l}.$$

Observe que $\bigotimes_{k=1}^l a_{i_{k+1}i_k} = |c|_w$, por lo tanto el circuito c tiene peso promedio μ .

3. Si A es una matriz irreducible, el valor propio μ es único y corresponde al peso promedio máximo de los circuitos en $G(A)$. Por la parte (2), sabemos que todo circuito en $S_{\mu,v}(A)$ tiene peso promedio μ , es decir, todo circuito en $S_{\mu,v}(A)$ tiene peso promedio máximo igual a μ , por lo tanto, todo circuito en $S_{\mu,v}(A)$ es crítico. \square

El siguiente teorema caracteriza el espacio propio de una matriz irreducible.

Teorema 2.59 *Si $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times n}$ es una matriz irreducible con valor propio λ , entonces el espacio propio de A es dado por*

$$V_{\lambda}(A) = \left\{ v \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^n : v = \bigoplus_{i \in V^c(A)} a_i \otimes [A_{\lambda}^*]_{.i} \text{ para } a_i \in \mathbb{R}_{\varepsilon} \setminus \{\varepsilon\} \right\}$$

Demostración Por Proposición 2.49, $[A_{\lambda}^*]_{.i}$ es un vector propio de A , para todo vértice $i \in$

$V^c(A)$. Sabemos que una combinación lineal de vectores propios sigue siendo un vector propio, por lo tanto

$$\bigoplus_{i \in V^c(A)} a_i \otimes [A_\lambda^*]_{.i},$$

con $a_i \in \mathbb{R}_\varepsilon \setminus \{\varepsilon\}$, es un vector propio de A . El siguiente paso es mostrar que cualquier vector propio de A puede escribirse como combinación lineal de columnas $[A_\lambda^*]_{.i}$ para $i \in V^c(A)$. Como A es una matriz irreducible con vector propio v que corresponde al valor propio λ , por Proposición 2.56, A_λ^* tiene valor propio e con vector propio asociado v . Considere dos vértices i, j en $S_{e,v}(A_\lambda)$ tal que existe un camino de i a j , digamos $i_1 i_2 i_3 \dots i_l i_{l+1}$ con $i = i_1$ y $j = i_{l+1}$, entonces por definición de $S_{e,v}(A_\lambda)$

$$\bigotimes_{k=1}^l [A_\lambda]_{i_{k+1}i_k} \otimes v_{i_k} = e \otimes v_{i_{k+1}}, \text{ con } 1 \leq k \leq l.$$

Sea

$$\alpha = \bigotimes_{k=1}^l [A_\lambda]_{i_{k+1}i_k},$$

por lo tanto $\alpha \otimes v_i = v_j$ y además por definición de $A_\lambda^{\otimes l}$ y A_λ^* , se tiene

$$\alpha \leq [A_\lambda^{\otimes l}]_{ji} \leq [A_\lambda^*]_{ji}. \quad (10)$$

Usando el hecho de que $\alpha \otimes v_i = v_j$, se sigue que para cada $\eta \in \underline{n}$

$$[A_\lambda^*]_{\eta j} \otimes v_j = [A_\lambda^*]_{\eta j} \otimes \alpha \otimes v_i,$$

por la desigualdad (10),

$$[A_\lambda^*]_{\eta j} \otimes v_j \leq [A_\lambda^*]_{\eta j} \otimes [A_\lambda^*]_{ji} \otimes v_i$$

$$[A_\lambda^*]_{\eta j} \otimes v_j \leq [A_\lambda^*]_{\eta i} \otimes v_i,$$

La última desigualdad se tiene ya que $A_\lambda^* \otimes A_\lambda^* = A_\lambda^*$. Ahora, por Proposición 2.58 parte (1) y (3), para cada j en $S_{e,v}(A_\lambda)$, existe $i = i(j)$ el cual pertenece a un circuito crítico, por lo tanto

$$\bigoplus_{j \in S_{e,v}(A_\lambda)} [A_\lambda^*]_{\eta j} \otimes v_j \leq \bigoplus_{i \in V^c(A)} [A_\lambda^*]_{\eta i} \otimes v_i, \quad (11)$$

para cada $\eta \in \underline{n}$. Como v es un vector propio de A_λ^* con valor propio e , entonces $v = A_\lambda^* \otimes v$, luego $v_\eta = [A_\lambda^*]_{\eta j} \otimes v_j$ para algún j en $S_{e,v}(A_\lambda)$. No se sabe cuál j determina el valor de v_η , pero como el vértice j se encuentra en $S_{e,v}(A_\lambda)$, para todo $\eta \in \underline{n}$, la ecuación (11) puede escribirse

$$v_\eta = \bigoplus_{j \in S_{e,v}(A_\lambda)} [A_\lambda^*]_{\eta j} \otimes v_j \leq \bigoplus_{i \in V^c(A)} [A_\lambda^*]_{\eta i} \otimes v_i,$$

obteniéndose que

$$v_n \leq \bigoplus_{i \in V^c(A)} [A_\lambda^*]_{\eta i} \otimes v_i.$$

Por otra parte, como v es vector propio de A_λ^* asociado a e ,

$$v_\eta = [A_\lambda^* \otimes v]_\eta = \bigoplus_{j=1}^n [A_\lambda^*]_{\eta j} \otimes v_j \geq \bigoplus_{i \in V^c(A)} [A_\lambda^*]_{\eta i} \otimes v_i, \quad (12)$$

para $\eta \in \underline{n}$. Note que $V^c(A) = V^c(A_\lambda)$, entonces

$$v_\eta = \bigoplus_{i \in V^c(A)} [A_\lambda^*]_{\eta i} \otimes v_i.$$

□

Proposición 2.60 *Sea $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ una matriz irreducible con valor propio λ . Para i, j que pertenecen al grafo crítico de A , existe $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$a \otimes [A_\lambda^*]_{.i} = [A_\lambda^*]_{.j} \quad (13)$$

si y solo si, i y j pertenecen al mismo subgrafo fuertemente conexo del grafo crítico de A .

Demostración Recuerde que el grafo crítico de A coincide con el grafo crítico de A_λ , entonces suponga que i y j pertenecen al mismo subgrafo fuertemente conexo del grafo crítico de A_λ , por lo tanto $[A_\lambda^*]_{ji} \otimes [A_\lambda^*]_{ij} = 0$. Como $A_\lambda^* \otimes A_\lambda^* \leq A_\lambda^*$

$$[A_\lambda^*]_{li} \otimes [A_\lambda^*]_{ij} \leq [A_\lambda^*]_{lj} \text{ para todo } l \in \underline{n}.$$

Del hecho $[A_\lambda^*]_{ji} \otimes [A_\lambda^*]_{ij} = 0$ se sigue que $[A_\lambda^*]_{lj} = [A_\lambda^*]_{lj} \otimes [A_\lambda^*]_{ji} \otimes [A_\lambda^*]_{ij}$, entonces

$$[A_\lambda^*]_{lj} \leq [A_\lambda^*]_{li} \otimes [A_\lambda^*]_{ij} \text{ para todo } l \in \underline{n},$$

entonces $[A_\lambda^*]_{li} \otimes [A_\lambda^*]_{ij} = [A_\lambda^*]_{lj}$. Si $a = [A_\lambda^*]_{ij}$, queda demostrado que $a \otimes [A_\lambda^*]_{.i} = [A_\lambda^*]_{.j}$. Ahora

suponga que i y j no pertenecen al mismo subgrafo fuertemente conexo del grafo crítico de A_λ y que (13) se cumple, entonces la i -ésima y j -ésima componente de (13) satisface que

$$[A_\lambda^*]_{ij} = a \otimes [A_\lambda^*]_{ii} = a \text{ y } [A_\lambda^*]_{ji} = [A_\lambda^*]_{jj} \otimes (-a) = -a,$$

entonces $[A_\lambda^*]_{ji} \otimes [A_\lambda^*]_{ij} = 0$. Luego el circuito formado por las aristas (i, j) y (j, i) tiene peso promedio 0, por lo tanto i, j pertenecen al grafo crítico de A_λ y como consecuencia i y j pertenecen al mismo subgrafo fuertemente conexo lo cual es una contradicción. \square

Ejemplo 2.61 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz A es irreducible y tiene valor propio único $\lambda = 6$, además el grafo crítico de A consta de los vértices $\{1, 2\}$ que corresponden al circuito crítico 121, por lo tanto el grafo crítico de A tiene solo un subgrafo fuertemente conexo. Se tiene que

$$A_\lambda^* = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

por Proposición 2.49, los vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ son vectores propios de A . Observe que estos vectores son múltiplos el uno del otro en el sentido máx-plus, lo cual se verifica con Teorema

2.60 ya que los vértices pertenecen al mismo subgrafo fuertemente conexo del grafo crítico de A . Por lo tanto el espacio propio de A está dado por

$$V_\lambda(A) = \left\{ v \in \mathbb{R}_\varepsilon^2 : v = a \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ para } a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ejemplo 2.62 Considere

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz A es irreducible con valor propio único $\lambda = 0$. El grafo crítico de A está compuesto por los vértices $\{1, 2\}$ los cuales corresponden a los circuitos críticos 11 y 22, por lo tanto el grafo crítico de A tiene dos subgrafos fuertemente conexos. Ahora

$$A_\lambda^* = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

por Proposición 2.49, los vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ son vectores propios de A . Estos vectores no son múltiplos el uno del otro, lo cual se verifica con Teorema 2.60, ya que los vértices que conforman los circuitos críticos pertenecen a diferentes subgrafos fuertemente conexos del

grafo crítico de A . Por lo tanto, el espacio propio de A está dado por

$$V_\lambda(A) = \left\{ v \in \mathbb{R}_E^2 : v = a_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \oplus a_2 \otimes \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ para } a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Álgebra máx-plus y cuadrados latinos

En este capítulo se estudiarán algunas propiedades estructurales de los cuadrados latinos en el álgebra máx-plus como lo son la clausura bajo las operaciones \oplus y \otimes , también se estudiarán los valores y vectores propios que posee un cuadrado latino. Estos resultados se pueden encontrar en (Mufid and Subiono, 2014) y (Mufid and Subiono, 2013).

3.1. Cuadrados latinos

Definición 3.1 *Un cuadrado latino L de orden n es una matriz $n \times n$ cuyas entradas son los enteros $1, 2, \dots, n$. Ningún entero aparece más de una vez en cada fila y en cada columna de L .*

Ejemplo 3.2 *Sea la matriz*

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

L es un cuadrado latino de orden 4.

Los cuadrados latinos han sido estudiados durante siglos, pero fue Leonhard Euler quien

en 1779 los definió formalmente (Andersen, 2007), él usó letras del latín como elementos de tales cuadrados, por lo tanto, la matriz

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}$$

también es un cuadrado latino de orden 3.

Teorema 3.3 *Existe un cuadrado latino de orden n para cada entero positivo n .*

Demostración Considere los números $1, 2, \dots, n$. La primera fila del cuadrado será $1, 2, 3, \dots, n$.

Ahora, a partir del segundo renglón se desplazan los elementos de la primera fila una posición hacia la izquierda, quedando el primer elemento de la fila anterior al final de la fila que se está construyendo. El cuadrado latino que se obtiene al seguir este procedimiento es

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \dots & & n-1 \end{pmatrix}.$$

□

Como en el álgebra máx-plus el elemento $\varepsilon = -\infty$ puede ser elemento de una matriz dada, entonces se deben considerar dos tipos de cuadrados latinos.

1. Los cuadrados de orden n con todas sus entradas finitas serán denotados como \mathcal{L}^n y sus entradas serán los elementos del conjunto $\underline{n} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.
2. Los cuadrados de orden n tales que en sus entradas se encuentre el elemento $\varepsilon = -\infty$ se denotarán como $\mathcal{L}_\varepsilon^n$ y sus entradas serán los elementos del conjunto $\underline{n}_\varepsilon = \{-\infty, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Ejemplo 3.4 Las siguientes matrices son un ejemplo de cuadrados latinos del tipo \mathcal{L}^n y $\mathcal{L}_\varepsilon^n$:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \varepsilon & 1 \\ 3 & \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Claramente $L_1 \in \mathcal{L}^4$ y $L_2 \in \mathcal{L}_\varepsilon^4$.

3.2. Propiedades de los cuadrados latinos

Proposición 3.5 *Todo cuadrado latino es una matriz irreducible*

Demostración Sea L un cuadrado latino. Si $L \in \mathcal{L}^n$, entonces todas las entradas de L son finitas, por lo tanto, en el grafo $G(L)$ existe un camino de longitud uno desde un vértice i a otro

vértice j , para todo $i, j \in \underline{n}$, entonces $G(L)$ es fuertemente conexo, lo cual muestra que L es una matriz irreducible. Ahora suponga que $L \in \mathcal{L}_\varepsilon^n$, considere la matriz $L^{\otimes 2} = L \otimes L$; como ε aparece exactamente una vez en cada fila y cada columna de L , la entrada $[L^{\otimes 2}]_{ij}$ es finita para todo $i, j \in \underline{n}$, es decir, en $G(L)$ existen caminos de longitud dos que conectan a un vértice i con un vértice j , para cada $i, j \in \underline{n}$, por lo tanto, $G(L)$ es fuertemente conexo y así L es irreducible.

□

Definición 3.6 Diremos que los cuadrados latinos son cerrados bajo la operación \oplus , si dados A y B cuadrados latinos, $A \oplus B$ también es un cuadrado latino.

Observación Sean $A, B \in \mathcal{L}^n$ y $C = A \oplus B$. Se sabe que $[A]_{ij}$ y $[B]_{ij}$ son elementos finitos, entonces $[C]_{ij} = [A]_{ij} \oplus [B]_{ij}$ también lo es, por lo tanto, si C es un cuadrado latino necesariamente $C \in \mathcal{L}^n$. De igual forma, si $A, B \in \mathcal{L}_\varepsilon^n$ y $C = A \oplus B$, entonces $C \in \mathcal{L}_\varepsilon^n$.

Proposición 3.7 Sean A y B cuadrados latinos. $A \oplus B$ es un cuadrado latino si y solo si $A = B$.

Demostración Sean $A, B \in \mathcal{L}^n$ y $C = A \oplus B$. Observe que

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \oplus b_{11} & a_{12} \oplus b_{12} & \dots & a_{1n} \oplus b_{1n} \\ a_{21} \oplus b_{21} & a_{22} \oplus b_{22} & \dots & a_{2n} \oplus b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \oplus b_{n1} & a_{n2} \oplus b_{n2} & \dots & a_{nn} \oplus b_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces fijando la j -ésima columna de C se tiene que

$$\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \oplus b_{1j} \\ a_{2j} \oplus b_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \oplus b_{nj} \end{pmatrix}.$$

Como A es cuadrado latino, existe $i_1 \in \underline{n}$ tal que $a_{i_1j} = n$. Si $b_{i_1j} \neq n$ solo puede pasar que $b_{i_1j} < n$, por lo tanto $c_{i_1j} = a_{i_1j} \oplus b_{i_1j} = n$. Por hipótesis B es cuadrado latino, entonces existe $b_{i_kj} = n$ con $i_k \in \underline{n}$, dado que $a_{i_1j} = n$, $a_{i_kj} < n$ y así $c_{i_kj} = a_{i_kj} \oplus a_{i_1j} = n$, lo cual contradice que C sea cuadrado latino, luego $a_{i_1j} = b_{i_1j}$. Siguiendo el mismo razonamiento, existe $i_2 \in \underline{n}$ con $i_2 \neq i_1$, tal que $a_{i_2j} = n - 1$ para concluir que $a_{i_2j} = b_{i_2j}$. Repitiendo este proceso se llega a que $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in \underline{n}$, esto es $[A]_{ij} = [B]_{ij}$ y al ser j arbitrario, se tiene que $A = B$. Ahora suponga que $A = B$ y $C = A \oplus B$, entonces $c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$ para $i, j \in \underline{n}$. Por hipótesis $a_{ij} = b_{ij}$ para cada $i, j \in \underline{n}$, entonces $c_{ij} = a_{ij} \oplus a_{ij} = a_{ij}$, por lo tanto $C = A \oplus B = A \oplus A = A$.

Para el caso en el que $A, B \in \mathcal{L}_\varepsilon^n$ la prueba es análoga. □

por la proposición anterior los cuadrados latinos no son cerrados bajo la operación \oplus .

Ejemplo 3.8 Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

no es un cuadrado latino. De igual forma, considere las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 2 \\ 2 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$C \oplus D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$$

no es un cuadrado latino.

Definición 3.9 Se dice que los cuadrados latinos son cerrados bajo la operación \otimes si dados A y

B cuadrados latinos, su producto $A \otimes B$ es también un cuadrado latino. En otras palabras, $A \otimes B$ es cuadrado latino si existe un cuadrado latino C y un número natural p tal que $A \otimes B = p \otimes C$.

Proposición 3.10 Si $A, B, C \in \mathcal{L}^n$ satisfacen que $A \otimes B = p \otimes C$, entonces $p = n$.

Demostración Sea $A \otimes B = D$ con D cuadrado latino, entonces $[D]_{ij} = \max\{a_{i1} + b_{1j}, a_{i2} + b_{2j}, \dots, a_{in} + b_{nj}\}$. Como el mayor valor que puede tomar a_{ik} y b_{kj} para cada $k \in \underline{n}$ es n , entonces el mayor valor que toma $[D]_{ij}$ es $2n$. Ahora considere $d_k = a_{ik} + b_{kj}$, entonces $[D]_{ij} = \max\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. Partiendo del hecho de que $\sum_{k=1}^n d_k = n(n+1)$ se tiene que el valor mínimo que puede tomar $[D]_{ij}$ es $n+1$ y este ocurre cuando $d_1 = d_2 = \dots = d_n = n+1$. Si existe $k \in \underline{n}$ tal que $d_k < n+1$, como D es cuadrado latino, entonces existe $l \in \underline{n}$ tal que $d_l > n+1$ y como consecuencia $[D]_{ij} > n+1$. Por lo tanto, $n+1 \leq [D]_{ij} \leq 2n$ para $i, j \in \underline{n}$. Dado que D es un cuadrado latino de orden n , se tiene que $[D]_{ij} = \{n+k : k \in \underline{n}\}$ y como $D = p \otimes C$, entonces $[D]_{ij} = n+k = p + [C]_{ij}$, para todo $i, j \in \underline{n}$, luego $n = p$ y $[C]_{ij} = k$. □

Dados $A, B \in \mathcal{L}^n$, por la proposición anterior, una condición para que $A \otimes B$ sea un cuadrado latino, es que para cada $i \in \underline{n}$ exista $j \in \underline{n}$ tal que $[A]_{i.} + [B]_{.j} = [n+1 \ n+1 \ \dots \ n+1]$. Por lo tanto, los cuadrados latinos no son cerrados bajo la operación \otimes .

Ejemplo 3.11 Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 3 \otimes \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

no es cuadrado latino.

Observación Sean $A, B, C \in \mathcal{L}_\varepsilon^n$. Se tiene que $[A \otimes B]_{ij} = \max\{a_{i1} + b_{1j}, a_{i2} + b_{2j}, \dots, a_{in} + b_{nj}\} \neq \varepsilon$ para todo $i, j \in \underline{n}$. Además, note que dado un natural p , $[p \otimes C]_{ij} = p + [C]_{ij}$ donde $[C]_{ij} \in \{\varepsilon, 1, 2, \dots, n-1\}$, por lo tanto existen $i, j \in \underline{n}$ tal que $[p \otimes C]_{ij} = p + [C]_{ij} = \varepsilon$, lo que implica que no existe $C \in \mathcal{L}_\varepsilon^n$ tal que $A \otimes B = p \otimes C$.

Ejemplo 3.12 Considere

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 2 & \varepsilon & 1 \\ 1 & 2 & \varepsilon \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 2 \\ 2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

no es cuadrado latino.

3.3. Valores y vectores propios

Todos los cuadrados latinos son matrices irreducibles, para encontrar el valor propio de un cuadrado L , se necesita encontrar el peso promedio de los circuitos críticos en el grafo asociado $G(L)$.

Teorema 3.13 Sean $A \in \mathcal{L}^n$ y $B \in \mathcal{L}_\varepsilon^n$. El peso promedio de los circuitos críticos en $G(A)$ y $G(B)$ es igual a n y $n - 1$ respectivamente.

Demostración Sea $A \in \mathcal{L}^n$. Sabemos que $[A]_{ij} \in \underline{n}$ y el mayor número que puede tomar $[A]_{ij}$ es n , para $i, j \in \underline{n}$. Sea $i_1 \in \underline{n}$, como A es un cuadrado latino, existe $i_2 \in \underline{n}$ tal que $a_{i_2 i_1} = n$. Si $i_1 = i_2$, para el circuito $p = i_1 i_1$, el peso promedio $|p|_w / |p|_l = n$. En caso de que $i_1 \neq i_2$, existe $i_3 \in \underline{n}$ tal que $a_{i_3 i_2} = n$. Si $i_1 = i_3$, considere el circuito $p = i_1 i_2 i_3$, de manera que $|p|_w / |p|_l = n$. Si ocurre que $i_1 \neq i_3$, siguiendo este razonamiento se puede encontrar un circuito crítico $p = i_1 i_2 i_3 \dots i_k i_{k+1}$, con $i_1 = i_{k+1}$ y longitud $k \leq n$, para $k \in \underline{n}$, tal que $\sum_{m=1}^k a_{i_{m+1} i_m} = kn$ y así $|p|_w / |p|_l = n$. Por lo tanto, el peso promedio de los circuitos críticos en $G(A)$ es n . Para el caso en el que $B \in \mathcal{L}_\varepsilon^n$, la prueba es análoga. \square

Observación Como se mostró anteriormente, todos los cuadrados latinos son matrices irreducibles, por lo tanto, su único valor propio corresponde al peso promedio de los circuitos críticos en su grafo asociado, es por esta razón que el único valor propio de $A \in \mathcal{L}^n$ y $B \in \mathcal{L}_\varepsilon^n$ es n y $n - 1$ respectivamente.

Considere $A \in \mathcal{L}^n$ y $B \in \mathcal{L}_\varepsilon^n$, denotemos como $\lambda = n$ y $\beta = n - 1$ los valores propios

de A y B respectivamente. Tenemos que

$$A_\lambda = A \otimes (-n) \text{ y } B_\beta = B \otimes (-(n-1)),$$

como λ y β son los pesos promedios máximos de los circuitos en $G(A)$ y $G(B)$, entonces el peso promedio máximo de los circuitos en $G(A_\lambda)$ y $G(B_\beta)$ es cero, por Teorema 2.36, las matrices A_λ^+ y B_β^+ pueden ser calculadas.

Teorema 3.14 Sean $A \in \mathcal{L}^n$ y $B \in \mathcal{L}_\varepsilon^n$ con valores propios $\lambda = n$ y $\beta = n - 1$ respectivamente, entonces todas las columnas de A_λ^+ son vectores propios de A que corresponden a λ y todas las columnas de B_β^+ son vectores propios de B que corresponden a β .

Demostración Sea $A \in \mathcal{L}^n$ con valor propio $\lambda = n$. Como A_λ^+ está bien definida, la matriz $A_\lambda^* = E \oplus A_\lambda^+$ puede calcularse. Por otra parte, λ aparece una sola vez en cada fila y cada columna de A , entonces se puede encontrar un circuito crítico en $G(A)$ tal que su vértice inicial es i , para todo $i \in \underline{n}$, esto es, todos los vértices en $G(A)$ están en un circuito crítico y por lo tanto se satisface que

$$[A_\lambda^+]_{ii} = 0 \text{ para todo } i \in \underline{n},$$

como consecuencia $[A_\lambda^*]_{.i} = [A_\lambda^+]_{.i}$ para todo $i \in \underline{n}$. Por Proposición 2.49, todas las columnas de A_λ^+ son vectores propios de A que corresponden a λ . Para $B \in \mathcal{L}_\varepsilon^n$ la prueba es análoga. \square

Ejemplo 3.15 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que el único valor propio de A es número mayor que aparece en sus entradas, entonces $\lambda = 4$ y

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora se procede a calcular A_λ^+ , para ello considere las siguientes matrices

$$A_\lambda^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\lambda^{\otimes 3} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$yA_{\lambda}^{\otimes 4} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$A_{\lambda}^+ = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

por Teorema 3.14, los vectores

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

son vectores propios de A que corresponden al valor propio λ . Ahora considere el siguiente

cuadrado latino

$$B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 & 1 & 2 \\ 1 & \varepsilon & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 2 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix},$$

entonces $\beta = 3$ es el único valor propio de B y además

$$B_\beta = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & -2 & -1 \\ -2 & \varepsilon & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & \varepsilon \\ 0 & -1 & \varepsilon & -2 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculemos B_β^+ , para ello considere las siguientes matrices

$$B_\beta^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, B_\beta^{\otimes 3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y B_{\beta}^{\otimes 4} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$B_{\beta}^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

por Teorema 3.14, los vectores

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

son vectores propios de B que corresponden al valor propio β .

Referencias Bibliográficas

- Andersen, L. D. (2007). *Chapter on The history of latin squares*. Research Report Series. Department of Mathematical Sciences, Aalborg University.
- Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G., and Quadrat, J.-P. (1993). *Synchronization and linearity: An algebra for discrete event systems*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley and Sons, wiley edition.
- Brualdi, R. A. and Cvetkovic, D. (2008). *A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Applications*. Discrete Mathematics and Its Applications. Chapman and Hall/CRC, 1 edition.
- Butkovič, P. (2010). *Max-linear systems: Theory and algorithms*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, 1 edition.
- Cuninghame-Green, R. (1979). *Minimax Algebra*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 166. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition.
- Gaubert, S. (1997). Methods and applications of $(\max, +)$ linear algebra. *Lecture Notes in Computer Science*, 1200.
- Gondran, M. and Minoux, M. (1984). Linear algebra in dioids: A survey of recent results. *Annals of Discrete Mathematics*, 19:147–164.
- Heidergot, B., Olsder, G. J., and van der Woude, J. (2005). *Max Plus at Work: Modeling*

and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications.

Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press.

Kleene, S. C. (1956). Representation of events in nerve nets and finite automata. pages 3–41.

Princeton University Press.

Mufid, M. and Subiono (2013). *On The Structural Properties of Latin Square in Max-Plus*

Algebra. The Third Basic Science International Conference. M03.

Mufid, M. and Subiono (2014). Eigenvalues and eigenvectors of latin squares in max-plus

algebra. *J. Indones. Math. Soc.*, 20:37–45.