

ESTUDIO COMPUTACIONAL DEL EFECTO DE LA TRIANGULARIDAD DE UNA  
COLUMNA DE PLASMA AZIMUTALMENTE SIMÉTRICA EN UN TOKAMAK ESFÉRICO  
EN EL RÉGIMEN LINEAL

Juan Sebastian Alba Gamboa

Trabajo de Grado para optar al título de Física

Director

Eduardo Alberto Orozco Ospino

Doctorado en Física

Codirector

Jesús Eduardo López Durán

MSc. Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2026

### **Dedicatoria**

Este trabajo va dedicado a mi mamá Sandra y a mi papá Leonardo, a quienes espero estarles retribuyendo todo el amor con el que me llenaron y el esfuerzo que invirtieron en mí desde que tengo memoria.

Mami, papi, siempre seré dichoso por ser su hijo... Lo hicieron muy bien.

### **Agradecimientos**

Doy gracias infinitas a mi familia materna, quienes siempre apoyaron cada una de mis locuras, entre las cuales se encuentra estudiar física. A mi nona Myriam, quien nunca cesó su cariño a ninguno de sus nietos. A mi abuelo Álvaro, quien es un faro de rectitud para toda la familia. A mi tía Diana, quien siempre me hace reír con sus ocurrencias y chistes. Al doctorísimo Carlos, quien avivó mi llama científica. A mi primo Camilo, cuyas recomendaciones nunca me han decepcionado. A mi prima Natalia, cuya ternura y humanidad me sigue sorprendiendo. A mi primo Juanjo, a quien le deseo que esa felicidad le dure por siempre.

A mi familia paterna, a quienes, a pesar de pasar largas épocas sin vernos, sé lo mucho que me quieren y apoyan.

Gracias a mis amigos, mi tranquilidad durante la carrera y mi método favorito de relajación si se acompaña con un buen juego de mesa.

A mis directores Eduardo Orozco y Jesús López por toda la guía y ayuda que me han brindado a pesar de mi descuido.

A Mafe, la co-protagonista de mi vida, y a quien nunca podré pagar por el apoyo, cariño y ayuda que me ha ofrecido desde que la conocí.

A mis papás, por dedicar su vida, desde que yo nací, a formarme en valores y amor por aprender.

**Tabla de Contenido**

<b>Introducción</b>	<b>11</b>
<b>1 Confinamiento magnético</b>	<b>15</b>
1.1 Principios de la fusión nuclear	15
1.2 Principios del confinamiento magnético	17
1.3 Dispositivos de confinamiento	19
1.4 Tokamak	20
1.5 Estabilidad	23
1.5.1 <i>Variación de energía potencial <math>\delta W</math></i>	25
<b>2 Modelo teórico</b>	<b>27</b>
2.1 Consideraciones MHD	27
2.2 MHD ideal	29
2.3 Ecuaciones MHD ideal	30
2.3.1 <i>Conservación de masa:</i>	30
2.3.2 <i>Balance de cantidad de movimiento:</i>	30
2.3.3 <i>Conservación de energía (forma adiabática):</i>	30
2.3.4 <i>Ecuación de inducción magnética:</i>	30
2.4 Estados de equilibrio	33

2.5	Linealización	35
<b>3</b>	<b>Modelo numérico</b>	<b>36</b>
3.1	Geometría y condiciones de frontera	36
3.2	Esquema numérico y validación	37
3.2.1	<i>Discretización de las ecuaciones</i>	37
3.2.2	<i>Estado de equilibrio y perturbación</i>	38
3.3	Normalización	39
3.3.1	<i>Evolución temporal</i>	40
3.3.2	<i>Criterio de courant</i>	41
3.3.3	<i>Cálculo de <math>\delta W</math>, <math>\langle P \rangle</math> y <math>\langle B^2 \rangle</math></i>	42
<b>4</b>	<b>Resultados y discusión</b>	<b>43</b>
4.1	Equilibrios MHD axisimétricos	45
4.2	Perturbación inicial	52
4.3	Validación	55
4.4	Evolución de la presión	56
4.5	Evolución de parámetros energéticos	60
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>69</b>
	<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>73</b>

### Lista de Figuras

Figura 1	<i>Esquema de la reacción de fusión deuterio-tritio (D-T)</i>	15
Figura 2	<i>Reactividad en función de la temperatura para (D-D), (D-T) y (D-<sup>3</sup>He)</i>	16
Figura 3	<i>Configuración helicoidal típica de un dispositivo Stellarator</i>	20
Figura 4	<i>Tokamak y D – shape</i>	21
Figura 5	<i>Esquema-Tipos de equilibrio</i>	24
Figura 6	<i>Ilustración-plasma</i>	28
Figura 7	<i>Congelamiento magnético</i>	32
Figura 8	<i>Isocontornos y presión de equilibrio</i>	47
Figura 9	<i>Componentes y divergencia del campo magnético</i>	49
Figura 10	<i>Perfiles de equilibrio: <math>\delta(+)</math> VS <math>\delta(-)</math></i>	51
Figura 11	<i>Perfiles de equilibrio: <math>P_{max} = 24kPa</math> VS <math>P_{max} = 36kPa</math></i>	53
Figura 12	<i>Perturbación inicial</i>	55
Figura 13	<i>Evolución de <math>P_1</math> para <math>P_{max} = 24kPa</math> y <math>\delta = 0,3</math></i>	58
Figura 14	<i>Comportamiento modal en <math>P_1</math></i>	59
Figura 15	<i>Evolución de <math>P_1</math> para <math>P_{max} = 24kPa</math> y <math>\delta = -0,3</math></i>	61
Figura 16	<i>Evolución de <math>P_1</math> para <math>P_{max} = 24kPa</math> y <math>\delta = 0,6</math></i>	62
Figura 17	<i>Evolución de <math>P_1</math> para <math>P_{max} = 36kPa</math> y <math>\delta = 0,3</math></i>	63

- Figura 18 *Evolución de  $\langle B^2 \rangle$  para  $P_{max} = 24kPa$  y  $\delta = \pm 0,3$*  65
- Figura 19 *Evolución de  $\langle P_1 \rangle$  para  $P_{max} = 24kPa$  y  $\delta = \pm 0,3$*  65
- Figura 20 *Evolución de  $\delta W$  con  $P_{max}$  constante ( $\delta(+)$  VS  $\delta(-)$ )* 67

**Lista de Tablas**

Tabla 1	<i>Sección eficaz y energías óptimas para distintas reacciones de fusión</i>	17
Tabla 2	<i>Parámetros geométricos y globales de la simulación</i>	44

**Título:** ESTUDIO COMPUTACIONAL DEL EFECTO DE LA TRIANGULARIDAD DE UNA COLUMNA DE PLASMA AZIMUTALMENTE SIMÉTRICA EN UN TOKAMAK ESFÉRICO EN EL RÉGIMEN LINEAL \*

**Autor:** Juan Sebastian Alba Gamboa \*\*

**Palabras Clave:** tokamak esférico, magnetohidrodinámica, triangularidad, estabilidad lineal, simulaciones numéricas.

**Resumen:** En este trabajo se desarrolló e implementó un código computacional basado en el modelo magnetohidrodinámico (MHD) ideal y linealizado para estudiar la dinámica de plasmas confinados magnéticamente en configuraciones tipo tokamak esférico bajo simetría axial. La investigación se enfocó en analizar cómo la triangularidad de la sección transversal del plasma afecta su estabilidad magnetohidrodinámica.

Se realizaron simulaciones numéricas de diez configuraciones de equilibrio MHD, diferenciadas por dos valores de presión central (24 kPa y 36 kPa) y cinco valores de triangularidad ( $\delta = \pm 0,6, \pm 0,3, 0,0$ ). El esquema numérico empleó diferencias finitas de segundo orden para aproximar derivadas espaciales y el método de Runge-Kutta de cuarto orden para la integración temporal, garantizando una conservación excelente de la condición solenoidal del campo magnético ( $\nabla \cdot \mathbf{B} < 10^{-5}$ ).

Los resultados demuestran que todas las configuraciones analizadas son linealmente estables bajo perturbaciones iniciales gaussianas. Sin embargo, el análisis de la variación de energía potencial ( $\delta W$ ) reveló diferencias sistemáticas entre geometrías: las configuraciones con triangularidad negativa presentan valores promedio de  $\delta W$  significativamente mayores (hasta  $2,98 \times 10^{-3}$  J para  $\delta = \pm 0,6$  con  $P_{\text{máx}} = 36$  kPa), indicando mayor robustez energética y mayor resistencia al crecimiento de inestabilidades. Este hallazgo confirma que la triangularidad negativa es un factor estabilizador importante en tokamaks esféricos, consistente con observaciones experimentales reportadas en literatura reciente.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física Director: Eduardo Alberto Orozco Ospino, Ph.D. Co-director: Jesús Eduardo López Durán, MSc.

**Title:** COMPUTATIONAL STUDY OF THE EFFECT OF TRIANGULARITY OF AN AZIMUTHALLY SYMMETRIC PLASMA COLUMN IN A SPHERICAL TOKAMAK IN THE LINEAR REGIME \*

**Author:** Juan Sebastian Alba Gamboa \*\*

**Keywords:** spherical tokamak, magnetohydrodynamics, triangularity, linear stability, numerical simulations.

**Abstract:** In this work, a computational code based on the ideal and linearized magnetohydrodynamic (MHD) model was developed and implemented to study the dynamics of magnetically confined plasmas in spherical tokamak configurations under axial symmetry. The research focused on analyzing how the triangularity of the plasma cross-section affects its magnetohydrodynamic stability. Numerical simulations were carried out for ten MHD equilibrium configurations, differentiated by two values of central pressure (24 kPa and 36 kPa) and five values of triangularity ( $\delta = \pm 0,6, \pm 0,3, 0,0$ ). The numerical scheme employed second-order finite differences to approximate spatial derivatives and the fourth-order Runge-Kutta method for time integration, ensuring excellent conservation of the solenoidal condition of the magnetic field ( $\nabla \cdot \mathbf{B} < 10^{-5}$ ). The results demonstrate that all analyzed configurations are linearly stable under Gaussian initial perturbations. However, the analysis of the potential energy variation ( $\delta W$ ) revealed systematic differences between geometries: configurations with negative triangularity exhibit significantly higher average values of  $\delta W$  (up to  $2,98 \times 10^{-3}$  J for  $\delta = \pm 0,6$  with  $P_{\max} = 36$  kPa), indicating greater energetic robustness and higher resistance to instability growth. This finding confirms that negative triangularity is an important stabilizing factor in spherical tokamaks, consistent with experimental observations reported in recent literature.

---

\* Undergraduate thesis

\*\* Faculty of Sciences. School of Physics. Advisor: Eduardo Alberto Orozco Ospino, Ph.D. Co-advisor: Jesús Eduardo López Durán, MSc.

## Introducción

A principios del siglo XX, con el desarrollo y consolidación de la teoría cuántica, se avanzó significativamente en la comprensión de la estructura atómica y las reacciones nucleares (Council et al., 1930). Entre estas, la fusión nuclear emergió como una fuente de energía con un potencial extraordinario, capaz de alimentar incluso a las estrellas (Eddington, 1988). Este descubrimiento motivó la idea de replicar y controlar reacciones de fusión nuclear en la Tierra, lo que podría proporcionar una fuente de energía prácticamente inagotable y transformar el panorama energético global. No obstante, las condiciones necesarias para lograr la fusión nuclear son extremas, particularmente en cuanto a las temperaturas requeridas, que superan ampliamente los límites que cualquier material sólido puede soportar sin fundirse o evaporarse (Stacey, 2012).

En este contexto, el estudio del plasma, el cuarto estado de la materia, se vuelve fundamental. Un plasma es un gas ionizado, cuasineutro, que experimenta comportamientos colectivos y que, bajo condiciones de alta temperatura, permite la ocurrencia de reacciones de fusión. Sin embargo, el confinamiento de un plasma a tales temperaturas representa un desafío tecnológico y científico considerable (Perrone, Dendy, Furno, Sanchez, Zimbardo, Bovet, Fasoli, Gustafson, Perri, Ricci et al., 2013), ya que el contacto con cualquier superficie sólida provocaría su inmediato deterioro y por ende un enfriamiento rápido y la pérdida de las condiciones necesarias para la fusión. Para superar esta dificultad, se han desarrollado métodos no convencionales de confinamiento, destacándose principalmente dos: el confinamiento inercial y el confinamiento magnético (Obaldía, 2014).

Este último utiliza campos magnéticos para aislar el plasma de las paredes del dispositivo, evitando su enfriamiento y permitiendo el mantenimiento de las altas temperaturas requeridas.

Dentro de los dispositivos de confinamiento magnético, el *stellarator* (Pustovitov & Shafranov, s.f.) y el *tokamak* se presentan como los más ampliamente estudiados. Ambos emplean una configuración toroidal, aunque difieren en su diseño. Mientras que el *stellarator* presenta una geometría retorcida que puede complicar su análisis y construcción, el *tokamak* aprovecha la simetría axial, lo que facilita su estudio y operación (Holtkamp, Team et al., 2007). Esta ventaja ha posicionado al *tokamak* como el candidato más prometedor para el desarrollo de un reactor para la generación de energía por fusión nuclear a corto y mediano plazo, impulsando proyectos de gran escala como el *ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor)* (Holtkamp, Team et al., 2007), ubicado en Francia, cuyo objetivo es demostrar la viabilidad de la fusión nuclear como fuente de energía sostenible. A pesar de los avances en el diseño y operación de dispositivos tipo *tokamak*, el confinamiento magnético de plasmas enfrenta desafíos significativos derivados de la naturaleza electromagnética del sistema. Entre estos desafíos destacan las inestabilidades magnetohidrodinámicas (MHD), que surgen debido a perturbaciones en los campos magnéticos y pueden comprometer la estabilidad del plasma (Miyamoto, 2011). Estas inestabilidades pueden desviar el comportamiento del plasma de los escenarios ideales, introduciendo dificultades adicionales en su control y en la modelización precisa de su dinámica. En particular, la complejidad de las interacciones entre los campos magnéticos, las corrientes de plasma y las perturbaciones MHD limitan la capacidad de los modelos analíticos para capturar todos los aspectos relevantes, especialmente en configuraciones

geométricas complejas o en regímenes no lineales. Por ello, las investigaciones numéricas se han convertido en una herramienta indispensable para estudiar la dinámica del plasma en dichos regímenes y bajo configuraciones geométricas específicas. Mediante simulaciones computacionales es posible explorar sistemáticamente el efecto de parámetros como la triangularidad, la elongación y la corriente de plasma, proporcionando perspectivas que no serían accesibles mediante métodos puramente analíticos o experimentales.

Uno de los aspectos clave en el estudio de plasmas confinados en un *tokamak* es la geometría del plasma, particularmente su forma de *D-shape* evidenciada en el corte transversal del toroide (Nicolai & Börner, 1989). Esta forma, que puede modificarse ajustando los campos magnéticos de confinamiento, tiene un impacto directo en la estabilidad y el comportamiento del plasma. Investigaciones recientes, tanto numéricas como experimentales, han demostrado que configuraciones específicas del *D-shape*, en particular aquellas con triangularidad negativa, pueden mejorar significativamente el confinamiento del plasma y mitigar inestabilidades como los modos localizados en el borde (ELMs, por sus siglas en inglés) (Garofalo, Solomon, Park, Burrell, DeBoo, Lanctot, McKee, Reimerdes, Schmitz, Schaffer et al., 2011). Los ELMs son perturbaciones que ocurren en la región de borde del plasma y pueden liberar grandes cantidades de energía y partículas hacia las paredes del dispositivo, lo que representa un riesgo para la integridad de los componentes del reactor y la operación estable del plasma (Imran, Hu, Zheng, Sattar, Khan, Iqbal, Luo & Ding, 2024). Se ha observado que la triangularidad, un parámetro geométrico que caracteriza la forma del *D-shape* (Medvedev, Kikuchi, Villard, Takizuka, Diamond, Zushi, Nagasaki, Duan, Wu, Ivanov et al.,

2015), desempeña un papel crucial en la supresión de estos modos. En particular, configuraciones con triangularidad negativa han mostrado una reducción notable en la amplitud y frecuencia de los ELMs, lo que sugiere una vía prometedora para optimizar el diseño de futuros reactores de fusión (Austin, Marinoni, Walker, Brookman, Degraessie, Hyatt, McKee, Petty, Rhodes, Smith et al., 2019). Estos hallazgos remarcan la importancia de estudiar en detalle la influencia de la geometría del plasma en su estabilidad, no solo desde un punto de vista teórico, sino también mediante simulaciones numéricas que permitan explorar regímenes operativos y configuraciones magnéticas específicas.

Es así que en este trabajo se realizaron simulaciones numéricas de la dinámica MHD lineal de un *tokamak* esférico bajo la aproximación de simetría axial, con el propósito de estudiar cómo la triangularidad negativa afecta la estabilidad de la columna de plasma. Como primer paso, se adopta el régimen lineal, ya que permite obtener una visión general y fundamental de las inestabilidades MHD y, en particular, identificar cómo la geometría del plasma influye en su comportamiento, sin la complejidad adicional que implican los efectos no lineales. El presente estudio se enfoca principalmente en comparaciones de la dinámica de plasmas con triangularidad positiva y negativa en dichas configuraciones, con el objetivo de explorar y profundizar en la comprensión de las inestabilidades, contribuyendo así al entendimiento sobre el impacto de la geometría en la estabilidad

del plasma confinado en un dispositivo *tokamak*.

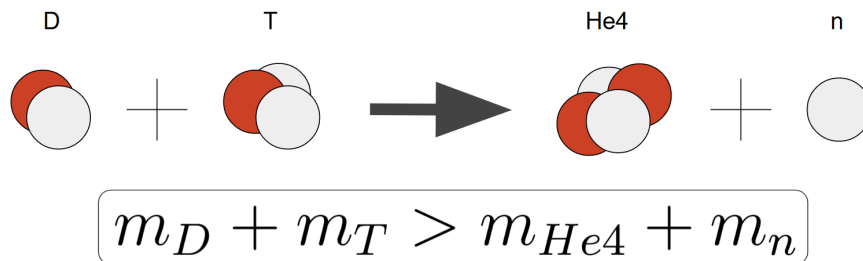
## 1. Confinamiento magnético

### 1.1. Principios de la fusión nuclear

La fusión nuclear es un proceso físico en el cual dos núcleos atómicos superan la repulsión electrostática, también conocida como barrera de Coulomb, y así alcanzar el régimen en que domina la interacción nuclear fuerte, formando entonces un núcleo más pesado. Este fenómeno, ilustrado en la Figura 1, requiere que los núcleos posean energías cinéticas suficientemente altas para vencer su repulsión mutua, condición que se logra macroscópicamente a temperaturas extremadamente elevadas, del orden de  $10^8$  K en sistemas de fusión por confinamiento magnético.

Figura 1.

*Esquema de la reacción de fusión deuterio-tritio (D-T)*



*Nota.* Los núcleos reactantes (*D* y *T*) se combinan para formar helio-4 ( ${}^4\text{He}$ ) y un neutrón (*n*). La diferencia de masa entre reactantes y productos, conocida como defecto de masa, se convierte en energía liberada.

Según la relatividad especial, el defecto de masa ( $\Delta m$ ) entre los núcleos iniciales y finales se transforma en energía, conforme a la ecuación,

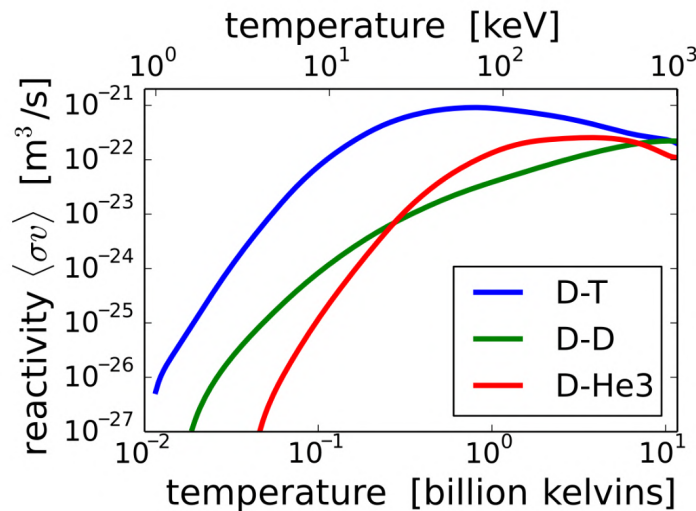
$$E = \Delta mc^2, \quad (1)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío (Einstein, 1905). La probabilidad de que estas reacciones de fusión ocurran está determinada por la sección eficaz de fusión  $\sigma(E)$ , la cual depende críticamente de la energía cinética de los núcleos (temperatura del plasma), de las características de los núcleos involucrados (carga y masa) y de efectos cuánticos como el efecto túnel a través de la barrera de Coulomb (Minotti, 2012).

En particular, la reacción D-T mostrada en la Figura 1 es de gran interés en dispositivos *tokamak* debido a su elevada sección eficaz a temperaturas alcanzables, del orden de  $\sim 10\text{--}20$  keV, y su favorable balance energético. Esta ventaja se observa comparativamente en la Figura 2 y la Tabla 1, donde se muestran las secciones eficaces y energías óptimas de diversas reacciones de fusión.

Figura 2.

*Reactividad en función de la temperatura para (D-D), (D-T) y (D-<sup>3</sup>He)*



*Nota.* Imagen extraída de (Atzeni & Meyer-ter-Vehn, 2004). La curva D-T presenta el máximo a temperaturas alcanzables en dispositivos actuales.

Tabla 1

*Sección eficaz y energías óptimas para distintas reacciones de fusión*

Reacción	$\sigma(10\text{keV})$ (barn)	$\sigma(100\text{keV})$ (barn)	$\sigma_{\text{máx}}$ (barn)	$\epsilon_{\text{máx}}$ (keV)
$D + T \rightarrow \alpha + n$	$2,72 \times 10^{-2}$	3.43	5.0	64
$D + D \rightarrow T + p$	$2,81 \times 10^{-4}$	$3,3 \times 10^{-2}$	0.096	1250
$D + D \rightarrow {}^3\text{He} + n$	$2,78 \times 10^{-4}$	$3,7 \times 10^{-2}$	0.11	1750
$T + T \rightarrow \alpha + 2n$	$7,90 \times 10^{-4}$	$3,4 \times 10^{-2}$	0.16	1000
$D + {}^3\text{He} \rightarrow \alpha + p$	$2,2 \times 10^{-7}$	0.1	0.9	250
$p + {}^6\text{Li} \rightarrow \alpha + {}^3\text{He}$	$6 \times 10^{-10}$	$7 \times 10^{-3}$	0.22	1500
$p + {}^{11}\text{B} \rightarrow 3\alpha$	$4,6 \times 10^{-17}$	$3 \times 10^{-4}$	1.2	550
$p + p \rightarrow D + e^+ + \nu$	$3,6 \times 10^{-26}$	$4,4 \times 10^{-25}$	–	–
$p + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{13}\text{N} + \gamma$	$1,9 \times 10^{-26}$	$2,0 \times 10^{-10}$	$1,0 \times 10^{-4}$	400
${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}$ (todas las ramas)	–	$5,0 \times 10^{-103}$	–	–

Nota. Tabla extraída de (Atzeni &amp; Meyer-ter-Vehn, 2004)

## 1.2. Principios del confinamiento magnético

A las temperaturas típicas de la fusión nuclear, del orden de  $10^8$  K, la materia adopta necesariamente el estado de plasma, un medio altamente conductor compuesto por especies cargadas cuyo comportamiento colectivo está dominado principalmente por interacciones electromagnéticas (Fitzpatrick, 2022). El desafío tecnológico fundamental consiste en confinar este plasma evitando su contacto con superficies materiales, lo que provocaría tanto su enfriamiento como el deterioro de los componentes del reactor.

En la búsqueda de soluciones a este desafío, han emergido dos enfoques principales. El primero, conocido como confinamiento inercial, el cual busca alcanzar las condiciones de fusión mediante la creación de altas densidades a través de implosiones ultrarrápidas que comprimen el combustible.

El segundo, y de mayor relevancia para este estudio, es el confinamiento magnético, que emplea configuraciones cuidadosamente diseñadas de campos magnéticos para mantener el plasma dentro de regiones bien definidas sin contacto material.

Entre los diversos dispositivos de confinamiento magnético, el *tokamak* ha demostrado ser particularmente prometedor para aplicaciones de fusión controlada. Su diseño combina varios campos magnéticos, como un campo toroidal generado por bobinas externas, un campo poloidal inducido por la corriente que circula en el plasma (Baek, Wallace, Bonoli, Brunner, Faust, Hubbard, Hughes, LaBombard, Parker, Porkolab et al., 2018), y campos adicionales para el control vertical y de forma (Blanco, s.f.; Chapa, Salvador, Sánchez, Ramírez, Martínez & Acosta, s.f.; J. Freidberg, Mangiarotti & Minervini, 2015; Salvador, Hernández, Sánchez, Villarreal, González, Martínez, García, Guevara, Chapa & Vorobyov, s.f.). Esta configuración permite alcanzar parámetros de plasma que cumplen con el criterio de Lawson (Mills, 1957), el cual establece teóricamente la condición mínima que se debe cumplir para que la tasa de generación de energía por fusión supere las pérdidas de energía del plasma, lo cual es necesario para que el reactor sea autosostenido y energeticamente viable. Físicamente, implica que el plasma debe ser lo suficientemente denso y permanecer confinado el tiempo suficiente para que las colisiones entre núcleos sean efectivas en producir energía neta; y matemáticamente se puede expresar como:

$$n\tau_E \geq \frac{12k_B T}{\langle \sigma v \rangle Q}, \quad (2)$$

donde  $n$  representa la densidad del plasma,  $\tau_E$  el tiempo de confinamiento de energía,  $T$  la temperatura,  $\langle \sigma v \rangle$  el producto sección eficaz-velocidad promediado, y  $Q$  la ganancia energética. Para la reacción deuterio-tritio (D-T), este criterio requiere típicamente  $n\tau_E \geq 10^{20} \text{ s/m}^3$  a temperaturas cercanas a 15 keV (Tanabe, 2017).

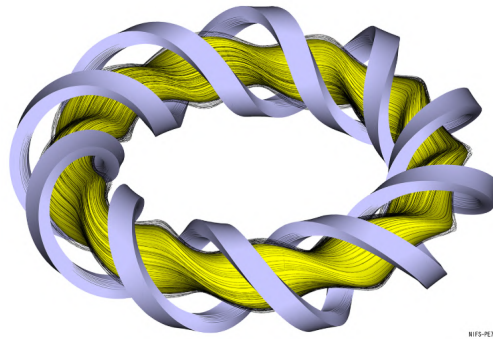
### 1.3. Dispositivos de confinamiento

Los primeros dispositivos de confinamiento magnético, como los z-pinch, empleaban geometrías cilíndricas. Sin embargo, estas configuraciones presentaban pérdidas inevitables de plasma a través de sus extremos abiertos (Shumlak, 2020). Para superar esta limitación, se desarrollaron configuraciones toroidales cerradas, donde las líneas de campo magnético no tienen extremos, eliminando así las pérdidas axiales. La geometría toroidal permite confinar el plasma mediante la superposición de un campo magnético toroidal intenso y un campo poloidal, generando superficies magnéticas anidadas que mantienen las partículas confinadas (Maccaferri, Gabbani, Pineider, Kaihara, Tapani & Vavassori, 2023).

Dentro de las configuraciones toroidales, dos diseños principales han dominado la investigación en fusión: los *stellarators* y los *tokamaks*. Los *stellarators* (Wright, 2023) emplean una geometría helicoidal tridimensional compleja, donde el confinamiento se logra enteramente mediante campos magnéticos externos, sin requerir corriente neta en el plasma.

Por su parte, los *tokamaks* aprovechan la simetría axial, donde el campo poloidal es generado principalmente por la corriente que circula en el plasma mismo (Berkery & Harrison, 2025). Esta ventaja en simetría ha posicionado al *tokamak* como la configuración más prometedora para reactores de fusión, impulsando proyectos de gran escala como ITER (Samanta, 2024).

Figura 3.  
*Configuración helicoidal típica de un dispositivo Stellarator*



*Nota.* Imagen extraída de (National Institute for Fusion Science, 2024).

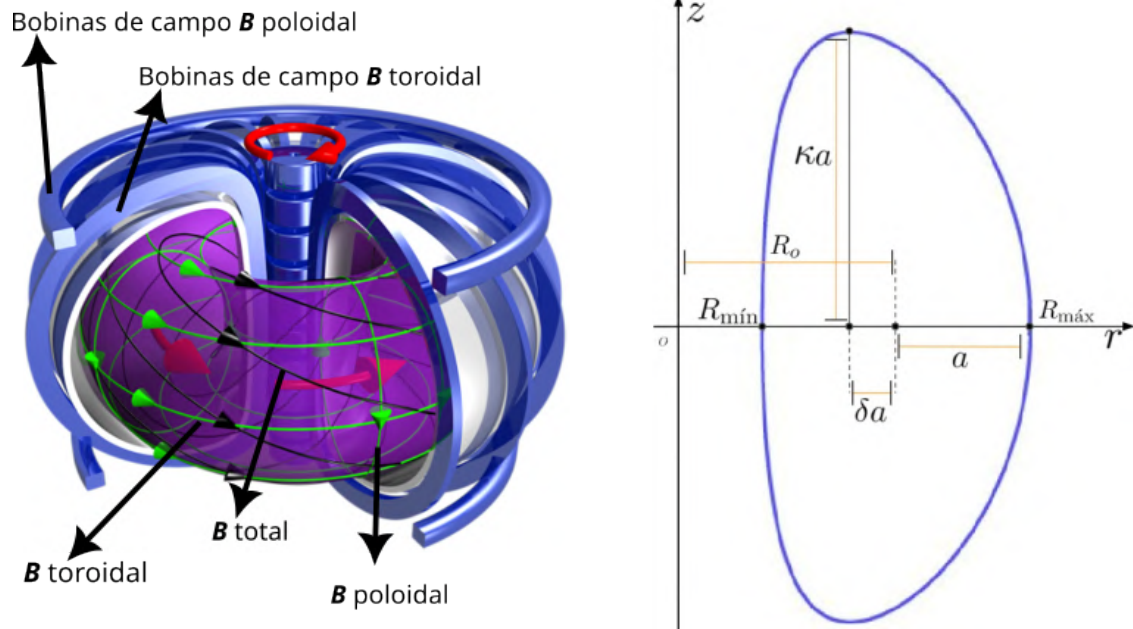
#### 1.4. Tokamak

La simetría axial aproximada del *tokamak* simplifica significativamente tanto el análisis teórico como la implementación computacional, respecto a dispositivos toroidales más complejos como los *stellarators*. En esencia, un *tokamak* consiste en un toroide en el que el plasma se confina mediante la combinación de tres componentes magnéticos principales: el campo toroidal ( $B_\phi$ ), generado por bobinas externas dispuestas alrededor del toro; el campo poloidal ( $B_\theta$ ), producido por la corriente del plasma; y campos adicionales destinados al control de posición y forma (Wesson & Campbell, 2011).

La interacción de estos campos da lugar a que el plasma adopte una forma característica, similar a la letra *D* en el corte poloidal (plano  $\phi \equiv \text{cte}$ ) (Ver figura 4b).

La geometría precisa de la sección transversal de la columna del plasma, *D-shape*, puede descri-

Figura 4.  
Tokamak y *D – shape*



*Nota.* (a) Representación esquemática de un tokamak, mostrando la disposición de las bobinas poloidales y toroidales, así como la generación de los campos magnéticos poloidal ( $B_\theta$ ) y toroidal ( $B_\phi$ ) (Organismo Internacional de Energía Atómica, 2021). (b) Geometría *D-shape* típica en el corte poloidal, con los parámetros característicos: radio mayor ( $R_0$ ), radio menor ( $a$ ), triangularidad ( $\delta$ ) y elongación ( $\kappa$ ).

birse mediante cuatro parámetros fundamentales: *i*) el radio mayor,

$$R_0 = \frac{R_{\max} + R_{\min}}{2}, \quad (3)$$

que representa la distancia desde el eje de simetría hasta el centro de la sección transversal del plasma; *ii*) el radio menor,

$$a = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{2}, \quad (4)$$

que caracteriza su extensión radial. Por otra parte, la forma específica se cuantifica mediante *iii*) la

triangularidad,

$$\delta = \frac{R_0 - R_{\text{top}}}{a}, \quad (5)$$

que mide el desplazamiento de la parte superior del plasma respecto al eje radial; y finalmente *iv*) la elongación, que describe el alargamiento vertical de la sección transversal del plasma,

$$\kappa = \frac{Z_{\text{top}}}{a}. \quad (6)$$

Esta parametrización geométrica permite estudiar sistemáticamente cómo las variaciones en la forma del plasma afectan la dinámica magnetohidrodinámica y la estabilidad del sistema. Estudios recientes han demostrado que la triangularidad ( $\delta$ ) desempeña un papel particularmente crucial en el control de inestabilidades de borde, especialmente en regímenes de alto confinamiento (Ding, Garofalo, Wang, Weisberg, Li, Jian, Eldon, Victor, Marinoni, Hu et al., 2024; Happel, Pütterich, Told, Dunne, Fischer, Hobirk, McDermott, Plank et al., 2022). En particular, configuraciones con triangularidad negativa han mostrado capacidad para suprimir los modos localizados en el borde (*Edge Localized Modes* o ELMs), manteniendo al mismo tiempo buenas características de confinamiento. Estas observaciones han convertido a las configuraciones con triangularidad negativa en un área de intensa investigación para el diseño de futuros reactores.

Un desarrollo significativo en la configuración tokamak lo constituyen los *tokamaks esféricos* (ST, por sus siglas en inglés), caracterizados por una razón de aspecto notablemente reducida, típicamente  $R_o/a \lesssim 2$  (Kingham & Gryaznevich, 2024). Esta geometría compacta, que se asemeja más a una esfera achatada que a un toroide convencional, ofrece características útiles en términos

del estudio de estabildades MHD y confinamiento del plasma, particularmente en las inestabilidades de borde. En este tipo de tokamaks, existe una predominancia y pronta aparición de las inestabilidades de birde, en comparación con tokamaks con relación de aspecto mayor. Dispositivos como MAST (*Mega Ampere Spherical Tokamak*) y NSTX (*National Spherical Torus Experiment*) (Berkery & Harrison, 2025) son de los principales exponentes respecto a reactores con diseño de tokamaks esférico.

### 1.5. Estabilidad

El equilibrio de un plasma no garantiza su persistencia en el tiempo, ya que pequeños desplazamientos o perturbaciones pueden llevar a que el sistema evolucione hacia estados alejados del equilibrio inicial. La estabilidad hace referencia a la capacidad del plasma para resistir estas perturbaciones, manteniéndose cercano a su estado de equilibrio. Por el contrario, una configuración es inestable si pequeñas perturbaciones crecen con el tiempo, llevando a una evolución significativa o incluso a una pérdida de confinamiento.

Este concepto puede ilustrarse mediante una analogía mecánica, Figura 5, en la que un cuerpo en el fondo de un valle representa un equilibrio estable, ya que una perturbación hará que el cuerpo oscile alrededor del punto de equilibrio. En cambio, un cuerpo sobre la cima de una colina ejemplifica un equilibrio inestable, donde cualquier desplazamiento provocará que el cuerpo se aleje cada vez más de su posición original. Finalmente, un equilibrio meta-estable supone un equilibrio estable solo para ciertos rangos de energía (Parisi, 2023).

En plasmas confinados magnéticamente, como en un *tokamak*, las inestabilidades pueden mani-

Figura 5.  
Esquema-Tipos de equilibrio



*Nota.* En la figura se visualizan tres sistemas en equilibrio con diferentes estabilidades. Los sistemas consisten en un cuerpo, esfera verde, sobre superficies sin fricción. De izquierda a derecha: inestable (cima), estable (valle) y meta-estable.

festarse de diversas formas dependiendo de los parámetros de operación y la geometría del plasma (Marinoni, Sauter & Coda, 2021). Estas inestabilidades incluyen modos de borde (*Edge Localized Modes* o ELMs), inestabilidades de presión y modos internos, entre otros (O’Dea, 2021; Solokha, Kurskiev, Yashin, Balachenkov, Varfolomeev, Voronin, Gusev, Goryainov, Dyachenko, Zhiltsov et al., 2023). Su aparición puede comprometer la estabilidad global, deteriorar el confinamiento o incluso causar disrupciones.

El estudio de la estabilidad es, por tanto, esencial para comprender la dinámica del plasma y diseñar configuraciones que minimicen o controlen el crecimiento de perturbaciones. En particular, la forma de la sección transversal del plasma, caracterizada por parámetros como la triangularidad y la elongación, desempeña un papel crítico en la estabilidad frente a distintas clases de inestabilidades.

**1.5.1. Variación de energía potencial  $\delta W$ .** La determinación rigurosa de la estabilidad de una configuración de equilibrio en el marco de la teoría magnetohidrodinámica se fundamenta en el principio de energía, el cual establece un criterio analítico basado en la variación de energía potencial del sistema cuando éste es sometido a una perturbación infinitesimal (Vedenov, Velikhov & Roal'd Z, 1961). Esta variación, denotada por  $\delta W$  y expresada mediante una integral funcional del vector de desplazamiento  $\xi$  que caracteriza la perturbación, representa la diferencia entre la energía potencial total del plasma en su estado perturbado y su energía en el estado de equilibrio original (Boyd & Sanderson, 2003).

Matemáticamente, la variación total de energía potencial se descompone en tres contribuciones principales,

$$\delta W = \delta W_P + \delta W_S + \delta W_V, \quad (7)$$

donde  $\delta W_P$  representa la contribución del volumen del plasma,  $\delta W_S$  la contribución de la superficie que delimita el plasma, y  $\delta W_V$  la contribución de la región de vacío exterior. Cada una de estas componentes está definida por las siguientes expresiones integrales:

$$\delta W_P = \frac{1}{2} \int [B_1^2/\mu_0 - \xi \cdot (\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_1) - P_1(\nabla \cdot \xi)] \, d\mathbf{r}, \quad (8)$$

$$\delta W_S = \frac{1}{2} \int (\xi \cdot \mathbf{n}_0)^2 [\nabla(P_0 + B_0^2/2\mu_0)]_1^2 \cdot d\mathbf{S}, \quad (9)$$

$$\delta W_V = \int (B_1^2/2\mu_0) \, d\mathbf{r}, \quad (10)$$

donde el subíndice 0 denota variables evaluadas en el estado de equilibrio y el subíndice 1 las componentes perturbadas,  $\mathbf{n}_0$  es el vector normal a la superficie del plasma, y las integrales se realizan sobre el volumen del plasma, su superficie, y el volumen de vacío, respectivamente.

Físicamente,  $\delta W$  cuantifica la cantidad de energía que debe suministrarse al sistema para desplazarlo de su configuración de equilibrio: si este desplazamiento requiere un aporte neto de energía ( $\delta W > 0$ ), el sistema tenderá espontáneamente a regresar al equilibrio cuando se libere, caracterizando así un equilibrio estable; por el contrario, si el desplazamiento resulta en una disminución de la energía potencial ( $\delta W < 0$ ), el sistema continuará evolucionando alejándose del equilibrio, indicando inestabilidad. El valor crítico  $\delta W = 0$  define la frontera marginal entre estabilidad e inestabilidad, representando una condición límite donde perturbaciones infinitesimales no crecen ni decaen.

El principio de energía constituye una herramienta computacionalmente eficiente y conceptualmente clara para el estudio de inestabilidades magnetohidrodinámicas, particularmente en geometrías complejas donde el análisis de modos normales resulta analíticamente intratable. La expresión explícita de  $\delta W$  dada por las ecuaciones (7)–(10) puede descomponerse en contribuciones asociadas a diferentes mecanismos físicos: términos positivos que representan la energía almacenada en las ondas de Alfvén, magneto-acústicas y acústicas, que actúan como mecanismos estabilizadores del plasma; y términos potencialmente negativos asociados a gradientes de presión y corriente paralela, que pueden impulsar inestabilidades conocidas como modos ballooning y modos kink, respectivamente. Esta descomposición permite no solo determinar si una configuración es estable, sino también identificar cuál es el mecanismo físico dominante responsable de la estabi-

lidad o inestabilidad observada, proporcionando información valiosa para el diseño de estrategias de control y optimización de configuraciones de confinamiento magnético.

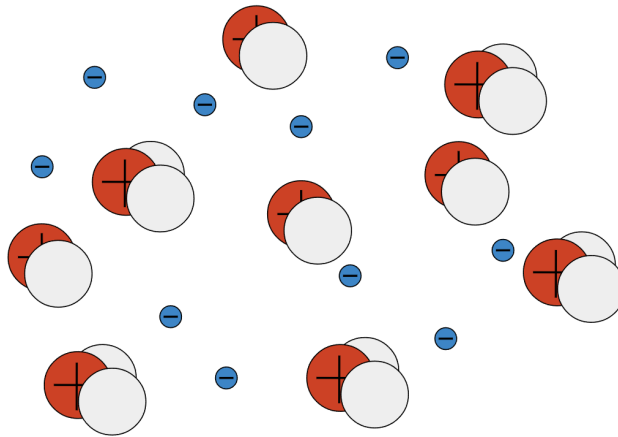
En el contexto de este trabajo, la evolución temporal de  $\delta W$  se calcula numéricamente a partir de las simulaciones tridimensionales del plasma, evaluando las integrales correspondientes dadas por las ecuaciones (8)–(10) sobre todo el volumen de la columna de plasma en cada iteración temporal. Esta metodología permite monitorear continuamente el estado de estabilidad del sistema y cuantificar el "margen de estabilidad" disponible: valores grandes y positivos de  $\delta W$  indican que el sistema posee una alta resistencia frente a perturbaciones, requiriendo desplazamientos de gran amplitud para alcanzar el umbral de inestabilidad; valores positivos pero pequeños sugieren que el equilibrio, aunque estable, es marginalmente estable y podría desestabilizarse fácilmente ante perturbaciones de mayor intensidad o cambios en los parámetros operativos. Así, el análisis sistemático de  $\delta W$  en función de parámetros geométricos como la triangularidad permite establecer criterios de diseño para configuraciones óptimas que maximicen la estabilidad, objetivo fundamental en el desarrollo de reactores de fusión por confinamiento magnético.

## 2. Modelo teórico

### 2.1. Consideraciones MHD

Un plasma, definido como un gas ionizado (Morse, 1983), cuasi-neutral y que exhibe comportamiento colectivo (Ver figura 6), requiere descripciones teóricas particulares según las escalas espaciales y temporales de interés. Para caracterizar completamente un plasma se emplean parámetros fundamentales como las densidades de partículas de las especies que lo conforman, iónica y electrónica,  $n_i$  y  $n_e$  respectivamente, así como sus respectivas temperaturas,  $T_i$  y  $T_e$ .

Figura 6.  
*Ilustración-plasma*



*Nota.* Representación simplificada de un plasma, donde se evidencian electrones libres e iones compuestos por protones y neutrones.

A nivel microscópico, la descripción más completa de un plasma se logra mediante el formalismo cinético, el cual emplea funciones de distribución de partículas en el espacio de fases y permite capturar efectos como colisiones, resonancias de ondas y fenómenos no locales. Sin embargo, este enfoque exige la resolución de las ecuaciones de Vlasov o Boltzmann junto con las ecuaciones de Maxwell, lo que implica una enorme carga computacional, especialmente para plasmas de gran extensión espacial y tiempos de evolución largos.

En el régimen macroscópico relevante para dispositivos de confinamiento magnético que propician reacciones de fusión, donde las escalas típicas, del orden de metros, son mucho mayores que las escalas microscópicas como la longitud de Debye,  $\lambda_D$ , el modelo cinético se vuelve computacionalmente prohibitivo para describir el comportamiento global. En este contexto, la aproximación magnetohidrodinámica (MHD) emerge como una herramienta adecuada y eficiente (Krauss-Varban,

Omidi & Quest, 1994). Este modelo trata el plasma como un fluido conductor que responde colectivamente a las fuerzas electromagnéticas, permitiendo describir de manera tractable la dinámica global del plasma, la evolución de sus inestabilidades y su interacción con campos externos.

El modelo MHD no solo “reduce” la complejidad del problema, sino que también captura adecuadamente los fenómenos de interés a escalas macroscópicas, siendo ampliamente utilizado en el estudio de plasmas confinados en dispositivos como *tokamaks* y *stellarators*, así como en otros contextos astrofísicos y espaciales.

## **2.2. MHD ideal**

El modelo magnetohidrodinámico ideal, o simplemente MHD ideal, describe el comportamiento macroscópico de plasmas como fluidos conductores que interactúan con campos electromagnéticos (J. P. Freidberg, 2014). Este enfoque resulta adecuado para estudiar la dinámica global de plasmas en dispositivos de confinamiento magnético, donde los efectos resistivos y viscosos son despreciables en primera aproximación. El modelo MHD ideal combina las leyes de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía con las ecuaciones de Maxwell simplificadas bajo la hipótesis de alta conductividad eléctrica y variaciones lentas (J. P. Freidberg, 2014). Esta descripción permite capturar fenómenos colectivos esenciales, como la evolución de las configuraciones de equilibrio y el desarrollo de inestabilidades, con una complejidad computacional manejable.

## 2.3. Ecuaciones MHD ideal

### 2.3.1. Conservación de masa:.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (11)$$

también conocida como ecuación de continuidad, donde  $\rho$  es la densidad de masa y  $\vec{u}$  la velocidad del plasma. Esta ecuación expresa que la masa se conserva en ausencia de fuentes o sumideros.

### 2.3.2. Balance de cantidad de movimiento:.

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla P, \quad (12)$$

siendo  $\vec{J}$  la densidad de corriente,  $\vec{B}$  el campo magnético y  $P$  la presión del plasma. Esta ecuación representa el balance entre la fuerza de Lorentz y el gradiente de presión.

### 2.3.3. Conservación de energía (forma adiabática):.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla P + \gamma P \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (13)$$

donde  $\gamma$  es el índice adiabático. Esta expresión supone que el plasma evoluciona sin intercambios de calor (proceso adiabático) y sin disipación de energía.

### 2.3.4. Ecuación de inducción magnética:.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}, \quad (14)$$

que describe cómo el campo magnético es arrastrado y deformado por el movimiento del plasma, donde el campo eléctrico  $\vec{E}$  se obtiene a través de la Ley de Ohm,

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = 0, \quad (15)$$

la cual, junto con la ley de inducción de Faraday 14, permite concluir 16

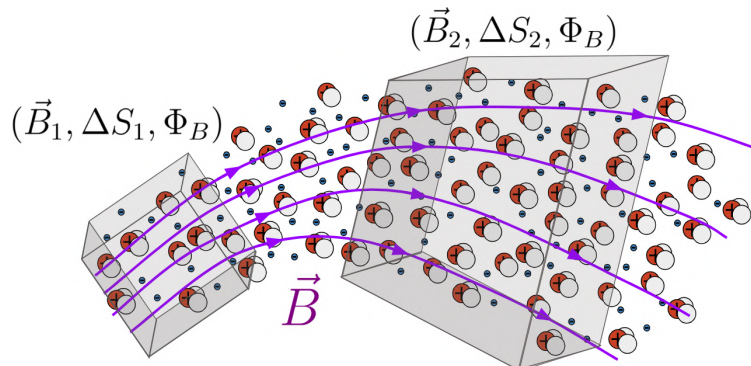
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B}, \quad (16)$$

lo cual evidencia que la evolución temporal del campo magnético depende de dos términos, los cuales se comparan a través del número de Reynolds magnético,  $R_M = \frac{\mu_0 u L}{\eta}$ . Si  $R_M \gg 1$ , entonces la difusión del campo magnético es despreciable, lo cual es equivalente a asumir la aproximación  $\eta \rightarrow 0$  (o  $\sigma \rightarrow \infty$ ). Indicando que, bajo la hipótesis de alta conductividad eléctrica, el campo eléctrico en el sistema de referencia del plasma es nulo. Esto conlleva al fenómeno conocido como el congelamiento de líneas de campo magnético (Ver figura 7).

Es de resaltar que el modelo MHD ideal se sustenta en las siguientes hipótesis y supuestos, que permiten simplificar la descripción del plasma y centrarse en su comportamiento macroscópico:

- **Alta conductividad eléctrica:** se desprecia la resistividad del plasma, ( $\eta \rightarrow 0$ ), lo que implica que las líneas de campo magnético se encuentran congeladas en el fluido.
- **Baja frecuencia:** las frecuencias características de las perturbaciones son mucho menores

Figura 7.

*Congelamiento magnético*

*Nota.* Representación del congelamiento de las líneas de campo magnético respecto al plasma

que la frecuencia ciclotrón iónica, ( $\omega \ll \omega_{ci}$ ), permitiendo ignorar efectos de desplazamiento y ondas electromagnéticas de alta frecuencia.

- **Cuasi-neutralidad:** la densidad de carga neta es despreciable a escalas mucho mayores que la longitud de Debye,  $n_e \approx Zn_i$ .
- **Fluido continuo:** se considera que el plasma puede ser tratado como un medio continuo, lo que es válido cuando las escalas espaciales son grandes en comparación con la longitud media libre de las partículas.
- **Procesos adiabáticos:** se asume que el plasma evoluciona sin intercambios de calor ni disipación de energía (enfriamiento radiativo u otras pérdidas son despreciables).
- **No viscosidad:** los efectos viscosos se consideran despreciables para la dinámica global en primera aproximación.

## 2.4. Estados de equilibrio

El equilibrio MHD corresponde a un estado en el cual el plasma no presenta evolución temporal apreciable y las variables macroscópicas permanecen constantes en el tiempo. En términos generales, esto implica un plasma estático, sin movimiento global,  $\vec{u} = 0$ , y estacionario, sin cambios en las propiedades físicas con el tiempo,  $\partial/\partial t \equiv 0$  (Morgan & Martínez, 2022). Bajo estas condiciones, las ecuaciones del modelo MHD ideal se simplifican notablemente. En particular, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento se reduce a un balance entre el gradiente de presión y la fuerza magnética,

$$\vec{J} \times \vec{B} = \nabla P. \quad (17)$$

Esta relación expresa que, para mantener el equilibrio de cada elemento de fluido, la fuerza de Lorentz generada por las corrientes y los campos magnéticos debe contrarrestar exactamente el gradiente de presión cinética.

Para configuraciones axialmente simétricas, como las presentes en los *tokamaks*, donde no existe dependencia de la coordenada toroidal ( $\phi$ ), las condiciones de equilibrio permiten reducir el balance de fuerzas a una sola ecuación escalar, la ecuación de Grad-Shafranov.

Partiendo de la expresión del campo magnético en coordenadas cilíndricas ( $r, z, \phi$ ),

$$\vec{B} = \frac{1}{r} \nabla \psi \times \hat{\phi} + \frac{g(\psi)}{r} \hat{\phi}, \quad (18)$$

donde  $\psi(r, z)$  es la función de flujo poloidal y  $g(\psi)$  está relacionado con el campo magnético toroidal (Boyd & Sanderson, 2003), y utilizando la condición de cuasi-neutralidad y las ecuaciones de Maxwell, se llega a la forma final,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -r^2 \frac{dP(\psi)}{d\psi} - g(\psi) \frac{dg(\psi)}{d\psi}, \quad (19)$$

siendo  $P(\psi)$  es la presión cinética del plasma como función de  $\psi$ . Esta es la ecuación de Grad-Shafranov, que gobierna el equilibrio estático y estacionario de plasmas axialmente simétricos en dispositivos de confinamiento magnético, como en un *tokamak*, y es fundamental porque determina la distribución espacial del flujo poloidal y, en consecuencia, la geometría de las superficies de flujo y de las líneas de campo magnético en equilibrio (Zohm, 2014). La forma específica de las funciones  $P(\psi)$  y  $g(\psi)$  define el perfil de presión y el campo toroidal, respectivamente, y permite construir configuraciones de equilibrio ajustadas a los parámetros de diseño del dispositivo (Doyle, Lopez-Aires, Mancini, Agredano-Torres, Garcia-Sanchez, Segado-Fernández, Ayllon-Guerola, Garcia-Muñoz, Viezzer, Soria-Hoyo et al., 2021). Es importante resaltar que la ecuación de Grad-Shafranov puede interpretarse como una ecuación tipo Poisson, donde el término del lado derecho actúa como una fuente asociada directamente con la densidad de corriente toroidal  $J_\phi$ . Debido a la complejidad de las geometrías y perfiles de presión y corriente en configuraciones reales, las soluciones analíticas son limitadas y aplicables solo a casos idealizados. Por ello, la obtención de soluciones prácticas requiere el uso de métodos numéricos y técnicas computacionales especializadas (Poljak, Descamps, Raynaud & Dimic, 2024).

## 2.5. Linealización

Como se ha discutido, aun cuando una configuración de plasma se encuentra en equilibrio, pequeñas perturbaciones pueden inducir desviaciones que evolucionen hacia comportamientos estables o inestables. Para estudiar esta dinámica inicial, es conveniente como primera instancia, emplear un esquema de linealización del modelo MHD ideal, que permite analizar cómo evolucionan perturbaciones de pequeña amplitud superpuestas al estado de equilibrio.

La linealización consiste en descomponer cada variable del sistema en una componente de equilibrio, estacionaria, y una perturbación que evoluciona, es decir, con dependencia temporal. Bajo la hipótesis de que la amplitud de las perturbaciones es suficientemente pequeña, se desprecia el producto de términos perturbados, de segundo orden o superiores, obteniendo así un sistema de ecuaciones lineales que gobierna su evolución temporal (Boyd & Sanderson, 2003). Este enfoque permite identificar los modos inestables y sus tasas de crecimiento, proporcionando una comprensión fundamental de la estabilidad de la configuración considerada. Aquí se asume que cada variable física se descompone tal como sigue,

$$\begin{aligned}
 \rho &= \rho_0(\vec{r}) + \rho_1(\vec{r}, t), \\
 \vec{u} &= \vec{u}_1(\vec{r}, t) \quad (\text{considerando } \vec{u}_0 = 0), \\
 P &= P_0(\vec{r}) + P_1(\vec{r}, t), \\
 \vec{B} &= \vec{B}_0(\vec{r}) + \vec{B}_1(\vec{r}, t),
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

donde los subíndices 0 y 1 denotan las componentes de equilibrio y de perturbación, respectiva-

mente.

A partir de la expansión anterior y aplicando las hipótesis de linealización, se obtienen las siguientes ecuaciones que gobiernan la dinámica de las perturbaciones (Boyd & Sanderson, 2003),

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\vec{u}_1 \cdot \nabla \rho_0 - \rho_0 \nabla \cdot \vec{u}_1, \quad (21)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\nabla P_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\vec{u}_1 \cdot \nabla P_0 - \gamma P_0 \nabla \cdot \vec{u}_1, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u}_1 \times \vec{B}_0), \quad (24)$$

Estas ecuaciones permiten estudiar el crecimiento o dinámica lineal de las perturbaciones en función de los parámetros del sistema, como la geometría del plasma, los perfiles de presión y las configuraciones de campo magnético. La linealización constituye así un primer paso esencial para comprender la estabilidad y la dinámica inicial de las inestabilidades MHD en plasmas confinados.

### 3. Modelo numérico

#### 3.1. Geometría y condiciones de frontera

Para el desarrollo de las simulaciones numéricas, se construyó una malla bidimensional rectangular en coordenadas cilíndricas  $(r, z)$  sobre el plano poloidal. La región de simulación se definió en el intervalo  $r \in [0, 15, 1, 65]$  m para la coordenada radial y  $z \in [-1, 3, 1, 3]$  m para la

coordenada vertical. Esta discretización espacial permitió acotar la región de interés que contiene tanto la columna de plasma confinada como una porción de la región exterior, facilitando así el estudio de la dinámica global del sistema. La malla empleada fue homogénea, con  $N_{pr} = 151$  puntos en la dirección radial y  $N_{pz} = 261$  puntos en la dirección vertical, proporcionando una resolución espacial adecuada para capturar las variaciones significativas de las variables físicas del plasma.

En cuanto a las condiciones de frontera, se estableció que la velocidad del plasma en todos los bordes de la región de simulación debía anularse, es decir,  $\vec{u}|_{wall} = \vec{0}$ . Esta condición se impuso en las cuatro fronteras:  $r = r_{min}$ ,  $r = r_{max}$ ,  $z = z_{min}$  y  $z = z_{max}$ , simulando así paredes rígidas y no deslizantes. Esta aproximación, aunque simplificada respecto a las condiciones reales de un dispositivo tokamak, resulta apropiada para el estudio de la dinámica global del plasma sin comprometer los fenómenos físicos relevantes del sistema (Miyamoto et al., 2016).

## 3.2. Esquema numérico y validación

**3.2.1. Discretización de las ecuaciones.** Para el estudio de la dinámica del plasma, se partió de las ecuaciones del modelo MHD ideal en su forma linealizada, presentadas en las ecuaciones (21)-(24). En el esquema numérico empleado, cada magnitud física ( $\rho_1$ ,  $\vec{u}_1$ ,  $P_1$ ,  $\vec{B}_1$ ) se asoció con un único valor en cada punto de la malla discreta  $(r_i, z_j)$ . Dado que el sistema de ecuaciones contiene operadores diferenciales espaciales (gradientes, divergencias y rotacionales), es necesario aproximar dichas derivadas mediante esquemas numéricos. En particular, en este trabajo se empleó el esquema de diferencias finitas por su gran versatilidad, simplicidad y porque es aplicable sobre el modelo MHD linealizado al garantizar suavidad en la evolución de todas las variables

físicas. Para los puntos interiores de la región de simulación, es decir, aquellos que no pertenecen a las fronteras  $r = r_{min}$ ,  $r = r_{max}$ ,  $z = z_{min}$  o  $z = z_{max}$ , se emplearon diferencias finitas centradas de segundo orden, proporcionando así una aproximación con error del orden  $\mathcal{O}(h^2)$ , donde  $h$  representa el paso de malla (Vuik, Vermolen, van Gijzen & Vuik, 2023). Para los puntos ubicados en las fronteras, donde el esquema centrado no es aplicable, se utilizaron diferencias finitas no centradas de primer orden: esquemas de paso adelante para las fronteras inferiores ( $r_{min}$ ,  $z_{min}$ ) y esquemas de paso atrás para las fronteras superiores ( $r_{max}$ ,  $z_{max}$ ), garantizando así la consistencia numérica en toda la región de simulación.

### Esquema de diferencias finitas

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_i} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + \mathcal{O}(h) \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (25)$$

**3.2.2. Estado de equilibrio y perturbación.** Las configuraciones de equilibrio empleadas como condiciones iniciales en las simulaciones se obtuvieron a partir de resultados generados por códigos numéricos desarrollados previamente en el grupo de investigación FITEK (Física y Tecnología del Plasma y Corrosión) de la Universidad Industrial de Santander. Estos códigos resuelven la ecuación de Grad-Shafranov bajo diferentes perfiles de presión y corriente, proporcionando las distribuciones espaciales de las variables de equilibrio: densidad de masa  $\rho_0(\vec{r})$ , presión  $P_0(\vec{r})$  y campo magnético  $\vec{B}_0(\vec{r})$ , las cuales constituyen las componentes de orden cero en el sistema de ecuaciones MHD linealizadas, ecuaciones (21)-(24). Para iniciar la dinámica del sistema, se

introdujo una perturbación localizada únicamente en la presión, mientras que las demás variables perturbadas se inicializaron en cero:  $\rho_1(\vec{r}, t = 0) = 0$ ,  $\vec{u}_1(\vec{r}, t = 0) = \vec{0}$ ,  $\vec{B}_1(\vec{r}, t = 0) = \vec{0}$ .

### 3.3. Normalización

La normalización es un proceso que permite trabajar con variables adimensionales, lo cual mejora la estabilidad numérica y facilita la interpretación de los resultados en términos de las escalas características del sistema. En este trabajo, se definieron tres parámetros de normalización fundamentales de los que dependen las demás magnitudes: longitud ( $L_0 = 0,9$ ), intensidad de campo magnético ( $B_0 = 0,5$ ) y densidad de masa ( $\rho_0 = 6,7 \times 10^{-8}$ ).

Las constantes derivadas para la presión ( $P_0$ ), la velocidad ( $V_0$ , basada en la velocidad de Alfvén), el tiempo ( $T_0$ ), la densidad de corriente ( $J_0$ ) y el campo eléctrico ( $E_0$ ) se calculan mediante las siguientes relaciones:

$$P_0 = \frac{B_0^2}{\mu_0}, \quad V_0 = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}, \quad T_0 = \frac{L_0}{V_0}, \quad J_0 = \frac{B_0}{\mu_0 L_0}, \quad E_0 = V_0 B_0 \quad (26)$$

Donde  $\mu_0$  representa la permeabilidad magnética del vacío. Cada una de las magnitudes físicas anteriores se expresa de forma adimensional como:

$$\hat{A} = \frac{A}{A_0}$$

donde  $A$  es la magnitud física y  $A_0$  es su correspondiente parámetro de normalización. Del mismo modo, las variables espaciales  $r$  y  $z$  se normalizan utilizando  $L_0$  como escala de referencia.

Finalmente, la densidad de corriente  $\mathbf{j}$  se calcula en unidades adimensionales a partir del

rotacional del campo magnético en coordenadas cilíndricas, utilizando las derivadas numéricas de los componentes normalizados:

$$\hat{j}_r = -\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial(\hat{r}\hat{b}_\theta)}{\partial \hat{z}}, \quad \hat{j}_\theta = \frac{\partial \hat{b}_r}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial \hat{b}_z}{\partial \hat{r}}, \quad \hat{j}_z = \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial(\hat{r}\hat{b}_\theta)}{\partial \hat{r}} \quad (27)$$

Este esquema asegura que todas las ecuaciones del sistema MHD se resuelvan en un entorno computacional donde las magnitudes son del orden de la unidad, minimizando así los errores de precisión de punto flotante.

Debido a este proceso, diversas figuras presentadas en este trabajo no incluyen unidades en sus ejes, por lo que se consideran representadas en unidades adimensionales. Si una gráfica posee unidades, estas se indicarán explícitamente; de lo contrario, debe asumirse que dicha figura es adimensional.

**3.3.1. Evolución temporal.** La evolución temporal del sistema se abordó mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). Para ello, se definió el vector de estado  $\vec{Q} = (\rho_1, \vec{u}_1, P_1, \vec{B}_1)^T$  que contiene todas las variables perturbadas del sistema, y se representó el lado derecho de las ecuaciones linealizadas mediante el operador  $\vec{R}(\vec{Q}, t)$ . De esta forma, el sistema de ecuaciones diferenciales se expresó de manera compacta como:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}(\vec{Q}, t). \quad (28)$$

El esquema RK4 se aplicó iterativamente a través de las siguientes etapas:

$$\vec{k}_1 = \Delta t \vec{R}(\vec{Q}^n, t^n), \quad (29)$$

$$\vec{k}_2 = \Delta t \vec{R}\left(\vec{Q}^n + \frac{1}{2}\vec{k}_1, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right), \quad (30)$$

$$\vec{k}_3 = \Delta t \vec{R}\left(\vec{Q}^n + \frac{1}{2}\vec{k}_2, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right), \quad (31)$$

$$\vec{k}_4 = \Delta t \vec{R}(\vec{Q}^n + \vec{k}_3, t^n + \Delta t), \quad (32)$$

$$\vec{Q}^{n+1} = \vec{Q}^n + \frac{1}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4), \quad (33)$$

donde  $\vec{Q}^n$  representa el estado del sistema en el tiempo  $t^n = n\Delta t$ . El paso temporal  $\Delta t$  se determinó en cada iteración mediante el criterio de estabilidad de Courant, garantizando la estabilidad numérica del esquema a lo largo de toda la simulación. La simulación se ejecutó durante un tiempo total de  $120\tau_A$ , alcanzando un número de iteraciones suficiente para observar una tendencia en la evolución de las perturbaciones en el sistema.

**3.3.2. Criterio de courant.** El criterio de Courant es una condición de estabilidad fundamental en análisis numérico que establece la relación necesaria entre el paso temporal y el paso espacial en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales mediante métodos explícitos. Este criterio establece que, para mantener la estabilidad numérica de la solución, la información no puede propagarse más de una celda espacial en un solo paso temporal. Matemáticamente, se expresa como  $C = \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} \leq C_{\max}$ , donde  $C$  es el número de Courant,  $u$  es la velocidad característica

del flujo,  $\Delta t$  es el paso temporal,  $\Delta x$  es el paso espacial, y  $C_{\max}$  es el número de Courant máximo permisible (típicamente 1 para esquemas explícitos). Si se viola esta condición, las perturbaciones numéricas crecen y la solución diverge, generando resultados completamente erróneos. Este criterio es especialmente crítico en la simulación de fenómenos de transporte, dinámica de fluidos computacional y propagación de ondas, donde determina directamente el costo computacional del problema al limitar el tamaño del paso temporal que puede utilizarse.

**3.3.3. Cálculo de  $\delta W$ ,  $\langle P \rangle$  y  $\langle B^2 \rangle$ .** Para monitorear la evolución del estado de estabilidad del sistema durante las simulaciones tridimensionales, se implementó un algoritmo de cálculo que evalúa, en cada iteración temporal, tres cantidades fundamentales: la variación de energía potencial  $\delta W$ , el promedio espacial de la presión  $\langle P \rangle$ , y el promedio espacial del cuadrado del campo magnético  $\langle B^2 \rangle$ . Estas cantidades proporcionan información complementaria sobre la dinámica global del plasma y permiten cuantificar tanto su estabilidad como la redistribución de energía entre sus diferentes componentes.

Para el cálculo de la variación de energía potencial  $\delta W$ , se procede en dos etapas. Primero, se evalúa el vector de desplazamiento  $\xi$  integrando temporalmente el campo de velocidades mediante el método de Euler explícito:

$$\xi^{n+1} = \xi^n + \mathbf{u}^n \Delta t, \quad (34)$$

donde  $\mathbf{u} = (u_r, u_\phi, u_z)$  es el campo de velocidades en el instante  $n$  y  $\Delta t$  el paso temporal adaptativo determinado por el criterio de Courant. Este vector de desplazamiento cuantifica la distancia

acumulada que cada elemento de fluido ha recorrido desde su posición de equilibrio inicial.

Es importante destacar que, según la ecuación (7), la variación total de energía potencial incluye tres contribuciones:  $\delta W = \delta W_P + \delta W_S + \delta W_V$ . Sin embargo, en este trabajo se considera únicamente la componente volumétrica  $\delta W_P$ , asumiendo que  $\delta W \approx \delta W_P$ . Esta aproximación se justifica por las condiciones de frontera implementadas en las simulaciones: al considerar paredes conductoras perfectas, rígidas y no deslizantes, se impone la condición  $\mathbf{u}|_{\text{pared}} = \mathbf{0}$ , lo que implica que el vector de desplazamiento  $\xi$  se anula en la frontera del dominio computacional. Consecuentemente, el término de superficie  $\delta W_S$ , que depende de  $(\xi \cdot \mathbf{n}_0)^2$  según la ecuación (9), se anula idénticamente en todas las paredes. Por otra parte, la contribución del vacío  $\delta W_V$  corresponde a la energía almacenada en la región exterior al plasma, donde la presión es despreciable y el campo magnético es principalmente el de equilibrio; dado que las perturbaciones magnéticas  $\mathbf{B}_1$  decaen rápidamente fuera de la columna de plasma y que la región de vacío simulada es pequeña en comparación con el volumen del plasma, la contribución de  $\delta W_V$  resulta también despreciable frente a  $\delta W_P$ . Por lo tanto, la variación de energía potencial calculada captura la física esencial de la estabilidad del sistema, concentrándose en la dinámica del plasma confinado.

#### 4. Resultados y discusión

En esta sección se presentan los resultados obtenidos a partir de simulaciones axialmente simétricas de la dinámica magnetohidrodinámica (MHD) lineal. Con el fin de facilitar el análisis y la interpretación física, los resultados se organizan en dos partes principales: en primer lugar, se analizan las configuraciones de equilibrio MHD, y posteriormente se estudia la evolución dinámica de dichas configuraciones frente a perturbaciones lineales.

El objetivo central de este estudio es comparar de manera sistemática el comportamiento de plasmas confinados en configuraciones con triangularidad positiva y negativa. Para garantizar que los efectos observados se deban exclusivamente a la variación de la triangularidad, todas las demás magnitudes geométricas y parámetros globales del sistema se mantuvieron invariantes en todos los escenarios considerados (ver Tabla2). En particular, se fijaron el radio mayor  $R_0 = 0,9\text{m}$ , el radio menor  $a = 0,6\text{m}$  y la elipticidad  $\kappa = 1,9$ . Asimismo, la corriente total del plasma se mantuvo constante en  $I_p = 1,3\text{MA}$ .

Tabla 2

*Parámetros geométricos y globales de la simulación*

<b>Parámetro</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>
Radio mayor	$R_0$	0,9m
Radio menor	$a$	0,6m
Elipticidad	$\kappa$	1,9
Corriente total del plasma	$I_p$	1,3MA

*Nota.* Los parámetros geométricos y globales del plasma que se mantuvieron constantes en todas las simulaciones axialmente simétricas de la dinámica MHD lineal.

Se consideraron dos conjuntos principales de configuraciones de equilibrio, diferenciados por el valor de la presión máxima sobre el eje magnético, la cual se fijó en 24kPa y 36kPa, respectivamente. Para cada uno de estos valores de presión central se analizaron cinco valores distintos de triangularidad,  $\delta = 0,0, \pm 0,3, \pm 0,6$ , lo que dio lugar a un total de diez configuraciones de equilibrio. Sobre cada una de ellas se calcularon las magnitudes relevantes y se evaluó su estabilidad lineal, cuyos resultados se presentan y discuten en la subsección 4.1.

#### 4.1. Equilibrios MHD axisimétricos

En esta subsección se describen las configuraciones de equilibrio magnetohidrodinámico utilizadas como estados iniciales para el estudio de la dinámica lineal. El análisis se centra en caracterizar y contrastar los sistemas con distinta triangularidad, manteniendo fijos los parámetros geométricos y globales previamente definidos.

Para la obtención de las condiciones de equilibrio se empleó un *solver* de tipo Poisson desarrollado por el grupo FITEK, el cual resuelve numéricamente la ecuación de Grad–Shafranov, dada por la ecuación (19). En este enfoque, tanto la función  $g(\psi)$  como el perfil de presión se modelan mediante funciones polinomiales (Jeon, 2015), las cuales se expresan como

$$p(\psi) = P_a \tilde{P}(\psi_N); \quad \tilde{P}(\psi_N) = [1 - (1 - \psi_N)^2]^2 + 0,2, \quad (35)$$

$$g^2(\psi) = g_0^2 [1 + \alpha_g \bar{g}(\psi_N)]; \quad \bar{g}(\psi_N) = \psi_N^2. \quad (36)$$

La función de presión  $p(\psi)$  fue seleccionada de modo que genere un perfil casi uniforme en las cercanías del eje magnético, con un decaimiento progresivo hacia la frontera del plasma. Este tipo de perfil resulta particularmente adecuado para el estudio de la excitación de modos tipo *Edge Localized Modes* (ELMs), donde se ha reportado una mayor sensibilidad a la variación de la triangularidad de la sección transversal del plasma. Por su parte, el perfil adoptado para  $g(\psi)$  es deliberadamente simple, pero suficiente para capturar los efectos globales del campo magnético toroidal relevantes para los objetivos de este trabajo.

El flujo poloidal normalizado  $\psi_N$  se define exclusivamente en la región ocupada por el plasma mediante la expresión

$$\psi_N = \frac{\psi_i - \psi}{\psi_i - \psi_a}, \quad (37)$$

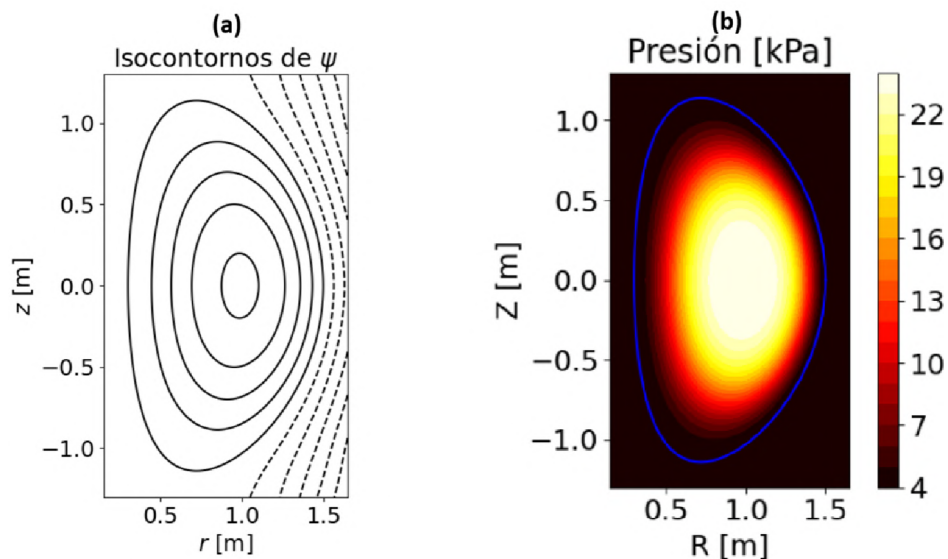
donde  $\psi_i$  corresponde al valor del flujo magnético en la frontera de la columna de plasma, mientras que  $\psi_a$  denota el flujo sobre el eje magnético (Duran, 2021). Esta normalización implica que  $\psi_N$  varía entre cero en la frontera y la unidad sobre el eje magnético.

En cuanto a los parámetros restantes, la constante  $g_0$  se ajusta de modo que el campo magnético sobre el eje satisfaga aproximadamente la relación  $B_a \sim g_0/r_a$ , donde  $r_a$  es la posición radial del eje magnético. El parámetro auxiliar  $\alpha_g$  se introduce para mantener fija la corriente total del plasma  $I_p$  durante las iteraciones del esquema numérico. Por último, el parámetro  $P_a$  se relaciona directamente con la presión en el eje magnético: dado que la presión en la frontera adopta el valor  $0,2P_a$  y en el eje magnético alcanza  $1,2P_a$ , se deduce que  $P_a$  representa aproximadamente el 83,3 % de la presión máxima del plasma.

Como punto de partida del análisis de los equilibrios MHD, se determinaron los perfiles correspondientes a la configuración con triangularidad  $\delta = 0,3$  y presión sobre el eje magnético de 24 kPa. La Figura ??(a) muestra los isocontornos del flujo magnético poloidal  $\psi$ , los cuales pueden clasificarse en dos grupos bien diferenciados: líneas cerradas y líneas abiertas. Las líneas cerradas delimitan la región del sistema en la que el plasma se encuentra confinado, mientras que las líneas abiertas corresponden a la región de vacío circundante.

La última línea cerrada de flujo define la frontera del plasma y se conoce como *separatriz*.

Figura 8.

*Isocontornos y presión de equilibrio*

*Nota.* (a) Isocontornos del flujo magnético poloidal para la configuración con presión central de 24kPa y  $\delta = 0,3$ . Las líneas sólidas representan contornos cerrados asociados a la región confinada del plasma, mientras que las líneas discontinuas corresponden a contornos abiertos en la región de vacío. (b) Mapa de colores del perfil de presión en el plano poloidal  $(r, z)$ , donde se observa un perfil aproximadamente uniforme en torno al eje magnético y un decaimiento hacia la frontera del plasma.

Esta curva determina la sección transversal de la columna de plasma, dando lugar a la característica geometría en forma de  $D$  asociada a configuraciones con triangularidad distinta de cero. Por su parte, la Figura ??(b) presenta el mapa de colores del perfil de presión en el plano poloidal  $(r, z)$ , donde se aprecia una marcada homogeneidad en la región central del plasma, alrededor del eje magnético, seguida de un gradiente más pronunciado en las cercanías de la frontera, tal como se esperaba según el perfil de presión seleccionado.

Como se ha mencionado previamente, el flujo poloidal  $\psi$  determina de manera completa el equilibrio MHD en sistemas axialmente simétricos. En particular, la componente poloidal del campo magnético,  $\mathbf{B}_p = B_r \hat{r} + B_z \hat{z}$ , es tangente a las superficies de flujo constante, lo que implica que

las líneas de campo poloidal coinciden con los isocontornos de  $\psi$ . En consecuencia, los contornos mostrados en la figura anterior no solo describen la topología del equilibrio, sino que representan directamente la estructura del campo magnético poloidal del sistema.

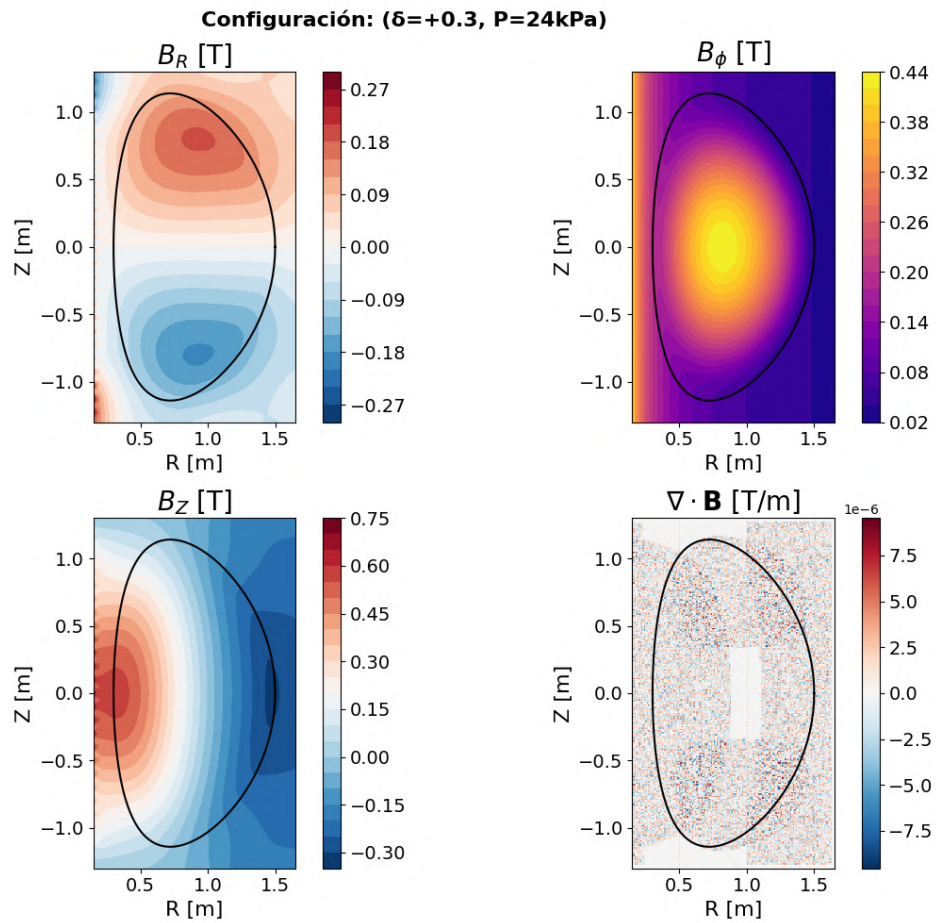
La Figura 9 presenta los mapas de color correspondientes a cada una de las componentes del campo magnético del equilibrio considerado, lo que permite analizar con mayor detalle su distribución espacial en el plano poloidal. En particular, se observa cómo las componentes  $B_r$  y  $B_z$  reflejan la geometría de las superficies de flujo, mientras que la componente toroidal  $B_\phi$  domina en magnitud y presenta una variación suave, consistente con la simetría axial del sistema.

Adicionalmente, se muestra el mapa de la divergencia del campo magnético,  $\nabla \cdot \mathbf{B}$ , el cual constituye una prueba directa de la consistencia numérica del equilibrio obtenido. Los valores de esta magnitud se mantienen cercanos a cero en todo el dominio computacional, con desviaciones del orden del error de máquina, lo que confirma que el campo magnético satisface adecuadamente la condición solenoidal y valida el correcto cálculo del equilibrio MHD.

Finalmente, se obtuvieron un total de diez configuraciones de equilibrio MHD, tal como se indicó al inicio de esta sección. En todos los casos, el único parámetro geométrico que se varió fue la triangularidad, mientras que la presión central se consideró como parámetro global, tomando los valores de 24 kPa y 36 kPa, con el propósito de identificar su posible influencia sobre la estabilidad del plasma. El resto de los parámetros geométricos y globales se mantuvieron constantes, tal como se resume en la Tabla 2.

Con el fin de analizar de manera cuantitativa el efecto de la triangularidad sobre el estado de equilibrio, la Figura 10 presenta los perfiles radiales del campo magnético, la densidad de corriente

Figura 9.  
Componentes y divergencia del campo magnético



*Nota.* Mapas de color de las componentes del campo magnético correspondientes al equilibrio MHD con presión central de  $24\text{kPa}$  y  $\delta = 0,3$ . Se muestran las distribuciones espaciales de  $B_r$ ,  $B_z$  y  $B_\phi$  en el plano poloidal ( $r, z$ ), junto con el mapa de la divergencia del campo magnético,  $\nabla \cdot \mathbf{B}$ . Los valores cercanos a cero de esta última magnitud en todo el dominio confirman el cumplimiento de la condición solenoidal y validan la consistencia numérica del equilibrio obtenido.

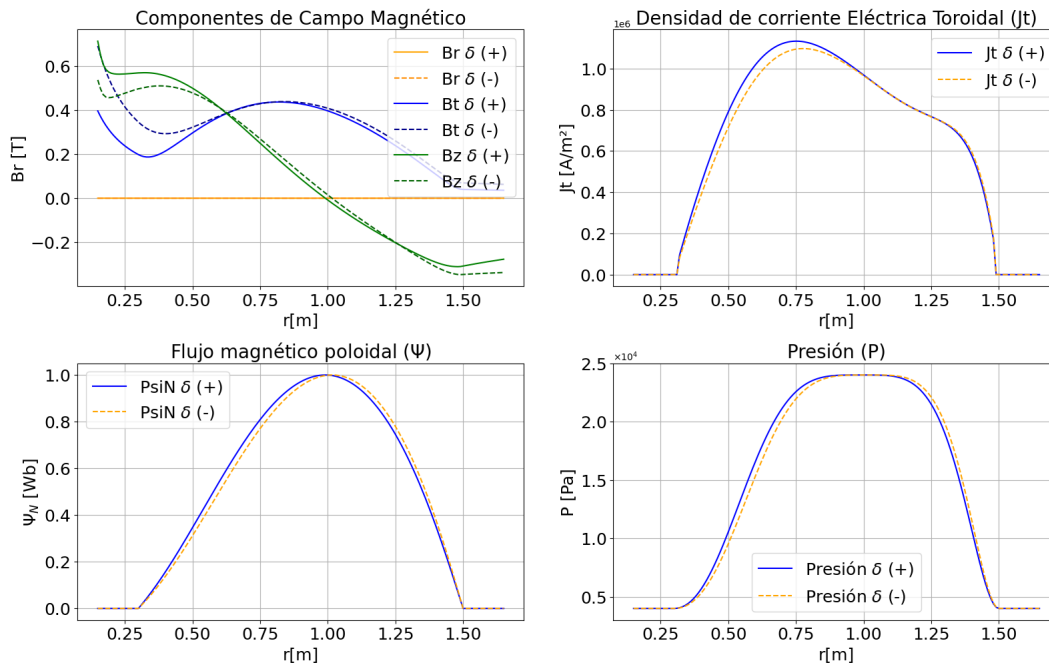
toroidal, el flujo poloidal normalizado y la presión, evaluados a lo largo del eje radial en el plano medio del sistema ( $z = 0$ ). En esta figura se contrastan explícitamente los casos de triangularidad positiva  $\delta = 0,3$  y triangularidad negativa  $\delta = -0,3$  para la configuración con presión central de 24 kPa.

Se observa que la variación del signo de la triangularidad no produce cambios significativos ni en la forma ni en los valores de las principales magnitudes físicas del equilibrio, particularmente en la región central de la columna de plasma. Las diferencias asociadas al signo de la triangularidad son marginales y se manifiestan principalmente en las cercanías de la frontera del plasma y en la región de vacío circundante, donde las componentes del campo magnético presentan ligeras variaciones. En este sentido, los resultados indican que la triangularidad no modifica de manera sustancial el estado de equilibrio en la región central del plasma, lo cual resulta consistente con el hecho de que su influencia se manifiesta de forma más pronunciada en fenómenos ligados a la dinámica y la estabilidad de borde.

En este mismo contexto, se realizaron análisis análogos manteniendo fija la triangularidad en  $\delta = 0,3$ , pero contrastando el efecto de la presión central sobre el estado de equilibrio. La Figura 11 muestra los perfiles radiales de las principales magnitudes físicas para los casos con presiones centrales de 24 kPa y 36 kPa, evaluados en el plano medio del sistema.

A diferencia del análisis previo, en este caso se observa un contraste más notable entre las configuraciones de equilibrio, particularmente en la componente toroidal del campo magnético y en la densidad de corriente eléctrica toroidal. Para la configuración con 36 kPa, el campo magnético toroidal presenta una dependencia más marcada con  $1/r$  y alcanza valores de mayor intensidad en

Figura 10.  
Perfiles de equilibrio:  $\delta(+)$  VS  $\delta(-)$



*Nota.* Perfiles radiales de las componentes del campo magnético  $B_r$ ,  $B_\phi$  y  $B_z$ , de la densidad de corriente eléctrica toroidal  $j_t$ , del flujo poloidal normalizado  $\psi_N$  y de la presión  $p$ , evaluados en el plano medio del sistema ( $z = 0$ ) para la configuración con presión central de 24 kPa. Se comparan los casos de triangularidad positiva  $\delta = 0,3$  y triangularidad negativa  $\delta = -0,3$ , evidenciando que las diferencias entre ambos equilibrios son marginales en la región central del plasma y se concentran principalmente en las cercanías de la frontera y en la región de vacío.

las cercanías del eje magnético. De manera consistente, el perfil de la densidad de corriente toroidal  $j_t$  en este mismo caso exhibe una estructura con dos picos de menor amplitud en comparación con el pico dominante observado para 24 kPa, reflejando una redistribución de la corriente asociada al incremento de la presión central.

Como es de esperarse, el perfil de presión muestra diferencias claras en su valor máximo; sin embargo, más allá de esta diferencia cuantitativa, ambos perfiles conservan una forma cualitativamente similar: una región central aproximadamente homogénea alrededor del eje magnético, seguida de un decaimiento progresivo hacia la frontera del plasma. Estos resultados ponen de manifiesto que, en lo que respecta al estado de equilibrio, la variación de la presión central ejerce una influencia más significativa que la triangularidad, especialmente sobre la distribución del campo magnético toroidal y la corriente del plasma.

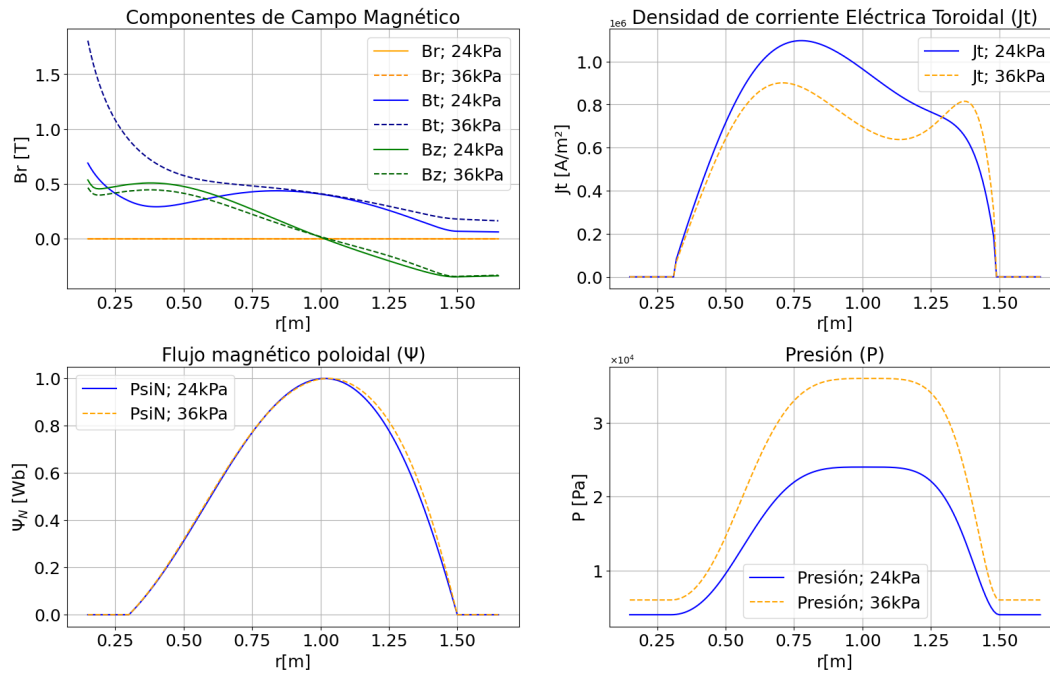
Como observación final, se resalta que la razón de aspecto de todas las configuraciones analizadas es  $A = R_0/a = 1,5$ . Este valor satisface la condición  $A < 2$ , lo que permite clasificar los equilibrios considerados como configuraciones de tipo tokamak esférico.

#### 4.2. Perturbación inicial

Una vez establecidas las configuraciones de equilibrio, el siguiente paso consiste en caracterizar la dinámica y, en consecuencia, la estabilidad del sistema frente a perturbaciones externas. En particular, la perturbación inicial aplicada al plasma en  $t = 0$  se definió mediante una función gaussiana localizada en el plano poloidal, dada por

$$P_1(\vec{r}, t = 0) = A \exp \left[ -\alpha \left( (r - r_0)^2 + (z - z_0)^2 \right) \right], \quad (38)$$

Figura 11.  
Perfiles de equilibrio:  $P_{max} = 24kPa$  VS  $P_{max} = 36kPa$



*Nota.* Perfiles radiales de las componentes del campo magnético  $B_r$ ,  $B_\phi$  y  $B_z$ , de la densidad de corriente eléctrica toroidal  $j_t$ , del flujo poloidal normalizado  $\Psi_N$  y de la presión  $p$ , evaluados en el plano medio del sistema ( $z = 0$ ) para configuraciones con triangularidad fija  $\delta = 0,3$  y presiones centrales de 24 kPa y 36 kPa. Se observa que el incremento de la presión central tiene un efecto más pronunciado sobre la distribución del campo magnético toroidal y de la corriente del plasma, mientras que la forma general del perfil de presión se mantiene cualitativamente similar en ambos casos.

donde  $(r_0, z_0)$  representa la posición central de la perturbación,  $A$  denota su amplitud máxima y el parámetro  $\alpha$  controla el ancho característico de la distribución.

Esta forma funcional fue seleccionada con el fin de garantizar la suavidad y diferenciabilidad de la perturbación, requisitos fundamentales para la correcta aplicación del esquema numérico basado en diferencias finitas. La perturbación inicial se impuso de manera idéntica en todas las configuraciones de equilibrio consideradas, de modo que las diferencias observadas en la evolución dinámica puedan atribuirse exclusivamente a los cambios en los parámetros físicos del sistema.

La amplitud de la perturbación se fijó en  $A = 300 \text{ Pa}$ , valor que se encuentra aproximadamente dos órdenes de magnitud por debajo de la presión central del plasma. Esta elección asegura que la respuesta del sistema permanezca dentro del régimen lineal, en coherencia con el modelo MHD lineal empleado en las simulaciones.

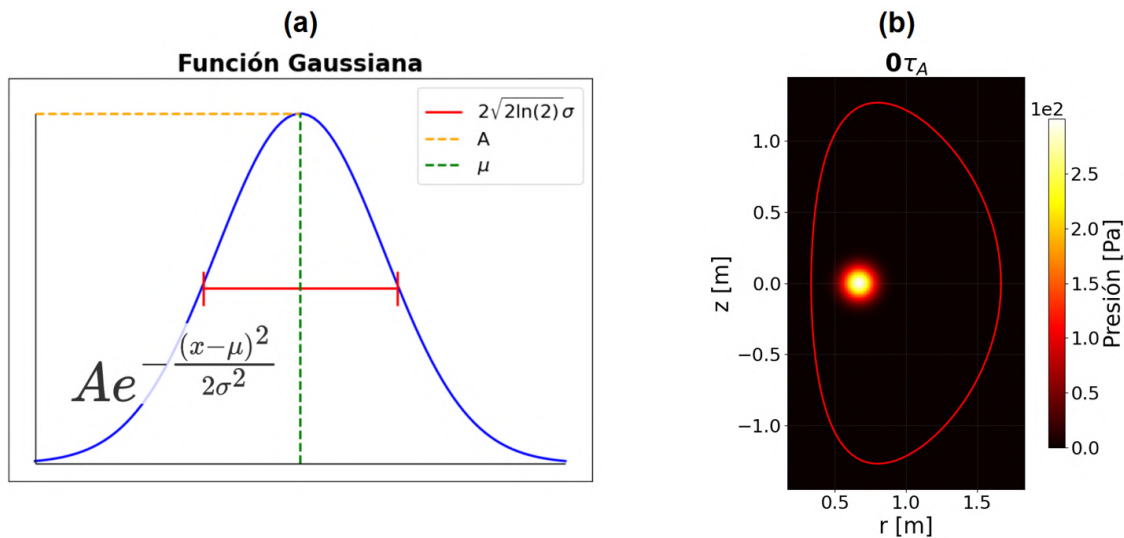
El parámetro  $\alpha$  se estableció como  $\alpha = 100 \text{ m}^{-2}$ , lo cual corresponde a un ancho característico de la perturbación aproximadamente diecisiete veces mayor que el paso de malla utilizado. De esta manera, se garantiza que la distribución gaussiana sea adecuadamente resuelta por la discretización espacial, minimizando errores numéricos asociados al cálculo de derivadas espaciales.

Finalmente, la posición del centro de la perturbación se definió como  $z_0 = 0$  y

$$r_0 = 0,5(r_a + r_b) - 0,2(r_b - r_a), \quad (39)$$

donde  $r_a$  y  $r_b$  representan los radios mínimo y máximo del dominio de simulación, respectivamente. Esta elección sitúa la perturbación en la región de transición del perfil de presión de equilibrio,

Figura 12.  
Perturbación inicial



*Nota.* Representación de la perturbación inicial de presión definida en la ecuación (38). Se muestra la forma funcional de la distribución gaussiana y su localización espacial en el plano poloidal  $(r, z)$  del dominio de simulación. La perturbación se encuentra centrada en  $(r_0, z_0)$ , ubicada sobre la ladera del perfil de presión de equilibrio, en las proximidades del borde de la columna de plasma, con el fin de favorecer la excitación de inestabilidades de borde.

es decir, entre las proximidades del borde de la columna de plasma y la región central casi uniforme, favoreciendo así la excitación directa de inestabilidades de borde. Una representación gráfica de la función exponencial y de la ubicación de la perturbación inicial se muestra en la Figura 12.

### 4.3. Validación

Como criterio fundamental de validación física y numérica del código desarrollado, se monitoreó continuamente la divergencia del campo magnético  $\nabla \cdot \vec{B}$  en cada punto de la malla y en cada iteración temporal para todas las configuraciones simuladas. De acuerdo con la ley de Gauss para el magnetismo, esta cantidad debe ser idénticamente nula en todo punto del espacio, constituyendo una restricción fundamental de las ecuaciones de Maxwell que debe preservarse en cualquier solución física válida. Los resultados obtenidos demuestran una excelente conservación

numérica de esta propiedad, tanto en las configuraciones de equilibrio (ver figura ??) como en la dinámica: el valor máximo de la divergencia normalizada registrado entre todas las simulaciones realizadas, sin considerar las fronteras y a lo largo de todas las iteraciones temporales, fue de  $|\nabla \cdot \vec{B}|_{\text{máx}} = 2,20 \times 10^{-5}$  en unidades normalizadas. Este valor, aproximadamente cinco órdenes de magnitud menor que la unidad, representa un error relativo inferior al  $10^{-3} \%$  respecto a los valores característicos del campo magnético en el sistema y resulta inferior al umbral de aceptabilidad establecido de  $10^{-3}$ . La magnitud de este error confirma que el esquema numérico de diferencias finitas de segundo orden empleado, junto con las condiciones de frontera implementadas y el paso temporal adaptativo basado en el criterio de Courant, preserva la naturaleza solenoidal del campo magnético. Esta validación garantiza que las soluciones obtenidas son físicamente consistentes y que los fenómenos observados en las simulaciones (estructuras modales, inestabilidades y evolución temporal del plasma) corresponden genuinamente a la dinámica MHD del sistema y no a artefactos numéricos espurios introducidos por violaciones de las leyes fundamentales del electromagnetismo.

#### **4.4. Evolución de la presión**

El estudio de la evolución temporal de las perturbaciones en la presión,  $P_1$ , y en el campo magnético,  $\mathbf{B}_1$ , constituye una herramienta fundamental para caracterizar la dinámica del plasma y evaluar la estabilidad de las configuraciones de equilibrio analizadas. Estas magnitudes están directamente asociadas con las contribuciones energéticas del sistema, en particular con la energía interna del plasma y la energía magnética, respectivamente, por lo que su comportamiento temporal proporciona información directa sobre los mecanismos de crecimiento o atenuación de las

perturbaciones.

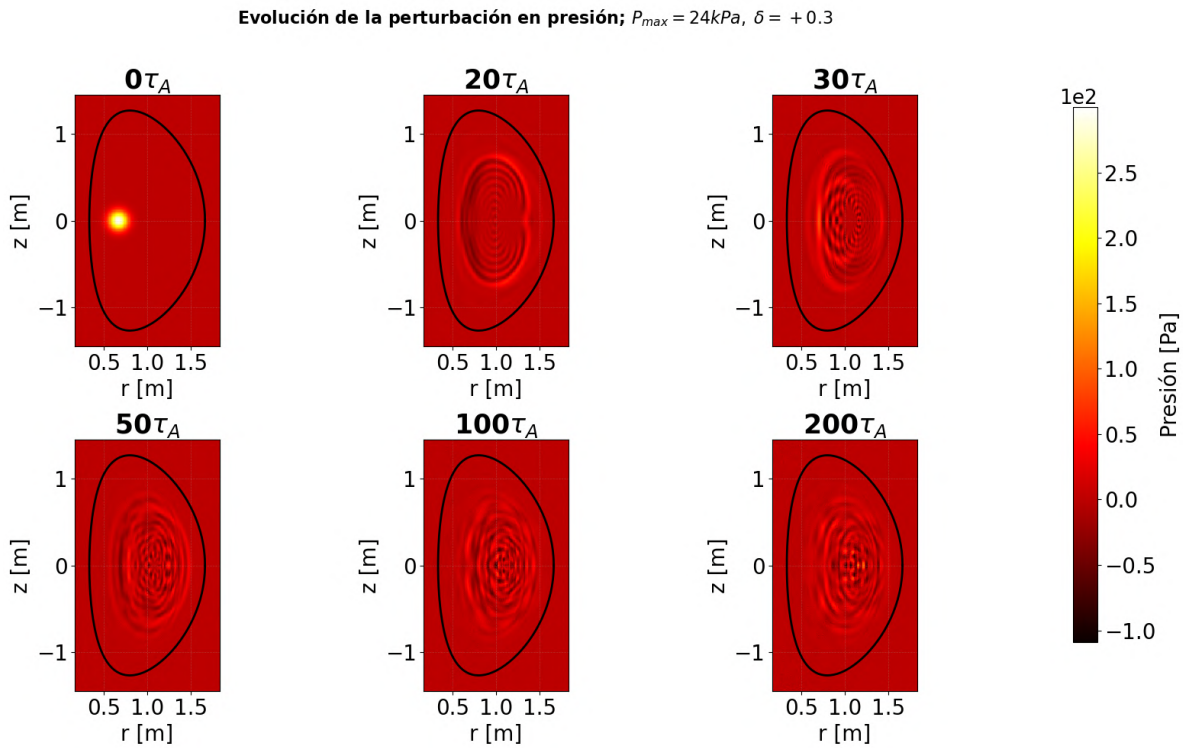
En el marco del análisis MHD lineal, la respuesta del sistema ante una perturbación inicial depende de la naturaleza de los modos excitados. Si la perturbación activa un modo inestable, su amplitud crece exponencialmente con el tiempo, indicando una transferencia sostenida de energía desde el equilibrio hacia la perturbación y, en consecuencia, una desviación progresiva del estado de equilibrio. Por el contrario, cuando el sistema es linealmente estable, las perturbaciones evolucionan de manera oscilatoria, con amplitudes acotadas que no presentan crecimiento exponencial, reflejando un intercambio periódico de energía sin pérdida de estabilidad global.

En esta subsección se analizan en detalle las características temporales de  $P_1$  y de la magnitud del campo magnético perturbado,  $|\mathbf{B}_1|$ , con el fin de identificar la presencia de regímenes estables o inestables y de establecer comparaciones sistemáticas entre configuraciones con distinta triangularidad y presión central.

Como punto de partida del análisis dinámico, la Figura 13 muestra la evolución espacio-temporal de la perturbación de presión en el plano poloidal para la configuración con presión central de 24 kPa y triangularidad  $\delta = 0,3$ . A partir de esta figura se evidencia un aspecto fundamental de la dinámica del sistema: la aparición progresiva de estructuras periódicas o modales en la distribución de la presión perturbada, las cuales emergen a partir de la perturbación inicial impuesta, que originalmente no presentaba una estructura modal definida.

En los primeros instantes de la evolución, la perturbación se redistribuye rápidamente, dando lugar a un cambio significativo en el patrón espacial durante aproximadamente los primeros  $50 \tau_A$ . Posteriormente, entre  $100 \tau_A$  y  $200 \tau_A$ , la distribución espacial de la presión perturbada no

Figura 13.  
Evolución de  $P_1$  para  $P_{max} = 24kPa$  y  $\delta = 0,3$

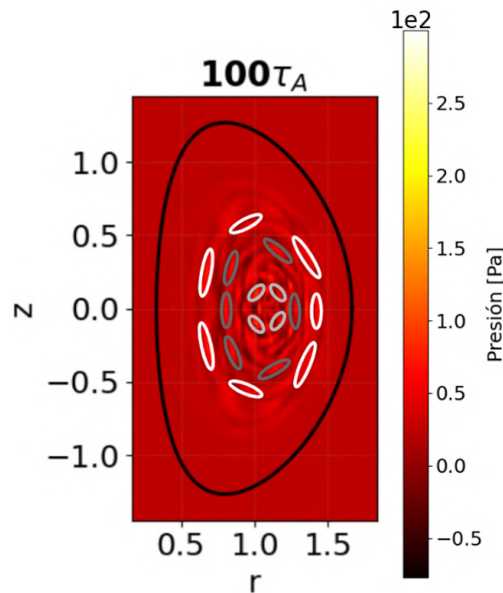


*Nota.* Evolución espacio-temporal de la perturbación de presión en el plano poloidal ( $r, z$ ) para distintos instantes temporales, expresados en unidades del periodo de Alfvén  $\tau_A$ , correspondientes a  $t = 0, 20, 30, 50, 100$  y  $200\tau_A$ . Los resultados se muestran para la configuración con  $P_{max} = 24kPa$  y  $\delta = 0,3$ , evidenciando la aparición y consolidación de estructuras modales a partir de la perturbación inicial.

muestra variaciones cualitativas relevantes, lo que sugiere que el sistema ha alcanzado un régimen dinámico caracterizado por una superposición estable de modos dominantes.

Es importante resaltar que la estructura modal comienza a manifestarse de manera clara desde un instante temprano,  $t \sim 20 \tau_A$ , incrementándose progresivamente el contenido espectral de la perturbación conforme avanza el tiempo. Este enriquecimiento modal se estabiliza aproximadamente después de  $100 \tau_A$ , punto a partir del cual la configuración espacial de la perturbación permanece cualitativamente invariante. La naturaleza modal de esta distribución se aprecia con mayor claridad en la Figura 14, donde se resaltan explícitamente las estructuras dominantes en un instante representativo de la evolución.

Figura 14.  
*Comportamiento modal en  $P_1$*



*Nota.* Distribución espacial de la perturbación de presión en el plano poloidal para  $t = 100 \tau_A$ . Las líneas sólidas resaltan la estructura modal dominante de la perturbación, evidenciando la presencia de modos bien definidos que caracterizan el régimen dinámico alcanzado por el sistema.

Un resultado particularmente relevante es que, como se observa en la Figura 13, durante toda la evolución temporal considerada, superior a  $200 \tau_A$ , la amplitud de la perturbación de presión  $P_1$  no exhibe crecimiento exponencial. Por el contrario, las perturbaciones permanecen acotadas y oscilan alrededor del estado de equilibrio con amplitudes pequeñas en comparación con la presión de equilibrio  $P_0$ , del mismo orden de magnitud que la perturbación inicial impuesta.

Este comportamiento no es exclusivo de la configuración previamente analizada, sino que se reproduce de manera consistente en todas las configuraciones estudiadas, tanto al variar la triangularidad  $\delta$  como al modificar la presión central del equilibrio  $P_{\max}$ . En las Figuras 15, 16 y 17 se presentan ejemplos representativos de esta evolución para distintas combinaciones de parámetros, donde se observa nuevamente la ausencia de crecimiento exponencial y la persistencia de un régimen oscilatorio estable.

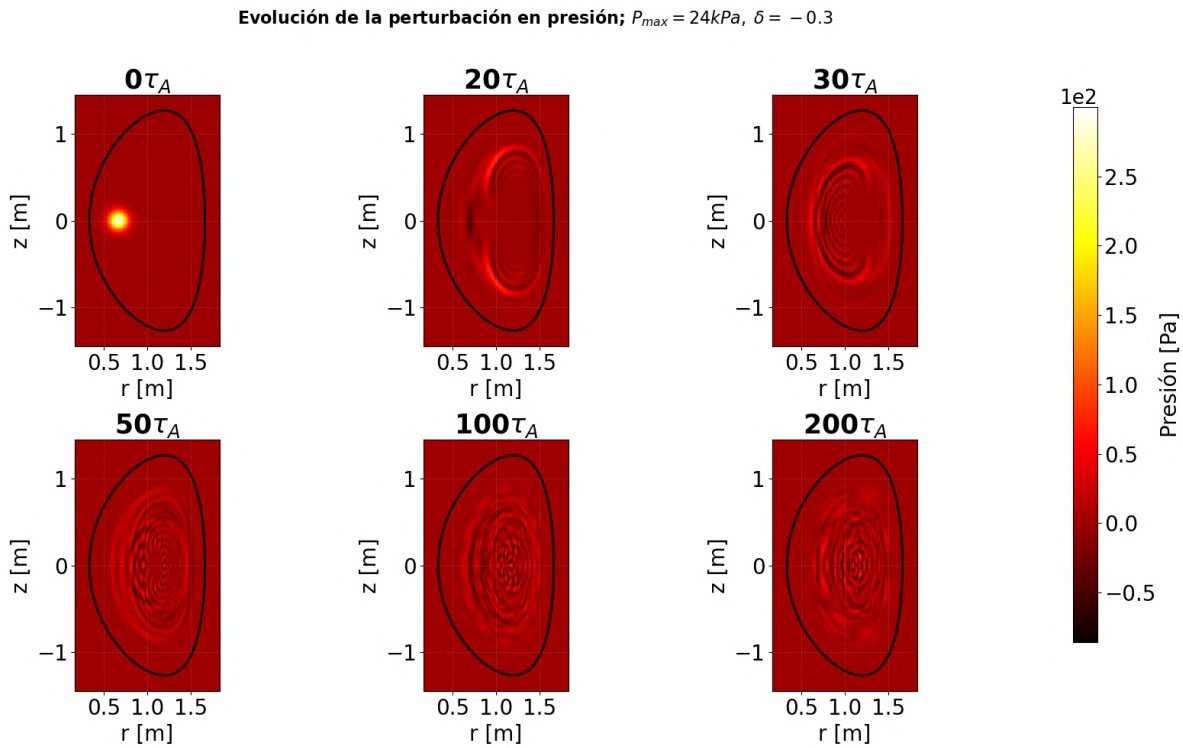
En conjunto, estos resultados sugieren de manera robusta que todas las configuraciones de equilibrio consideradas son linealmente estables frente a la perturbación inicial analizada, independientemente del signo y magnitud de la triangularidad, así como del valor de la presión central del equilibrio.

#### **4.5. Evolución de parámetros energéticos**

La ausencia de crecimiento en la amplitud de las perturbaciones indica que el sistema oscila alrededor de un estado de equilibrio linealmente estable. Con el fin de caracterizar de manera cuantitativa la dinámica global del plasma desde un punto de vista energético, se calcularon tres magnitudes en función del tiempo: la variación de energía potencial  $\delta W$ , de acuerdo con el principio de energía de la teoría MHD linealizada, el promedio espacial de la presión cinética  $\langle P_1 \rangle$ , y el

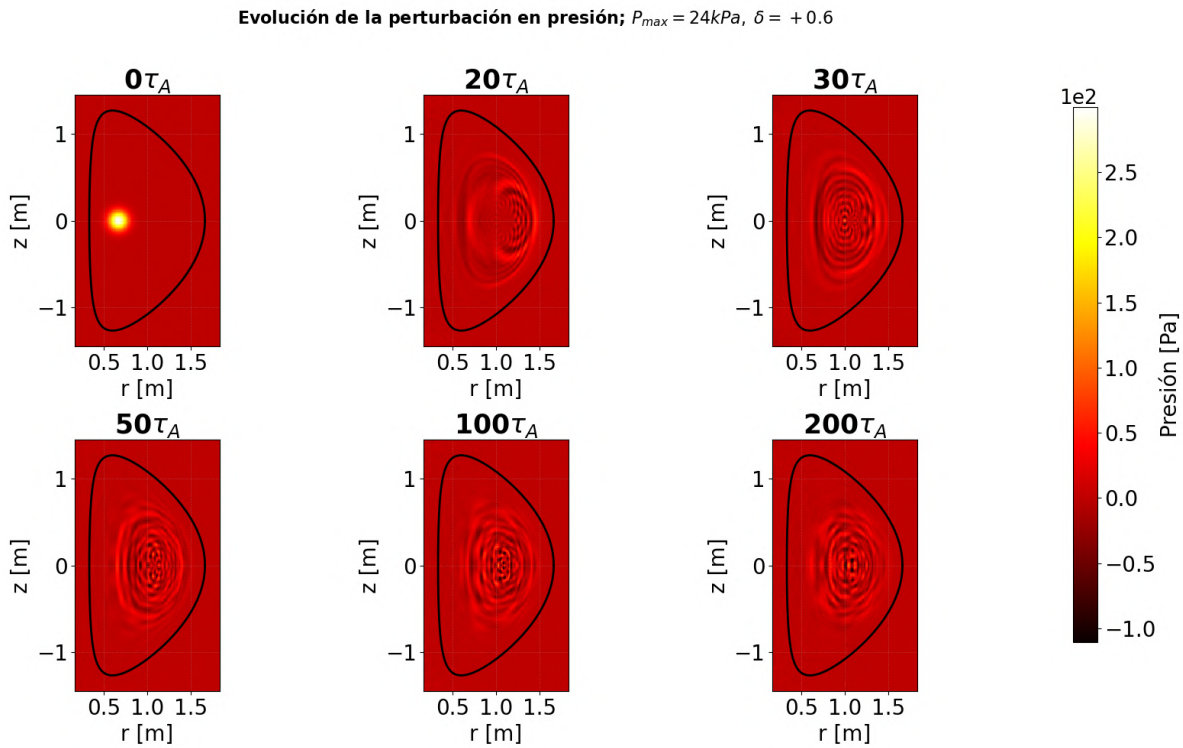
Figura 15.

Evolución de  $P_1$  para  $P_{max} = 24kPa$  y  $\delta = -0,3$



*Nota.* Evolución espacio–temporal de la perturbación de presión en el plano poloidal  $(r, z)$  para la configuración con presión central de 24kPa y triangularidad negativa  $\delta = -0,3$ , mostrada para  $t = 0, 20, 30, 50, 100$  y  $200 \tau_A$ . La ausencia de crecimiento exponencial y la persistencia de un comportamiento oscilatorio indican la estabilidad lineal del equilibrio frente a la perturbación inicial.

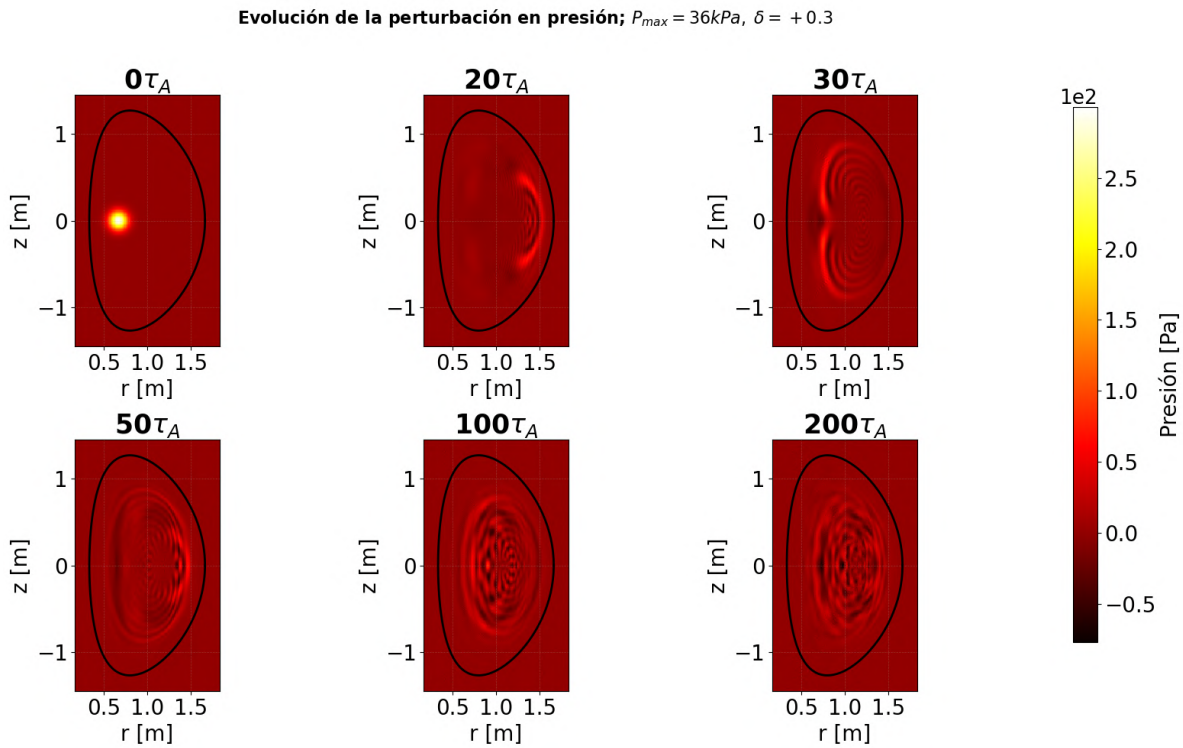
Figura 16.  
Evolución de  $P_1$  para  $P_{max} = 24kPa$  y  $\delta = 0,6$



*Nota.* Evolución espacio–temporal de la perturbación de presión en el plano poloidal para la configuración con presión central de 24kPa y triangularidad positiva  $\delta = 0,6$ , evaluada en los mismos instantes temporales que en la Figura 15. La similitud cualitativa con los demás casos analizados refuerza la conclusión de estabilidad lineal del sistema frente a variaciones de la triangularidad.

Figura 17.

Evolución de  $P_1$  para  $P_{max} = 36kPa$  y  $\delta = 0,3$



*Nota.* Distribución espacio-temporal de la perturbación de presión para la configuración con presión central  $P_{max} = 36kPa$  y triangularidad  $\delta = 0,3$ , mostrada para distintos tiempos en unidades de  $\tau_A$ . A pesar del aumento en la presión central, la perturbación permanece acotada y no presenta crecimiento exponencial, evidenciando nuevamente un régimen dinámico linealmente estable.

promedio espacial del cuadrado del campo magnético perturbado  $\langle B_1^2 \rangle$ .

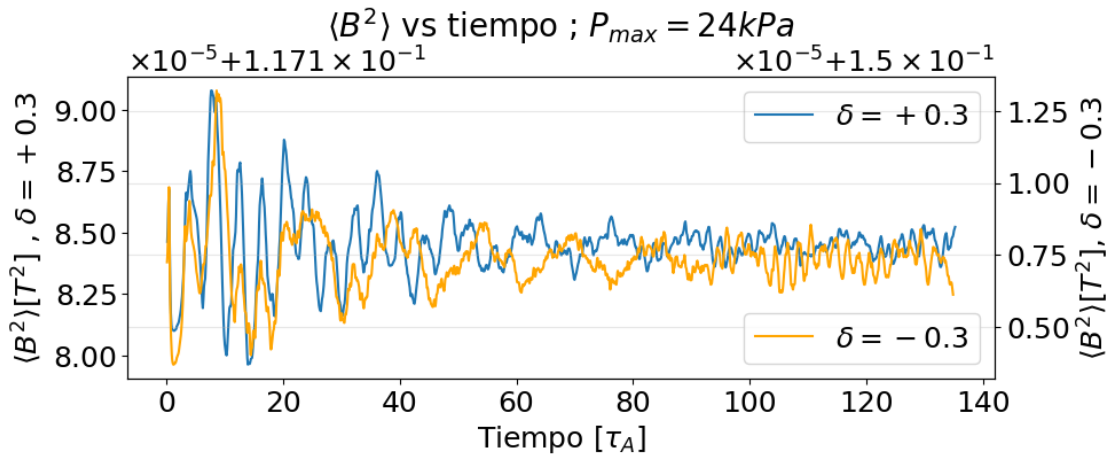
Estas cantidades proporcionan información complementaria sobre la evolución energética del sistema y permiten identificar características comunes, así como posibles diferencias, entre las distintas configuraciones geométricas analizadas. En particular, los promedios espaciales de  $\langle P_1 \rangle$  y  $\langle B_1^2 \rangle$  permiten evaluar el intercambio temporal entre las contribuciones energéticas cinética y magnética asociadas a la perturbación.

En las Figuras 19 y 18 se presenta la evolución temporal de estas magnitudes para las configuraciones con presión central de 24 kPa y triangularidades  $\delta = \pm 0,3$ . En ambos casos se observa un comportamiento oscilatorio claramente amortiguado, caracterizado por una disminución progresiva de la amplitud de las oscilaciones a lo largo del tiempo. Este comportamiento es consistente con la ausencia de inestabilidades lineales y sugiere la presencia de mecanismos disipativos numéricos o de redistribución energética que atenúan gradualmente la respuesta del sistema sin comprometer su estabilidad global.

El carácter amortiguado de estas oscilaciones debe interpretarse en el contexto de la dinámica global del sistema. En particular, la persistencia de la respuesta oscilatoria durante escalas temporales del orden de cientos de periodos de Alfvén, así como la conservación de estructuras modales bien definidas a lo largo de la evolución, indican que la disipación efectiva introducida por el esquema numérico no domina la dinámica del plasma. En consecuencia, el amortiguamiento observado no enmascara mecanismos de inestabilidad ni altera la naturaleza del régimen dinámico identificado, sino que es consistente con una evolución lineal estable del sistema bajo la perturbación considerada.

Figura 18.

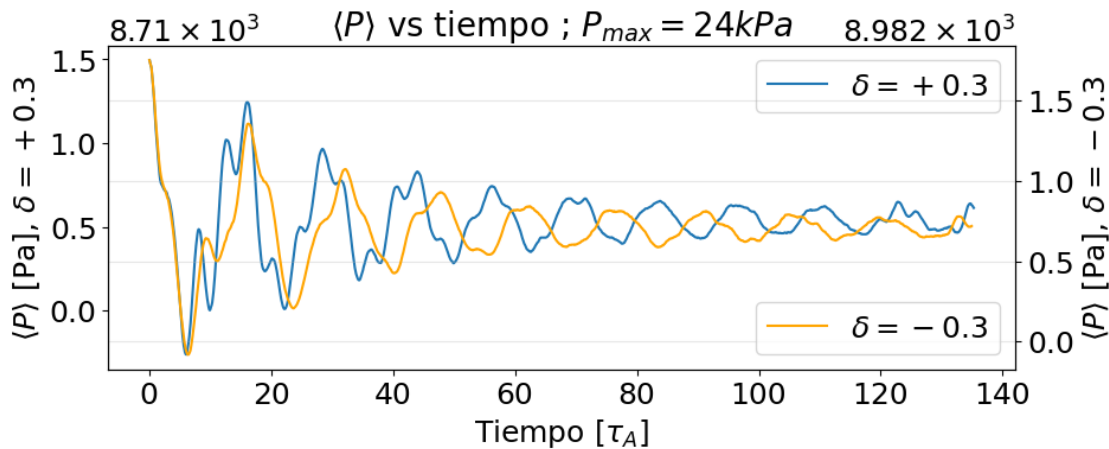
Evolución de  $\langle B^2 \rangle$  para  $P_{max} = 24kPa$  y  $\delta = \pm 0,3$



Nota. Evolución temporal del promedio espacial del cuadrado del campo magnético,  $\langle B^2 \rangle$ , para configuraciones con presión central  $P_{max} = 24kPa$  y triangularidades  $\delta = \pm 0,3$ . El comportamiento oscilatorio amortiguado evidencia la ausencia de crecimiento exponencial de la energía magnética asociada a la perturbación, mostrando una estabilidad lineal del sistema.

Figura 19.

Evolución de  $\langle P_1 \rangle$  para  $P_{max} = 24kPa$  y  $\delta = \pm 0,3$



Nota. Evolución temporal del promedio espacial de la presión perturbada,  $\langle P_1 \rangle$ , normalizada, para configuraciones con  $P_{max} = 24kPa$  y triangularidades  $\delta = \pm 0,3$ . La presencia de oscilaciones amortiguadas indica que la energía cinética asociada a la perturbación permanece acotada y decae progresivamente, en concordancia con un régimen dinámico linealmente estable.

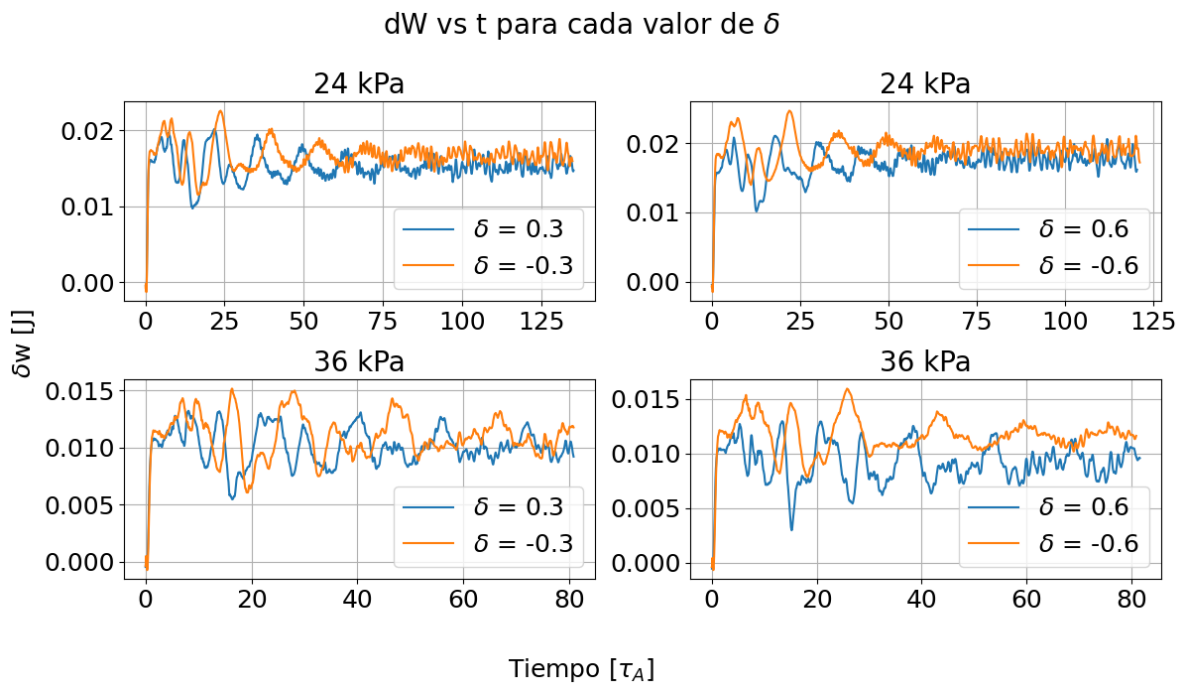
Por otra parte, la evolución temporal de la variación de la energía potencial,  $\delta W$ , mostrada en la Figura 20, presenta un comportamiento claramente oscilatorio para todas las configuraciones analizadas. Este tipo de respuesta es característico de la propagación de ondas magnetohidrodinámicas en plasmas confinados, las cuales se excitan como consecuencia de la perturbación inicial aplicada al sistema.

En particular, las oscilaciones observadas pueden asociarse a la superposición de distintos modos MHD lineales, incluyendo ondas de Alfvén y ondas magnetoacústicas, cuya presencia es consistente con la naturaleza del modelo empleado y con resultados previamente reportados en la literatura. La ausencia de un crecimiento sostenido de  $\delta W$  en el tiempo refuerza la conclusión de que el sistema permanece en un régimen linealmente estable, donde la energía oscila de manera acotada sin evidenciar mecanismos de inestabilidad.

Como puede observarse en la Figura 20, para todas las configuraciones analizadas el valor promedio de la variación de energía potencial  $\delta W$  es sistemáticamente mayor en las configuraciones con triangularidad negativa ( $\delta < 0$ ) en comparación con sus contrapartes de triangularidad positiva ( $\delta > 0$ ). Este comportamiento es consistente con resultados experimentales y computacionales reportados en la literatura (Duran, 2021; Happel, Pütterich, Told, Dunne, Fischer, Hobirk, McDermott, Plank et al., 2022; Marinoni, Sauter & Coda, 2021), donde se ha señalado una mayor estabilidad asociada a configuraciones con triangularidad negativa en distintos regímenes de operación.

Desde el punto de vista del principio de energía de la teoría MHD linealizada, esta observación adquiere una interpretación física clara. La cantidad  $\delta W$  representa la energía potencial que

Figura 20.  
Evolución de  $\delta W$  con  $P_{max}$  constante ( $\delta(+)$  VS  $\delta(-)$ )



*Nota.* Evolución temporal de la variación de la energía potencial,  $\delta W(t)$ , para las configuraciones con presiones centrales  $P_{max} = 24\text{ kPa}$  y  $36\text{ kPa}$ , y valores de triangularidad  $\delta = 0,3, -0,3, 0,6$  y  $-0,6$ . En todos los casos se observa un comportamiento oscilatorio sin crecimiento sostenido, consistente con una respuesta dinámica linealmente estable del sistema.

debe suministrarse al sistema para desplazarlo de su estado de equilibrio; en consecuencia, valores mayores de  $\delta W$  indican equilibrios energéticamente más robustos frente a perturbaciones. En este sentido, las configuraciones con triangularidad negativa requieren una perturbación de mayor amplitud para aproximarse al umbral de inestabilidad, caracterizado por  $\delta W = 0$ , en comparación con aquellas de triangularidad positiva, lo que sugiere una mayor resistencia intrínseca a la desestabilización.

Es importante enfatizar que, bajo la perturbación inicial considerada en este estudio, todas las configuraciones analizadas, independientemente del signo y magnitud de la triangularidad, así como del  $\beta$  presión central en la columna del plasma, exhiben un comportamiento linealmente estable durante más de  $100 \tau_A$ , como lo evidencian los valores positivos y oscilatorios de  $\delta W$  mostrados en la Figura 20. Por tanto, la diferencia observada entre triangularidad positiva y negativa no implica la presencia de inestabilidad en los primeros casos, sino que refleja una distinta robustez energética del equilibrio, en el sentido de que configuraciones con mayor  $\delta W$  requerirían perturbaciones de mayor amplitud para alcanzar condiciones inestables.

Finalmente, es importante señalar que las simulaciones presentadas en este trabajo se realizaron bajo la hipótesis de simetría axial, lo que implica la supresión explícita de perturbaciones con dependencia toroidal. En este contexto, la dinámica del sistema se restringe a modos axisimétricos, y los resultados obtenidos indican que todas las configuraciones de equilibrio analizadas son linealmente estables frente a la perturbación considerada.

No obstante, al relajar esta condición de simetría y permitir la aparición de modos no axisimétricos, es esperable que la respuesta dinámica del plasma se modifique de manera sustancial. En

particular, numerosos estudios han mostrado que la pérdida de estabilidad en configuraciones de tokamak está frecuentemente asociada al desarrollo de modos toroidales, los cuales pueden acceder a mecanismos de inestabilidad que no están presentes en un análisis estrictamente axisimétrico. En este sentido, los resultados aquí presentados sugieren que las inestabilidades relevantes para estos equilibrios no se originan en la dinámica axisimétrica, sino que estarían principalmente vinculadas a la excitación de modos con estructura toroidal.

Esta observación no invalida las conclusiones alcanzadas, sino que delimita claramente el alcance del presente estudio y pone de manifiesto la necesidad de extender el análisis hacia simulaciones tridimensionales que permitan capturar de forma completa la física asociada a la estabilidad del plasma.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se desarrolló e implementó un código computacional basado en el modelo magnetohidrodinámico (MHD) ideal y linealizado para el estudio de la dinámica de plasmas confinados magnéticamente en configuraciones tipo tokamak esférico, bajo la hipótesis de simetría axial. El código, fundamentado en esquemas de diferencias finitas de segundo orden para las derivadas espaciales y en algoritmos de Runge–Kutta de cuarto orden para la integración temporal, demostró un desempeño numérico robusto, particularmente en la preservación de propiedades físicas fundamentales. En especial, la condición solenoidal del campo magnético se mantuvo con errores del orden de  $|\nabla \cdot \mathbf{B}|_{\text{máx}} \sim 10^{-7}$ , varios órdenes de magnitud por debajo de los umbrales comúnmente aceptados, validando la consistencia del esquema numérico implementado.

Se realizaron simulaciones numéricas para diez configuraciones de equilibrio MHD, dife-

renciadas por dos valores de presión central ( $P_{\max} = 24\text{kPa}$  y  $36\text{kPa}$ ) y cinco valores de triangularidad ( $\delta = +0,6, +0,3, 0,0, -0,3, -0,6$ ). Este conjunto permitió explorar de manera sistemática un amplio rango de geometrías, desde configuraciones D-shape convencionales hasta configuraciones de triangularidad invertida. Los resultados obtenidos muestran que todas las configuraciones analizadas permanecen linealmente estables bajo la perturbación inicial considerada, manteniendo un comportamiento oscilatorio acotado durante más de 100 periodos de Alfvén, sin evidencia de crecimiento exponencial de perturbaciones ni de procesos de expulsión de plasma.

El análisis de los parámetros energéticos globales, en particular la variación de energía potencial  $\delta W$ , el promedio espacial de la presión perturbada  $\langle P_1 \rangle$  y el promedio espacial del cuadrado del campo magnético perturbado  $\langle B_1^2 \rangle$ , reveló que la dinámica global del sistema es cualitativamente similar para todas las configuraciones estudiadas. En todos los casos se observan oscilaciones características de la propagación de ondas magnetohidrodinámicas lineales, así como un comportamiento amortiguado de las perturbaciones, consistente con un régimen dinámico estable. La conservación aproximada de  $\langle B_1^2 \rangle$  confirma además que el código preserva adecuadamente la estructura del campo magnético, en concordancia con el teorema de congelamiento del flujo de Alfvén en el régimen ideal.

No obstante, un análisis cuantitativo más detallado evidenció diferencias sistemáticas entre configuraciones con triangularidad positiva y negativa. En particular, se encontró que las configuraciones con triangularidad negativa ( $\delta < 0$ ) presentan valores promedio y máximos de  $\delta W$  consistentemente mayores que sus contrapartes de triangularidad positiva de igual magnitud absoluta. Desde el punto de vista del principio de energía de la teoría MHD linealizada, este resultado indi-

ca que las geometrías con triangularidad negativa son energéticamente más robustas, requiriendo perturbaciones de mayor amplitud para aproximarse al umbral de inestabilidad caracterizado por  $\delta W = 0$ . Cuantitativamente, la diferencia máxima observada fue de  $\Delta(\delta W_{\max}) = 2,98 \times 10^{-3} \text{ J}$  para el caso  $\delta = \pm 0,6$  con  $P_{\max} = 36 \text{ kPa}$ , lo que sugiere que el efecto estabilizador asociado a la triangularidad negativa se intensifica al aumentar su magnitud absoluta.

El análisis espacio-temporal de las perturbaciones en presión y campo magnético mostró que el sistema evoluciona desde una distribución inicial localizada hacia un patrón estructurado de carácter modal a partir de tiempos del orden de  $30 \tau_A$ . Estas estructuras, caracterizadas por alternancias de máximos y mínimos en las direcciones radial y poloidal, corresponden a modos propios del sistema determinados por la geometría del equilibrio y las condiciones de frontera. La persistencia de estas estructuras con amplitudes pequeñas respecto a los valores de equilibrio confirma que la evolución permanece dentro del régimen lineal durante toda la simulación, validando la aplicación del principio de energía y del análisis de estabilidad MHD lineal.

Finalmente, debe destacarse que, debido a la hipótesis de simetría axial adoptada, el presente estudio excluye explícitamente la aparición de modos no axisimétricos. En este contexto, los resultados indican que las configuraciones analizadas son estables frente a perturbaciones axisimétricas, sugiriendo que las inestabilidades relevantes en estos sistemas estarían principalmente asociadas al desarrollo de modos con estructura toroidal. Esta observación delimita el alcance del presente trabajo y motiva la extensión natural del estudio hacia simulaciones tridimensionales.

Como trabajo futuro, se propone extender el análisis al régimen no lineal mediante el incremento controlado de la amplitud de las perturbaciones iniciales, con el fin de estudiar la evolución

completa de posibles inestabilidades hasta su saturación. Asimismo, sería relevante incorporar modelos más realistas de transporte y resistividad espacialmente dependiente, así como técnicas de refinamiento adaptativo de malla, que permitan resolver con mayor precisión las estructuras localizadas asociadas a modos de borde y facilitar comparaciones más directas con observaciones experimentales.

### Referencias Bibliográficas

- Atzeni, S., & Meyer-ter-Vehn, J. (2004). *The Physics of Inertial Fusion*. University of Oxford Press.
- Austin, M. E., Marinoni, A., Walker, M., Brookman, M., Degraessie, J., Hyatt, A., McKee, G., Petty, C., Rhodes, T., Smith, S., et al. (2019). Achievement of reactor-relevant performance in negative triangularity shape in the DIII-D tokamak. *Physical review letters*, *122*(11), 115001.
- Baek, S., Wallace, G., Bonoli, P., Brunner, D., Faust, I., Hubbard, A., Hughes, J., LaBombard, B., Parker, R., Porkolab, M., et al. (2018). Observation of efficient lower hybrid current drive at high density in diverted plasmas on the Alcator C-Mod tokamak. *Physical review letters*, *121*(5), 055001.
- Berkery, J. W., & Harrison, J. R. (2025). A review of collaborative studies between the NSTX/-U and MAST/-U spherical tokamaks. *Plasma Physics and Controlled Fusion*.
- Blanco, I. V. (s.f.). Implementación y simulación del tokamak esférico MEDUSA-CR: Etapa.
- Boyd, T. J. M., & Sanderson, J. J. (2003). *The Physics of Plasmas* (1st). Cambridge University Press.
- Chapa, E., Salvador, M., Sánchez, F., Ramírez, H., Martínez, S., & Acosta, A. (s.f.). Consideraciones de diseño y de estudio térmico sobre la bobina D-shaped para el Tokamak'T'. *Memorias del XXVII Congreso Internacional Anual de la SOMIM*, 73-81.
- Council, N. R., et al. (1930). *Controlled Nuclear Fusion: Current Research and Potential Progress*.

- Ding, S., Garofalo, A., Wang, H., Weisberg, D., Li, Z., Jian, X., Eldon, D., Victor, B., Marinoni, A., Hu, Q., et al. (2024). A high-density and high-confinement tokamak plasma regime for fusion energy. *Nature*, 629(8012), 555-560.
- Doyle, S. J., Lopez-Aires, D., Mancini, A., Agredano-Torres, M., Garcia-Sanchez, J., Segado-Fernández, J., Ayllon-Guerola, J., Garcia-Muñoz, M., Viezzer, E., Soria-Hoyo, C., et al. (2021). Magnetic equilibrium design for the SMART tokamak. *Fusion Engineering and Design*, 171, 112706.
- Duran, J. E. L. (2021). *ESTUDIO NUMÉRICO DE LAS INESTABILIDADES MAGNETOHIDRODINÁMICAS EN UN TOKAMAK ESFÉRICO* [Tesis de Maestría]. Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander.
- Eddington, A. S. (1988). *The internal constitution of the stars*. Cambridge University Press.
- Einstein, A. (1905). Does the inertia of a body depend upon its energy-content. *Annalen der physik*, 18(13), 639-641.
- Fitzpatrick, R. (2022). *Plasma physics: an introduction*. Crc Press.
- Freidberg, J. P. (2014). *ideal MHD*. Cambridge University Press.
- Freidberg, J., Mangiarotti, F., & Minervini, J. (2015). Designing a tokamak fusion reactor—How does plasma physics fit in? *Physics of Plasmas*, 22(7).
- Garofalo, A., Solomon, W., Park, J.-K., Burrell, K., DeBoo, J., Lanctot, M., McKee, G., Reimerdes, H., Schmitz, L., Schaffer, M., et al. (2011). Advances towards QH-mode viability for ELM-stable operation in ITER. *Nuclear Fusion*, 51(8), 083018.

- Happel, T., Pütterich, T., Told, D., Dunne, M., Fischer, R., Hobirk, J., McDermott, R., Plank, U., et al. (2022). Overview of initial negative triangularity plasma studies on the ASDEX Upgrade tokamak. *Nuclear Fusion*, 63(1), 016002.
- Holtkamp, N., Team, I. P., et al. (2007). An overview of the ITER project. *Fusion Engineering and Design*, 82(5-14), 427-434.
- Imran, M., Hu, Z., Zheng, P., Sattar, H., Khan, M. S., Iqbal, M., Luo, G.-N., & Ding, F. (2024). Studies of erosion-deposition of plasma-facing materials due to plasma-wall interactions in EAST tokamak. *Journal of Nuclear Materials*, 598, 155195.
- Jeon, Y. M. (2015). Development of a free-boundary tokamak equilibrium solver for advanced study of tokamak equilibria. *Journal of the Korean Physical Society*, 67(5), 843-853.
- Kingham, D., & Gryaznevich, M. (2024). The spherical tokamak path to fusion power: Opportunities and challenges for development via public-private partnerships. *Physics of Plasmas*, 31(4).
- Krauss-Varban, D., Omidi, N., & Quest, K. (1994). Mode properties of low-frequency waves: Kinetic theory versus Hall-MHD. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 99(A4), 5987-6009.
- Maccaferri, N., Gabbani, A., Pineider, F., Kaihara, T., Tapani, T., & Vavassori, P. (2023). Magnetoplasmonics in confined geometries: Current challenges and future opportunities. *Applied Physics Letters*, 122(12).
- Marinoni, A., Sauter, O., & Coda, S. (2021). A brief history of negative triangularity tokamak plasmas. *Reviews of Modern Plasma Physics*, 5(1), 6.

- Medvedev, S. Y., Kikuchi, M., Villard, L., Takizuka, T., Diamond, P., Zushi, H., Nagasaki, K., Duan, X., Wu, Y., Ivanov, A., et al. (2015). The negative triangularity tokamak: stability limits and prospects as a fusion energy system. *Nuclear Fusion*, 55(6), 063013.
- Mills, R. (1957). Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 70(1), 6-10. <https://doi.org/10.1088/0370-1301/70/1/303>
- Minotti, F. O. (2012). Apuntes de Física del Plasma. *Instituto de Física del Plasma. Universidad de Buenos Aires*.
- Miyamoto, K. (2011). *Fundamentals of plasma physics and controlled fusion* (inf. téc.). National Inst. for Fusion Science.
- Miyamoto, K., et al. (2016). *Plasma physics for controlled fusion* (Vol. 92). Springer.
- Morgan, N. M., & Martínez, P. L. G. (2022). Determinación del Equilibrio MHD a Partir del Perfil del Ángulo de Inclinación del Campo Magnético. *Mecánica Computacional*, 39(12), 457-466.
- Morse, E. (1983). *Nuclear Fusion*. Holt, Rinehart; Winston.
- National Institute for Fusion Science. (2024). *Large Helical Device (LHD) Project* [Configuración helicoidal del dispositivo LHD]. Academic Research Platform (LHD). Consultado el 19 de diciembre de 2024, desde [%5BURL%20exacta%20de%20la%20imagen%5D](#)
- Nicolai, A., & Börner, P. (1989). A computational model describing confinement and performance of circular and D-shaped Tokamak plasmas. *Journal of Computational Physics*, 80(1), 98-136.

- Obaldía, E. C. (2014). La ingeniería nuclear y el desarrollo de mecanismos de fusión por confinamiento magnético. *Ingeniería. Revista de la Universidad de Costa Rica*, 24(1), 83-92.
- O'Dea, D. O. (2021). *Power handling of liquid metal infused trenches in the EAST Tokamak* [Tesis doctoral, University of Illinois at Urbana-Champaign].
- Organismo Internacional de Energía Atómica. (2021, mayo). IAEA Bulletin: Energía de fusión [Boletín emblemático del OIEA, número de mayo de 2021.]. <https://www.iaea.org/es/bulletin>
- Parisi, G. (2023). Nobel lecture: Multiple equilibria. *Reviews of Modern Physics*, 95(3), 030501.
- Perrone, D., Dendy, R., Furno, I., Sanchez, R., Zimbardo, G., Bovet, A., Fasoli, A., Gustafson, K., Perri, S., Ricci, P., et al. (2013). Nonclassical transport and particle-field coupling: from laboratory plasmas to the solar wind. *Space Science Reviews*, 178, 233-270.
- Poljak, D., Descamps, M., Raynaud, T., & Dimic, V. (2024). A Review of Numerical Methods for Solving Grad-Shafranov Equation in Magnetohydrodynamics. *2024 9th International Conference on Smart and Sustainable Technologies (SpliTech)*, 1-6.
- Pustovitov, V., & Shafranov, V. (s.f.). Plasma equilibrium and stability in stellarators. En *Problems on plasma theory. Issue 15* (pp. 146-291).
- Salvador, M., Hernández, L., Sánchez, D., Villarreal, M., González, J., Martínez, S., García, M., Guevara, J., Chapa, E., & Vorobyov, G. (s.f.). Consideraciones generales sobre la cámara de vacío del Tokamak "T". *DIRECTORIO REVISTA INGENIERIAS*.
- Samanta, K. K. (2024). High-power MHz to 100s of GHz circuits and systems for nuclear fusion reactors with examples from SST-1 and ITER. *IEEE Journal of Microwaves*.

- Shumlak, U. (2020). Z-pinch fusion. *Journal of Applied Physics*, 127(20).
- Solokha, V., Kurskiev, G., Yashin, A. Y., Balachenkov, I., Varfolomeev, V., Voronin, A., Gusev, V., Goryainov, V. Y., Dyachenko, V., Zhiltsov, N., et al. (2023). Classification of edge instabilities at Globus-M2 tokamak. *Plasma Physics Reports*, 49(4), 419-427.
- Stacey, W. M. (2012). *Fusion plasma physics*. John Wiley & Sons.
- Tanabe, T. (2017). *Tritium: Fuel of fusion reactors*. Springer.
- Vedenov, A. A., Velikhov, E. P., & Roal'd Z, S. (1961). Stability of plasma. *Soviet Physics Uspekhi*, 4(2), 332.
- Vuik, K., Vermolen, F., van Gijzen, M., & Vuik, T. (2023). *Numerical methods for ordinary differential equations*. TU Delft Open Publishing.
- Wesson, J., & Campbell, D. J. (2011). *Tokamaks* (Vol. 149). Oxford university press.
- Wright, A. (2023). Advances in stellarator theory and optimization: status, gaps and opportunities. *APS Division of Plasma Physics Meeting Abstracts, 2023*, CM06-014.
- Zohm, H. (2014). *Magnetohydrodynamic Stability of Tokamaks*. Wiley-VCH. <https://doi.org/10.1002/9783527677375>