

Propagación de Ondas Magnetohidrodinámicas en la Atmósfera Solar

Anamaría Navarro Noguera

Trabajo de Grado para optar al título de Doctora en Física

Director

Fabio Duván Lora Clavijo

Doctorado en Física

Codirector

Guillermo González Villegas

Doctorado en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2020

Tabla de Contenido

Introducción	16
1. Problema del Calentamiento de la Corona Solar	25
1.1. El Sol	25
1.2. La estructura del Sol	26
1.3. Modelo de temperatura de VAL	28
1.4. Problema del calentamiento coronal	29
1.5. Campo magnético del Sol	32
2. Ecuaciones de la Magnetohidrodinámica	34
2.1. Ecuaciones en Forma Conservativa	40
2.2. Ecuación de Onda General	44
2.3. Ondas en un Medio Uniforme	46
2.4. Estructura Característica	51
2.5. Modelo de Spitzer para la resistividad	54
2.6. Modelos para el flujo de Calor	56
3. MAGNUS: Un nuevo código MHD	57
3.1. Métodos numéricos	57

3.2. Solucionador de Riemann HLLC para la magnetohidrodinámica	62
3.3. Transporte de Flujo Restringido	64
3.4. Paso de tiempo adaptativo	68
3.5. Adimensionalización	69
3.6. Implementación de la corriente eléctrica, la resistividad y el flujo de calor	69
3.7. Condiciones de Frontera	71
3.8. Diagrama de flujo del código	73
3.9. Características y limitaciones del Código	77
4. Esquema y Validación del Código	80
4.1. Pruebas Numéricas	80
4.2. Brio-Wu	82
4.2.1. <i>En el régimen ideal</i>	82
4.2.2. Prueba con resistividad	84
4.2.3. Prueba con flujo de calor isótropo	87
4.3. Láminas de Corriente	89
4.4. Rotor MHD	92
4.5. Interacción Nube-Choque	95
4.6. Reconexión magnética	98
4.7. Conducción Térmica	103

4.8. Oscilaciones transversales en un Bucle Coronal	104
4.9. Ondas de gravedad MHD	109
5. Emergencia de un <i>blob</i> de plasma	114
5.1. <i>Blobs</i> magnéticos producidos por granulación	115
5.2. Modelo numérico	118
5.3. Dominio numérico y condiciones de frontera	121
5.4. Resultados	122
6. Simulaciones de <i>Tadpole Jets</i>	129
6.1. Detección de un <i>Tadpole jet</i> en una mancha solar	129
6.2. Modelo numérico	131
6.3. Resultados	133
7. Conclusiones	145
Referencias Bibliográficas	148

Lista de Figuras

Figura 1.	La estructura general del sol.	26
Figura 2.	Modelo de temperatura de VAL	29
Figura 3.	Bucles coronales obtenidos por el instrumento TRACE.	31
Figura 4.	Campo magnético global de la corona.	34
Figura 5.	Velocidad de fase para las ondas de la magnetohidrodinámica.	50
Figura 6.	Estructura caracterísitica de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica.	53
Figura 7.	Ilustración del problema de Riemann.	53
Figura 8.	Soluciones elementales del problema de Riemann.	54
Figura 9.	Resistividad de Spitzer para el modelo de temperatura de VAL.	55
Figura 10.	Dibujos ilustrativos del método Transporte de Flujo Restringido.	68
Figura 11.	Esquema de los algoritmos implementados en el código MAGNUS	78
Figura 12.	Solución numérica del la prueba de Brio-Wu.	85
Figura 13.	Solución de la prueba de Brio Wu con resistividad.	87
Figura 14.	Solución numérica de la prueba de Brio-Wu con conductividad térmica.	90
Figura 15.	Campo magnético transversal de la prueba de láminas de corriente.	92
Figura 16.	$\text{Máx}(\nabla \cdot \vec{B})$ de la prueba de láminas de corriente.	93
Figura 17.	Densidad y presión de la prueba del rotor MHD.	95

Figura 18.	$\text{Máx}(\nabla \cdot \vec{B})$ de la prueba del rotor MHD.	96
Figura 19.	Densidad de la prueba de interacción nube-choque.	98
Figura 20.	$\text{Máx}(\nabla \cdot \vec{B})$ de la prueba interacción nube-choque	99
Figura 21.	Presión de la prueba de reconexión magnética.	101
Figura 22.	Tasa de reconexión para la prueba de reconexión magnética	102
Figura 23.	$\text{Máx}(\nabla \cdot \vec{B})$ de la prueba de reconexión magnética	103
Figura 24.	Temperatura de la prueba de conducción térmica.	105
Figura 25.	$\text{Máx}(\nabla \cdot \vec{B})$ de la prueba de conducción térmica.	106
Figura 26.	Velocidad transversal de la prueba de oscilaciones transversales en un bucle coronal.	108
Figura 27.	$\text{Máx}(\nabla \cdot \vec{B})$ de la prueba de oscilaciones transversales en un bucle coronal.	109
Figura 28.	Velocidad vertical en la prueba de ondas de gravedad magnetoacústicas.	112
Figura 29.	$\text{Máx}(\nabla \cdot \vec{B})$ de la prueba de ondas de gravedad.	114
Figura 30.	Logaritmo de la densidad de iones en una simulación del código JOANNA.	119
Figura 31.	Perfiles hidrostáticos del plasma	121
Figura 32.	Magnitud del campo magnético para tres tiempos distintos.	123
Figura 33.	Gráficas de la velocidad vertical, densidad de masa, temperatura y flujo de energía.	125
Figura 34.	Variaciones de la energía.	127
Figura 35.	Variación relativa de la temperatura en la cromosfera.	128

Figura 36.	Imágenes directas de un <i>Tadpole jet</i> (pseudo-choque) confinado alrededor de una mancha solar.	137
Figura 37.	Perfil de temperatura del estado de equilibrio.	138
Figura 38.	Perfil de la magnitud del campo magnético.	139
Figura 39.	Densidad de masa para distintos tiempos.	140
Figura 40.	Velocidad vertical, presión, número de mach y magnitud de vector de conducción térmica.	141
Figura 41.	Flujo de energía vertical	142
Figura 42.	Flujo de masa vertical.	143
Figura 43.	Promedio horizontal de la tasa de pérdida de calor.	144

Lista de Tablas

Tabla 1.	Error L^1 para la densidad en el tiempo 0.1 de la prueba propuesta por Brio and Wu (1988)	86
Tabla 2.	Errores de la prueba numérica propuesta por Brio and Wu (1988) adicionando una resistividad constante.	88
Tabla 3.	Auto-convergencia del error L^1 en la prueba propuesta por Brio and Wu (1988) con conductividad térmica.	89
Tabla 4.	Parámetros usados para las simulaciones de las pruebas numéricas de la validación del código MAGNUS.	113

Notación

A continuación se encuentran algunos símbolos que aparecen a lo largo del trabajo.

t : Tiempo

ρ : Densidad de masa

$\vec{v}$: Campo de velocidades

E : Energía total

T : Temperatura

$\frac{\partial A}{\partial B}$: Derivada parcial de A respecto a B

∂_i : Derivada parcial respecto a la coordenada x^i

∇ : Operador nabla

$\vec{\mathcal{E}}$: Campo eléctrico

$\vec{J}$: Vector de densidad de corriente eléctrica

$\vec{B}$: Campo magnético

$\vec{g}$: Vector de aceleración de la gravedad

p : Presión térmica del fluido

p_T : Presión total, térmica y magnética

Γ : Índice adiabático de los gases

$\vec{q}$: Vector flujo de calor

η : Resistividad eléctrica

e : Energía interna

c : Velocidad de la luz

ρ_q : Densidad de carga

ϵ_0 : Permitividad eléctrica del vacío

μ_0 : Permitividad magnética del vacío

l_0 : Longitud característica

$\mathcal{E}_0$: Campo eléctrico característico

B_0 : Campo magnético característico

t_0 : Tiempo característico

$\vec{U}$: Vector variables conservativas

$\vec{F}^i$: Vector de flujo

$\vec{S}$: Vector de términos fuente-sumidero

c_a : Velocidad de Alfvén

c_s : Velocidad del modo magnetoacústico lento

c_f : Velocidad del modo magnetoacústico rápido

λ : Valores propios de la matriz Jacobiana

$\ln \Lambda$: Logaritmo de Coulomb

κ : Coeficiente de conducción térmica

C_{cfl} : Courant-Friedrichs-Levy

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$: Coordenadas cartesianas

L^1 : Norma del error

N : Número de puntos de la malla

k_B : Constante de Boltzman

m_p : Masa del protón

β : Plasma-beta

ρ_h : Densidad de masa del estado hidrostático

p_h : Presión del estado hidrostático

T_h : Temperatura del estado hidrostático

Resumen

Título: Propagación de Ondas Magnetohidrodinámicas en la Atmósfera Solar *

Autor: Anamaría Navarro Noguera **

Palabras Clave: Física solar, Magnetohidrodinámica, ondas magnetohidrodinámicas, métodos numéricos.

Descripción: Uno de los problemas mas importantes en la física solar consiste en explicar el calentamiento de la última capa de su atmósfera, la corona solar. En este contexto es de gran utilidad el estudio de los posibles mecanismos que puedan suministrar energía desde la base de la atmósfera hacia capas superiores. Una manera de estudiar estos procesos es a través de simulaciones numéricas que modelen distintas dinámicas del plasma de la atmósfera solar, usualmente con códigos que resuelvan las ecuaciones de la magnetohidrodinámica. Esto ha impulsado la creación de distintos códigos que resuelvan este complejo sistema de ecuaciones no lineales. Por otra parte, para estudiar el transporte de energía en el contexto del problema del calentamiento de la corona es necesario considerar el efecto de procesos disipativos, los cuales agregan algunas dificultades adicionales al aplicar los métodos numéricos tradicionales. Por estas razones en esta tesis doctoral se construyó el código MAGNUS, para incluir en las ecuaciones de la magnetohidrodinámica la influencia de los efectos de disipación de energía relacionados con la resistividad y el flujo de calor. La eficiencia del código se comprobó por medio de la reproducción de distintas pruebas. Unas en el régimen ideal, otras para comprobar la implementación de la resistividad y el flujo de calor de manera independiente. Se estudiaron dos mecanismos que tienen relevancia dentro del contexto de la resolución del problema del calentamiento de la corona, pues ambos aumentan el flujo de energía hacia las capas superiores de la atmósfera solar. El primer mecanismo corresponde a la emergencia de un *blob* de plasma en la cromosfera el cual es generado por los movimientos convectivos de granulación. Dicho *blob* magnético emerge desde la zona convectiva y se reconecta con las líneas de campo magnético del ambiente, en este proceso ocurre una transformación entre la energía magnética del sistema y la energías interna y cinética, y como resultado se produce una eyección de plasma caliente hacia las capas superiores en forma de *jet*. Se produce a su vez un notable incremento en la temperatura de la atmósfera y además el flujo de energía hacia las capas superiores se encuentra dentro del rango esperado por los modelos teóricos de balance de energía en la atmósfera solar. El segundo mecanismo analizado en la tesis consiste en determinar los efectos de la conducción térmica en la producción de tadpole *jets* cromosféricos, estos son *jets* fuertemente energéticos recientemente descubiertos alrededor de un bucle coronal. Por medio de simulaciones numéricas en las que se incluyeron los efectos del flujo de calor, se encuentra que la conducción térmica en la zona de transición suministra energía y masa a estos *jets*, aumentando también la magnitud del flujo de energía que transportan hacia la corona, modificando a su vez la morfología de estos, colimándola y aumentando su velocidad de propagación.

* Tesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Fabio Duván Lora Clavijo, Doctorado en Física

Abstract

Title: Magnetohydrodynamic Wave Propagation in the Solar Atmosphere *

Author: Anamaría Navarro Noguera **

Keywords: Solar physics, MHD, MHD waves, numerical methods.

Description: The heating of the solar corona is one of the major problems in solar physics. Within this context is very important to study the possible mechanisms that could provide energy from the base of the atmosphere into higher layers. One way to study these processes is through numerical simulations of different dynamics of the plasma in the solar atmosphere, usually with codes that solve the equations of magnetohydrodynamics. This has prompted the creation of different codes that solve this complex system of equations, which presents a lot of difficulties due to its non-linearity. On the other hand, to study the transport of energy in the context of the problem of heating of the solar corona it is necessary to take into account dissipative phenomena, which add some additional difficulties. For these reasons, in this thesis we built the MAGNUS code, to solve the equations of magnetohydrodynamics taking into account mechanisms of dissipation of energy due to resistivity and thermal conduction. The efficiency of the code was checked by means of the reproduction of different tests in the ideal regime, with resistivity and heat flow. Two projects of transient phenomena in the solar atmosphere were carried out, both within the context of solving the heating problem of the corona, since both increase the flow of energy into the upper layers of the solar atmosphere. The first project corresponds to the emergence of a plasma *blob* in the chromosphere which is generated by convective granulation movements. Such magnetic blob emerges from the convective zone and reconnects with the ambient magnetic field lines, in this process a transformation occurs between the magnetic energy of the system and the internal and kinetic energies, and as a result there is an ejection of hot plasma towards the upper layers in the form of jet. There is also a noteworthy warming in the temperature of the atmosphere. In addition the energy flow into the upper layers is within the range expected by the theoretical models of energy balance in the solar atmosphere. The second project consists in determining the effects of thermal conduction in the production of Tadpole chromospheric jets, these jets are very energetic and were discovered recently around a coronal loop. Through numerical simulations where the thermal conduction effect was considered we found that the jets were more energetic, carried more mass and the energy flux magnitude was considerably increased due the thermal conduction. Additionally, their morphology was modified, it got more collimated and its speed increased.

* Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Fabio Duván Lora Clavijo, Doctorado en Física

Resultados derivados de la Tesis

Los resultados de esta tesis se consignaron en tres artículos de investigación: dos de ellos se publicaron en revistas homologadas e indexadas por COLCIENCIAS en categoría A1 y uno está sometido al *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* con la misma categoría. Las referencias bibliográficas de las publicaciones se presentan a continuación:

- Navarro, A., Lora-Clavijo, F.D. & González, G.A. 2017. Magnus: A New Resistive MHD Code with Heat Flow Terms. *ApJ*, 844:57. DOI: 10.3847/1538-4357/aa7a13
- Navarro, Anamaría, Murawski, K., Wójcik, D. & Lora-Clavijo, F.D. 2019. Numerical simulations of the emerging plasma blob into a solar coronal hole. *MNRAS*, 489(2):2769-2774. DOI:10.1093/mnras/stz2313
- Navarro, Anamaría., Lora-Clavijo, F.D., Murawski, K., & Poedts, Stefaan. Thermal conduction effects on formation on chromospheric Solar Tadpole-Like Jets. Sometido al *MNRAS*.

Algunos de los resultados fueron expuestos en el congreso internacional LARIM 2019: XVI Latin American Regional IAU Meeting realizado en Antofagasta Chile en noviembre 2019 con el trabajo: *Numerical simulations of the emerging plasma blob into a solar coronal hole*.

En el cuarto año del doctorado se realizó una pasantía en la Universidad Maria Curie-Skłodowska, Lublin, Polonia de la cual surgió una colaboración con el profesor Krzysztof Murawski y el investigador Dariusz Wójcik la cual se mantiene actualmente y de la cual se desarrollaron dos de los artículos presentados anteriormente. Asimismo se estableció una colaboración

con el profesor Stefaan Poedts de la Universidad Católica de Lovaina, Bélgica. Adicionalmente, de manera complementaria y paralela a la tesis, se participó en la codirección de los siguientes trabajos de grado:

- Propagación de ondas magnetohidrodinámicas en tubos de flujo magnético con *twist*. Autora: Paula Camila Wandurraga Sanabria, director: Fabio Duván Lora Clavijo, codirectora: Anamaría Navarro Noguera, 12 de Junio del 2018. Trabajo para optar por el título de Física. Universidad Industrial de Santander, Escuela de Física, Bucaramanga, Colombia. Trabajo que ganó la distinción de proyecto de grado laureada.
- Mallas adaptativas para la solución de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas. Autor: Yuber Alejandro Galeano Traslaviña, director: Fabio Duván Lora Clavijo, codirectora: Anamaría Navarro Noguera, 14 de Junio del 2018. Trabajo para optar por el título de Magister en Matemática Aplicada. Universidad Industrial de Santander, Escuela de Física, Bucaramanga, Colombia.

Algunos resultados de este último trabajo fueron publicados en la revista *Scientia et Technica* Año XXIII, Vol. 23, No. 02, junio de 2018. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701 con el nombre *Numerical Solutions of the Klein-Gordon Equation with Adaptive Mesh Refinement*.

Introducción

La magnetohidrodinámica (MHD) estudia la interacción entre campos magnéticos y fluidos conductores. Este estudio se efectúa por medio del acoplamiento entre la dinámica de fluidos y las leyes de la electrodinámica en el dominio de las bajas frecuencias. Según el marco teórico de la MHD, una perturbación del estado de equilibrio de un plasma puede producir distintos tipos de ondas mecánicas. Cítese un grupo de algunas ampliamente conocidas: i) Las ondas de Alfvén, que se propagan de manera transversal a las líneas de campo magnético, ii) las magneto-acústicas: de tipo rápido y de tipo lento, iii) las ondas de Alfvén torsionales, y, finalmente, los modos *kink* y *sausage*. Éstos últimos se propagan en tubos de flujo magnético, como se puede ver en el trabajo icónico realizado por Edwin and Roberts (1983). Por medio de estas ondas se modelan distintos fenómenos ondulatorios que ocurren en la atmósfera solar. Debido a que el plasma atmosférico solar está dominado por fuertes campos magnéticos (Priest and Hood, 1991), este constituye un laboratorio ideal objeto de la MHD.

Existe un gran número de publicaciones científicas que reportan el descubrimiento de ondas MHD en la atmósfera solar. Las observaciones correspondientes provienen tanto de misiones espaciales como de instrumentos de medición ubicados en tierra. A continuación, una corta lista que esboza resultados relevantes a propósito de la detección de estas ondas. Algunas oscilaciones de bucles coronales registrados por la misión TRACE ¹ fueron interpretadas como modos *kink*

¹ Transition Region and Coronal Explorer

estacionarios (Nakariakov et al., 1999). Similarmente, Tomczyk et al. (2007) modelaron las observaciones de CoMp ² como ondas de Alfvén. Conviene destacar que este resultado conjetura una explicación del calentamiento coronal a partir de dichas ondas. La interpretación de Tomczyk et al. (2007) fue controvertida por Van Doorsselaere et al. (2008), bajo la consideración de que dichas ondas podrían entenderse mejor como modos magneto-acústicos *kink*.

Asimismo, a partir del análisis de datos obtenidos por AIA ³ del SDO ⁴, Morton et al. (2012) detectaron la propagación de un modo *kink* transversal a través de un *jet* solar UV/EUV. De Pontieu et al. (2007) interpretaron como ondas de Alfvén algunas observaciones del telescopio SOT a bordo del satélite Japonés Hinode. Adicionalmente concluyeron que algunas de dichas ondas podrían tener la energía suficiente para acelerar vientos solares. Con datos de este mismo telescopio Fujimura and Tsuneta (2009) reportaron modos MHD en tubos de flujo magnético fotosféricos. Por otra parte, mediciones del Telescopio SST ⁵ y del Polarímetro SOUP⁶ fueron interpretadas por Jess et al. (2009) como ondas de Alfvén torsionales propagándose en un grupo de manchas brillantes cerca del centro del disco solar. Según el análisis de datos tomados por el instrumento

² Coronal Multi-Channel Polarimeter

³ Atmospheric Imaging Assembly

⁴ Solar Dynamics Observatory

⁵ Swedish Solar Telescope

⁶ Solar Optical Universal Polarimeter

ROSA ⁷ del Telescopio Solar Dunn, Jess et al. (2012a) concluyeron que se pueden generar modos *kink* en la atmósfera más lejana del sol. Los autores argumentan que estos modos son generados por oscilaciones en la presión de regiones magnéticas brillantes de pequeña escala.

Revisiones completas sobre distintas aplicaciones de la MHD en la atmósfera solar resumen gran parte de los logros que esta teoría ha obtenido hasta hoy. Entre algunas, cítese por ejemplo, el reciente libro de Roberts (2019). En ese trabajo el autor realiza una exposición matemática muy completa del creciente campo de la sismología coronal. De igual modo, Nakariakov and Verwichte (2005) realizó otra importante revisión sobre observaciones de ondas MHD en la corona solar. Otra lista bibliográfica que complementa las revisiones sobre detecciones de estas ondas es la siguiente: en manchas solares, Khomenko and Collados (2015); en prominencias, Okamoto et al. (2007); en eyecciones de masa coronal, Vršnak et al. (2013); en fulguraciones solares, Shibata and Magara (2011); y en vientos solares, Ofman (2010).

El modelamiento de la atmósfera solar a través de la MHD se hace por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas acopladas. Este sistema de ecuaciones admite soluciones exactas en muy pocos casos. Por esta razón es necesario recurrir a sofisticadas técnicas numéricas de aproximación de soluciones (ver Schnack (2009) para más detalles). La aplicación de estas técnicas en la solución de las ecuaciones de la MHD requieren extensos códigos numéricos computacionales. Su adaptación, en la mayoría de los casos, depende de la habilidad y experiencia de personal especializado en la construcción de software capaz de hacer confluír apropiadamente

⁷ Rapid Oscillations in the Solar Atmosphere

las ventajas que tienen los distintos métodos numéricos requeridos en tareas específicas.

Resulta justo mencionar una lista de códigos computacionales distinguidos por su carácter versátil. El código Athena (Stone et al., 2008), diseñado para estudiar el medio interestelar, la formación de estrellas y la acreción de fluidos. El código Flash (Fryxell et al., 2000) por su parte se aplica en hidrodinámica, MHD, transferencia por radiación, difusión y conducción, entre otras. Este código ha evolucionado a un sistema modular compuesto por una colección de subrutinas independientes aplicables en diversas tareas. Otros códigos diseñados para abordar diversos problemas de astrofísica son: Pluto (Mignone et al., 2007), Zeus (Norman, 2000), Enzo (Bryan et al., 2014), Nirvana, (Ziegler, 2008) y MAP (Jiang et al., 2012a).

De manera similar, existen códigos diseñados exclusivamente para abordar el estudio de los fenómenos en la atmósfera solar. Como ejemplo se encuentra el código VAC (Tóth and Keppens, 2012; Shelyag, S. et al., 2008), que simula un plasma gravitacionalmente estratificado por medio de la interacción de una perturbación arbitraria con un fondo magneto-hidrostático. El código Surya (Fuchs et al., 2011), que modela la propagación de ondas en la atmósfera magnética no-isotérmica. El código MURaM (Vögler et al., 2005), diseñado para el estudio de la zona de convección y la fotosfera. Otros códigos importantes son: el LFM (Lyon et al., 2004), utilizado en las simulaciones magnetosféricas; el Bifrost (Gudiksen, B. V. et al., 2011), ideado para modelar atmósferas estelares desde la zona de convección hasta la corona. Y por último, el código Newtonian-CAFE (González-Avilés et al., 2015), programado para el análisis de fenómenos que ocurren en la región comprendida entre la fotosfera y la corona.

Existen innumerables referencias sobre estudios de fenómenos MHD en la atmósfera solar

mediante el uso de los códigos numéricos citados anteriormente. A continuación se esboza una larga lista de autores y trabajos desarrollados en esta área. Murawski and Musielak (2010) encontraron los distintivos espaciales y temporales de ondas de Alfvén de pequeña amplitud. Konkol et al. (2010) exploraron la influencia de la conducción térmica en la atenuación de modos magneto-acústicos lentos estacionarios en arcadas de la corona solar. Murawski et al. (2011) analizaron la formación de macroespículas en la cromosfera. Jiang et al. (2012b) simulaban micro-fulguraciones en la corona y cromosfera asociadas con el fenómeno de la reconexión magnética. Jess et al. (2012b) modelaron algunos fenómenos oscilatorios en la fotosfera en términos de fluctuaciones periódicas de la intensidad con procesos de magneto-convección. Vigeesh et al. (2012) evolucionaron la propagación de ondas MHD en tubos de flujo magnéticos fuertes, axialmente simétricos en una atmósfera solar estratificada.

Un segundo grupo de referencias representativas sobre aplicaciones de MHD en la descripción de la atmósfera solar contiene los trabajos citados a continuación. Jelínek and Murawski (2013) mostraron que las ondas magnetoacústicas con gravedad en la corona gravitacionalmente estratificada se pueden reproducir usando un perfil de temperatura realista y líneas de campo magnético curvadas. Möstl et al. (2013) evaluaron la inestabilidad de Kelvin Helmholtz en los bordes de las eyecciones de masa coronal. Baumann et al. (2013) reprodujeron algunos fenómenos de reconexión en la corona. Pascoe et al. (2013) presentaron ondas magneto-acústicas rápidas generadas impulsivamente por perturbaciones en embudos coronales. Murawski et al. (2013) realizaron simulaciones de ondas MHD con gravedad y la producción de vórtices en una atmósfera magnetizada. Chmielewski et al. (2014) evolucionaron ondas de Alfvén generadas impulsivamente en

una arcada solar aislada. Terradas et al. (2015) presentaron evoluciones de prominencias solares inmersas en arcadas magnéticas.

Trabajos más recientes realizados en esta misma área se referencian a continuación. Hans-teen et al. (2015) recrearon escenarios más complejos con MHD radiativa, con el fin de analizar el problema del calentamiento coronal. Antolin et al. (2015) estudiaron los modos MHD transversales en un tubo de flujo de una prominencia. Yang et al. (2015) simularon la excitación de ondas magneto-acústicas rápidas a lo largo de canales magnéticos de la corona. Janvier et al. (2015) presentaron modelos de fulguraciones solares MHD 3-dimensionales. Murawski et al. (2016) analizaron la respuesta de un tubo de flujo solar de pequeña escala con los movimientos fotosféricos torsionales. De Moortel et al. (2016) evolucionaron la propagación de ondas transversales a través de la corona solar, impulsados por puntos de la base con densidad estructurada en forma de cilindro.

Por otro lado, el calentamiento debido a ondas MHD ha sido considerado como uno de los mecanismos más efectivos y apropiados para transportar energía y momentum. Son uno de los modelos más utilizados para explicar las altas temperaturas de la corona solar (Arregui, 2015). Los diferentes mecanismos de transporte de estas ondas han sido estudiados ampliamente para encontrar su contribución al problema de calentamiento de la cromosfera y de la corona solar. Estos estudios analizan la propagación de ondas generadas en las capas inferiores de la atmósfera hacia capas superiores. Ahora bien, en el contexto de los mecanismos de propagación de energía, incluir métodos de disipación como la resistividad y el flujo de calor ayudan a que la descripción de las distintas dinámicas del plasma sea más realista. Por ejemplo, la inclusión de la resistividad

permite explicar la aparición de fenómenos de reconexión magnética. Dichos eventos hacen que la energía magnética se convierta en otros tipos de energía como por ejemplo energía térmica (Priest, 2014). Por otra parte, el gradiente de temperatura de la zona de transición hace que la conducción de calor sea un mecanismo importante de disipación de energía en esta región (Spitzer, 1956).

En párrafos anteriores se evidenció el alcance que tiene la MHD para modelar fenómenos atmosféricos del sol. Muchos de estos fenómenos despiertan el interés en algunas comunidades científicas. En particular, el problema del calentamiento de la cromosfera y de la corona ha suscitado en la última década un sinnúmero de interrogantes. En este contexto, la inclusión de fenómenos disipativos permite la elaboración de mejores modelos, tendientes a una descripción más precisa de los fenómenos físicos ocurrentes. La construcción y manejo de los códigos numéricos para la aplicación de esta teoría son de medular importancia. En esta tesis doctoral se simulan algunos escenarios de propagación de ondas MHD dentro del contexto del estudio de los posibles mecanismos del calentamiento de la corona y de la cromosfera. Para ello se construye un código numérico que resuelve las ecuaciones de la MHD sin despreciar los efectos la resistividad eléctrica y el flujo de calor. La construcción del código se hace con base en los códigos CAFE (Lora-Clavijo et al., 2015a) y Newtonian-CAFE(González-Avilés et al., 2015).

La presente tesis se divide en dos partes. La primera está dedicada a la construcción del código y a su validación mediante pruebas numéricas. En la segunda parte de la tesis se presentan dos modelos transitorios de la atmósfera solar en presencia de procesos disipativos. El carácter no-lineal del sistema de ecuaciones de la MHD predice la existencia de ondas de choque y de discontinuidades de ciertas funciones que describen observables físicos en la naturaleza. Por otro

lado, estas ecuaciones admiten una escritura en forma conservativa. Debido a estas características del sistema ecuaciones-naturaleza, en el código numérico se implementan dos métodos: el de líneas para la discretización de los operadores espaciales y el de volúmenes finitos. El último se utiliza para promediar las derivadas de los flujos a través de cada celda numérica (Toro, 2009).

De otra parte, para calcular los flujos numéricos se emplean los esquemas HLLE (Harten et al., 1983) y HLLC (Toro et al., 1994). Este último se usa la adaptación para la MHD propuesta Li (2005). Los interpoladores del problema de Riemann aproximado son MINMOD (Roe, 1986) y MC (van Leer, 1977a) de primer orden, y WENO5 (Titarev and Toro, 2004) con precisión de quinto orden. Adicionalmente, para preservar la divergencia del campo magnético se usa el método de Transporte de Flujo Restringido (Balsara, 2004; Evans and Hawley, 1988). Este método se modifica para incluir los términos con resistividad eléctrica. La verificación de los algoritmos se realiza mediante la reproducción de pruebas de la MHD ideal, y pruebas diseñadas para comprobar la implementación de los términos asociados a la resistividad y el flujo de calor. Para determinar el nivel de precisión del código, se realizan los cálculos de convergencia y auto-convergencia en problemas unidimensionales. Además, se mide la divergencia del campo magnético como medida de control de auto-consistencia física del proceso.

La segunda parte del proyecto consiste en el estudio de dos fenómenos transitorios de la atmósfera solar mediante simulaciones numéricas. El primero corresponde a la descripción y evolución numérica de un modelo de emergencia de un *blob* de plasma magnético desde la fotosfera. El interés de estudiar este fenómeno en este proyecto radica en que existe evidencia de la existencia de *blobs* de plasma producidos por granulación. Estudiar los efectos que tiene la emergencia de

uno de estos *blobs* en la atmósfera solar podría proveer de más elementos para la comprensión de la dinámica del plasma solar. En especial, el evento de la reconexión de las líneas de campo magnético del *blob* emergente, como consecuencia de los efectos de la resistividad eléctrica. El segundo fenómeno analizado corresponde al estudio de los efectos de la conducción térmica en la propagación de *tadpole jets* generados en la cromosfera. Estos *jets* fueron descubiertos en observaciones recientes y transportan grandes cantidades de energía. Sus valores están dentro de los ordenes de magnitud estimados teóricamente para suplir las pérdidas en la corona debido a radiación, conducción térmica y viento solar. Estos *jets* se transportan a lo largo de las líneas de campo magnético en la cromosfera y la corona solar. En estas regiones los efectos de la conducción térmica no son despreciables y deben afectar el modelamiento de este tipo de sistemas de manera significativa.

1. Problema del Calentamiento de la Corona Solar

1.1. El Sol

El Sol es un objeto astrofísico que ha sido estudiado con gran interés desde hace miles de años. Su creación tiene origen por la contracción de una nube interestelar que giraba y contraía durante su colapso. La proto-estrella se estabilizó en un estado donde el gradiente de presión y la gravedad se balancean y donde una contracción suave y continua calienta el plasma y provee luminosidad. De esta manera, la temperatura en el núcleo aumentó lo suficiente para la fusión del hidrógeno a helio lo cual suministró la luminosidad para que la contracción terminara. Entonces el Sol se encuentra en la fase de la secuencia principal, durante la cual esencialmente todo el hidrógeno de su núcleo se está convirtiendo en helio (Priest, 2014).

Durante el siglo XX, lentamente se volvió claro que la mayoría de la estructura observada del Sol y su dinámica tienen un origen debido al campo magnético. Tradicionalmente, la actividad solar ha sido dividida en dos clases: las de regiones en calma y regiones activas. En la aproximación de Sol en calma, el Sol es estudiado como una bola de plasma estática y esféricamente simétrica, para la cual las propiedades solo dependen de la distancia radial y para las cuales el campo magnético es despreciable. Las regiones activas están compuestas de fenómenos transitorios como las manchas solares, las prominencias, las fulguraciones, las eyecciones de masa coronal, que se superponen a la atmósfera tranquila y deben su existencia al campo magnético (Priest, 2014).

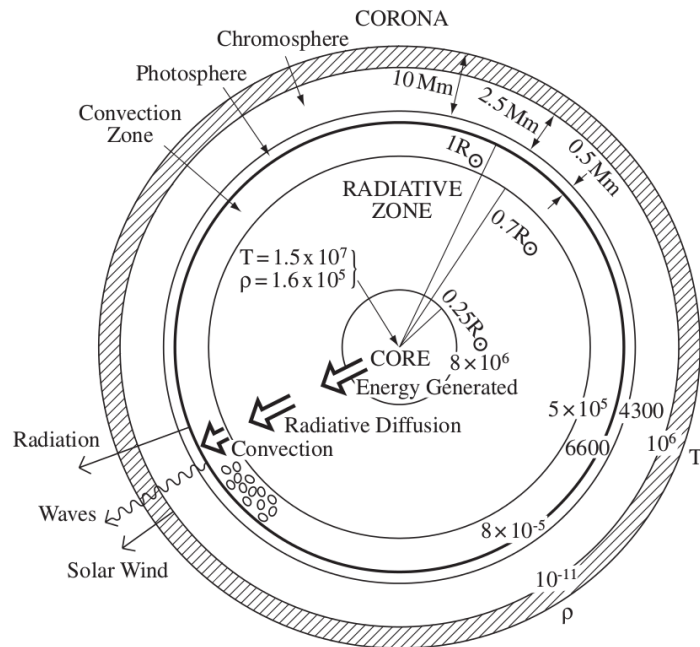


Figura 1. La estructura general del sol. Se indican los tamaños de las distintas regiones, sus temperaturas y densidades. Tomado de Priest (2014)

1.2. La estructura del Sol

El Sol es una bola de plasma que se mantiene unida y comprimida por atracción gravitacional propia. Está compuesto por átomos de hidrógeno principalmente (%92) y de helio (%8), la mayoría ionizados debido a las altas temperaturas. Los elementos restantes como el carbono, nitrógeno y oxígeno suman alrededor de un 0.1 %. El interior del Sol está dividido en tres regiones como se muestra en la figura 1, el núcleo, la zona radiativa y la zona de convección, las cuales están dominadas por distintos procesos físicos (Priest, 2014). En el siglo XIX se mostró que si la energía del Sol fuera originada únicamente por contracción gravitacional, duraría tan solo 10^{15} segundos = 3×10^7 años, lo cual se conoce como el *tiempo de Kelvin-Helmholtz*. Este se calcula simplemente dividiendo la energía potencial gravitacional del Sol por su luminosidad. Sin embar-

go, A. Eddington concluyó en 1925 que esta energía duraría mucho mas si el núcleo del Sol fuera un reactor nuclear gigantesco. Esta energía generada en el núcleo escapa continuamente a través de la zona radiativa por difusión radiativa, mientras tanto los fotones son absorbidos y emitidos muchas veces, de modo que tardan en cruzar esta zona muchos años (Priest, 2014).

En contraste, en la *zona de convección*, el mecanismo de transporte de energía dominante es la convección. La cual consiste en movimiento de plasma que forma usualmente una corriente circular convectiva con el plasma caliente ascendiendo y el plasma frío descendiendo. En la parte más baja de la zona de convección existe una capa fuerte de cizalladura la cual se conoce como *tacoclina* (Spiegel and Zahn, 1992), donde probablemente se origina la estructura magnética de gran escala del Sol. La atmósfera solar se define como la parte del Sol de la cual los fotones pueden escapar directamente hacia el espacio. Está dividida en tres regiones con diferentes propiedades físicas, las cuales se representan de manera incorrecta pero conveniente como cascarones esféricos. La mas baja corresponde a una capa delgada de plasma de un espesor de algunos cientos de kilómetros llamada la *fotosfera*, la cual es relativamente densa y opaca y emite la mayoría de la radiación solar.

Sobre la fotosfera yace una capa de plasma mas transparente conocida como la *cromosfera*, es normalmente invisible pero puede verse durante un eclipse total, donde se revela su color rojizo. Algunas observaciones espectrales muestran que existen metales en estados neutros y parcialmente ionizados, como es el caso de la línea K del calcio y bandas moleculares como la del CN. En esta capa de la atmósfera la temperatura comienza a aumentar con la altura, contrario de la fotosfera en la cual la temperatura decrece con la distancia radial. La *corona* es la capa mas externa de la

atmósfera y se extiende desde la parte superior de una estrecha región conocida como la *región de transición*. Puede observarse desde la Tierra durante un eclipse solar total. Las líneas espectrales muestran altos grados de ionización, lo cual indica que su temperatura es de mas de 1×10^6 K, varios órdenes mayor que la temperatura en la base de la atmósfera, la cual está alrededor de $6000K$.

1.3. Modelo de temperatura de VAL

El modelo de temperatura de VAL es el mas usado para describir la temperatura de la atmósfera solar. Fue desarrollado por Vernazza et al. (1981) y mejorado por Avrett and Loeser (2008). En la figura 2 se muestra la variación de temperatura y densidad en función de la altura de acuerdo a dicho modelo. El nivel cero se toma como el punto donde la profundidad óptica ($\tau_{5,000}$) en una longitud de onda 5,000 en la fotosfera es igual a la unidad. La fotosfera se define como la región de 550 km de espesor desde $\tau_{5,000} = 1$ hasta el mínimo de temperatura, el cual es de 4,300 K. La densidad y la presión disminuyen alrededor de dos órdenes y medio de magnitud a través de la fotosfera y otros cuatro órdenes de magnitud a través de los siguientes 2 Mm. Entre una profundidad de alrededor de 8 m y una altura de 2 Mm, el hidrógeno está parcialmente ionizado. Ciertamente, en la fotosfera en sí, la inclusión de metales como el magnesio el hierro y el silicio incrementan la proporción de material total ionizado a 10^{-4} . De este modo, justo por debajo y en la fotosfera, el gradiente adiabático y el transporte de energía se afectan, mientras que en la cromosfera baja la difusión ambipolar es importante debido al roce entre fluidos ionizados y neutros. Este modelo es importante pues constituye un estandar, sin embargo, la atmósfera solar es en realidad bastante inhomogénea, pues el plasma no está en equilibrio y depende del tiempo. Por lo tanto, para obtener

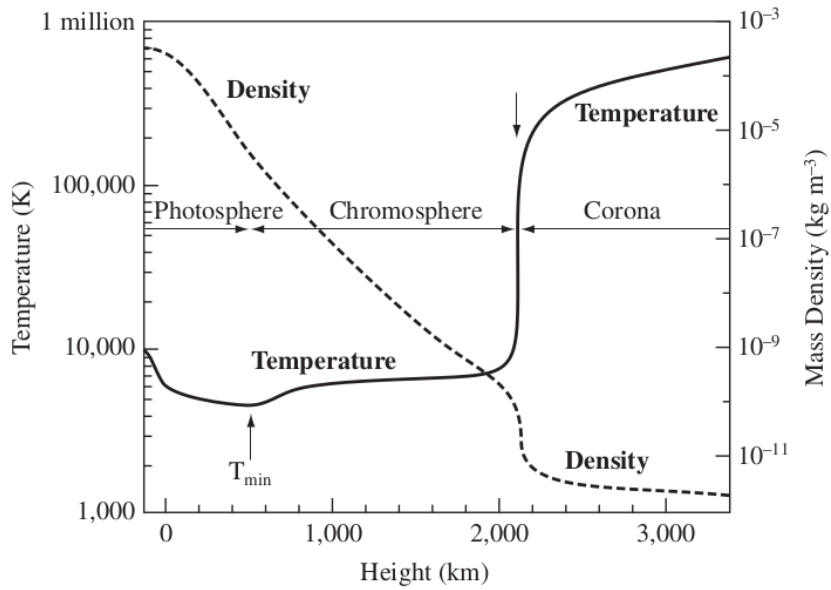


Figura 2. Variación de temperatura y densidad en función de la altura en la atmósfera solar de acuerdo al modelo de VAL (Vernazza et al. (1981); Avrett and Loeser (2008)), tomado de Priest (2014)

dinámicas más sofisticadas es necesario considerar modelos más complejos que consideren las tres dimensiones. Ver por ejemplo el desarrollado por Gudiksen, B. V. et al. (2011).

1.4. Problema del calentamiento coronal

Uno de los más grandes desafíos para la astronomía en la actualidad es entender cómo se calienta la cromosfera a 10^4 K y la corona a 10^6 K en comparación con la fotosfera que se encuentra a 6000 K (Klimchuk, 2006; Reale, 2010; Parnell and De Moortel, 2012). El calentamiento en la corona es solo un pequeño porcentaje debido al calentamiento cromosférico, por lo tanto se necesita un modelo completo que describa el calentamiento desde la generación, propagación y disipación de energía a través de toda la atmósfera. Esto incluye la transferencia continua de masa y energía entre la cromosfera y la corona, y que incluya los efectos de la zona de transición Priest

(2014).

La corona está compuesta por tres tipos de estructuras distintas de campo magnético. Tiene un ambiente difuso junto con agujeros coronales, bucles coronales y puntos brillantes de rayos-X. Este ambiente magnético es bastante complejo y tiene una gran cantidad de dinámicas, las estructuras no deben verse como aisladas, sino acopladas unas con otras, por ejemplo los bucles coronales interactúan unos con otros y así deben estudiarse. En las configuraciones de campo magnético abierto, los agujeros coronales, el plasma fluye rápidamente hacia afuera como por ejemplo en el viento solar, pero en regiones magnéticas cerradas, el campo magnético es capaz de contener el plasma a densidades mayores. Las regiones activas situadas sobre las manchas solares se muestran como colecciones complejas de bucles en rayos X suaves o EUV las cuales delinean el campo magnético debido a la eficiencia de la conducción de calor a lo largo de las líneas, ver figura 3 (Priest, 2014).

La energía requerida para calentar la corona tiene valores de alrededor de 300 W m^{-2} en las regiones tranquilas y de 5000 W m^{-2} en las zonas activas (Withbroe and Noyes, 1977). Los valores correspondientes a la cromosfera son de 4000 W m^{-2} en las zonas tranquilas y de $2 \times 10^4 \text{ W m}^{-2}$ en las zonas activas. Hay evidencia de que la energía proviene del campo magnético pues los bucles mas calientes poseen un campo magnético mas fuerte y otra es que es abundante el flujo de energía en la fotosfera proveniente de los movimientos horizontales de la base de los bucles magnéticos (Priest, 2014).

Distintos mecanismos para explicar el calentamiento deben estar operando en las diferentes partes de la cromosfera y de la corona. Por lo tanto, el desafío es perfeccionar los modelos actuales

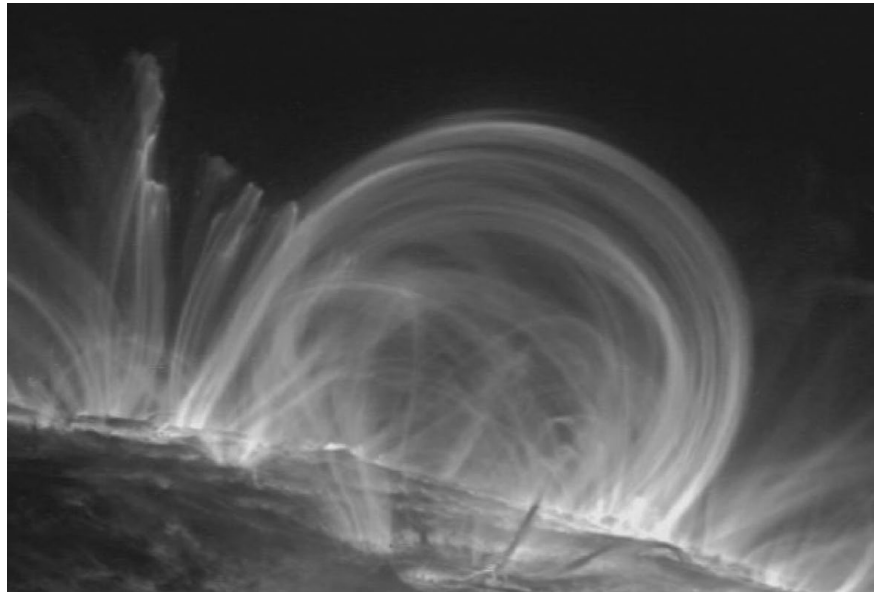


Figura 3. Bucles corales obtenidos por el instrumento TRACE de la NASA a 171 . Los bucles delinean el plasma que casualmente está a 1 MK para lo cual la línea 171 es sensible. Los bucles son muy angostos debido a que los eventos de calentamiento son pequeños y la conducción térmica ocurre esencialmente a lo largo de las líneas de campo magnético. Tomado de (Priest, 2014).

para estimar cuantitativamente su importancia relativa. Dos clases generales se han propuesto, estos son las ondas MHD y la reconexión magnética. En ambos mecanismos la disipación por resistividad eléctrica óhmica es necesaria. Las ondas magnetohidrodinámicas pueden disiparse por mezcla de fases o absorción resonante. La reconexión magnética puede calentar el plasma directamente por calentamiento Óhmico o indirectamente por la generación de ondas o *jets* de plasma que posteriormente se disipan óhmicamente o por viscosidad. La naturaleza tan compleja de estos procesos de calentamiento también puede ser descrita en términos de turbulencia MHD (Priest, 2014).

1.5. Campo magnético del Sol

La mayor parte de lo que se conoce sobre el campo magnético solar ha sido inferido por observaciones del campo en la fotosfera, del efecto Zeeman de las líneas espectrales en longitudes de onda visibles (por ejemplo Fe 5250). De los mapas 2-dimensionales de la estructura de campo magnético de la fotosfera se extrapolan las estructuras 3-dimensionales del campo magnético de la corona. También a partir de éstos se encuentra el origen subfotosférico de la emergencia de flujo magnético. Se cree que la formación de flujo magnético ocurre en la tacoclina en la parte inferior de la zona de convección, desde donde se eleva hacia arriba en forma de tubos de flujo magnético flotante y emerge a la fotosfera. Los campos magnéticos más fuertes emergen de las manchas solares, cuyos magnitudes pueden estar en el orden de kilogauss. Campos magnéticos con magnitudes de alrededor de varios cientos de gauss pueden emerger en todas las zonas activas. El flujo de velocidades debido a convección fotosférica está en el orden de ~ 1 km/s. En las zonas de Sol en calma, lejos de las zonas activas, el campo magnético promedio de la fotosfera tiene

valores de pocos Gauss. (Spohn et al., 2014).

El campo magnético solar controla la dinámica y la topología de todos los fenómenos de la corona. El plasma caliente fluye a través de las líneas de campo magnético y las partículas energéticas pueden propagarse solamente a lo largo de las líneas de campo magnético. Los bucles coronales son conductos de plasma caliente, modelados por la geometría de las líneas de campo magnético de la corona, donde la difusión de campo cruzado se inhibe fuertemente. Existen tipos de zonas de campo magnético en la corona, las zonas de campo magnético abierto y las zonas de campo magnético cerrado. Las zonas de campo magnético abierto (zonas blancas en la figura 4). Estas existen en las regiones polares, y algunas veces se extienden hacia el ecuador, conectan la superficie solar con el campo magnético interplanetario y son la fuente del viento solar rápido (~ 800 km/s). Una consecuencia de la configuración de campo abierto es el eficiente transporte de plasma hacia la heliosfera cada vez que el plasma cromosférico se calienta en la base (Spohn et al., 2014).

Las regiones de campo magnético cerrado (zonas grises en la figura 4), en contraste, contienen principalmente líneas de campo cerrado en la corona hasta alturas de aproximadamente un radio solar. Estas se abren a altitudes más altas y se conectan eventualmente a la heliosfera y producen una componente lenta de viento solar ~ 400 km/s. Son las regiones de campo cerrado las que contienen todos los bucles coronales brillantes y densos, producidos por el plasma cromosférico que se queda atrapado en estas líneas de campo cerradas. El campo magnético de la superficie es altamente inhomogéneo. El campo magnético mas fuerte se encuentra en las manchas solares, el cual puede alcanzar unos 2000 - 3000 G (Spohn et al., 2014).

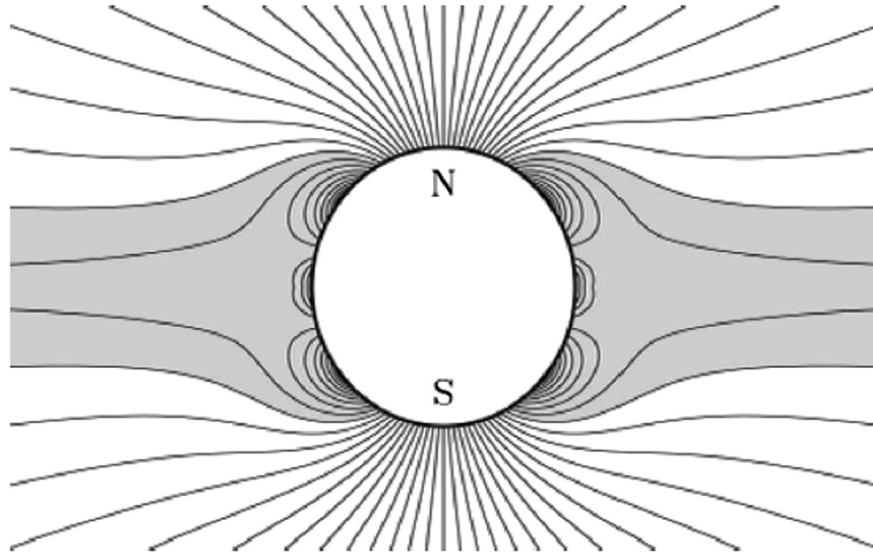


Figura 4. El campo magnético global de la corona puede dividirse en regiones de campo magnético abierto (principalmente cerca de las regiones polares) y líneas de campo magnético cerrado (principalmente en latitudes de $\Phi \leq 70$). En esta figura se muestra el campo magnético analítico de Banaszkiewicz formado por una lámina de corriente multipolar coronal. Tomado de Spohn et al. (2014)

2. Ecuaciones de la Magnetohidrodinámica

La magnetohidrodinámica es una teoría desarrollada por Hannes Alfvén (Alfvén, 1942) que describe las interacciones entre fluidos conductores eléctricos y campos electromagnéticos a bajas frecuencias. Estos fluidos pueden ser caracterizados por pocos parámetros como lo son la densidad de masa, la velocidad, la presión. Sus propiedades materiales son independientes del tamaño físico de la muestra (Schnack, 2009), esto es, dichas cantidades están promediadas sobre volúmenes infinitesimales, ignorando las variaciones que resulten de la estructura molecular de la materia (Landau and Lifshitz, 1960).

Hay dos formas de deducir las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, una es presentarlas

como postulados razonables para un medio hipotético llamado “plasma” y la segunda es obtenerlas al promediar apropiadamente las ecuaciones cinéticas (Goedbloed and Poedts, 2004). Siguiendo el primer método, las ecuaciones se obtienen mediante el acoplamiento de las ecuaciones de la hidrodinámica con las ecuaciones de la electrodinámica por medio de la ecuación de Ohm (Sch-nack, 2009). Despreciando los efectos debidos a la viscosidad, la dinámica de fluidos está descrita por medio de un conjunto de tres ecuaciones; la primera de ellas corresponde a la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (1)$$

que expresa la conservación de la masa sobre un elemento de volumen en el fluido, donde ρ representa la densidad de masa y $\vec{v}$ el campo de velocidades del fluido. La segunda es la ecuación de movimiento

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = \rho_q \vec{\mathcal{E}} + \vec{J} \times \vec{B} + \rho \vec{g} - \nabla p, \quad (2)$$

que representa la segunda ley de Newton sobre un elemento de fluido en el que actúan la fuerza eléctrica, magnética, gravitacional y la resultante del contacto con los otros elementos del fluido, dada por el gradiente de presión. Aquí p denota la presión del fluido, $\vec{g}$ la aceleración de la gravedad, $\vec{\mathcal{E}}$ el campo eléctrico, $\vec{B}$ el campo magnético, $\vec{J}$ la corriente eléctrica y ρ_q la densidad de carga.

La tercera de estas ecuaciones corresponde a la conservación de la energía

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p = -\Gamma p \nabla \cdot \vec{v} + (\Gamma - 1) [-\nabla \cdot \vec{q} + \eta J^2], \quad (3)$$

en donde η representa la resistividad eléctrica, Γ el índice adiabático de los gases y $\vec{q}$ el vector de flujo de calor.

La ecuación 3 debe complementarse con una relación constitutiva como la ecuación de estado. Como primera aproximación y por simplicidad usualmente se utiliza la ecuación de estado de un gas ideal. Un gas ideal es un gas teórico compuesto por un conjunto de partículas puntuales que se mueven al azar y que interactúan solo a través de colisiones elásticas. La ley del gas ideal es una ecuación de estado simplificada y es susceptible de análisis bajo mecánica estadística. En condiciones ambientales normales, como temperatura y presión estándar, la mayoría de los gases reales se comportan cualitativamente como un gas ideal. En general, la desviación de un gas ideal tiende a disminuir con una temperatura más alta y una densidad más baja, ya que el trabajo realizado por las fuerzas intermoleculares se vuelve menos significativo en comparación con la energía cinética de las partículas, y el tamaño de las moléculas se vuelve menos significativo en comparación con el espacio vacío entre ellos. El modelo de gas ideal tiende a fallar a temperaturas más bajas o presiones más altas, cuando las fuerzas intermoleculares y el tamaño molecular se vuelven importantes. En algún punto de baja temperatura y alta presión, los gases reales experimentan una transición de fase, como un líquido o un sólido. Sin embargo, el modelo de un gas ideal no describe ni permite las transiciones de fase. Estos deben ser modelados por ecuaciones de estado más complejas

(Miller et al., 2009). En el caso de la atmósfera solar el modelo de gas ideal funciona de manera aceptable para la corona solar debido a alto grado de ionización. Por otra parte, debido a que la cromosfera está parcialmente ionizada debería usarse otra ecuación de estado mas apropiada, por ejemplo la ecuación de van der Waals.

La ecuación de estado para un gas ideal se puede escribir como

$$p = \rho e(\Gamma - 1), \quad (4)$$

siendo e la energía interna específica. Por otra parte, la descripción de la electrodinámica está dada por las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0}, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (8)$$

que corresponden respectivamente a la ley de Faraday, la ley de Ampère-Maxwell, la ley de Gauss para el campo eléctrico y la ley de Gauss para el campo magnético, donde c representa la velocidad de la luz y μ_0 la permeabilidad magnética del vacío. Ahora con el fin de acoplar las ecuaciones de

la hidrodinámica con las de la electrodinámica se usa la ley de Ohm,

$$\frac{\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \times \vec{B}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \eta \vec{J}, \quad (9)$$

además, la suposición de bajas frecuencias implica la cuasi-neutralidad de la carga $\rho_q \approx 0$ en la ecuación (7).

Los dos sistemas de ecuaciones no son compatibles dado que las ecuaciones de la hidrodinámica tienen invarianza bajo las transformaciones de Galileo, es decir, tienen precisión física hasta primer orden de la velocidad sobre la velocidad de la luz $O(v/c)$. Mientras que las ecuaciones del electromagnetismo tienen invarianza bajo las transformaciones de Lorentz, es decir, tienen precisión para cualquier orden de $O(v/c)$ (Schnack, 2009). Entonces, para atender esta inconsistencia, la aproximación que supone la magnetohidrodinámica es que las variaciones electromagnéticas no son relativistas, esto es, que las velocidades características del sistema, $v_0 = l_0/t_0$, son mucho mas pequeñas que las de la luz $v_0 \ll c$, siendo l_0 y t_0 una longitud y tiempo típicos. Ahora, si ω_0 es una frecuencia característica del sistema, se puede escribir $v_0 = \omega_0 l_0$, así la suposición no relativista implica que un tiempo característico sea mucho más grande que el tiempo que tarda la luz en transitar la misma distancia l_0 , $t_0 \gg t_c$, es por eso que el dominio de la magnetohidrodinámica es para bajas frecuencias y longitudes de onda largas. Adicionalmente, de la aproximación a orden cero de la ecuación de Faraday (5) se tiene

$$\frac{\mathcal{E}_0}{l_0} \equiv \frac{B_0}{t_0}, \quad (10)$$

donde $\mathcal{E}_0$ y B_0 son valores típicos del campo eléctrico y magnético. Por medio de esta última

aproximación se puede notar que el segundo término del lado derecho de la ecuación de Ampère-Maxwell (6), tiene magnitud

$$\frac{\mathcal{E}_0}{c^2 t_0} \equiv \frac{B_0 l_0}{c^2 t_0^2} = \frac{v_0^2 B_0}{c^2 l_0} \equiv \frac{v_0^2}{c^2} \left| \nabla \times \vec{B} \right|. \quad (11)$$

Ahora, ya que las velocidades son no relativistas, este término, que corresponde a las corrientes de desplazamiento, es mucho más pequeño que la magnitud del rotacional del campo magnético por lo que se puede despreciar. Como consecuencia no se producen ondas electromagnéticas y la ecuación de Ampère para la magnetohidrodinámica se reduce a

$$\mu_0 \vec{J} = \nabla \times \vec{B}. \quad (12)$$

De una manera similar es posible mostrar que la fuerza eléctrica es mucho más pequeña que la fuerza magnética en la ecuación de movimiento, y así dicha ecuación queda escrita como

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = \vec{J} \times \vec{B} + \rho \vec{g} - \nabla p. \quad (13)$$

Además, la suposición no relativista de la velocidad implica que la ley de Ohm se reduzca a

$$\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{J}. \quad (14)$$

Ahora, es posible reducir el número de ecuaciones de la siguiente manera: despejar $\vec{J}$ de la ecuación

de Ampère, $\vec{\mathcal{E}}$ de la ecuación de Ohm, y sustituirlos en la ecuaciones de movimiento y de Faraday obteniendo el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (15)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{v} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p = -\Gamma p \nabla \cdot \vec{v} + (\Gamma - 1) [-\nabla \cdot \vec{q} + \eta J^2], \quad (17)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{B} - \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \right), \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (19)$$

donde ρ , p , $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son las variables independientes y el sistema queda cerrado una vez se adopte un modelo para la resistividad eléctrica y el flujo de calor. Cuando $\eta = 0$ y $\vec{q} = 0$ el sistema de ecuaciones corresponde al régimen ideal.

2.1. Ecuaciones en Forma Conservativa

La forma general de una ley de conservación es

$$\frac{\partial U_{ijk\dots}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_m} F_{mijk\dots}, \quad (20)$$

donde $U_{ijk\dots}$ es un tensor de rango N y $F_{mijk\dots}$ es un tensor de rango $N + 1$. Integrando sobre un volumen V_0 y aplicando el teorema de Gauss, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} U_{ijk\dots} dV = \oint_{S_0} dS_m F_{mijk\dots}, \quad (21)$$

el cual expresa la conservación de la integral de volumen de $U_{ijk\dots}$. El tensor $F_{mijk\dots}$ es el flujo de $U_{ijk\dots}$ en la dirección de x_m ; la integral de superficie expresa el flujo total a través de la superficie que limita el volumen. Por ejemplo, si $N = 0$, se tiene la ley de conservación escalar

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{F}, \quad (22)$$

donde U es un escalar y $\mathbf{F}$ es un vector. La ecuación de continuidad de la masa (1) tiene esta forma.

Si $N = 1$, se tiene la ley de conservación vectorial

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{F}, \quad (23)$$

donde $\mathbf{U}$ es un vector y $\mathbf{F}$ es un tensor de segundo rango (o, equivalentemente, una diada). La cantidad F_{ij} es el flujo de U_i en la dirección x_j .

Las ecuaciones de la MHD se pueden escribir en formas de leyes de conservación que expresen la conservación de la masa, el momentum, la energía y de la densidad de flujo magnético

de la siguiente manera

$$\partial_t \rho + \partial_i (\rho v^i) = 0, \quad (24)$$

$$\partial_t (\rho v^i) + \partial_j \left(\rho v^i v^j - \frac{B^i B^j}{\mu_0} + p_T \delta^{ij} \right) = -\rho g \delta^{iz}, \quad (25)$$

$$\partial_t E + \partial_j \left[(E + p_T) v^j - \frac{B^j (\vec{B} \cdot \vec{v})}{\mu_0} \right] = \partial_j \left\{ q^j - \left[\frac{\eta}{\mu_0} \vec{J} \times \vec{B} \right]^j \right\} - \rho v^z g, \quad (26)$$

$$\partial_t B^i + \partial_j (v^i B^j - B^i v^j) = - \left[\nabla \times \eta \vec{J} \right]^i, \quad (27)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (28)$$

siendo E la densidad total de energía

$$E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho e + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (29)$$

y la aceleración de la gravedad es $\vec{g} = -g \hat{e}_z$.

Finalmente, el sistema de ecuaciones (24) a (28) se puede escribir de una manera mas compacta como

$$\partial_t \vec{U} + \partial_i \vec{F}^i = \vec{S}, \quad (30)$$

donde $\vec{U}$ es el vector de variables conservativas, $\vec{F}^i$ son los vectores de flujo a lo largo de los ejes

cartesianos y $\vec{S}$ es el vector de fuente-sumidero definidos como

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \vec{v} \\ E \\ \vec{B} \end{bmatrix}, \quad \vec{F}^i = \begin{bmatrix} \rho v^i \\ \rho v^i v_j - \frac{B^i B_j}{\mu_0} + p_T \delta_j^i \\ (E + p_T) v^i - \frac{B^i (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})}{\mu_0} \\ v^i B_k - v_k B^i \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho \vec{g} \\ -\rho \vec{v} \cdot \vec{g} - \nabla \cdot \left(\vec{q} + \frac{\eta}{\mu_0} \vec{J} \times \vec{B} \right) \\ -\nabla \times \eta \vec{J} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

La forma conservativa de las ecuaciones es de gran utilidad para aplicar métodos numéricos para la solución de este tipo de ecuaciones. La no-linealidad de las ecuaciones produce dinámicas como la aparición de choques y ondas de contacto. Estas discontinuidades constituyen interfaces internas móviles a través de las cuales las condiciones de Rankine-Hugoniot deben cumplirse, lo cual requiere una representación numérica apropiada. Estos métodos numéricos se discutirán en detalle en la sección 3.1.

2.2. Ecuación de Onda General

Considere un sistema en estado de equilibrio estático ($\partial/\partial t = 0$ y $\vec{v}_0 = 0$) en ausencia de gravedad ($\vec{g} = 0$), que de acuerdo con las ecuaciones de la magnetohidrodinámica ideal está descrito por

$$\nabla p_0 = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0, \quad \nabla \cdot \vec{B}_0 = 0. \quad (33)$$

Para estudiar el comportamiento general del sistema cuando es perturbado levemente del estado de equilibrio, se deben perturbar sus variables, esto es

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) + \rho_1(\vec{r}, t), \quad (34)$$

$$p(\vec{r}, t) = p_0(\vec{r}) + p_1(\vec{r}, t), \quad (35)$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = 0 + \vec{v}_1(\vec{r}, t), \quad (36)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r}) + \vec{B}_1(\vec{r}, t), \quad (37)$$

donde ρ_0 , p_0 , $v_0 = 0$ y B_0 describen el estado en equilibrio, y ρ_1 , p_1 , v_1 , B_1 son las variaciones, que se suponen mucho más pequeñas que las del estado inicial. De estas cantidades se puede calcular la perturbación de la presión total, dada por la suma de la presión del fluido y la presión del campo magnético,

$$p_{T1} = p_1 + \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1}{\mu}. \quad (38)$$

Al sustituir las perturbaciones (34-37) en las ecuaciones (15-18), y al despreciar los términos no lineales y disipativos ($\eta = 0$, $\vec{q} = 0$) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0, \quad (39)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \nabla p_1 - \frac{1}{\mu_0} \left(\nabla \times \vec{B}_0 \right) \times \vec{B}_1 - \vec{J}_1 \times \vec{B}_0 = 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla p_0 + \Gamma p_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0, \quad (41)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} - \nabla \times \left(\vec{v}_1 \times \vec{B}_0 \right) = 0. \quad (42)$$

Ahora, definiendo el desplazamiento de los elementos del fluido desde su posición en el estado de equilibrio $\vec{\xi}$ como

$$\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}, \quad (43)$$

y sustituyendo (43) en las ecuaciones (39), (41) y (42) se encuentran las siguientes expresiones

$$\rho_1 = -\vec{\xi} \cdot \nabla \rho_0 - \rho_0 \nabla \cdot \vec{\xi}, \quad (44)$$

$$p_1 = -\vec{\xi} \cdot \nabla p_0 - \Gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi}, \quad (45)$$

$$\vec{B}_1 = \nabla \times \left(\vec{\xi} \times \vec{B}_0 \right), \quad (46)$$

las cuales relacionan las perturbaciones de la densidad, presión y campo magnético con el desplazamiento $\vec{\xi}$ y las funciones en el estado de equilibrio. Al sustituir las ecuaciones (43) a (46) en la

ecuación de movimiento perturbada (40) se obtiene

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = & \frac{1}{\mu_0} \left(\nabla \times \vec{B}_0 \right) \times \left[\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \right] + \frac{1}{\mu_0} \left\{ \nabla \times \left[\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \right] \right\} \times \vec{B}_0 \\ & + \nabla \left(\vec{\xi} \cdot \nabla p_0 \right) + \Gamma \nabla \left(p_0 \nabla \cdot \vec{\xi} \right), \end{aligned} \quad (47)$$

la cual se conoce como la ecuación de onda de la magnetohidrodinámica ideal en el régimen lineal.

2.3. Ondas en un Medio Uniforme

Como un primer caso para el estudio de las ondas de la magnetohidrodinámica, se toma el caso de un medio uniforme en el cual ρ_0 y p_0 son constantes, y el campo magnético es uniforme en la dirección z , $\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$. Bajo estas condiciones, se supone el vector desplazamiento como una superposición de ondas planas

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{\xi}_{\vec{k}} e^{i(\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (48)$$

con $\vec{k}$ como el vector de onda, $\vec{r}$ el vector posición y ω_k la frecuencia angular. Debido a la linealidad del problema, cada una de las soluciones de onda plana es solución de la ecuación de onda, de modo que se pueden considerar por separado y el subíndice $\vec{k}$ se puede despreciar. De esta forma, al reemplazar (48) en la ecuación de onda (47) se obtiene

$$\omega^2 \vec{\xi} = a_1^2 \left\{ \vec{k} \times \left[\vec{k} \times (\vec{\xi} \times \hat{b}) \right] \right\} \times \hat{b} + a_0^2 (\vec{k} \cdot \vec{\xi}) \vec{\xi}, \quad (49)$$

donde a_1 se define como la velocidad de Alfvén,

$$a_1^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0}, \quad (50)$$

a_0 como la velocidad del sonido y $\hat{b} = \hat{e}_z$ es un vector unitario en dirección del campo magnético en estado de equilibrio.

Haciendo uso de las propiedades de los productos vectoriales, la ecuación (49) se puede escribir como

$$\left[\omega^2 - a_1^2 (\vec{k} \cdot \hat{b})^2 \right] \vec{\xi} = \left[(a_0^2 + a_1^2) (\vec{k} \cdot \vec{\xi}) - a_1^2 (\vec{k} \cdot \hat{b}) (\vec{\xi} \cdot \hat{b}) \right] \vec{k} - a_1^2 (\vec{k} \cdot \hat{b}) (\vec{k} \cdot \vec{\xi}) \hat{b}, \quad (51)$$

de tal forma que con esta solución de $\vec{\xi}$ las ecuaciones (44) a (46) son

$$\rho_1 = -i\rho_0 (\vec{k} \cdot \vec{\xi}), \quad (52)$$

$$p_1 = -i\Gamma p_0 (\vec{k} \cdot \vec{\xi}), \quad (53)$$

$$\vec{B}_1 = i \left[(\vec{k} \cdot \vec{\xi}) \vec{B}_0 - (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{\xi} \right]. \quad (54)$$

Además, si se define el vector unitario en la dirección de $\vec{k}$ como $\hat{k} = \vec{k}/k$, y el ángulo θ , como el ángulo entre la dirección de propagación y el campo magnético, $\hat{k} \cdot \hat{b} = \cos \theta$, la ecuación (51) se convierte en

$$\left[\frac{\omega^2}{k^2} - a_1^2 \cos^2 \theta \right] \vec{\xi} = \left[(a_0^2 + a_1^2) (\hat{k} \cdot \vec{\xi}) - (\vec{\xi} \cdot \hat{b} a_1^2 \cos \theta) \right] \hat{k} - (\hat{k} \cdot \vec{\xi}) a_1^2 \cos \theta \hat{b}. \quad (55)$$

Además, sin perder generalidad se pueden ubicar los ejes coordenados cartesianos de manera tal que el eje z esté en dirección del campo $\vec{B}_0$ y el vector de propagación $\vec{k}$ en el plano $x - z$. Así, la solución de dicha ecuación característica da como resultado el autovalor

$$\omega_{\text{Alfvén}}^2 = a_1^2 k^2 \cos^2 \theta, \quad (56)$$

y el autovector $\vec{\xi} = \xi_y \hat{e}_y$, lo cual implica que $\vec{\xi} \cdot \vec{k} = \vec{\xi} \cdot \vec{B}_0 = 0$, y de acuerdo con las ecuaciones (52) a (54) se puede ver que en este caso no se altera la densidad del plasma ni la presión. Este es el modo de Alfvén, que se propaga de manera transversal y es causado por la tensión de las líneas de campo magnético que tienden a restablecer su forma inicial. Físicamente estas ondas pueden considerarse como la oscilación transversal de una “cuerda magnética” que genera una deformación transversal del campo magnético, lo cual causa la aparición de una fuerza de tensión magnética que trata de restaurar el estado de equilibrio, de tal forma que cuando el campo se devuelve a dicho estado el plasma gana energía cinética y debido a la inercia pasa de largo de dicha posición, así las líneas de campo se vuelven a deformar pero ahora en dirección opuesta y el proceso continúa repitiéndose. Las ondas de Alfvén en general se pueden polarizar de manera lineal, circular o elíptica y de las ecuaciones (39) a (42) se puede ver que son el único modo obtenido para el caso de un medio uniforme incompresible ($\nabla \cdot \vec{v}_1 = 0$).

Los autovalores restantes están dados por

$$\omega_f^2 = \frac{k^2}{2} (a_0^2 + a_1^2) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4a_0^2 a_1^2 \cos^2 \theta}{(a_0^2 + a_1^2)^2}} \right], \quad (57)$$

$$\omega_s^2 = \frac{k^2}{2} (a_0^2 + a_1^2) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4a_0^2 a_1^2 \cos^2 \theta}{(a_0^2 + a_1^2)^2}} \right], \quad (58)$$

conocidos como los modos magnetoacústicos rápido y lento respectivamente, los cuales están asociados con los autovectores $\vec{\xi} = \xi_x \hat{e}_x + \xi_z \hat{e}_z$, de modo que $\vec{\xi} \cdot \vec{k} \neq 0$ y $\vec{\xi} \cdot \vec{B}_0 \neq 0$. En estos casos, la densidad y la presión del plasma son perturbados, y las oscilaciones ocurren de manera paralela y perpendicular al campo magnético sin perturbar. Estas ondas se componen de una parte magnética (a_1) y una parte acústica (a_0), de donde heredan su nombre. La distinción entre los dos modos puede entenderse al comparar los signos de las perturbaciones en las presiones cinética p y magnética $\vec{B}_0 \cdot \vec{B}/\mu_0$. Para ver esto es posible encontrar que a partir de las ecuaciones (54), (40) y (53) la relación entre las perturbaciones de las presiones es

$$\frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1}{\mu_0} = \frac{a_1^2}{a_0^2} \left(1 - \frac{a_0^2 k^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} \right) p_1, \quad (59)$$

donde se puede notar que las perturbaciones de las presiones tienen el mismo signo si la velocidad de fase $v_{ph} = \omega/k$ es mayor que $a_0 \cos \theta$, y signo opuesto si ésta es menor.

Debido a que la velocidad de fase para el modo magnetoacústico rápido es mayor que $a_0 \cos \theta$, las perturbaciones de la presión se refuerzan una a la otra, mientras que para el modo lento se oponen entre si. También se puede ver que el modo rápido es el único que existe cuando

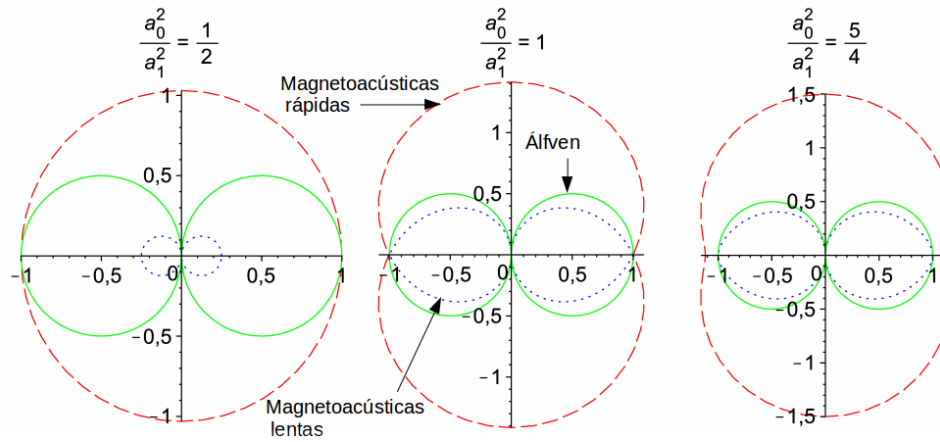


Figura 5. Diagramas de la velocidad de fase para las ondas de la magnetohidrodinámica ideal para tres valores de a_0^2/a_1^2 .

el ángulo $\theta = \pi/2$, es decir, cuando $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ con una velocidad de fase $(a_0^2 + a_1^2)^{1/2}$.

En la figura 5, se presenta un diagrama en coordenadas polares de las velocidades de fase para los tres modos, donde se puede notar que el modo lento tiene una velocidad de fase menor que la del modo de Alfvén y este a su vez tiene una velocidad menor que la del rápido. Además, se puede ver que el cociente entre las velocidades de Alfvén y la del sonido a_0^2/a_1^2 , tiene un efecto importante sobre la propagación de estos. Dicho cociente está relacionado con el valor plasma- β , definido como la razón entre las presión cinética del fluido y la presión magnética

$$\beta = \frac{2\mu_0 p_0}{B_0^2} = \frac{2}{\Gamma} \frac{a_0^2}{a_1^2}, \quad (60)$$

y mide el efecto del campo magnético en un plasma Goedbloed and Poedts (2004).

2.4. Estructura Característica

Los métodos numéricos que serán empleados para resolver el sistema de ecuaciones (30), estan basados en la estructura característica de las matrices Jacobianas asociadas a este sistema de ecuaciones. Siguiendo el esquema de valores propios de Powell (1994), estas velocidades características pueden escribirse como

$$\lambda_{1,2} = v_i, \quad (61)$$

$$\lambda_{3,4} = v_i \pm a_1, \quad (62)$$

$$\lambda_{5,6} = v_i \pm w_s, \quad (63)$$

$$\lambda_{7,8} = v_i \pm w_f. \quad (64)$$

donde a_1 es la velocidad de Alfvén (eq. 50), w_s es la velocidad del modo magnetoacústico lento (eq. 58) y w_f es la velocidad del modo magnetoacústico rápido (eq. 57). En la figura 6, se representa dicha estructura de valores propios, donde se puede ver que las velocidades asociadas a los modos magnetoacústicos rápidos tienen una magnitud mayor de propagación, tanto hacia el lado izquierdo como el derecho. En algunos casos es posible que los modos de Alfvén y los magnetoacústicos rápidos coincidan, esto es, $\lambda_8 \leq \lambda_4 \leq \lambda_6 \leq \lambda_{1,2} \leq \lambda_5 \leq \lambda_3 \leq \lambda_7$.

Por otra parte, en hidrodinámica existe un problema de datos iniciales muy importante en el cual se basan la mayoría de métodos numéricos, este es el *Problema de Riemann*, y consiste en

un problema de datos iniciales descrito por

$$\left. \begin{array}{l} \text{PDE:} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \text{IC:} \quad u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0, \\ u_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{array} \right\} \quad (65)$$

donde a es una constante, y u_L y u_R son dos valores constantes como se ve en la figura 7. Este estado inicial consiste en dos estados constantes separados por una discontinuidad en $x = 0$. Este es el problema más simple que se puede suponer. Asociados con este problema existen tres tipos de ondas hidrodinámicas, las cuales también existen en la extensión a la magnetohidrodinámica, estas son: (Toro, 2009)

1. **Onda de Choque:** es una onda a través de la cual cambian de manera discontinua la densidad, presión y la velocidad, de igual forma pasa con los campos electromagnéticos.
2. **Onda de Contacto:** es una onda discontinua a través de la cual la velocidad y la presión permanecen constantes pero la densidad y las variables que dependen de ella (entropía, velocidad del sonido, temperatura, etc.) cambian de manera discontinua.
3. **Onda de rarefacción:** es una onda suave asociada con la densidad, velocidad y presión, cuya gráfica de características tiene una forma de abanico, contenida entre dos velocidades características extremas (cabeza y cola).

En la figura 8 se muestra un esquema de las tres ondas elementales del problema de Riemann.

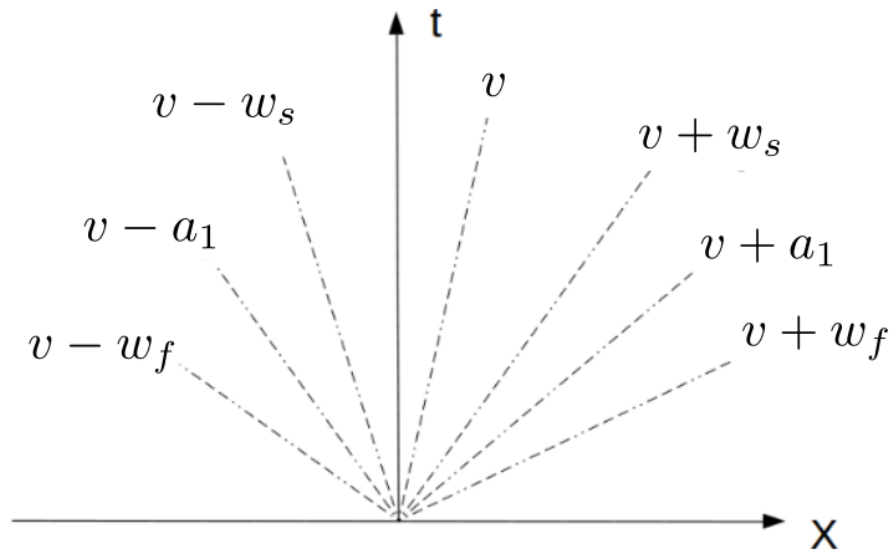


Figura 6. Estructura característica de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, los cuales corresponden a los valores propios de la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones (30).

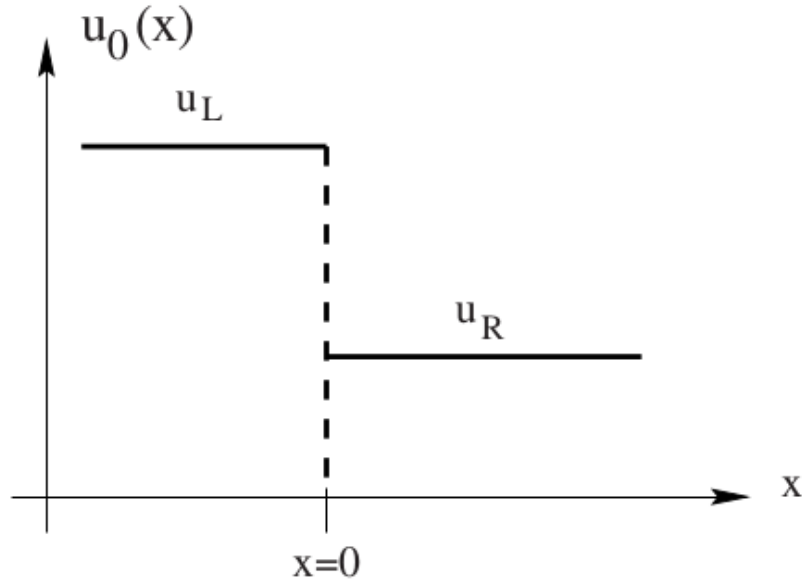


Figura 7. Ilustración del dato inicial del problema de Riemann. En el tiempo inicial los datos iniciales consisten en dos estados constantes separados por una discontinuidad en $x = 0$. Tomado de Toro (2009)

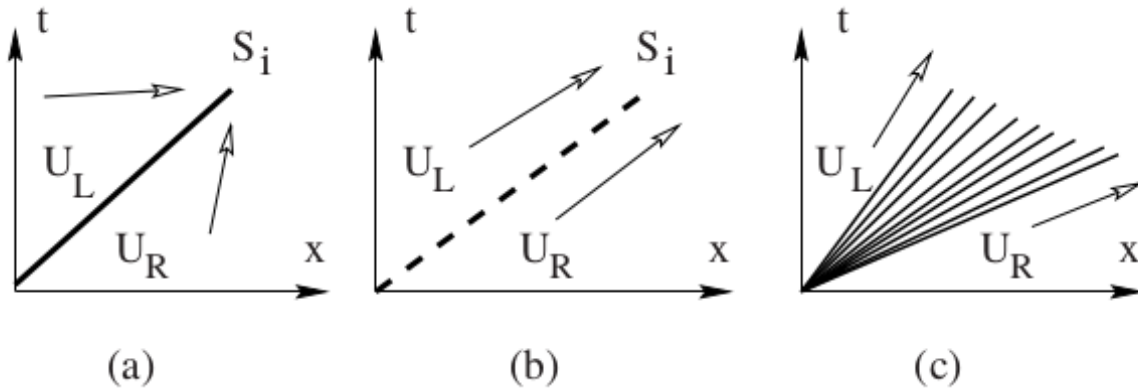


Figura 8. Soluciones elementales de onda del problema de Riemann: (a) onda de choque de rapidez S_i , (b) discontinuidad de contacto de rapidez S_i y (c) una onda de rarefacción. Tomado de Toro (2009).

2.5. Modelo de Spitzer para la resistividad

Dentro de la discusión de los fenómenos de disipación, las colisiones de Coulomb entre las especies partículas cargadas fueron históricamente el primer mecanismo descrito por una teoría cuantitativa de transporte en los plasmas. Este valor clásico de la resistividad eléctrica, entre otros coeficientes de transporte, es usado universalmente como un valor de referencia muy importante (Trintchouk et al., 2003). Este modelo fue desarrollado por Spitzer (1956), como la tasa de transferencia de momentum entre iones y electrones en un plasma donde las colisiones de Coulomb son mas significativas que otros tipos de disipación. Para un gas ionizado, está dado en unidades SI por

$$\eta(T) = \frac{65.359 \ln \Lambda}{T^{3/2}}, \quad (66)$$

donde T es la temperatura y $\ln \Lambda$ es el logaritmo de Coulomb, el cual tiene valores entre 5 y 20 y tiene una baja dependencia con la temperatura y la densidad (Priest, 2014). Este perfil es presentado

en la figura 9 correspondiente al perfil de temperatura de VAL (Avrett and Loeser, 2008) el cual fue descrito en la sección 1.3. De acuerdo a este perfil de temperatura, la resistividad eléctrica es importante en las regiones de la fotosfera y de la cromosfera, debido a la alta temperatura en la corona, allí sus efectos son mucho menores. Debido a que algunas de las zonas de la atmósfera solar tienen temperaturas pequeñas que permiten ionización parcial del plasma, como por ejemplo las zonas bajas de la cromosfera, lo cual aumenta la resistividad eléctrica considerablemente respecto al modelo de Spitzer (Khodachenko et al., 2004; Leake et al., 2005). En vista de esto, se puede considerar al modelo de Spitzer como un límite inferior de resistividad (Spangler, 2009).

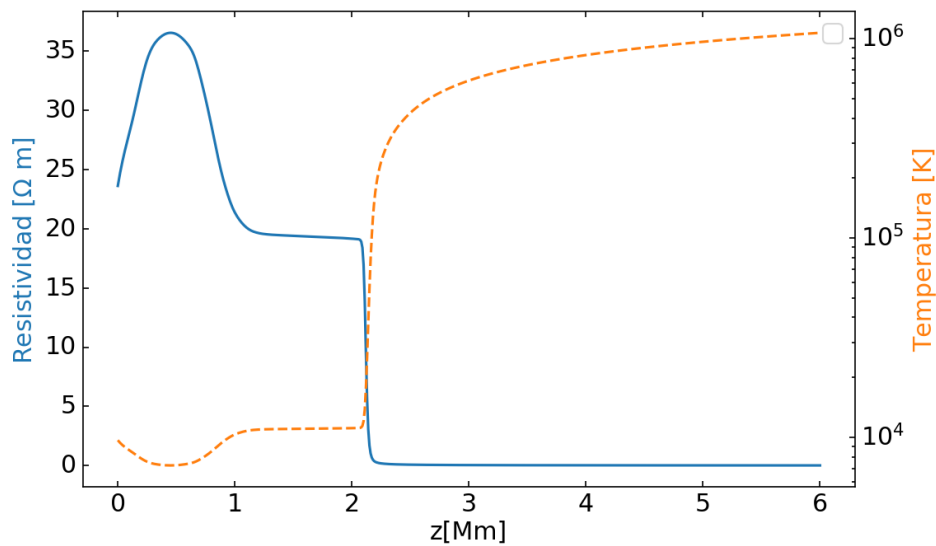


Figura 9. Resistividad de Spitzer para el modelo de temperatura de VAL (Avrett and Loeser, 2008), frecuentemente utilizado para modelar la atmósfera solar. De acuerdo con este modelo de temperatura, la resistividad eléctrica es importante en las regiones de la fotosfera y de la cromosfera.

2.6. Modelos para el flujo de Calor

La conducción térmica es la transferencia de calor a energía interna por medio de colisiones microscópicas de partículas y del movimiento de electrones dentro del plasma. Esta se modela con la ley de Fourier como

$$\vec{q} = \kappa \nabla T, \quad (67)$$

donde $\vec{q}$ es el vector de flujo de calor, κ es el coeficiente de conducción térmica y T es la temperatura. Para plasmas fuertemente magnetizados la conducción térmica no es isótropa, Spitzer (1956) demostró que en este caso la expresión se modifica como

$$\vec{q} = \frac{\kappa T^{5/2} (\vec{B} \cdot \nabla T) \vec{B}}{B^2}, \quad (68)$$

donde la conducción térmica es transferida únicamente a lo largo de las líneas de campo magnético. Esto se debe a que el valor del flujo de calor en dirección perpendicular a las líneas de campo magnético es $2 \times 10^{-31} n^2 T^{-3} B^{-2}$ (n es el número total de partículas por unidad de volumen) veces menor que en dirección tangencial. Esta aproximación es adecuada para aplicaciones de física solar debido a los fuertes campo magnéticos de la atmósfera solar (Priest, 2014).

3. MAGNUS: Un nuevo código MHD

En este capítulo se describe el código MAGNUS (Navarro et al., 2017), creado para resolver las ecuaciones de la magnetohidrodinámica teniendo en cuenta términos de resistividad y flujo de calor el cual está programado en el lenguaje Fortran y creado con base a los códigos CAFE (Lora-Clavijo et al., 2015a) y Newtonian-CAFE (González-Avilés et al., 2015). En la sección 3.1 se presentan los métodos numéricos utilizados los cuales incluyen el método de líneas, método de volúmenes finitos, los métodos de alta resolución para la captura de choques y los reconstructores de variables. El método de Transporte de Flujo Restringido se describe en la sección 3.3, el cual es usado para evitar el crecimiento de la divergencia del campo magnético. En la sección 3.4 se plantea el algoritmo para escoger el paso de tiempo adaptativo de acuerdo a las velocidades características del sistema. La adimensionalización de las ecuaciones se expone en la sección 3.5. En la sección 3.6 se describe el cálculo de algunas variables como la densidad de corriente eléctrica, la resistividad y el flujo de calor. Además, en la sección 3.7 se describen las condiciones de frontera programadas en el código y finalmente en la sección 3.8 se presenta el diagrama de flujo del código.

3.1. Métodos numéricos

La forma conservativa de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica permite la utilización de un poderoso método de solución de ecuaciones diferenciales parciales no lineales conocido como volúmenes finitos (Toro, 2009). Para ello es necesario discretizar las ecuaciones por medio del método de líneas (Kreiss and Scherer, 1992). Este separa los procesos de discretización espacial y temporal. Primero se supone una discretización espacial, dejando las ecuaciones continuas en

tiempo. De esta manera el sistema de ecuaciones parciales se convierte en un sistema de ecuaciones ordinarias en el tiempo

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}_{(i,j,k)}}{dt} = & -\frac{\vec{F}_{(i+1/2,j,k)}^x - \vec{F}_{(i-1/2,j,k)}^x}{\Delta x} - \frac{\vec{F}_{(i,j+1/2,k)}^y - \vec{F}_{(i,j-1/2,k)}^y}{\Delta y} \\ & - \frac{\vec{F}_{(i,j,k+1/2)}^z - \vec{F}_{(i,j,k-1/2)}^z}{\Delta z} + \vec{S}_{(i,j,k)}, \end{aligned} \quad (69)$$

siendo $\vec{F}_{(i\pm 1/2,j,k)}^x$, $\vec{F}_{(i,j\pm 1/2,k)}^y$ y $\vec{F}_{(i,j,k\pm 1/2)}^z$ los flujos numéricos en las interfaces de las celdas numéricas y $\vec{S}$ es el vector de términos de fuente/sumidero. Éstos se calculan utilizando los métodos de alta resolución para la captura de choques o también conocidos como solucionadores de Riemann aproximado, los cuales se basan en la solución del problema de Riemann, dado por el estado inicial

$$\vec{U}(x,0) = \begin{cases} \vec{U}_L, x < 0, \\ \vec{U}_R, x > 0, \end{cases} \quad (70)$$

donde $\vec{U}_L$ (izquierda) y $\vec{U}_R$ (derecha) son estados constantes y la discontinuidad se da en $x = 0$. Estos métodos convierten cualquier dato inicial en problemas de Riemann locales en ambos lados de cada intercelda. Entre los métodos mas usados están el HLLE (Harten et al., 1983), el HLLC (Toro et al., 1994) que utilizan los valores propios de la matriz Jacobiana del sistema de ecuaciones (30), y el método de Roe (Roe, 1981) que utiliza además los vectores propios.

En la aproximación HLLE, Harten et al. (1983) calculan los flujos $F_{i+1/2}$ en el problema

de Riemann definiendo un estado U_{HLLE} intermedio, es decir, la solución queda dividida en tres partes

$$\vec{U}_{\text{HLLE}} = \begin{cases} \vec{U}_L, & \text{si } S_L > 0, \\ \vec{U}^*, & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_R, \\ \vec{U}_R, & \text{si } S_R < 0, \end{cases} \quad (71)$$

donde S_L y S_R representan las velocidades de las ondas más rápidas en los estados izquierdo y derecho, esto es, $S_L = \min(0, \lambda_i^R, \lambda_i^L)$, $S_R = \max(0, \lambda_i^R, \lambda_i^L)$, donde λ_i son las velocidades características del sistema, dadas por las ecuaciones (61) a (64). Se incluye al cero para permitir el caso en el que no hay ondas moviéndose ni a la derecha ni a la izquierda, por ejemplo, el caso en que todas las ondas y discontinuidades viajan en la misma dirección.

La variable $\vec{U}^*$ denota el estado intermedio subsónico constante y está definido como

$$\vec{U}^* = \frac{S_R \vec{U}_R - S_L \vec{U}_L - (\vec{F}_R - \vec{F}_L)}{S_R - S_L}, \quad (72)$$

con $\vec{F}_L = \vec{F}(\vec{U}_L)$ y $\vec{F}_R = \vec{F}(\vec{U}_R)$. De esta manera, el flujo en la interface está definido como (Toro,

2009)

$$\vec{F}_{i+1/2}^{\text{HLL}} = \begin{cases} \vec{F}_L, & \text{si } S_L > 0, \\ \vec{F}^*, & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_R, \\ \vec{F}_R, & \text{si } S_R < 0, \end{cases} \quad (73)$$

donde

$$\vec{F}^* = \frac{S_R \vec{F}_L - S_L \vec{F}_R - S_L S_R (\vec{U}_R - \vec{U}_L)}{S_R - S_L}. \quad (74)$$

Este método estima el flujo en el estado intermedio como un promedio de los flujos a derecha y a izquierda promediados con los valores de las velocidades S_L y S_R .

Por otra parte, basado en el método HLLC fue creado el método HLLC por Toro et al. (1994), el cual calcula el estado solución al problema de Riemann estimando una onda de contacto intermedia. Éste fue propuesto originalmente para la hidrodinámica. Sin embargo, cuando se utiliza para las ecuaciones de la magnetohidrodinámica no funciona, haciendo que los códigos fallen o reproduzcan soluciones no-físicas que violan la forma integral de las leyes de conservación. Una solución a este problema fue propuesta por Li (2005), y es la versión implementada en el código.

Existen distintos algoritmos para reconstruir cualquier dato inicial en un problema de Riemann aproximado, por ejemplo el método MINMOD (Roe, 1986), define las funciones a los lados

izquierdo y derecho por medio de líneas rectas $\tilde{\vec{U}}(t^n, x)$ (Toro, 2009) dado por

$$\vec{U}_{i+1/2}^L = \vec{U}_i + \sigma_i (x_{i+1/2} - x_i), \quad (75)$$

$$\vec{U}_{i+1/2}^R = \vec{U}_{i+1} - \sigma_{i+1} (x_{i+1} - x_{i+1/2}), \quad (76)$$

donde

$$\sigma_i = \text{MINMOD}(m_{i-1/2}, m_{i+1/2}), \quad (77)$$

$$\sigma_{i+1} = \text{MINMOD}(m_{i+1/2}, m_{i+3/2}). \quad (78)$$

La función $m_{i+1/2}$ está definida como

$$m_{i+1/2} = \frac{\vec{U}_{i+1} - \vec{U}_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad (79)$$

y representa la derivada de la variable $\vec{U}$, centrada en la intercelda localizada en $x_{i+1/2}$, y la función

MINMOD está definida como

$$\text{MINMOD}(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } ab < 0, \\ a & \text{si } |a| < |b|, \\ b & \text{si } |a| > |b|. \end{cases} \quad (80)$$

Existen muchos mas métodos de reconstrucción de variables, en este código se utilizará el Limi-

tador Monotónico Centrado MC (van Leer, 1977a), y WENO (Titarev and Toro, 2004) de quinto orden.

3.2. Solucionador de Riemann HLLC para la magnetohidrodinámica

Por otra parte, el esquema HLLC desarrollado por Toro et al. (1994) para hidrodinámica es una modificación del método HLLE, donde se considera la discontinuidad de contacto. Este método estima una onda de contacto intermedia con velocidad S^* , de modo que esta solución se divide en los siguientes subestados:

$$\vec{U}_L \quad \text{if} \quad 0 < S_L, \quad (81)$$

$$\vec{U}_L^* \quad \text{if} \quad S_L \leq 0 \leq S^*, \quad (82)$$

$$\vec{U}_R^* \quad \text{if} \quad S^* \leq 0 \leq S_R, \quad (83)$$

$$\vec{U}^R \quad \text{if} \quad 0 > S_R. \quad (84)$$

Ahora, aplicando las condiciones de Rankine-Hugoniot a través de S_L y S_R , los flujos pueden escribirse en términos de los vectores de estado $\vec{U}_L^*$ y $\vec{U}_R^*$ como

$$\vec{F}_L^* = \vec{F}_L + S_L(\vec{U}_L^* - \vec{U}_L), \quad \text{if} \quad S_L \leq 0 \leq S^*, \quad (85)$$

$$\vec{F}_R^* = \vec{F}_R + S_R(\vec{U}_R^* - \vec{U}_R), \quad \text{if} \quad S^* \leq 0 \leq S_R, \quad (86)$$

donde se ha supuesto que la presión y las velocidades permanecen invariables a través de la onda

de contacto, esto es,

$$p_L^* = p_R^* = p^*, \quad (87)$$

$$v_{xL}^* = v_{xR}^* = v_x^* = S^*. \quad (88)$$

La extensión de éste método al caso magnetohidrodinámico es muy sencillo. Sin embargo, Li (2005) demostró que la condición de consistencia, es decir, la forma integral de las leyes de conservación (Toro, 2009),

$$\frac{S^* - S_L}{S_R - S_L} \vec{U}_L^* + \frac{S_R - S^*}{S_R - S_L} \vec{U}_R^* = \frac{S_R \vec{U}_R - S_L \vec{U}_L - (\vec{F}_R - \vec{F}_L)}{S_R - S_L}, \quad (89)$$

no se satisface en el caso de la extensión al caso hidrodinámico. No obstante, Li (2005) mostró que dicha condición se satisface bajo ciertas restricciones para los campos magnéticos, estas son

$$B_{iL}^* = B_{iR}^* = B_i^* = B_i^{\text{HLL}}, \quad (90)$$

$$(\vec{B} \cdot \vec{v})_L^* = (\vec{B} \cdot \vec{v})_R^* = (\vec{B} \cdot \vec{v})^* = \vec{B}^{\text{HLL}} \cdot \vec{v}^{\text{HLL}}, \quad (91)$$

de manera que el estado intermedio $\vec{U}_L^*$ es

$$\rho_L^* = \rho_L \frac{S_L - v_x}{S_L - S^*}, \quad (92)$$

$$(\rho v_x)_L^* = \rho_L^* S^*, \quad (93)$$

$$(\rho v_y)_L^* = (\rho v_y)_L \frac{S_L - v_x}{S_L - S^*} - \frac{(B_x^* B_y^* - B_x B_y)}{S_L - S^*}, \quad (94)$$

$$(\rho v_z)_L^* = (\rho v_z)_L \frac{S_L - v_x}{S_L - S^*} - \frac{(B_x^* B_z^* - B_x B_z)}{S_L - S^*}, \quad (95)$$

$$E_L^* = \frac{1}{S_L - S^*} \left\{ E(S_L - v_x) + (p^* S^* - p v_x) - \left[B_x^* (\vec{B} \cdot \vec{v})^* - B_x (\vec{B} \cdot \vec{v}) \right] \right\}, \quad (96)$$

donde

$$S^* = \frac{\rho_R v_{xR} (S_R - v_{xR}) - \rho_L v_{xL} (S_L - v_{xL})}{\rho_R (S_R - v_{xR}) - \rho_L (S_R - v_{xL})} + \frac{p_L - p_R - B_{xL}^2 + B_{xR}^2}{\rho_R (S_R - v_{xR}) - \rho_L (S_R - v_{xL})}, \quad (97)$$

$$p^* = \rho_L (S_L - v_x) (S^* - v_x) + p_L - B_x^2 + (B_x^*)^2. \quad (98)$$

La solución para el vector del estado derecho $\vec{U}_R^*$ tiene una forma idéntica.

3.3. Transporte de Flujo Restringido

La solución numérica de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica puede generar una acumulación de errores numéricos que hacen que la divergencia del campo magnético crezca en el tiempo. Es por esto que diversas técnicas han sido implementadas para prevenir este problema (Tóth, 2000). En este código se usa el método de Transporte de Flujo Restringido desarrollado por Balsara (2004); Evans and Hawley (1988). Este método consiste en una discretización especial de la ecuación de Faraday.

De las ecuaciones de Maxwell, la ley de Faraday puede re-escribirse en términos de un vector $\vec{\Omega}$ de la siguiente forma

$$\partial_t \vec{B} = \nabla \times \vec{\Omega}, \quad (99)$$

el cual puede expresarse así

$$\vec{\Omega} = \vec{v} \times \vec{B} - \eta \vec{J}, \quad (100)$$

de acuerdo con la ley de Ohm.

Aplicando un sistema de diferencias finitas centradas en la ecuación (99), la evolución discretizada de las componentes del campo magnético promediadas a través de las caras de la celda numérica, que tiene centro en (i, j, k) (mostrada en la figura 10), son

$$\begin{aligned} \frac{dB^x_{(i+\frac{1}{2},j,k)}}{dt} &= \frac{\Omega^z_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} - \Omega^z_{(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)}}{\Delta y} - \frac{\Omega^y_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})} - \Omega^y_{(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})}}{\Delta z}, \\ \frac{dB^y_{(i,j+\frac{1}{2},k)}}{dt} &= \frac{\Omega^x_{(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})} - \Omega^x_{(i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})}}{\Delta z} - \frac{\Omega^z_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} - \Omega^z_{(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)}}{\Delta x}, \\ \frac{dB^z_{(i,j,k+\frac{1}{2})}}{dt} &= \frac{\Omega^y_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})} - \Omega^y_{(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}}{\Delta x} - \frac{\Omega^x_{(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})} - \Omega^x_{(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}}{\Delta y}, \end{aligned} \quad (101)$$

donde los valores de Ω están definidos en los vértices de las celdas, y para calcularlos en las interceldas simplemente se promedian con los flujos numéricos $F^{ij} = v^i B^j - v^j B^i$,

$$\begin{aligned}
\Omega_{(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}^x &= \frac{1}{4} \left(F_{(i,j+\frac{1}{2},k)}^{yz} + F_{(i,j+\frac{1}{2},k+1)}^{yz} - F_{(i,j,k+\frac{1}{2})}^{zy} - F_{(i,j+1,k+\frac{1}{2})}^{zy} \right) \\
&\quad - \frac{1}{4} \left(\eta J_{(i,j+\frac{1}{2},k)}^x + \eta J_{(i,j+\frac{1}{2},k+1)}^x + \eta J_{(i,j,k+\frac{1}{2})}^x + \eta J_{(i,j+1,k+\frac{1}{2})}^x \right), \\
\Omega_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^y &= \frac{1}{4} \left(F_{(i,j,k+\frac{1}{2})}^{zx} + F_{(i+1,j,k+\frac{1}{2})}^{zx} - F_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^{xz} - F_{(i+\frac{1}{2},j,k+1)}^{xz} \right) \\
&\quad - \frac{1}{4} \left(\eta J_{(i,j,k+\frac{1}{2})}^y + \eta J_{(i+1,j,k+\frac{1}{2})}^y + \eta J_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^y + \eta J_{(i+\frac{1}{2},j,k+1)}^y \right), \\
\Omega_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)}^z &= \frac{1}{4} \left(F_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^{xy} + F_{(i+\frac{1}{2},j+1,k)}^{xy} - F_{(i,j+\frac{1}{2},k)}^{yx} - F_{(i+1,j+\frac{1}{2},k)}^{yx} \right) \\
&\quad - \frac{1}{4} \left(\eta J_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^z + \eta J_{(i+\frac{1}{2},j+1,k)}^z + \eta J_{(i,j+\frac{1}{2},k)}^z + \eta J_{(i+1,j+\frac{1}{2},k)}^z \right),
\end{aligned} \tag{102}$$

donde los flujos F^{ij} se calculan con el esquema HLLE o HLLC a lo largo de cada dirección espacial. Además, en las últimas ecuaciones se ha incluido el promedio del segundo término del lado derecho de la ecuación (100), $\eta \vec{J}$, debido a que este no está presente en la definición de los flujos. Vale la pena mencionar que se ha elegido expresar dichos términos así para poder utilizar el método con cualquier solucionador de Riemann y preservar la divergencia del campo magnético $\nabla \cdot \vec{B}$ con valores muy pequeños.

El paso final es realizar el cálculo del campo magnético en el centro de la celda por medio

de un promedio con los valores obtenidos en las ecuaciones (101), esto es

$$\begin{aligned} B_{(i,j,k)}^x &= \frac{1}{2} \left(B_{(i-\frac{1}{2},j,k)}^x + B_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^x \right), \\ B_{(i,j,k)}^y &= \frac{1}{2} \left(B_{(i,j-\frac{1}{2},k)}^y + B_{(i,j+\frac{1}{2},k)}^y \right), \\ B_{(i,j,k)}^z &= \frac{1}{2} \left(B_{(i,j,k-\frac{1}{2})}^z + B_{(i,j,k+\frac{1}{2})}^z \right). \end{aligned} \quad (103)$$

Finalmente, se calcula $\nabla \cdot \vec{B}$ en cada paso de la evolución usando la definición centrada en la esquina de la celda, dado que la definición centrada no conserva el método de Transporte de Flujo Restringido (Tóth, 2000),

$$\left(\nabla \cdot \vec{B} \right)_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})} = \frac{\partial B_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}^x}{\partial x} + \frac{\partial B_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}^y}{\partial y} + \frac{\partial B_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}^z}{\partial z}, \quad (104)$$

donde los promedios de las derivadas están dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}^x}{\partial x} &= \frac{1}{4 \Delta x} \left[B_{(i+1,j,k)}^x - B_{(i,j,k)}^x + B_{(i+1,j+1,k)}^x - B_{(i,j+1,k)}^x \right. \\ &\quad \left. + B_{(i+1,j,k+1)}^x - B_{(i,j,k+1)}^x + B_{(i+1,j+1,k+1)}^x - B_{(i,j+1,k+1)}^x \right], \\ \frac{\partial B_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}^y}{\partial y} &= \frac{1}{4 \Delta y} \left[B_{(i,j+1,k)}^y - B_{(i,j,k)}^y + B_{(i+1,j+1,k)}^y - B_{(i+1,j,k)}^y \right. \\ &\quad \left. + B_{(i,j+1,k+1)}^y - B_{(i,j,k+1)}^y + B_{(i+1,j+1,k+1)}^y - B_{(i+1,j,k+1)}^y \right], \\ \frac{\partial B_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}^z}{\partial z} &= \frac{1}{4 \Delta z} \left[B_{(i,j,k+1)}^z - B_{(i,j,k)}^z + B_{(i+1,j,k+1)}^z - B_{(i+1,j,k)}^z \right. \\ &\quad \left. + B_{(i,j+1,k+1)}^z - B_{(i,j+1,k)}^z + B_{(i+1,j+1,k+1)}^z - B_{(i+1,j+1,k)}^z \right]. \end{aligned} \quad (105)$$

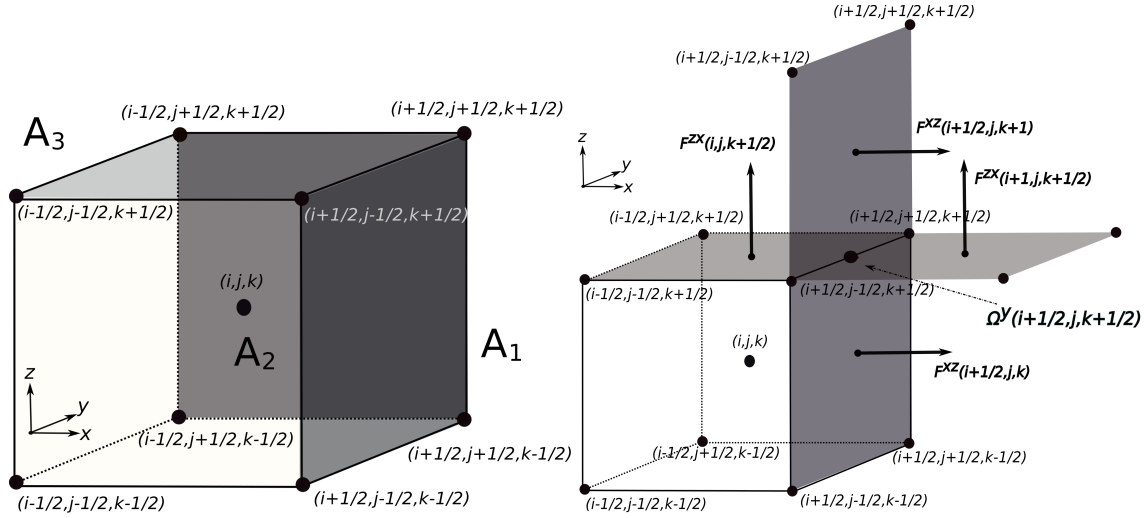


Figura 10. Dibujos ilustrativos tomados de Lora-Clavijo et al. (2015b) para realizar los cálculos del método de Transporte de Flujo Restringido. En la figura de la izquierda se muestra una celda centrada en (i,j,k) y sus respectivos vértices, y en la figura de la izquierda se muestran dos caras vecinas de la celda y las direcciones de los flujos necesarios para calcular Ω^y .

3.4. Paso de tiempo adaptativo

Con el fin de obtener soluciones estables, el paso de tiempo es elegido siguiendo la condición de Courant-Friedrichs-Levy (Titarev and Toro, 2005)

$$\Delta t = C_{\text{cfl}} \times \min_{ijk} \left(\frac{\Delta x}{|\lambda_{ijk}^{n,x}|}, \frac{\Delta y}{|\lambda_{ijk}^{n,y}|}, \frac{\Delta z}{|\lambda_{ijk}^{n,z}|} \right), \quad (106)$$

donde C_{cfl} representa el número de Courant y $|\lambda_{ijk}^{n,d}|$ es la rapidez de la onda mas rápida en el nivel de tiempo n viajando en la dirección d . El número de Courant es elegido dependiendo de la dimensión espacial del problema, esto es, $0 < C_{\text{cfl}} \leq 1/2$ para dos dimensiones y $0 < C_{\text{cfl}} \leq 1/3$ para tres dimensiones (Toro, 2009). Además, en los casos donde la resistividad y el flujo de calor se consideran, el paso de tiempo se elige usando la misma fórmula pero en este caso se saca la raíz

debido a que en dichos casos las ecuaciones tienen una componente difusiva.

3.5. Adimensionalización

Las ecuaciones se adimensionalizan o re-escalan de modo que se pueda evitar que las cantidades físicas alcancen valores muy pequeños ($< 10^{-9}$) o demasiado grandes ($> 10^{12}$) que causen problemas en la aplicación de los algoritmos numéricos. Las ecuaciones se adimensionalizan de acuerdo a las siguientes conversiones

$$\begin{aligned} \partial_i &\rightarrow l_0 \partial_i, & \partial_t &\rightarrow t_0 \partial_t, & l &\rightarrow \frac{l}{l_0}, & t &\rightarrow \frac{t}{t_0}, \\ \rho &\rightarrow \frac{\rho}{\rho_0}, & \eta &\rightarrow \frac{\eta}{l_0 v_0 \mu_0}, & \vec{q} &\rightarrow \frac{\vec{q}}{\rho_0 v_0^3}, & \vec{B} &\rightarrow \frac{\vec{B}}{B_0}, \\ \vec{v} &\rightarrow \frac{\vec{v}}{v_0}, & p &\rightarrow \frac{p}{\rho v_0^2}, & p_T &\rightarrow \frac{p_T}{\rho v_0^2}, & E &\rightarrow \frac{E}{\rho v_0^2}, \end{aligned} \quad (107)$$

donde $v_0 = l_0/t_0$ y $B_0 = v_0^2 \mu_0 \rho_0$. Con estas relaciones, el sistema de ecuaciones se puede escribir de la misma manera que en (30) excepto por el término de permitividad magnética μ_0 , el cual desaparece. En las simulaciones de física solar se tomaron los siguientes valores de adimensionalización $\rho_0 = 1 \times 10^{-12} \text{kg/m}^3$, $l_0 = 1 \times 10^4 \text{ m}$ y $t_0 = 1.0 \text{ s}$.

3.6. Implementación de la corriente eléctrica, la resistividad y el flujo de calor

Para los cálculos numéricos de la resistividad y el flujo de calor, se emplean las diferencias finitas. Las componentes del vector de densidad de corriente eléctrica $\vec{J}$ se obtienen de la ley de

Ampère

$$\begin{aligned}
 J_x &= \partial_y B_z - \partial_z B_y, \\
 J_y &= \partial_z B_x - \partial_x B_z, \\
 J_z &= \partial_x B_y - \partial_y B_x,
 \end{aligned} \tag{108}$$

y las derivadas parciales son calculadas usando diferencias finitas de segundo orden. El quinto componente del vector de términos fuente (32) y el vector de flujo de calor $\vec{q}$ de la ecuación (67) se calculan por medio del esquema presentado en Jiang et al. (2012a), los cuales están descritos por

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\eta \vec{J} \times \vec{B})_{(i,j,k)} &= \frac{[\eta(J_z B_y - J_y B_z)]_{(i+1,j,k)} - [\eta(J_z B_y - J_y B_z)]_{(i-1,j,k)}}{2\Delta x} \\
 &+ \frac{[\eta(J_x B_z - J_z B_x)]_{(i,j+1,k)} - [\eta(J_x B_z - J_z B_x)]_{(i,j-1,k)}}{2\Delta y} \\
 &+ \frac{[\eta(J_y B_x - J_x B_y)]_{(i,j,k+1)} - [\eta(J_y B_x - J_x B_y)]_{(i,j,k-1)}}{2\Delta z},
 \end{aligned} \tag{109}$$

$$\begin{aligned}
 (\nabla \cdot \vec{q})_{(i,j,k)} &= \\
 &\frac{\sqrt{\kappa(i,j,k) \kappa(i+1,j,k)} (T_{(i+1,j,k)} - T_{(i,j,k)})}{\Delta x^2} - \frac{\sqrt{\kappa(i,j,k) \kappa(i-1,j,k)} (T_{(i,j,k)} - T_{(i-1,j,k)})}{\Delta x^2} \\
 &+ \frac{\sqrt{\kappa(i,j,k) \kappa(i,j+1,k)} (T_{(i,j+1,k)} - T_{(i,j,k)})}{\Delta y^2} - \frac{\sqrt{\kappa(i,j,k) \kappa(i,j-1,k)} (T_{(i,j,k)} - T_{(i,j-1,k)})}{\Delta y^2} \\
 &+ \frac{\sqrt{\kappa(i,j,k) \kappa(i,j,k+1)} (T_{(i,j,k+1)} - T_{(i,j,k)})}{\Delta z^2} - \frac{\sqrt{\kappa(i,j,k) \kappa(i,j,k-1)} (T_{(i,j,k)} - T_{(i,j,k-1)})}{\Delta z^2}.
 \end{aligned} \tag{110}$$

Para el segundo modelo del vector de flujo de calor (68), se usa un esquema simple de

diferencias finitas de segundo orden. Finalmente, las últimas tres componentes del vector fuente (32), $\nabla \times \eta \vec{J}$, no se escriben en un esquema de diferencias finitas, debido a que las ecuaciones (28) son resueltas a través del método de Transporte de Flujo Restringido el cual controla que la divergencia del campo magnético no crezca debido a errores numéricos (sección 3.3).

3.7. Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera son restricciones necesarias para la solución de un problema de valor de límite. Un problema de valor límite es una ecuación diferencial (o sistema de ecuaciones diferenciales) que debe resolverse en un dominio en cuyo límite se conoce un conjunto de condiciones. Se opone al *problema del valor inicial*, en el que solo se conocen las condiciones en un extremo del intervalo. Las condiciones de frontera implementadas en el código son las siguientes:

1. **Fijas en el tiempo:** Las variables de la frontera no varían en el tiempo, manteniendo sus valores iniciales.
2. **Flujo saliente:** Las variables en la frontera son iguales al de la celda vecina.

3. **Periódicas:** El valor de las funciones en la frontera es igual al de la celda vecina de la cara opuesta.

Frontera	Condiciones Fijas	Condiciones de Flujo saliente	Condiciones Periódicas
$x = x_{\min}$	$\vec{U}_{(0,j,k)}^{n+1} = \vec{U}_{(0,j,k)}^n$,	$\vec{U}_{(0,j,k)}^{n+1} = \vec{U}_{(1,j,k)}^n$,	$\vec{U}_{(0,j,k)}^{n+1} = \vec{U}_{(N_x-1,j,k)}^n$,
$y = y_{\min}$	$\vec{U}_{(i,0,k)}^{n+1} = \vec{U}_{(i,0,k)}^n$,	$\vec{U}_{(i,0,k)}^{n+1} = \vec{U}_{(i,1,k)}^n$,	$\vec{U}_{(i,0,k)}^{n+1} = \vec{U}_{(i,N_y-1,k)}^n$,
$z = z_{\min}$	$\vec{U}_{(i,j,0)}^{n+1} = \vec{U}_{(i,j,0)}^n$,	$\vec{U}_{(i,j,0)}^{n+1} = \vec{U}_{(i,j,1)}^n$,	$\vec{U}_{(i,j,0)}^{n+1} = \vec{U}_{(i,j,N_z-1)}^n$,
$x = x_{\max}$	$\vec{U}_{(N_x,j,k)}^{n+1} = \vec{U}_{(N_x,j,k)}^n$,	$\vec{U}_{(N_x,j,k)}^{n+1} = \vec{U}_{(N_x-1,j,k)}^n$,	$\vec{U}_{(N_x,j,k)}^{n+1} = \vec{U}_{(1,j,k)}^n$,
$y = y_{\max}$	$\vec{U}_{(i,N_y,k)}^{n+1} = \vec{U}_{(i,N_y,k)}^n$,	$\vec{U}_{(i,N_y,k)}^{n+1} = \vec{U}_{(i,N_y-1,k)}^n$,	$\vec{U}_{(i,N_y,k)}^{n+1} = \vec{U}_{(i,1,k)}^n$,
$z = z_{\max}$	$\vec{U}_{(i,j,N_z)}^{n+1} = \vec{U}_{(i,j,N_z)}^n$,	$\vec{U}_{(i,j,N_z)}^{n+1} = \vec{U}_{(i,j,N_z-1)}^n$,	$\vec{U}_{(i,j,N_z)}^{n+1} = \vec{U}_{(i,j,1)}^n$.

4. **Reflejantes:** Se invierte el signo de la componente perpendicular de la velocidad a la frontera:

Frontera Condiciones Reflejantes

$$\begin{aligned}
 x = x_{\text{mín}} \quad v_{x(0,j,k)}^{n+1} &= -v_{x(1,j,k)}^n, \\
 y = y_{\text{mín}} \quad v_{y(i,0,k)}^{n+1} &= -v_{y(i,1,k)}^n, \\
 z = z_{\text{mín}} \quad v_{z(i,j,0)}^{n+1} &= -v_{z(i,j,1)}^n, \\
 x = x_{\text{máx}} \quad v_{x(N_x,j,k)}^{n+1} &= -v_{x(N_x-1,j,k)}^n, \\
 y = y_{\text{máx}} \quad v_{y(i,N_y,k)}^{n+1} &= -v_{y(i,N_y-1,k)}^n, \\
 z = z_{\text{máx}} \quad v_{z(i,j,N_z)}^{n+1} &= -v_{z(i,j,N_z-1)}^n,
 \end{aligned} \tag{111}$$

y para las demás variables se utilizan las condiciones de flujo saliente.

3.8. Diagrama de flujo del código

La estructura del código se presenta en la figura 11, la cual corresponde al diagrama de flujo del código, donde cada una de las subrutinas se describen a continuación:

Algoritmo 1: Entrada de parámetros, algoritmo para leer los parámetros necesarios para realizar la simulación como el número de puntos (N_x , N_y , N_z), el dominio numérico (x_{max} , x_{min} , y_{min} , y_{max} , z_{min} , z_{max}), el tiempo final (t_f), el número de Courant (c), el índice adiabático (Γ), el valor

de la amplitud de la resistividad (η), el coeficiente de conductividad térmica (κ_0), las condiciones de frontera (BC), el método de integración en el tiempo (integrador), el reconstructor (reconstructor), el solucionador de Riemann (riemann)

Entrada: $N_x, N_y, N_z, x_{\max}, x_{\min}, y_{\min}, y_{\max}, z_{\min}, z_{\max}, t_f, c, \Gamma, \eta_0, \kappa_0, \text{dato_inicial}, \text{BC}, \text{integrador}, \text{reconstructor}, \text{riemann}.$

Algoritmo 2: Asignación de memoria, de acuerdo al número de puntos ingresados, se realiza una asignación de memoria a los arreglos de variables que se usan de manera global en el código como las variables conservativas U , la presión p , la temperatura T , el flujo de calor q , la densidad de corriente J , los flujos $\text{Flux}_x, \text{Flux}_y, \text{Flux}_z$, los arreglos de la malla x, y, z , los arreglos para la integración en el tiempo rhs_U

Entrada: N_x, N_y, N_z

Salida: $U, p, T, \text{Flux}_x, \text{Flux}_y, \text{Flux}_z, x, y, z, \text{rhs}_U$

1. Creación y asignación de memoria de los arreglos globales.

Algoritmo 3: Creación de la malla, se generan los arreglos que definen la malla, y se calcula el intervalo de tiempo del primer subciclo de integración.

Entrada: $x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, N_x, N_y, N_z, x, y, z$

Salida: x, y, z

1. $dx = (x_{\max} - x_{\min}) / (N_x + 1),$

$$2. dy = (y_{max} - y_{min}) / (Ny + 1),$$

$$3. dz = (z_{max} - z_{min}) / (Nz + 1)$$

4. **for** $i = 1$ a $i = Nx$ **do**

5. **for** $j = 1$ a $j = Ny$ **do**

6. **for** $k = 1$ a $k = Nz$ **do**

$$7. \quad x(i, j, k) = x_{min} + i * dx,$$

$$8. \quad y(i, j, k) = y_{min} + j * dy,$$

$$9. \quad z(i, j, k) = z_{min} + k * dz$$

10. **end for**

Algoritmo 3: Dato inicial, se llama la subrutina encargada de definir las condiciones iniciales de la simulación, de acuerdo con el dato asignado en la entrada de parámetros. Las variables de los datos iniciales son las primitivas, ρ , $\vec{v}$, $\vec{B}$, p y a partir de ellas se calculan las conservativas y las demás variables necesarias para la evolución.

Entrada: dato_inicial

Salida: U

1. Lee rutina de dato inicial

2. Calcula U con los datos de las variables primitivas del dato inicial.

Algoritmo 4: Cálculo de variables primitivas, Se calculan todas las variables que dependen de

las variables conservativas, por ejemplo la corriente, flujo de calor, temperatura, la presión.

Entrada: U

Salida: p, T, q, J

1. Se calculan las variables primitivas a partir de las variables conservativas.
-

Algoritmo 5: Almacenar Datos, Se almacenan las variables conservativas.

Entrada: U(8,Nx, Ny, Nz)

1. Se almacenan los arreglos U en un archivo de texto.
-

Algoritmo 6: Reconstrucción de variables: Se construye el problema de Riemann a lado y lado de cada intercelda por medio del reconstructor definido en la entrada de parámetros.

Entrada: U, reconstructor

Salida: U_L, U_R

1. Se crean los valores a izquierda y derecha de acuerdo al método de reconstrucción de variables.
-

Algoritmo 7: Cálculo de flujos: De acuerdo con el aproximador de Riemann estipulado en la entrada de parámetros, se calculan los flujos numéricos en la mitad de las interceldas.

Entrada: U_L, U_R , riemann

Salida: Flux_x, Flux_y, Flux_z

1. Calcula los flujos de las interceldas con el método de riemann
-

Algoritmo 8: Integrador: Se calcula el siguiente valor de las variables conservativas utilizando los flujos recién calculados a través del método de integración elegido en la entrada de parámetros (integrador). Estos valores se calculan en todo el dominio numérico exceptuando los puntos de los bordes.

Entrada: U, integrador

Salida: U

1. $U_p = U$
2. Calcula rhs_U (lado derecho de la ecuación)
3. Calcula U

Algoritmo 9: Condiciones de borde: Según las condiciones de borde dadas en la entrada de parámetros (BC), se calculan los valores de las variables conservativas en los puntos del borde.

Entrada: U, BC

Salida: $U(:,0,:,:,,:,:), U(:,Nx,:,:,,:,:), U(:, :,0,:,:,,:), U(:, :, :,Ny, :,), U(:, :, :, :,0, :),$
 $U(:, :, :, :, :, Nz)$

1. Calcula los valores de las variables conservativas en los bordes del dominio numérico.

3.9. Características y limitaciones del Código

El código MAGNUS resuelve las ecuaciones de la magnetohidrodinámica resistiva con flujo de calor por medio del método de volúmenes finitos, usa los solucionadores de Riemann HLLE (Harten et al., 1983) y HLLC (Li, 2005) para problemas magnetohidrodinámicos e incluye el método ROE (Roe, 1986) para los problemas hidrodinámicos. Tiene implementados los reconstructores

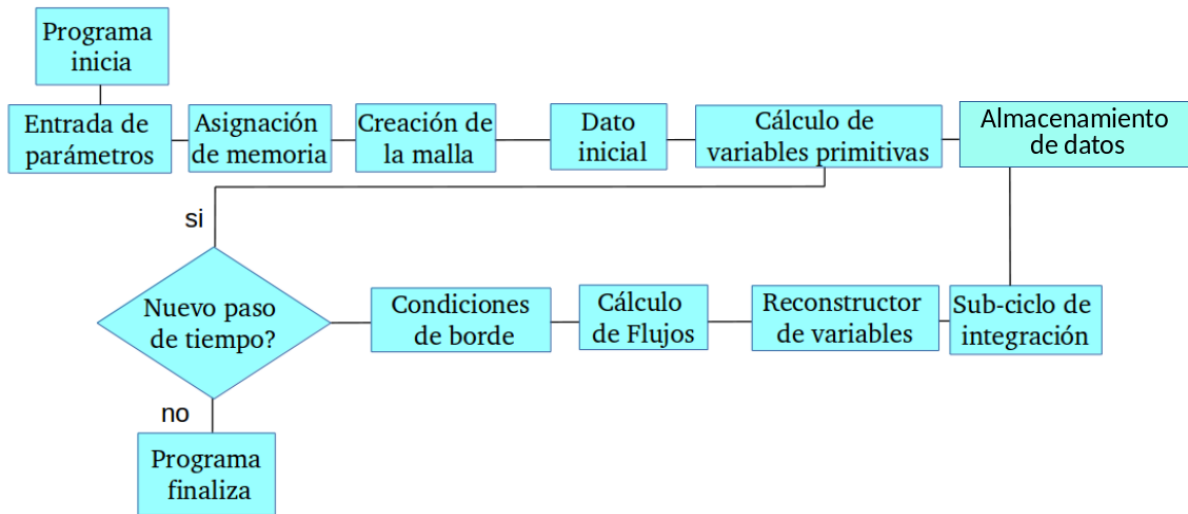


Figura 11. Esquema de los algoritmos implementados en el código MAGNUS

MINMOD (Roe, 1986), MC (van Leer, 1977a) y WENO5 (Titarev and Toro, 2004). Para la integración en el tiempo usa los métodos Runge-Kutta de tercer y cuarto orden, como también el método Iterative-Cranck-Nicholson de cuarto orden (Press et al., 1992). Para la preservación numérica de la divergencia del campo magnético tiene implementado el método de Transporte de Flujo Restringido (Tóth, 2000). Este código se construyó con base en los códigos CAFE (Lora-Clavijo et al., 2015a) Newtonian-CAFE (González-Avilés et al., 2015) y constituye un código diferente por la inclusión de los términos de resistividad y flujo de calor. La inclusión de dichos términos implicó la reestructuración de algunos algoritmos importantes del código, esto es, las rutinas del cálculo de flujos y el método de transporte de Flujo Restringido, por lo tanto se tuvieron que realizar todas las verificaciones de un código nuevo, es decir, realizar todas las pruebas numéricas hidrodinámicas, magnetohidrodinámicas y también realizar pruebas dedicadas exclusivamente a comprobar la implementación correcta de los términos de resistividad y flujo de calor. Adicionalmente al código

se le integró el método HLLC (Li, 2005) el cual tiene una precisión mucho mayor que el HLLE (Harten et al., 1983) pues este tiene en cuenta la onda de contacto en el problema de Riemann, mediante lo cual se puede captar mas estructura a pequeña escala sin necesidad de tanta resolución numérica.

El código resuelve las ecuaciones usando un paso de tiempo adaptativo, este paso de tiempo depende de las velocidades características del sistema de ecuaciones, y depende entre otros factores de la magnitud del campo magnético. Para magnitudes de campo magnético grandes, el paso de tiempo es pequeño, por lo tanto para resolver simulaciones con campos magnéticos grandes se necesita mucho mas tiempo que para otro tipo de simulaciones. De manera adicional, el uso de una malla uniforme consume bastante tiempo cuando se compara con el tiempo empleado por códigos que tienen implementado una malla adaptativa. Sin embargo esto no es una desventaja total, pues el método usado para la preservación de la divergencia del campo magnético es el mas confiable de todos y no podría usarse con otro tipo de mallas.

4. Esquema y Validación del Código

4.1. Pruebas Numéricas

Con el fin de analizar el rendimiento del código, en esta sección se presentan algunas pruebas numéricas para validar la implementación de los algoritmos. La primera prueba en una dimensión es la propuesta por Brio-Wu (Brio and Wu, 1988) en el régimen ideal, la cual es comparada con la solución exacta para calcular su convergencia. Para validar la implementación de los términos con resistividad se realiza una nueva versión de esta prueba agregando el efecto de la resistividad. Asimismo se repite la prueba en una tercera versión agregando el efecto del flujo de calor. Después, se presentan las siguientes pruebas en dos dimensiones: lámina de corriente (Hawley and Stone, 1995), el rotor MHD (Balsara and Spicer, 1999) y el de la interacción entre nube y choque (Dai and Woodward, 1998). También, con el fin de verificar la implementación de los términos resistivos se reproduce una prueba numérica de reconexión magnética propuesta por Jiang et al. (2012a). Además, para verificar la implementación de los términos de flujo de calor se realiza una prueba para la conducción térmica propuesta también por Jiang et al. (2012a), allí se modela el flujo de calor con la ecuación (68), el cual corresponde al modelo de calor usado comúnmente para la atmósfera solar.

De manera complementaria se presentan los resultados de la reproducción de dos evoluciones de propagación de ondas en la atmósfera solar, el primero es uno de oscilaciones transversales en bucles corales propuesto por Del Zanna et al. (2005), y el segundo es una simulación de ondas de gravedad en la atmósfera solar usando un perfil de temperatura realista desarrollado por

Murawski et al. (2013). Todas esas evoluciones se realizaron usando una malla numérica uniforme en coordenadas Cartesianas. Se emplea el resolutor de Riemann HLLC con distintos reconstructores, como se indica en cada caso en la tabla 4, donde también se muestra la información del dominio numérico, el número de puntos de la malla, el número de Courant y el índice adiabático Γ . Para la integración se usa el algoritmo Runge-Kutta de tercer orden. En cada una de las pruebas de mas de una dimensión, se muestran los valores máximos de la divergencia del campo magnético para verificar que no crezca debido a la acumulación de errores numéricos.

Resulta conveniente aclarar en este punto que la validación de estas simulaciones se hace de manera cualitativa comparando con los resultados reportados por otros códigos. Se logra una comparación exitosa cuando se observan comportamientos similares en los mismos tiempos que reportados en los demás códigos. Además, una medida cuantitativa tanto de los métodos numéricos implementados, como de la confiabilidad de la física de estas simulaciones, es la medición de la divergencia del campo magnético. Esta se mide en todas las simulaciones con el fin de garantizar que este valor se mantiene pequeño comparado con los valores de los campos magnéticos usados en cada caso. Por otra parte, también se hacen comparaciones cuantitativas solo es posible realizarlas en los casos unidimensionales. Este es el caso de la prueba Brio-Wu en la que se compara con la solución exacta y se mide el orden de convergencia de la solución. Adicionalmente, en los unidimensionales con resistividad y flujo de calor, donde no hay solución exacta se midió la autoconvergencia.

4.2. Brio-Wu

La prueba propuesta por Brio and Wu (1988) es un tubo de choque con campos magnéticos. Como en el caso de hidrodinámica, consiste en dos fluidos que tienen condiciones térmicas distintas a lado y lado de la interface que los divide, en el caso magnetohidrodinámico tiene adicionalmente una discontinuidad en una componente transversal del campo magnético. A continuación se describen tres versiones distintas de la misma prueba, la primera para el régimen ideal, la segunda agregando una resistividad constante en todo el dominio numérico y la tercera considerando el flujo de calor del modelo isótropo, descrito por la ecuación 67.

4.2.1. En el régimen ideal. La prueba desarrollada por Brio and Wu (1988) es la extensión del problema del tubo de choque de Sod (Sod, 1978) con campos magnéticos, con el cual se puede verificar la habilidad del código para capturar las ondas características de un problema MHD, es decir, de capturar las ondas de choque, rarefacción y de contacto. El estado inicial está dado por los siguientes valores adimensionales $p = 1$, $v_x = v_y = v_z = B_z = 0$, $B_x = 0.75$,

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{para } x < 0.5, \\ 0.125 & \text{para } x \geq 0.5, \end{cases} \quad (112)$$

$$B_y = \begin{cases} 1.0 & \text{para } x < 0.5, \\ -1.0 & \text{para } x \geq 0.5, \end{cases} \quad (113)$$

y consiste en dos estados constantes, al lado izquierdo y derecho del plano $x = 0$. Los parámetros usados en la simulación se presentan en la tabla 4. Los resultados se presentan en la figura 12, donde se muestra la densidad, la presión, las componentes de la velocidad v_x y v_y y la componente del campo magnético B_y en el tiempo $t = 0.1$. En la gráfica se puede ver la propagación de cinco ondas. Desde el lado izquierdo, la curva suave en $x \approx -0.7$ es una onda rápida expandiéndose a la izquierda, el pico pronunciado es una onda suave compuesta, en $x \approx 0.06$ se ve una onda de contacto, donde la densidad es discontinua pero la presión es constante, y en $x \approx 0.1$ se ve una onda de choque donde todas las variables presentan discontinuidad. En $x \approx 0.3$ viaja una onda rápida hacia la derecha. En esta figura se muestra adicionalmente la solución exacta no-regular desarrollada por Takahashi and Yamada (2013) para comparar los resultados numéricos. Además, con la solución exacta para la densidad, se calcula la norma L^1 del error

$$L_N^1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1,N} |\rho_i - \rho_i^{\text{exact}}|, \quad (114)$$

donde N es el número de puntos de la malla. Para calcular el orden del error, L^1 tiene que calcularse con $2N$ puntos, después, con ambos valores el orden del error está dado por

$$L_{\text{orden}}^1 = \log_2 \left(\frac{L_N^1}{L_{2N}^1} \right). \quad (115)$$

Estos dos valores se obtienen para cada uno de los resolvedores de Riemann y de los reconstructores implementados en el código. Los resultados se muestran en la tabla 1 para 50, 100, 200, 400, 800

y 1600 puntos de la malla. De estos resultados se puede concluir que los algoritmos tienen buena convergencia en general. Al comparar las distintas combinación de esquemas se puede ver que el método HLLC converge mejor que el HLLE y que las simulaciones realizadas con WENO5 son mejores que con MC y que con minmod(MM).

4.2.2. Prueba con resistividad. Se realiza una versión modificada de la prueba propuesta por Brio and Wu (1988). La variante planteada es la adición de una resistividad constante en todo el dominio numérico. Esto se realiza con el fin de detectar los efectos de dicho término en la simulación, además de observar cómo se comportan los algoritmos relacionados con la resistividad en este problema. En esta simulación se adoptan los mismos valores para las variables de estado que en el caso previo y se realizan distintas simulaciones variando la amplitud de la resistividad. En la figura 13 se muestra la densidad para varios valores de resistividad, η , con el fin de visualizar sus efectos en la dinámica de la solución. Se puede ver que para valores pequeños de la resistividad el efecto causado es una disipación de las continuidades, y con valores grandes la onda de contacto es desplazada hacia la izquierda, mientras que la onda de choque se mueve hacia la derecha, como se muestra en los recuadros de la figura 13.

Debido a que no existe una solución analítica para este problema, se calcula una auto-convergencia de la norma L^1 del error. Para esto, primero se encuentra el error entre las soluciones con N y $2N$ puntos, después se estima el error comparando las soluciones con $2N$ y $4N$ puntos, y con ambos valores se determina el orden del error con la expresión (115). Este proceso se repite para los valores de resistividad 0.01, 0.004 y 0.007, los cuales se muestran en la tabla 2. En esta tabla se puede ver que los algoritmos numéricos tienen buena convergencia en problemas relacionados

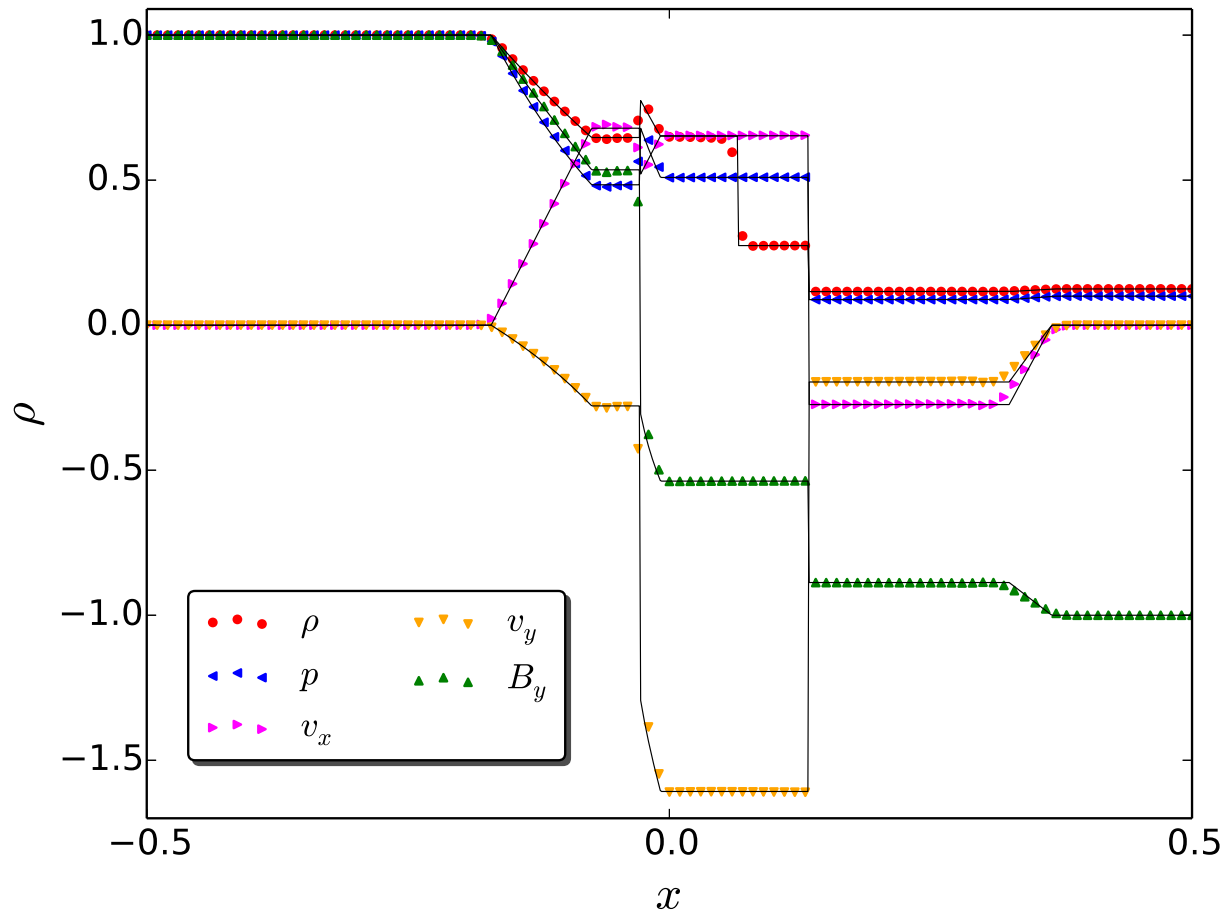


Figura 12. Comparación de la densidad, la presión, las componentes de la velocidad v_x , v_y y la componente del campo magnético B_y en la prueba propuesta por Brio and Wu (1988) para el tiempo 0.1. En el mismo gráfico, la línea sólida representa la solución exacta no-regular desarrollada por Takahashi and Yamada (2013). En esta gráfica se puede ver la propagación de cinco ondas entre las que se encuentra una onda de choque y una onda de contacto.

Métodos	N	L^1	L^1_{orden}
HLLC/MM	50	2.46×10^{-2}	-
	100	1.46×10^{-2}	0.75
	200	9.33×10^{-3}	0.65
	400	5.31×10^{-3}	0.81
	800	3.22×10^{-3}	0.72
	1600	1.88×10^{-3}	0.78
HLLC/MC	50	2.12×10^{-2}	-
	100	1.27×10^{-2}	0.74
	200	6.92×10^{-3}	0.87
	400	3.59×10^{-3}	0.95
	800	2.19×10^{-3}	0.72
	1600	1.27×10^{-3}	0.79
HLLC/WENO5	50	2.10×10^{-2}	-
	100	1.22×10^{-2}	0.79
	200	7.64×10^{-3}	0.67
	400	3.95×10^{-3}	0.95
	800	2.28×10^{-3}	0.80
	1600	1.27×10^{-3}	0.85
HLLE/MM	50	2.56×10^{-2}	-
	100	1.68×10^{-2}	0.60
	200	1.11×10^{-2}	0.60
	400	6.54×10^{-3}	0.77
	800	4.018×10^{-3}	0.70
	1600	2.37×10^{-3}	0.76
HLLE/MC	50	2.50×10^{-2}	-
	100	1.44×10^{-2}	0.80
	200	8.21×10^{-3}	0.81
	400	4.07×10^{-3}	1.01
	800	2.17×10^{-3}	0.90
	1600	1.19×10^{-3}	0.87
HLLE/WENO5	50	2.04×10^{-2}	-
	100	1.22×10^{-2}	0.74
	200	8.24×10^{-3}	0.56
	400	4.43×10^{-3}	0.90
	800	2.61×10^{-3}	0.76
	1600	1.52×10^{-3}	0.78

Tabla 1

Error L^1 para la densidad en el tiempo 0.1 de la prueba propuesta por Brio and Wu (1988). De estos resultados se puede concluir que la convergencia de las distintas combinaciones de algoritmos numéricos es bastante buena en general. Adicionalmente se observa que el método HLLC tiene

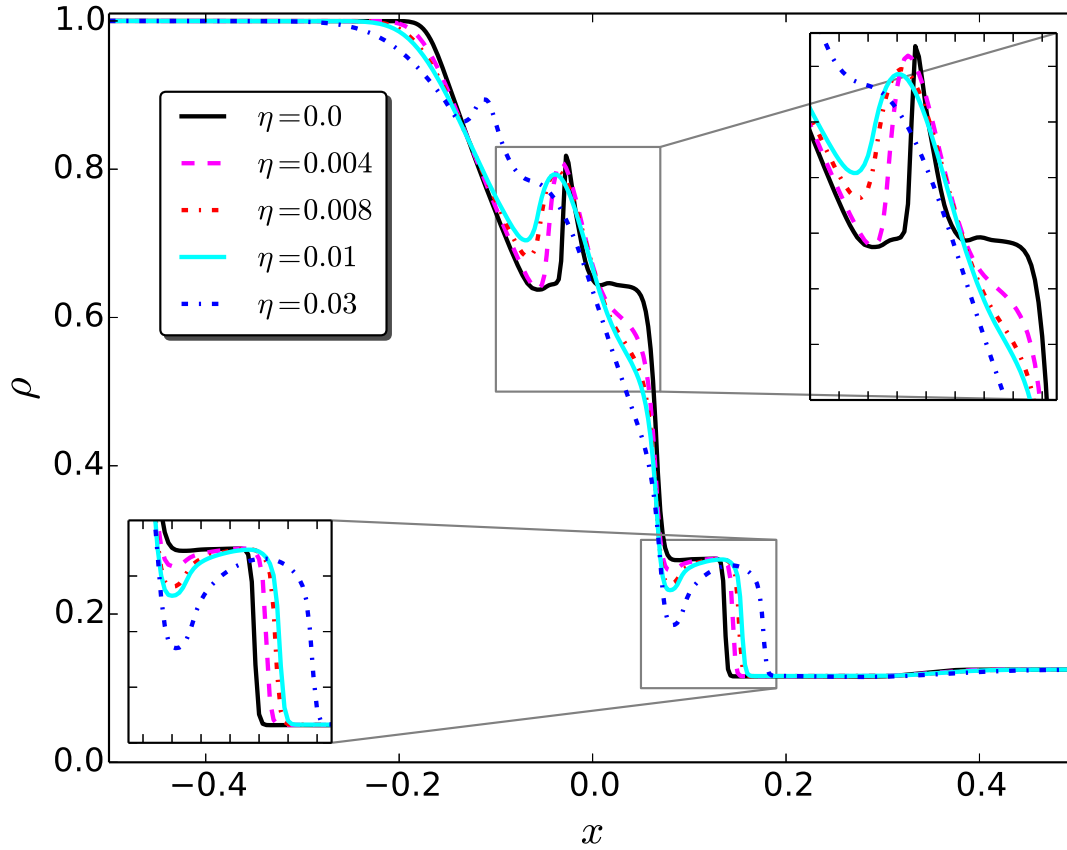


Figura 13. Comparación de la densidad en la prueba numérica propuesta por Brio and Wu (1988) considerando distintos valores para la resistividad. Esta gráfica corresponde al tiempo 0.1.

con la resistividad.

4.2.3. Prueba con flujo de calor isótopo. La segunda variación que se propone de la prueba propuesta por Brio and Wu (1988) es la adición de flujo de calor isótopo. Esto se realiza con el fin de encontrar los efectos de la conducción térmica en este problema en específico y de comprobar si la implementación del flujo de calor funciona en un problema magnetohidrodinámico complejo como este. El modelo de conducción térmica que se usa en estas simulaciones es el de la expresión (67), donde el flujo de calor es proporcional al gradiente de la temperatura. El dato

	L^1 error 1	L^1 error 2	L^1 orden
$\eta = 0.01$	1.41×10^{-3}	9.70×10^{-4}	0.54
$\eta = 0.004$	1.45×10^{-3}	8.09×10^{-4}	0.84
$\eta = 0.007$	1.36×10^{-3}	8.27×10^{-4}	0.71

Tabla 2

Errores de la prueba numérica propuesta por Brio and Wu (1988) adicionando una resistividad constante. En la tabla se compara la norma L^1 del error en la autoconvergencia para distintas amplitudes de la resistividad.

inicial de los fluidos es el mismo de la primera prueba y se usan distintos valores del coeficiente de conducción térmica en seis simulaciones diferentes. Los valores del coeficiente tomados son $\kappa = 0.0, 0.0002, 0.0006, 0.0008, 0.001$ y 0.002 .

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 14, donde se presenta el perfil de densidad para cada valor del coeficiente de conducción térmica. Se puede notar que el efecto del flujo de calor es una disipación y atenuación de las discontinuidades, mas notorio en la onda de contacto como se puede ver en el recuadro. No obstante no se presentan cambios generales en la topología de las demás ondas generadas. Debido a que en este caso no existe una solución analítica con la que se pueda realizar una convergencia, se calcula la auto-convergencia del error para tres valores del coeficiente de conductividad térmica $\kappa = 0.001, 0.0002, 0.0006$, los cuales son presentados en la tabla 3. En esta tabla se puede ver que la auto-convergencia es muy buena, mucho mejor incluso que la obtenida en las pruebas anteriores.

En este punto se finalizan las pruebas en una dimensión y se presentan a continuación algunas pruebas en dos dimensiones en el régimen ideal, es decir, sin considerar términos de disipación. Estas pruebas numéricas son estándar y se usan comunmente todas las validaciones de los códigos

	L^1 error 1	L^1 error 2	L^1 orden
$\kappa = 0.001$	1.68×10^{-3}	8.63×10^{-4}	0.96
$\kappa = 0.0002$	2.07×10^{-3}	1.06×10^{-3}	0.96
$\kappa = 0.0006$	1.86×10^{-3}	8.58×10^{-4}	1.08

Tabla 3

Auto-convergencia del error L^1 en la prueba propuesta por Brio and Wu (1988) con conductividad térmica para tres valores distintos del coeficiente κ . La auto-convergencia es notablemente buena, mucho mejor que en las otras dos versiones de la prueba.

para la magnetohidrodinámica.

4.3. Láminas de Corriente

La primera de las pruebas en dos dimensiones de MHD ideal es la de láminas de corriente propuesta por Hawley and Stone (1995). Esta prueba es importante ya que una lámina de corriente ocurre siempre que el campo magnético cambie de manera discontinua. Esta prueba se realiza con el fin de comprobar la robustez de los algoritmos de integración del código y es usada para la validación de la mayoría de códigos MHD. En esta prueba se presenta el fenómeno de reconexión magnética, el cual consiste en una reorganización de la topología de las líneas de campo en donde la energía magnética se convierte en energía cinética y térmica. En ausencia de resistividad una lámina de corriente no debería dispersarse, como no deberían reconectarse líneas de campo magnético a través de ella. Sin embargo, la reconexión magnética ocurre en este caso por la resistividad numérica.

El estado inicial de esta prueba numérica consiste en dos láminas de corriente que tiene los siguientes valores adimensionales para la densidad $\rho = 1$, la presión $p = 0.3$, las componentes de la velocidad $v_x = 0.1 \sin(2\pi y)$, $v_y = v_z = 0$, y las componentes de campo magnético $B_x = B_z = 0$,

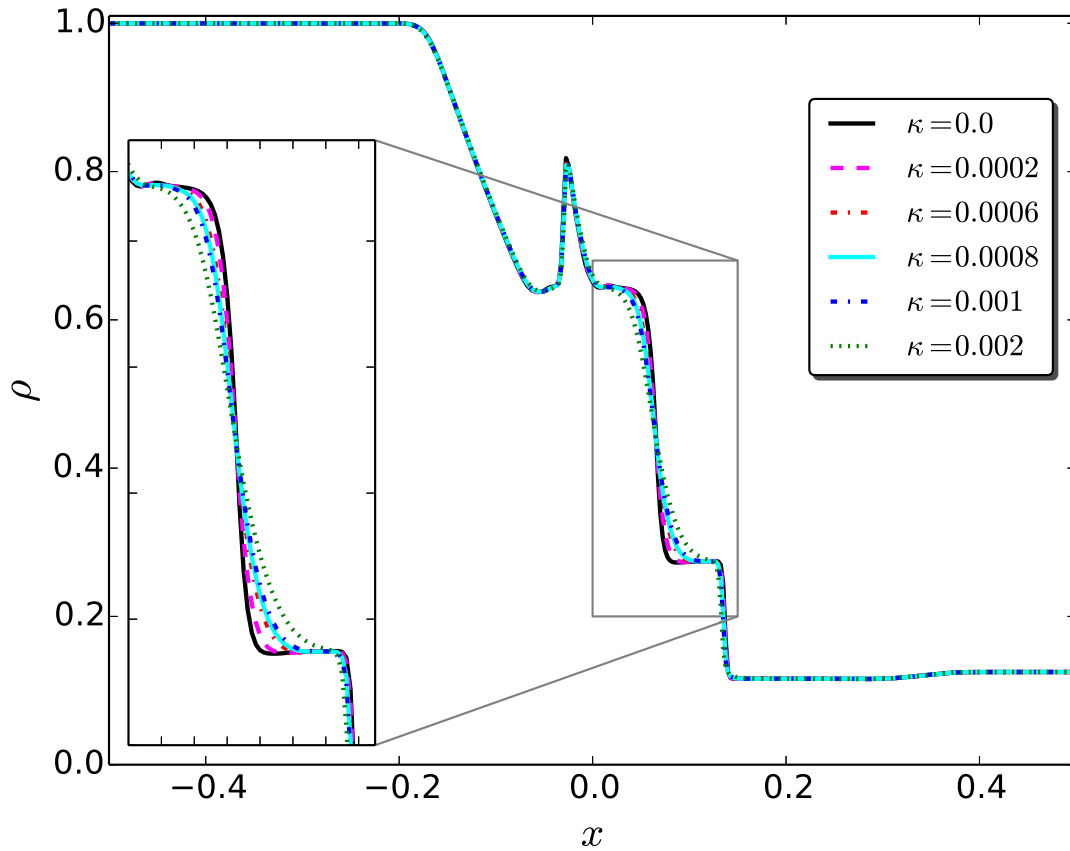


Figura 14. Comparación del perfil de densidad en la prueba propuesta por Brio and Wu (1988) en el tiempo $t = 0.1$ para distintos valores del coeficiente de conducción térmica. El efecto obtenido por el flujo de calor en estas simulaciones es la de atenuación de la onda de contacto, la cual se resalta en el recuadro de la figura.

y

$$B_y = \begin{cases} 1 & \text{para } |x| \geq 0.25, \\ -1 & \text{para } |x| < 0.25. \end{cases} \quad (116)$$

Los parámetros de la simulación numérica se listan en la tabla 4. Las condiciones de frontera son periódicas en los planos $|x| = 0.5$, $|y| = 0.5$, y de flujo saliente en $|z| = 0.5$. En la figura 15, se muestra un mapa de colores de la componente transversal (B_y) del campo magnético y las líneas de campo magnético en los tiempos $t = 0.5$, $t = 2.0$, $t = 3.0$ y $t = 5.0$, donde se puede ver la evolución de formación y crecimiento de islas magnéticas en el tiempo, lo cual causa una pérdida de energía magnética que se convierte en calor. Debido a que el plasma- β ⁸ es menor que 1, la reconexión crea zonas con mayor presión que lanzan ondas magnetoacústicas transversales al campo magnético. Uno de los objetivos de realizar esta prueba numérica es la de medir la robustez del código, pues en esta prueba el campo magnético toma topologías complejas y preservar $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ puede crear complicaciones. Los resultados obtenidos son muy similares a los mostrados en el trabajo original (Hawley and Stone, 1995), de aquí se concluye que los métodos implementados pueden describir problemas estándar no lineales. El valor máximo de divergencia del campo magnético en cada caso de la evolución se muestra en la figura 16 donde se puede ver que este tiene valores muy pequeños, comprobando el buen desempeño del algoritmo de transporte de flujo restringido en esta prueba

⁸ El plasma- β es un parámetro que mide si el fluido es dominado por la presión térmica o por la presión magnética, está definido como el coeficiente de las dos presiones plasma- $\beta = \frac{p}{p_{\text{mag}}} = \frac{2\mu_0 p}{B^2}$

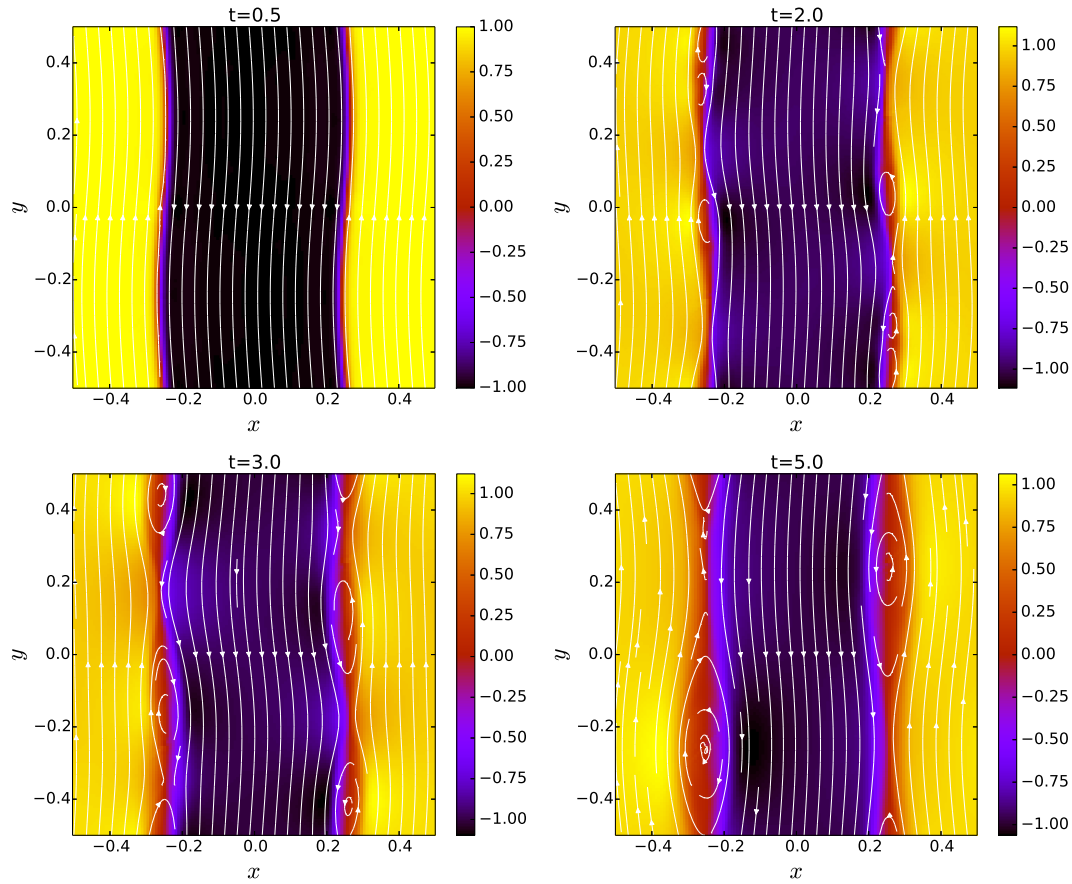


Figura 15. Líneas de campo magnético y mapas de colores de la componente transversal (B_y) del campo magnético para la prueba de láminas de corriente propuesta por Hawley and Stone (1995) para los tiempos $t = 0.5$, $t = 2.0$, $t = 3.0$ y $t = 5.0$. En estas gráficas se puede observar la formación y crecimiento de islas magnéticas causadas por la reconexión de las líneas de campo debido a errores numéricos y no a resistividad.

numérica.

4.4. Rotor MHD

La siguiente prueba implementada corresponde a la de un rotor MHD la cual fue propuesta por Balsara and Spicer (1999). En esta prueba se simula la propagación de ondas torsionales de Alfvén. La motivación física de este fenómeno fue sugerido por Brackbill (1985) en el marco del problema de la pérdida de momento angular a través de las ondas de Alfvén en la formación de

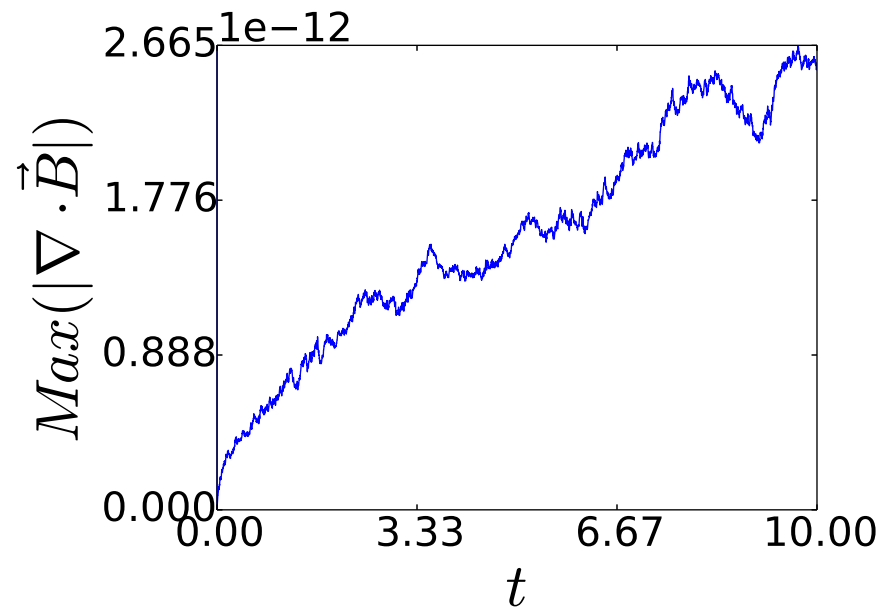


Figura 16. Valor máximo de la divergencia del campo magnético como función del tiempo para la prueba numérica Láminas de Corriente propuesta por Hawley and Stone (1995).

estrellas. En esta prueba se describe un cilindro que gira rápidamente en un fluido ligero (10 veces menor), con el estado inicial dado por las siguientes variables adimensionales: $p = 1$, $B_x = 5/\sqrt{4\pi}$,

$$B_y = B_z = v_z = 0,$$

$$\rho = \begin{cases} 10 & \text{para } r < r_0, \\ 1 + 9f(r) & \text{para } r_0 < r < r_1, \\ 1 & \text{para } r \geq r_1, \end{cases} \quad (117)$$

$$v_x = \begin{cases} -f(r)u_0(y - 0.5)/r_0 & \text{para } r \leq r_0, \\ -f(r)u_0(y - 0.5)/r & \text{para } r_0 < r \leq r_1, \\ 0 & \text{para } r \geq r_1, \end{cases} \quad (118)$$

$$v_y = \begin{cases} f(r)u_0(x - 0.5)/r_0 & \text{para } r \leq r_0, \\ f(r)u_0(x - 0.5)/r & \text{para } r_0 < r \leq r_1, \\ 0 & \text{para } r \geq r_1, \end{cases} \quad (119)$$

$$f(r) = (r_1 - r)/(r - r_0), r_1 = 0.115, r_0 = 0.1, \quad (120)$$

donde $f(r)$ es una función suave que conecta las dos regiones, r_0 y r_1 son el radio interior y exterior, respectivamente. Para la simulación se usan los valores de la tabla 4 y condiciones de frontera de flujo saliente en todas las direcciones. Los resultados se presentan en la figura 17, en la que se muestra el mapa de colores de la densidad con las líneas de campo magnético al lado izquierdo, y de la presión del fluido al lado derecho, ambas para el tiempo $t = 0.15$. La rotación inicial del sistema lanza ondas de Alfvén torsionales hacia el fluido del ambiente, y como resultado

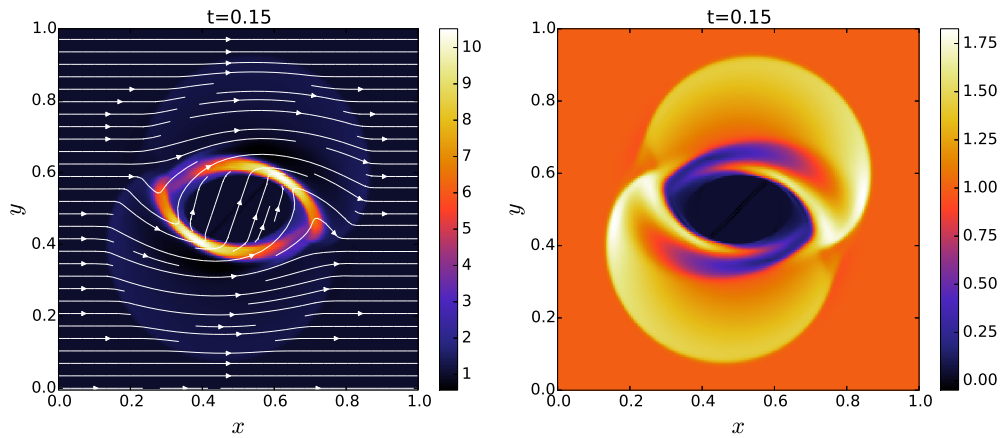


Figura 17. En la gráfica izquierda se presenta un mapa de colores de la densidad de masa junto con las líneas de campo magnético para la prueba del rotor MHD propuesta por Balsara and Spicer (1999) en el tiempo $t = 0.15$. La gráfica de la derecha corresponde a un mapa de colores de la presión del fluido en el mismo tiempo.

el momento angular del rotor disminuye. La presión magnética alrededor del rotor aumenta y comprime el rotor, dándole una forma oblonga. En la figura 18, se presenta el valor máximo de la divergencia del campo magnético como función del tiempo, en la cual se verifica que la divergencia del campo magnético no crece debido a errores numéricos.

4.5. Interacción Nube-Choque

Esta prueba consiste en la ruptura de una nube de fluido de densidad alta con una onda de choque muy fuerte. El estudio de este tipo de fenómenos tiene un interés desde el punto de vista astrofísico, como bien es descrito por Shin et al. (2008). Esta prueba fue propuesta por Dai and Woodward (1998) y ha sido reproducida por distintos códigos para comprobar el comportamiento de los algoritmos al modelar fluidos supersónicos. Aquí se ha implementado la versión de Tóth (2000), donde el estado inicial está dado por las siguientes variables adimensionales $B_x = 0 = v_y =$

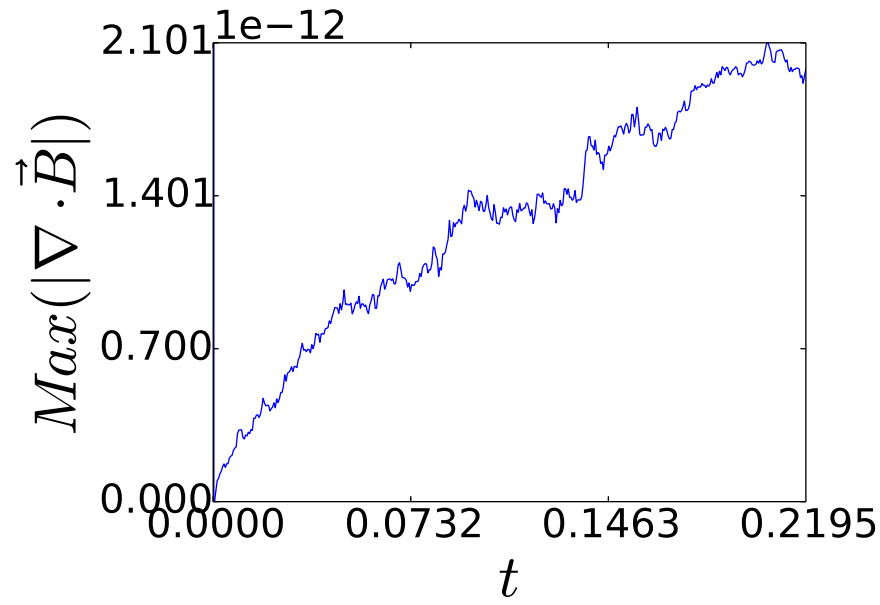


Figura 18. Valor máximo de la divergencia del campo magnético como función del tiempo para la prueba numérica del Rotor MHD propuesta por Balsara and Spicer (1999).

$$v_z = 0,$$

$$\rho = \begin{cases} 3.86859 & \text{para } x < 0.6, \\ 1 & \text{para } x > 0.6, \\ 10 & \text{para } r < 0.15, \end{cases} \quad (121)$$

$$v_x = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0.6, \\ -11.2536 & \text{para } x > 0.6, \end{cases} \quad (122)$$

$$p = \begin{cases} 167.345 & \text{para } x < 0.6, \\ 1 & \text{para } x > 0.6, \end{cases} \quad (123)$$

$$B_y = \begin{cases} 2.1826182 & \text{para } x < 0.6, \\ 0.56418958 & \text{para } x > 0.6, \end{cases} \quad (124)$$

$$B_z = \begin{cases} -2.1826182 & \text{para } x < 0.6, \\ 0.56418958 & \text{para } x > 0.6, \end{cases} \quad (125)$$

donde la nube está centrada en $x = 0.8$, $y = 0.5$ y tiene un radio de 0.15. La discontinuidad consiste en una onda de choque rápida y una discontinuidad rotacional en la componente B_z del campo magnético. Los resultados aquí mostrados fueron obtenidos usando la información de la tabla 4 y condiciones de frontera de flujo saliente en todas las caras. La nube está inicialmente en equilibrio hidrostático con el fluido de su alrededor, mientras que la onda de choque viaja hacia con dirección hacia la nube, colisiona con ella y comienza la interacción. De esta interacción se genera un arco de choque en el frente, un choque de cola en la parte trasera y estructuras de turbulencia como son las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz y Rayleigh-Taylor como se pueden observar en la figura 19, en la cual se muestra el mapa de colores de la densidad y las líneas de campo magnético para los

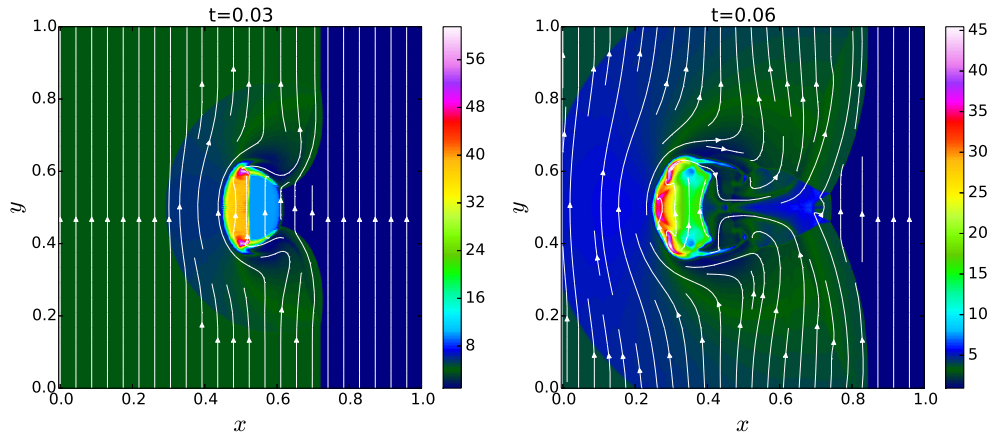


Figura 19. Mapa de colores de la densidad de masa y líneas de campo magnético en la prueba de interacción nube-choque propuesta por Dai and Woodward (1998) en los tiempos $t = 0.03$ y $t = 0.06$.

tiempos $t = 0.03$ y $t = 0.06$. El valor máximo de la divergencia del campo magnético es presentada en la figura 20.

4.6. Reconexión magnética

Con el fin de evaluar la implementación de los términos relacionados con la resistividad, se reproduce la prueba en dos dimensiones propuesta por Jiang et al. (2012a). La prueba consiste en determinar el efecto de la resistividad en el proceso de reconexión magnética. Como se mencionó en la sección 4.3, normalmente se asocia el fenómeno de la reconexión magnética a la presencia de resistividad eléctrica. La naturaleza de este fenómeno constituye uno de los temas mas importantes de la física del plasma, pues es determinante para entender el comportamiento de los plasmas reales tanto en el laboratorio como en sistemas astrofísicos (Schnack, 2009). El dato inicial está dado por las variables adimensionales $v_x = v_y = v_z = 0$, con una densidad de masa y presión de

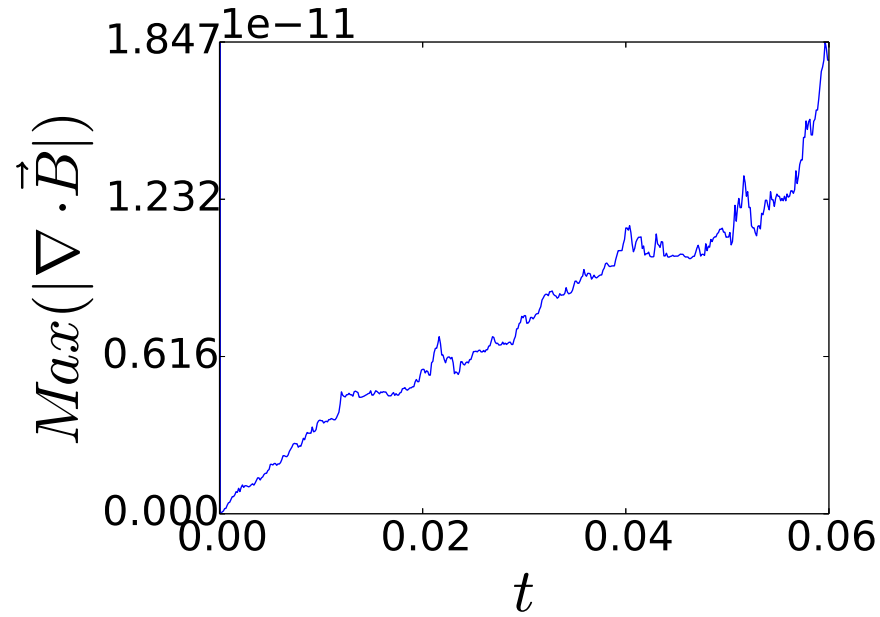


Figura 20. Valor máximo de la divergencia del campo magnético como función del tiempo para la prueba numérica interacción nube-choque propuesta por Dai and Woodward (1998)

valores constantes $\rho = 1$ y $p = 0.1$, y un campo magnético $B_x = 0$,

$$B_y = \begin{cases} -1 & \text{para } x < -L_r, \\ \sin(\pi x L_r / 2) & \text{para } |x| \leq L_r, \\ 1 & \text{para } x > L_r, \end{cases} \quad (126)$$

$$B_z = \begin{cases} 0 & \text{para } x < -L_r, \\ \cos(\pi x L_r / 2) & \text{para } |x| \leq L_r, \\ 1 & \text{para } x > L_r, \end{cases} \quad (127)$$

donde $L_r = 0.05$ es una longitud característica de una región con resistividad modelada de la siguiente forma

$$\eta = \frac{\eta_0}{4}(\cos(10\pi x) + 1)(\cos(40\pi y) + 1), \quad (128)$$

con una amplitud $\eta_0 = 0.05$ la cual está localizada en el dominio $(-L_r, L_r) \times (-4L_r, 4L_r) \times (0.0, 1.0)$. Para esta simulación se utiliza la información mostrada en la tabla 4 y condiciones de frontera de flujo saliente en todas las direcciones. En la figura 21 se presenta el mapa de colores de la presión con las líneas de campo magnético para los tiempos $t = 0.2$, $t = 1.0$ y $t = 1.5$, donde el fenómeno de reconexión magnética debido a la resistividad localizada puede observarse debido a la aparición de islas magnéticas. Para los primeros tiempos el fenómeno es difícilmente notable, sin embargo después empieza a intensificar. Para evaluar la tasa de reconexión se grafica en la figura 22 la tasa entre la velocidad de entrada v_{in} y la velocidad de Alfvén, esto es v_{in}/c_a , que define la tasa de reconexión según Petschek (1964) y es calculada a lo largo de la línea $y = 2.5$, $|x| < 0.25$, $z = 0$. Aquí se encuentra que la tasa tiende a tener un valor máximo alrededor de $t = 1$ a medida que la resistividad aumenta. Como se esperaría, sin resistividad no existe reconexión magnética, este caso se denota con la línea sólida negra. Sin embargo, a medida que la magnitud de la resistividad aumenta, la tasa es mas o menos la misma. Finalmente, para verificar la violación de la ley de Gauss para el campo magnético se grafica el máximo valor de la divergencia del campo magnético en la figura 23.

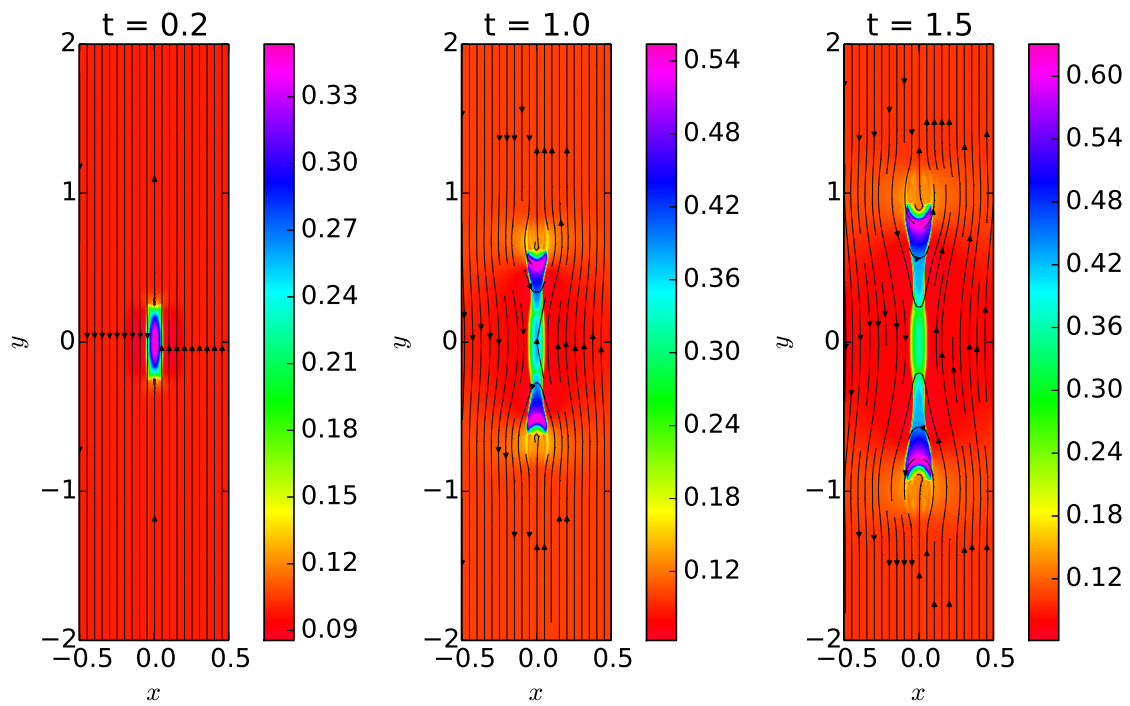


Figura 21. Mapa de presión térmica y líneas de campo magnético para la prueba de reconexión magnética propuesta por Jiang et al. (2012a) en los tiempos $t = 0.2$, $t = 1.0$ y $t = 1.5$.

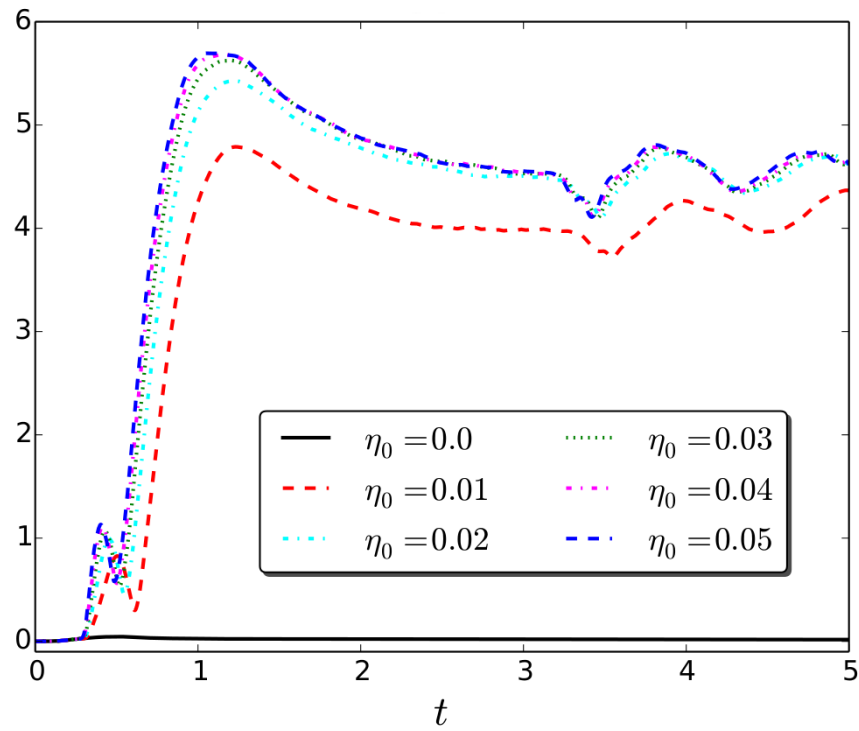


Figura 22. Tasa de reconexión magnética de Petschek para diferentes valores de la resistividad en la prueba numérica Reconexión magnética propuesta por Jiang et al. (2012a).

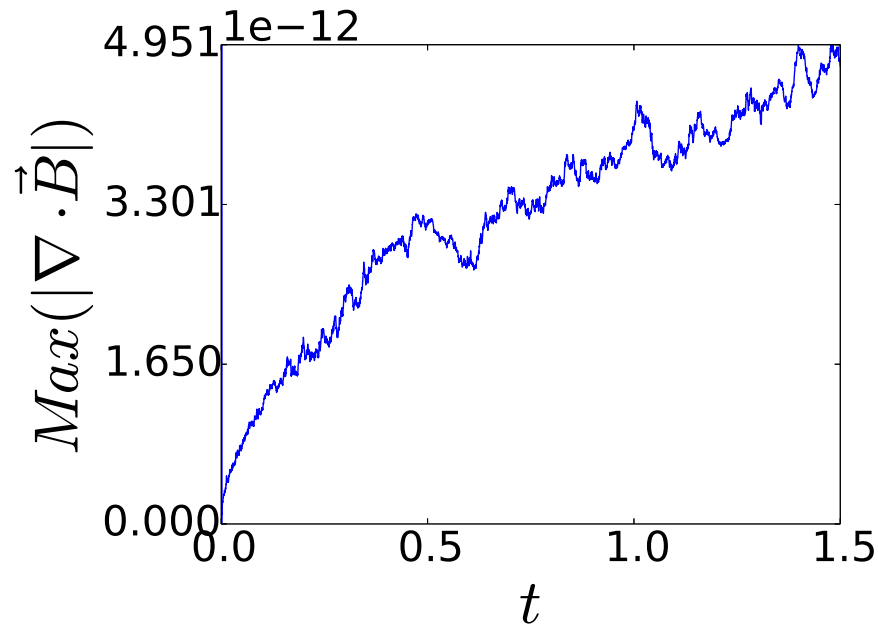


Figura 23. Valor máximo de la divergencia del campo magnético como función del tiempo para la prueba numérica Reconexión magnética propuesta por Jiang et al. (2012a).

4.7. Conducción Térmica

Para la evaluación del modelo de flujo de calor conducido por las líneas de campo magnético descrito en la expresión (68), se ha implementado la prueba de conducción térmica propuesto por Jiang et al. (2012b). Este modelo para la conducción de calor se usa para describir plasmas totalmente ionizados, como el plasma en la atmósfera solar. En este caso la conducción de calor se produce únicamente en dirección del campo magnético (Spitzer, 1956). La configuración inicial consiste en una pequeña región de alta temperatura en el borde del dominio. En tiempos posteriores esta región es advectada por las líneas de campo magnético. El estado inicial tiene las siguientes variables adimensionales, presión constante $p = 0.1$, $v_x = v_y = v_z = 0$, y tiene un campo magnético

$B_x = B_y = 1$, $B_z = 0$, el cual está orientado formando un ángulo de 45° . La densidad es

$$\rho = \begin{cases} 0.01 & \text{para } |x| < 0.1 \text{ y } y = -0.5, \\ 0.1 & \text{para } |x| \geq 0.1, \end{cases} \quad (129)$$

y describe una región pequeña de temperatura alta localizada en el borde inferior del dominio. La información usada para la simulación se encuentra en la tabla 4. Las condiciones son periódicas en $|x| = 0.5$, son fijas en la cara inferior $y = -0.5$ y de flujo saliente en las demás. Los resultados se muestran en la figura 24, donde la temperatura se muestra en los tiempos $t = 0.01$, $t = 0.12$ y $t = 0.4$. Se puede ver que el flujo de calor advecta el gradiente de temperatura a lo largo de las líneas de campo magnético. Adicionalmente, la violación máxima de la divergencia del campo magnética es presentada en la figura 25.

4.8. Oscilaciones transversales en un Bucle Coronal

Se presenta la reproducción de un problema de física solar propuesto por Del Zanna et al. (2005) que consiste en la propagación de dos pulsos alfvénicos en un bucle coronal. Las oscilaciones transversales de los bucles coroneles son observados usualmente en las líneas EUV (Roberts, 2000), las cuales son producidas por fulguraciones cercanas a los bucles coroneles. El mecanismo responsable por el amortiguamiento de estas oscilaciones es comúnmente interpretado como modos *kink* estacionarios, sin embargo parecen ajustarse mejor a un modelo de propagación de ondas. En dicho trabajo se modelan dos ondas de Alfvén que se propagan en una arcada magnética la cual es modelada como un bucle de dos dimensiones, inmersa en un modelo estratificado de la

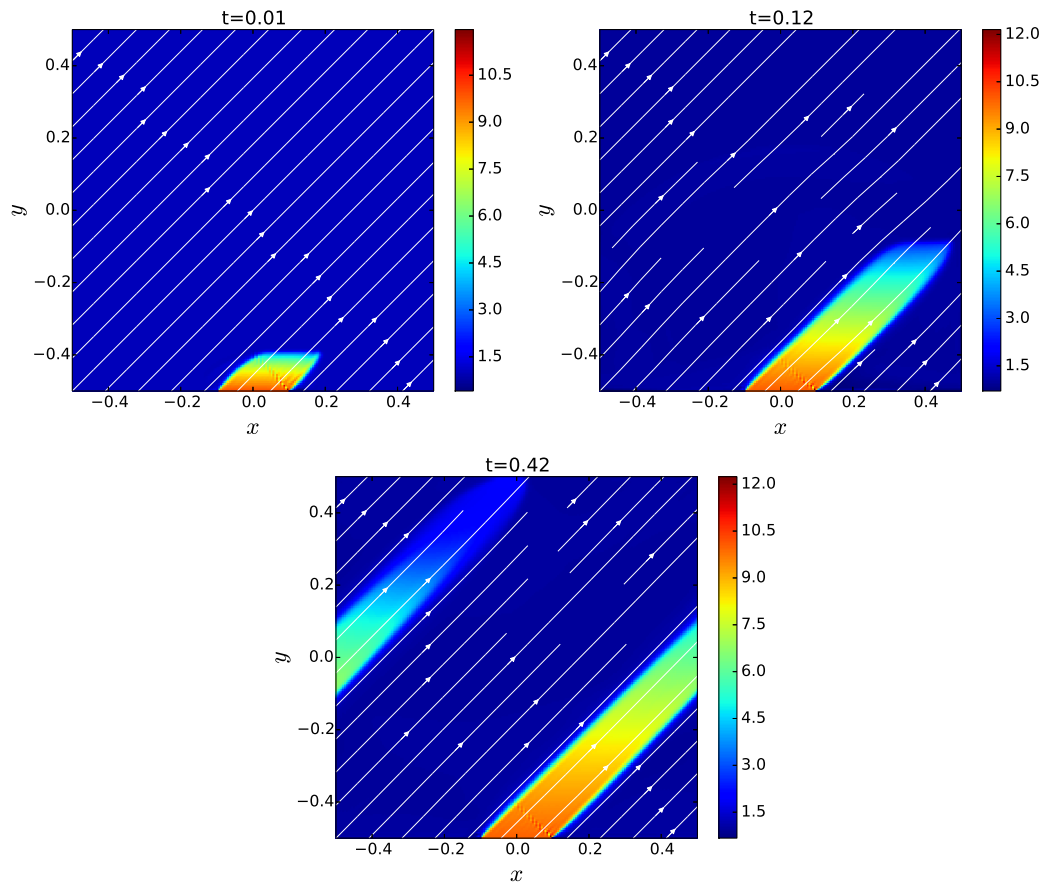


Figura 24. Mapa de colores de la temperatura y líneas de campo magnético en los tiempos $t = 0.01$, $t = 0.12$ y $t = 0.42$ para la prueba de conducción térmica propuesta por Jiang et al. (2012a).

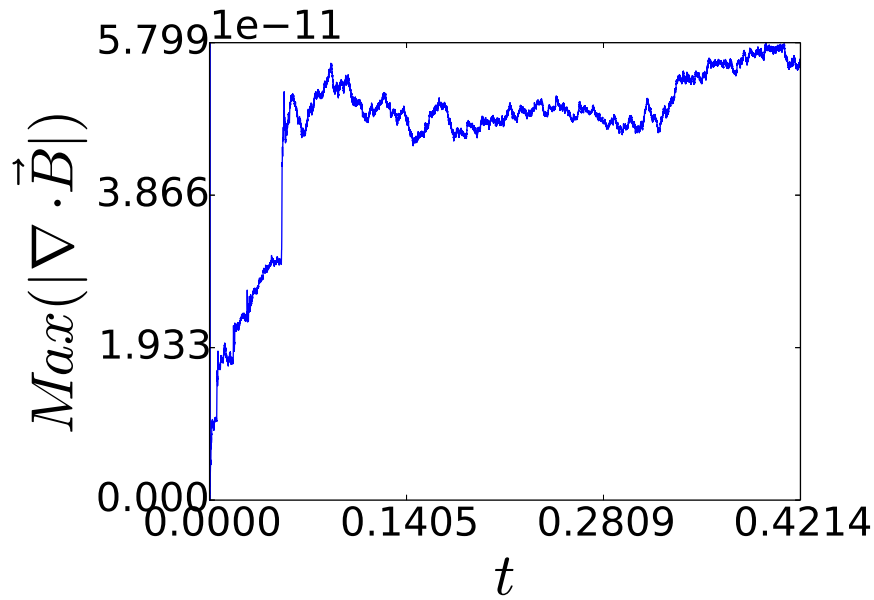


Figura 25. Valor máximo de la divergencia del campo magnético como función del tiempo para la prueba numérica de conducción térmica propuesta por Jiang et al. (2012b)

temperatura de la atmósfera solar. El dato inicial del campo magnético está dado por $B_y = 0$,

$$B_x = B_0 \cos(kx) \exp(-kz), \quad (130)$$

$$B_z = -B_0 \sin(kx) \exp(-kz), \quad (131)$$

donde $B_0 = 40$ G es la magnitud del campo magnético a nivel fotosférico en los puntos $x = \pm L/2$.

La frecuencia angular es $k = \pi/L$ y L es una longitud característica de $50 \text{ Mm} = 50 \times 10^3 \text{ km}$. Por otro lado, la ecuación de equilibrio hidrostático en este caso está dada por

$$\frac{dp_h}{dz} + \rho_h g = 0, \quad (132)$$

donde el subíndice h denota que es un valor del estado hidrostático. Con la ecuación de estado, la presión puede escribirse como $p = 2k_B \rho T / m_p$, donde m_p es la masa del protón y k_B es la constante de Boltzmann. La presión puede resolverse de la ecuación (132)

$$p_h(z) = p_h(z_0) \exp \left[-\frac{m_p g}{2k_B} \int_{z_0}^z \frac{dz'}{T_h(z')} \right], \quad (133)$$

donde el perfil de temperatura desde la fotosfera hasta la corona es modelado por la función escalón

$$T_h(z) = \frac{1}{2}(T_{\text{cor}} + T_{\text{phot}}) + \frac{1}{2}(T_{\text{cor}} - T_{\text{phot}}) \tanh \left(\frac{z - z_t}{z_w} \right), \quad (134)$$

la cual localiza la región de transición a un altura de $z_t = 2$ Mm con un espesor de $z_w = 0.2$ Mm. La temperatura en la corona y la fotosfera es $T_{\text{cor}} = 1.2 \times 10^6$ K y $T_{\text{phot}} = 6000$ K, respectivamente. El valor de la densidad en la base de la corona es $\rho = 10^{-15}$ g cm⁻³ y la magnitud de la aceleración de la gravedad es $g = 274$ m s⁻². El fluido está en reposo inicialmente $v_x = v_z = 0$, pero su velocidad transversal es perturbada por un pulso gaussiano localizado en $x = 0$ y $z = L/2$ dado por

$$v_y = \frac{0.1 v_0}{1 + \left\{ [x^2 + (z - L/2)^2] / r_0^4 \right\}}, \quad (135)$$

donde $r_0 = 1$ Mm y la velocidad de Alfvén en la corona es $v_0 = 1$ Mm/s. Para la simulación, se usa la información listada en la tabla 4 y condiciones de frontera de flujo saliente en todas las caras. En la figura 26, se presenta la componente transversal de la velocidad v_y (km/s) y las líneas

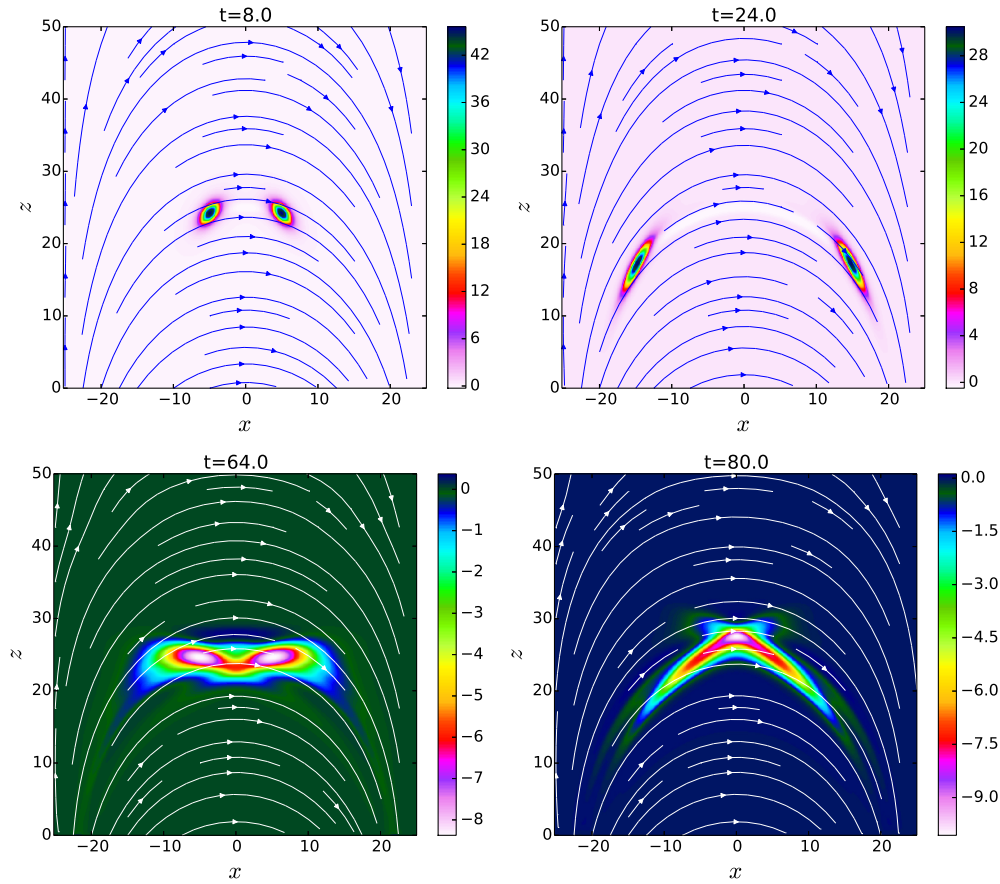


Figura 26. Velocidad transversal v_y (km/s) y líneas de campo magnético para la prueba de oscilaciones transversales en un bucle coronal en los tiempos $t = 8$ s, $t = 24$ s, $t = 64$ s y $t = 128$ s.

de campo magnético en los tiempos $t = 8$ s, $t = 24$ s, $t = 64$ s y $t = 80$ s. En estas gráficas se puede ver la evolución de la propagación de un par de pulsos alfvénicos a lo largo de las líneas de campo magnético y los modos rápidos y lentos de las ondas magnetoacústicas en los arcos exterior e interior. Además se observa su reflexión con la superficie inferior tal como fue descrito por Del Zanna et al. (2005). La máxima violación de $\nabla \cdot \vec{B}$ (Tesla/km) es presentada en la figura 27, donde se puede ver cómo su valor inicial no es cero absoluto ya que es calculada con la aproximación de diferencias finitas con los valores iniciales del campo magnético (130) y (131).

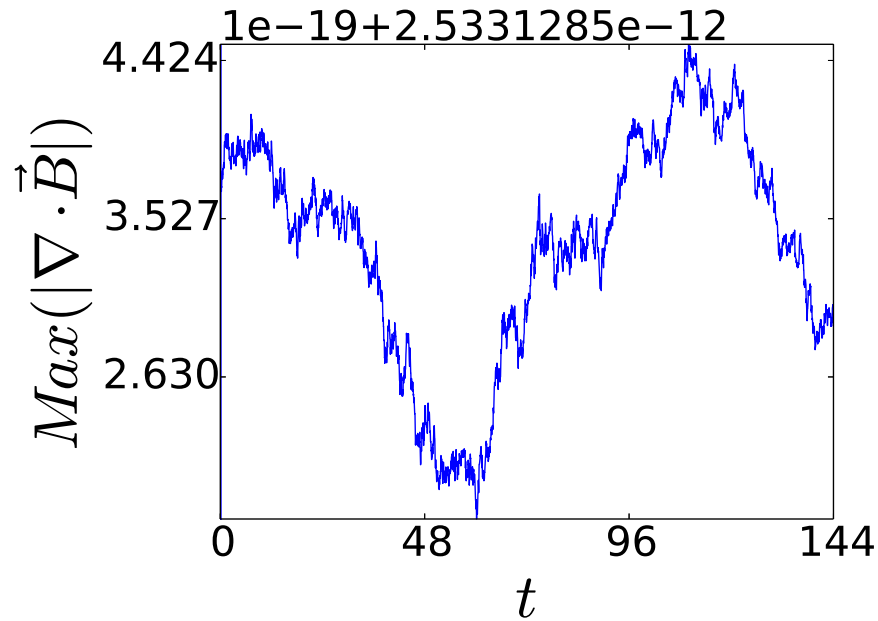


Figura 27. Valor máximo de la divergencia del campo magnético (Tesla/km) como función del tiempo para la prueba numérica Oscilaciones transversales propuesta por Del Zanna et al. (2005)

4.9. Ondas de gravedad MHD

En esta sección se presenta la reproducción de una simulación en tres dimensiones de un problema de física solar propuesto por Murawski et al. (2013), el cual fue desarrollado por los autores por medio del código Flash (Fryxell et al., 2000). El problema consiste en el modelado de ondas de gravedad magnetohidrodinámicas en una atmósfera solar estratificada las cuales son producidas por un pulso de velocidad en la base de la atmósfera. El estado inicial está dado por un campo magnético constante en la dirección z

$$\vec{B} = B_0 \hat{e}_z, \quad (136)$$

con una magnitud $B_0 = 23$ G. La ecuación de equilibrio está dada por (132) y a través de la ecuación de estado para esta configuración, la presión puede calcularse como $p = k_B \rho T / (1.24 m_p)$. De manera similar que la prueba anterior, la presión del estado hidrostático puede resolverse integrando la temperatura como

$$p_h(z) = p_h(z_0) \exp \left[-\frac{m_p g}{k_B} \int_{z_0}^z \frac{dz'}{T_h(z')} \right], \quad (137)$$

donde p_0 es la presión en el nivel de referencia $z_0 = 10$ Mm en la corona solar. Asumiendo el perfil de temperatura semiempírico VAL-IIC desarrollado por Vernazza et al. (1981), la presión y densidad pueden obtenerse para el estado de equilibrio. La perturbación de la velocidad es un pulso gaussiano vertical

$$v_z = A_v \exp([x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]/\omega^2), \quad (138)$$

con amplitud $A_v = 3$ km/s, espesor $\omega = 100$ km el cual está localizado en $x = 0$ y $z_0 = 500$ km. Para realizar la simulación se utiliza la información dada en la tabla 4 con condiciones de frontera fijas en las caras $z = -0.25$ Mm, $z = 5.75$ Mm, y de flujo saliente en las demás. En la figura 28, se grafica la velocidad vertical v_z en los tiempos $t = 35.71$ s, $t = 71.43$ s, $t = 107.14$ s y $t = 157.14$ s en el plano $y = 0$. En estas gráficas se puede rastrear la propagación longitudinal de ondas de gravedad magnetoacústicas causadas por la perturbación vertical. Los modos rápido y lento están acoplados y se expanden cuasi-isotrópicamente a través de la dirección z . Finalmente, la máxima

violación de la divergencia del campo magnético (en Tesla/km) es presentada en la figura 29.

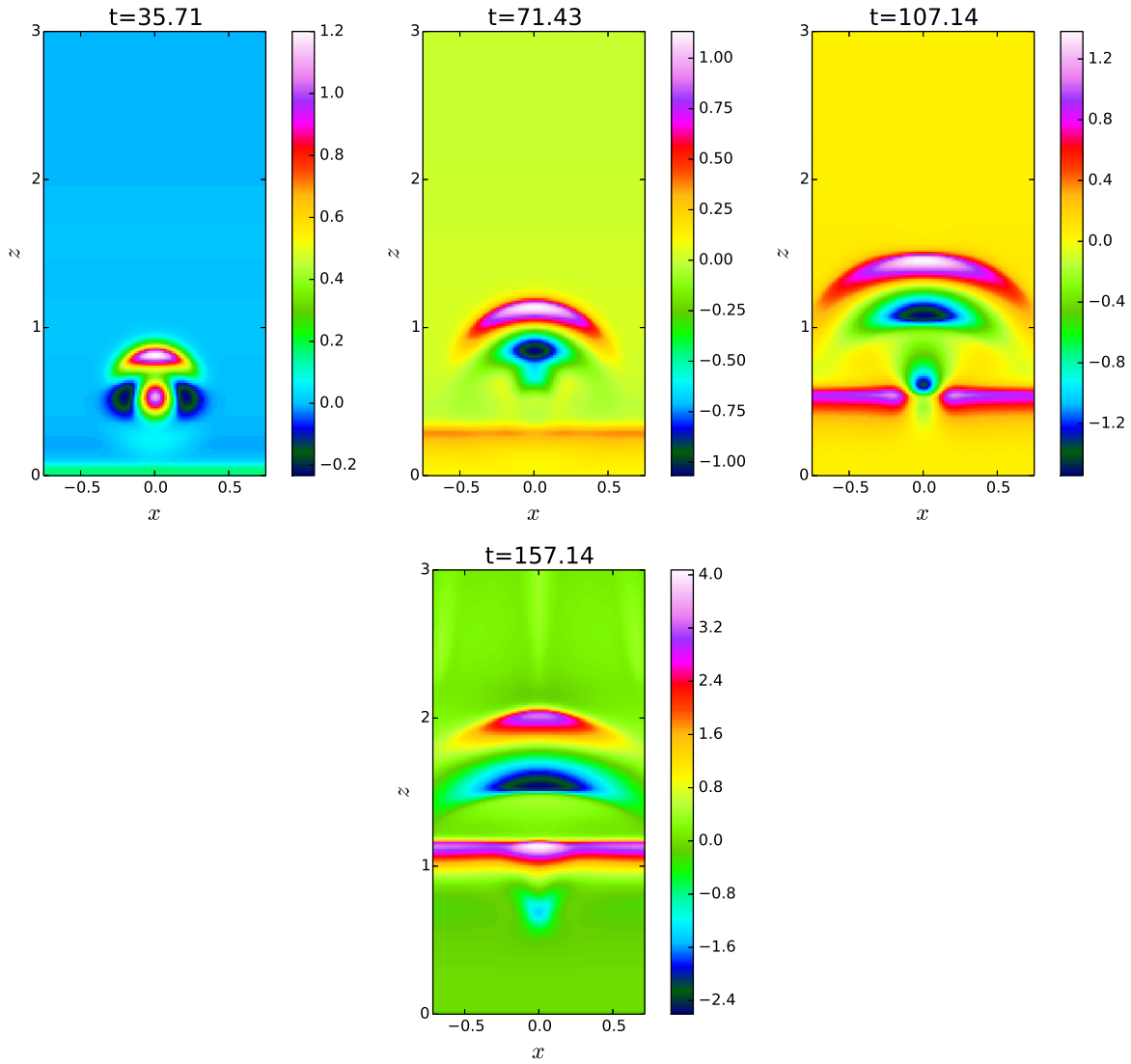


Figura 28. Mapas de colores de la velocidad vertical v_z (km/s) en el problema de ondas de gravedad magnetoacústicas en los tiempos $t = 35.71$ s, $t = 71.43$ s, $t = 107.14$ s y $t = 157.14$ s en el plano $y = 0$.

Prueba	Dominio	Número de puntos	C_{eff}	Γ	Reconstructor
Brio Wu	$[-0.5, 0.5]$ $\times [-0.5, 0.5]$ $\times [-0.5, 0.5]$	$800 \times 4 \times 4$	0.25	5/3	All
Lamina de Corriente	$[-0.5, 0.5]$ $\times [-0.5, 0.5]$ $\times [-0.5, 0.5]$	$128 \times 128 \times 4$	0.25	5/3	WENO5
Rotor MHD	$[0.0, 1.0]$ $\times [0.0, 1.0]$ $\times [0.0, 1.0]$	$200 \times 200 \times 4$	0.1	1.4	MINMOD
Interacción Nube-Choque	$[0.0, 1.0]$ $\times [0.0, 1.0]$ $\times [0.0, 1.0]$	$400 \times 400 \times 4$	0.05	5/3	WENO5
Reconexión magnética	$[-0.5, 0.5]$ $\times [-2.0, 2.0]$ $\times [0.0, 1.0]$	$200 \times 800 \times 4$	0.05	5/3	WENO5
Conducción térmica	$[-0.5, 0.5]$ $\times [-0.5, 0.5]$ $\times [0.0, 1.0]$	$200 \times 200 \times 4$	0.05	5/3	MINMOD
Oscilaciones transversales	$[-25.0, 25.0]$ $\times [0.0, 1.0]$ $\times [0.0, 50.0]$	$400 \times 4 \times 400$	0.25	5/3	MINMOD
Ondas de gravedad MHD	$[-0.75, 0.75]$ $\times [-0.75, 0.75]$ $\times [-0.25, 5.75]$	$105 \times 105 \times 210$	0.25	1.4	MINMOD

Tabla 4

Parámetros usados para las simulaciones de las pruebas numéricas de la validación del código MAGNUS. Para prueba se muestra la dimensión de la malla numérica, el número de puntos usado, el factor de Courant C_{eff} , el índice adiabático Γ de la ecuación de estado 4 y el método para la reconstrucción de variables.

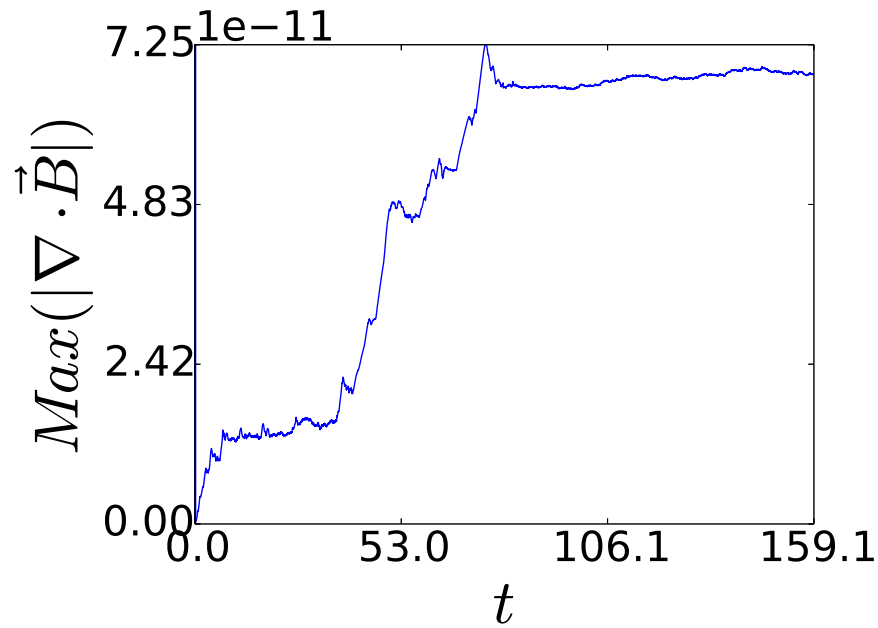


Figura 29. Valor máximo de la divergencia del campo magnético (Tesla/km) como función del tiempo para la prueba numérica de Ondas de gravedad propuesta por Murawski et al. (2013).

5. Emergencia de un *blob* de plasma

Este capítulo está dedicado a un estudio numérico que se realiza con el código MAGNUS (Navarro et al., 2017), descrito en el capítulo 3. En este proyecto se realiza un modelo numérico de la emergencia de un *blob* magnético en un agujero coronal solar. Un *blob* es una estructura de campo magnético circular. Este *blob* puede estar asociado con granulación y por lo tanto tiene un campo magnético de baja magnitud. Se realizan simulaciones en la aproximación 2.5 dimensiones teniendo en cuenta los efectos de la resistividad eléctrica y el modelo anisótropo de conducción térmica. Como resultado de la interacción del *blob* magnético con el campo magnético del ambiente, las líneas de campo magnético se reconectan, de esta forma el *blob* que inicialmente tiene una forma

circular toma una forma ovalada y después se deforma totalmente con el paso del tiempo. Adicionalmente, este proceso lanza un flujo de plasma caliente vertical y en respuesta, la cromosfera aumenta su temperatura. Se realiza un estudio paramétrico variando la magnitud del campo magnético del *blob* y se observa la respuesta en el calentamiento neto de la cromosfera. Este proyecto está inspirado en simulaciones mas realistas realizadas con el código de dos fluidos JOANNA, donde fueron observados *blobs* de plasma con velocidades ascendentes producidas por granulación. De los resultados numéricos se concluye que si el movimiento convectivo expulsa un *blob* magnético hacia la fotosfera, este proceso puede generar una dinámica compleja en las regiones superiores de la atmósfera solar, y que los flujos ascendentes asociados pueden ser una fuente de calentamiento de la cromosfera y posiblemente de la corona. Los resultados de este proyecto fueron publicados en Navarro et al. (2019).

5.1. *Blobs* magnéticos producidos por granulación

El transporte y la disipación de la energía en las capas de la atmósfera solar han sido objeto de intensivas investigaciones desde hace mucho tiempo. Estos trabajos son motivados por la importancia de entender los mecanismos responsables del calentamiento de la corona. Dicho mecanismo debe compensar las pérdidas por conducción térmica, por radiación y por viento solar estimados teóricamente por Withbroe and Noyes (1977). Adicionalmente, se cree que la naturaleza de las altas temperaturas en la corona es de origen magnético y que la fuente de energía se encuentra en los movimientos de plasma de la superficie (Arregui, 2015). Diversos mecanismos físicos han sido considerados como fuentes de dicho calentamiento por distintos autores, entre esos está la disipación de energía magnética por reconexión magnética (van Ballegoijen, 1986), las cascadas de

corriente (Parker, 1963), la turbulencia viscosa (van Ballegooijen, 1986), el enlazamiento magnético (Peter et al., 2004), la disipación de energía de ondas (Alfvén, 1947; Ionson, 1978; Heyvaerts and Priest, 1983; Goossens, 1991; Hood et al., 1997), y el ciclo de flujo de masa entre la cromosfera y la corona (McIntosh et al., 2012).

Numerosos modelos numéricos se han desarrollado con el fin de estudiar la contribución de diferentes configuraciones de campo magnético (e.g. De Moortel and Browning, 2015). Particularmente, la emergencia de flujos magnéticos desde la zona de convección hacia las capas superiores de la atmósfera, modeladas por tubos de flujo magnético con *twist*, los cuales son susceptibles a la inestabilidad de flotabilidad de Parker, son asociadas a diversos fenómenos solares como la producción de fulguraciones, eyecciones de masa coronal y *jets* (Cheung and Isobe, 2014). Como resultado de los avances en la toma de datos observacionales y la constante mejoría de simulaciones numéricas, esta área activa de investigación ha llevado a determinar diversas estructuras magnéticas, ver por ejemplo los trabajos de Toriumi et al. (2011), Magara and Longcope (2003). La emergencia de flujo magnético ha sido estudiada principalmente en regiones activas, donde los tubos de flujo son impulsados por fuertes campos magnéticos convectivos. En regiones tranquilas, la emergencia de flujos magnéticos también ha sido detectada a menores tasas que en las regiones activas. Sin embargo, los procesos físicos parecen ser similares en ambos tipos de regiones (Vargas Domínguez et al., 2012).

Enmarcado en el contexto del estudio de emergencia del flujo magnético de baja magnitud, se propone en este proyecto un nuevo mecanismo de flujo emergente. La idea de este proyecto se basa en la evidencia de la existencia de *blobs* magnéticos en la zona convectiva y en la fotosfera

los cuales tienen velocidades ascendentes. Esto sugiere que es posible encontrar emergencia de estructuras de campo magnético de magnitudes pequeñas, lo cual es muy llamativo pues la mayoría de estudios realizados en esta área se han desarrollado con campos magnéticos fuertes. Dichos *blobs* se encontraron en simulaciones de granulación obtenidas por el grupo de física Solar de la Universidad Maria Curie-Skłodowska de Lublin, Polonia por medio del código JOANNA. El código JOANNA (Wójcik et al., 2018) describe la evolución del plasma constituido por dos especies, principalmente de fluido ionizado (iones + electrones) y fluido eléctricamente neutro (átomos neutros y moléculas), y considera los efectos de términos no adiabáticos como la conducción térmica, convección térmica y radiación.

En las simulaciones mencionadas se modela la atmósfera solar con un dato inicial de equilibrio (en $t = 0$ s) permeada por un campo magnético vertical de magnitud de 5 G. En una etapa avanzada de la evolución, cuando las corrientes descendentes de granulación han sido producidas, se encuentran algunas formaciones magnéticas interesantes en la zona convectiva y en la fotosfera. Los movimientos convectivos en esta zona deforman el campo magnético dando origen a la formación de *blobs* y otras formas irregulares. En la figura 30 se presenta un mapa de colores del logaritmo de la masa de iones y líneas de campo magnético en cuatro tiempos diferentes de dicha simulación. Diversas estructuras de *blobs* pueden observarse allí, por ejemplo, el primer panel muestra un *blob* ovalado con su centro alrededor de $[x = -1.9, z = -0.7]$ Mm, el cual se divide en dos *blobs* que se mueven en direcciones diferentes como lo indican los paneles consecutivos. Cuatro *blobs* adicionales pueden verse en esta figura, uno con centro en $[x = 0.3, z = 1.2]$ Mm, de tamaño aproximado de 1 Mm en el primer panel, un segundo *blob* con centro en $[x = -1, z = -0.2]$

Mm y de tamaño 0.5 Mm (segundo panel), un tercero con centro en $[x = -0.7, z = 0.8]$ Mm y de tamaño de 0.5 Mm (tercer panel) y un cuarto con centro en $[x = -0.7, z = 1.0]$ Mm y de tamaño de 1.5 Mm (cuarto panel). Estos *blobs* exhiben magnitudes de campo magnético de 9 G a 30 G, velocidades de 3 km s^{-1} a 30 km s^{-1} y aparecen con una frecuencia de alrededor de 0.04 s^{-1} . Aparentemente se mueven hacia arriba hasta que se desvanecen o se reconectan de nuevo con el campo magnético de alrededor.

5.2. Modelo numérico

Se modela la atmósfera solar por medio de las ecuaciones de la MHD (eq. 30), usando la resistividad de Spitzer (eq. 66) y el flujo de calor anisótropo (eq. 68). El estado inicial se obtiene reemplazando $\partial_t = 0$ y $\vec{v} = 0$ en la ecuación (30), obteniendo la ecuación de equilibrio hidrostático

$$\rho_h g + \frac{\partial p_h}{\partial z} = 0 . \quad (139)$$

De la ecuación del gas ideal, la presión está dada por

$$p_h = \frac{k_B}{m_p} \rho T_h , \quad (140)$$

donde m_p es la masa del protón y k_B es la constante de Boltzmann. De estas dos ecuaciones, la densidad de masa hidrostática y la presión del fluido pueden escribirse como funciones del perfil

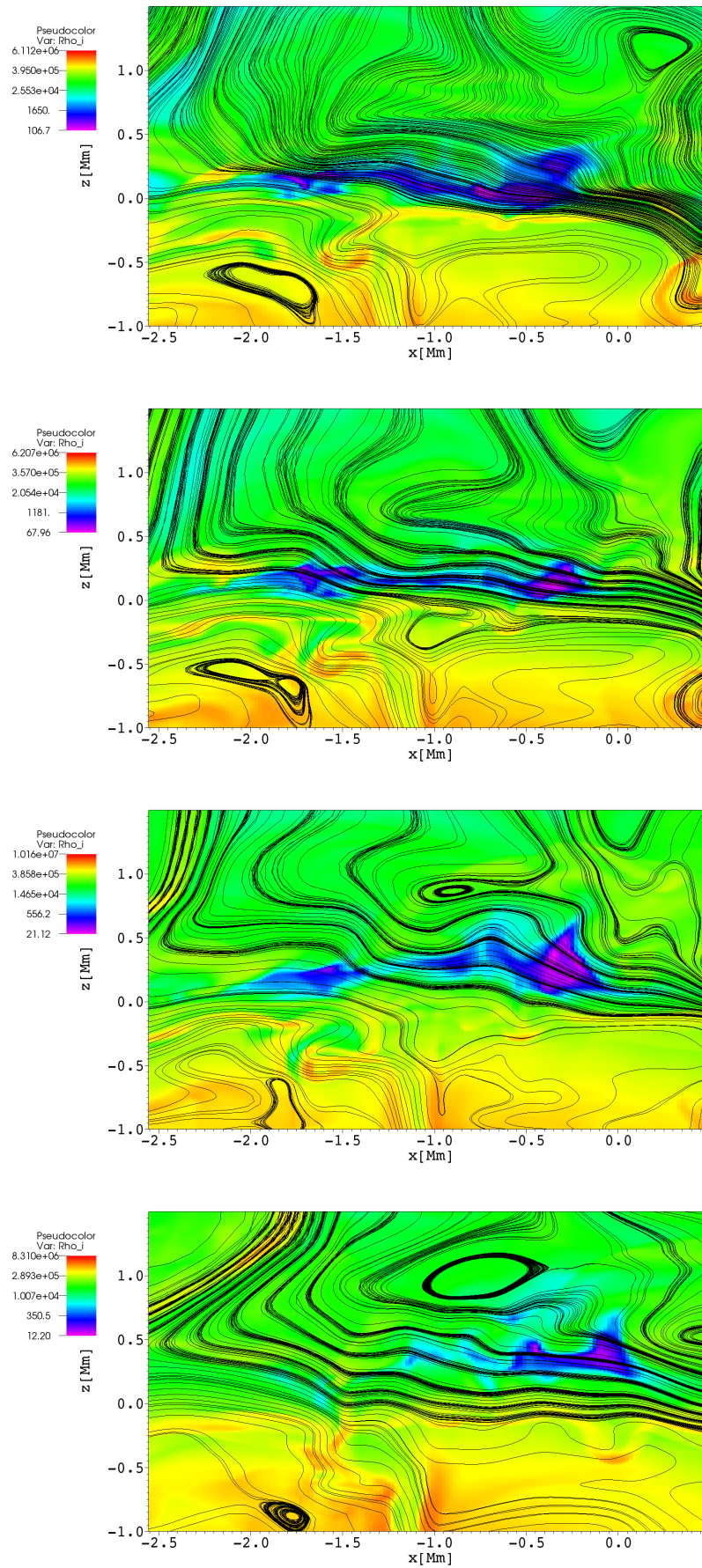


Figura 30. Mapas de colores del logaritmo de la densidad de iones y líneas de campo magnético

de temperatura $T_h(z)$ de la siguiente forma

$$p_h(z) = p_{h0} \exp \left(-\frac{m_p g}{k_B} \int_{z_0}^z \frac{d\tilde{z}}{T(\tilde{z})} \right), \quad (141)$$

$$\rho_h(z) = \frac{m_p}{k_B} \frac{p_h(z)}{T_h(z)}, \quad (142)$$

donde $z_0 = 10$ Mm es la altura de referencia. En este caso, se usa el modelo semiempirico de temperatura de VAL (Avrett and Loeser, 2008) (descrito en la sección 1.3). El estado inicial de equilibrio hidrostático para las simulaciones es complementado por un campo vertical uniforme $\vec{B} = [0, 0, B]$, de magnitud $B = 5$ G.

La figura 31 muestra el plasma- $\beta = 2\mu_0 p / |\vec{B}|^2$, la densidad de masa, la temperatura y la presión del fluido p como funciones de la altura z . El perfil de temperatura inicia en 4.5×10^3 K en $z = 0.25$ Mm, decrece a un mínimo de 4.3×10^3 K en $z = 0.55$ Mm, alcanza 6.8×10^3 K en la cromosfera alta ($z = 2.1$ Mm) y después crece abruptamente en la zona de transición e incrementa suavemente a 6.5×10^5 K en $z = 6.25$ Mm. De manera acorde, la densidad de masa alcanza un valor de 1.88×10^{-6} kg m⁻³ en $z = 0.25$ Mm, decrece exponencialmente a 2.8×10^{-11} kg m⁻³ en lo alto de la cromosfera y luego experimenta una caída repentina en la zona de transición, y suavemente decrece a 1.7×10^{-13} kg m⁻³ en $z = 6.25$ Mm. La presión del fluido alcanza un valor de 70.6 kg m⁻¹ s⁻² en $z = 0.25$ Mm, cae a 1.5×10^{-3} kg m⁻¹ s⁻² en $z = 2.1$ Mm, cae rápidamente en la zona de transición y suavemente alcanza 9.2×10^{-4} m⁻¹ s⁻² en $z = 6.25$ Mm. El plasma- β comienza alrededor de 710 en $z = 0.25$ Mm, alcanza un valor de 1 en $z = 1.2$ Mm y 0.009 en $z = 6.25$ Mm.

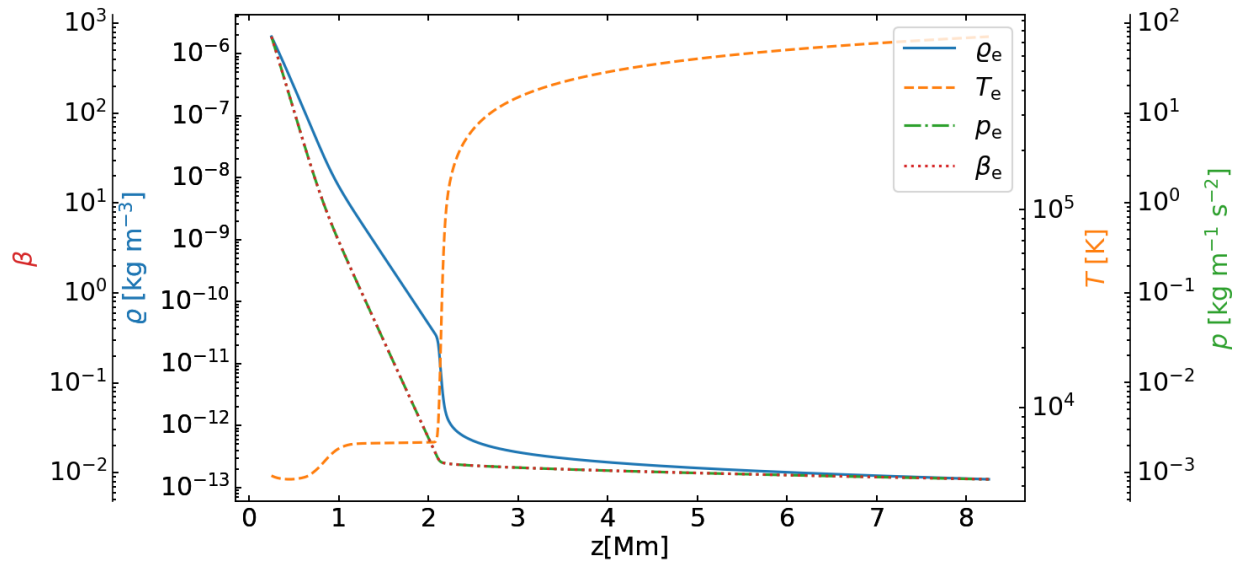


Figura 31. Perfiles hidrostáticos del plasma— $\beta = 2\mu_0 p/B^2$, la densidad de masa ρ , la temperatura T y la presión del fluido p en función de la altura.

5.3. Dominio numérico y condiciones de frontera

Se realizan simulaciones numéricas usando una malla uniforme con resolución de 5 km en direcciones x y z extendida entre $[-2.0, 2.0] \times [0.25, 8.25]$ Mm². El número de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) se fija en 0.1. Los métodos numéricos usados son el resolvidor de Riemann HLLE (Harten et al., 1983), el reconstructor van Leer slope (van Leer, 1977b), y un Runge-Kutta de tercer orden (Press et al., 1992). Además, se usa el método de Transporte de Flujo Restringido para controlar el crecimiento de la divergencia del campo magnético (Evans and Hawley, 1988; Balsara, 2004). Las condiciones de frontera usadas son las de flujo saliente en las caras laterales, y condiciones fijas en las caras inferior y superior. El campo magnético de la cara inferior se

complementa de la siguiente forma

$$B_x(x, z, t) = -\frac{B_0[z - z_c(t)]}{\omega} \exp\left(-\{x^2 + [z - z_c(t)]^2\} / \omega^2\right), \quad (143)$$

$$B_z(x, z, t) = \frac{B_0 x}{\omega} \exp\left(-\{x^2 + [z - z_c(t)]^2\} / \omega^2\right). \quad (144)$$

Este flujo magnético imita la emergencia de un *blob* magnético circular con centro localizado inicialmente en $x = 0$, $z = -1.5 \omega$, donde ω es su longitud. Este se mueve hacia arriba con una velocidad constante $v_b = 5 \text{ km s}^{-1}$ y la localización vertical de su centro está dada por

$$z_c(t) = -1.5 \omega + v_b t. \quad (145)$$

Se fija $\omega = 200 \text{ km}$ y B_0 con 180 G (a menos que se especifique lo contrario) con el cual el máximo valor del campo magnético es de 77 G . La elección de estos parámetros está de acuerdo con los valores de los *blobs* encontrados en las simulaciones obtenidas con el código de dos fluidos JOANNA descritos en la sección 5.1.

5.4. Resultados

La emergencia del *blob* modifica la atmósfera solar de diversas maneras. La figura 32 muestra mapas de colores de la magnitud del campo magnético y líneas de campo magnético en tres tiempos diferentes. En $t = 100 \text{ s}$, un nuevo *blob* se ha formado como resultado de la reconexión magnética con las líneas de campo del ambiente. En este tiempo casi todo el flujo emergente ha penetrado la atmósfera. El gráfico superior muestra que solamente la mitad del *blob* se pudo re-

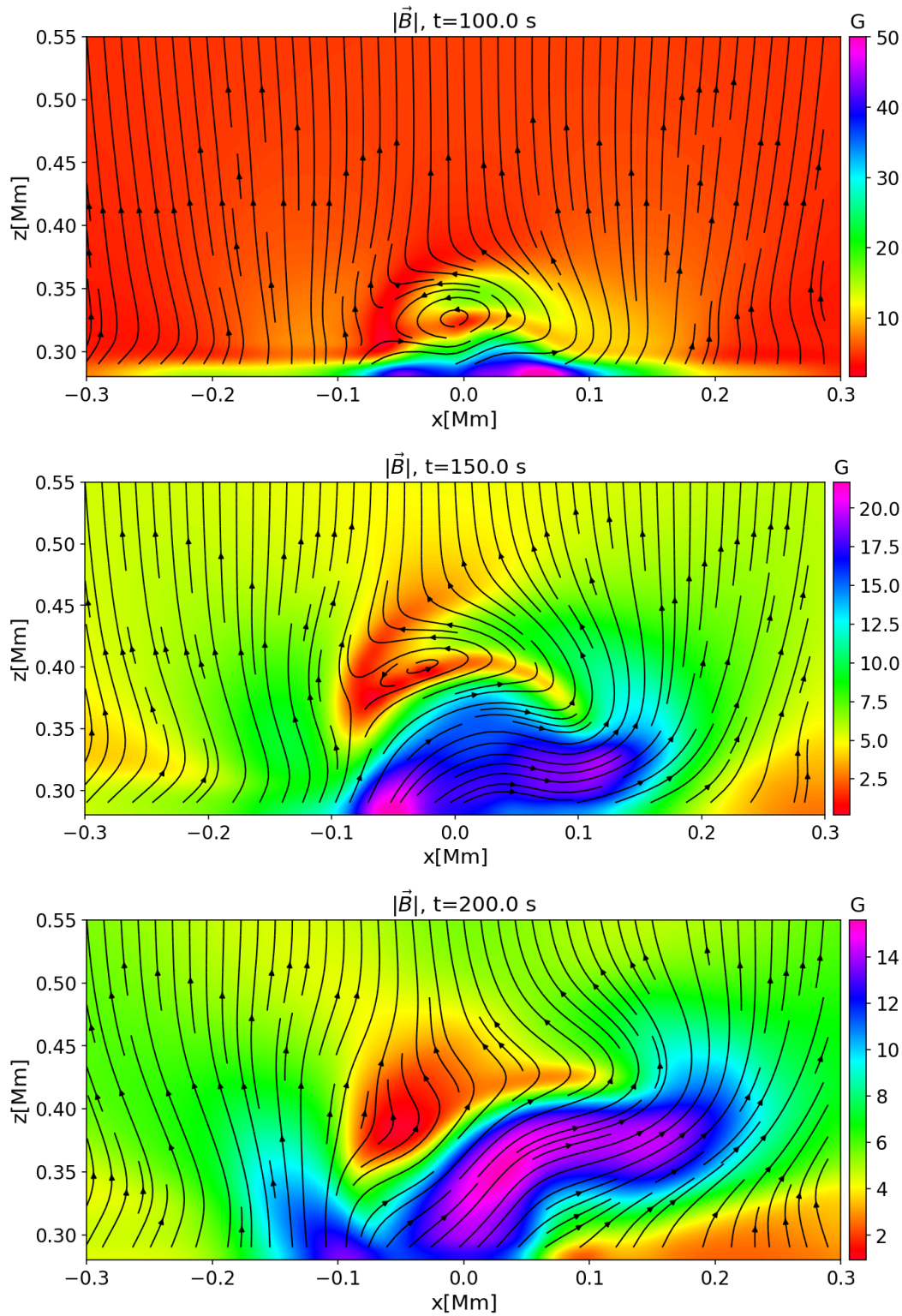


Figura 32. Mapas de colores de la magnitud del campo magnético y las líneas de campo magnético en $t = 100 \text{ s}$ (panel superior), $t = 150 \text{ s}$ (panel intermedio), y $t = 200 \text{ s}$ (panel inferior).

conectar con el campo magnético de fondo debido a que este tiene un radio de 100 km, el cual corresponde a la mitad del tamaño del *blob* inicial. El panel intermedio muestra que un tiempo posterior el *blob* ha continuado viajando hacia arriba y su aspecto ha sido aplanado. Finalmente, el panel inferior muestra que en $t = 200$ s el *blob* se ha desaparecido completamente. Este tipo de comportamiento está acorde con lo observado en las simulaciones de granulación del código JOANNA de la sección 5.1.

La figura 33 muestra mapas de colores de la componente vertical de la velocidad, logaritmo de la densidad de masa, el logaritmo de la temperatura y flujo vertical de energía de las zonas superiores de la atmósfera en el tiempo $t = 240$ s. De la emergencia del *blob*, una onda de choque es lanzada hacia las capas superiores. En $t = 240$ s el frente de onda está próximo a la base de la corona y tiene una rapidez de 30 km s^{-1} . En respuesta, el mapa de colores del logaritmo de la densidad muestra un flujo de masa que viaja con la onda de choque en forma de espícula por la forma elongada que presenta. La gráfica de la temperatura indica que este plasma en movimiento tiene una temperatura mayor que la de su alrededor. El flujo de energía vertical $\rho v_z^2 \sqrt{\Gamma p / \rho}$ tiene un valor de 300 W m^{-2} en la cromosfera baja, y 200 W m^{-2} en el frente del choque. Éste último es igual a 20% al flujo de energía estimado por pérdidas en un agujero coronal (Withbroe and Noyes, 1977).

La energía magnética, cinética e interna del plasma promediadas en el dominio $[x_1 = -1.0, x_2 = 1.0] \times [z_1 = 0.25, z_2 = 2.1] \text{ Mm}^2$, se calculan como

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{A} \int_{x_1}^{x_2} \int_{z_1}^{z_2} E(x, z, t) \, dx \, dz, \quad (146)$$

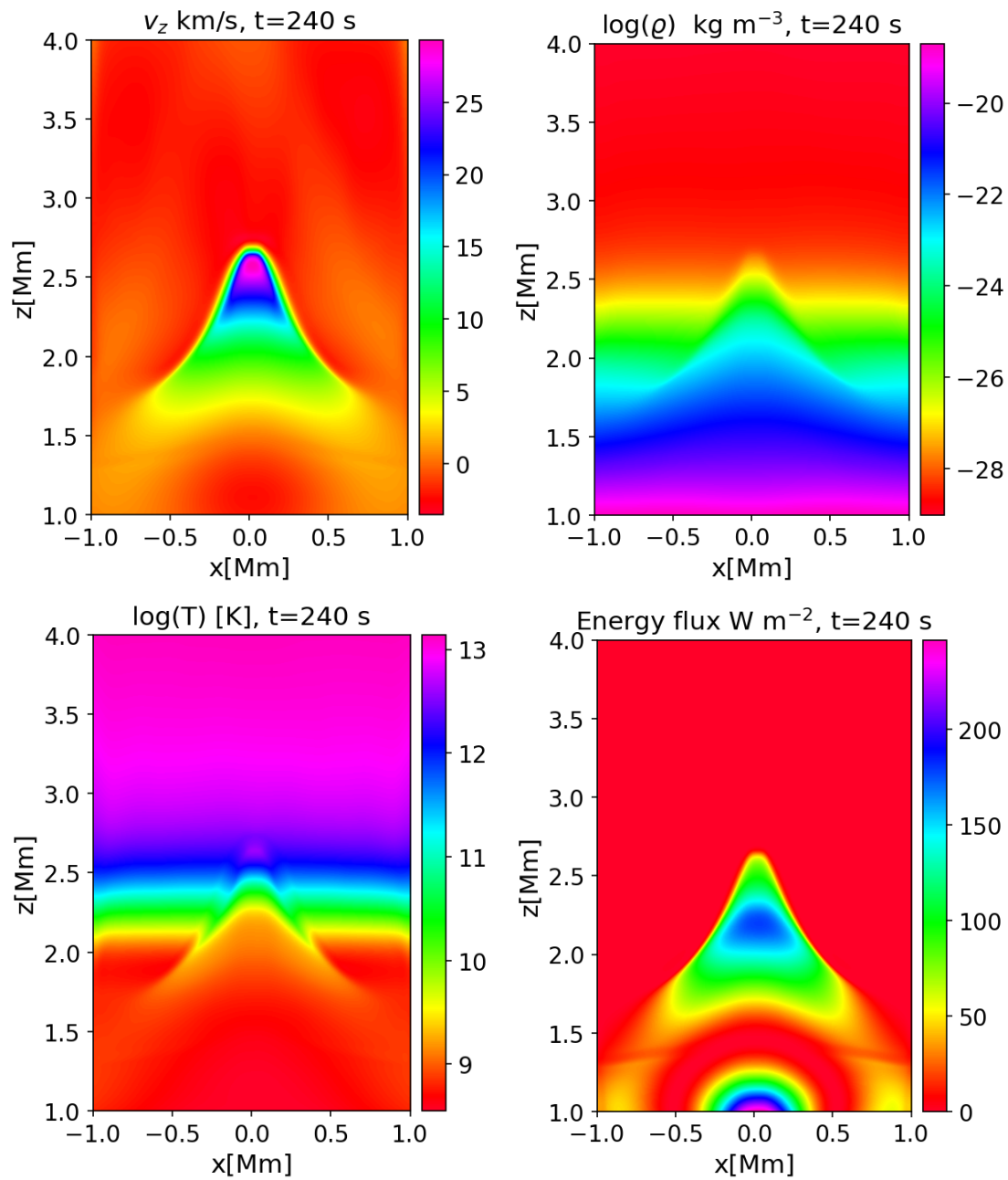


Figura 33. Mapas de colores de la componente vertical de la velocidad (superior-izquierda), logaritmo de la densidad de masa (superior-derecha), logaritmo de la temperatura (inferior-izquierda), flujo de energía (inferior-derecha) en $t = 240$ s.

donde $E(x, z, t)$ es una densidad de energía, la energía magnética se calcula como $E_m = B^2/2\mu_0$, la energía cinética $E_k = \rho v^2/2$, y la energía interna $E_i = p/(\Gamma - 1)$. El área de la región de interés es $A = (x_2 - x_1)(z_2 - z_1)$. El cambio relativo de estas cantidades respecto a su valor inicial es

$$\Delta \bar{E} = \frac{(\bar{E}(t) - \bar{E}_e)}{\bar{E}_e} \times 100\%, \quad (147)$$

donde E_e representa el valor en equilibrio. Como el valor inicial de la energía cinética es cero, se usa como valor de referencia el correspondiente a $t = 100$ s. La figura 34 muestra las variaciones de las densidades de energía en función del tiempo, el primero de los ejes corresponde a las variaciones de energía magnética (línea sólida). La energía magnética incrementa a medida que el *blob* emerge hasta $t = 50$ s, donde el centro del *blob* ha entrado al dominio. Debido a que en su centro el campo magnético es el mínimo, ocurre allí un mínimo local de energía en la gráfica en $t = 80$ s. Después de este momento, la energía comienza a crecer hasta $t = 125$ s, en donde el *blob* se ha deformado por completo y la energía alcanza su mayor valor. A partir de este momento, el *blob* comienza a descender, se aplana y se deforma hasta que se desaparece causando un decrecimiento en la energía magnética. El segundo eje muestra los cambios en la densidad de energía interna; en las etapas iniciales de la emergencia del *blob* ésta aumenta, y comienza a decrecer desde $t = 30$ s hasta que alcanza un valor mínimo en $t = 80$ s al igual que lo hace la energía magnética. Después de este momento, a medida que la energía magnética aumenta, la energía interna comienza a incrementar linealmente, pero después de $t = 125$ s, cuando el *blob* comienza a desvanecerse, la tasa de crecimiento decrece. La densidad cinética crece de forma gaussiana, alcanzando un valor

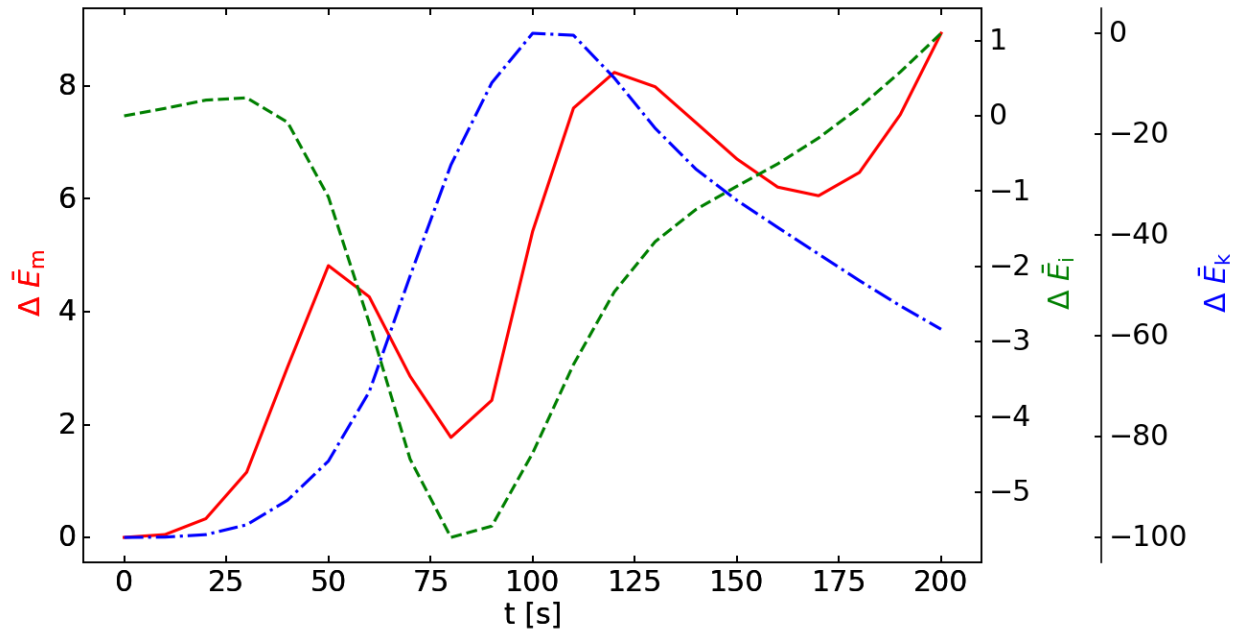


Figura 34. Variaciones de la densidad de energía magnética (primer eje, línea sólida), de la densidad de energía interna (segundo eje, línea discontinua) y de la densidad de energía cinética (tercer eje, línea discontinua y punteada) como funciones del tiempo.

máximo en $t = 100$ s, cuando el *blob* emerge completamente y después de este momento la energía comienza a decrecer; después de este momento, la onda de choque abandona completamente la cromosfera y comienza a viajar hacia las capas superiores. En esta figura se pueden visualizar la relación entre los cambios de energía del sistema, y tiene una importancia significativa debido a los proceso de reconexión magnética que ocurren. Por ejemplo desde el tiempo $t = 125$ s se puede ver claramente la conversión de energía magnética en energía interna, la cual causa el calentamiento de la cromosfera. Es por este efecto que los fenómenos de reconexión son tan estudiados en la atmósfera solar, pues podrían explicar una parte del calentamiento de la cromosfera y de la corona solar.

Se realizan estudios paramétricos variando la magnitud del campo magnético del *blob* B_0 .

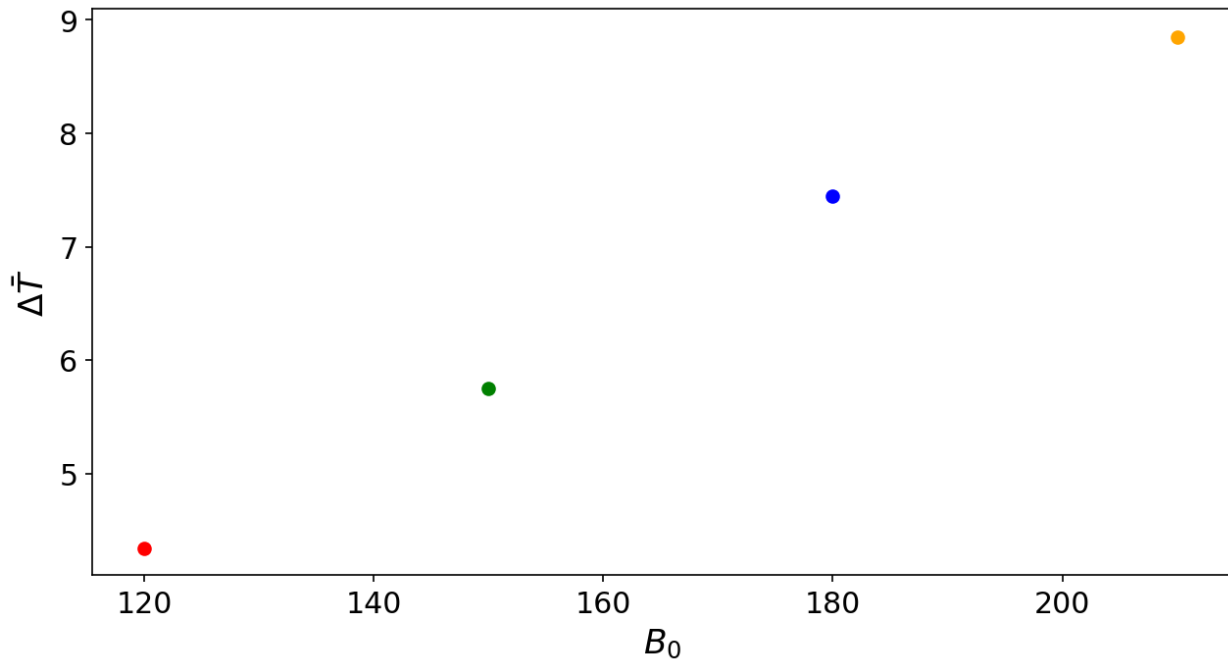


Figura 35. Variaciones relativas de la temperatura en la cromosfera en la región $[x_1 = -1.0, x_2 = 1.0] \times [z_1 = 0.25, z_2 = 2.1]$ Mm^2 en $t = 210$ s como función de B_0 , parámetro asociado con la magnitud del *blob*.

En la figura 35 se presentan los cambios relativos espacialmente promediados de la temperatura del plasma, $\Delta \bar{T}$, en la cromosfera evaluados en $t = 210$ s como funciones de B_0 . Estos cambios relativos fueron calculados de igual manera que los de la variación de la energía en la ecuación (147). De la figura se infiere que las variaciones de la temperatura $\Delta \bar{T}$ crecen de manera lineal con la magnitud del campo magnético del *blob*. En el caso de $B_0 = 180$ G, que corresponde a la simulación descrita en el texto, dicha variación es de aproximadamente 7.5 %.

6. Simulaciones de *Tadpole Jets*

Este capítulo está dedicado al estudio de los efectos de la conducción térmica anisotrópica en la generación de *jets* cromosféricos a través de simulaciones numéricas con el código MAGNUS. Siguiendo el trabajo de Srivastava et al. (2018), se considera una atmósfera en estado de equilibrio con un perfil realista de temperatura y se generan eyecciones de plasma por medio de un *driver* (condición de frontera que cambia con el tiempo) en la presión operando en la cromosfera alta. Se toma un campo magnético que imita el de un bucle coronal y se realizan estudios paramétricos variando la magnitud del campo magnético y la amplitud del *driver* de la presión. El resultado es que el efecto de la conducción térmica es aumentar considerablemente los flujos de energía y de masa de los *jets*, creando estructuras más colimadas que penetran más la atmósfera solar que las producidos en el caso adiabático. Se encuentra que los campos magnéticos de baja amplitud crean *jets* más energéticos comparando los casos adiabáticos con los no adiabáticos, mientras que en el caso de campos magnéticos grandes, dichos cambios entre los dos tipos de simulaciones son menores.

6.1. Detección de un *Tadpole jet* en una mancha solar

Recientemente Srivastava et al. (2018) reportaron la detección de varios *tadpole jets* alrededor de una mancha solar, los cuales transportan grandes cantidades de energía y por lo tanto pueden considerarse como posibles mecanismos de calentamiento de la corona solar. El nombre *tadpole* dado a estos *jets* corresponde a la forma de larva de rana que presentan. Este tipo de *jets* detectados se pueden modelar como pseudo-choques de plasma rarificado. La figura 36a muestra

una composición de imágenes de las emisiones 171, 304 y 1600 tomadas por el Observatorio de Dinámica Solar, la cual exhibe un bucle coronal difuso anclado a una mancha solar, la cual posibilita la propulsión del *jet*. La evolución de uno de estos *jets* se presenta en la figura **b** por medio de las emisiones en C II 1,300 detectadas usando el Espectrógrafo de Imágenes de Región de Interface (IRIS) (De Pontieu et al., 2014) el 8 de octubre de 2014. En la figura **c** se muestra un mapa de tiempo-distancia a lo largo del *jet* indicado por el recuadro blanco punteado en la figura **b**, la cual exhibe la evolución de su cola brillante, voluminosa y rarificada en los óvalos azules.

Este fenómeno fue simulado numéricamente por Srivastava et al. (2018), donde se demostró que el *jet* podría transportar una energía del orden $\sim 10^3 \text{ W m}^{-2}$, la cual está de acuerdo con los valores estimados por Withbroe and Noyes (1977). Debido a que el valor de flujo de energía es considerablemente alto, este nuevo e interesante fenómeno podría hacer una contribución importante al problema de calentamiento de la corona solar. Dichas simulaciones fueron realizadas en dos-dimensiones mediante el uso del código JOANNA (Wójcik et al., 2018), el cual resuelve las ecuaciones de dos fluidos (iones + electrones y neutrales) bajo condiciones ideales, es decir, sin considerar términos no adiabáticos. Sin embargo, en estas condiciones específicas, la conducción térmica debería considerarse debido a los gradientes tan grandes en la zona de transición y debido a la forma del campo magnético que conduce de manera eficiente el flujo de calor a lo largo de las líneas de campo (Spitzer, 1956). De manera adicional, es necesario determinar la influencia de la magnitud de campo magnético en los fenómenos involucrados con las eyecciones de plasma, debido a que algunas observaciones sugieren que los campos magnéticos en los bucles corales parecen ser varias ordenes de magnitud mayores de lo que se ha considerado tradicionalmente

(Kuridze et al., 2019).

6.2. Modelo numérico

Se modela la dinámica del plasma de la atmósfera solar con las ecuaciones MHD, escritas en forma conservativa (eq. 30). La conducción térmica es transportada por medio de las líneas de campo con el modelo para plasma magnetizado desarrollado por Spitzer (1956), descrito por la ecuación (68), tomando un valor para el coeficiente de térmico igual a $\kappa = 10^{-11} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-7/2}$. Siguiendo el trabajo de Srivastava et al. (2018), el estado hidrostático se obtiene del modelo semiempírico desarrollado por Avrett and Loeser (2008). Consecuentemente, de la ecuación de equilibrio hidrostático se tiene

$$\rho_h g + \frac{\partial p_h}{\partial z} = 0, \quad (148)$$

donde el subíndice h denota que es un valor del estado hidrostático. Después, sustituyendo la presión del fluido,

$$p_h = \frac{k_B}{m_p \bar{m}} \rho_h T_h, \quad (149)$$

donde m_p es la masa del protón, $\bar{m}$ es el peso promedio fijado como 1.24 y k_B es la constante de Boltzmann. De esta manera, el perfil hidrostático de la masa y de la presión se pueden encontrar

partiendo de un perfil de temperatura,

$$p_h(z) = p_0 \exp \left(-\frac{m_p \bar{m} g}{k_B} \int_{z_0}^z \frac{d\tilde{z}}{T(\tilde{z})} \right), \quad (150)$$

$$\rho_h(z) = \frac{m_p \bar{m}}{k_B} \frac{p_h(z)}{T_h(z)}, \quad (151)$$

donde $z_0 = 10$ Mm es una altura de referencia.

El campo magnético corresponde a un bucle coronal, dado por un potencial estándar solución a las ecuaciones estáticas MHD en dos dimensiones (Priest, 1982)

$$B_x = B_0 \cos \left(\frac{\pi x}{10} \right) \exp \left(-\frac{\pi z}{10} \right), \quad (152)$$

$$B_z = -B_0 \sin \left(\frac{\pi x}{10} \right) \exp \left(-\frac{\pi z}{10} \right), \quad (153)$$

donde B_0 es su magnitud a nivel fotosférico en los puntos $x = \pm 5$ Mm. La figura 37 muestra la configuración inicial de las líneas de campo magnético y la temperatura del plasma. La figura 38 muestra la magnitud del campo magnético $B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2}$ como función de la altura para los distintos valores de B_0 que se usarán en las simulaciones, estos son $B_0 = 20$ G, 40 G y 60 G. Por otra parte, en la figura 37 se muestra la topología de las líneas de campo magnético inicial junto con un mapa de colores de la temperatura inicial. La temperatura es 1×10^4 K en lo alto de la cromosfera ($z = 2.0$) y en la región de transición en $z = 2.1$ crece abruptamente, después aumenta suavemente a 1.4×10^6 K en $z = 12.0$ Mm.

Se realizan las simulaciones usando el código MAGNUS (Navarro et al., 2017) en un do-

minio numérico que comprende la región $[-0.5, 6.5] \times [1.8, 8.8]$ Mm². El número de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) se fija en 0.1, el cual es un número pequeño escogido con el fin de que el paso de tiempo sea reducido para poder resolver el término elíptico introducido por el término relacionado con la conducción térmica. Se usa el resolvidor de Riemann HLLE (Harten et al., 1983), el reconstructor van Leer slope (van Leer, 1977b), y un Runge-Kutta de tercer orden (Press et al., 1992). Para evitar el crecimiento de la divergencia del campo magnético se usa el método de Transporte de Flujo Restringido (Evans and Hawley, 1988; Balsara, 2004). Las condiciones de frontera implementadas son de flujo saliente en las caras laterales y condiciones fijas en la caras superior e inferior. Adicionalmente, se usa un *driver* en la presión en la frontera inferior dado por

$$p(z, t) = p_h(z = z_0) \left[1 + A_p \exp \left(-\frac{(z - z_0)^2}{w^2} \right) f(t) \right], \quad (154)$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right), & \text{para } t \leq \tau_{\max}, \\ \exp \left(-(t - \tau_{\max}) \right), & \text{para } t > \tau_{\max}, \end{cases} \quad (155)$$

donde $x_0 = 0.7$ Mm, $z_0 = 1.8$ Mm, $\tau = 50$ s y $\tau_{\max} = 30$ s.

6.3. Resultados

Con el fin de determinar los efectos de la conducción térmica en la generación de *jets* y en su evolución, se realizan dos grupos de simulaciones que difieren únicamente en el término disipativo $\nabla \cdot \vec{q}$ en la ecuación de la energía. La figura 39 muestra la densidad de masa como un mapa de colores y las líneas de campo magnético en $t = 40$ s (páneos superiores), $t = 60$ s (páneos centrales) y $t = 80$ s (páneos inferiores). Las gráficas de la columna izquierda corresponden a

las simulaciones del caso adiabático mientras que las de la columna derecha son las que tienen el término de disipación por conducción térmica. Se encuentra que en este segundo grupo de simulaciones los *jets* producidos son mucho más colimados, el plasma expulsado está más acelerado y puede penetrar más la corona comparando con las del primer grupo. Se usan paletas de colores iguales para comparar visualmente las diferencias entre las simulaciones, de esta manera se puede observar que en el caso adiabático los *jets* tienen una menor densidad de masa pues está más disipada y tiene menor intensidad.

En la figura 40 se presentan mapas de colores de la componente vertical de la velocidad, la presión del fluido, el número de Mach, la tasa de pérdida de calor, respectivamente. Las gráficas de la figura 40 corresponden a la misma simulación con conducción térmica y parámetros $A_p = 40$ y $B_0 = 40$ G. De dichas gráficas se puede ver que el *jet* alcanza una altura de $z = 3.6$ Mm, en esta región se detecta una onda de contacto viajando con rapidez supersónica de acuerdo al valor de Mach en dicha zona y debido a que la velocidad y la presión del gas no son discontinuas, solamente lo es la densidad de masa. Dos ondas de choque lentas supersónicas pueden verse en $(x = -1$ Mm, $z = 4$ Mm) y $(x = 0.5$ Mm, $z = 4$ Mm), donde las gráficas ilustran las discontinuidades en la velocidad, la presión del gas y la densidad de masa, pero con amplitudes menores. La magnitud del vector de conducción térmica $|\vec{q}|$ está en el orden de 1×10^4 W/m², valor que está en concordancia con los valores teóricos estimados por Withbroe and Noyes (1977) de pérdida por conducción térmica en regiones activas.

Se compara el flujo de energía vertical transportado por los *jets* en la figura 41, donde cada panel corresponde a un valor diferente de amplitud del *driver* de la presión A_p . En cada caso hay

un mayor flujo de energía en las simulaciones con conducción térmica, denotadas con las etiquetas $\kappa \neq 0$, en comparación con las del caso adiabático ($\kappa = 0$). La primera gráfica corresponde a $A_p = 20$, para la cual se encuentra que las simulaciones con conducción térmica, el flujo de energía se incrementa entre $\sim 10\%$ y $\sim 50\%$. La segunda gráfica está asociada con una mayor amplitud del *driver* de presión $A_p = 40$. En este caso, los incrementos son hasta $\sim 50\%$. La misma tendencia existe en la tercera gráfica realizada para $A_p = 60$, donde el flujo de energía aumenta hasta $\sim 60\%$. Por otro lado, observando los cambios respecto a la amplitud del campo magnético B_0 , se encuentra que para valores grandes de B_0 , el flujo de energía es menor en el régimen ideal, ésta aumenta hasta $\sim 35\%$ para cada valor de A_p mientras que en las simulaciones con conducción térmica el incremento fue de alrededor 20% .

Se calcula el flujo de masa vertical que transportan los *jets* en la figura 42 como funciones de la altura para distintos valores de la amplitud del *driver* de la presión A_p . Cuando la conducción térmica está actuando, el flujo de masa crece desde $\sim 20\%$ hasta $\sim 55\%$ en el caso de la amplitud $A_p = 20$. Para mayores valores del *driver* de presión, $A_p = 40$ y $A_p = 60$, los incrementos fueron desde $\sim 10\%$ hasta $\sim 70\%$. El flujo de masa decrece con mayores valores de la amplitud del campo magnético B_0 hasta $\sim 35\%$ para las simulaciones en el caso ideal, y hasta $\sim 30\%$ para los casos con conductividad térmica.

La tasa de pérdida de calor es promediada horizontalmente para cada altura y se presenta en la figura 43 en $t = 80$ s. Cada panel tiene una amplitud del *driver* de presión diferente; $A_p = 20$ en la gráfica superior, donde la pérdida de calor tiene valores considerables para las alturas $z = 2.24$ Mm y $z = 4$ Mm, donde alcanza valores del orden $2 \times 10^6 \text{ W m}^{-3}$. Estos valores son similares para

cada valor de la amplitud del campo magnético B_0 . El panel de la mitad corresponde a $A_p = 40$. En este caso, la tasa de pérdida de calor es grande para las alturas $z = 2.5$ Mm, $z = 3.2$ Mm y $z = 4.5$ Mm alcanzando valores del orden de 1×10^7 W m⁻³. El tercer panel corresponde al caso donde $A_p = 60$, en este caso el orden de magnitud de la tasa de pérdida de calor es bastante similar, pero los picos están desplazados a $z = 2.5$ Mm y $z = 4.2$ Mm.

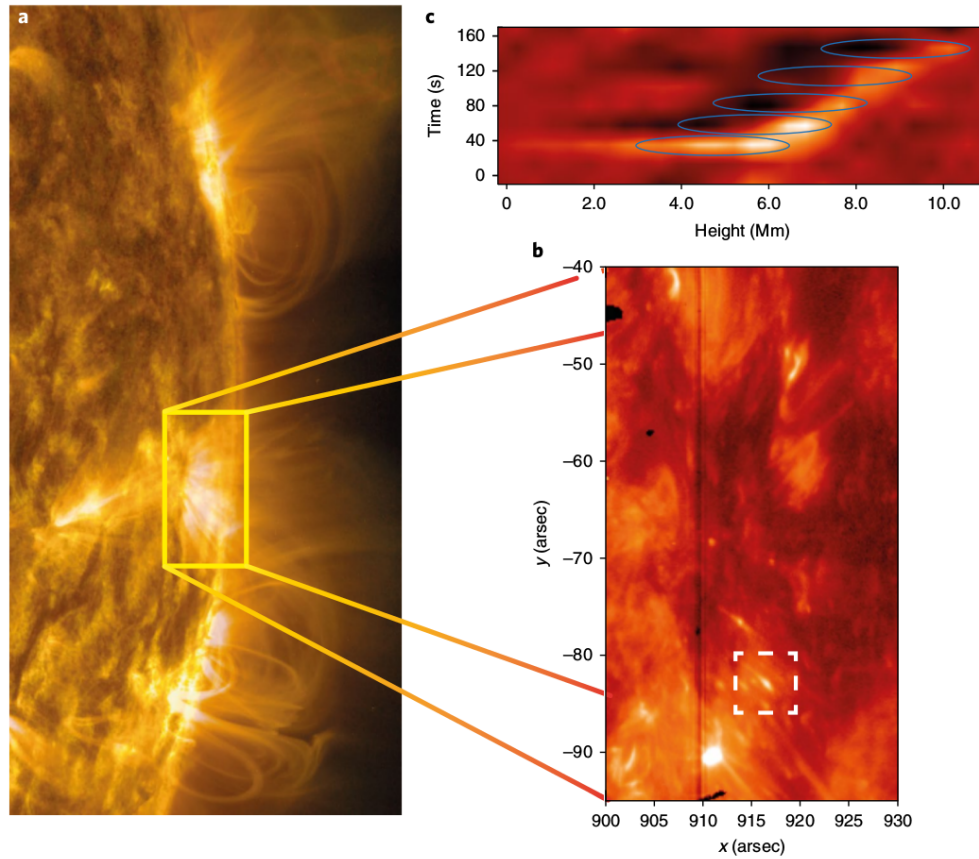


Figura 36. Imágenes directas de un *Tadpole jet* (pseudo-choque) confinado alrededor de una mancha solar, tomado de Srivastava et al. (2018). La figura **a** es una composición de imágenes de las emisiones 171, 304 y 1600 tomadas por el Observatorio de Dinámica Solar, la cual muestra un bucle coronal difuso anclado a una mancha solar, la cual posibilita la propulsión del *jet*. La evolución de uno de estos *jets* se presenta en la figura **b** por medio de las emisiones en C II 1,300 detectadas usando el Espectrógrafo de Imágenes de Región de Interface (IRIS) (De Pontieu et al., 2014) el 8 de octubre de 2014. En la figura **c** se muestra un mapa de tiempo-distancia a lo largo del *jet* indicado por el recuadro blanco punteado en la figura **b**, la cual exhibe la evolución de su cola brillante, voluminosa y rarificada en los óvalos azules.

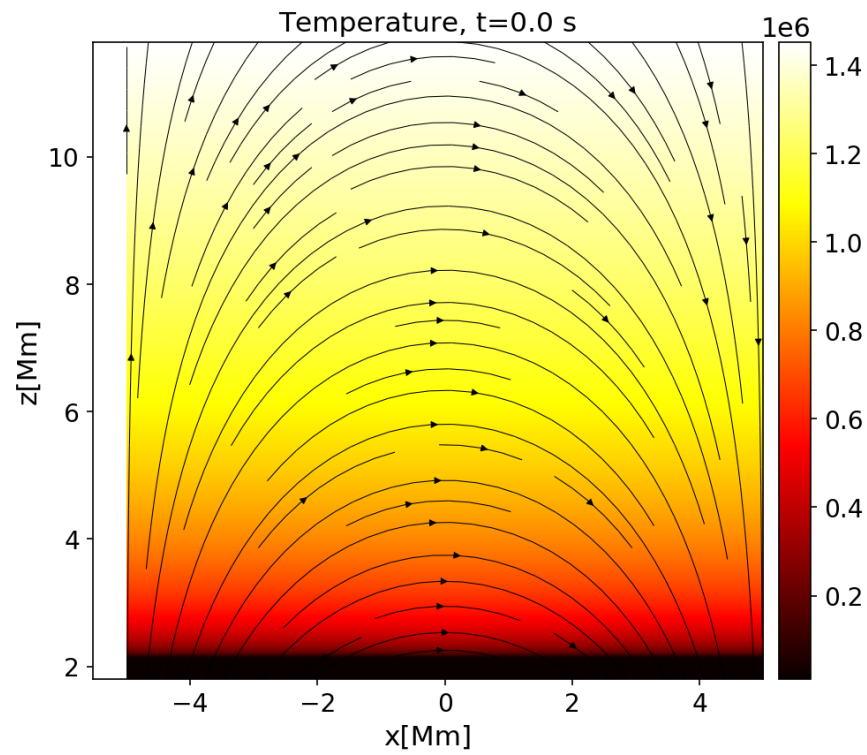


Figura 37. Mapa de colores del perfil de temperatura en el estado de equilibrio y la configuración inicial de las líneas de campo magnético.

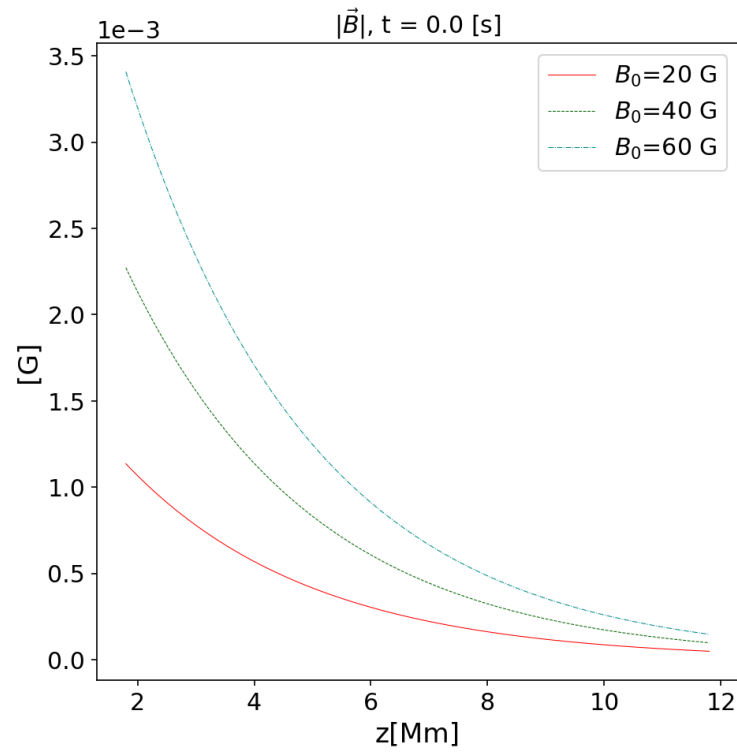


Figura 38. Perfiles de la magnitud del campo magnético $B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2}$ en el estado de equilibrio para distintos valores de B_0 (amplitud a nivel fotosférico en los puntos $x = \pm 5$ Mm) usados en las simulaciones.

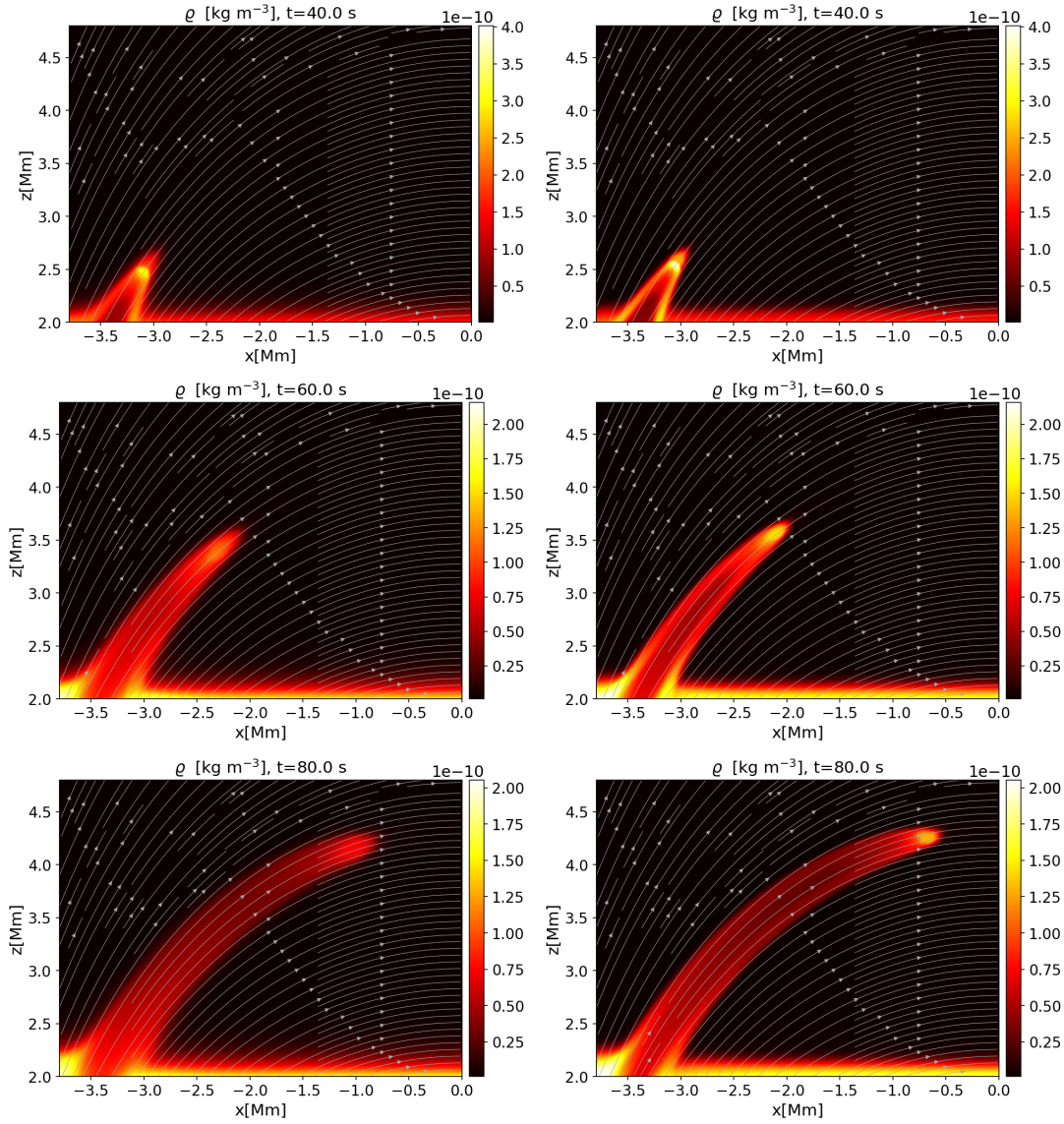


Figura 39. Mapas de colores de la densidad de masa y líneas de campo magnético en $t = 40$ s (páneos superiores) s, $t = 60$ s (páneos centrales) y $t = 80$ s (páneos derechos) para $A_p = 40$, $B_0 = 40$ G, simulaciones adiabáticas (páneos de la izquierda) y con conducción térmica (páneos de la derecha).

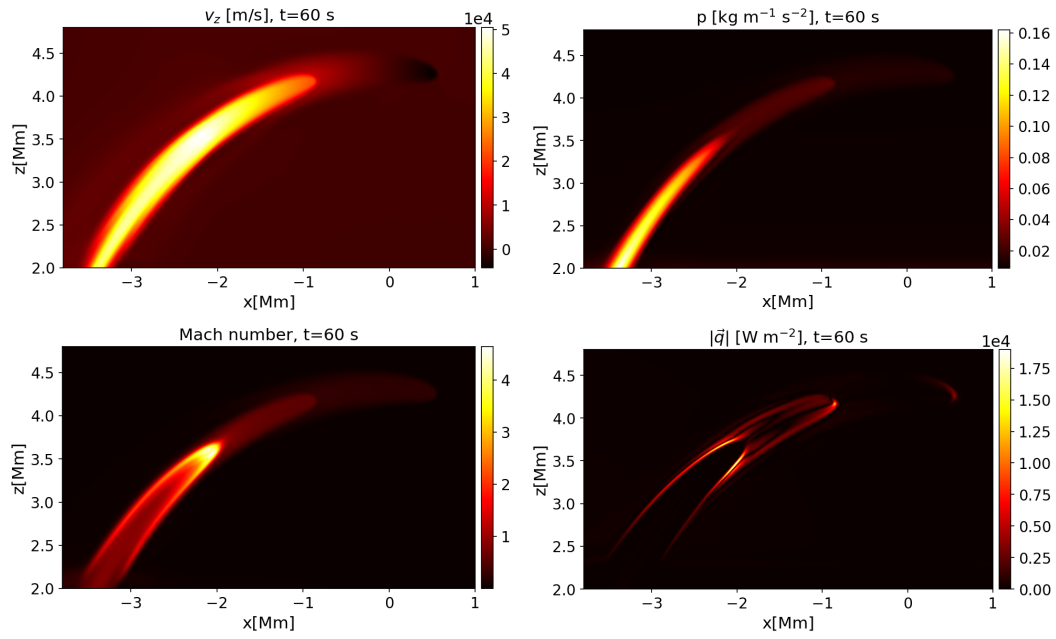


Figura 40. Mapas de colores de la componente vertical de la velocidad v_z (panel superior izquierdo), presión del gas (panel superior derecho), número de Mach (panel inferior izquierdo) y magnitud del vector de conducción térmica (panel inferior derecho) en $t = 60$ s, para la simulación con conducción térmica usando los parámetros $A_p = 40$ y $B_0 = 40$ G.

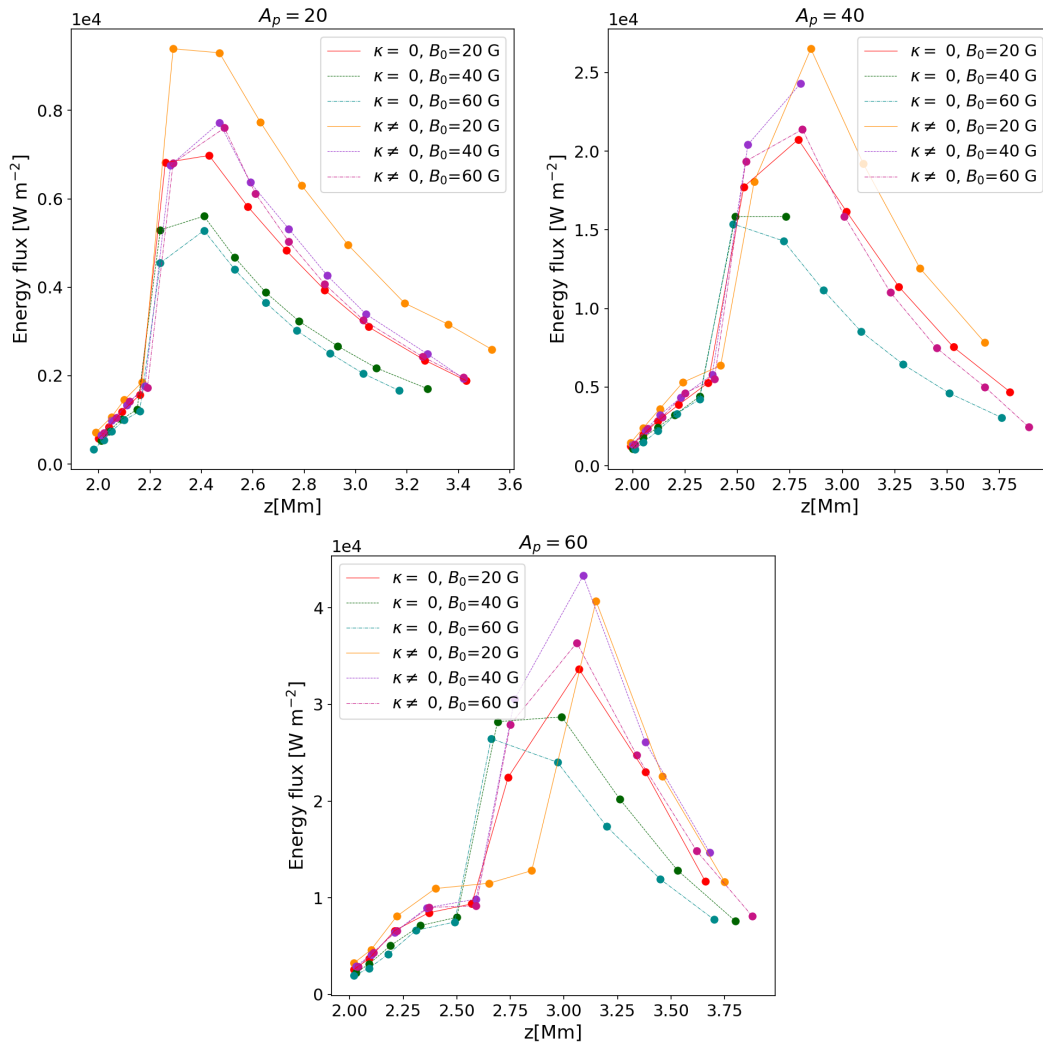


Figura 41. Flujo de energía en la dirección z transportada por los *jets* para $A_p = 20, 40, 60$, respectivamente.

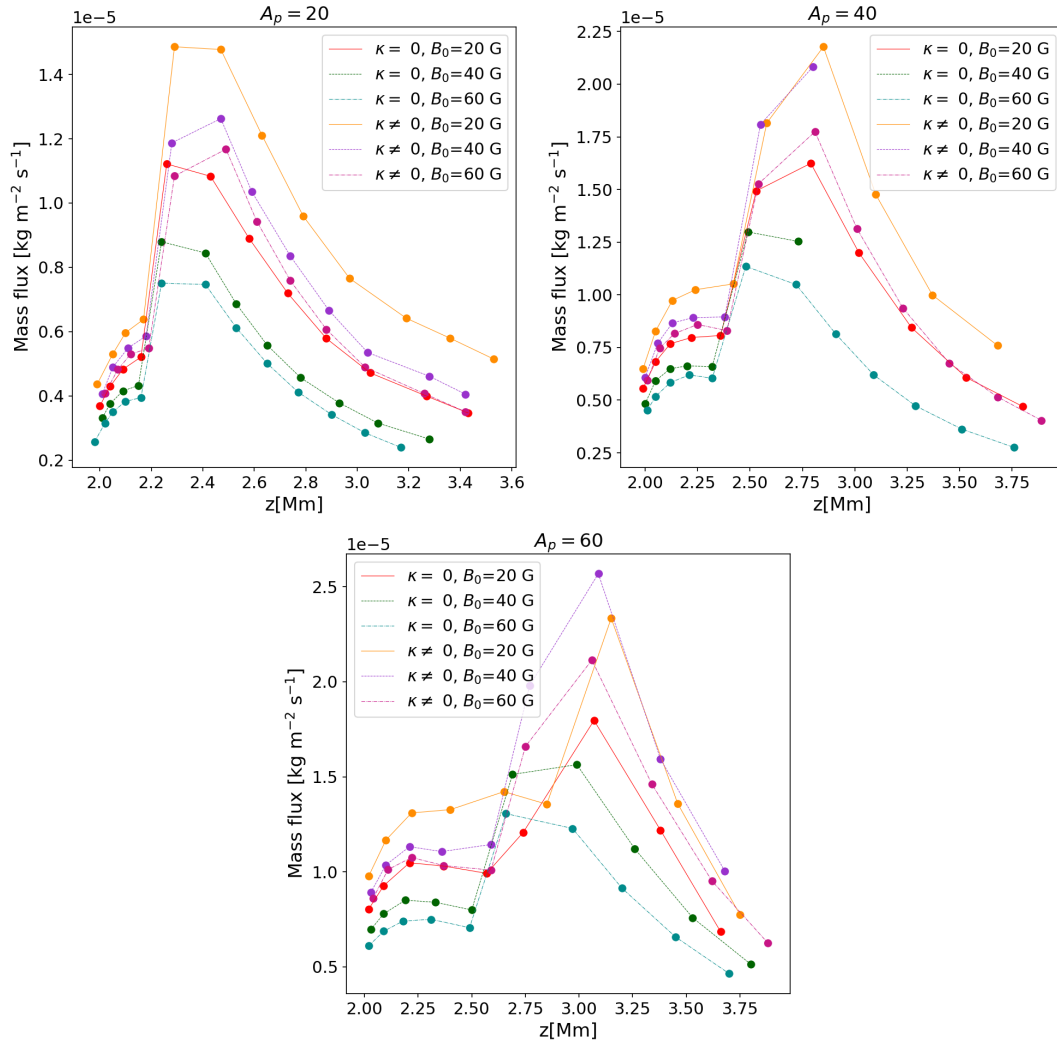


Figura 42. Flujo de masa en la dirección z transportada por los *jets* en las simulaciones con amplitud del *driver* de presión $A_p = 20, 40, 60$, respectivamente.

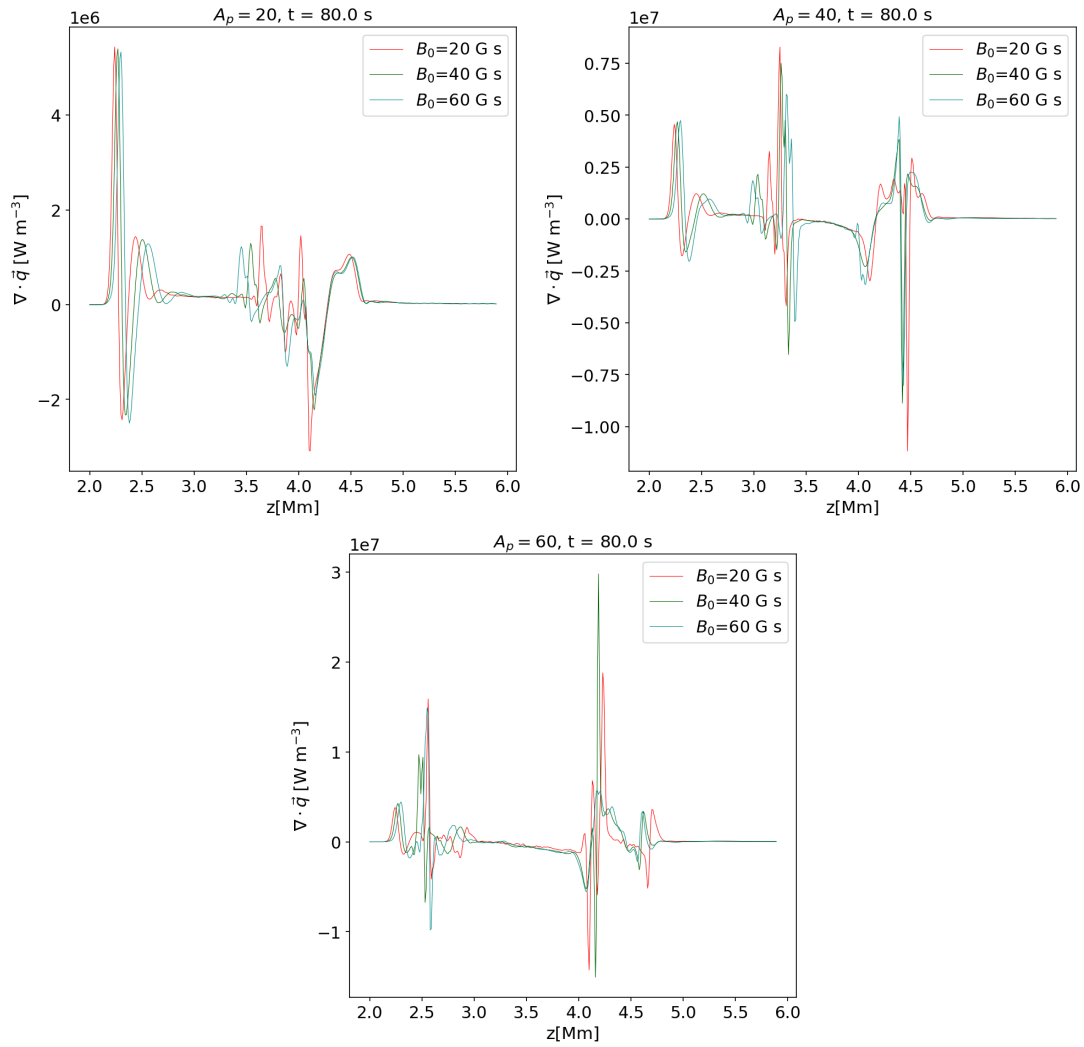


Figura 43. Tasa de pérdida de calor promediada horizontalmente en $t = 80$ s para $A_p = 20$, $A_p = 40$ y $A_p = 60$ respectivamente.

7. Conclusiones

En esta tesis se presentó el código MAGNUS que resuelve numéricamente las ecuaciones de la MHD con resistividad eléctrica y el flujo de calor. Mediante éste se estudiaron algunas dinámicas del plasma de la atmósfera solar relacionadas con la problemática del calentamiento de la cromosfera y la corona solar. Está programado en el lenguaje FORTRAN y tiene como base los códigos CAFE (Lora-Clavijo et al., 2015a) y Newtonian-CAFE (González-Avilés et al., 2015). A lo largo del documento se expone la capacidad del código de modelar fenómenos MHD. Este objetivo se logra mediante la reproducción de pruebas MHD estándar en una y dos dimensiones. En cada caso el código produce simulaciones en las que las variables físicas describen comportamientos esperados. La resistividad y el flujo de calor se verifican de manera independiente con pruebas diseñadas con este propósito. Se reproducen fenómenos físicos acordes a la inclusión de estos términos disipativos, esto comprueba que dichos términos están programados de forma correcta. Adicionalmente, se reproducen simulaciones de ondas MHD y se capturan efectos físicos similares a los obtenidos por otros códigos.

El documento contiene una descripción detallada de los métodos numéricos implementados. Conviene resaltar que en el código están programados el resolvidor de Riemann HLLC y el método de Transporte de Flujo Restringido. El código incluye una modificación de este último método para considerar los efectos de la resistividad eléctrica. La implementación correcta del método de Transporte de Flujo Restringido tiene una importancia especial. Esto se debe a que en las pruebas en dos y tres dimensiones se logra preservar la divergencia del campo magnético para

un rango de valores del orden de 1×10^{-12} ; un valor comparativamente muy inferior a los de las magnitudes de los campos magnéticos considerados. Este hecho garantiza que las simulaciones son auto-consistentes desde el punto de vista físico.

El código ha sido programado de manera que puedan adaptarse nuevos métodos numéricos por medio de subrutinas independientes. Para abordar cualquier problema sin restricciones de su extensión física, el código resuelve las ecuaciones en su forma adimensional. Estas son resueltas en una malla uniforme, lo que produce soluciones estables. Es de resaltar que esto evita la aparición de comportamientos no-físicos generados tanto en simulaciones con mallas no uniformes como en simulaciones obtenidas mediante el empleo de técnicas de malla adaptativa. Por lo tanto, las simulaciones con dominios no tan extensos y con resolución espacial intermedia se pueden estudiar sin preocupaciones por inestabilidades de origen numérico.

De otra parte, el código presenta una dificultad respecto al tiempo de cómputo que necesita para realizar las simulaciones en general. Esto puede ser una desventaja para los sistemas que requieran una resolución espacial muy fina. Por otro lado, el código usa un paso de tiempo adaptativo, el cual mantiene una relación de dependencia inversa con la magnitud del campo magnético. Por lo tanto, el tiempo empleado para el modelado de sistemas con campos magnéticos altos no es acorde a las expectativas de un investigador convencional.

Se estudiaron dos fenómenos de naturaleza diferente por medio de Magnus. El primero fue el modelado de la emergencia de un *blob* magnético eyectado desde la base de la fotosfera hacia un agujero coronal. Es un estudio de emergencia de flujo magnético novedoso por dos motivos. Uno, es que supone campos magnético de baja amplitud. Y otro, es que se modela su emergencia como

un resultado del movimiento convectivo creado por granulación. Del análisis de este fenómeno se encontró que el campo magnético del blob se reconecta con las líneas del agujero coronal. Esta reconexión de líneas de campo magnético es un efecto de la resistividad eléctrica. El blob reconectado emerge ascendentemente y sus líneas de campo magnético se reconectan de nuevo con las del medio circundante. En este proceso su aspecto esférico se modifica hasta desaparecer. En las capas superiores de la atmósfera ocurre una dinámica generada por todos estos procesos. Esta se puede resumir en que se generan flujos de plasma caliente en forma de onda de choque. Los valores del flujo de energía transportados hacia las capas superiores por esta onda, son considerablemente altos. Su magnitud está dentro de los valores estimados teóricamente para explicar una parte del calentamiento de la cromósfera y la corona.

El segundo fenómeno analizado por medio de Magnus corresponde al estudio de la generación de *tadpole jets* bajo los efectos de la conducción térmica. El análisis tuvo como objeto de estudio distintos conjuntos de simulaciones con diferentes parámetros. Estos están relacionados con los valores de la magnitud del campo magnético, la morfología de la generación del jet y el efecto causado por la conducción térmica. El resultado obtenido es el siguiente: la conducción térmica produce *tadpole jets* con una apariencia más colimada y mucho más energéticos. Los valores del flujo de energía y masa que transportan estos *jets* se incrementan considerablemente en comparación con los valores de estas cantidades obtenidos en las simulaciones en el régimen ideal. Los valores del flujo de energía transportado están dentro del orden de los valores estimados teóricamente de la pérdida de calor de la corona. Por lo tanto, este efecto causado por la conducción térmica tiene una notoria importancia dentro del contexto de la resolución al problema del

calentamiento de la corona.

Referencias Bibliográficas

- Alfvén, H. (1942). Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves. *Nature*, 150(3805):405–406.
- Alfvén, H. (1947). Magneto hydrodynamic waves, and the heating of the solar corona. *MNRAS*, 107:211.
- Antolin, P., Okamoto, T. J., De Pontieu, B., Uitenbroek, H., Van Doorselaere, T., and Yokoyama, T. (2015). Resonant Absorption of Transverse Oscillations and Associated Heating in a Solar Prominence. II. Numerical Aspects. *ApJ*, 809:72.
- Arregui, I. (2015). Wave heating of the solar atmosphere. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 373:20140261–20140261.
- Avrett, E. H. and Loeser, R. (2008). Models of the Solar Chromosphere and Transition Region from SUMER and HRTS Observations: Formation of the Extreme-Ultraviolet Spectrum of Hydrogen, Carbon, and Oxygen. *ApJs*, 175:229–276.
- Balsara, D. S. (2004). Second-order-accurate schemes for magnetohydrodynamics with divergence-free reconstruction. *ApJs*, 151(1):149.
- Balsara, D. S. and Spicer, D. S. (1999). A Staggered Mesh Algorithm Using High Order Godunov Fluxes to Ensure Solenoidal Magnetic Fields in Magnetohydrodynamic Simulations. *J. Comput. Phys*, 149:270–292.

- Baumann, G., Galsgaard, K., and Nordlund, Å. (2013). 3D Solar Null Point Reconnection MHD Simulations. *Sol. Phys.*, 284:467–487.
- Brackbill, J. (1985). Fluid modeling of magnetized plasmas. *Space Sci. Rev.*, 42(1-2):153–167.
- Brio, M. and Wu, C. C. (1988). An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 75:400–422.
- Bryan, G. L., Norman, M. L., O'Shea, B. W., Abel, T., Wise, J. H., Turk, M. J., Reynolds, D. R., Collins, D. C., Wang, P., Skillman, S. W., Smith, B., Harkness, R. P., Bordner, J., Kim, J.-h., Kuhlen, M., Xu, H., Goldbaum, N., Hummels, C., Kritsuk, A. G., Tasker, E., Skory, S., Simpson, C. M., Hahn, O., Oishi, J. S., So, G. C., Zhao, F., Cen, R., Li, Y., and Enzo Collaboration (2014). ENZO: An Adaptive Mesh Refinement Code for Astrophysics. *ApJs*, 211:19.
- Cheung, M. C. M. and Isobe, H. (2014). Flux Emergence (Theory). *Living Rev. Sol. Phys.*, 11:3.
- Chmielewski, P., Murawski, K., Musielak, Z. E., and Srivastava, A. K. (2014). Numerical Simulations of Impulsively Generated Alfvén Waves in Solar Magnetic Arcades. *ApJ*, 793:43.
- Dai, W. and Woodward, P. R. (1998). A Simple Finite Difference Scheme for Multidimensional Magnetohydrodynamical Equations. *J. Comput. Phys.*, 142:331–369.
- De Moortel, I. and Browning, P. (2015). Recent advances in coronal heating. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 373:20140269–20140269.

- De Moortel, I., Pascoe, D. J., Wright, A. N., and Hood, A. W. (2016). Transverse, propagating velocity perturbations in solar coronal loops. *Plasma Phys Contr F*, 58(1):014001.
- De Pontieu, B., McIntosh, S. W., Carlsson, M., Hansteen, V. H., Tarbell, T. D., Schrijver, C. J., Title, A. M., Shine, R. A., Tsuneta, S., Katsukawa, Y., Ichimoto, K., Suematsu, Y., Shimizu, T., and Nagata, S. (2007). Chromospheric Alfvénic Waves Strong Enough to Power the Solar Wind. *Science*, 318:1574.
- De Pontieu, B., Title, A. M., Lemen, J. R., Kushner, G. D., Akin, D. J., Allard, B., Berger, T., Boerner, P., Cheung, M., Chou, C., Drake, J. F., Duncan, D. W., Freeland, S., Heyman, G. F., Hoffman, C., Hurlburt, N. E., Lindgren, R. W., Mathur, D., Rehse, R., Sabolish, D., Seguin, R., Schrijver, C. J., Tarbell, T. D., Wülser, J. P., Wolfson, C. J., Yanari, C., Mudge, J., Nguyen-Phuc, N., Timmons, R., van Bezooijen, R., Weingrod, I., Brookner, R., Butcher, G., Dougherty, B., Eder, J., Knagenhjelm, V., Larsen, S., Mansir, D., Phan, L., Boyle, P., Cheimets, P. N., DeLuca, E. E., Golub, L., Gates, R., Hertz, E., McKillop, S., Park, S., Perry, T., Podgorski, W. A., Reeves, K., Saar, S., Testa, P., Tian, H., Weber, M., Dunn, C., Eccles, S., Jaeggli, S. A., Kankelborg, C. C., Mashburn, K., Pust, N., Springer, L., Carvalho, R., Kleint, L., Marmie, J., Mazmanian, E., Pereira, T. M. D., Sawyer, S., Strong, J., Worden, S. P., Carlsson, M., Hansteen, V. H., Leenaarts, J., Wiesmann, M., Aloise, J., Chu, K. C., Bush, R. I., Scherrer, P. H., Brekke, P., Martinez-Sykora, J., Lites, B. W., McIntosh, S. W., Uitenbroek, H., Okamoto, T. J., Gummin, M. A., Auken, G., Jerram, P., Pool, P., and Waltham, N. (2014). The Interface Region Imaging Spectrograph (IRIS). *Sol. Phys.*, 289(7):2733–2779.

- Del Zanna, L., Schaekens, E., and Velli, M. (2005). Transverse oscillations in solar coronal loops induced by propagating Alfvénic pulses. *A&A*, 431:1095–1104.
- Edwin, P. M. and Roberts, B. (1983). Wave propagation in a magnetic cylinder. *Sol. Phys.*, 88:179–191.
- Evans, C. R. and Hawley, J. F. (1988). Simulation of magnetohydrodynamic flows - A constrained transport method. *ApJ*, 332:659–677.
- Fryxell, B., Olson, K., Ricker, P., Timmes, F. X., Zingale, M., Lamb, D. Q., MacNeice, P., Rosner, R., Truran, J. W., and Tufo, H. (2000). FLASH: An Adaptive Mesh Hydrodynamics Code for Modeling Astrophysical Thermonuclear Flashes. *ApJs*, 131:273–334.
- Fuchs, F. G., McMurtry, A. D., Mishra, S., and Waagan, K. (2011). Simulating Waves in the Upper Solar Atmosphere with SURYA: A Well-balanced High-order Finite-volume Code. *ApJ*, 732:75.
- Fujimura, D. and Tsuneta, S. (2009). Properties of Magnetohydrodynamic Waves in the Solar Photosphere Obtained with Hinode. *ApJ*, 702:1443–1457.
- Goedbloed, J. P. H. and Poedts, S. (2004). *Principles of Magnetohydrodynamics: With Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas*. Cambridge University Press.
- González-Avilés, J. J., Cruz-Osorio, A., Lora-Clavijo, F. D., and Guzmán, F. S. (2015). Newtonian CAFE: a new ideal MHD code to study the solar atmosphere. *MNRAS*, 454:1871–1885.
- Goossens, M. (1991). Magnetohydrodynamic Waves and Wave Heating in Nonuniform Plasmas.

- In Priest, E. R. and Hood, A. W., editors, *Advances in Solar System Magnetohydrodynamics*, page 137.
- Gudiksen, B. V., Carlsson, M., Hansteen, V. H., Hayek, W., Leenaarts, J., and Martínez-Sykora, J. (2011). The stellar atmosphere simulation code bifrost - code description and validation. *A&A*, 531:A154.
- Hansteen, V., Guerreiro, N., De Pontieu, B., and Carlsson, M. (2015). Numerical Simulations of Coronal Heating through Footpoint Braiding. *ApJ*, 811:106.
- Harten, A., Lax, P. D., and van Leer, B. (1983). On upstreaming differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Rev*, 25:35–61.
- Hawley, J. F. and Stone, J. M. (1995). MOCCT: A numerical technique for astrophysical MHD. *Comput. Phys. Commun.*, 89:127–148.
- Heyvaerts, J. and Priest, E. R. (1983). Coronal heating by phase-mixed shear Alfvén waves. *A&A*, 117:220–234.
- Hood, A. W., Gonzalez-Delgado, D., and Ireland, J. (1997). Heating of coronal loops by phase-mixing. *A&A*, 324:11–14.
- Ionson, J. A. (1978). Resonant absorption of Alfvénic surface waves and the heating of solar coronal loops. *ApJ*, 226:650–673.
- Janvier, M., Aulanier, G., and Démoulin, P. (2015). From Coronal Observations to MHD Si-

- mulations, the Building Blocks for 3D Models of Solar Flares (Invited Review). *Sol. Phys.*, 290(12):3425–3456.
- Jelínek, P. and Murawski, K. (2013). Numerical simulations of magnetoacoustic-gravity waves in the solar coronal curved magnetic field lines structure. *MNRAS*, 434:2347–2354.
- Jess, D. B., Mathioudakis, M., Erdélyi, R., Crockett, P. J., Keenan, F. P., and Christian, D. J. (2009). Alfvén waves in the lower solar atmosphere. *Science*, 323(5921):1582–1585.
- Jess, D. B., Pascoe, D. J., Christian, D. J., Mathioudakis, M., Keys, P. H., and Keenan, F. P. (2012a). The Origin of Type I Spicule Oscillations. *ApJl*, 744(1):L5.
- Jess, D. B., Shelyag, S., Mathioudakis, M., Keys, P. H., Christian, D. J., and Keenan, F. P. (2012b). Propagating Wave Phenomena Detected in Observations and Simulations of the Lower Solar Atmosphere. *ApJ*, 746:183.
- Jiang, R. L., Fang, C., and Chen, P. F. (2012a). A new MHD code with adaptive mesh refinement and parallelization for astrophysics. *Comput. Phys. Commun.*, 183(8):1617–1633.
- Jiang, R.-L., Fang, C., and Chen, P.-F. (2012b). Numerical Simulation of Solar Microflares in a Canopy-type Magnetic Configuration. *ApJ*, 751:152.
- Khodachenko, M. L., Arber, T. D., Rucker, H. O., and Hanslmeier, A. (2004). Collisional and viscous damping of MHD waves in partially ionized plasmas of the solar atmosphere. *A&A*, 422:1073–1084.

- Khomenko, E. and Collados, M. (2015). Oscillations and Waves in Sunspots. *Living Rev. Sol. Phys.*, 12:6.
- Klimchuk, J. A. (2006). On Solving the Coronal Heating Problem. *Sol. Phys.*, 234(1):41–77.
- Konkol, P., Murawski, K., Lee, D., and Weide, K. (2010). Numerical simulations of the attenuation of the fundamental slow magnetoacoustic standing mode in a gravitationally stratified solar coronal arcade. *A&A*, 521:A34.
- Kreiss, H.-O. and Scherer, G. (1992). Method of lines for hyperbolic differential equations. *Siam J Numer Anal*, 29.
- Kuridze, D., Mathioudakis, M., Morgan, H., Oliver, R., Kleint, L., Zaqarashvili, T. V., Reid, A., Koza, J., Löfdahl, M. G., Hillberg, T., Kukhianidze, V., and Hanslmeier, A. (2019). Mapping the Magnetic Field of Flare Coronal Loops. *ApJ*, 874:126.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1960). *Electrodynamics of continuous media*. Elsevier Science.
- Leake, J. E., Arber, T. D., and Khodachenko, M. L. (2005). Collisional dissipation of Alfvén waves in a partially ionised solar chromosphere. *A&A*, 442:1091–1098.
- Li, S. (2005). An HLLC Riemann solver for magneto-hydrodynamics. *J. Comput. Phys*, 203(1):344–357.
- Lora-Clavijo, F. D., Cruz-Osorio, A., and Guzmán, F. S. (2015a). CAFE: A New Relativistic MHD Code. *ApJs*, 218(2):24.

- Lora-Clavijo, F. D., Cruz-Osorio, A., and Guzmán, F. S. (2015b). CAFE: A New Relativistic MHD Code. *ApJs*, 218:24.
- Lyon, J. G., Fedder, J. A., and Mobarry, C. M. (2004). The Lyon-Fedder-Mobarry (LFM) global MHD magnetospheric simulation code. *JASTP*, 66:1333–1350.
- Magara, T. and Longcope, D. W. (2003). Injection of magnetic energy and magnetic helicity into the solar atmosphere by an emerging magnetic flux tube. *ApJ*, 586(1):630–649.
- McIntosh, S. W., Tian, H., Sechler, M., and De Pontieu, B. (2012). On the Doppler Velocity of Emission Line Profiles Formed in the “Coronal Contraflow” that Is the Chromosphere-Corona Mass Cycle. *ApJ*, 749:60.
- Mignone, A., Bodo, G., Massaglia, S., Matsakos, T., Tesileanu, O., Zanni, C., and Ferrari, A. (2007). PLUTO: A Numerical Code for Computational Astrophysics. *ApJs*, 170:228–242.
- Miller, F., Vandome, A., and McBrewster, J. (2009). *Ideal Gas Law: Equation of State, Ideal Gas, Gas, Boyle’s Law, Charles’s Law, Kinetic Theory, Rudolf Clausius, State Function, Pressure, Volume, Amount of Substance, Mole (unit), Gas Constant, Kelvin*. Alphascript Publishing.
- Morton, R. J., Verth, G., McLaughlin, J. A., and Erdélyi, R. (2012). Determination of Sub-resolution Structure of a Jet by Solar Magnetoseismology. *ApJ*, 744:5.
- Möstl, U. V., Temmer, M., and Veronig, A. M. (2013). The Kelvin-Helmholtz Instability at Coronal Mass Ejection Boundaries in the Solar Corona: Observations and 2.5D MHD Simulations. *ApJ*, 766:L12.

- Murawski, K., Ballai, I., Srivastava, A. K., and Lee, D. (2013). Three-dimensional numerical simulation of magnetohydrodynamic-gravity waves and vortices in the solar atmosphere. *MNRAS*, 436:1268–1277.
- Murawski, K., Chmielewski, P., Zaqarashvili, T. V., and Khomenko, E. (2016). Numerical simulations of magnetic Kelvin-Helmholtz instability at a twisted solar flux tube. *MNRAS*, 459:2566–2572.
- Murawski, K. and Musielak, Z. E. (2010). Linear Alfvén waves in the solar atmosphere. *A&A*, 518:A37.
- Murawski, K., Srivastava, A. K., and Zaqarashvili, T. V. (2011). Numerical simulations of solar macropicules. *A&A*, 535:A58.
- Nakariakov, V. M., Ofman, L., Deluca, E. E., Roberts, B., and Davila, J. M. (1999). TRACE observation of damped coronal loop oscillations: Implications for coronal heating. *Science*, 285:862–864.
- Nakariakov, V. M. and Verwichte, E. (2005). Coronal Waves and Oscillations. *Living Rev. Sol. Phys.*, 2:3.
- Navarro, A., Lora-Clavijo, F. D., and González, G. A. (2017). Magnus: A New Resistive MHD Code with Heat Flow Terms. *ApJ*, 844:57.
- Navarro, A., Murawski, K., Wójcik, D., and Lora-Clavijo, F. D. (2019). Numerical simulations of the emerging plasma blob into a solar coronal hole. *MNRAS*, 489(2):2769–2774.

- Norman, M. L. (2000). Introducing zeus-mp: a 3d, parallel, multiphysics code for astrophysical fluid dynamics. *Rev. Mexicana Astron. Astrofis.*, 9:66.
- Ofman, L. (2010). Wave Modeling of the Solar Wind. *Living Rev. Sol. Phys.*, 7:4.
- Okamoto, T. J., Tsuneta, S., Berger, T. E., Ichimoto, K., Katsukawa, Y., Lites, B. W., Nagata, S., Shibata, K., Shimizu, T., Shine, R. A., Suematsu, Y., Tarbell, T. D., and Title, A. M. (2007). Coronal Transverse Magnetohydrodynamic Waves in a Solar Prominence. *Science*, 318:1577.
- Parker, E. N. (1963). Comments on Coronal Heating. In Evans, J. W., editor, *The Solar Corona*, volume 16 of *IAU Symposium*, page 11.
- Parnell, C. E. and De Moortel, I. (2012). A contemporary view of coronal heating. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 370(1970):3217–3240.
- Pascoe, D. J., Nakariakov, V. M., and Kupriyanova, E. G. (2013). Fast magnetoacoustic wave trains in magnetic funnels of the solar corona. *A&A*, 560:A97.
- Peter, H., Gudiksen, B. V., and Nordlund, Å. (2004). Coronal Heating through Braiding of Magnetic Field Lines. *ApJ*, 617:L85–L88.
- Petschek, H. E. (1964). Magnetic Field Annihilation. *NASA Spec. Publ.*, 50:425.
- Powell, K. G. (1994). An approximate riemann solver for magnetohydrodynamics(that works in more than one dimension). Technical report, Institute for Computer Applications in Science and Engineering (ICASE).

- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in FORTRAN (2Nd Ed.): The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA.
- Priest, E. (2014). *Magnetohydrodynamics of the Sun*. Cambridge University Press.
- Priest, E. R. (1982). in *Solar Magnetohydrodynamics*. Dordrecht: Reidel.
- Priest, E. R. and Hood, A. W., editors (1991). *Advances in Solar System Magnetohydrodynamics, 1991*.
- Reale, F. (2010). Coronal Loops: Observations and Modeling of Confined Plasma. *Living Reviews in Solar Physics*, 7(1):5.
- Roberts, B. (2000). Waves and Oscillations in the Corona - (Invited Review). *Sol. Phys.*, 193:139–152.
- Roberts, B. (2019). *MHD Waves in the Solar Atmosphere*. Cambridge University Press.
- Roe, P. L. (1981). Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. *J. Comput. Phys*, 43:357–372.
- Roe, P. L. (1986). Characteristic-based schemes for the euler equations. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 18:337–365.
- Schnack, D. D., editor (2009). *Lectures in Magnetohydrodynamics*, volume 780 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag.

- Shelyag, S., Fedun, V., and Erdélyi, R. (2008). Magnetohydrodynamic code for gravitationally-stratified media. *A&A*, 486(2):655–662.
- Shibata, K. and Magara, T. (2011). Solar Flares: Magnetohydrodynamic Processes. *Living Rev. Sol. Phys.*, 8:6.
- Shin, M.-S., Stone, J. M., and Snyder, G. F. (2008). The Magnetohydrodynamics of Shock-Cloud Interaction in Three Dimensions. *ApJ*, 680(1):336–348.
- Sod, G. A. (1978). Review. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws. *J. Comput. Phys*, 27(1):1–31.
- Spangler, S. R. (2009). Joule heating and anomalous resistivity in the solar corona. *Nonlinear Process. Geophys.*, 16:443–452.
- Spiegel, E. A. and Zahn, J. P. (1992). The solar tachocline. *A&A*, 265:106–114.
- Spitzer, L. (1956). *Physics of Fully Ionized Gases*. New York: Interscience Publishers.
- Spohn, T., Breuer, D., and Johnson, T. (2014). The sun. In *Encyclopedia of the solar system; 3rd ed.*, chapter 11, pages 235–259. Elsevier Science, Saint Louis.
- Srivastava, A. K., Murawski, K., Kuzma, B., Wójcik, D. P., Zaqarashvili, T. V., Stangalini, M., Musielak, Z. E., Doyle, J. G., Kayshap, P., and Dwivedi, B. N. (2018). Confined pseudo-shocks as an energy source for the active solar corona. *Nat. Astron.*, 2:951–956.

- Stone, J. M., Gardiner, T. A., Teuben, P., Hawley, J. F., and Simon, J. B. (2008). Athena: A New Code for Astrophysical MHD. *ApJs*, 178:137–177.
- Takahashi, K. and Yamada, S. (2013). Regular and non-regular solutions of the riemann problem in ideal magnetohydrodynamics. *J. Plasma Phys*, 79(3):335–356.
- Terradas, J., Soler, R., Luna, M., Oliver, R., and Ballester, J. L. (2015). Morphology and Dynamics of Solar Prominences from 3D MHD Simulations. *ApJ*, 799:94.
- Titarev, V. A. and Toro, E. F. (2004). Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws. *J. Comput. Phys*, 201(1):238–260.
- Titarev, V. A. and Toro, E. F. (2005). ADER schemes for three-dimensional non-linear hyperbolic systems. *J. Comput. Phys*, 204:715–736.
- Tomczyk, S., McIntosh, S. W., Keil, S. L., Judge, P. G., Schad, T., Seeley, D. H., and Edmondson, J. (2007). Alfvén Waves in the Solar Corona. *Science*, 317(5842):1192.
- Toriumi, S., Miyagoshi, T., Yokoyama, T., Isobe, H., and Shibata, K. (2011). Dependence of the Magnetic Energy of Solar Active Regions on the Twist Intensity of the Initial Flux Tubes. *PASJ*, 63:407–415.
- Toro, E. F. (2009). *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer.
- Toro, E. F., Spruce, M., and Speares, W. (1994). Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock Waves*, 4:25–34.

- Tóth, G. (2000). The $\nabla \cdot \mathbf{B}=0$ Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes. *J. Comput. Phys*, 161(2):605–652.
- Tóth, G. and Keppens, R. (2012). VAC: Versatile Advection Code.
- Trintchouk, F., Yamada, M., Ji, H., Kulsrud, R. M., and Carter, T. A. (2003). Measurement of the transverse Spitzer resistivity during collisional magnetic reconnection. *Phys. Plasmas*, 10:319–322.
- van Ballegooijen, A. A. (1986). Cascade of magnetic energy as a mechanism of coronal heating. *ApJ*, 311:1001–1014.
- Van Doorselaere, T., Nakariakov, V. M., and Verwichte, E. (2008). Detection of Waves in the Solar Corona: Kink or Alfvén? *ApJ*, 676:L73.
- van Leer, B. (1977a). Towards the ultimate conservative difference scheme. III - Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow. IV - A new approach to numerical convection. *J. Comput. Phys*, 23:263–299.
- van Leer, B. (1977b). Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV. A New Approach to Numerical Convection. *J. Comput. Phys*, 23:276.
- Vargas Domínguez, S., van Driel-Gesztelyi, L., and Bellot Rubio, L. R. (2012). Granular-Scale Elementary Flux Emergence Episodes in a Solar Active Region. *Sol. Phys.*, 278:99–120.

- Vernazza, J. E., Avrett, E. H., and Loeser, R. (1981). Structure of the solar chromosphere. III - Models of the EUV brightness components of the quiet-sun. *ApJs*, 45:635–725.
- Vigeesh, G., Fedun, V., Hasan, S. S., and Erdélyi, R. (2012). Three-dimensional simulations of magnetohydrodynamic waves in magnetized solar atmosphere. *ApJ*, 755(1):18.
- Vögler, A., Shelyag, S., Schüssler, M., Cattaneo, F., Emonet, T., and Linde, T. (2005). Simulations of magneto-convection in the solar photosphere. Equations, methods, and results of the MURaM code. *A&A*, 429:335–351.
- Vršnak, B., Žic, T., Vrbanec, D., Temmer, M., Rollett, T., Möstl, C., Veronig, A., Čalogović, J., Dumbović, M., Lulić, S., Moon, Y.-J., and Shanmugaraju, A. (2013). Propagation of Interplanetary Coronal Mass Ejections: The Drag-Based Model. *Sol. Phys.*, 285:295–315.
- Withbroe, G. L. and Noyes, R. W. (1977). Mass and energy flow in the solar chromosphere and corona. *ARA&A*, 15:363–387.
- Wójcik, D., Murawski, K., and Musielak, Z. E. (2018). Acoustic waves in two-fluid solar atmosphere model: cut-off periods, chromospheric cavity, and wave tunnelling. *MNRAS*, 481:262–267.
- Yang, L., Zhang, L., He, J., Peter, H., Tu, C., Wang, L., Zhang, S., and Feng, X. (2015). Numerical Simulation of Fast-mode Magnetosonic Waves Excited by Plasmoid Ejections in the Solar Corona. *ApJ*, 800(2):111.
- Ziegler, U. (2008). The NIRVANA code: Parallel computational MHD with adaptive mesh refinement. *Comput. Phys. Commun.*, 179:227–244.