

ESTUDIO DEL EFECTO DE LAS CORRECCIONES
POST-NEWTONIANAS EN LA EVOLUCIÓN DE
SISTEMAS AUTOGRAVITANTES DE MUCHAS
PARTÍCULAS

MSc. Javier Fernando Ramos Caro



FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2009

ESTUDIO DEL EFECTO DE LAS CORRECCIONES
POST-NEWTONIANAS EN LA EVOLUCIÓN DE
SISTEMAS AUTOGRAVITANTES DE MUCHAS
PARTÍCULAS

TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE DOCTOR EN CIENCIAS
NATURALES (FÍSICA)

PRESENTADO POR

JAVIER FERNANDO RAMOS CARO

DIRECTOR

Dr. GUILLERMO ALFONSO GONZÁLEZ VILLEGAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

2009

*El presente trabajo está dedicado a la memoria de mis abuelos
Hilda María Senior López y José Eusebio Caro Santos.*

Agradecimientos

Quiero expresar mis agradecimientos a todas aquellas personas que, directa o indirectamente, propiciaron el desarrollo del presente trabajo de tesis doctoral. Al profesor Guillermo Alfonso González Villegas, por depositar su confianza en las ideas que me permitieron emprender esta investigación y por brindarme una adecuada orientación a lo largo de estos cinco años. A Juan Felipe Pedraza Avella, quien introdujo invaluable aportes, producto de su excepcional talento y profesionalismo. A los demás colegas del GIRG, con quienes tuve la oportunidad de trabajar conjuntamente, haciendo posible que de este trabajo doctoral brotaran abundantes frutos: Camilo Akimushkin Valencia, Likidcen Framsol López Suspez y Sandra Marcela Plata Plata. A los colegas que me ayudaron, de una forma indirecta pero significativa, a enriquecer esta investigación: Favio Ernesto Cala Vitery, Marlon Guerra Mutis, Leonardo Augusto Pachón, José Luis González Arango (alias *Cheo*), José David Sanabria Gómez, Jaime Castro, Jerson Iván Reina Medrano (alias *Ghandi*), Julián Jaimes Santamaría (alias *Unabomber*), Antonio Calixto Gutierrez Piñeres (o simplemente *Toño*) y Viviana Marcela Viña Cervantes. Al profesor Yeinzon Rodríguez, cuyas importantes críticas y sugerencias ayudaron a delimitar el curso del presente trabajo, desde su propuesta inicial hasta la fase final de redacción. A quienes me apoyaron y proporcionaron las condiciones idóneas para estudiar felizmente: mis padres, Betty Caro Senior, Norman de Jesús Ramos Matajira y Franco L'Brum; mi esposa, Johanna Garrido Pinzón; mis suegros Piedad Pinzón de Garrido e Iván Garrido Sánchez. Por último, debo agradecer a la Vicerrectoría Académica de la Universidad Industrial de Santander por brindarme el auxilio económico necesario para llevar a cabo este estudio de posgrado.

Índice general

Agradecimientos	ix
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. CONTEXTO GENERAL	1
1.2. ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO	3
1.3. LA APROXIMACIÓN POST-NEWTONIANA	6
1.3.1. Ecuaciones de Campo y Movimiento 1PN	7
1.3.2. La Precesión del Perihelio	9
2. GRAVITACIÓN NEWTONIANA Y POST-NEWTONIANA DE SISTEMAS AXIALMENTE SIMÉTRICOS	13
2.1. EL MÉTODO DE HUNTER	14
2.1.1. Los Discos Generalizados de Kalnajs (DGK)	17
2.1.2. Una Nueva Familia Infinita de Modelos Estelares Discoidales	21
2.1.3. Modelos para cuatro galaxias en el cluster de la Osa Mayor: NGC3877, NGC3917, NGC3949 y NGC4010	27
2.2. ÓRBITAS EN CAMPOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS	36
2.2.1. El Método de las Superficies de Sección	36
2.2.2. Movimiento alrededor de Cuerpos con Deformación Prolata, Oblata y Octupolar	38
2.2.3. Movimiento Regular y Caótico en DGK	45
2.2.4. Órbitas en Modelos PRG	55
2.3. ÓRBITAS POST-NEWTONIANAS EN CAMPOS ESTÁTICOS CON SIMETRÍA AXIAL	60
2.3.1. Movimiento Alrededor de Objetos con Deformación Oblata y Prolata	62
2.3.2. Correcciones Post-newtonianas en las Curvas de Rotación	66
3. DESCRIPCIÓN ESTADÍSTICA DE SISTEMAS ESTELARES: I. RÉGIMEN SIN COLISIONES	69

3.1. SISTEMAS AUTOGRAVITANTES EN EQUILIBRIO: ESCENARIO NEWTONIANO	69
3.1.1. La Ecuación de Boltzmann sin Colisiones	70
3.1.2. FDs para Sistemas Axialmente Simétricos	71
3.1.3. Formalismos para Obtener FDs	78
3.1.4. FDs Dependientes de la Integral de Jacobi: el caso de los DGG	86
3.1.5. FDs para los modelos PRG	91
3.2. SISTEMAS ESTELARES EN EQUILIBRIO EN LA APROXIMACIÓN 1PN	95
3.2.1. Método de Hunter en la Aproximación 1PN	97
3.2.2. Ecuaciones Post-Newtonianas de la Autogravitación: Sistemas Estacionarios con Simetría Axial	99
3.2.3. Disco de Kalnajs en la Aproximación 1PN	102
3.2.4. Segundo Modelo GKD en la aproximación 1PN	104
3.2.5. Versión Post-newtoniana de los Modelos PRG	107
4. DESCRIPCIÓN ESTADÍSTICA DE SISTEMAS ESTELARES:	
II. RÉGIMEN COLISIONAL	111
4.1. HACIA UNA DINÁMICA POST-NEWTONIANA DE CORRELACIONES	114
4.1.1. Ecuaciones de Movimiento para un Sistema de Partículas Puntuales	114
4.1.2. Las Funciones de Distribución Reducidas	117
4.1.3. Jerarquía BBGKY en la aproximación 1PN	118
4.1.4. Ecuación de Liouville Generalizada y Dinámica de Correlaciones	120
4.1.5. Sobre la Obtención de una Ecuación Cinética	123
4.2. TEORÍA CINÉTICA POS-NEWTONIANA	129
4.2.1. La Ecuación de Fokker-Planck-Rosenbluth	129
4.2.2. Deducción a partir de la Ecuación Covariante de Fokker- Planck	131
4.2.3. Derivación a partir de la Dinámica Microscópica: La Primera ecuación 1PN-BBGKY	136
4.2.4. La Ecuación Fokker-Planck-Rosenbluth en la Aproximación 1PN	143

5. CONCLUSIONES	147
A. La Derivada Fraccional	157
B. Potenciales Post-newtonianos para un Sistema de N Partículas Puntuales Idénticas	159
C. Deducción de las Relaciones (4.142)-(4.144)	163

Índice de figuras

2.1. Densidad superficial de masa para los DGK	20
2.2. Densidad superficial de masa para los modelos PRG	24
2.3. Densidad superficial de masa corregida, para los modelos PRG	26
2.4. Curvas de rotación en modelos PRG	27
2.5. Curvas de rotación para las galaxias NGC3877, NGC3917, NGC3949 y NGC4010	31
2.6. Densidad superficial de masa para las galaxias NGC3877, NGC3917, NGC3949 y NGC4010	32
2.7. Frecuencia epicíclica cuadrática para las galaxias NGC3877, NGC3917, NGC3949 y NGC4010	33
2.8. Frecuencia vertical cuadrática para las galaxias NGC3877, NGC3917, NGC3949 y NGC4010	34
2.9. Superficie de sección asociada a una fuente con deformación prolata	40
2.10. Superficie de sección asociada a una fuente con deformación prolata y octupolar	41
2.11. Aumento de la caoticidad por incremento en el momento octupolar: fuente con deformación prolata	42
2.12. Aumento de la caoticidad por incremento en el momento octupolar: fuente con deformación oblata	43
2.13. Comportamiento de las órbitas meridionales de acuerdo con el mo- mento octupolar	44
2.14. Frecuencias epicíclica y vertical en DGK	46
2.15. Potencial efectivo y diagrama de fase para el DGK $m = 2$	48
2.16. Contornos de nivel para (a) $\tilde{\phi}_1$, (b) $\tilde{\phi}_2$, (c) $\tilde{\phi}_3$ y (d) $\tilde{\phi}_4$, cuando $E =$ $-1,245$ y $L_z = 0,2$	50
2.17. Órbitas meridionales típicas en DGK $m = 1$	51
2.18. Superficies de sección asociadas los DGK	52
2.19. Contornos de nivel para DGK $m = 1, 2$	53
2.20. Superficies de sección para DGK $m = 1, 2$	54
2.21. Frecuencia epicíclica cuadrática en modelos PRG	56
2.22. Frecuencia vertical cuadrática en modelos PRG	57
2.23. Superficies de sección en modelos PRG	59

2.24. Predicciones newtoniana y post-newtoniana en las superficies de sección: fuente con deformación oblata	64
2.25. Predicciones newtoniana y post-newtoniana en las superficies de sección: fuente con deformación prolata	65
2.26. Predicciones newtoniana y post-newtoniana en las curvas de rotación: DGK $m = 1, 2$	67
3.1. Funciones de distribución para los modelos PRG	92
3.2. Contornos de nivel para las FD de los modelos PRG	94
3.3. Predicciones newtoniana y post-newtoniana en la curva de rotación y densidad de masa: DGK $m = 1$	105
3.4. Predicciones newtoniana y post-newtoniana en la curva de rotación y densidad de masa: DGK $m = 2$	107
3.5. Predicciones newtoniana y post-newtoniana en la curva de rotación y densidad de masa: modelo PRG $k = 2$	110

Índice de cuadros

2.1.	Constantes B_n para $m = 2, 3, 4, 5$	23
2.2.	Constantes B_n corregidas, para los primeros cuatro modelos: $m =$ 2, 3, 4, 5.	25
2.3.	Constantes C_{2n} [km^2s^{-2}] y valores de m	31
2.4.	Tipo morfológico, radio a y masa total $\mathcal{M}$	32
2.5.	Estimación de los NCL para condiciones iniciales $z = 10^{-10}$, $R =$ 0,681, $V_R = 0,819$ de una órbita que cruza el disco, correspondiente a la región caótica de las figuras 2.18.	53
3.1.	Coeficientes B'_{1min} para los primeros cuatro modelos: $m = 2, 3, 4, 5$	93
3.2.	Constantes de expansión para los primeros cuatro miembros de la familia PRG.	108

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO DEL EFECTO DE LAS CORRECCIONES POST-NEWTONIANAS EN LA EVOLUCIÓN DE SISTEMAS AUTOGRAVITANTES DE MUCHAS PARTÍCULAS *

AUTOR: JAVIER FERNANDO RAMOS CARO **

PALABRAS CLAVE: Dinámica estelar, galaxias, aproximación post-newtoniana

DESCRIPCIÓN: El objetivo del presente trabajo consiste en emprender el estudio de los efectos que las primeras correcciones relativistas generales (aproximación 1PN), introducen en la descripción evolutiva de sistemas auto-gravitantes de muchas partículas. Se muestra cómo incorporar la aproximación 1PN en la dinámica de galaxias, con el fin de establecer una comparación directa con las predicciones arrojadas por la teoría de gravitación newtoniana y evaluar la importancia de las contribuciones post-newtonianas. Para ello, se presentan a lo largo de la tesis una exposición de ciertos resultados de interés construidos en el seno de la teoría newtoniana, para posteriormente confrontarlos con su versión 1PN. Desde un principio se aborda el problema de la descripción del movimiento de partículas en campos axialmente simétricos, desde una perspectiva newtoniana, para luego formular su versión post-newtoniana. Se encuentra que las contribuciones 1PN introducen cambios significativos en las curvas de rotación correspondientes a ciertos modelos estáticos axialmente simétricos. Esto se debe al carácter no lineal que las correcciones 1PN imprimen en la ley de rotación y no a las correcciones relativistas en la distribución de materia.

El estudio de sistemas dominados por los encuentros se establece en el marco de la mecánica estadística del no equilibrio, partiendo de las ecuaciones de movimiento proporcionadas por la aproximación 1PN. Para este caso se deducen las ecuaciones de la jerarquía BBGKY, cuya forma manifiesta marcadas diferencias con el caso newtoniano. Efectuando un tratamiento aproximativo sobre la primera ecuación de dicha secuencia, se deduce una ecuación cinética del tipo Fokker-Planck-Rusenbluth. Dicha expresión presenta marcadas diferencias con el resultado que se obtiene si se parte de una ecuación de Fokker-Planck covariante. La forma especial de estas ecuaciones, permite vislumbrar su posterior tratamiento numérico, con el ánimo de encontrar soluciones de interés físico y establecer una comparación con modelos newtonianos conocidos.

* Tesis Doctoral

** Facultad de Ciencias, Escuela de Física. Director: Guillermo A. González Villegas

ABSTRACT

TITLE: STUDY OF THE EFFECT OF POST-NEWTONIAN CORRECTIONS IN THE EVOLUTION OF SELF-GRAVITATING SYSTEMS *

AUTHOR: JAVIER FERNANDO RAMOS CARO **

KEY WORDS: Stellar Dynamics, galaxies, post-Newtonian approximation

DESCRIPTION: The main objective of this investigation is to start the study the effect caused by the first general relativistic corrections (1PN approximation), in the evolution of many particles self-gravitating systems. It shows how to incorporate the 1PN approximation in galactic dynamics, in order to establish a direct comparison with the predictions outlined by the Newtonian theory of gravitation and asses the importance of post-Newtonian contributions. To do this, we present throughout the thesis a statement of certain interesting results, built within the Newtonian theory, to then confront them with their 1PN version. From the beginning we deal with the problem concerning to the motion of particles in axially symmetric fields, from a Newtonian standpoint, to establish later its post-Newtonian version. We find that the 1PN contributions introduce important changes in the rotation curves corresponding to some static axially symmetric models. This is due to the nonlinear nature of 1PN corrections in the rotation law and not the relativistic corrections in the mass distribution.

The study of systems whose evolution is dominated by encounters is performed in the context of non equilibrium statistical mechanics, starting from the 1PN equations of motion, for a set of N point-like masses. For this case we obtain the equations of BBGKY hierarchy, exhibiting sharp differences with the purely Newtonian case. Performing an approximate treatment on the first equation of BBGKY hierarchy, we obtain a kinetic equation of the Fokker-Planck-Rusenbluth type. Such relation shows differences with the result obtained if one start from the covariant Fokker-Planck equation.. The special form of these equations provides a glimpse into their subsequent numerical treatment, in order to find particular solutions and establish a comparison with known Newtonian models.

* Tesis Doctoral

** Facultad de Ciencias, Escuela de Física. Director: Guillermo A. González Villegas

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. CONTEXTO GENERAL

Uno de los principales objetos de estudio en astrofísica son los grandes sistemas estelares o, también llamados, sistemas autogravitantes de muchas partículas. Con esto nos referimos a un conjunto de estrellas y demás cuerpos celestes, ligados mediante la interacción gravitacional. Entre los sistemas autogravitantes más estudiados están los clusters de estrellas, compuestos por entre 10^2 y 10^6 estrellas; galaxias, formadas por hasta 10^{12} estrellas y los grandes clusters de galaxias, que pueden contener miles de ellas. La dinámica de sistemas estelares se ocupa de estudiar el comportamiento de dichos objetos astrofísicos, a la luz de las leyes fundamentales. Aunque en la actualidad, la mejor teoría para la gravedad que disponemos es la relatividad general (TRG), la ley de gravitación universal de Newton es considerada por muchos como el paradigma que describe satisfactoriamente la dinámica de galaxias. Sabemos que los efectos relativistas se pueden manifestar de forma apreciable en algunos sistemas de estrellas binarias, en grandes clusters de galaxias o a escalas cosmológicas, pero en el área de la astrofísica denominada dinámica de galaxias parece ser un consenso general que los efectos relativistas de la gravitación no son tenidos en cuenta, por considerarse despreciables. Parece ser que, hasta el momento, no hay evidencia directa de su importancia, a escala galáctica [11].

No obstante, en años recientes se ha suscitado un creciente interés en incorporar TRG en la descripción de galaxias, como lo confirma la variedad de modelos estelares relativistas que tenemos hasta el momento (ver referencias [92, 93, 94, 53, 54, 123, 124, 125], entre otros). Quizás la principal razón para considerar TRG en la dinámica interna de las galaxias, sea la hipótesis de que las curvas de rotación predichas por TRG son mejor comportadas que las newtonianas. De hecho, algunos autores sostienen que, usando TRG, la celebrada hipótesis del halo de materia oscura es innecesaria (ver [34] y trabajos relacionados como [35, 22, 71, 101]). Sin embargo, algunas publicaciones han señalado que esta afirmación no es del todo cierta [83, 131, 52, 102]. En particular, Balasín

y Grumiller introdujeron un modelo relativista donde el porcentaje de materia oscura requerido, para explicar la curva de rotación plana, es de alrededor del 30 % menor que el requerido en el modelo newtoniano correspondiente [5]. A pesar de que las contribuciones relativistas no resuelven completamente el problema de las curvas de rotación en galaxias, parece ser que estas sí introducen efectos apreciables ¹.

Una forma de examinar el problema mencionado anteriormente consiste en tomar tan sólo las correcciones mas importantes que introduce TRG, a través de un esquema aproximativo que nos proporcione una teoría de la gravedad corregida a “primer orden”. Por ejemplo, si estamos interesados en estudiar dinámica de galaxias, observemos primero que la velocidad media de las estrellas $\bar{v}$ es mucho menor que la velocidad de la luz c , de tal forma que el cociente $\bar{v}/c \ll 1$ puede considerarse como un parámetro de expansión en el esquema aproximativo. De hecho, la primera aproximación post-newtoniana (1PN) proporciona un tratamiento adecuado para describir sistemas compuestos por partículas lentas con grandes masas (estrellas típicas). La aproximación 1PN, formulada por Einstein en 1949 [41, 42, 43] y revisada posteriormente por Weinberg [132], da las primeras correcciones relativistas generales de las ecuaciones de movimiento, es decir, a orden $\bar{v}^2/c^2$. Actualmente, aproximaciones post-newtonianas de mayor orden han sido desarrolladas a causa del creciente interés en torno a la cinemática de objetos astrofísicos (y su emisión asociada de ondas gravitacionales) como pulsares binarios, estrellas de neutrones y agujeros negros, los candidatos mas promisorios para detectores como LIGO, VIRGO y GEO600 [51, 91]. Sin embargo, en este trabajo trataremos tan sólo con la aproximación 1PN, ya que, además de proporcionar las contribuciones relativistas más apreciables, describe satisfactoriamente los fenómenos asociados con estrellas típicas (es preciso señalar que esta aproximación brinda una explicación muy adecuada y precisa a fenómenos como la deflexión de la luz y la precesión del perihelio alrededor del sol[132], como mostraremos al final del capítulo).

Existen otras razones, además de las expuestas anteriormente, que conducen a pensar que es necesario introducir las correcciones relativistas en la descripción evolutiva de una galaxia. Por ejemplo, en zonas de gran concentración material, como el núcleo y regiones aledañas, los campos gravitacionales pueden llegar a

¹Cabe señalar que nos referimos específicamente al problema de la materia oscura en galaxias y no a una escala mayor. Por ejemplo, en cosmología se requiere que el contenido energético del universo esté conformado en un 30 % por materia oscura, para lograr una concordancia con los datos extraídos de la radiación cósmica de fondo.

ser tan intensos que la mecánica newtoniana resulta insuficiente para explicar con precisión los fenómenos que allí sucedan. Si además se asume que, con el transcurso del tiempo, el sistema autogravitante es conducido por la gravitación hacia estados de creciente densidad y creciente intensidad del campo, es evidente que su comportamiento futuro estará cada vez más influido por los efectos relativistas. Incluso la evolución de regiones cuya densidad estelar es comparativamente baja, podría estar condicionada por dichos efectos. Aunque en estas (por ejemplo, el halo), el campo gravitacional no es tan intenso como en el bulbo, la acción persistente de las contribuciones relativistas, durante largos intervalos de tiempo (de 10^8 a 10^{10} años), puede dar lugar a fenómenos colectivos distintos de los que se llegarían a explicar o predecir usando gravitación newtoniana. Esta última consideración surge de uno de los principales paradigmas de la mecánica estadística del no-equilibrio²: la persistencia de las interacciones a lo largo del tiempo, en el seno de un sistema con muchos grados de libertad, es el mecanismo promotor de su evolución hacia estados de equilibrio [112].

1.2. ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO

La principal motivación del presente trabajo consiste en incorporar la aproximación 1PN en la dinámica de galaxias, con el fin de poder establecer una comparación directa con las predicciones arrojadas por la teoría de gravitación newtoniana y evaluar la importancia de las contribuciones post-newtonianas. Para ello, presentaremos a lo largo de la tesis una exposición de ciertos resultados de interés contruidos en el seno de la teoría newtoniana, para posteriormente confrontarlos con su versión 1PN.

Como se dijo anteriormente, existe una variedad de sistemas estelares que, de acuerdo con sus características internas (edad, masa, tamaño, número de estrellas), se les asocia un régimen especial de evolución. Sistemas como las galaxias, por ejemplo, pueden considerarse en su mayoría como sistemas *libres de colisiones*³, mientras que sistemas más pequeños como los clusters globulares, clusters

²Aquí se hace alusión a los aportes hechos, durante las últimas tres décadas, a la física de los sistemas complejos. Las contribuciones más significativas han sido lideradas principalmente por la escuela de Bruselas (Prigogine, Sverne, Balescu, Petroffsky [6, 112]).

³En el contexto de los sistemas estelares se prefiere usar el término *encuentros* en lugar de *colisiones*. La razón es que éstas últimas son bastante improbables en grandes sistemas autogravitantes y realmente son los encuentros o acercamientos mutuos entre estrellas los que podrían repercutir apreciablemente en la evolución.

abiertos, núcleos galácticos etc, se describen mejor a través de un *régimen collisional*. La primera parte de este trabajo (capítulos 2 y 3) lo dedicaremos al análisis de la dinámica de sistemas libres de colisiones. Son de gran interés en astrofísica los sistemas axialmente simétricos, ya que constituyen un modelo que se ajusta satisfactoriamente a la imagen que tenemos de muchas galaxias en el universo. En el capítulo 2 empezaremos estudiando el movimiento de partículas de prueba en campos axialmente simétricos, tanto desde la perspectiva newtoniana como desde la post-newtoniana. Aquí, los conceptos fundamentales que entran a colación, en el caso de órbitas tridimensionales, son los de regularidad y caos⁴. Como veremos, las contribuciones post-newtonianas modifican apreciablemente la estructura del espacio de fase asociado a las órbitas, tanto en regiones de regularidad, como en zonas caóticas. Además, en lo que respecta a órbitas circulares ecuatoriales en galaxias, veremos que las contribuciones 1PN introducen, en ciertos modelos, un efecto importante: el comportamiento de la curva de rotación post-newtoniana difiere significativamente de la newtoniana, en las inmediaciones del borde del disco galáctico. Eso es debido, no a las correcciones 1PN en la masa, sino a la naturaleza no lineal de la ley de rotación post-newtoniana, que mostraremos en el apartado 2.3.2.

Posteriormente, en el capítulo 3, emprendaremos el estudio desde el enfoque de la mecánica estadística del equilibrio, deteniéndonos en la construcción de modelos estelares autoconsistentes. Como resultado del análisis que efectuaremos en gravitación newtoniana, fijaremos las bases para la formulación del método que nos permitirá construir modelos autoconsistentes post-newtonianos. Los modelos newtonianos serán considerados como soluciones *semilla*, pues generarán su correspondiente contra partida post-newtoniana al ser introducidos en el mencionado método. Como veremos, la teoría newtoniana establece que son dos las integrales de las cuales depende la función de distribución: la energía E y el momento angular acimutal L_z ⁵. Esto introducirá una simplificación enorme en la obtención de funciones de distribución adecuadas a ciertos pares densidad-potencial (PDP). De hecho, se dispone en la actualidad de una variedad considerable de técnicas para la obtención de funciones de distribución dependientes de dos integrales (E y L_z), las cuales serán ilustradas en la sección 3.1.2. Inclusive, uno de los resultados del trabajo es precisamente, la elaboración de un nuevo formalismo para obtener funciones de distribución con simetría axial [110], presentado en el

⁴Como ha sido señalado por algunos autores, la naturaleza regular o caótica de las órbitas determina decisivamente la estructura interna de los sistemas estelares[107].

⁵Veremos que en el caso 1PN esto también es cierto.

apartado 3.1.3. Posteriormente nos concentraremos en FDs dependientes de la integral de Jacobi, la cual es, esencialmente, una combinación lineal de E y L_z . Veremos que la ventaja de trabajar con esta clase de FD, además de representar modelos de interés en astrofísica, facilita la posterior formulación de la versión 1PN del modelo newtoniano. Así, podremos llegar a la conclusión de que es posible obtener modelos post-newtonianos autoconsistentes en equilibrio, adecuados para describir galaxias planas axialmente simétricas. Mediante una comparación directa con el correspondiente modelo newtoniano (el formalismo 1PN permite hacer esto fácilmente), veremos que dichos estados de equilibrio presentan a veces diferencias significativas con los descritos por la aproximación 1PN.

En el capítulo 4 estudiaremos el régimen colisional. Sistemas estelares como los clusters globulares de estrellas, por ejemplo, se encuentran en una etapa de su evolución caracterizada por un proceso de relajación dominado por los encuentros débiles. Las correlaciones entre partículas juegan un papel fundamental aquí y, en consecuencia, es menester adentrarnos en el terreno de la mecánica estadística del no equilibrio. Para ello, es necesario tener en cuenta primero que el problema de la evolución macroscópica relativista general de los sistemas autogravitantes, es una cuestión que ya ha sido tratada, principalmente en la década de los 80, por Henry Kandrup y Werner Israel [78]. En una serie de tres artículos ellos muestran, desde una formulación covariante de la mecánica estadística del no-equilibrio en relatividad general, hasta la obtención (mediante técnicas de operadores de proyección) de una ecuación de Fokker-Planck relativista [78, 79, 80]. Esta parte del trabajo de tesis, enmarcada dentro de dicha teoría general, se orienta sin embargo en una dirección un tanto diferente. Uno de los interrogantes fundamentales aquí es: *¿De qué forma se ve modificada la descripción evolutiva de un sistema autogravitante de muchas partículas cuando se contemplan las primeras correcciones de la relatividad general?* Consideramos que dicha descripción debe establecerse, desde un principio, en el contexto de la mecánica estadística del no equilibrio y que las correcciones al campo gravitacional deben ser introducidas a través de las ecuaciones de movimiento proporcionadas por la aproximación 1PN, formuladas para un sistema autogravitante de N masas puntuales idénticas.

Este enfoque conduce a una formulación de la jerarquía BBGKY post-newtoniana (sección 4.1), la cual presenta marcadas diferencias con la secuencia newtoniana [11]. En el caso newtoniano, es sabido que la razón de cambio de las funciones de distribución reducidas f_s está determinada por la variación (respecto a las coordenadas de fase) de f_s y f_{s+1} . En el caso post-newtoniano, aparece una dependencia adicional con f_{s+2} . Esto implica, a la luz de la mecánica estadística

del no-equilibrio, una modificación sustancial en la dinámica de correlaciones de los sistemas autogravitantes de muchas partículas. En la sección 4.2 se contempla el problema de la obtención de una ecuación cinética⁶ tratable, para la función de distribución de una partícula, f . Empleando el formalismo de Klimontovich-Dupree (KD) y, posteriormente, estableciendo un tratamiento aproximativo sobre el término de colisiones, se deduce una expresión del tipo Fokker-Planck-Rusenbluth. Se espera que mediante un tratamiento numérico adecuado de dicha ecuación puedan obtenerse, en un futuro, algunas soluciones particulares que permitan vislumbrar una comparación con los modelos evolutivos newtonianos.

Antes de entrar de lleno en los detalles de la tesis, es preciso introducir los aspectos básicos del formalismo inherente a la aproximación 1PN, así como las principales pruebas observacionales que tenemos hasta el momento y algunas perspectivas de investigación en el tema. En particular, ilustraremos la utilidad de esta aproximación en el estudio del movimiento planetario, en donde se establece que el perihelio tiene una precesión que, en ciertos casos, es significativa. Sabemos que la precesión del perihelio de Mercurio es uno de los tests más concluyentes de la teoría general de la relatividad.

1.3. LA APROXIMACIÓN POST-NEWTONIANA

Las ecuaciones de campo de Einstein son no lineales, y por lo tanto no siempre pueden ser resueltas de forma exacta. Hoy en día sabemos que al imponer ciertas condiciones de simetría, podemos encontrar soluciones exactas útiles, pero en muchos casos ellas no son aplicables. El sistema solar, por ejemplo, no es estático e isótropo. Necesitamos, por lo tanto, no sólo encontrar mas soluciones exactas sino también disponer de un método sistemático aproximativo en el que no se asuman, en principio, propiedades de simetría del sistema. Hasta el momento existen dos métodos que han resultado particularmente útiles: la aproximación de campo débil y la aproximación post-newtoniana. En la primera se asumen campos débiles y partículas moviéndose relativísticamente, sirviendo como escenario para el estudio de ondas gravitacionales. En la segunda, tema principal del presente

⁶Se hace alusión a lo que, en el contexto histórico de la mecánica estadística, se entiende por ecuación cinética: una relación que expresa la razón de cambio temporal de f en términos de sus gradientes (de posición y de velocidad), evaluados en un mismo instante de tiempo (ver por ejemplo las referencias [14, 90, 130, 6]).

trabajo, está adaptada a sistemas compuestos por partículas que se mueven de forma no relativista, y experimentando tan sólo interacciones gravitacionales.

Históricamente Einstein fue el primero en calcular efectos post-newtonianos como la precesión del perihelio de mercurio y la deflexión de la luz[41]. Estudios de la aproximación post-newtoniana fueron llevados a cabo por Lorentz y Droste [98], Einstein, Infeld, y Hoffmann [41], Fock [48], Plebansky y Bazanski [108], y Chandrasekhar y colaboradores [28, 29, 30, 31]. Actualmente se sabe que la aproximación post-newtoniana es importante para analizar una gran variedad de problemas relativistas, tales como las ecuaciones de movimiento de pulsares binarios [34, 61, 74, 89], pruebas de la relatividad general en el sistema solar [133, 134, 135, 136], y radiación gravitacional [20, 32].

Cualquier esquema de aproximación requiere de uno o varios parámetros pequeños que caracterizan la naturaleza del sistema bajo estudio. Un parámetro típico adoptado en varios esquemas es la magnitud de la desviación de la métrica respecto a un cierto espacio-tiempo de fondo. En particular, si este telón de fondo es precisamente espacio-tiempo de Minkowski y existe sólo un parámetro, nos encontramos ante la llamada aproximación post-minkowskiana. Recibe este nombre debido a que el espacio-tiempo resultante se reduce al espacio-tiempo de Minkowski en el límite en el que el parámetro tiende a cero, el cual es conocido como el límite de campo débil. En el caso de la aproximación post-newtoniana el espacio-tiempo de fondo también es el de Minkowski, pero el parámetro de expansión es la velocidad típica de un componente del sistema dividido por la velocidad de la luz.

Tal vez, una de las razones para que el interés en la aproximación post-newtoniana haya crecido significativamente en los últimos años, sea el descubrimiento del sistema binario de estrellas de neutrones PSR 1913+16, ya que es el primer sistema astrofísico encontrado en donde los efectos relativistas de la gravitación juegan un papel fundamental en su evolución [66]. Especialmente, hacia el final de esta década, cabe resaltar que detectores tales como LIGO [1, 21] y VIRGO [16] lograron medir directamente el efecto de las ondas gravitacionales.

1.3.1. Ecuaciones de Campo y Movimiento 1PN

Sea un sistema autogravitante cuyos valores típicos de masa, separaciones y velocidad son $\bar{M}$, $\bar{r}$ y $\bar{v}$, respectivamente. De la mecánica newtoniana sabemos que la energía cinética típica $\bar{M}^2\bar{v}^2/2$ debe ser mas o menos del mismo orden de magnitud que la energía potencial típica $G\bar{M}^2/\bar{r}$ de tal manera que $\bar{v}^2 \sim G\bar{M}/\bar{r}$.

La aproximación post-newtoniana puede ser descrita como un método para obtener los movimientos del sistema a una potencia mayor de los parámetros $\bar{v}^2$ y $G\bar{M}/\bar{r}$, que la dada por la mecánica newtoniana. Es una expansión en potencias de $\bar{v}^2/c^2$ o, si se quiere, $G\bar{M}/c^2\bar{r}$. Dicha expansión se efectúa, en principio, sobre las ecuaciones de movimiento de la partícula (ecuación de la geodésica), que pueden escribirse como[132]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{dt^2} = & -\Gamma_{00}^i - 2\Gamma_{0j}^i \frac{dx^j}{dt} - \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \\ & + \left[\Gamma_{00}^0 + 2\Gamma_{0j}^0 \frac{dx^j}{dt} - \Gamma_{jk}^0 \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right] \frac{dx^i}{dt}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Fijémonos que en la aproximación Newtoniana, la anterior expresión se reduce a

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \simeq -\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i},$$

lo cual establece que la aceleración es proporcional a $G\bar{M}/\bar{r}^2$, es decir, $\bar{v}^2/r$. Por tanto el objetivo de la aproximación post-newtoniana es calcular $d^2 x^i/dt^2$ hasta orden $\bar{v}^4/c^2 r$. Comúnmente, se conoce este esquema como aproximación post-newtoniana de primer orden o simplemente, aproximación 1PN.

Como una consecuencia de los requerimientos anteriores, la aproximación 1PN establece que la métrica y el tensor energía momento obedecen a las siguientes expansiones[132]:

$$g_{00} \approx g_{00}^0 + g_{00}^2 + g_{00}^4, \quad g_{i0} \approx g_{i0}^1 + g_{i0}^3, \quad g_{ij} \approx g_{ij}^0 + g_{ij}^2,$$

y

$$T_{00} \approx T_{00}^0 + T_{00}^2, \quad T_{i0} \approx T_{i0}^1, \quad T_{ij} \approx T_{ij}^0 + T_{ij}^2,$$

respectivamente. El símbolo $\overset{n}{A}_{\mu\nu}$ denota el término de orden n en $\bar{v}/c$, correspondiente a la cantidad $A_{\mu\nu}$ (índices griegos corren desde 0 hasta 3, mientras que los índices latinos, de 1 a 3). Se cumple que $\overset{0}{g}_{00} = -1$, $\overset{1}{g}_{0i} = 0$ y $\overset{0}{g}_{ij} = \delta_{ij}$. Además, se puede mostrar que introduciendo coordenadas armónicas⁷ y definiendo

$$\begin{aligned} \overset{2}{g}_{00} & \equiv -2\phi/c^2, & \overset{3}{g}_{i0} & \equiv \zeta_i/c^3, \\ \overset{4}{g}_{00} & \equiv -2(\phi^2 + \psi)/c^4, \end{aligned}$$

⁷Un sistema de coordenadas armónicas es aquel en el que se cumple la relación $g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0$ [132].

las ecuaciones de campo se pueden escribir como[132]

$$\nabla^2 \phi = \frac{4\pi G}{c^2} T^{00}, \quad (1.2)$$

$$\nabla^2 \psi = 4\pi G (T^{00} + T^{ii}) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

$$\nabla^2 \zeta_i = \frac{16\pi G}{c} T^{i0}. \quad (1.4)$$

Las cantidades ϕ , ψ y ζ_i , llamados potenciales post-newtonianos, están restringidos por la condición de que en el límite newtoniano ϕ debe coincidir con el campo gravitacional clásico, mientras que ψ y ζ_i deben anularse. Dichos campos post-newtonianos determinan el movimiento de partículas de prueba mediante la relación

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = & -\nabla\phi - \frac{1}{c^2} \left[\nabla (2\phi^2 + \psi) - \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \zeta) \right. \\ & \left. + 3\mathbf{v} \frac{\partial\phi}{\partial t} + 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla\phi) - v^2 \nabla\phi \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Resulta curioso que el primer renglón del lado derecho tenga una estructura similar a la expresión para la fuerza de Lorentz, experimentada por una carga eléctrica con vector velocidad $\mathbf{v}$, cuando se encuentra en presencia de una campo electromagnético. La expresión anterior no es más que (1.1) pero escrita explícitamente en términos de los nuevos potenciales post-newtonianos definidos. A continuación, para ilustrar la utilidad de (1.5), mostraremos la forma en que conduce a una de las más importantes y conocidas predicciones de la teoría general de la relatividad: el perihelio de las órbitas planetarias (en principio, elípticas) experimenta, en cada instante del movimiento, una precesión que depende esencialmente de la masa solar $M_\odot$ y del momento angular específico $\mathbf{L}$, asociado a cada planeta. Este fenómeno se evidencia apreciablemente en el caso particular de la órbita de Mercurio, constituyendo uno de los tests clásicos de la relatividad general.

1.3.2. La Precesión del Perihelio

Desde el punto de vista de la gravitación newtoniana, una partícula de prueba (planeta) que se mueve alrededor de un centro de atracción kepleriano ⁸ (Sol), describe una órbita cuyo momento angular específico $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ se conserva. Esto, como sabemos, es una consecuencia de la simetría esférica implícita y conlleva al

⁸Con el término *kepleriano* hago alusión a una fuente esféricamente simétrica cuyo campo gravitacional obedece una ley de cuadrado inverso.

hecho de que el movimiento siempre estará confinado a un plano perpendicular a $\mathbf{L}$, llamado plano orbital. Una forma ilustrativa de obtener una expresión que describa dicha trayectoria, es observando que se cumple la siguiente relación:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{L} = -\frac{GM_{\odot}}{r^2}[(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{v})\mathbf{r} - r\mathbf{v}],$$

en donde $\hat{\mathbf{e}}_r$ es el vector unitario radial. Ahora bien, de acuerdo con la identidad

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} = \frac{1}{r^2}[(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{v})\mathbf{r} - r\mathbf{v}],$$

podemos escribir $d(\mathbf{v} \times \mathbf{L})/dt = GM_{\odot}d\hat{\mathbf{e}}_r/dt$, que al efectuar la integral con respecto a t , se obtiene[11]

$$\mathbf{v} \times \mathbf{L} = GM_{\odot} \left(\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{\mathbf{A}}{GM_{\odot}} \right), \quad (1.6)$$

donde $\mathbf{A}$ es un vector constante (integral de movimiento), llamado vector de Runge-Lenz. Dicho vector yace sobre el plano orbital (de hecho, es fácil mostrar que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$) y apunta en la dirección de va desde el Sol hasta el perihelio de la órbita⁹. Además, su magnitud es $A = eGM_{\odot}$, en donde e es la excentricidad de la trayectoria. Ahora, si se efectúa el producto punto de (1.6) con $\mathbf{r}$, se obtiene $L^2 = GM_{\odot}r + \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$, lo cual sirve para obtener una ecuación entre la coordenada radial r y la coordenada axial (o ángulo acimutal) φ ¹⁰. En efecto, si φ_0 es el ángulo acimutal correspondiente al vector de Runge-Lenz, entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos(\varphi - \varphi_0)$ y, en consecuencia, se obtiene la ecuación de la elipse

$$r = \frac{L^2}{GM_{\odot}} \frac{1}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (1.7)$$

Así, desde la perspectiva newtoniana, los planetas se mueven alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, en las que se conservan varias cantidades físicas como la energía, el momento angular total y el vector de Runge-Lenz. La conservación del vector $\mathbf{A}$ implica que tanto la excentricidad e como el ángulo φ_0 son constantes. Sin embargo, cuando las correcciones relativistas son tenidas en cuenta a través de la aproximación 1PN, es posible mostrar que φ_0 (la coordenada acimutal del perihelio) presenta una variación a lo largo del movimiento. Para

⁹La dirección en la cual apunta el vector de Lenz (también a veces referido como *vector excentricidad*) es llamada usualmente *línea de las ápsides*, dado que está a lo largo de la recta que pasa por el periápside (o perihelio) y el apoápside (o afelio).

¹⁰Las cantidades r y φ son las coordenadas polares de la partícula (respecto al centro de masa), definidas en el plano orbital.

ver esto, introducimos la ley post-newtoniana del movimiento generado por una fuente estática y esféricamente simétrica (el Sol, en una primera aproximación) [132],

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM_{\odot}}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{c^2} [2\nabla\phi_{\odot}^2 - 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\phi_{\odot} + v^2\nabla\phi_{\odot}] \quad (1.8)$$

con $\phi_{\odot} = -GM_{\odot}/r$. En virtud de esta ley post-newtoniana, el vector de Runge-Lenz, dado por

$$\mathbf{A} = -\frac{GM_{\odot}}{r}\hat{\mathbf{e}}_r + \mathbf{v} \times \mathbf{L}, \quad (1.9)$$

no será una integral de movimiento, ya que un cálculo directo de su derivada temporal revela que

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{\Upsilon} \times \mathbf{L} + \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{\Upsilon})] \quad (1.10)$$

en donde se ha definido

$$\mathbf{\Upsilon} = -2\nabla\phi_{\odot}^2 + 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\phi_{\odot} - v^2\nabla\phi_{\odot}. \quad (1.11)$$

A partir de (1.10) se puede calcular la precesión del perihelio, si se tiene en cuenta que $d\varphi_0/dt$ equivale a la razón de cambio de $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/A$ con respecto a t , a lo largo de la dirección perpendicular a $\mathbf{L}$ y $\mathbf{A}$. Es decir,

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = (\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{A}}) \cdot \frac{d\hat{\mathbf{A}}}{dt}, \quad (1.12)$$

de donde, tras introducir (1.9), (1.10) y efectuar la integral a lo largo de un período, se obtiene[132]

$$\Delta\varphi_0 = \frac{6\pi G^2 M_{\odot}^2}{c^2 L^2}, \quad (1.13)$$

para la precesión del perihelio. En particular, para la órbita de Mercurio alrededor del Sol tenemos $\Delta\varphi_0 = -2,06 \times 10^{-11}$ radianes o, si se quiere, $\Delta\varphi_0 = -17,6 \times 10^{-4}$ segundos de arco por siglo. La precesión calculada para los otros planetas es prácticamente despreciable, incluso para Venus, el segundo más cercano al Sol. Esto parece confirmar la idea de que las correcciones introducidas por TRG se hacen más significativas entre menor sea la distancia de separación (entre mayor sea el campo gravitacional). Sin embargo, como fue señalado por Balasin y Grumiller [5], esto no siempre es cierto y, curiosamente, la misma trayectoria post-newtoniana de Mercurio constituye un ejemplo claro: la distorsión de la órbita elíptica es notoriamente más pronunciada en el afelio que en el perihelio, a pesar de que en el primero la interacción gravitatoria es más intensa que en el segundo.

CAPÍTULO 2

GRAVITACIÓN NEWTONIANA Y POST-NEWTONIANA DE SISTEMAS AXIALMENTE SIMÉTRICOS

Como se dijo antes, usualmente se considera que la ley de gravitación universal de Newton describe satisfactoriamente el comportamiento de grandes sistemas estelares como las galaxias. Se sabe que, en muy buena aproximación¹, es posible modelar dichos sistemas asumiendo una distribución de masa continua, sin tener que trabajar con los billones de masas puntuales que representan cada una de las estrellas. Una vez se conoce la densidad de masa ρ , el potencial gravitacional ϕ queda automáticamente determinado por medio de la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \quad (2.1)$$

También es posible el proceso inverso a través de la misma relación: una vez conocido el potencial, determinar la distribución de materia que lo genera. De esta forma se obtiene lo que se conoce como el par densidad-potencial (PDP), el cual es la característica principal de un modelo estelar. El potencial gravitacional obtenido, determina a su vez la naturaleza del movimiento de las partículas bajo la acción de dicho campo, mediante la ecuación

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\phi, \quad (2.2)$$

en donde $\mathbf{v}$ es el vector velocidad y t el parámetro temporal. En este escenario de la gravedad newtoniana, nos concentraremos en un caso de especial interés en astrofísica: los sistemas estelares axialmente simétricos. Existe en el momento una

¹Es la llamada aproximación de campo medio[11].

gran variedad de PDPs para esta clase de sistemas: [126, 103, 8, 104, 106, 86, 87, 88, 85, 46, 47, 72, 73, 75]. Son de especial importancia los modelos discoidales delgados, por representar en buena aproximación al gran número de galaxias planas observadas (ver referencias [137, 89, 122, 126, 127, 18, 76, 55, 109]). Específicamente, un método simple para obtener la densidad superficial, el potencial gravitacional y la curva de rotación de discos de radio finito, fue desarrollado por Hunter [67]. Dicho método está basado en la obtención de soluciones de la ecuación de Laplace en términos de coordenadas esferoidales oblatas, las cuales están idóneamente concebidas para el estudio de discos planos de extensión finita. Mediante la superposición de soluciones de la ecuación de Laplace, expresiones para la densidad superficial del disco, el potencial gravitacional y la velocidad circular, pueden obtenerse como series de funciones elementales.

El ejemplo más simple de un disco finito obtenido por medio del método de Hunter es el bien conocido disco de Kalnajs [76], el cual puede ser obtenido también, achatando un esferoide uniformemente rotante [137, 17, 18]. El disco de Kalnajs tiene una densidad superficial bien comportada y representa un disco rotando uniformemente, de tal manera que su velocidad circular es proporcional al radio [67, 77]). Como veremos, otros modelos obtenidos mediante el método de Hunter son los discos generalizados de Kalnajs [55], los discos de Pedraza, Ramos y González [109] y modelos particulares para las galaxias NGC3877, NGC3917, NGC3949, NGC4010 [56]. A continuación esbozaremos los aspectos mas relevantes de dicho formalismo.

2.1. EL MÉTODO DE HUNTER

Con el fin de obtener modelos discoidales finitos axialmente simétricos, es necesario encontrar soluciones de la ecuación de Laplace que representen el potencial exterior de una fuente en forma de disco delgado. De acuerdo con esto, se necesita resolver la ecuación de Laplace para un potencial axialmente simétrico,

$$\phi_{,RR} + \frac{\phi_{,R}}{R} + \phi_{,zz} = 0, \quad (2.3)$$

donde (R, φ, z) son las coordenadas cilíndricas usuales. Se supone que, además de la simetría axial, el potencial gravitacional tiene simetría de reflexión con respecto al plano $z = 0$,

$$\phi(R, z) = \phi(R, -z), \quad (2.4)$$

de tal manera que la derivada normal del potencial, $\partial\phi/\partial z$, satisface la relación

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(R, -z) = -\frac{\partial\phi}{\partial z}(R, z), \quad (2.5)$$

en concordancia con el carácter atractivo del campo gravitacional. También se asume que $\partial\phi/\partial z$ no se anula en el plano $z = 0$, con el fin de tener una distribución delgada de materia que representa el disco.

Dado un potencial gravitacional $\phi(R, z)$ con las propiedades anteriores, la densidad $\Sigma(R)$ de la distribución superficial de materia puede ser obtenida usando la ley de Gauss [11]. Entonces, usando la ecuación (2.5), se tiene

$$\Sigma(R) = \frac{1}{2\pi G} \left[\frac{\partial\phi}{\partial z} \right]_{z=0^+}. \quad (2.6)$$

Ahora, para obtener una densidad superficial correspondiente a una distribución discoidal finita de materia, se deben imponer las condiciones de frontera

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(R, 0^+) \neq 0; \quad R \leq a, \quad (2.7a)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(R, 0^+) = 0; \quad R > a, \quad (2.7b)$$

de tal manera que la distribución de materia está restringida al disco $z = 0$, $0 \leq R \leq a$. Introduciremos ahora las coordenadas esferoidales oblatas, cuya simetría se adapta en forma natural a la geometría del modelo. Estas coordenadas están relacionadas con las cilíndricas por medio de la relación [105],

$$R = a\sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)}, \quad (2.8a)$$

$$z = a\xi\eta, \quad (2.8b)$$

donde $0 \leq \xi < \infty$ y $-1 \leq \eta < 1$. Obsérvese que el disco tiene coordenadas $\xi = 0$, $0 \leq \eta^2 < 1$. Al cruzar el disco, η cambia de signo pero no cambia su valor absoluto. Este comportamiento singular de la coordenada η implica que una función par de η es una función continua en todo el dominio pero tiene una derivada con respecto a η discontinua.

Ahora, en términos de coordenadas esferoidales oblatas, la ecuación de Laplace se puede escribir como

$$[(1 + \xi^2)\phi_{,\xi}]_{,\xi} + [(1 - \eta^2)\phi_{,\eta}]_{,\eta} = 0, \quad (2.9)$$

y necesitamos encontrar soluciones que sean funciones pares de η y con las condiciones de contorno

$$\phi_{,\xi}(0, \eta) = F(\eta), \quad (2.10a)$$

$$\phi_{,\eta}(\xi, 0) = 0, \quad (2.10b)$$

donde $F(\eta)$ es una función par que puede ser expresada como una superposición de polinomios de Legendre en el intervalo $-1 \leq \eta \leq 1$ [9]. De acuerdo con esto, el potencial gravitacional newtoniano para el exterior de un disco finito delgado con una densidad de materia axialmente simétrica puede ser escrito como [9],

$$\phi(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad (2.11)$$

donde C_{2n} son constantes arbitrarias, $P_{2n}(\eta)$ son los polinomios de Legendre y $q_{2n}(\xi) = i^{2n+1} Q_{2n}(i\xi)$, siendo Q_{2n} las funciones de Legendre de segunda clase. Con esta solución general para el potencial gravitacional, la densidad superficial está dada por

$$\Sigma(R) = \frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} (2n+1) q_{2n+1}(0) P_{2n}(\eta) \quad (2.12)$$

y, como mostraremos después, las constantes arbitrarias C_{2n} pueden escogerse apropiadamente de tal manera que la densidad superficial presente un comportamiento físicamente razonable.

Además de la densidad de materia, otra cantidad comúnmente usada para caracterizar galaxias es la **velocidad circular** $v_c(R)$, también llamada curva de rotación, definida como la velocidad tangencial de las estrellas en órbitas circulares alrededor del centro. Ahora, dado $\phi(R, z)$, podemos fácilmente evaluar $v_c(R)$ a través de la relación

$$v_c^2 = R \left[\frac{\partial \phi}{\partial R} \right]_{z=0}, \quad (2.13)$$

de tal manera que, usando (2.11), obtenemos

$$v_c^2(R) = \frac{R^2}{(a^2 - R^2)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(0) P'_{2n}(\eta). \quad (2.14)$$

Además de la velocidad circular, existen otras dos cantidades importantes, en lo que respecta a la cinemática de los modelos. Estas, describen la estabilidad ante perturbaciones radiales y verticales de partículas que efectúan órbitas cuasicirculares [11]. Se trata de la **frecuencia epicíclica**,

$$\kappa^2(R) = \frac{1}{R} \frac{dv_c^2}{dR} + \frac{2v_c^2}{R^2}. \quad (2.15)$$

y la **frecuencia vertical**,

$$\nu^2(R) = \nabla^2 \phi \big|_{z=0} - \frac{1}{R} \frac{dv_c^2}{dR}, \quad (2.16)$$

Si los valores de κ^2 y ν^2 son positivos, tendremos un caso de estabilidad, mientras que valores negativos de estas cantidades, representan situaciones de inestabilidad (ante perturbaciones radiales y verticales, respectivamente)².

A continuación mostraremos tres aplicaciones del método de Hunter: (i) los discos generalizados de Kalnajs; (ii) los modelos de Pedraza, Ramos y González; (iii) y por último, una clase de modelos que obedecen a una determinada ley de rotación. Precisamente, en la sección 2.1.3 contemplaremos específicamente el caso de cuatro galaxias en el cluster de la Osa Mayor: NGC3877, NGC3917, NGC3949 y NGC4010, las cuales se ajustan satisfactoriamente a dicha ley de rotación. Por lo pronto, para familiarizarnos con el método comenzaremos presentando la construcción de los discos generalizados de Kalnajs.

2.1.1. Los Discos Generalizados de Kalnajs (DGK)

Especificaremos el formalismo general esbozado anteriormente, considerando una familia de discos finitos delgados con una densidad de masa bien comportada. Se exigirá que la densidad superficial de masa sea una función monótonamente decreciente con el radio, con un máximo en el centro y anulándose en el borde. Para esto, se deben imponer las condiciones

$$\Sigma(a) = 0, \quad (2.17)$$

$$\Sigma(0) = \Sigma_{max}, \quad (2.18)$$

y también exigir que

$$M = 2\pi \int_0^a \Sigma(R) R dR, \quad (2.19)$$

donde M es la masa total del disco. Ahora, usando la condición de contorno (2.10a), la densidad superficial puede escribirse en la forma

$$\Sigma(R) = \frac{F(\eta)}{2\pi a G \eta}, \quad (2.20)$$

donde $F(\eta)$ es una función par de η , monótonamente decreciente en el intervalo $0 \leq \eta \leq 1$, y tal que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{F(\eta)}{\eta} = 0. \quad (2.21)$$

²Estas dos últimas ecuaciones no son realmente las definiciones fundamentales para κ^2 y ν^2 , sino una forma alternativa de expresar estas cantidades, en términos de la velocidad circular. Más adelante, a través de las aplicaciones (en particular, 2.1.3), estudiaremos dichas cantidades más detalladamente.

Además imponemos la condición

$$\int_0^1 F(\eta) d\eta = \frac{MG}{a}, \quad (2.22)$$

en concordancia con la ecuación (2.19). Una función simple $F(\eta)$ que concuerda con todos los anteriores requerimientos es[96]:

$$F(\eta) = (2m+1) \frac{MG}{a} \eta^{2m}, \quad (2.23)$$

donde, con el fin de satisfacer (2.21), se debe tomar $m \geq 1$. Con esta particular escogencia de $F(\eta)$ se obtiene una familia infinita de discos finitos con densidades de masa dadas por

$$\Sigma_m(R) = \frac{(2m+1)M}{2\pi a^2} \left[1 - \frac{R^2}{a^2} \right]^{m-1/2}. \quad (2.24)$$

Como se puede ver fácilmente, el disco con $m = 1$ corresponde al bien conocido disco de Kalnajs [76]. En consecuencia, esta familia de discos finitos delgados puede ser entonces considerada como una generalización del disco de Kalnajs.

Ahora, de la relación (2.12), la función $F(\eta)$ puede escribirse como

$$F(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n} P_{2n}(\eta), \quad (2.25)$$

con

$$K_{2n} = (2n+1) q_{2n+1}(0) C_{2n}. \quad (2.26)$$

Los coeficientes K_{2n} son encontrados, usando la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre, a través de la expresión

$$K_{2n} = \frac{4n+1}{2} \int_{-1}^1 F(\eta) P_{2n}(\eta) d\eta. \quad (2.27)$$

La anterior ecuación puede ser expresada como [9]

$$K_{2n} = \frac{MG}{2a} \left[\frac{\pi^{1/2} (4n+1) (2m+1) \Gamma(2m+1)}{2^{2m} \Gamma(1+m-n) \Gamma(m+n+\frac{3}{2})} \right],$$

de manera que, usando las propiedades de la función Gama, se obtiene:

$$C_{2n} = \frac{MG}{2a} \left[\frac{\pi^{1/2} (4n+1) (2m+1)!}{2^{2m} (2n+1) (m-n)! \Gamma(m+n+\frac{3}{2}) q_{2n+1}(0)} \right],$$

para $n \leq m$ y $C_{2n} = 0$ para $n > m$.

Con los anteriores valores de C_{2n} se pueden calcular las diferentes cantidades físicas que caracterizan el comportamiento de los modelos. Entonces, por ejemplo, el potencial gravitacional para los tres primeros miembros de la familia, están dados por

$$\phi_1(\xi, \eta) = -\frac{MG}{a}[\cot^{-1} \xi + A(3\eta^2 - 1)], \quad (2.28a)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(\xi, \eta) = & -\frac{MG}{a}[\cot^{-1} \xi + \frac{10A}{7}(3\eta^2 - 1) \\ & + B(35\eta^4 - 30\eta^2 + 3)], \end{aligned} \quad (2.28b)$$

$$\begin{aligned} \phi_3(\xi, \eta) = & -\frac{MG}{a}[\cot^{-1} \xi + \frac{10A}{6}(3\eta^2 - 1) \\ & + \frac{21B}{11}(35\eta^4 - 30\eta^2 + 3) \\ & + C(231\eta^6 - 315\eta^4 + 105\eta^2 - 5)], \end{aligned} \quad (2.28c)$$

donde

$$A = \frac{1}{4}[(3\xi^2 + 1)\cot^{-1} \xi - 3\xi], \quad (2.29a)$$

$$B = \frac{3}{448}[(35\xi^4 + 30\xi^2 + 3)\cot^{-1} \xi - 35\xi^3 - \frac{55}{3}\xi], \quad (2.29b)$$

$$\begin{aligned} C = & \frac{5}{8448}[(231\xi^6 + 315\xi^4 + 105\xi^2 + 5)\cot^{-1} \xi \\ & - 231\xi^5 - 238\xi^3 - \frac{231}{5}\xi], \end{aligned} \quad (2.29c)$$

con expresiones similares pero más complejas, para valores mas grandes de m .

Tomando $\xi = 0$ en las anteriores expresiones, se obtiene el valor del potencial dentro del disco. En particular, para el primer miembro de la familia,

$$\phi_1(R, 0) = \frac{3\pi MG}{8a^3}R^2, \quad (2.30)$$

para $R \leq a$, y esta relación es completamente equivalente a la correspondiente expresión dada en [76].

Las expresiones para la velocidad circular correspondiente a los tres primeros miembros son

$$V_1^2 = \frac{3\pi MG}{4a}\tilde{R}^2, \quad (2.31a)$$

$$V_2^2 = \frac{15\pi MG}{32a}\tilde{R}^2(4 - 3\tilde{R}^2), \quad (2.31b)$$

$$V_3^2 = \frac{105\pi MG}{256a}\tilde{R}^2(5\tilde{R}^4 - 12\tilde{R}^2 + 8), \quad (2.31c)$$

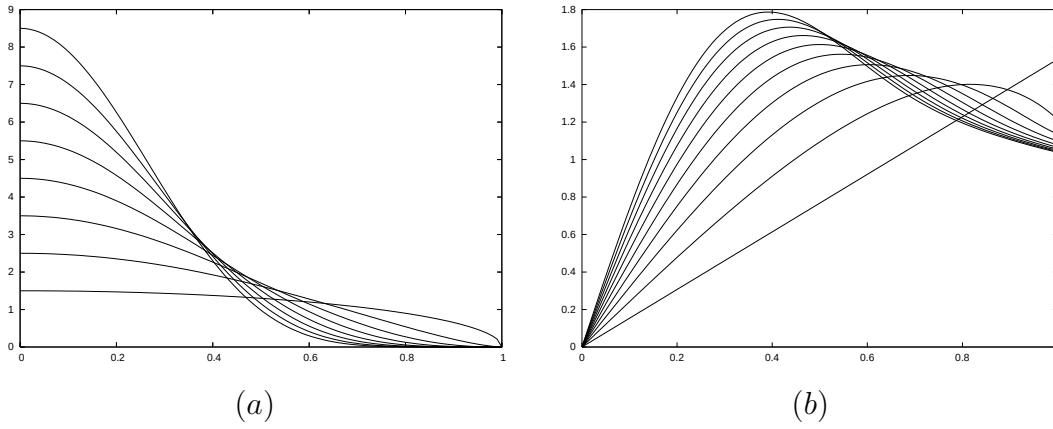


Figura 2.1: **(a)** Densidad superficial $\tilde{\Sigma}_m$ como función de $\tilde{R}$ para los DGK desde $m = 1$ (curva inferior hacia la izquierda) hasta $m = 8$ (curva superior hacia la izquierda). **(b)** Curvas de rotación $\tilde{V}_m$ para los mismos modelos, también desde $m = 1$ (línea recta) hasta $m = 10$ (curva superior).

donde $\tilde{R} = R/a$.

En la figura 2.1(a) graficamos la cantidad adimensional $\tilde{\Sigma}_m = M\tilde{\Sigma}_m(\tilde{R})/\pi a^2$ para $m = 1, \dots, 8$ y para $0 \leq \tilde{R} \leq 1$. Como podemos ver, los discos con mayores valores de m presentan una mayor concentración de masa en el centro. Estos discos pueden ser considerados como modelos apropiados para describir galaxias con un bulbo central.

Para ilustrar el comportamiento de las curvas de rotación graficamos la cantidad adimensional $V_m(R) = \sqrt{MG/a}\tilde{V}_m(\tilde{R})$, en la figura 2.1(b), para $m = 1, \dots, 10$. La velocidad circular correspondiente a $m = 1$ es proporcional al radio, representando un disco uniformemente rotante. Por otra parte, para $m > 1$, la velocidad circular crece desde cero en el centro del disco, hasta que alcanza un máximo en un radio crítico y luego decrece hasta un valor finito en el borde del disco. El valor del radio crítico decrece cuando m crece.

Aunque los modelos presentan un buen comportamiento en la densidad de masa, sus curvas de rotación no se aproximan satisfactoriamente a los datos medidos en muchas galaxias. Usualmente las observaciones revelan que la velocidad circular, en zonas alejadas del núcleo, no decae a medida que crece el radio, sino que tiende a mantenerse constante o, en ciertas ocasiones, crece modestamente. No obstante, como mostraremos a continuación, la importancia de estos modelos es fundamental ya constituyen el punto de partida para la formulación de otros

modelos mas acordes con la observación.

2.1.2. Una Nueva Familia Infinita de Modelos Estelares Discoidales

En la presente sección mostraremos la formulación de un nuevo conjunto infinito de discos delgados, generados mediante la superposición de miembros de la familia DGK, de tal forma que la densidad superficial resultante pueda expresarse como una función bien comportada del potencial gravitacional. Como ha sido señalado por diversos autores, este es un requerimiento fundamental para la búsqueda de funciones de distribución que describen sistemas axialmente simétricos en equilibrio (ver por ejemplo [50, ?, 75]). Así, la nueva familia de modelos tiene la ventaja de proporcionar su propia función de distribución (ver apartado 3.1.5).

Además, los modelos tiene dos ventajas adicionales. Por una parte, la densidad superficial de masa es bien comportada, como en el caso de los DGK, teniendo un máximo en el centro y anulándose en el borde. La distribución de masa de miembros superiores de la familia está mas concentrada en el centro. Por otra parte, las curvas de rotación son mejor comportadas que las de los DGK. Encontraremos que en algunos casos, la velocidad circular crece desde cero, en el centro del disco, luego alcanza un máximo en algún radio crítico y, después de esto, permanece aproximadamente constante.

Comenzaremos diciendo que $\phi_n(0, \eta)$, dado por (2.11), puede escribirse como

$$\phi_n(0, \eta) = - \sum_{s=0}^n \sum_{r=0}^s A_{sr} \eta^{2s-2r}, \quad (2.32)$$

donde A_{sr} son constantes definidas como

$$A_{sr} = \frac{(-1)^r (4s - 2r)! C_{2s} q_{2s}(0)}{2^{2s} r! (2s - 2r)! (2s - r)!}, \quad (2.33)$$

y la relación (2.32) fue obtenida introduciendo la identidad[4]

$$P_{2s}(\eta) = \sum_{r=0}^s \frac{(-1)^r (4s - 2r)!}{2^{2s} r! (2s - 2r)! (2s - r)!} \eta^{2s-2r}. \quad (2.34)$$

De (2.32) vemos que el máximo valor del potencial gravitacional del n -ésimo disco es $\phi_n(0, 0)$. Como veremos mas adelante, resulta conveniente definir un potencial relativo mediante

$$\Psi_n(\eta) = \phi_n(0, 0) - \phi_n(0, \eta). \quad (2.35)$$

Ahora, supongamos que escogemos una combinación lineal de estos Ψ_n , de tal manera que conduzca a un nuevo potencial relativo $\tilde{\Psi}_m$ de la forma

$$\tilde{\Psi}_m = \sum_{n=1}^m B_n \Psi_n = A_{m0} \eta^{2m}, \quad (2.36)$$

donde B_n son constantes que pueden ser determinadas a partir de A_{nr} y C_n . El nuevo potencial relativo $\tilde{\Psi}_m$ es generado por una nueva distribución de masa, descrita por una densidad superficial $\tilde{\Sigma}_m$, que es también una combinación lineal de Σ_m (DGK). Es decir,

$$\tilde{\Sigma}_m(R) = \sum_{n=1}^m B_n \Sigma_c^{(n)} \eta^{2n-1}, \quad \Sigma_c^{(n)} = \frac{(2n+1)M}{2\pi a^2} \quad (2.37)$$

De esta relación y (2.36), podemos notar que $\tilde{\Sigma}_m$ puede ser escrito como

$$\tilde{\Sigma}_m(R) = \sum_{n=1}^m B_n \Sigma_c^{(n)} \left(\frac{\tilde{\Psi}_m}{A_{m0}} \right)^{(2n-1)/(2m)}, \quad (2.38)$$

y así, podemos ver que esta nueva familia de discos está caracterizada por el hecho de que la densidad superficial de masa puede expresarse como una combinación de potencias del potencial relativo. Esto hace viable la posterior obtención de las funciones de distribución de equilibrio para toda la familia (ver subsección 3.1.5), que podrá ser considerada como un conjunto de modelos galácticos autoconsistentes. Ahora, las afirmaciones anteriores son ciertas sólo si podemos determinar las constantes B_n , introducidas en (2.36). Veamos.

Cálculo de B_n

En este apartado, mostraremos un procedimiento que, usando las propiedades de ortogonalidad de P_n , conduce a una relación de recurrencia que expresa B_n en términos de A_{nr} y C_n . Empecemos señalando que, de acuerdo con las definiciones (2.35) y (2.11), el potencial relativo asociado a los DGK puede escribirse como

$$\Psi_m(\eta) = \sum_{n=0}^m \tilde{C}_n P_{2n}(\eta), \quad (2.39)$$

donde $\tilde{C}_n$ son constantes definidas por

$$\tilde{C}_n = C_{2n} q_{2n}(0) - \delta_{0n} \sum_{i=0}^m C_{2i} q_{2i}(0) P_{2i}(0). \quad (2.40)$$

m	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
2	$-5/8$	1			
3	$-35/192$	$-7/12$	1		
4	$-105/1024$	$-21/128$	$-9/16$	1	
5	$-1155/16384$	$-231/2560$	$-99/640$	$-11/20$	1

Cuadro 2.1: Constantes B_n para $m = 2, 3, 4, 5$

De manera que, introduciendo (2.39) en (2.36), $\tilde{\Psi}_m$ puede también ser escrito en términos de polinomios de Legendre:

$$\tilde{\Psi}_m = \sum_{n=0}^m \sum_{i=0}^n B_n \tilde{C}_i P_{2i}(\eta) = \sum_{n=0}^m D_n P_{2n}(\eta), \quad (2.41)$$

donde D_n son constantes a ser determinadas. Es importante notar que estas D_n satisfacen la relación

$$D_n = \tilde{C}_n \sum_{i=0}^{m-n} B_{m-i}. \quad (2.42)$$

Para calcular D_n , es preciso observar que, de acuerdo a (2.36) y (2.41), tenemos

$$\sum_{n=0}^m D_n P_{2n}(\eta) = A_{m0} \eta^{2m}, \quad (2.43)$$

y usando las propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Legendre, obtenemos

$$D_n = A_{m0} \frac{4n+1}{2} \int_{-1}^1 \eta^{2m} P_{2n}(\eta) d\eta,$$

lo cual se reduce a

$$D_n = A_{m0} \left[\frac{\pi^{1/2} (4n+1) \Gamma(2m+1)}{2^{2m+1} \Gamma(1+m-n) \Gamma(m+n+\frac{3}{2})} \right], \quad (2.44)$$

de tal forma que, usando (2.42), podemos determinar las constantes B_n . Después de algunos cálculos, puede mostrarse que[109]

$$B_n = \frac{D_n}{\tilde{C}_n} - \sum_{i=0}^{m-n-1} B_{m-i}, \quad \text{for } n \leq m-1. \quad (2.45)$$

En la tabla 3.2 mostramos los valores de B_n para los primeros cuatro modelos, es decir $m = 2, 3, 4, 5$. Aunque hemos resuelto el problema de encontrar estas constantes, hay otro inconveniente. Si uno introduce dichos coeficientes en (2.37),

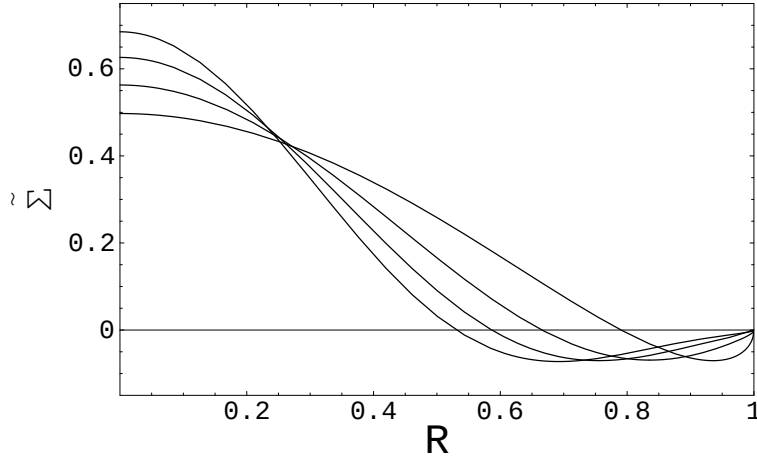


Figura 2.2: Graficamos la densidad superficial de masa $\tilde{\Sigma}_2$, $\tilde{\Sigma}_3$, $\tilde{\Sigma}_4$ y $\tilde{\Sigma}_5$ (de abajo hacia arriba en el borde izquierdo), dadas por (2.47), donde los parámetros B_n están determinados por (2.45). Dado que las densidades resultantes son negativas en algunos rangos, debemos corregir B_1 .

la correspondiente densidad superficial resulta ser negativa para ciertos rangos de R , como se muestra en la figura 2.2, donde graficamos la $\tilde{\Sigma}$ correspondiente a los primeros cuatro modelos. Sin embargo, este problema puede ser resuelto corrigiendo B_1 , esto es, el coeficiente correspondiente al término dominante en (2.37).

Corrección de B_1

De aquí en adelante, consideraremos a B_1 como un parámetro arbitrario que puede escogerse de tal forma que $\tilde{\Sigma} \geq 0$, en el rango $0 \leq R \leq a$. Para cada modelo, esperamos que B_1 tenga un límite inferior mas no uno superior. La razón es que, de acuerdo con (2.24), vemos que

$$\lim_{R \rightarrow a} \frac{d\Sigma_m}{dR} = \begin{cases} -\infty & \text{para } m = 1, \\ 0 & \text{para } m \geq 2. \end{cases} \quad (2.46)$$

Esto significa que el comportamiento de Σ_1 , para $R \rightarrow a$, difiere de las restantes densidades superficiales caracterizada por una razón de cambio que tiende asintóticamente a 0 en el borde del disco. Así, es evidente que uno siempre puede encontrar un valor mínimo $B_{1\min}$, tal que el producto $B_{1\min}\Sigma_1$ es mayor que cualquier combinación lineal de $\Sigma_2, \Sigma_3, \dots$. En el caso particular correspondiente a los nuevos

m	B_{1min}	B_2	B_3	B_4	B_5
2	0	1			
3	0,101273	$-7/12$	1		
4	0,128914	$-21/128$	$-9/16$	1	
5	0,143207	$-231/2560$	$-99/640$	$-11/20$	1

Cuadro 2.2: Constantes B_n corregidas, para los primeros cuatro modelos: $m = 2, 3, 4, 5$.

modelos formulados aquí, la densidad superficial puede expresarse como

$$\tilde{\Sigma}_m(R, B_1) = B_1 \Sigma_c^{(1)} \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{1/2} + \sum_{n=2}^m B_n \Sigma_c^{(n)} \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{n-1/2}, \quad (2.47)$$

donde los coeficientes B_n , para $n \geq 2$, están dados por (2.45). Una forma simple de encontrar B_{1min} , es exigiendo que $\tilde{\Sigma}_m$ se anule en $B_1 = B_{1min}$ y $R = R_{min}$. Esto es, requiriendo que las siguientes dos ecuaciones se cumplan:

$$\left. \frac{d\tilde{\Sigma}(R, B_{1min})}{dR} \right|_{R=R_{min}} = 0, \quad (2.48)$$

$$\tilde{\Sigma}(R_{min}, B_{1min}) = 0. \quad (2.49)$$

La expresión (2.48) impone la condición de que la densidad superficial tenga un mínimo en $B_1 = B_{1min}$ y $R = R_{min}$, mientras que, a través de la relación (2.49), exigimos que su valor en tal punto crítico sea 0. Encontramos numéricamente los límites inferiores de B_1 para los primeros cuatro miembros de la nueva familia, los cuales aparecen en el cuadro 2.2. Las correspondientes densidades superficiales, para diferentes valores de $B_1 > B_{1min}$, son mostrados en la figura 2.3. Notamos que en todos estos casos, la concentración de masa se anula en el borde y crece hacia el bulbo del disco. Además, dicha concentración crece con m . Finalmente, el potencial gravitacional correspondiente a la nueva familia, generado como una combinación general de DGK, puede expresarse como

$$\tilde{\Phi}_m(\xi, \eta) = - \sum_{n=1}^m \sum_{k=0}^n B_n C_{2k} q_{2k}(\xi) P_{2k}(\eta), \quad (2.50)$$

donde B_n están dados por (2.45), para $n \geq 2$ y B_1 es un parámetro arbitrario con un límite inferior determinado por (2.48)-(2.49).

A partir de 2.13 podemos calcular la velocidad circular para esta familia de modelos. En la figura 2.4, graficamos esta cantidad física correspondiente a los

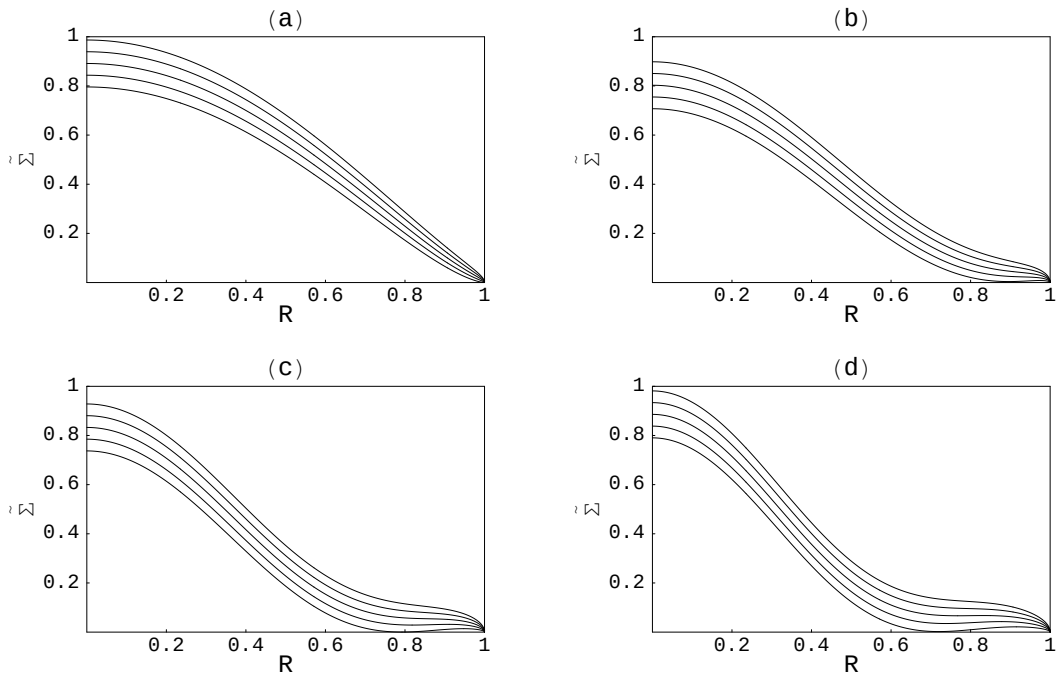


Figura 2.3: Gráficas de la densidad superficial de masa (a) $\tilde{\Sigma}_2$, (b) $\tilde{\Sigma}_3$, (c) $\tilde{\Sigma}_4$, (d) $\tilde{\Sigma}_5$, para diferentes valores del parámetro B_1 . En cada caso empezamos con $B_1 = B_{1min}$ (la curva más baja), dado por el cuadro 2.2. Las curvas restantes, de abajo hacia arriba, corresponden a incrementos de 0,01 en B_1 , empezando desde B_{1min} . Vemos que el problema de las densidades negativas se ha corregido.

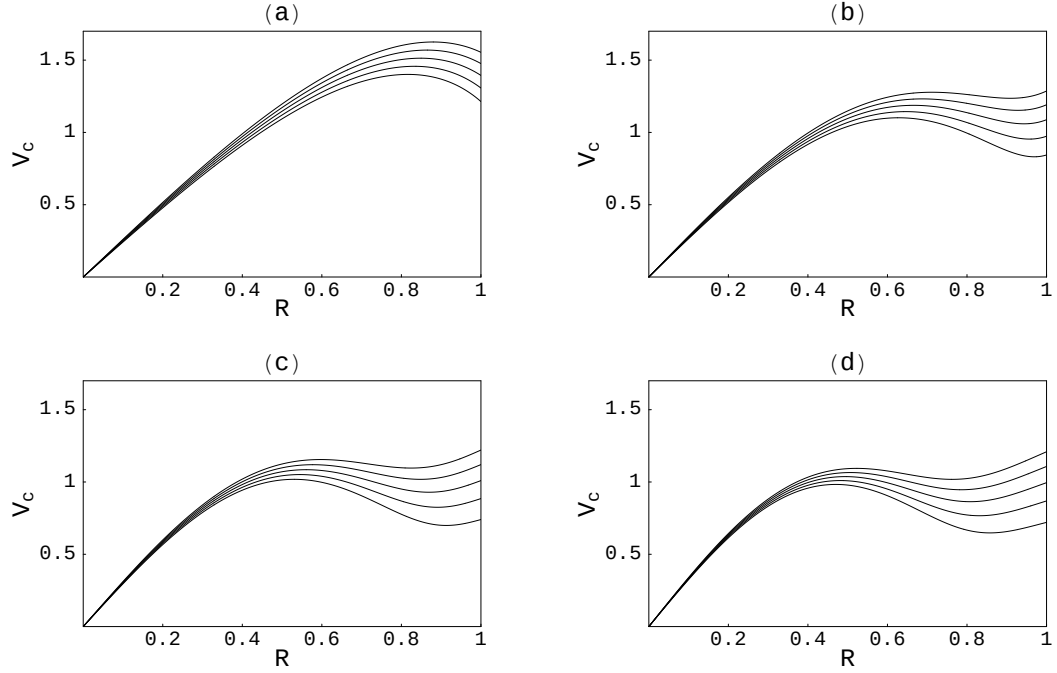


Figura 2.4: Curvas de rotación para (a) $m = 2$, (b) $m = 3$, (c) $m = 4$, (d) $m = 5$, para los mismos valores del parámetro B_1 escogidos en la figura 2.3. Las curvas inferiores corresponden a B_{1min} y las curvas superiores corresponden a valores más grandes de B_1 .

cuatro primeros modelos de la nueva familia de discos. Para $B_1 = B_{1min}$ las curvas de rotación tienen un máximo, luego decrecen suavemente hasta un radio mínimo local, a partir del cual vuelven a crecer. Además, el máximo de la curva de rotación está en un radio que decrece cuando m crece. Ahora, en el caso en que B_1 sea muy grande, la curva se aproxima a una línea recta, como consecuencia del término dominante asociado con el disco de Kalnajs. Cabe mencionar que, en el caso del modelo $m = 3$, el máximo valor de B_1 utilizado arroja una curva de rotación muy similar a la muchas galaxias observadas.

2.1.3. Modelos para cuatro galaxias en el cluster de la Osa Mayor: NGC3877, NGC3917, NGC3949 y NGC4010

En esta sección exploraremos la posibilidad de obtener modelos de discos delgados, en los cuales la velocidad circular coincida con el ajuste numérico hecho a las curvas de rotación observadas. Con el fin de hacer esto, consideraremos un

enfoque distinto al empleado en las dos aplicaciones anteriores del método de Hunter. En vez de asumir un determinado comportamiento para la densidad superficial de masa, expresaremos la velocidad circular, dada por (2.14) como una serie de potencias de una coordenada radial adimensional. Posteriormente, determinaremos los coeficientes de la serie por medio de un ajuste numérico adecuado. Con ello quedarán a su vez determinadas las correspondientes distribuciones de masa y demás cantidades que caracterizan el comportamiento cinemático de los modelos particulares. Finalmente calcularemos la masa, efectuando la integral de la densidad, dada por la expresión (2.12). En particular, efectuaremos el tratamiento descrito y el estimativo de la la masa para cuatro galaxias en el cluster de la osa mayor: NGC3877, NGC3917, NGC3949 y NGC4010, usando datos tomados a partir del artículo de Verheijen y Sancici[129]. Estos valores obtenidos para $\mathcal{M}$ pueden tomarse como estimativos muy precisos para la cota superior de masa de estas galaxias, ya que en el modelo se considera que toda la masa está concentrada en el disco galáctico.

Recordemos las expresiones para la velocidad circular y la densidad superficial de masa, pero esta vez, expresadas como funciones de la coordenada adimensional $\tilde{R} = R/a$:

$$v_c^2(\tilde{R}) = \frac{\tilde{R}^2}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(0) P'_{2n}(\eta), \quad (2.51)$$

y

$$\Sigma(\tilde{R}) = \frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} (2n+1) q_{2n+1}(0) P_{2n}(\eta), \quad (2.52)$$

donde $\eta = \sqrt{1 - \tilde{R}^2}$. Obsérvese que, integrando sobre el área total del disco, obtenemos

$$\frac{\mathcal{M}G}{a} = C_0, \quad (2.53)$$

lo cual permite calcular el valor de la masa total $\mathcal{M}$.

Como sabemos, todas las cantidades que caracterizan el modelo de disco están determinadas por las constantes C_{2n} , las cuales pueden ser determinadas a partir de los datos observacionales correspondientes a las curvas de rotación de alguna galaxia en particular.

Una familia de modelos particulares

Con el fin de explorar la posibilidad de encontrar modelos en los que la velocidad circular pueda ser ajustada a la curva de rotación de una galaxia, debemos limitarnos a un número finito de términos en la serie. Esto significa que debemos

hacer $C_{2n} = 0$ para $n > m$, con m un entero positivo. De manera que, después de introducir las derivadas de los polinomios de Legendre, la expresión (2.51) puede escribirse como

$$v_c^2(\tilde{R}) = \sum_{n=1}^m A_{2n} \tilde{R}^{2n}, \quad (2.54)$$

donde las A_{2n} son constantes que están relacionadas con C_{2n} a través de la relación

$$C_{2n} = \frac{4n+1}{4n(2n+1)} \sum_{k=1}^m \frac{A_{2k}}{q_{2n}(0)} \int_{-1}^1 \eta(1-\eta^2)^k P'_{2n}(\eta) d\eta, \quad (2.55)$$

para $n \neq 0$, la cual es obtenida igualando las expresiones (2.51) y (2.54) y usando propiedades de los polinomios de Legendre. Luego, si las constantes A_{2n} son determinadas mediante un ajuste de los datos observacionales correspondientes a la curva de rotación, la relación (2.55) proporciona los valores de las constantes C_{2n} que definen el modelo particular de disco.

Como podemos ver, el valor de C_0 no está determinado por la expresión (2.55). Sin embargo, a partir de (2.52) es claro que la densidad superficial de masa diverge en el borde del disco, cuando $\eta = 0$, a menos que impongamos la condición [67]

$$\sum_{n=0}^m C_{2n} (2n+1) q_{2n+1}(0) P_{2n}(0) = 0, \quad (2.56)$$

que, luego de usar las propiedades de las funciones de Legendre, conduce a

$$C_0 = \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} C_{2n}, \quad (2.57)$$

la cual da el valor de C_0 , y posteriormente de la masa total $\mathcal{M}$, en términos de A_{2n} .

Las expresiones anteriores implican que un modelo de disco particular estará completamente determinado por un conjunto de constantes A_{2n} , las cuales se deben escoger de tal forma que las velocidades circulares puedan coincidir con el ajuste efectuado sobre las curvas de rotación observadas. Además, como las potencias de $\tilde{R}^{2n}$ son un conjunto de funciones linealmente independientes, la expresión (2.54) es bastante adecuada para ajustarse numéricamente a un conjunto de datos. En consecuencia, la expresión (2.54) puede considerarse como una especie de “curva de rotación universal” para galaxias planas, la cual se puede ajustar fácilmente a los datos observados de la curva de rotación de una galaxia espiral en particular.

Ajuste de Datos a los Modelos

Con el fin de acondicionar estos modelos a datos observados, escogimos cuatro galaxias espirales en la Osa Mayor: NGC3877, NGC3917, NGC3949 y NGC4010. Los datos correspondientes han sido tomados de un artículo reciente de Verheijen y Sancici[129], quien presenta los resultados de las mediciones fotométricas de la línea de 21 cm para 43 galaxias en el cercano cluster de la Osa Mayor, usando el Westerbork Synthesis Radio Telescope. Para cada dato de la curva de rotación, tomamos el valor de a como el último valor de radio tabulado o mostrado en la gráfica. En consecuencia, asumiremos que el radio de la galaxia está definido por el último valor de R medido. Entonces, tomando el radio normalizado en unidades de a , efectuamos un ajuste de datos de mínimos cuadrados, no lineal, con la relación general (2.54), considerando en cada caso un valor de m menor que el número de puntos (datos) disponibles.

En la figura 2.5 mostramos las curvas de rotación ajustadas para las cuatro galaxias consideradas. Los puntos con barras de error corresponden a las observaciones, que son las reportadas en [129]. La línea sólida representa la curva de rotación determinada a partir de (2.54) con los valores para A_{2n} , dados por el ajuste numérico. Como podemos ver, la relación (2.54) se ajusta de forma bastante precisa a los datos medidos. Luego, a partir de los valores obtenidos para A_{2n} , los correspondientes valores de C_{2n} son determinados usando (2.55) y (2.57). En el cuadro 2.3 presentamos los valores de C_{2n} para las cuatro galaxias, así como el correspondiente valor de m usado en (2.54). En el cuadro 2.4 indicamos, para cada galaxia, el tipo morfológico (de acuerdo con la clasificación de Hubble [11]), el radio a en kpc y la masa total $\mathcal{M}$, ambas en kg y en unidades de masa solar ($\mathcal{M}_\odot$).

Ahora, como el conjunto de constantes C_{2n} define completamente cada modelo de disco delgado, podemos calcular fácilmente todas las cantidades físicas de cada galaxia. En la figura 2.6 presentamos las densidades superficiales para las cuatro galaxias, como funciones de $\tilde{R} = R/a$. Para estas galaxias obtenemos una densidad de masa bien comportada, teniendo un máximo en el centro del disco y posteriormente decreciendo hasta un valor nulo en el borde del disco.

Estudio de la estabilidad:

Frecuencias Epicílica y Vertical

Ya vimos antes, que las dos cantidades cinemáticas que describen la estabilidad ante perturbaciones radiales y verticales (para partículas efectuando órbitas

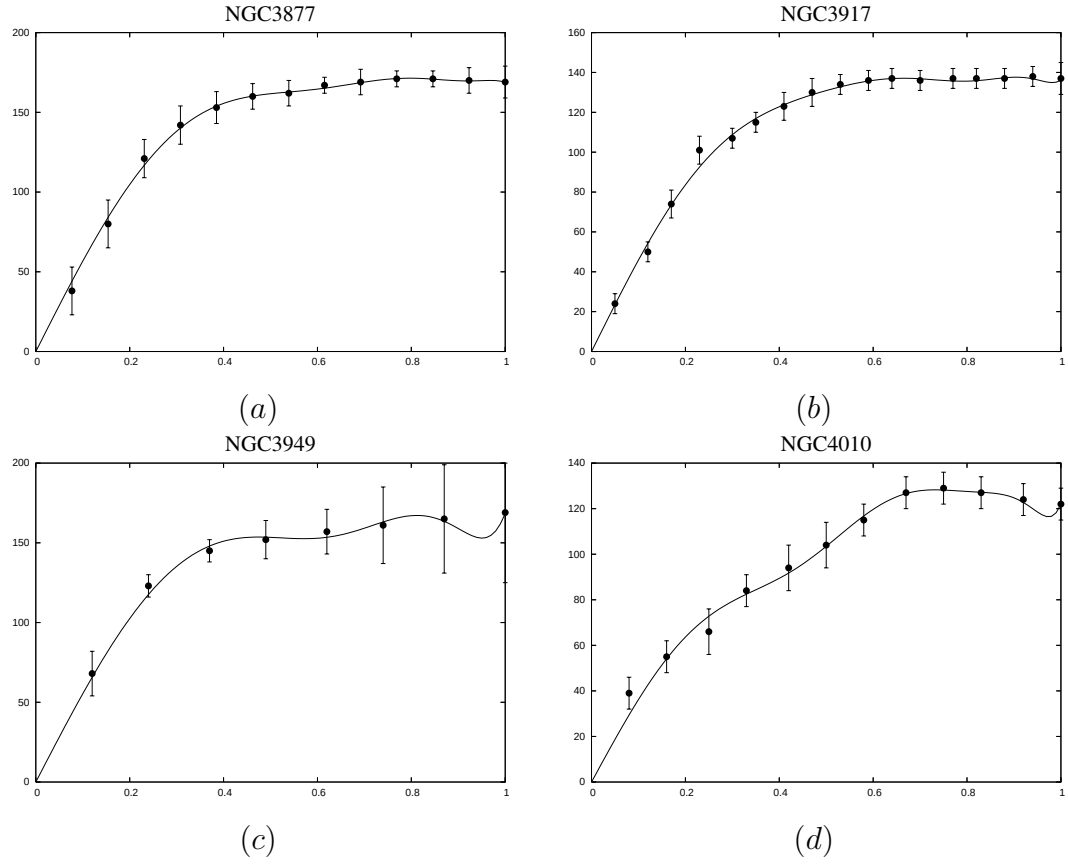


Figura 2.5: Velocidad circular v_c en km/s, como función de la coordenada radial adimensional $\tilde{R} = R/a$, para las galaxias espirales NGC3877, NGC3917, NGC3949 y NGC4010.

Cuadro 2.3: Constantes C_{2n} [km^2s^{-2}] y valores de m .

	NGC3877	NGC3917	NGC3949	NGC4010
m	6	7	5	7
C_0	17452.78	11258.92	15686.77	8801.12
C_2	26564.93	17210.85	24051.95	12875.61
C_4	13926.79	8998.92	13011.66	4944.66
C_6	7478.82	4573.34	7127.38	1117.08
C_8	4053.13	2213.64	4577.68	866.64
C_{10}	1887.23	1063.01	2096.77	1019.52
C_{12}	498.29	640.40		818.98
C_{14}		264.69		419.19

Cuadro 2.4: *Tipo morfológico, radio a y masa total $\mathcal{M}$.*

	Tipo	a [kpc]	$\mathcal{M}$ [kg]	$\mathcal{M}$ [$\mathcal{M}_\odot$]
NGC3877	Sc	11.74	9.47×10^{40}	4.76×10^{10}
NGC3917	Scd	15.28	7.95×10^{40}	3.95×10^{10}
NGC3949	Sbc	8.72	6.32×10^{40}	3.18×10^{10}
NGC4010	SBd	10.84	4.41×10^{40}	2.22×10^{10}

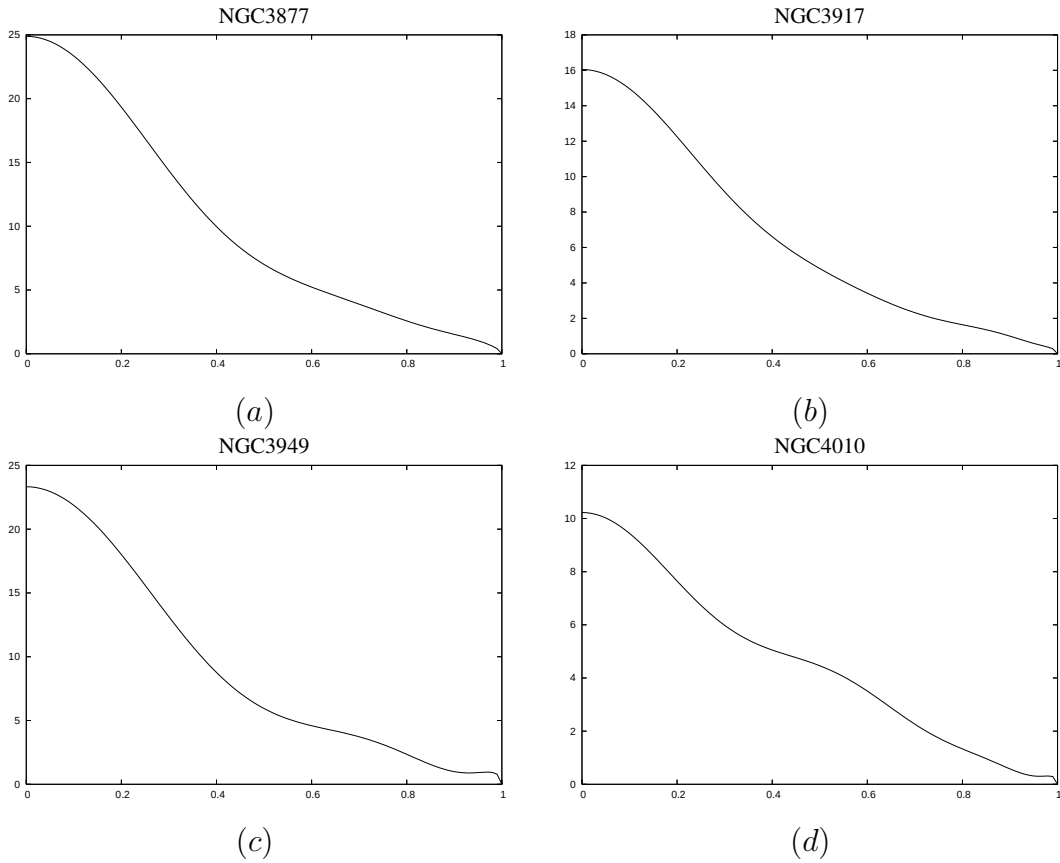


Figura 2.6: Densidad superficial de masa $\Sigma \times 10^{-3}$ en kg/m^2 , como función de la variable adimensional $\tilde{R} = R/a$, para las galaxias espirales NGC3877, NGC3917, NGC3949 y NGC4010.

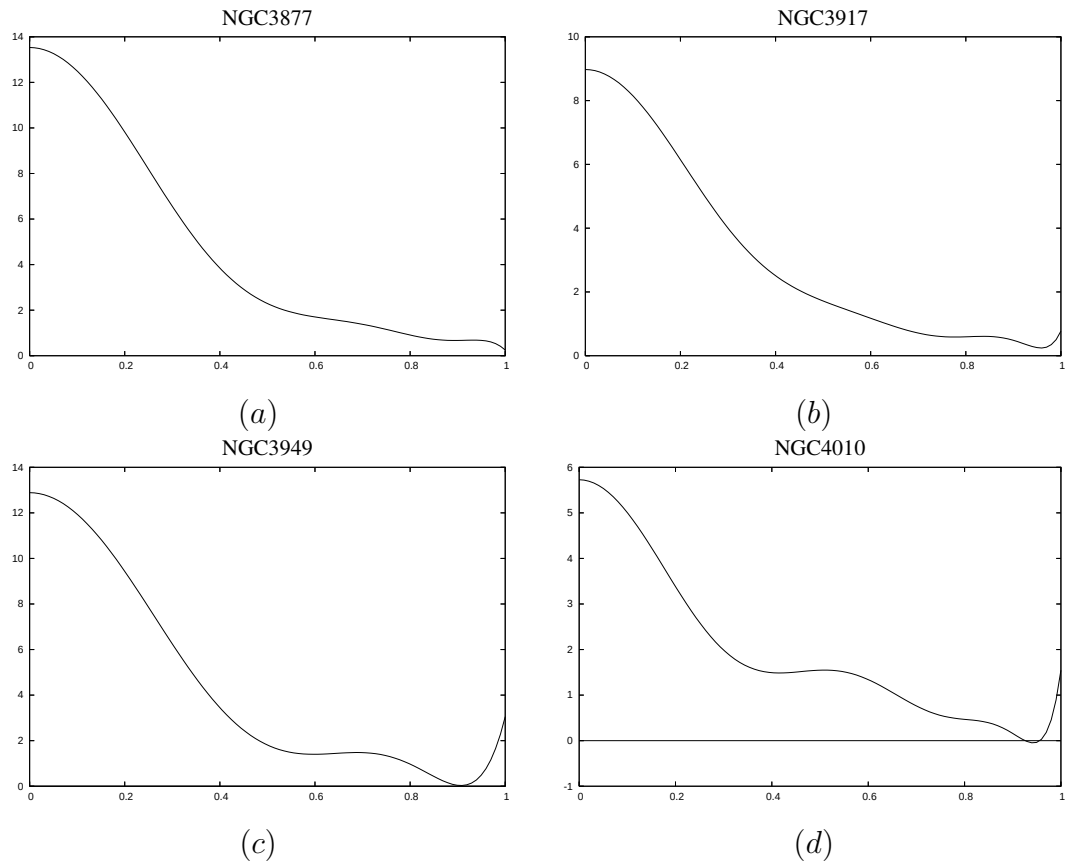


Figura 2.7: Frecuencia epicíclica cuadrática $\tilde{\kappa}^2 \times 10^{-5}$ en $(\text{km/s})^2$, como función de $\tilde{R} = R/a$, para las galaxias espirales NGC3877, NGC3917, NGC3949 y NGC4010.

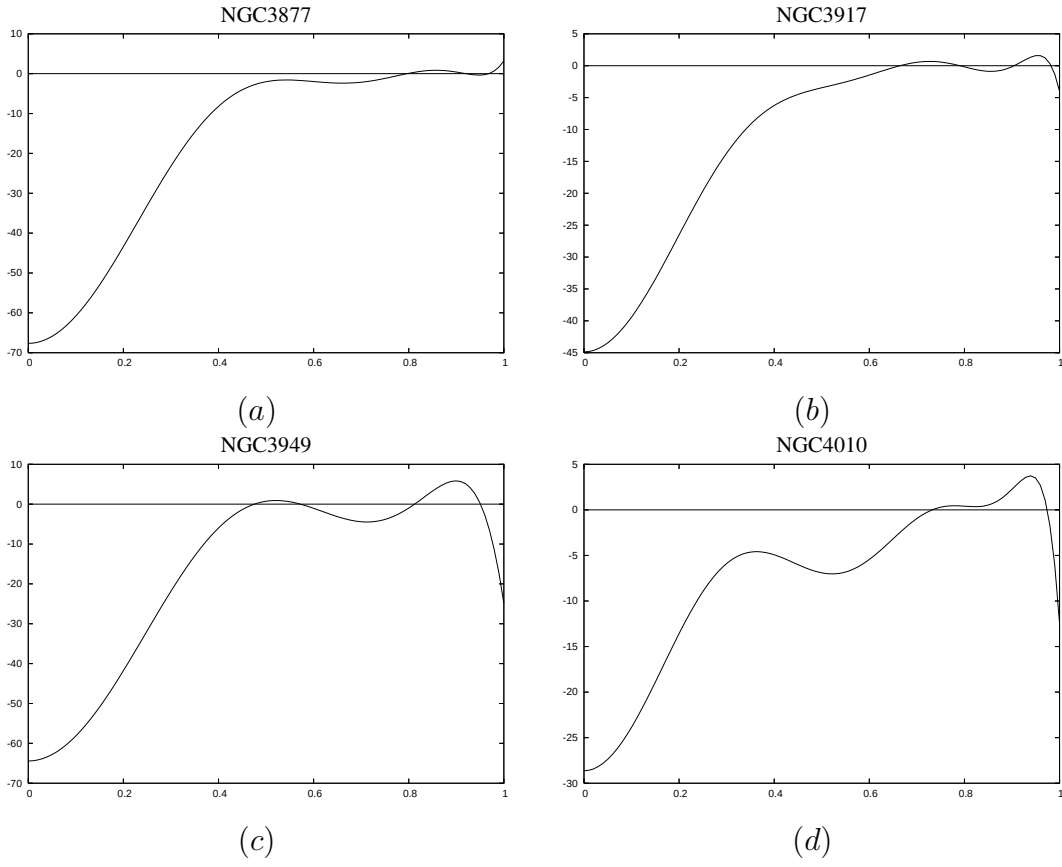


Figura 2.8: Frecuencia vertical $\tilde{\nu}^2 \times 10^{-4}$ en $(\text{km/s})^2$, como función de $\tilde{R} = R/a$, para las galaxias espirales NGC3877, NGC3917, NGC3949 y NGC4010.

cuasicirculares), son las frecuencias epicíclica y vertical. Recordemos sus correspondientes expresiones, dadas al principio de la sección 2.1:

$$\kappa^2(R) = \frac{1}{R} \frac{dv_c^2}{dR} + \frac{2v_c^2}{R^2}, \quad (2.58)$$

y

$$\nu^2(R) = \nabla^2 \Phi \Big|_{z=0} - \frac{1}{R} \frac{dv_c^2}{dR}, \quad (2.59)$$

Al introducir (2.54) y emplear el hecho de que el potencial es solución de la ecuación de Laplace, estas cantidades pueden expresarse como

$$\tilde{\kappa}^2(\tilde{R}) = \sum_{n=1}^m 2(n+1)A_{2n}\tilde{R}^{2n-2}, \quad (2.60)$$

donde $\tilde{\kappa} = a\kappa$ y

$$\tilde{\nu}^2(\tilde{R}) = - \sum_{n=1}^m 2nA_{2n}\tilde{R}^{2n-2}, \quad (2.61)$$

donde $\tilde{\nu} = a\nu$. De manera que, usando (2.60), (2.61) y los valores de las constantes A_{2n} obtenidas a partir del ajuste numérico, pueden ser determinadas explícitamente. En la figura 2.7, mostramos la gráficas de frecuencias epicíclicas para las cuatro galaxias consideradas y, en la figura 2.8, las correspondientes gráficas de las frecuencias verticales. A partir de las figuras 2.7 podemos ver que tan sólo la galaxia NGC4010 presenta una pequeña región de inestabilidad radial, cerca del borde del disco. Por otra parte, como se muestra en la figura 2.8, las cuatro galaxias son inestables ante perturbaciones verticales.

2.2. ÓRBITAS EN CAMPOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS

El problema de la descripción del movimiento de partículas de prueba alrededor de objetos con simetría axial ha sido un tópico ampliamente estudiado en astrofísica. Desde hace más o menos doscientos años el movimiento alrededor de objetos deformados por la rotación, es decir, con deformación oblata, ha sido un problema sin resolver: aunque existe una enorme evidencia numérica que sugiere la existencia de una tercera integral de movimiento, su forma analítica (si existe) aún permanece oculta [19]. En contraste, el movimiento alrededor de cuerpos con deformación prolata es caótico, como fue señalado por Guerón y Letelier [60]. En el contexto de los modelos estelares para galaxias, encontramos desde regularidad hasta caos, dependiendo fuertemente del modelo específico (como es de esperarse). Por ejemplo, el bien conocido potencial de Stäckel genera trayectorias completamente regulares, así como los modelos de Plummer[69] y algunos miembros de la familia infinita obtenida recientemente por Pedraza, Ramos y González[109] (aquí, sólo existe evidencia numérica de una tercera integral aislada de movimiento). Pero el caos es la regla en modelos estelares axialmente simétricos, planos o tridimensionales. Véase por ejemplo el estudio efectuado por Hunter acerca de las órbitas que cruzan el disco [69].

2.2.1. El Método de las Superficies de Sección

Si el potencial gravitacional ϕ es estático y axialmente simétrico, el movimiento de una partícula de prueba estará determinado por las siguientes ecuaciones diferenciales [11]

$$\begin{aligned}\dot{R} &= V_R, & \dot{z} &= V_z, \\ \dot{V}_R &= -\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial R}, & \dot{V}_z &= -\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z},\end{aligned}\tag{2.62}$$

en donde hemos empleado coordenadas cilíndricas (R, φ, z) y definido un potencial efectivo $\tilde{\phi}$ mediante la relación

$$\tilde{\phi} = \phi + \frac{L_z^2}{2R^2}.\tag{2.63}$$

Dado que ϕ es estático y axialmente simétrico, la energía específica E y el momento angular específico L_z son cantidades que se conservan a lo largo del movimiento

de una partícula de prueba. Este hecho restringe dicho movimiento a un subespacio 3-dimensional del espacio de fase (R, z, V_R, V_z) , determinado por la ligadura

$$E = \frac{1}{2}(V_R^2 + V_z^2) + \tilde{\phi}. \quad (2.64)$$

En otras palabras, en el espacio de fase, la trayectoria está restringida a una hipersuperficie de energía constante. De manera que, en el transcurso del tiempo, la partícula se moverá indefinidamente a través de dicha región del espacio de fase. Dicho movimiento acotado, dependiendo de las condiciones iniciales, puede resultar de naturaleza regular o caótica³. Una herramienta adecuada para investigar la naturaleza de estas órbitas tridimensionales es el método de las superficies de sección de Poincaré⁴. Al registrar los cortes de una trayectoria cuando atraviesa el plano $z = 0$, se forma en dicha región (plano P_R, R) una figura que revela la naturaleza regular o irregular de la órbita. Si la figura formada en la sección es un contorno cerrado definido (ya sea continuo o punteado⁵), la órbita es regular. Esto quiere decir que ella está confinada, en el espacio de fase, a un toroide invariante. Si en cambio, la figura corresponde a una distribución irregular de puntos, la trayectoria es caótica y, en el espacio de fase, ya no estará confinada a ningún toroide [11]. Cualquiera de las dos situaciones depende de las condiciones iniciales elegidas para la trayectoria. Si las condiciones iniciales pertenecen a una región de toroides invariantes (o destruidos), la trayectoria será regular (o caótica).

Tanto la naturaleza de las órbitas, como la estructura del espacio de fase son reveladas a través de las superficies de sección. Como veremos, en ellas se pueden distinguir entre regiones caóticas y de regularidad; entre zonas de órbitas periódicas, cuasiperiódicas y no periódicas; zonas de trayectorias tipo caja y tipo lazo[11], etc. Esta coexistencia de caos y regularidad es una consecuencia del teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) [11]. Por ello, los contornos regulares, suaves y cerrados que aparecen en las secciones de Poincaré, reciben el nombre de curvas KAM [11]. Algunas de ellas se agrupan formando cadenas de islas resonantes, en torno a un punto del espacio de fase. La gran mayoría de las veces son rodeadas por un mar de caos.

³Esto depende de la región del espacio de fase a la que pertenezcan las condiciones iniciales correspondientes a la trayectoria bajo estudio.

⁴Como su nombre lo indica, son cortes transversales en el espacio de fase reducido (tres dimensiones), los cuales son atravesados, una y otra vez, por la trayectoria de la partícula en el transcurso del tiempo.

⁵En particular, si el contorno es punteado, es debido a una órbita periódica. Si el contorno es continuo entonces es generado por una trayectoria cuasiperiódica.

A continuación, para ilustrar el empleo de las técnicas mencionadas arriba, estudiaremos el movimiento de partículas de prueba alrededor de centros de atracción deformados. Cabe señalar que el método numérico empleado para integrar las ecuaciones de movimiento es el de Runge-Kutta de 4° orden, de paso adaptativo, sometido a la restricción de que la energía sea conservada, dentro de cierta tolerancia (menor al 0,0001 %). El algoritmo está implementado en la rutina creada por Eric Wiensstein (Mathematica 6.0) en Marzo de 2006 [24].

2.2.2. Movimiento alrededor de Cuerpos con Deformación Prolata, Oblata y Octupolar

Como ha sido constatado por una amplia variedad de evidencias observacionales, muchos objetos astrofísicos pueden ser modelados como cuerpos axialmente simétricos, con deformación oblata o prolata. Por ejemplo, es sabido que la Tierra posee momentos cuadrupolar y octupolar no despreciables, como consecuencia de su forma oblata[19]. También, muchas galaxias que tienen una gran componente discoidal, pueden asumirse como cuerpos oblatos axialmente simétricos con un gran momento cuadrupolar y, en algunos casos, con una deformación octupolar significativa, debido a los componentes restantes (por ejemplo, el halo). Así mismo, hay clusters de galaxias con forma de cigarro[33] y muchas galaxias enanas que pueden ser considerados como objetos casi axialmente simétricos con deformación prolata[116]. Aunque en estos casos el momento cuadrupolar es considerado como la mayor desviación de la simetría esférica, hay situaciones donde la deformación octupolar desempeña un papel significativo[63, 49].

El movimiento de partículas de prueba alrededor de objetos estelares, como los mencionados arriba, es un problema de amplio interés en astrofísica. El caso de centros de atracción descritos como la suma de términos monopolar y cuadrupolar, ha sido extensivamente estudiado por Guerón y Letelier, tanto desde una perspectiva newtoniana como desde un punto de vista relativista, concluyendo que la adición de momentos multipolares externos puede inducir caos [61, 62, 60]. En gravedad newtoniana, así como en relatividad general, puede encontrarse caos cuando la fuente tiene deformación prolata y la caoticidad crece a medida que crece el momento cuadrupolar. Por otra parte, parece que el caso correspondiente a deformación oblata no conduce a movimientos caóticos, inclusive para grandes momentos cuadrupolares. Sin embargo, la inclusión de deformación octupolar también puede inducir caos, tal y como fue mostrado por Heiss, Nasmitdinov y Radu[64] y Li[97], para el caso del oscilador armónico.

En esta sección estudiaremos el movimiento de partículas de prueba en potenciales gravitacionales axialmente simétricos que se pueden expresar como:

$$\phi = -\frac{\alpha}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{\beta(2z^2 - R^2)}{2(R^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{\gamma(2z^3 - 3zR^2)}{2(R^2 + z^2)^{7/2}}. \quad (2.65)$$

En dicha ecuación α es el término monopolar, que equivale a Gm , siendo m la masa total de la fuente y G la constante gravitacional. El término cuadrupolar, denotado como β , usualmente representa la mayor desviación de la simetría esférica. En particular, si $\beta > 0$ la fuente tiene deformación prolata y si $\beta < 0$ tenemos el caso correspondiente a deformación oblata. El momento octupolar γ describe la asimetría de la fuente con respecto al plano ecuatorial, esto es, su “forma de pera”. Tanto β como γ están relacionados con la densidad de masa $\rho(R, z)$ a través de las siguientes ecuaciones[11]:

$$\beta = 2\pi \int_0^\infty r'^4 dr' \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' P_2(\cos \theta') \rho(r', \theta'), \quad (2.66)$$

$$\gamma = 2\pi \int_0^\infty r'^5 dr' \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' P_3(\cos \theta') \rho(r', \theta'), \quad (2.67)$$

donde hemos empleado coordenadas esféricas $r = \sqrt{R^2 + z^2}$, $\cos \theta = z/\sqrt{R^2 + z^2}$ y P_l es el polinomio de Legendre de orden l .

En la figura 2.9(a) presentamos una sección de Poincaré típica, en $z = 0$, correspondiente al movimiento de una partícula de prueba en presencia de un campo gravitacional generado por una fuente con deformación prolata y momento octupolar nulo (escogemos $\alpha = 1$, sin pérdida de generalidad). Vemos regiones regulares centrales y laterales, compuestas por curvas KAM en forma de anillo. Ellas están rodeadas por una región caótica que contiene a su vez dos pequeñas islas resonantes, cerca de sus bordes superior e inferior [115].

En la figura 2.9(b), activamos el momento octupolar ($\gamma = 0,02$), manteniendo la misma deformación prolata. La superficie de sección resultante presenta una región caótica más prominente, ya que en este caso, las zonas exteriores conformadas por islas resonantes se han traslapado. Las regiones regulares contienen ahora toroides deformados. Estos pueden visualizarse claramente en la región central y escasamente insinuados en la zona lateral [115].

En la figura 2.10(a), como consecuencia de incrementar el momento octupolar hasta $\gamma = 0,04$, la región caótica es más prominente (la zona regular lateral ha desaparecido), así como las curvas KAM centrales. La figura 2.10(b) muestra los contornos de nivel del potencial efectivo, para cada uno de los casos escogidos.

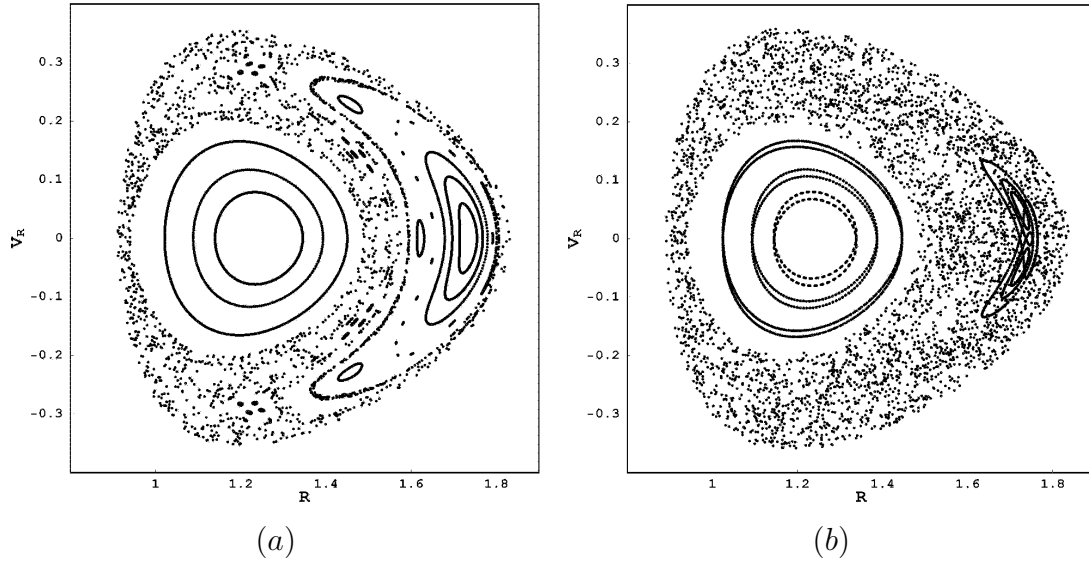


Figura 2.9: **(a)** Superficie de sección correspondientes a algunas órbitas con $L_z = 0,9$, $E = -0,4$, en un potencial caracterizado por $\alpha = 1$, $\beta = 0,3$ y $\gamma = 0$. **(b)** Superficie de sección para las mismas condiciones iniciales de la figura anterior. Hemos mantenido los valores $L_z = 0,9$, $E = -0,4$, $\alpha = 1$ y $\beta = 0,3$, pero ahora $\gamma = 0,02$.

Finalmente las figuras 2.11, 2.12 y 2.13(a) muestran el efecto causado por el progresivo incremento en la deformación octupolar, empezando desde una situación prolata regular [115]. Un fenómeno similar ocurre en el caso correspondiente a deformación oblata, el cual comunmente ejemplifica movimiento regular. De hecho, existe una amplia evidencia numérica de que el movimiento de partículas alrededor de un monopolio más cuadrupolo oblato no es caótico.

La figura 2.13 muestra la transición desde la regularidad hasta el caos mediante el incremento en γ . Con $E = -0,32$, $L_z = 1,1$ y $\beta = -0,2$, empezamos desde $\gamma = 0$ (Fig. 2.13(b)-a) que corresponde a un movimiento regular; el caso $\gamma = 0,02$ también es regular pero las curvas KAM se han distorsionado; en Fig. 2.13(b)-c ($\gamma = 0,04$) la distorsión es mayor y finalmente, cuando γ se ha incrementado hasta 0,06 notamos la aparición de una región caótica encerrando curvas KAM.

Desde un punto de vista clásico, la deformación octupolar en objetos astrofísicos puede introducir modificaciones significativas en la estructura del espacio de fase correspondiente al movimiento de partículas de prueba alrededor de centros de atracción prolatos u oblatos. Aparte del incremento en la caoticidad, la aparición de toroides deformados en regiones de regularidad es un hecho remar-

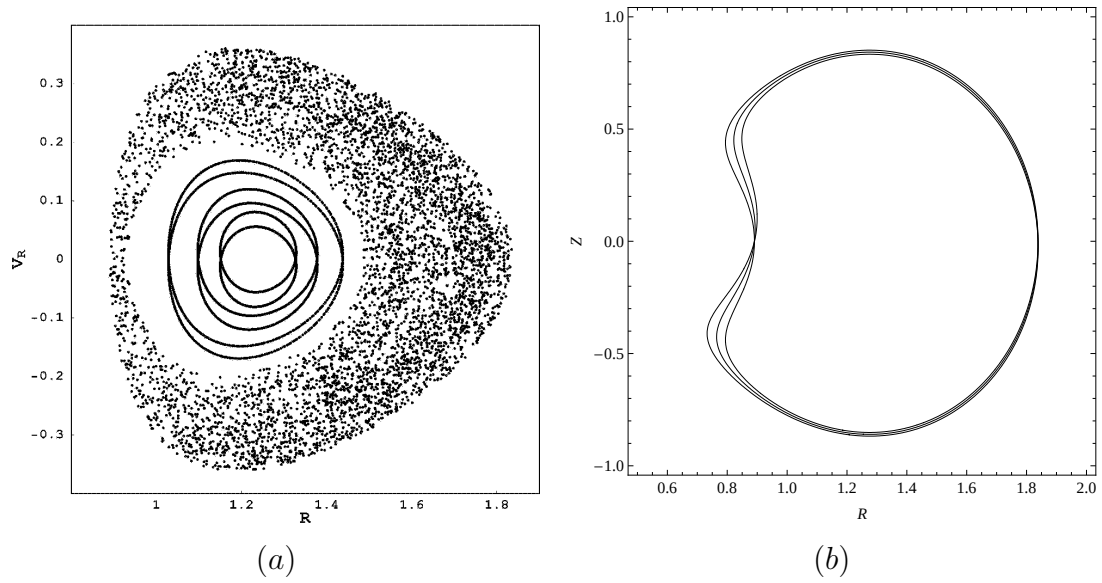


Figura 2.10: **(a)** En este caso, manteniendo los mismos valores que en las dos figuras previas pero $\gamma = 0,04$, tenemos un región caótica prominente encerrando tres curvas KAM. **(b)** Contornos del potencial efectivo cuando $L_z = 0,9$, $E = -0,4$, $\alpha = 1$, $\beta = 0,2$, tomando distintos valores para el momento octupolar: $\gamma = 0$ (contorno mayor), $\gamma = 0,02$ (contorno mediano) y $\gamma = 0,04$ (contorno menor). Definen, en cada caso, la región del espacio de configuraciones en donde es posible obtener movimiento acotado.

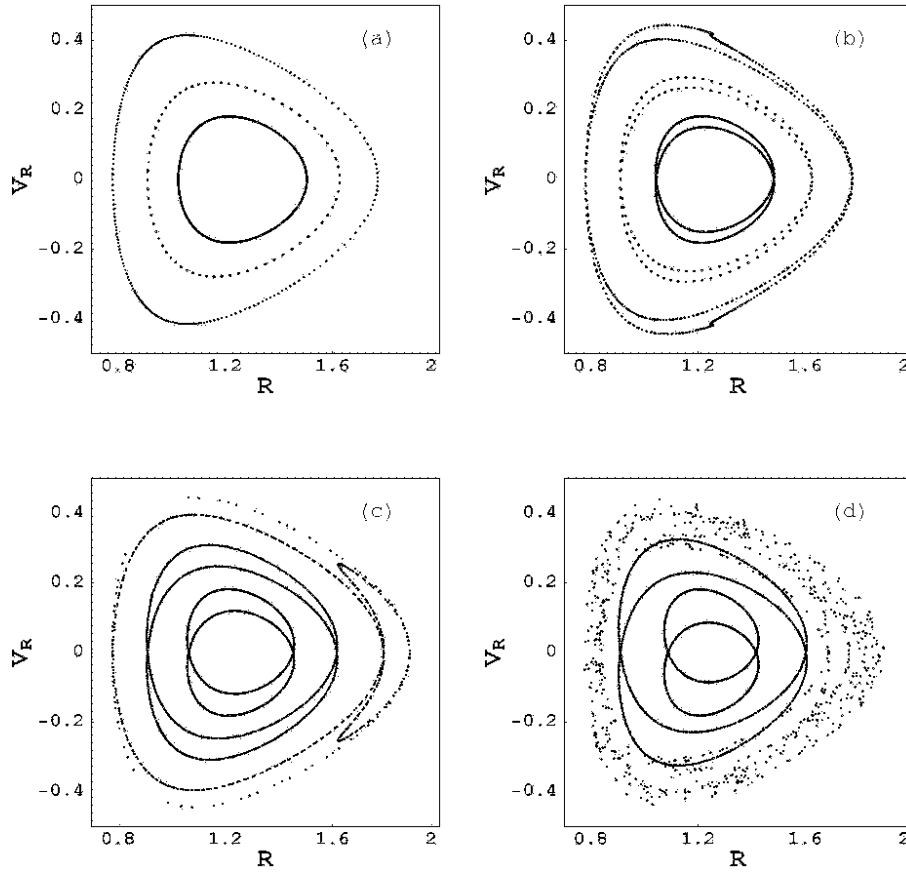


Figura 2.11: Superficies de sección para $L_z = 0,9$, $E = -0,4$, $\alpha = 1$, $\beta = 0,2$ y (a) $\gamma = 0$; (b) $\gamma = 0,02$; (c) $\gamma = 0,04$; (d) $\gamma = 0,06$. En cada caso, ellas son generadas por tres órbitas con condiciones iniciales (i) $z = 0$, $R = 0,91$, $V_R = 0$; (ii) $z = 0$, $R = 0,78$, $V_R = 0$ y (iii) $z = 0$, $R = 1,16$, $V_R = 0,18$.

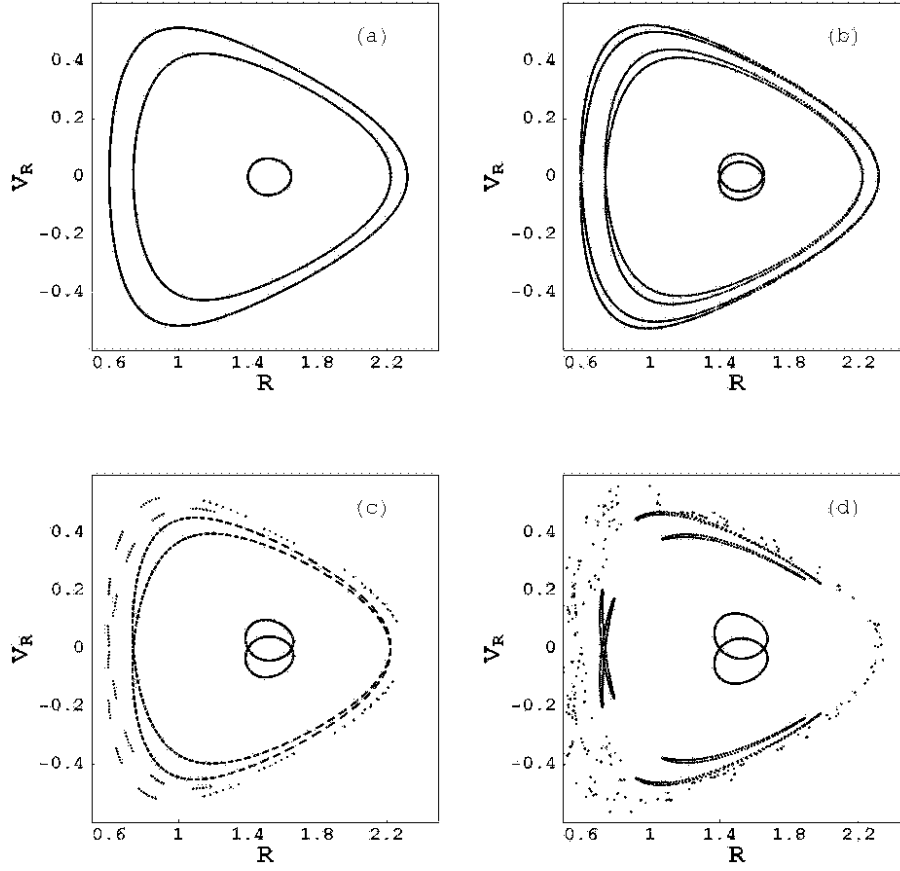


Figura 2.12: Superficies de sección para $L_z = 1,1$, $E = -0,32$, $\alpha = 1$, $\beta = -0,2$ y (a) $\gamma = 0$; (b) $\gamma = 0,02$; (c) $\gamma = 0,04$; (d) $\gamma = 0,06$. En cada caso, son generadas por tres órbitas con condiciones iniciales (i) $z = 0$, $R = 0,91$, $V_R = 0$; (ii) $z = 0$, $R = 0,78$, $V_R = 0$ y (iii) $z = 0$, $R = 1,16$, $V_R = 0,18$.

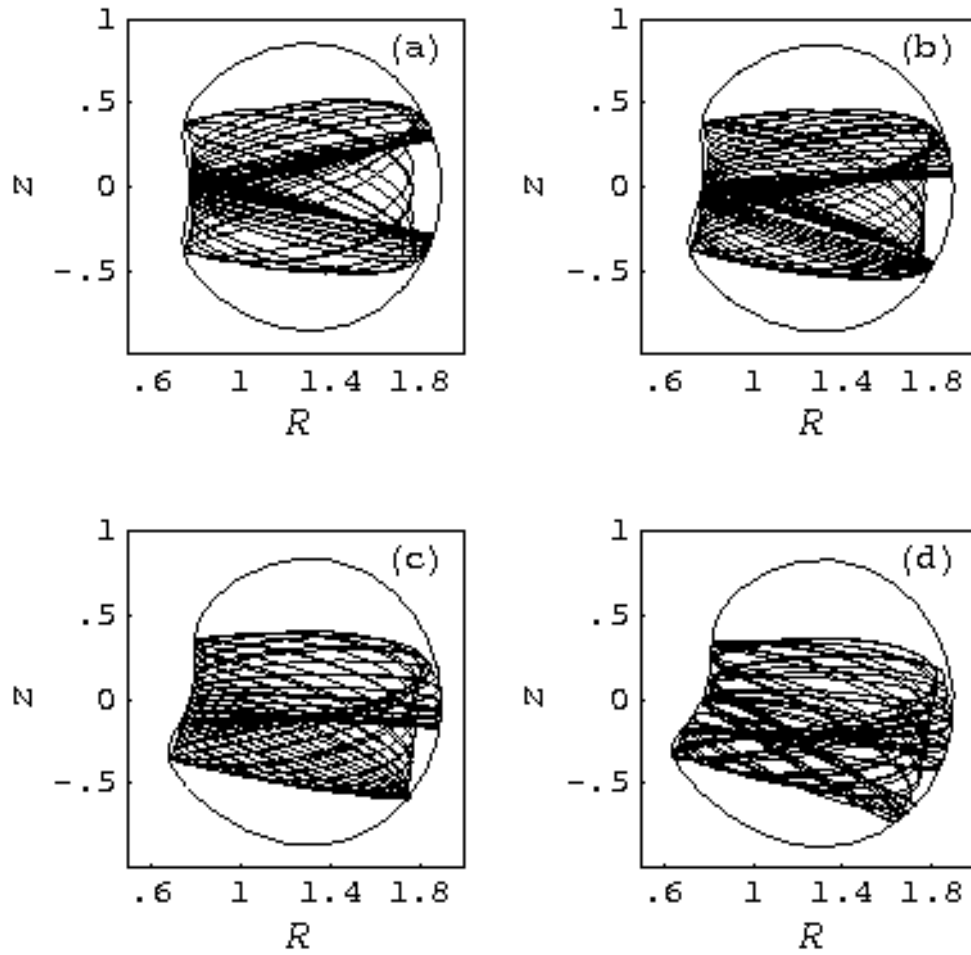


Figura 2.13: Una órbita en el plano meridional con condiciones iniciales $z = 0$, $R = 0.78$, $V_R = 0$ y los mismos parámetros considerados anteriormente. Nuevamente tenemos los casos (a) $\gamma = 0$; (b) $\gamma = 0.02$; (c) $\gamma = 0.04$; (d) $\gamma = 0.06$.

cable, generado por la asimetría de la fuente con respecto a su plano ecuatorial. Entre mayor sea dicha asimetría mayor distorsión se producirá en las curvas KAM y más prominente serán las zonas estocásticas en el espacio de fase.

2.2.3. Movimiento Regular y Caótico en DGK

Nos enfocaremos ahora, en la cinemática alrededor de los DGK, restringiéndonos a los cuatro primeros miembros [114]. La cinemática correspondiente a los miembros restantes ($m \geq 5$) puede ser inferida a partir del estudio elaborado para $m = 1, 2, 3, 4$. En todos los de este apartado tomaremos $a = M = G = 1$, sin pérdida de generalidad.

Empezaremos la descripción cinemática, analizando el comportamiento de las trayectorias bidimensionales que se forman en plano ecuatorial, ya que, a través de ellas, se pueden vislumbrar ciertos criterios de estabilidad para los modelos.

Órbitas en el Plano Ecuatorial

Los puntos de equilibrio del sistema dinámico (2.62), ocurren en $V_R = V_z = z = 0$, $R = R_c$, donde R_c debe satisfacer la ecuación

$$\left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial R} \right)_{(R_c, 0)} = -\frac{L_z^2}{R_c^3} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_{(R_c, 0)} = 0, \quad (2.68)$$

que es precisamente la condición de órbita circular en el plano $z = 0$. Los puntos de equilibrio del sistema dinámico (2.62) corresponden al caso en que la partícula de prueba describe un movimiento circular de radio R_c , momento angular específico (por unidad de masa)

$$L_{zc} = \pm \sqrt{R_c^3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_{(R_c, 0)}}, \quad (2.69)$$

y energía específica

$$E = \tilde{\phi}(R_c, 0). \quad (2.70)$$

(El subíndice c en L_{zc} indica que nos referimos a órbitas circulares). Ya vimos antes, que las dos cantidades utilizadas para medir la estabilidad o inestabilidad que tienen dichas trayectorias ante perturbaciones radiales y verticales (en la dirección del eje z) son la frecuencia epicíclica κ y la frecuencia vertical ν ,

$$\kappa^2 = \left(\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial R^2} \right)_{(R_c, 0)}, \quad \nu^2 = \left(\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z^2} \right)_{(R_c, 0)}. \quad (2.71)$$

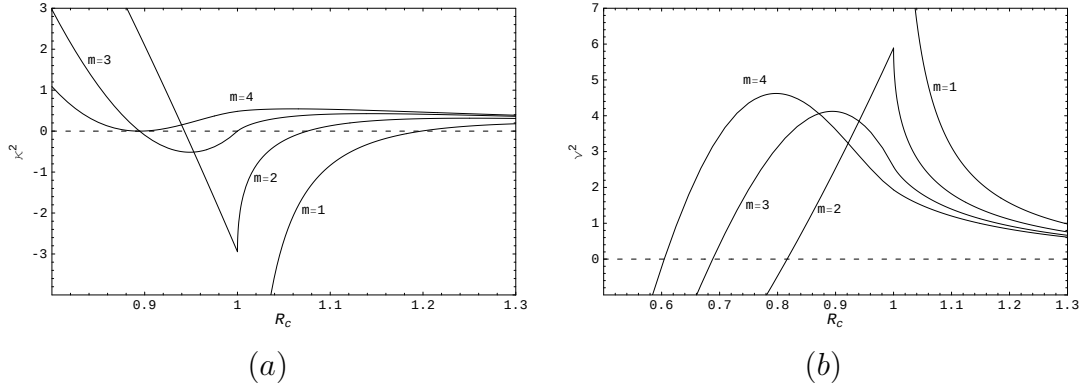


Figura 2.14: **(a)** Comportamiento de κ^2 para $m = 1, 2, 3, 4$. Valores de R_c para los cuales dicha gráfica se ubica arriba de la línea a trazos, corresponden a órbitas circulares que son estables ante perturbaciones radiales. **(b)** Comportamiento de ν^2 para $m = 1, 2, 3, 4$. Valores de R_c para los cuales dicha gráfica se ubica arriba de la línea a trazos, corresponden a órbitas circulares que son estables ante perturbaciones verticales.

Esto significa que si introducimos (2.69) en las segundas derivadas de $\tilde{\phi}$ obtenemos κ^2 y ν^2 como funciones de R_c . Los valores de R_c tales que $\kappa^2 > 0$ y (o) $\nu^2 > 0$ corresponden a órbitas circulares estables bajo perturbaciones radiales y (o) verticales, respectivamente. En caso contrario las órbitas serán inestables.

Empezaremos por evaluar la estabilidad de los DGK, a través de (2.71). El caso $m = 1$ presenta estabilidad radial en el rango $0 \leq R_c \leq 1$ ($\kappa^2 = 3\pi$) pero es radialmente inestable cuando $1 < R_c \leq 1,198$. Para $m = 2$ y $m = 3$ encontramos órbitas circulares radialmente inestables, con radios en los rangos $2\sqrt{2}/3 \leq R_c \leq 1,075$ y $2/\sqrt{5} \leq R_c \leq 1$, respectivamente. En contraste, las órbitas circulares para $m = 4$ son siempre estables bajo perturbaciones radiales. Conjeturamos que los modelos $m \geq 5$ son también radialmente estables. La figura 2.14(a) muestra el comportamiento de κ^2 como una función de R_c para $m = 1, 2, 3, 4$. La figura 2.14(b), muestra el comportamiento de ν^2 e ilustra la estabilidad ante perturbaciones verticales. Encontramos los siguientes rangos de estabilidad vertical: $0 \leq R_c \leq 1$ para $m = 1$ ($\kappa^2 = -3\pi/2$); $0 \leq R_c \leq 0,943$ para $m = 2$; $0 \leq R_c \leq 0,688$ para $m = 3$; $0 \leq R_c \leq 0,604$ para $m = 4$. Vemos que el rango de estabilidad vertical decrece con m [114].

Las órbitas ecuatoriales generales están determinadas por (2.62) junto con las condiciones $\dot{V}_z = \dot{z} = z = 0$ y $E = V_R^2/2 + \tilde{\phi}_m(R, 0)$. El movimiento está restringido por la inecuación $E \geq \tilde{\phi}_m(R, 0)$ y, en particular, encontramos movimiento

acotado en un rango $R_1 \leq R \leq R_2$ si este contiene al menos un valor crítico donde $\tilde{\phi}_m$ es mínimo y $\tilde{\phi}_m(R_1, 0) \leq E \leq \tilde{\phi}_m(R_2, 0)$. La figura 2.15(a) muestra el potencial efectivo para $m = 2$ y $L_z = 1,242$, cerca del borde del disco. En las energías (a), (b), (c), y (d) tenemos órbitas acotadas, y (e), (f) corresponden a movimiento no acotado. En la figura 2.15(b) presentamos las curvas de fase resultantes y se muestran dos regiones de movimiento acotado y no acotado, divididas por una curva separatriz (línea a trazos). Curvas de fase similares pueden ser obtenidas para $m = 1$ y $m = 3$ si usamos L_{zc} de acuerdo con (2.69), para $1 < R_c \leq 1,198$ y $2/\sqrt{5} \leq R_c \leq 1$, respectivamente. Para $m = 4$ el potencial efectivo no presenta máximos locales y su diagrama de fase no tiene curva separatriz alguna [114].

A una energía dada E , determinada por la ecuación (2.70) una vez fijamos R_c , el máximo valor posible del momento angular específico es L_{zc} . Por tanto, es conveniente parametrizar L_z por medio de la razón $k = L_z/L_{zc}$. Resulta útil calcular el rango de valores de L_{zc} tales que $\tilde{\Phi}_m$ tiene un mínimo en $0 \leq R \leq 1$, esto es, asegurando que el movimiento acotado siempre sea posible dentro del disco. De esta forma, establecemos los valores límite de las integrales de movimiento para las cuales las partículas nunca escapan de la fuente. Usando la relación (2.69), encontramos los siguientes rangos para el momento angular específico: (a) $m = 1$, $0 \leq |L_{zc}| \leq \sqrt{3\pi}/2$; (b) $m = 2$, $0 \leq |L_{zc}| \leq 2\sqrt{10\pi}/9$; (c) $m = 3$, $0 \leq |L_{zc}| \leq \sqrt{21\pi}/50$; (d) $m = 4$, $0 \leq |L_{zc}| \leq 15\sqrt{7\pi}/64$.

Órbitas Tridimensionales

A continuación, presentaremos soluciones numéricas de las ecuaciones de movimiento (2.62) correspondientes a órbitas acotadas fuera del plano ecuatorial (excepto cuando ellas cruzan el plano $z = 0$). Para ciertos valores de E y L_z , están confinadas a regiones que contienen el disco y lo cruzarán una y otra vez. Como fue mostrado por Hunter [?], este hecho usualmente conduce a la aparición de muchas órbitas caóticas, debido a la discontinuidad en la componente z del campo gravitacional, produciendo un cambio abrupto en sus curvaturas. Existe una importante excepción a dicho comportamiento: el disco de Kuzmin, caracterizado por un potencial de la forma $\phi = -GM[R^2 + (a + |z|)^2]^{-1/2}$, con $a > 0$. Sin embargo, los llamados potenciales tipo Kuzmin, caracterizados por $\phi(\varepsilon)$ donde $\varepsilon = [R^2 + (a + |z|)^2]^{1/2}$, son no integrables y presentan el comportamiento mencionado arriba. Los DGK presentan una estructura muy similar y podemos esperar una dinámica análoga [114]. Cada potencial $\phi_m(\xi, \eta)$ puede ser escrito en forma

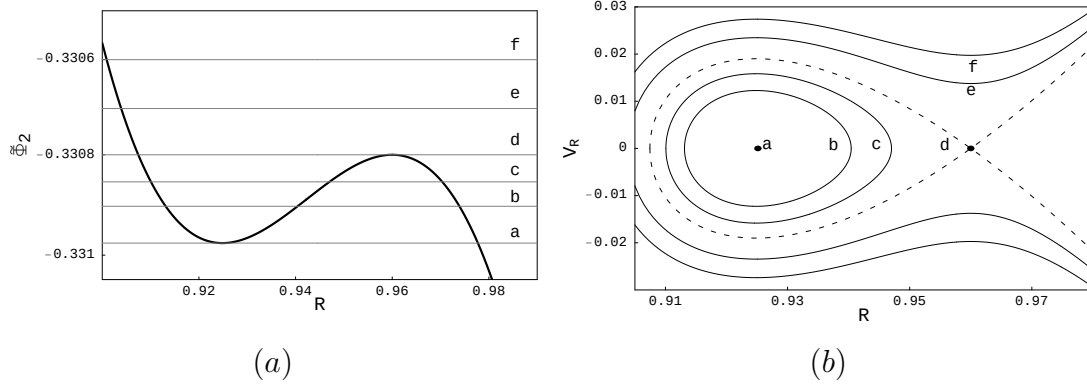


Figura 2.15: **(a)** Potencial efectivo para $m = 2$ y $L_z = 1,242$. Las líneas horizontales corresponden a los siguientes valores para la energía específica: (a) -0.330975 (mínimo de $\tilde{\phi}_2$), (b) -0.330900 , (c) -0.330850 , (d) -0.33079 (máximo de $\tilde{\phi}_2$), (e) -0.330700 y (f) -0.330600 . Mínimos y máximos de $\tilde{\phi}_2$ ocurren en $R_c = 0,925$ y $R_c = 0,960$. **(b)** Diagrama de fase para $m = 2$, correspondiente a los mismos valores de L_z y E mostrados en la figura 2.15. Aquí, (a) y (d) son órbitas circulares estables e inestables, respectivamente. Las curvas (b) y (c) corresponden a movimiento acotado estable, mientras que (e) y (f) describen movimiento no acotado. La línea a trazos representa una separatriz entre las regiones de movimiento acotado y no acotado.

tipo Kuzmin si tenemos en cuenta que $\xi = (R_+ + R_-)/2a$ y $\eta = (R_+ - R_-)/2ia$, donde $R_+ = [R^2 + (z + ia)^2]^{1/2}$ y $R_- = [R^2 + (z - ia)^2]^{1/2}$. Además, ellos están caracterizados por una discontinuidad (en el disco) dada por[55]

$$\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial z} \right)_{z=0^+} = - \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial z} \right)_{z=0^-} = 2\pi G \Sigma_m(R). \quad (2.72)$$

A pesar de que la anterior ecuación impide la aplicación del teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser)[11], también encontramos una gran variedad de órbitas regulares cruzando el disco.

En la figura 2.16 mostramos los contornos de nivel de $\tilde{\phi}_m$ para $m = 1, 2, 3, 4$, correspondientes a $E = -1,245$ y $L_z = 0,2$, esto es $k = 0,276, 0,266, 0,263$ y $0,262$, respectivamente. Para estos valores, el movimiento está confinado a una región que contiene el disco. Las correspondientes superficies de sección $z = 0$ se muestran en las figuras 2.18, exhibiendo una variedad de trayectorias regulares y caóticas. La figura 2.18(a), que corresponde a los valores tomados en el contorno (a) de la figura 2.16, muestra una gran curva KAM encerrando una cadena de islas resonantes y tres conjuntos de anillos. También hay una gran zona caótica con dos cadenas de islas cerca del borde. La curva KAM grande, la cadena de islas y el conjunto central de anillos son producidas por órbitas tipo caja, mientras que los anillos laterales así como las últimas dos cadenas de islas, están formadas por órbitas tipo lazo. La curva punteada, resultante de una órbita periódica tipo caja, separa las regiones estocástica y regular. La figura 2.18(b) exhibe características similares a las mostradas en 2.18(a). Esta superficie de sección corresponde a los valores tomados en el contorno (b) de la figura 2.16. En este caso vemos región central definida por órbitas tipo caja (los cuatro anillos centrales) y una región caótica encerrándola que contiene una variedad de islas resonantes definidas por órbitas tipo lazo. En este caso, las regiones de órbitas tipo caja y lazo están claramente separadas, en contraste con la figura 2.18(a), en donde ellas se alternan. La superficie de sección correspondiente a $m = 3$ (contorno (c) de la figura 2.16) se muestra en fig. 2.18(c), exhibiendo una región regular compuesta por una zona central de órbitas tipo caja y dos cadenas islas resonantes, compuestas por órbitas tipo lazo. En la región caótica vemos nuevamente cadenas de islas y tres densas zonas cerca del borde, conformadas por órbitas tipo lazo. Algunas de las órbitas en el plano meridional son mostradas en la figura 2.17. Finalmente, la figura 2.18(d) muestra las superficies de sección para $m = 4$, $k = 0,262$ y $E = -1,245$. Encontramos una muy prominente región caótica con solo dos cadenas de islas y una pequeña región regular de órbitas tipo caja. Las zonas estocásticas en

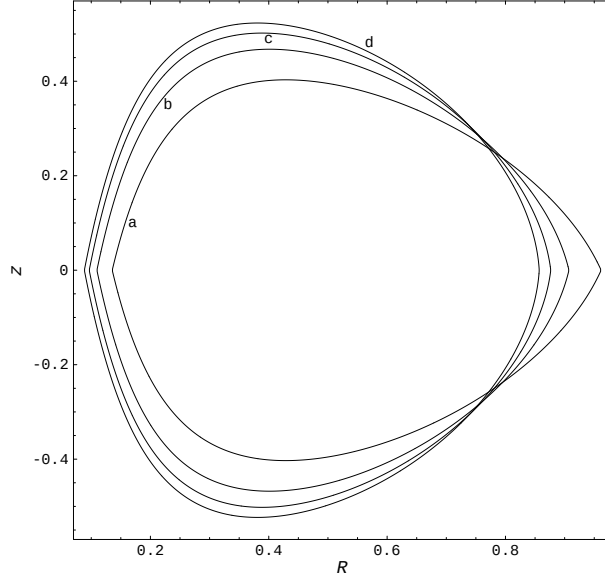


Figura 2.16: Contornos de nivel para (a) $\tilde{\phi}_1$, (b) $\tilde{\phi}_2$, (c) $\tilde{\phi}_3$ y (d) $\tilde{\phi}_4$, cuando $E = -1,245$ y $L_z = 0,2$.

Figs. 2.18 son debidas a la superposición de muchas resonancias originadas por la presencia del disco[?]. Este hecho puede evidenciarse claramente en las tres zonas mas densas cerca del borde de la sección en la figura 2.18(c), donde las islas resonantes están casi translapadas en $E = -1,245$. Cuando la energía crece hasta $-1,215$, por ejemplo, la superposición es completa y la trayectoria pasa de regular a ser irregular (Fig. ??). En la figura 2.18(d) mostramos también la huella trazada por la superposición de tres grandes islas centrales [114].

Con el fin de cuantificar el grado de inestabilidad de las órbitas, calculamos los números característicos de Lyapunov (NCL), definidos como [114]

$$LCN = \lim_{\substack{\Delta_o \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \left[\frac{\ln(\Delta/\Delta_o)}{t} \right], \quad (2.73)$$

donde Δ_o y Δ son las desviaciones de dos órbitas en un instante 0 y t , respectivamente. Obtenemos los NCL usando el procedimiento sugerido por Benettin et al [10]. Así, fijando las integrales de movimiento $E = -1,245$ y $L_z = 0,2$, escogiendo $\Delta_o \simeq 10^{-9}$ y $t = 10^7$, estimamos N correspondiente a una típica órbita caótica (cruzando el disco) para los casos $m = 1, 2, 3, 4$ (Cuadro 2.5). Encontramos que el grado de inestabilidad crece modestamente con m .

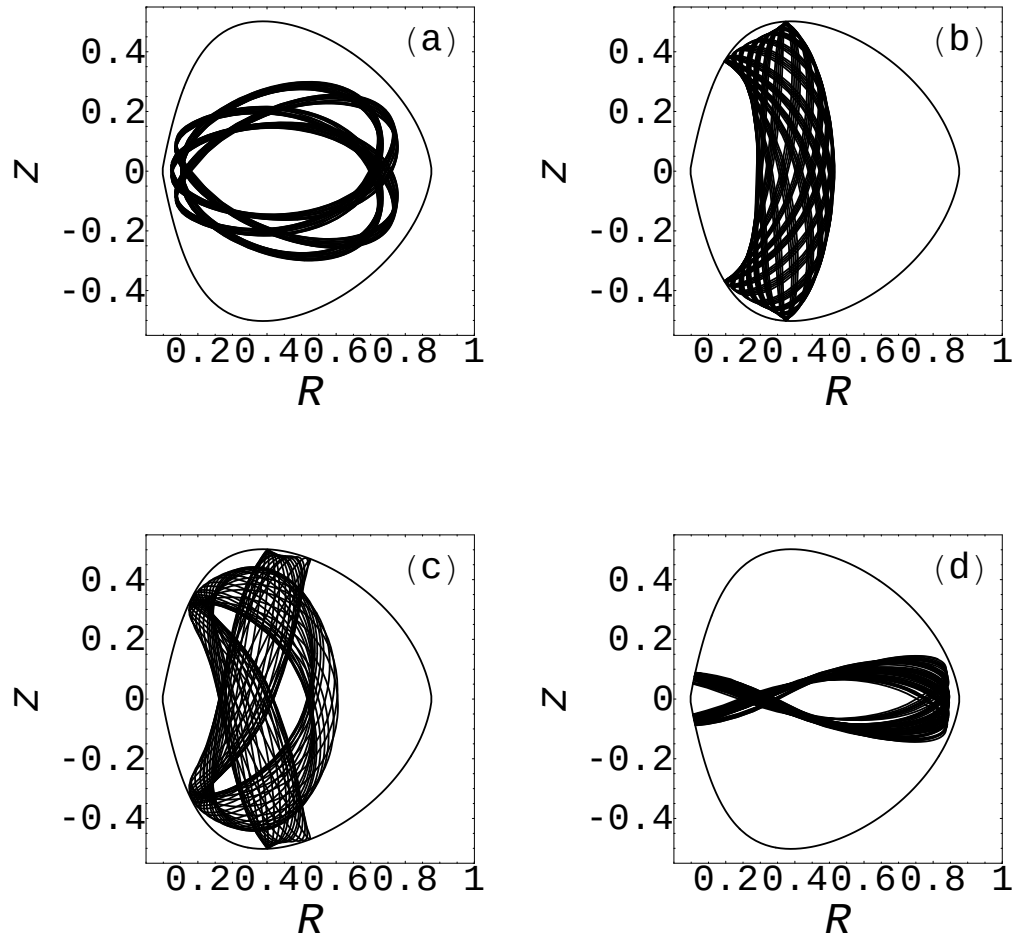


Figura 2.17: Órbitas en el plano meridional para algunas condiciones iniciales de la figura 2.18(c): (a) órbita tipo lazo con $R = 0,739172$, $V_R = 0,362539$ (la cadena de islas dentro de la región estocástica, en la mitad); (b) órbita tipo banano en $R = 0,421542$, $V_R = 0,362539$ (el anillo central mas grande); (c) órbita tipo lazo en $R = 0,405726$, $V_R = 0,573413$ (segunda cadena de islas dentro de la región regular); (d) Una órbita tipo lazo en $R = 0,283155$, $V_R = 1,57197$ que forma las tres zonas más densas cerca del borde de la sección. El contorno exterior es la curva de velocidad cero.

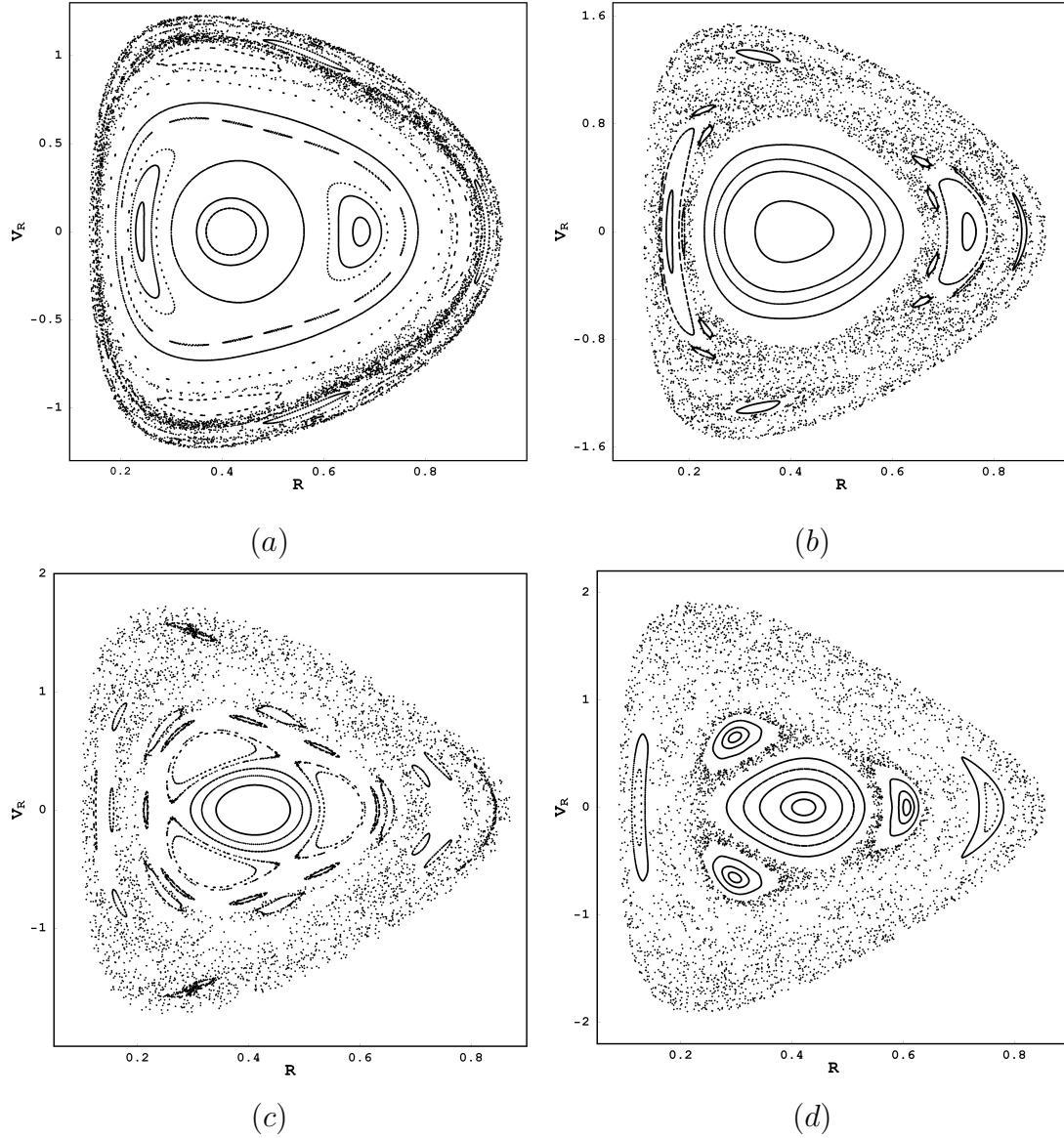


Figura 2.18: Superficies de sección correspondientes a $E = -1,245$, para **(a)** $m = 1$, $k = 0,276$, en donde se muestra una pequeña región caótica con dos cadenas de islas resonantes y un toroide central; **(b)** $m = 2$, $k = 0,266$. Ahora la región estocástica es más grande que en la figura 2.18(a) y la zona del toroide está enteramente conformada por órbitas tipo caja; **(c)** $m = 3$, $k = 0,263$. Vemos una zona caótica prominente con cadenas de islas encerrando una región regular de órbitas caja y lazo. Esta última corresponde a las dos islas resonantes centrales; **(d)** $m = 4$, $k = 0,262$. La región caótica es más grande que en las figuras anteriores y contiene sólo dos cadenas de islas resonantes (las curvas punteadas en la isla del extremo son debidas a una órbita periódica con figura de ocho). La zona regular central está constituida enteramente por órbitas tipo caja.

m	$LCN(\pm 0,0001)$
1	0,0108
2	0,0110
3	0,0118
4	0,0120

Cuadro 2.5: Estimación de los NCL para condiciones iniciales $z = 10^{-10}$, $R = 0,681$, $V_R = 0,819$ de una órbita que cruza el disco, correspondiente a la región caótica de las figuras 2.18.

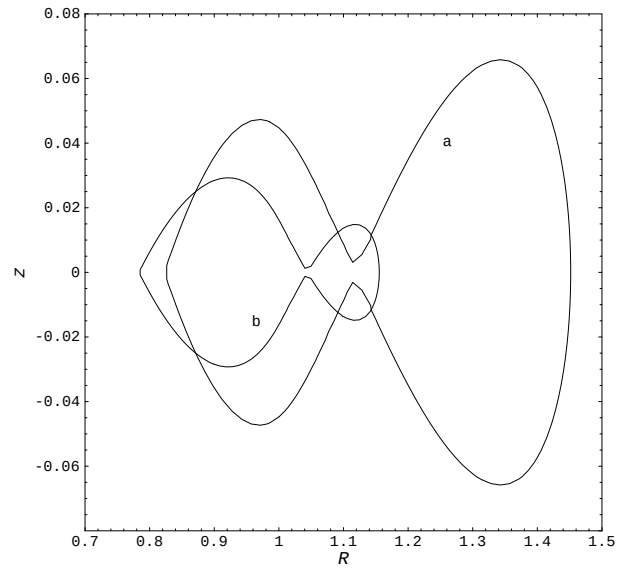


Figura 2.19: Contornos de nivel de (a) $\tilde{\Phi}_1$, $E = -0,335$, $L_z = 1,287$; (b) $\tilde{\Phi}_2$, $E = -0,389$, $L_z = 1,196$. Ambos casos tienen dos regiones conectadas, una de ellas contiene el disco y la otra no.

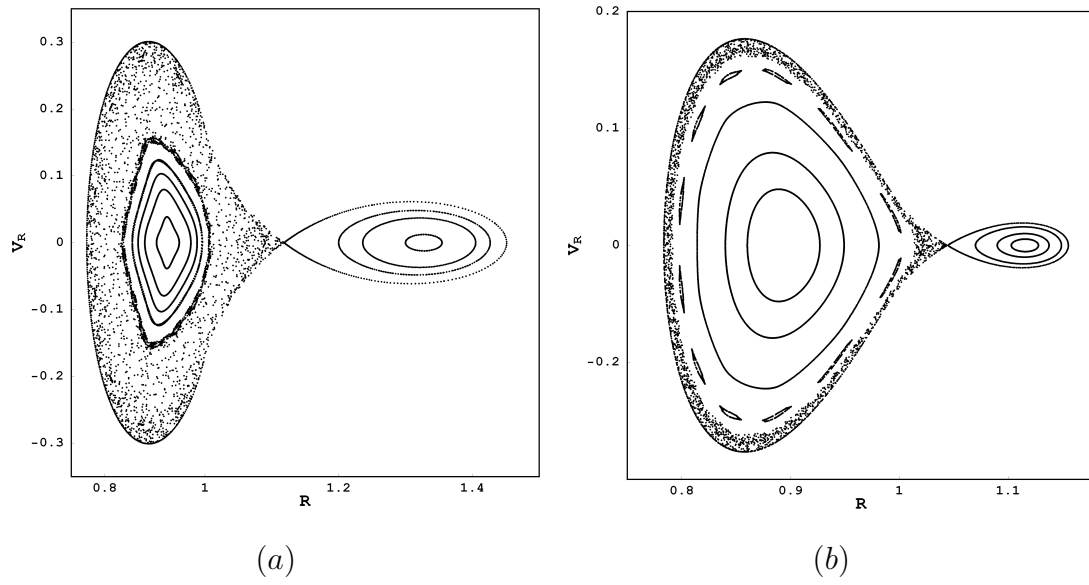


Figura 2.20: **(a)** Superficie de sección para $m = 1$, $L_z = 1,287$ y $E = -0,335$ (contorno (a) de la figura 2.19). Hay una gran zona caótica de órbitas que cruzan el disco, hacia la izquierda de $R = 1,116$ (punto de silla) y una región regular a la derecha. **(b)** Superficie de sección para $m = 2$, $L_z = 1,196$ y $E = -0,389$ (contorno (b) en la figura 2.19). La región de órbitas que cruzan el disco tiene una región estocástica angosta y una gran zona de curvas KAM. Tenemos nuevamente una pequeña zona regular a la izquierda del punto de silla ubicado en $R = 1,043$.

Un fenómeno interesante sucede cuando el potencial efectivo tiene puntos de silla fuera del disco. Este es el caso de $m = 1$ y $m = 2$, cuyos puntos críticos exteriores están en los rangos $1 < R_c \leq 1,198$ y $1 < R_c \leq 1,075$, respectivamente. Dichos puntos de equilibrio están fuera del disco pero cerca de su borde, de tal forma que, para ciertos valores de E , el contorno de $\tilde{\phi}_m$ contendrá tan sólo una fracción del disco y una región libre en $z = 0$. Por tanto tendremos órbitas que cruzan el disco y otras que no lo hacen. Por ejemplo, escogemos $k = 0,673$ (correspondiente a $R_c = 1,116$) y $E = -0,335$, obteniendo el contorno (a) de la figura 2.19. La superficie de sección resultante (figura 2.20(a)) tiene una gran región caótica a la izquierda y una pequeña región, totalmente regular, a la derecha. Ambas están divididas por el punto de silla, de tal forma que para condiciones iniciales cerca de su izquierda la partícula es *atrapada* en la zona estocástica. En contraste, para condiciones iniciales cerca de la derecha del punto de silla, el movimiento está confinado a una región de toroides no destruidos. En 2.20(b) mostramos una situación similar para $m = 2$. En esta superficie $k = 0,991$ ($R_c = 1,043$) y $E = -0,389$ (contorno (b) de la figura 2.19). Encontramos una amplia zona de órbitas que cruzan el disco con una pequeña componente caótica encerrando una cadena de islas y anillos KAM conformados por órbitas tipo caja. A la derecha del punto de silla existe una pequeña región de regularidad. Para los casos $m = 3$ y $m = 4$ no es posible obtener superficies de sección con las características anteriores, ya que sus potenciales efectivos no tienen puntos de silla exteriores (el producto $\kappa^2\nu^2$ es positivo en $R > 1$) [114].

2.2.4. Órbitas en Modelos PRG

En esta subsección estudiaremos el movimiento de partículas de prueba alrededor de los modelos formulados en la sección 2.1.2. En las figuras 2.21 y 2.22 mostramos el comportamiento de las frecuencias epicíclica y vertical, respectivamente, para los primeros cuatro modelos y usando los mismos valores de B_1 que en la figura 2.3. Vemos que estos modelos están caracterizados por un amplio rango de estabilidad bajo perturbaciones radiales. En particular, para $B_1 > B_{1min}$, existen órbitas circulares radialmente estables con radios en el rango $0 \leq R \leq a$. En contraste, hay pequeños rangos de estabilidad vertical. Dichos rangos tienden a decrecer conforme m y B_1 crecen. De esta forma, podemos decir que la estabilidad bajo perturbaciones verticales mejora en modelos con gran m .

Presentamos soluciones numéricas de (2.62) para el caso de órbitas acotadas que cruzan el disco. En la figura 2.23(a), mostramos la superficie de sección $z = 0$

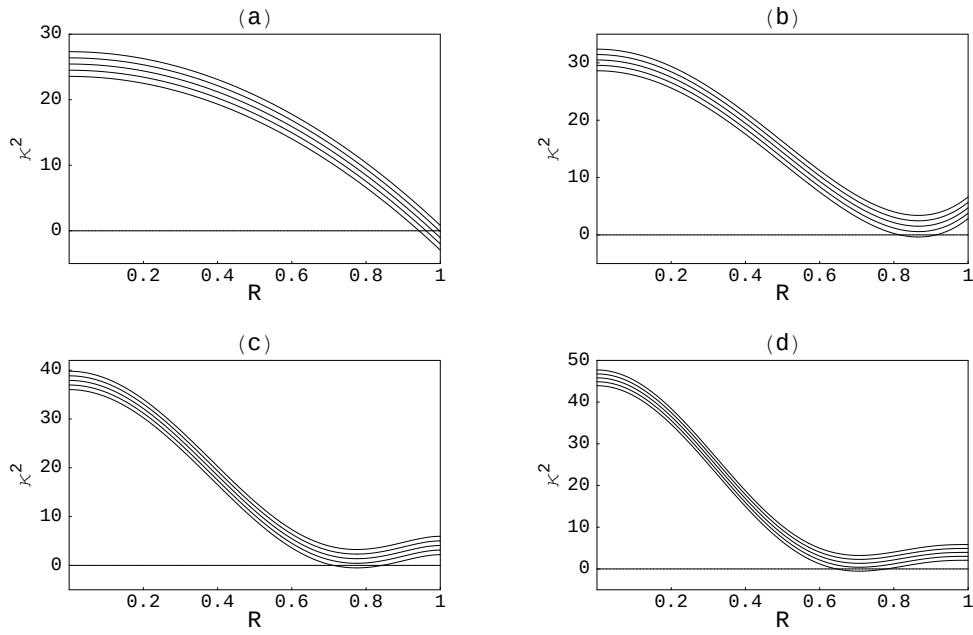


Figura 2.21: Frecuencia epicíclica cuadrática, como función de R para los casos (a) $m = 2$, (b) $m = 3$, (c) $m = 4$, (d) $m = 5$. Usamos los mismos valores para los parámetros B_1 que en la figura 2.3. Las curvas inferiores corresponden a B_{1min} y las curvas superiores corresponden a valores más grandes que B_1 . En todos los casos, observamos un rango prominente de estabilidad radial. Dicho rango crece con B_1 .

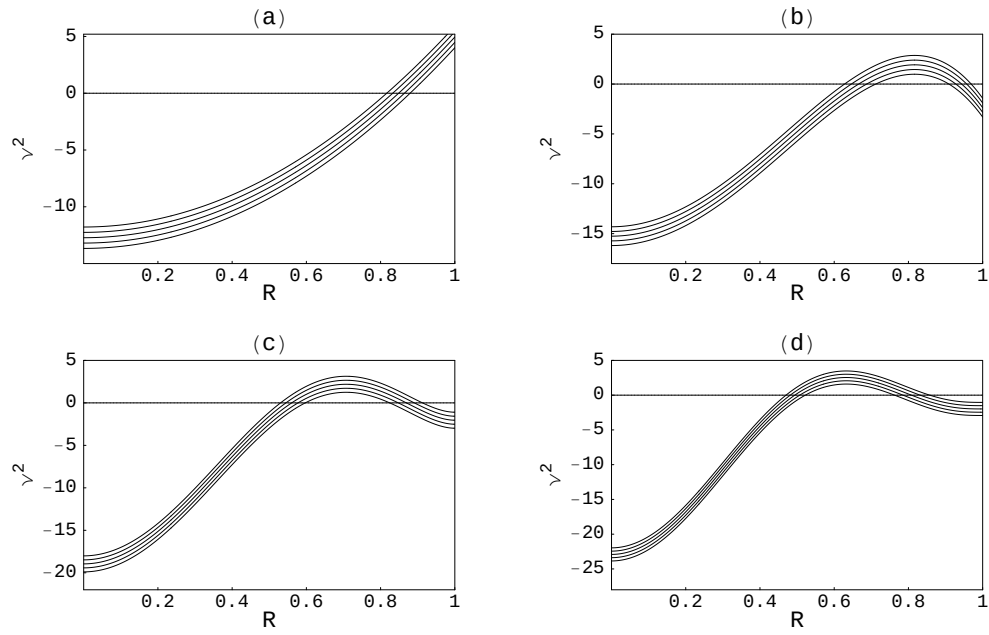


Figura 2.22: Frecuencia vertical cuadrática como una función de R para los casos (a) $m = 2$, (b) $m = 3$, (c) $m = 4$, (d) $m = 5$. Empleamos los mismos valores para el parámetro B_1 que en la figura 2.3. Las curvas inferiores corresponden a B_{1min} y las curvas superiores corresponden a valores cada vez más grandes para B_1 . El rango de estabilidad vertical es pequeño y crece con B_1 .

correspondiente a algunas órbitas con $E = -1,245$ y $L_z = 0,2$ (estos mismos valores son usados en las siguientes tres superficies de sección), correspondiente al movimiento alrededor del modelo $m = 2$ con $B_1 = 0,1$. Como era de esperarse, esta gráfica exhibe una variedad de órbitas regulares y caóticas. Hay una región central conformada por dos clases de curvas KAM: los anillos centrales generados por órbitas caja; un conjunto de islas resonantes (órbitas lazo) encerrando los anillos. Además, hay dos zonas laterales de regularidad, generadas por órbitas lazo, las cuales están siendo encerradas por un mar de caos. En la figura 2.23(b), mostramos el efecto del incremento de B_1 en el modelo $m = 2$. Entonces, para las mismas condiciones iniciales con $E = -1,245$ y $L_z = 0,2$, la superficie de sección revela un incremento en la región caótica junto con una distorsión de las curvas KAM (por ejemplo, ahora el toroide central es generado solamente por órbitas caja).

Uno podría esperar superficies de sección similares para modelos $m = 3, \dots$, pero, lo que realmente sucede es que para ciertos valores de B_1 todas las órbitas son regulares. Este es el caso ilustrado en la figura 2.23(c), donde la sección de Poincaré, correspondiente al movimiento alrededor del modelo $m = 3$, revela movimiento completamente regular. Este es un hecho sorprendente, ya que, en esta clase de potenciales el caos es la regla. Si incrementamos B_1 (por ejemplo, desde 0.2 hasta 1), como en el caso de la figura 2.23(d), encontramos nuevamente una gran región caótica encerrando algunas regiones regulares de curvas KAM. El parámetro libre B_1 , aparte de determinar algunas características importantes en órbitas ecuatoriales, juega un rol esencial en el movimiento 3-dimensional y podemos conjeturar que para ciertos valores, es posible tener una tercera integral de movimiento.

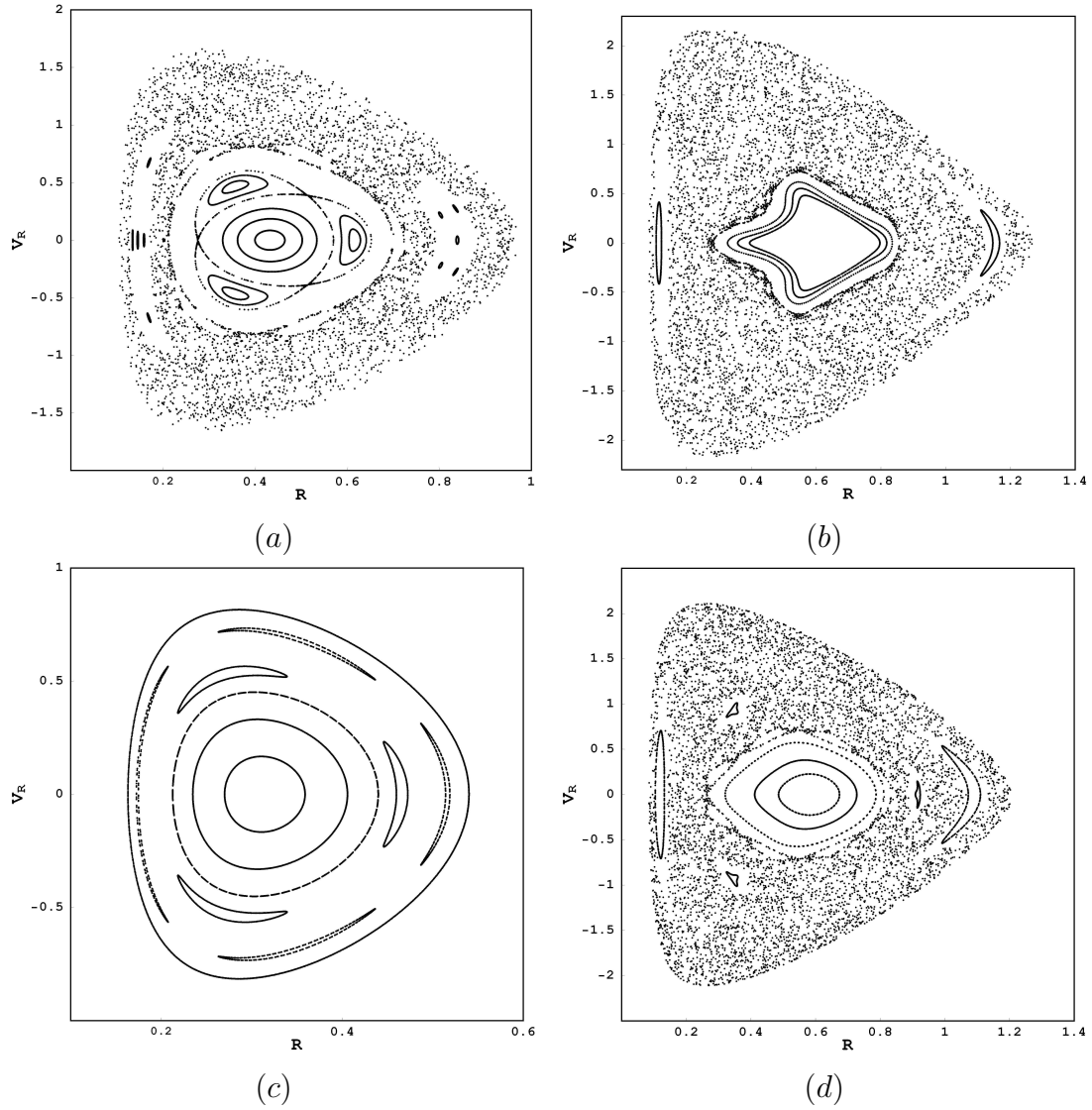


Figura 2.23: Superficie de sección para algunas órbitas con $L_z = 0,2$, $E = -1,245$, alrededor de: **(a)** modelo $m = 2$ con $B_1 = 0,1$; **(b)** modelo $m = 2$ con $B_1 = 0,5$; **(c)** modelo $m = 3$ con $B_1 = 0,2$. En este caso tenemos sólo órbitas regulares. **(d)** modelo $m = 3$ con $B_1 = 1$. Ahora, una prominente región caótica aparece como consecuencia de la superposición de las cadenas de islas laterales, mostradas en la figura previa.

2.3. ÓRBITAS POST-NEWTONIANAS EN CAMPOS ESTÁTICOS CON SIMETRÍA AXIAL

Finalizaremos el presente capítulo explorando el papel que desempeñan las contribuciones 1PN en la descripción del movimiento, cuando se trata de partículas orbitando al rededor de objetos estáticos y axialmente simétricos. Como en la sección anterior, restringiremos nuestro análisis al caso de trayectorias acotadas, fundamentales en la formación de sistemas estelares. Para ello, recordemos la ecuación de movimiento post-newtoniana (1.5), la cual, en caso de que la fuente sea estática ($\zeta = 0$ y $\partial\phi/\partial t = 0$), se reduce a

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\phi - \frac{1}{c^2} \left[\nabla(2\phi^2 + \psi) + 3\mathbf{v}\frac{\partial\phi}{\partial t} + 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla\phi) - v^2\nabla\phi \right]. \quad (2.74)$$

Si además asumimos que la fuente tiene simetría axial, podemos usar coordenadas cilíndricas, para obtener las tres componentes de la ecuación vectorial anterior:

$$\begin{aligned} \ddot{R} &= R\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial\phi}{\partial R} \left(1 + (3\dot{R}^2 - R^2\dot{\varphi}^2 - \dot{z}^2)/c^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \left(4\dot{R}\dot{z}\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial R}(2\phi^2 + \psi) \right), \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -\frac{\partial\phi}{\partial z} \left(1 + (3\dot{z}^2 - R^2\dot{\varphi}^2 - \dot{R}^2)/c^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \left(4\dot{R}\dot{z}\frac{\partial\phi}{\partial R} - \frac{\partial}{\partial z}(2\phi^2 + \psi) \right), \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$2\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi} = \frac{4R\dot{\varphi}}{c^2} \left(\dot{R}\frac{\partial\phi}{\partial R} + \dot{z}\frac{\partial\phi}{\partial z} \right), \quad (2.77)$$

donde el punto denota derivada con respecto a t . Observemos que la última de estas relaciones introduce una simplificación en el sistema dinámico (2.75)-(2.76). Gracias a que $\dot{\phi} = \dot{R}\phi_{,R} + \dot{z}\phi_{,z}$ puede mostrarse fácilmente que se cumple

$$\frac{d}{dt} \left[\ln(R^2\dot{\varphi}) - \frac{4\phi}{c^2} \right] = 0,$$

lo cual implica que la cantidad

$$I \equiv \ln(R^2\dot{\varphi}) - \frac{4\phi}{c^2} \quad (2.78)$$

es una integral de movimiento y $\dot{\varphi}$ se reduce, a orden 1PN, a

$$\dot{\varphi} = \frac{K e^{4\phi/c^2}}{R^2} \approx \frac{K}{R^2} \left(1 + \frac{4\phi}{c^2} \right), \quad (2.79)$$

en donde $K = e^I$ es una constante arbitraria. Obsérvese que, en el límite newtoniano, K coincide con el L_z clásico. Como consecuencia de (2.79), las ecuaciones (2.75) y (2.76), adoptan la forma

$$\begin{aligned} \ddot{R} = & -\frac{\partial}{\partial R} \left(\phi + \frac{2\phi^2 + \psi}{c^2} \right) + \frac{1}{c^2} \left[3\dot{R}^2 - \dot{z}^2 - \frac{K^2}{R^2} \right] \frac{\partial \phi}{\partial R} + 4 \frac{\dot{R}\dot{z}}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ & + \frac{K^2}{R^3} \left(1 + \frac{8\phi}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\phi + \frac{2\phi^2 + \psi}{c^2} \right) + \frac{1}{c^2} \left[3\dot{z}^2 - \dot{R}^2 - \frac{K^2}{R^2} \right] \frac{\partial \phi}{\partial z} + 4 \frac{\dot{R}\dot{z}}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial R}. \quad (2.81)$$

Es posible determinar la otra integral de movimiento (la versión 1PN de la energía) si partimos del lagrangiano 1PN, correspondiente a una partícula moviéndose alrededor de un objeto estático[132],

$$\mathfrak{L} = \frac{v^2}{2} - \phi - \frac{\phi^2}{2c^2} - \frac{\psi}{c^2} - \frac{3\phi v^2}{2c^2} + \frac{v^4}{8c^2}, \quad (2.82)$$

y encontramos el Hamiltoniano asociado, el cual es una cantidad conservada que llamaremos E . Después de algunos cálculos, encontramos que a orden 1PN,

$$E = v^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3\phi}{2c^2} - \frac{3v^2}{8c^2} \right) + \phi + \frac{\phi^2}{2c^2} + \frac{\psi}{c^2}. \quad (2.83)$$

De forma similar al caso newtoniano, la trayectoria de la partícula estará confinada a la región del espacio de fase definida por E constante, en la relación anterior. Una gran diferencia con el caso clásico, radica en el hecho de que ahora no tenemos a disposición un potencial efectivo que nos permita vislumbrar las situaciones en las cuales se presenta movimiento acotado. Sin embargo, en este caso seguiremos usando la superficie de sección de Poincaré como herramienta para investigar la estructura del espacio de fase, asociado al movimiento post-newtoniano. Para ello, es menester despejar la componente z de la velocidad, a partir de la fórmula anterior. Si definimos

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{3\phi}{2c^2} \quad \text{y} \quad \varpi = \phi + \frac{\phi^2}{2c^2} + \frac{\psi}{c^2}, \quad (2.84)$$

tras efectuar algunos cálculos, llegamos a

$$\dot{z}^2 = \frac{4c^2}{3} \left[\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \frac{3(\varpi - E)}{2c^2}} \right] - \dot{R}^2 - \frac{K}{R^2} \left(1 + \frac{4\phi}{c^2} \right), \quad (2.85)$$

de manera que, para un E y K dados, una vez escogidas las condiciones iniciales para R , $\dot{R}$ y z (con el objeto de obtener la sección de Poincaré), la velocidad $\dot{z}$ queda determinada por (2.85). Aprovechamos para señalar que, así como se hizo en la sección anterior, bastará con registrar sólo cortes con $\dot{z} > 0$, en la superficie de sección. A continuación presentaremos las principales consecuencias de introducir las correcciones 1PN en las ecuaciones de movimiento, empleando el mismo enfoque descriptivo de los apartados anteriores. Además, hacia el final del capítulo, nos concentraremos en el caso de órbitas circulares en el plano ecuatorial, con el fin de vislumbrar las correcciones introducidas en las curvas de rotación.

2.3.1. Movimiento Alrededor de Objetos con Deformación Oblata y Prolata

En el apartado 2.2.2 se mostró que la deformación octupolar en centros de atracción modifica la estructura del espacio de fase de las órbitas, en relación al caso en que tan sólo se tiene en cuenta la contribución del monopolio y el cuadrupolo. En esta sección se hará algo similar, pero estudiando las consecuencias que se derivan de introducir las correcciones 1PN, en el movimiento de una partícula de prueba alrededor de una fuente con deformación cuadrupolar (prolata y oblata). En este caso, ϕ obedece a la misma expansión multipolar newtoniana, caracterizada por un monopolio α y un momento cuadrupolar β . En lo que respecta a ψ , también podemos escribir

$$\psi = -\frac{\tilde{\alpha}}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{\tilde{\beta}(2z^2 - R^2)}{2(R^2 + z^2)^{5/2}}, \quad (2.86)$$

donde $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ desempeñan el papel de momentos monopolar y cuadrupolar post-newtonianos, respectivamente ⁶. De forma similar que en (2.66)-(2.67), están rela-

⁶El potencial post-newtoniano ψ , al igual que ϕ , es solución de la ecuación de Laplace, en el vacío. Esto implica que podemos asumir una expansión multipolar como la de la ecuación (2.86).

cionados con la distribución material de la fuente a través de

$$\tilde{\alpha} = 2\pi \int_0^\infty r'^2 dr' \int_{-1}^1 dx' [T^{00} + T^{ii}], \quad (2.87)$$

$$\tilde{\beta} = 2\pi \int_0^\infty r'^4 dr' \int_{-1}^1 dx' P_2(x') [T^{00} + T^{ii}], \quad (2.88)$$

donde $x' = \cos \theta' = z' / \sqrt{R'^2 + z'^2}$. De manera que, al introducir ϕ y ψ en el sistema de ecuaciones (2.75)-(2.76), escogiendo valores apropiados para E y K , podemos generar la correspondiente superficie de sección, mediante un tratamiento numérico similar al efectuado en los apartados 2.2.2, 2.2.3 y 2.2.4. Primero consideramos la situación en que la fuente presenta deformación oblata, tomando $E = -0,4$ y $K = 0,9$. En este punto, es preciso señalar que debemos mantener los mismos órdenes de magnitud que en el análisis clásico, ya que las contribuciones newtonianas son dominantes en un sistema típico. Además mantendremos las mismas unidades en donde, dicho sea de paso, tomamos $c \sim 100$.

En la figura 2.24(a), se muestra la superficie de sección correspondiente a seis órbitas newtonianas ($L_z = 0,9$) alrededor de una fuente cuya deformación oblata está dada por $\beta = -0,2$ y $\alpha = 1$. Como es de esperarse, no hay ningún vestigio de zonas caóticas en el espacio de fase, exhibiendo cuatro grandes anillos centrales (el más grande es generado por órbitas cuasiperiódicas) encerrados por una región de islas resonantes. Los dos contornos exteriores, en el borde de la sección, son generados por órbitas tipo caja, una de ellas cuasiperiódica. En la figura 2.24(b) hemos incluido las correcciones post-newtonianas, usando las mismas condiciones iniciales de las órbitas de la figura 2.24(a) y escogiendo $\tilde{\beta} = -0,2$, $\tilde{\alpha} = 1$. Se puede observar que la estructura del espacio de fase presenta algunos cambios, en relación con el caso newtoniano. Mientras que la región central de anillos KAM ha permanecido invariable, ahora las islas resonantes son generadas por órbitas periódicas y el gran contorno exterior ha desaparecido para convertirse en un mar de caos.

La situación correspondiente a un centro de atracción con deformación prolata es ilustrada en la figura 2.25. Usando también $E = -0,4$, $L_z = 0,9$ y $\alpha = 1$, pero ahora $\beta = 0,15$, obtenemos la superficie de sección para 10 órbitas newtonianas (figura 2.25(a)). Observamos dos zonas de regularidad, una central y otra lateral, alternadas por una prominente región caótica. Al introducir las correcciones post-newtonianas (figura 2.25(b)), se aprecian ciertos cambios significativos: (i) las órbitas periódicas que conforman la región central de la figura 2.25(a), ya no lo son, según la predicción post-newtoniana; (ii) algunas islas en la región lateral

ahora son generadas por órbitas periódicas tipo lazo y (iii) la zona caótica es menos prominente que la conformada por órbitas newtonianas.

2.3.2. Correcciones Post-newtonianas en las Curvas de Rotación

Como veremos en la sección 3.2, es posible formular modelos de discos finitos en la aproximación 1PN, mediante la implementación del método de Hunter [2]. Dichos modelos constituyen casos particulares de distribuciones con deformación oblata, por lo que se espera un comportamiento de las órbitas tridimensionales post-newtonianas como el señalado en el apartado anterior. Sin embargo, no hay que olvidar que ahora son dos los factores que introducen irregularidad en el movimiento: las correcciones 1PN y la presencia del disco. No nos detendremos por lo pronto en el análisis de órbitas que cruzan el disco, sino en el caso de las órbitas circulares en el plano ecuatorial. Esto, con el fin de mostrar los efectos de las contribuciones post-newtonianas en las curvas de rotación, asociadas a cada modelo discoidal.

Sabemos que las órbitas circulares ecuatoriales son tales que $\dot{R} = \dot{z} = 0$, $\ddot{R} = \ddot{z} = 0$ y $z = 0$. De manera que, la ecuación de movimiento (2.75) se reduce a

$$R\dot{\phi}^2 \left[1 + \frac{R}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial R} \right]_{z=0} = \frac{\partial}{\partial R} \left[\phi + \frac{2\phi^2 + \psi}{c^2} \right]_{z=0}.$$

Esta última ecuación puede ser usada para obtener la velocidad circular $v_\phi = R\dot{\phi}$ como una función del radio R (a orden c^{-2}),

$$v_\phi = \sqrt{R \frac{\partial \phi}{\partial R} \left(1 + \frac{4\phi}{c^2} - \frac{R}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{R}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial R}} \bigg|_{z=0}. \quad (2.89)$$

Como es de esperarse, esta relación se reduce a la expresión clásica, $v_\phi = \sqrt{R\partial\phi/\partial R}$, en el límite $c \rightarrow \infty$. Quizás, la diferencia más importante entre esta relación y (2.89) es que, en el caso newtoniano, el radical es lineal en ϕ y sus derivadas, mientras que en la aproximación 1PN, depende de términos no lineales que involucran ϕ , ψ y derivadas. Esta dependencia no lineal puede llegar a ser significativa en algunos casos (apartados 3.2.3 y 3.2.4) y prácticamente despreciable en otros (ver 3.2.5). Con el fin de ilustrar qué tan importantes pueden ser los efectos post-newtonianos, presentaremos aquí las curvas de rotación asociadas a los dos primeros miembros de la familia DGK, en sus dos versiones: newtoniana y 1PN (la formulación post-newtoniana de estos discos, se expone detalladamente

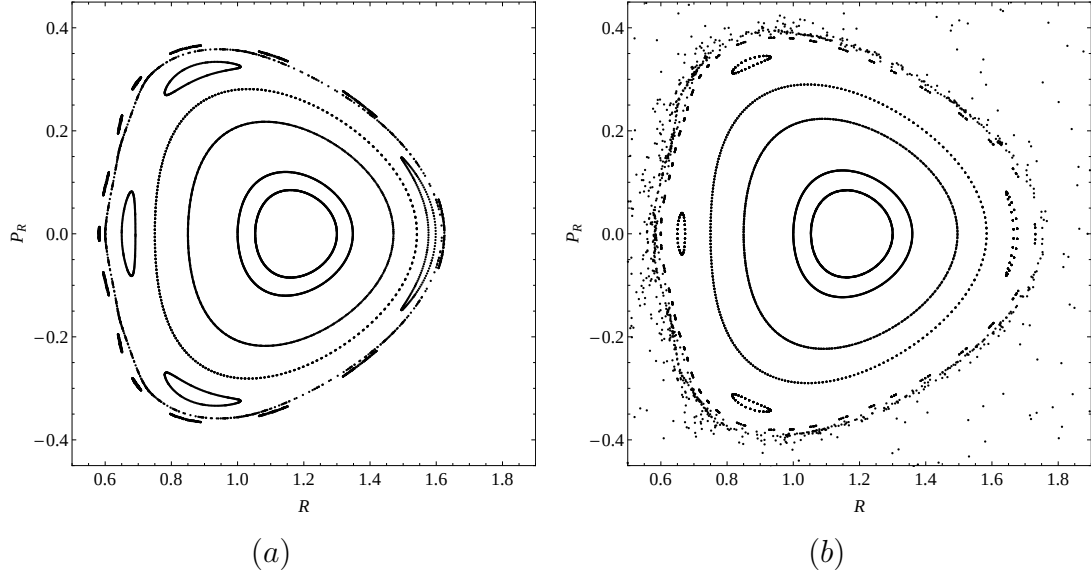


Figura 2.24: **(a)** Superficie de sección correspondiente a seis órbitas newtonianas alrededor de una fuente cuya deformación oblata está dada por $\beta = -0,2$ y $\alpha = 1$. Vemos cuatro anillos centrales encerrados por una región de islas resonantes, limitada por dos contornos exteriores de órbitas tipo caja. **(b)** Ahora incluimos las correcciones post-newtonianas, usando las mismas condiciones iniciales de las órbitas del caso (a) y escogiendo $\tilde{\beta} = -0,2$, $\tilde{\alpha} = 1$. La sección presenta algunos cambios que se evidencian especialmente en las islas resonantes y uno de los contornos exteriores, los cuales que están ahora formados por órbitas periódicas. El gran toroide exterior, compuesto inicialmente por órbitas periódicas, ha desaparecido y lo que se observa ahora es una prominente región caótica. Obsérvese que ahora las coordenadas de fase en la superficie de sección son R y su momento canónico conjugado P_R . En el caso post-newtoniano éste último no coincide con V_R .

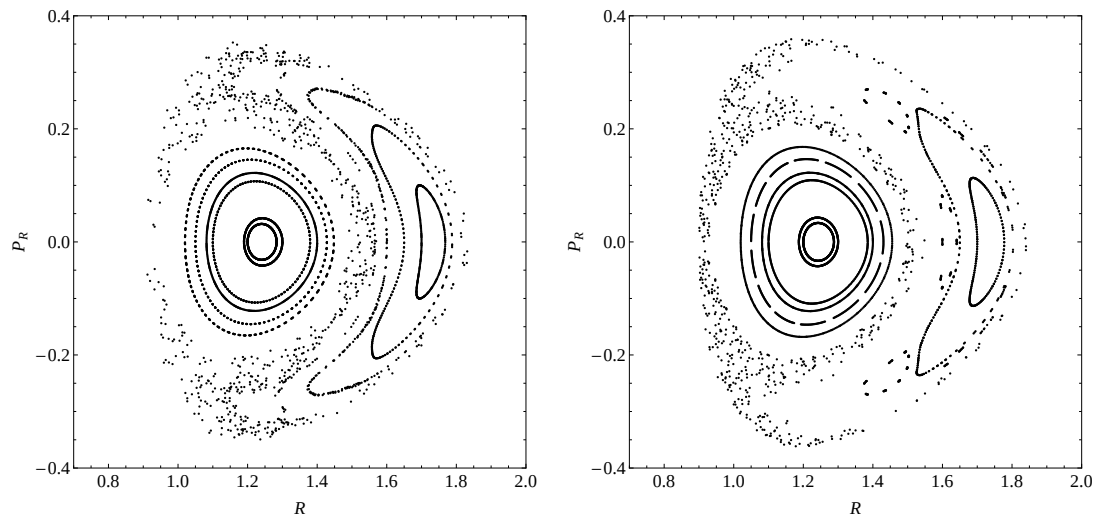


Figura 2.25: **(a)** Superficie de sección generada por 10 órbitas newtonianas con $E = -0,4$, $L_z = 0,9$, $\alpha = 1$ y $\beta = 0,15$. Hay dos zonas de regularidad, una central y otra lateral, alternadas por una prominente región caótica. **(b)** Las órbitas post-newtonianas, con las mismas condiciones iniciales que en el caso (a), generan una superficie de sección con una estructura algo distinta. Ahora ya no hay órbitas periódicas en la región central y, en cambio, sí aparecen en la región lateral. Además, la zona caótica es menos prominente que la conformada por órbitas newtonianas.

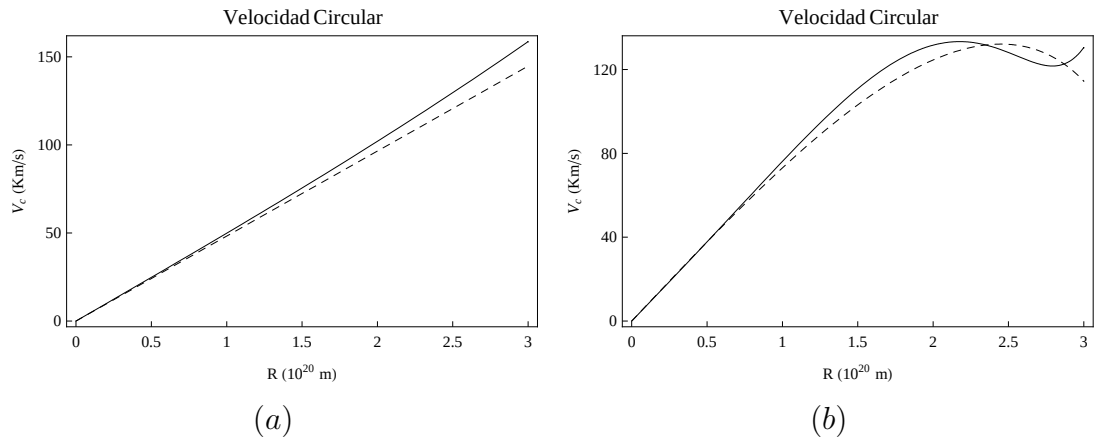


Figura 2.26: **(a)** Curvas de rotación, newtoniana (línea a trazos) y post-newtoniana (línea completa), correspondientes al primer miembro de la familia DGK, escogiendo valores típicos para la masa, el radio y la velocidad angular: $M = 4 \times 10^{40} \text{ kg}$, $a = 3 \times 10^{20} \text{ m}$, $\Omega = 2 \times 10^{-13} \text{ Hz}$ (usamos unidades MKS, donde $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{Kgs}^2$ y $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$). En este caso vemos que las correcciones 1PN crecen con el radio. **(b)** Curvas de rotación, newtoniana (línea a trazos) y post-newtoniana (línea completa), correspondientes al segundo miembro de la familia DGK, empleando los mismos parámetros del caso (a). Vemos nuevamente que las contribuciones 1PN se hacen más significativas hacia el extremo del disco.

en los apartados 3.2.3 y 3.2.4 y en la referencia [2]). En las figuras 2.26(a) y 2.26(b) se aprecia claramente que, en estos modelos, los efectos post-newtonianos aumentan con el radio. Cerca del extremo del disco galáctico, el comportamiento de las curvas newtoniana y post-newtoniana difiere en gran medida, sobre todo en la figura 2.26(b). En cambio, como veremos en el apartado 3.2.5, existen otros modelos, como los discos PRG, en donde las correcciones 1PN son prácticamente despreciables (usando valores típicos de masa y radio).

DESCRIPCIÓN ESTADÍSTICA DE SISTEMAS ESTELARES: I. RÉGIMEN SIN COLISIONES

3.1. SISTEMAS AUTOGRAVITANTES EN EQUILIBRIO: ESCENARIO NEWTONIANO

En la descripción macroscópica de los sistemas estelares, existe un parámetro fundamental que determina el tipo de régimen evolutivo en el cual se encuentra un determinado sistema autogravitante. Es el llamado tiempo de relajación y se define como[11]

$$t_{relax} \simeq \frac{0,1N}{\ln N} t_{cross}. \quad (3.1)$$

donde N es el número de estrellas y $t_{cross} = R/v$ es el tiempo de cruce [11]¹. Físicamente, t_{relax} es el tiempo necesario para que el sistema estelar pierda la memoria de sus condiciones iniciales (por efecto de los múltiples encuentros mutuos), y se relaje. Sistemas estelares para los cuales t_{relax} sea superior a su edad, se dice que obedecen a un régimen libre de colisiones, ya que el papel de los encuentros es despreciable. Las galaxias típicas tienen $N \approx 10^{11}$ estrellas y tienen una edad de unos cientos tiempos de cruce, entonces para estos sistemas los encuentros no son relevantes, excepto en regiones cercanas al centro. Por otra parte, en un cluster de estrellas con tiempo de vida típico de 10Gyr, $N \approx 10^5$ y $t_{cross} \approx 1\text{Myr}$, los encuentros sí juegan un papel importante. Veremos que ellos determinarán dos cantidades físicas que cuantifican el mecanismo de relajación del sistema: los coeficientes de difusión. Esto será tratado principalmente en el próximo capítulo.

¹Tiempo requerido por una estrella típica con rapidez v para cruzar una galaxia de tamaño R .

Por lo pronto, empezaremos analizando el caso en que el sistema autogravitante se encuentre en régimen sin colisiones (galaxias).

3.1.1. La Ecuación de Boltzmann sin Colisiones

Cuando se modela una galaxia como un sistema sin colisiones, no es práctico seguir cada una de las órbitas de los billones de estrellas que la componen. La mayoría de las predicciones medibles dependen de la probabilidad de encontrar una estrella, con una posición en el elemento $d^3\mathbf{x}$, alrededor de $\mathbf{x}$ y con una velocidad en el elemento $d^3\mathbf{v}$, alrededor de $\mathbf{v}$. Por esto, se define la función de distribución (FD) f tal que $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$ representa la probabilidad de encontrar una estrella en el rango dado en un tiempo t [65]. Como vemos la FD está definida el espacio de fase 6-dimensional, conformado por las coordenadas $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ de una estrella.² Un punto en este espacio representa el estado de una partícula. Así mismo, en cualquier instante de tiempo, el estado de un sistema entero conformado por N estrellas está representado por N puntos en el espacio de fase. Si en cada punto del espacio de fase se construye un elemento de volumen $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$ y medimos la probabilidad de encontrar una estrella en dicho volumen, el resultado es por definición $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$. Comúnmente, a esta f se le denomina a menudo como *función de distribución de una partícula*, pero por el momento, en aras de la simplicidad, en este capítulo usaremos simplemente el término función de distribución o FD.

Puede mostrarse que dicha FD obedece una ecuación de movimiento o de evolución, conocida como ecuación de Boltzmann sin colisiones [11],

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (3.2)$$

Esta es una ecuación en derivadas parciales de f como función de las 6 coordenadas del espacio de fase y del tiempo. También puede expresarse de la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \cdot (f\dot{\mathbf{w}}) = 0, \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ son las coordenadas del espacio de fase. En analogía con la dinámica de fluidos, ésta última establece que mientras f evoluciona en el tiempo, existe una corriente de probabilidad sobre el espacio de fase, $f\dot{\mathbf{w}}$. De acuerdo con (3.3), la ecuación de Boltzmann sin colisiones se reduce a

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad (3.4)$$

²En este contexto, el conjunto de coordenadas espaciales y de velocidades $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ es lo que entendemos por las *coordenadas* de la estrella.

lo cual quiere decir que el flujo de probabilidad a través del espacio de fase es incompresible; es decir, a pesar de que la densidad f varíe de punto a punto, ésta es constante en el sistema de referencia de una estrella particular.

El Teorema de Jeans

Sea un sistema estelar en donde es posible definir una función de las coordenadas del espacio de fase $I(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, tal que

$$\frac{d}{dt}I[\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)] = \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial I}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial I}{\partial \mathbf{v}} = 0; \quad (3.5)$$

Entonces, por definición, I se conoce como una integral de movimiento. Por otra parte, si el sistema estelar se encuentra en equilibrio o en un estado estacionario $\partial f / \partial t = 0$ y, por tanto, la ecuación de Boltzmann sin colisiones se reduce a

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (3.6)$$

Vemos que la condición (3.5) para que una cantidad I sea una integral de movimiento es exactamente idéntica a la condición (3.6) de que I sea una solución en estado de equilibrio de la ecuación de Boltzmann sin colisiones. Esto conlleva a un poderoso teorema, formulado originalmente por Jeans [11]:

Cualquier solución en estado estable de la ecuación de Boltzmann sin colisiones depende de las coordenadas del espacio de fase solo a través de las integrales de movimiento del sistema. Además, cualquier función de las integrales constituye una solución en estado estable de la ecuación de Boltzmann sin colisiones.

Este teorema constituye una herramienta muy fuerte en la construcción de modelos autoconsistentes, especialmente para aquellos que presentan algún tipo de simetría, al reducir el número de variables de las cuales pueda depender la función de distribución. De esta forma, el problema de encontrar una FD que satisfaga la ecuación de Boltzmann sin colisiones, para un sistema dado, queda solucionado al considerar cualquier función que dependa sólo de sus integrales de movimiento.

3.1.2. FDs para Sistemas Axialmente Simétricos

En coordenadas cilíndricas, un sistema es axialmente simétrico si todas sus propiedades son independientes del ángulo azimutal φ . El momento conjugado de φ es $L_z = Rv_\varphi$ el cual permanece constante a medida que el sistema evoluciona y es por tanto una integral de movimiento [57]. Por otra parte, para sistemas

aislados cuyas propiedades no dependen del tiempo, la energía total E constituye una segunda integral de movimiento. De modo que centraremos nuestra atención en sistemas descritos por FDs de la forma $f(E, L_z)$.

Relación entre la FD y los Observables

Muchas veces resulta conveniente descomponer $f(E, L_z)$ en una parte que es par respecto a L_z y otra parte impar [11]

$$f(E, L_z) = f_+(E, L_z) + f_-(E, L_z), \quad (3.7)$$

donde

$$f_{\pm}(E, L_z) \equiv \frac{1}{2}[f(E, L_z) \pm f(E, -L_z)]. \quad (3.8)$$

Como veremos, cada una de estas partes por separado desempeña un papel especial, según el observable que estemos teniendo en cuenta. Por ejemplo, veamos la integral

$$\nu(\mathbf{x}) \equiv \int d^3\mathbf{v} f(E, L_z), \quad (3.9)$$

que proporciona la probabilidad, por unidad de volumen, de encontrar una estrella particular en $\mathbf{x}$, independientemente de su velocidad. Dado que $f_-(E, L_z)$ es impar respecto a L_z , ésta no contribuye a la integral. Esta cantidad está profundamente relacionada con los observables mas inmediatos, pues al multiplicar por el número total de estrellas N , la masa total M o la luminosidad L de una galaxia, se obtiene la densidad de estrellas $n(\mathbf{x})$, la densidad de masa $\rho(\mathbf{x})$ y la densidad de luminosidad $j(\mathbf{x})$, respectivamente [11]. Estos observables son de gran importancia pues pueden ser medidos experimentalmente mediante técnicas fotométricas.

En algunas ocasiones, es conveniente modificar la definición de la FD de tal modo que $f d^6\mathbf{w}$ no represente la probabilidad de encontrar una estrella dada en el volumen del espacio de fase $d^6\mathbf{w}$, sino quizás, el valor esperado, masa total, o luminosidad total de las estrellas en $d^6\mathbf{w}$. Estas modificaciones corresponden a multiplicar f por N , M , o L , respectivamente. Idealmente, estas diferentes definiciones deberían estar reflejadas en diferentes notaciones para la FD. En la práctica la definición usualmente es clara según el contexto, y f es usada para denotar todas estas cantidades.

Otro tipo de observables son aquellos relacionados con las velocidades, los cuales se pueden determinar en la práctica mediante experimentos que involucran el efecto Doppler. En el marco de referencia de la Tierra, las cantidades medibles

están determinadas por la velocidad media a lo largo de la línea de visión $\bar{v}_{\parallel}(\mathbf{x})$ y la dispersión de velocidades estelares en cada punto de la galaxia alrededor de $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$, la cual está caracterizada por el tensor de dispersión de velocidades. Este tensor es diagonal en el marco de referencia de la galaxia y sus componentes son [11]

$$\sigma_{ij}^2(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\nu(\mathbf{x})} \int d^3\mathbf{v} (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j. \quad (3.10)$$

Dado que $v_{\parallel}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v}$ (donde $\hat{\mathbf{s}}$ es un vector unitario que va desde el observador hasta el centro de la galaxia), para determinar $\bar{v}_{\parallel}(\mathbf{x})$ primero es necesario calcular la velocidad media de una estrella en el sistema de referencia de la galaxia, cuyas componentes son [11]

$$\bar{v}_R = \frac{1}{\nu} \int dv_R v_R \int dv_z \int dv_{\phi} f \left[\frac{1}{2}(v_R^2 + v_z^2 + v_{\phi}^2) + \phi, Rv_{\phi} \right] = 0, \quad (3.11a)$$

$$\bar{v}_z = \frac{1}{\nu} \int dv_z v_z \int dv_R \int dv_{\phi} f \left[\frac{1}{2}(v_R^2 + v_z^2 + v_{\phi}^2) + \phi, Rv_{\phi} \right] = 0, \quad (3.11b)$$

$$\bar{v}_{\phi} = \frac{1}{\nu} \int dv_{\phi} v_{\phi} \int dv_R \int dv_z f \left[\frac{1}{2}(v_R^2 + v_z^2 + v_{\phi}^2) + \phi, Rv_{\phi} \right]. \quad (3.11c)$$

Las integrales para $\bar{v}_R$ y $\bar{v}_z$ se anulan porque los integrandos son funciones impares de v_R y v_z respectivamente. La integral de $\bar{v}_{\phi}$ se anularía si el integrando fuera impar y debido a esto, solamente contribuye $f_-(E, L_z)$.

Como se puede observar, las partes par e impar de la FD desempeñan papeles independientes. En realidad, si se parte del par potencial-densidad solo es posible determinar $f_+(\varepsilon, L_z)$, existiendo un número infinito de posibilidades para $f_-(\varepsilon, L_z)$, de las cuales cada una representa un estado de rotación diferente.

La Ecuación Fundamental

Supóngase una estrella que tiene una energía específica E , como consecuencia de su interacción con un campo gravitacional cuyo potencial asociado es ϕ , el cual es generado por la totalidad del sistema estelar. En este contexto, resulta conveniente definir un potencial relativo Ψ y una energía relativa ε de la estrella, mediante [11]

$$\Psi \equiv -\phi + \phi_0 \quad \text{y} \quad \varepsilon \equiv -E + \phi_0 = \Psi - \frac{1}{2}v^2, \quad (3.12)$$

en donde ϕ_0 es una constante. En la práctica, generalmente se elige ϕ_0 tal que $f > 0$ para $\varepsilon > 0$ y $f = 0$ para $\varepsilon \leq 0$. Obviamente, $\varepsilon = 0$ corresponde a la energía

relativa de escape del sistema. En particular, el potencial relativo de un sistema aislado satisface la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Psi = -4\pi G \rho, \quad (3.13)$$

sujeta a la condición de contorno $\Psi \rightarrow \phi_0$ cuando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

Dado un sistema estelar con potencial relativo $\Psi = \Psi(\mathbf{x})$ y densidad de masa $\rho = \rho(\mathbf{x})$ consistente con la ecuación de Poisson, su función de distribución $f = f(\varepsilon, L_z)$ satisface la siguiente ecuación integral ³

$$\rho(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{v} f_+(\varepsilon, L_z). \quad (3.14)$$

Los modelos que satisfacen esta relación son llamados *modelos estelares auto-consistentes* porque la densidad determina al potencial a través de la ecuación de Poisson y, al mismo tiempo, el potencial determina la densidad de tal forma que sea consistente con la ecuación de Boltzmann sin colisiones. A la relación (3.14) se le conoce como *ecuación newtoniana de la autogravitación*, la cual más adelante adoptará una simbología más explícita y también la denominaremos *ecuación fundamental*.

Ahora, pasaremos a estudiar detenidamente (3.14) para el caso de los sistemas cuya distribución de materia es volumétrica, llamados *sistemas tridimensionales*, y aquellos caracterizados por una distribución superficial de masa, llamados *sistemas planos*. En este último caso, las dimensiones del espacio de fase se reducen y, por esta razón, la relación entre el par potencial-densidad y la función de distribución sufre un cambio sustancial, con relación a la correspondiente a sistemas tridimensionales.

Sistemas Tridimensionales

De acuerdo con la definición de la energía relativa y el potencial relativo, es posible reescribir la ecuación (3.14) de tal forma que las variables de integración sean ε y L_z . Utilizando coordenadas cilíndricas (v_m, ξ, v_ϕ) para el espacio de velocidades, con el eje de simetría en dirección acimutal, se obtiene $v_R = v_m \cos \xi$, $v_z = v_m \sin \xi$. En este nuevo sistema, el diferencial de volumen queda $d^3\mathbf{v} = v_m dv_m dv_\phi d\xi$. Además, dado que el integrando es par respecto a v_ϕ , (3.14) puede ser escrita de la forma

$$\rho(\mathbf{x}) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{v_{\phi\max}} \int_{v_{m\min}}^{v_{m\max}} f_+(\varepsilon, L_z) v_m dv_m dv_\phi d\xi. \quad (3.15)$$

³De ahora en adelante, a lo largo del presente capítulo, se utiliza la definición de la FD tal que $f d^6\mathbf{w}$ representa la masa total en el elemento $d^6\mathbf{w}$.

Si tenemos en cuenta que $dv_m dv_\phi d\xi = J^{-1} d\varepsilon dL_z d\xi$, al integrar sobre ξ , la ecuación (3.15) se reduce a

$$\rho = \frac{4\pi}{R} \int_{\varepsilon_{\min}}^{\varepsilon_{\max}} \left[\int_0^{L_{z\max}} f_+(\varepsilon, L_z) dL_z \right] d\varepsilon. \quad (3.16)$$

Los límites de (3.16) se escogen de acuerdo con relación $\varepsilon = \Psi - \frac{1}{2}(v_m^2 + L_z^2/R^2)$. Cuando $v_m = 0$, se obtiene $L_{z\max} = R\sqrt{2(\Psi - \varepsilon)}$. El valor mínimo de ε es 0 por definición, mientras que el máximo resulta ser Ψ , cuando $L_z = v_m = 0$. Con esto, la ecuación queda

$$\rho = \frac{4\pi}{R} \int_0^\Psi \left[\int_0^{R\sqrt{2(\Psi - \varepsilon)}} f_+(\varepsilon, L_z) dL_z \right] d\varepsilon. \quad (3.17)$$

Esta ecuación es la llamada ecuación fundamental de la autogravitación, pues relaciona a f_+ , Ψ y ρ , y al solucionarla se conforma automáticamente el modelo autoconsistente. Se trata de una ecuación integral de primera clase en donde la función desconocida f sólo está presente en el integrando. Varios autores han estudiado dicha ecuación, obteniendo algunas soluciones de interés en astrofísica: Eddington [44], Dejonghe [38], Hunter y Qian [69], entre otros.

Sistemas Planos

En el caso de sistemas planos, las estrellas están restringidas al plano $z = 0$, razón por la cual las dimensiones del espacio de fase se reducen a 4. Por tanto, la ecuación (3.14) tiene que ser modificada de la siguiente forma:

$$\Sigma(\mathbf{x}) = \int d^2\mathbf{v} f_+(\varepsilon, L_z), \quad (3.18)$$

donde $\Sigma(\mathbf{x})$ es la densidad superficial de masa y $d^2\mathbf{v} = dv_R dv_\phi$. Ahora, dado que el integrando es par, tanto en v_R como en v_ϕ , podemos escribir

$$\Sigma(\mathbf{x}) = 4 \int_0^{v_{\phi\max}} \int_0^{v_{r\max}} f_+(\varepsilon, L_z) dv_r dv_\phi, \quad (3.19)$$

que, expresada en términos de ε y L_z , se escribe

$$\Sigma = 4 \int_0^\Psi \left[\int_0^{R\sqrt{2(\Psi - \varepsilon)}} \frac{f_+(\varepsilon, L_z)}{\sqrt{2R^2(\Psi - \varepsilon) - L_z^2}} dL_z \right] d\varepsilon. \quad (3.20)$$

la cual es conocida como la ecuación fundamental para sistemas planos. Al igual que (3.17), una vez solucionada esta ecuación queda construido automáticamente

el modelo autoconsistente. Los estudios de la ecuación (3.20) han sido comparativamente menores que en el caso de sistemas tridimensionales; los resultados más relevantes fueron obtenidos por Kalnajs [77], quien solucionó la ecuación asumiendo una forma particular para la función de distribución. Por último, cabe mencionar que Hunter y Qian [69] encontraron que es posible utilizar los métodos desarrollados para sistemas tridimensionales en el caso de sistemas planos, si se construye una pseudo-densidad volumétrica de masa de la forma

$$\hat{\rho}(\Psi, R) = \sqrt{2} \int_0^\Psi \frac{\Sigma(\Psi', R)}{\sqrt{\Psi - \Psi'}} d\Psi', \quad (3.21)$$

la cual tomaría el lugar de ρ en la ecuación (3.17). Aunque este hecho es un resultado útil, el cálculo analítico de (3.21) puede resultar bastante complicado para ciertas $\Sigma(\Psi, R)$.

El principio de Máxima Entropía

Alrededor de 1890, J. W. Gibbs descubrió que las relaciones fundamentales entre las variables termodinámicas, pueden ser obtenidas bajo la hipótesis de que la probabilidad de encontrar un sistema en un elemento de volumen $d\tau$ del espacio de fase, es proporcional a $e^{-\beta H} d\tau$, donde β es un parámetro que él identificó como el inverso de la temperatura del sistema, y H es su hamiltoniano [65]. Actualmente, se sabe que dicha hipótesis puede ser deducida a partir del principio de máxima entropía: las relaciones termodinámicas de un sistema físico pueden ser obtenidas buscando la densidad de probabilidad en el espacio de fase, p , que maximice la entropía⁴

$$S \equiv - \int d\tau p \ln p + C, \quad (3.22)$$

Veamos a qué consecuencias conlleva el hecho de aplicar tal principio a los sistemas estelares.

El espacio de fase de una galaxia de N estrellas es $6N$ -dimensional, y el $d\tau$ en la ecuación (3.22) se refiere a un elemento de este espacio de fase, en lugar de un elemento del espacio de fase de una sola estrella. Sin embargo, es posible despreciar las correlaciones entre partículas de un sistema sin colisiones, de modo que la probabilidad $p d\tau$ asociada con un rango de configuraciones en el espacio de fase $6N$ -dimensional de toda la galaxia es justamente el producto de los factores $f d^6\mathbf{w}$ asociados con estrellas individuales. En estas circunstancias, la ecuación

⁴La constante C debe escogerse de tal forma que se cumpla la tercera ley de la termodinámica.

(3.22) se convierte en

$$S = -N \int d^6 \mathbf{w} f \ln f + C. \quad (3.23)$$

Al exigir que el extremal de S se anule, se obtiene la siguiente ecuación a solucionar:

$$\int d^6 \mathbf{w} \delta f^+ \ln(f^+/f^-) = 0. \quad (3.24)$$

Por otra parte, para un sistema con momento angular total $L_{z\text{total}}$, por la ecuación (3.11c), se cumple que

$$L_{z\text{total}} = \frac{1}{2} \int d^6 \mathbf{w} (f^+ - f^-) L_z. \quad (3.25)$$

Tomando la variación de (3.25) se llega a la relación

$$\int d^6 \mathbf{w} \delta f^+ L_z = 0, \quad (3.26)$$

debido a que $\delta L_{z\text{total}} = 0$. Las ecuaciones (3.24) y (3.26) constituyen un problema variacional con ligaduras que puede solucionarse mediante el método de los multiplicadores de Lagrange [4]. En este caso, el multiplicador de lagrange α se escoge de tal forma que se satisfaga la ecuación

$$\ln \left(\frac{f^+}{f^-} \right) - \alpha L_z = 0, \quad (3.27)$$

de manera que

$$f^+ = f^- e^{\alpha L_z}. \quad (3.28)$$

Finalmente, por la ecuación (3.8) se deduce que

$$f_-(\varepsilon, L_z) = f_+(\varepsilon, L_z) \frac{e^{\alpha L_z} - 1}{e^{\alpha L_z} + 1}, \quad (3.29)$$

y por lo tanto, la función de distribución total queda

$$f(\varepsilon, L_z) = \frac{2f_+(\varepsilon, L_z)}{1 + e^{-\alpha L_z}}. \quad (3.30)$$

Este resultado fue obtenido por primera vez por Dejonghe [38], y representa una herramienta muy útil en la construcción de modelos autoconsistentes puesto que, una vez hallado f_+ , permite encontrar la FD que representa el estado más probable de rotación. Además, es aplicable tanto a sistemas tridimensionales como a sistemas planos debido a que en su formulación no se utiliza la ecuación fundamental.

Puede verse que $|f_-(\varepsilon, L_z)| \leq f_+(\varepsilon, L_z)$, garantizando que la función de distribución total sea siempre positiva. Además, el parámetro α define las características rotacionales del sistema. El sistema está en un estado sin rotación cuando $\alpha = 0$, y rotación máxima cuando $\alpha \rightarrow \pm\infty$. Para $\alpha \rightarrow +\infty$, la rotación es en sentido antihorario y $f(\varepsilon, L_z) = [1 + \text{sign}(L_z)]f_+(\varepsilon, L_z)$. Para $\alpha \rightarrow -\infty$, la rotación se da en sentido horario y $f(\varepsilon, L_z) = [1 - \text{sign}(L_z)]f_+(\varepsilon, L_z)$.

3.1.3. Formalismos para Obtener FDs

Se han desarrollado varios métodos analíticos para solucionar la ecuación fundamental (3.17), en el caso de sistemas tridimensionales, y (3.20), en el caso de sistemas planos. Los mas relevantes son los resultados de Fricke [50] y los resultados de Jiang y Ossipkov [75], los cuales asumen una dependencia particular entre la densidad y el potencial y, por esto, solo pueden ser aplicados a una variedad limitada de modelos. Por otra parte, se han utilizado otras técnicas para solucionar la ecuación integral mediante el uso de transformadas pero las dificultades son aún mayores. La motivación principal de este capítulo consiste en formular un método mas general que el sugerido por Jiang y Ossipkov, que además reproduzca los resultados obtenidos por Fricke.

Para poder solucionar la ecuación (3.17), es necesario encontrar algún tipo de relación funcional entre la densidad de masa y el potencial gravitacional. Debido a esto, escribiremos la ecuación fundamental como

$$\rho(R, \Psi) = \frac{4\pi}{R} \int_0^\Psi \left[\int_0^{R\sqrt{2(\Psi-\varepsilon)}} f_+(\varepsilon, L_z) dL_z \right] d\varepsilon. \quad (3.31)$$

Ahora, analizaremos el problema detenidamente, suponiendo varios tipos de dependencias de la FD con respecto a la energía relativa ε y el momento angular L_z .

FDs de la forma $\sum_n L_z^{2n} h_n(\varepsilon)$

Jiang y Ossipkov comienzan considerando FDs de la forma

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_n L_z^{2n} h_n(\varepsilon), \quad (3.32)$$

donde h_n es una función suave de ε y $n = 0, 1, 2, \dots$. Ahora, introduciendo esta FD en (3.31) e integrando respecto a L_z se obtiene

$$\rho(R, \Psi) = \sum_n \frac{4\pi 2^{n+1/2} R^{2n}}{2n+1} \int_0^\Psi h_n(\varepsilon) (\Psi - \varepsilon)^{n+1/2} d\varepsilon, \quad \text{para } n > -1/2, \quad (3.33)$$

mientras que si $n \leq -1/2$ la integral diverge. Debido a esto, suponemos que la densidad se puede escribir en la forma

$$\rho(R, \Psi) = \sum_n R^{2n} \tilde{\rho}_n(\Psi), \quad \text{para } n > -1/2. \quad (3.34)$$

Comparando término a término las ecuaciones (3.33) y (3.34) se llega a la relación

$$\tilde{\rho}_n(\Psi) = \frac{4\pi 2^{n+1/2}}{2n+1} \int_0^\Psi h_n(\varepsilon) (\Psi - \varepsilon)^{n+1/2} d\varepsilon. \quad (3.35)$$

Se asumirá que $(d^j \tilde{\rho}_n(\psi)/d\psi^j)_{\psi=0} = 0$ para todo $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ y todo $n \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$. Entonces, tomando la derivada $(n+1)$ -ésima de (3.35) y usando la ecuación integral de Abel [74], se obtiene

$$h_n(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} 2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^\varepsilon \frac{d^{n+1} \tilde{\rho}_n(\psi)}{d\psi^{n+1}} \frac{d\psi}{\sqrt{\varepsilon - \psi}}. \quad (3.36)$$

Por ejemplo, si suponemos que $\tilde{\rho}_n(\Psi)$ puede expresarse como una serie de potencias de Ψ en la forma

$$\tilde{\rho}_n(\Psi) = \sum_k A_{nk} \Psi^k, \quad (3.37)$$

entonces la correspondiente FD es

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_n \sum_k \frac{A_{nk} \Gamma(k+1)}{\pi 2^{n+3/2} \Gamma(n+1/2) \Gamma(k-n-1/2)} L_z^{2n} \varepsilon^{k-n-3/2}. \quad (3.38)$$

Este resultado es totalmente equivalente la solución de Fricke, para valores reales de n , y por lo tanto puede ser considerado como una generalización.

FDs de la forma $\sum_n L_z^{2n} g_n(Q)$

Se puede obtener una expresión mas general para la función de distribución, si asumimos que ésta depende de $Q = \varepsilon - L_z^2/(2R_a^2)$ y L_z , donde R_a es una constante arbitraria. Suponemos que el sistema sólo tiene estrellas con $Q > 0$, de forma que

$f(Q, L_z) = 0$ para $Q \leq 0$. Obviamente, $Q \rightarrow \varepsilon$ cuando $R_a \rightarrow \infty$. Efectuando el cambio de variables a $dL_z dQ$, la ecuación fundamental se puede escribir como

$$\rho(R, \Psi) = \frac{4\pi}{R} \int_0^\Psi \left[\int_0^{R\sqrt{2(\Psi-Q)/(1+R^2/R_a^2)}} f_+(Q, L_z) dL_z \right] dQ, \quad (3.39)$$

donde $f_+(Q, L_z) = [f(Q, L_z) + f(Q, -L_z)]/2$. Naturalmente, $f_+(Q, L_z)$ es la parte par de $f(Q, L_z)$. Siguiendo un procedimiento similar al efectuado anteriormente, suponemos que la función de distribución se puede escribir como

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_n L_z^{2n} g_n(Q), \quad (3.40)$$

siendo n un número entero. Entonces, bajo esta suposición, se realiza la integral (3.39) obteniendo

$$\rho(R, \Psi) = \sum_n \frac{4\pi 2^{n+1/2} R^{2n}}{(2n+1)(1+R^2/R_a^2)^{n+1/2}} \int_0^\Psi g_n(Q) (\Psi - Q)^{n+1/2} dQ, \quad (3.41)$$

cuando $n > -1/2$. Ahora, suponemos que la densidad se puede escribir en la forma

$$\rho(R, \Psi) = \sum_n \frac{R^{2n} \tilde{\rho}_n(\Psi)}{(1+R^2/R_a^2)^{n+1/2}}, \quad \text{para } n > -1/2, \quad (3.42)$$

y mediante una comparación con (3.41), se concluye que

$$\tilde{\rho}_n(\Psi) = \frac{4\pi 2^{n+1/2}}{2n+1} \int_0^\Psi g_n(Q) (\Psi - Q)^{n+1/2} dQ. \quad (3.43)$$

Esta ecuación es equivalente a (3.35) de modo que, se asumirá nuevamente que $(d^j \hat{\rho}_n(\psi)/d\psi^j)_{\psi=0} = 0$ para todo $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ y todo $n \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$. Tomando la $(n+1)$ -ésima derivada de (3.43) y usando la ecuación integral de Abel, se puede obtener

$$g_n(Q) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} 2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{d}{dQ} \int_0^Q \frac{d^{n+1} \hat{\rho}_n(\psi)}{d\psi^{n+1}} \frac{d\psi}{\sqrt{Q - \psi}} \quad (3.44)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, m$. De manera que la función de distribución queda

$$f_+(Q, L_z) = \sum_{n=0}^m \frac{(2\pi)^{-3/2} L_z^{2n}}{2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{d}{dQ} \int_0^Q \frac{d^{n+1} \hat{\rho}_n(\psi)}{d\psi^{n+1}} \frac{d\psi}{\sqrt{Q - \psi}} \quad (3.45)$$

Sumando sobre todos los valores posibles de R_a , se obtiene la siguiente expresión:

$$f_+(Q, L_z) = \sum_{R_a} \sum_{n=0}^m \frac{(2\pi)^{-3/2} L_z^{2n}}{2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{d}{dQ} \int_0^Q \frac{d^{n+1} \hat{\rho}_n(\psi)}{d\psi^{n+1}} \frac{d\psi}{\sqrt{Q - \psi}} \quad (3.46)$$

correspondiente a una densidad de la forma

$$\rho(R, \Psi) = \sum_{R_a} \sum_n \frac{R^{2n} \tilde{\rho}_n(\Psi)}{(1 + R^2/R_a^2)^{n+1/2}}, \quad (3.47)$$

con $R_a > 0$ y $n > -1/2$.

Implementación de la Derivada Fraccional

El método de Jiang y Ossipkov, a pesar de representar un resultado importante, asume una dependencia de la FD solamente a través de potencias enteras del momento angular y, debido a esto, no reproduce estrictamente los resultados de Fricke. Además, no puede ser aplicado directamente al caso de sistemas planos, debido a que, en dicho caso, la ecuación fundamental no se reduce a la ecuación integral de Abel. Por esta razón, es necesario la formulación de un método mucho más general, que pueda ser aplicado a una variedad mas amplia de sistemas. En este capítulo se presentará un nuevo formalismo, desarrollado con herramientas de cálculo fraccional, que puede ser empleado en la obtención de funciones de distribución, tanto para sistemas tridimensionales como para sistemas planos, y generaliza muchos de los métodos mencionados anteriormente. Empezaremos considerando que una FD de la forma

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_n L_z^{2n} h_n(\varepsilon), \quad (3.48)$$

donde $n \in \mathbb{R}$ y el 2 en el exponente de L_z garantiza que f_+ es par. Entonces,

$$\rho(R, \Psi) = \sum_n \frac{4\pi 2^{n+1/2} R^{2n}}{2n+1} \int_0^\Psi h_n(\varepsilon) (\Psi - \varepsilon)^{n+1/2} d\varepsilon, \quad (3.49)$$

para $n > -1/2$, mientras que diverge para $n \leq -1/2$. Por tanto, asumimos que la densidad de masa está dada por

$$\rho(R, \Psi) = \sum_n R^{2n} \tilde{\rho}_n(\Psi), \quad \text{para } n > -1/2. \quad (3.50)$$

Una comparación entre (3.49) y (3.50), conduce a la relación

$$\tilde{\rho}_n(\Psi) = \frac{4\pi 2^{n+1/2}}{2n+1} \int_0^\Psi h_n(\varepsilon) (\Psi - \varepsilon)^{n+1/2} d\varepsilon. \quad (3.51)$$

En este punto introducimos el operador de derivada fraccional D_x^j , que representa una derivada de orden j , con respecto a x , para cualquier valor real de j (ver

apéndice A). Asumiendo que $(D_\Psi^j \tilde{\rho}_n(\Psi))_{\Psi=0} = 0$ para todo $j \in (0, n + 1/2)$, entonces

$$D_\Psi^{n+1/2} \tilde{\rho}_n(\Psi) = \pi 2^{n+3/2} \Gamma(n + 1/2) \int_0^\Psi h_n(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3.52)$$

Esta ecuación integral es más simple que la primera y puede ser invertida mas fácilmente si uno toma la derivada una vez más con respecto a Ψ :

$$h_n(\varepsilon) = \frac{1}{\pi 2^{n+3/2} \Gamma(n + 1/2)} D_\Psi^{n+3/2} \tilde{\rho}_n(\Psi) \Big|_{\Psi=\varepsilon}, \quad (3.53)$$

así, la FD puede ser expresada como

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_n \frac{L_z^{2n}}{\pi 2^{n+3/2} \Gamma(n + 1/2)} D_\Psi^{n+3/2} \tilde{\rho}_n(\Psi) \Big|_{\Psi=\varepsilon}. \quad (3.54)$$

En el caso en que $n \in \mathbb{N}$, de acuerdo con la definición del operador de Riemann-Liouville [121], la ecuación (3.54) se reduce a la fórmula obtenida por Jiang y Ossipkov [75].

Como un caso particular, supongamos que $\tilde{\rho}_n(\Psi)$ puede escribirse en la forma

$$\tilde{\rho}_n(\Psi) = \sum_k A_{nk} \Psi^k. \quad (3.55)$$

Entonces, aplicando el operador de derivada fraccional a (3.55)

$$D_\Psi^{n+3/2} \sum_k A_{nk} \Psi^k = \sum_k \frac{A_{nk} \Gamma(k + 1)}{\Gamma(k - n - 1/2)} \Psi^{k-n-3/2}, \quad (3.56)$$

para $k > n + 1/2$, obtenemos la correspondiente FD:

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_{n,k} \frac{A_{nk} \Gamma(k + 1) L_z^{2n} \varepsilon^{k-n-3/2}}{\pi 2^{n+3/2} \Gamma(n + 1/2) \Gamma(k - n - 1/2)}. \quad (3.57)$$

Este resultado es totalmente equivalente a la solución de Fricke, para valores reales de n , y por lo tanto puede ser considerada como una generalización.

Es posible deducir una expresión mas general para la FD si asumimos que depende de ε a través de $Q = \varepsilon - L_z^2/(2R_a^2)$, donde R_a es un radio de escala. Supongamos que el sistema sólo tiene estrellas con $Q > 0$, de tal forma que $f(Q, L_z) = 0$ para $Q \leq 0$. Aquí, $Q \rightarrow \varepsilon$ como $R_a \rightarrow \infty$. La ecuación fundamental, en términos de Q , queda

$$\rho = \frac{4\pi}{R} \int_0^\Psi \left[\int_0^{R\sqrt{2(\Psi-Q)/(1+R^2/R_a^2)}} f_+(Q, L_z) dL_z \right] dQ, \quad (3.58)$$

donde $f_+(Q, L_z)$ es la parte par de $f(Q, L_z)$. Puede mostrarse que

$$f_+(Q, L_z) = \sum_n \frac{L_z^{2n}}{\pi 2^{n+3/2} \Gamma(n+1/2)} D_\Psi^{n+3/2} \tilde{\rho}_n(\Psi) \Big|_{\Psi=Q}, \quad (3.59)$$

corresponde a una densidad de masa de la forma

$$\rho(R, \Psi) = \sum_n \frac{R^{2n} \tilde{\rho}_n(\Psi)}{(1 + R^2/R_a^2)^{n+1/2}}, \quad \text{for } n > -1/2, \quad (3.60)$$

donde $n \in \mathbb{R}$. Ahora, si sumamos sobre todos los valores posibles R_a obtenemos la solución general

$$f_+(Q, L_z) = \sum_{R_a, n} \frac{L_z^{2n}}{\pi 2^{n+3/2} \Gamma(n+1/2)} D_\Psi^{n+3/2} \tilde{\rho}_n(\Psi) \Big|_{\Psi=Q}, \quad (3.61)$$

correspondiente a una densidad de la forma

$$\rho(R, \Psi) = \sum_{R_a, n} \frac{R^{2n} \tilde{\rho}_n(\Psi)}{(1 + R^2/R_a^2)^{n+1/2}}, \quad (3.62)$$

con $R_a > 0$ y $n > -1/2$.

El presente formalismo puede usarse también, de forma directa, en el caso de sistemas planos. Comenzaremos estudiando el caso de modelos con potencial gravitacional divergente. Como en el caso tridimensional, suponemos que

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_n L_z^{2n} h_n(\varepsilon), \quad (3.63)$$

lo cual implica

$$\Sigma(R, \Psi) = \sum_n \frac{\sqrt{\pi} R^{2n} 2^{n+1} \Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} \int_0^\Psi (\Psi - \varepsilon)^n h_n(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (3.64)$$

para $n > -1/2$. Por tanto, si asumimos

$$\Sigma(R, \Psi) = \sum_n R^{2n} \sigma_n(\Psi), \quad n > -1/2, \quad (3.65)$$

entonces

$$\sigma_n(\Psi) = \frac{\sqrt{\pi} 2^{n+1} \Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} \int_0^\Psi (\Psi - \varepsilon)^n h_n(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3.66)$$

Si $(D_\Psi^j \sigma_n(\Psi))_{\Psi=0} = 0$ para todo $j \in (0, n)$, entonces, tomando la derivada fraccional de n -ésimo orden, la ecuación (3.66) conduce a

$$D_\Psi^n \sigma_n(\Psi) = \sqrt{\pi} 2^{n+1} \Gamma(n+1/2) \int_0^\Psi h_n(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3.67)$$

En consecuencia,

$$h_n(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi}2^{n+1}\Gamma(n+1/2)} D_{\Psi}^{n+1}\sigma_n(\Psi)\big|_{\Psi=\varepsilon}, \quad (3.68)$$

y la FD es

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_n \frac{L_z^{2n}}{\sqrt{\pi}2^{n+1}\Gamma(n+1/2)} D_{\Psi}^{n+1}\sigma_n(\Psi)\big|_{\Psi=\varepsilon}. \quad (3.69)$$

Esta ecuación corresponde al método desarrollado por Kalnajs [77] (para $n = 0$), trabajando en un sistema de referencia adecuado.

Como caso particular considérese

$$\sigma_n(\Psi) = \sum_k A_{nk} \Psi^k. \quad (3.70)$$

Entonces, tomando la derivada fraccional obtenemos

$$D_{\Psi}^{n+1} \sum_k A_{nk} \Psi^k = \sum_k \frac{A_{nk} \Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n)} \Psi^{k-n-1}, \quad (3.71)$$

y la FD, en este caso será

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_{n,k} \frac{A_{nk} \Gamma(k+1) L_z^{2n} \varepsilon^{k-n-1}}{\sqrt{\pi} 2^{n+1} \Gamma(n+1/2) \Gamma(k-n)}. \quad (3.72)$$

Esta relación puede interpretarse como el caso análogo de la expansión de Fricke, cuando tratamos con sistemas planos.

Puede mostrarse que si la densidad tiene la forma

$$\Sigma(R, \Psi) = \sum_{R_a} \sum_n \frac{R^{2n} \sigma_n(\Psi)}{(1 + R^2/R_a^2)^n}, \quad (3.73)$$

entonces, la correspondiente FD es

$$f_+(Q, L_z) = \sum_{R_a} \sum_n \frac{L_z^{2n}}{\sqrt{\pi} 2^{n+1} \Gamma(n+1/2)} D_{\Psi}^{n+1} \sigma_n(\Psi)\big|_{\Psi=Q}, \quad (3.74)$$

para $R_a > 0$, $n > -1/2$ y $Q = \varepsilon - L_z^2/(2R_a^2)$.

Así mismo, si analizamos el caso de modelos con campo gravitacional sin cota superior, podemos deducir que para la densidad

$$\Sigma(R, \phi) = \sum_{R_a} \sum_n \frac{R^{2n} \sigma_n(\phi)}{(1 + R^2/R_a^2)^{n+1/2}}, \quad (3.75)$$

y asumiendo que

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} D_\phi^j \sigma_n(\phi) = 0 \quad (3.76)$$

para todo $j \in (0, n)$, entonces

$$f_+(Q, L_z) = \sum_{R_a} \sum_n \frac{(-2)^{-(n+1)} L_z^{2n}}{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1/2)} D_\phi^{n+1} \sigma_n(\phi) \Big|_{\phi=Q}, \quad (3.77)$$

para $R_a > 0$, $n > -1/2$ y $Q = E + L_z^2/(2R_a^2)$.

Como ilustración del método desarrollado, lo aplicaremos a dos casos simples: el modelo logarítmico de Binney y el disco de Mestel, y veremos que las correspondientes FDs coinciden exactamente con las obtenidas utilizando otros métodos.

El modelo logarítmico de Binney tiene un potencial gravitacional de la forma [11]

$$\phi(R, z) = \frac{1}{2} v_0^2 \ln \left(1 + R^2 + \frac{z^2}{q^2} \right), \quad (3.78)$$

mientras que su densidad de masa es

$$\rho(R, z) = \frac{v_0^2}{4\pi G q^2} \frac{(1 + 2q^2 + R^2 + (2 - q^{-2})z^2)}{(1 + R^2 + z^2 q^{-2})^2}. \quad (3.79)$$

Siguiendo a [75], escribimos (3.79) como

$$\rho(R, \phi) = \frac{v_0^2}{4\pi G q^2} \left\{ 2(1 - q^2) R^2 e^{-4\phi/v_0^2} + 2e^{-4\phi/v_0^2} + (2q^2 - 1) e^{-2\phi/v_0^2} \right\}. \quad (3.80)$$

Por tanto, tomando en cuenta que $D_x^\alpha e^{ax} = a^\alpha e^{ax}$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$f_+(E, L_z) = A L_z^2 e^{-4E/v_0^2} + B e^{-4E/v_0^2} + C e^{-2E/v_0^2}, \quad (3.81)$$

donde A , B y C son constantes dadas por

$$A = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{5/2} \frac{(1 - q^2)}{G q^2 v_0^3}, \quad (3.82)$$

$$B = \left(\frac{2}{\pi^5} \right)^{1/2} \frac{1}{G q^2 v_0}, \quad (3.83)$$

$$C = \frac{2q^2 - 1}{4\pi^{5/2} G q^2 v_0}. \quad (3.84)$$

Nótese que coincide con la FD encontrada por Evans en 1993 [46], usando el método de Lynden-Bell [11], o a la encontrada por Jiang y Ossipkoz usando la ecuación integral de Abel.

Otro caso de interés es el disco de Mestel, que está caracterizado por un potencial de la forma [11]

$$\phi(R) = v_c^2 \ln \left(\frac{R}{R_0} \right), \quad (3.85)$$

y una densidad superficial de masa dada por

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \frac{R_0}{R}, \quad (3.86)$$

donde $\Sigma_0 = v_c^2 / (2\pi G R_0)$. Ahora, podemos escribir la densidad como

$$\Sigma(R) = R^{2m} \frac{\Sigma_0}{R_0^{2m}} e^{-(2m+1)\phi/v_c^2}, \quad (3.87)$$

para cualquier $m \in \mathbb{R}$. Aplicando la ecuación (3.77) para $R_a \rightarrow \infty$, se sigue que

$$f_+(E, L_z) = F L_z^{2m} e^{-E/\sigma^2}, \quad (3.88)$$

donde F y σ son constantes dadas por

$$\sigma^2 = \frac{v_c^2}{2m+1}, \quad (3.89)$$

$$F = \frac{\Sigma_0 2^{-(m+1)} \pi^{-1/2}}{\Gamma(m+1/2) R_0^{2m} \sigma^{2m+2}}. \quad (3.90)$$

Esta solución coincide con la obtenida por Evans [46], y propuesta antes por Toomre [128].

3.1.4. FDs Dependientes de la Integral de Jacobi: el caso de los DGK

Un método bastante simple para encontrar FDs de sistemas discoidales axialmente simétricos, fue introducido por Kalnajs[77]. Dicho formalismo considera FDs dependientes de la integral de Jacobi $J = E - \Omega L_z$, es decir, la energía medida desde un sistema de referencia en rotación con velocidad angular constante Ω . Es conveniente definir un potencial efectivo $\phi_r = \phi - \frac{1}{2}\Omega^2 R^2$ (el subíndice r significa que se trata de una cantidad medida en el sistema de referencia rotante) de tal forma que, si escogemos un marco de referencia en el cual la distribución

de velocidades es isotrópica, la FD será independiente de L_z y la relación entre la densidad superficial de masa y la FD se reduce a

$$\Sigma = 2\pi \int_0^{\Psi_r} f(\varepsilon_r) d\varepsilon_r. \quad (3.91)$$

Aquí, $\Psi_r = -\phi + \frac{1}{2}\Omega^2 R^2 + \phi_{0r}$ y $\varepsilon_r = \varepsilon + \Omega L_z + \phi_{0r} - \phi_0$, esto es, el potencial y energía relativos, medidos en el marco rotante. Además, si uno puede expresar Σ como una función de Ψ_r , derivando (3.91) con respecto a Ψ_r , obtenemos:

$$f(\varepsilon_r) = \left. \frac{1}{2\pi} \frac{d\Sigma}{d\Psi_r} \right|_{\Psi_r=\varepsilon_r}. \quad (3.92)$$

Nótese que en este formalismo también es necesario expresar la densidad de masa como una función del potencial. Para ilustrar el uso de este método, lo aplicaremos en la búsqueda de FDs para los primeros dos miembros de la familia DGK, de gran importancia en el presente trabajo.

Para el primer modelo DGK tenemos:

$$\Sigma_1(\Psi_1) = \frac{\sqrt{2}\Sigma_c^{(1)}}{\Omega_0 a} \Psi_1^{1/2}, \quad (3.93)$$

donde $\Omega_0 = [3\pi GM/(4a^3)]^{1/2}$. Dado que estamos tratando con sistemas discoidales, es necesario calcular la pseudo densidad $\hat{\rho}$ por medio de la ecuación (3.21) y de paso obtener⁵

$$\hat{\rho}_1(\Psi_1) = \frac{\pi\Sigma_c^{(1)}}{\Omega_0 a} \Psi_1. \quad (3.94)$$

De esta forma, obtenemos la parte par de una FD que depende de la energía relativa (es equivalente a calcular la componente de Fricke de (3.94)):

$$f_{1+}^{(A)}(\varepsilon) = \frac{\Sigma_c^{(1)}}{2\pi\Omega_0 a\sqrt{2\varepsilon}}. \quad (3.95)$$

Podemos notar que $f_{1+}(\varepsilon)$ corresponde a la FD formulada por Kalnajs [11] cuando $\Omega = 0$. La FD que maximiza la entropía se puede obtener usando (3.30) y el resultado es

$$f_1^{(A)}(\varepsilon, L_z) = \frac{\Sigma_c^{(1)}}{\pi\Omega_0 a\sqrt{2\varepsilon}(1 + e^{-\alpha L_z})}. \quad (3.96)$$

Recordemos que el parámetro α determina un estado particular de rotación en el sistema estelar. Cuando α crece (decrece), la probabilidad de encontrar una estrella con L_z positivo (negativo) también crece (decrece).

⁵En este caso no es posible usar el método de la derivada fraccional, pues la relación potencial-densidad no satisface los requerimientos mínimos.

Podemos generalizar este resultado si establecemos el análisis en un marco rotante. En primera instancia, es necesario tratar con el potencial efectivo, con el fin de tener en cuenta las fuerzas ficticias. Escogiendo convenientemente ϕ_{0r} , el potencial relativo en el marco rotante toma la forma

$$\Psi_{1r}(R) = \frac{(\Omega_0^2 - \Omega^2)}{2}(a^2 - R^2), \quad (3.97)$$

de tal manera que la densidad superficial de masa y la pseudo densidad pueden expresarse como

$$\Sigma_1(\Psi_{1r}) = \frac{\sqrt{2}\Sigma_c^{(1)}}{a\sqrt{\Omega_0^2 - \Omega^2}}\Psi_{1r}^{1/2} \quad (3.98)$$

y

$$\hat{\rho}(\Psi_{1r}) = \frac{\pi\Sigma_c^{(1)}}{a\sqrt{\Omega_0^2 - \Omega^2}}\Psi_{1r}. \quad (3.99)$$

La parte par de la FD resultante, en el marco rotante es

$$f_{1+}^{(B)}(\varepsilon_r) = \frac{\Sigma_c^{(1)}}{2\pi a\sqrt{\Omega_0^2 - \Omega^2}\sqrt{2\varepsilon_r}}, \quad (3.100)$$

y puede ser deducida utilizando el mismo procedimiento para hallar $f_{1+}^{(A)}(\varepsilon)$. Finalmente, podemos retornar al marco inercial original a través de la relación entre ε_r , ε y L_z para obtener

$$f_1^{(B)}(\varepsilon, L_z) = \frac{\Sigma_c^{(1)} [2(\varepsilon + \Omega L_z) - \Omega^2 a^2]^{-1/2}}{2\pi a\sqrt{\Omega_0^2 - \Omega^2}} \quad (3.101)$$

que es totalmente equivalente a la FD dada originalmente por Kalnajs.

Podemos generar otra FD si tomamos sólo la parte par de (3.101) y usando el principio de máxima entropía

$$\tilde{f}_1^{(B)}(\varepsilon, L_z) = \frac{2f_{1+}^{(B)}(\varepsilon, L_z)}{1 + e^{-\alpha L_z}}. \quad (3.102)$$

Para el segundo modelo DKG efectuamos un procedimiento similar. En un marco de referencia rotante el potencial relativo está dado por

$$\Psi_{2r}(R) = \frac{(a^2 - R^2)}{128a^5} [45GM\pi(a^2 - R^2) + 30GM\pi a^2 - 64a^5\Omega^2] \quad (3.103)$$

mientras que la densidad de masa está dada por (2.24) cuando $m = 2$. Este caso es un poco más complicado que el anterior, ya que la solución analítica de la pseudo

densidad no puede ser efectuada con total libertad. Necesitamos trabajar en un marco convenientemente escogido de tal forma que la relación entre densidad superficial de masa y el potencial relativo sea simple. De (3.103) es posible ver que si escogemos la velocidad angular de rotación como

$$\Omega = \pm \sqrt{\frac{15GM\pi}{32a^3}}, \quad (3.104)$$

el potencial relativo se reduce a

$$\Psi_{2r}(R) = \frac{45GM\pi}{128a^5}(a^2 - R^2)^2. \quad (3.105)$$

Ahora, podemos expresar la densidad de masa en términos del potencial relativo,

$$\Sigma_2(\Psi_{2r}) = \Sigma_c^{(2)} \left(\frac{128a}{45GM\pi} \Psi_{2r} \right)^{3/4}, \quad (3.106)$$

y la integral para la pseudo densidad puede ser efectuada

$$\hat{\rho}(\Psi_{2r}) = \frac{\sqrt{2\pi}\Sigma_c^{(2)}\Gamma(7/4)}{\Gamma(9/4)} \left(\frac{128a}{45GM\pi} \right)^{3/4} \Psi_{2r}^{5/4}. \quad (3.107)$$

De esta forma, la parte par de FD en el marco rotante y la FD completa en el marco inercial son:

$$f_{2+}^{(A)}(\varepsilon_r) = \frac{3\Sigma_c^{(2)}}{8\pi} \left(\frac{128a}{45GM\pi} \right)^{3/4} \varepsilon_r^{-1/4}, \quad (3.108)$$

y

$$f_2^{(A)}(\varepsilon, L_z) = \kappa \left(\varepsilon + \Omega L_z - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 \right)^{-1/4}, \quad (3.109)$$

donde Ω está dada por (3.104) y κ es una constante dada por

$$\kappa = \frac{3\Sigma_c^{(2)}}{8\pi} \left(\frac{128a}{45GM\pi} \right)^{3/4}. \quad (3.110)$$

Ahora, usando el principio de máxima entropía:

$$\tilde{f}_2^{(A)}(\varepsilon, L_z) = \frac{2f_{2+}^{(A)}(\varepsilon, L_z)}{1 + e^{-\alpha L_z}}. \quad (3.111)$$

Ahora vamos con el método de Kalnajs. Resulta conveniente introducir las coordenadas esferoidales oblatas para obtener una relación más sencilla entre la densidad de masa y el potencial relativo:

$$\Psi_{2r}(\eta) = \frac{45GM\pi}{128a}\eta^4 + \frac{15GM\pi - 32a^3\Omega^2}{64a}\eta^2. \quad (3.112)$$

Es posible reescribir esta expresión como

$$\Psi_{2r}(\eta) = (\kappa_1 \eta^2 + \kappa_2)^2 + \kappa_3, \quad (3.113)$$

donde κ_1 , κ_2 y κ_3 son constantes dadas por

$$\kappa_1 = \sqrt{\frac{45GM\pi}{128a}}, \quad \kappa_2 = \sqrt{\frac{128a}{45GM\pi}} \frac{15GM\pi - 32a^3\Omega^2}{128a}$$

y

$$\kappa_3 = -\frac{128a}{45GM\pi} \left(\frac{15GM\pi - 32a^3\Omega^2}{128a} \right)^2.$$

Como Σ puede expresarse en términos de η en la forma

$$\Sigma_m(\eta) = \Sigma_c^{(m)} \eta^{2m-1}, \quad (3.114)$$

la relación entre Σ_2 y Ψ_{2r} es:

$$\Sigma_2 = \Sigma_c^{(2)} \left(\frac{\sqrt{\Psi_{2r} - \kappa_3} - \kappa_2}{\kappa_1} \right)^{3/2}. \quad (3.115)$$

Ahora usando (3.92) obtenemos:

$$f_2^{(B)}(\varepsilon_r) = \frac{3\Sigma_c}{8\pi k_1^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_r - k_3} - k_2}{\varepsilon_r - k_3} \right)^{1/2}, \quad (3.116)$$

y el resultado en el marco inercial es:

$$f_2^{(B)}(\varepsilon, L_z) = \frac{3\Sigma_c}{8\pi k_1^{3/2}} \sqrt{\frac{\sqrt{\varepsilon + \Omega L_z - \Omega^2 a^2/2 - k_3} - k_2}{\varepsilon + \Omega L_z - \Omega^2 a^2/2 - k_3}} \quad (3.117)$$

Obviamente, esta FD es la misma que (3.109) con la condición (3.104). Finalmente, por la ecuación (3.30), la FD que obedece el principio de máxima entropía es

$$\tilde{f}_2^{(B)}(\varepsilon, L_z) = \frac{2f_{2+}^{(B)}(\varepsilon, L_z)}{1 + e^{-\alpha L_z}}. \quad (3.118)$$

Es posible encontrar diferentes clases de FDs para los primeros cuatro miembros de los DGK. Dichas FDs pueden ser formuladas, en primera instancia, como funciones de la integral de Jacobi, requiriendo que la densidad de masa puede ser escrita como una función dependiente del potencial. Por ello sólo es posible hacer esto para los casos $m = 1, 2, 3, 4$, solamente (en los casos restantes, el potencial es una función polinomial de R de grado 10,12,...) [111].

3.1.5. FDs para los modelos PRG

La deducción de las FDs asociadas a los modelos PRG es particularmente simple si trabajamos en un marco de referencia rotante adecuado, tal y como se hizo en la sección anterior [111]. Para comenzar, recordemos lo establecido en la sección 2.1.2 acerca del parámetro B_1 , dado por la relación de recurrencia (2.45) (de ahora en adelante lo denotaremos como B_1^*). El potencial relativo se puede escribir como

$$\tilde{\Psi}_m^* = B_1^* \Psi_1 + \sum_{n=2}^m B_n \Psi_n = A_{m0} \eta^{2m}. \quad (3.119)$$

Por otra parte, si escogemos un B_1 diferente, el potencial relativo se transforma en

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_m &= B_1 \Psi_1 + \sum_{n=2}^m B_n \Psi_n = A_{m0} \eta^{2m} + (B_1 - B_1^*) \Psi_1, \\ &= A_{m0} \eta^{2m} + \frac{1}{2} (B_1 - B_1^*) \Omega_0^2 a^2 \eta^2, \end{aligned} \quad (3.120)$$

donde $\Omega_0 = [3\pi GM/(4a^3)]^{1/2}$.

Ahora, trabajemos en un marco rotante con velocidad angular Ω . En este marco de referencia, el potencial efectivo está definido como [11]

$$\phi_e = \phi - \frac{1}{2} \Omega^2 R^2 = \phi + \frac{1}{2} \Omega^2 a^2 (\eta^2 - 1), \quad (3.121)$$

y escogiendo apropiadamente las constantes, el potencial relativo-efectivo será

$$\tilde{\Psi}_{e,m} = A_{m0} \eta^{2m} + \frac{1}{2} (B_1 - B_1^*) \Omega_0^2 a^2 \eta^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 a^2 \eta^2. \quad (3.122)$$

Nótese que si uno escoge Ω como

$$\Omega = \pm \Omega_0 \sqrt{B_1 - B_1^*}, \quad (3.123)$$

el término con η^2 desaparece y la ecuación (3.122) se reduce a

$$\tilde{\Psi}_{e,m} = A_{m0} \eta^{2m}. \quad (3.124)$$

Por lo tanto, la relación entre la densidad y el potencial puede escribirse como

$$\tilde{\Sigma}_m(R) = \sum_{n=1}^m B_n \Sigma_c^{(n)} \left(\frac{\tilde{\Psi}_{e,m}}{A_{m0}} \right)^{(2n-1)/(2m)}. \quad (3.125)$$

Finalmente, usando el método de Kalnajs [77], obtenemos la FD correspondiente al m -ésimo modelo:

$$f_m(\varepsilon, L_z) = \frac{1}{4\pi m} \sum_{n=1}^m \frac{B_n \Sigma_c^{(n)} (2n-1) A_{m0}^{-(2n-1)/(2m)}}{\left(\varepsilon + \Omega L_z - \frac{1}{2} \Omega^2 a^2 \right)^{1-(2n-1)/(2m)}}. \quad (3.126)$$

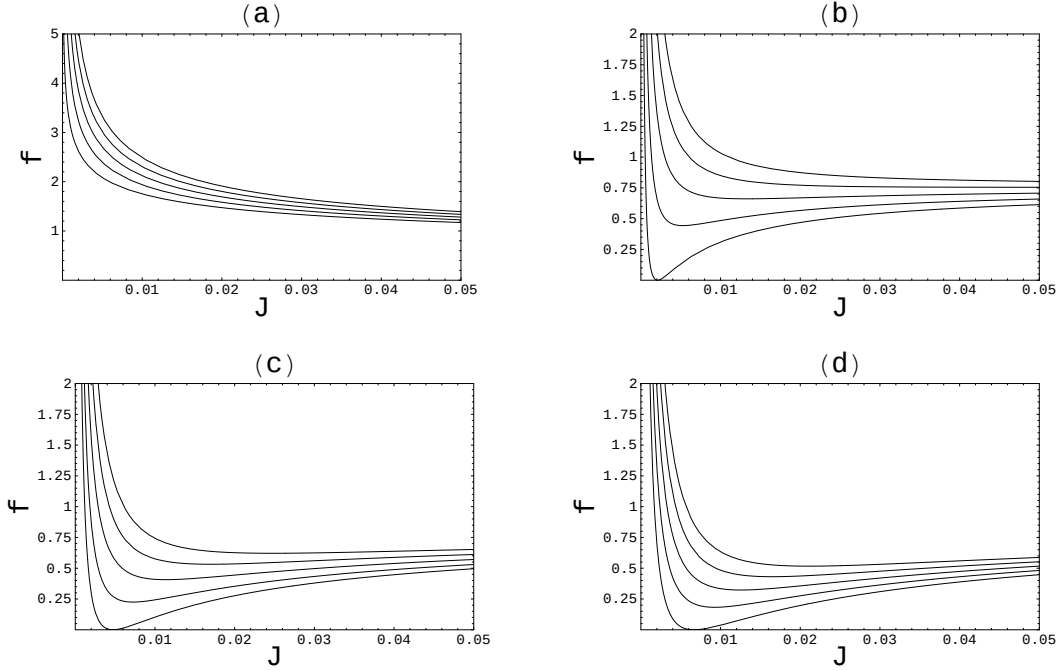


Figura 3.1: Gráficas de las FDs como funciones de la integral de Jacobi para (a) $m = 2$, (b) $m = 3$, (c) $m = 4$, (d) $m = 5$, para diferentes valores del parámetro B_1 . Las curvas inferiores corresponden a B'_{1min} y las curvas superiores corresponden a valores de B_1 más grandes.

Es fácil ver que las FDs obtenidas por medio de la ecuación (3.126), para los casos $m \geq 3$, podría ser negativa en el espacio de fase correspondiente al dominio físico. Para evitar este inconveniente, es necesario imponer una condición más fuerte sobre las constantes B_1 , con el fin de obtener FDs bien definidas. Para hacer esto, formulamos las siguientes ecuaciones:

$$\left. \frac{df_m(J, B'_{1min})}{dR} \right|_{J=J_{min}} = 0, \quad (3.127)$$

$$f_m(J_{min}, B'_{1min}) = 0. \quad (3.128)$$

La relación (3.127) impone la condición de que la FD tenga un mínimo $B_1 = B'_{1min}$ y $R = R_{min}$, mientras que, a través de la relación (3.128), exigimos que su valor en dicho punto crítico se anula. La solución numérica de estas ecuaciones aparece en la tabla 3.1, para los modelos con $m = 3, 4, 5$.

Entonces, tomando estos valores como un límite inferior B_1 , las FDs dadas por

m	B'_{1min}
2	0
3	0,182292
4	0,287827
5	0,381061

Cuadro 3.1: Coeficientes B'_{1min} para los primeros cuatro modelos: $m = 2, 3, 4, 5$

(3.126) son positivo definidas en el dominio físico. La figura 3.1 muestra las gráficas de las FDs como función de la integral de Jacobi, con diferentes valores de B_1 . En general, podemos ver que la probabilidad es máxima para valores pequeños de J , y tiende a ser constante cuando J crece. Además, en los casos $m \geq 3$ podemos ver que para valores de B_1 cercanos a B'_{1min} , la probabilidad tiene un mínimo $J \approx J_{min}$, y tiende a cero cuando $B_1 \rightarrow B'_{1min}$ en $J = J_{min}$, en concordancia con las ecuaciones (3.127) y (3.128).

La figura 3.2 muestra el comportamiento de las FDs. En (a) y (b) son graficados los contornos correspondientes al modelo $m = 2$, con diferentes valores del parámetro α . Como se puede observar, α determina un estado particular de rotación en el sistema estelar. Cuando α crece, la probabilidad de encontrar estrellas con L_z positivo también crece. En 3.2 (c) and (d) son graficados los contornos del modelo $m = 3$ con $B_1 \approx B'_{1min}$ para los mismos valores de α . El comportamiento de las FDs para para los casos restantes es muy similar al mostrado en estas figuras: cuando $B_1 \gg B'_{1min}$, los contornos son similares a (a) y (b), mientras que $B_1 \approx B'_{1min}$, los contornos son similares a (c) y (d), en concordancia con la figura 3.1.

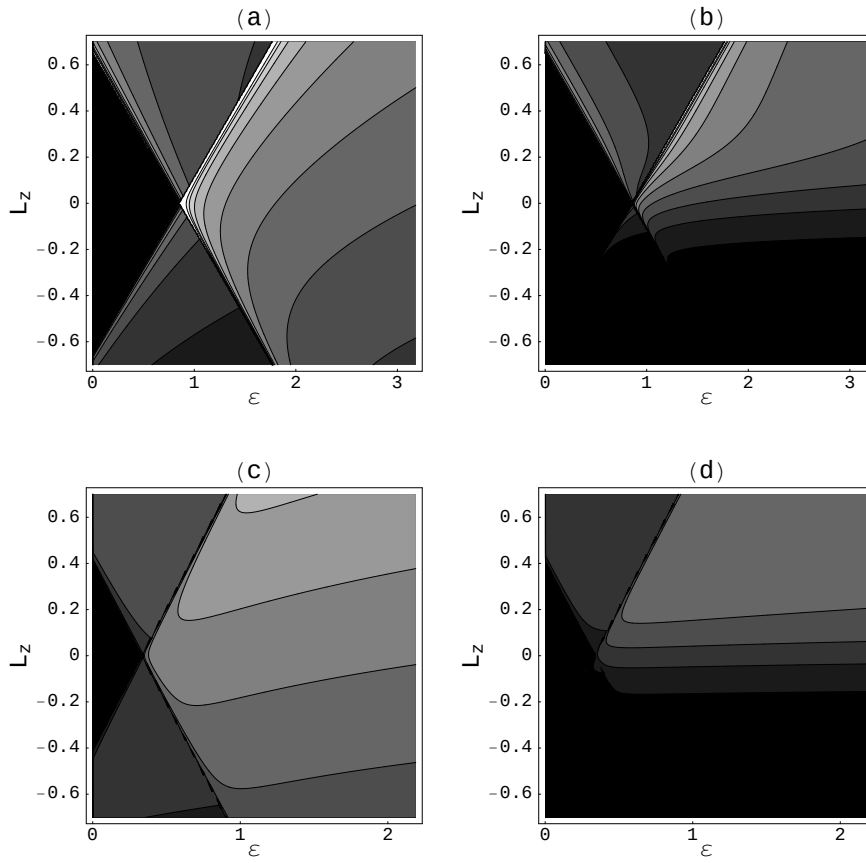


Figura 3.2: Contornos de $\tilde{f}_m$ para $m = 2$, $B_1 = 0,1$ y (a) $\alpha = 1$; (b) $\alpha = 10$. Además es incluido el caso $m = 3$ con $B_1 = 0,2$ y (c) $\alpha = 1$; (d) $\alpha = 10$. Grandes valores de la FD corresponden a zonas claras.

3.2. SISTEMAS ESTELARES EN EQUILIBRIO EN LA APROXIMACIÓN 1PN

Esta sección está dedicada a efectuar la descripción de sistemas estelares axialmente simétricos y estacionarios, a la luz de las leyes físicas fundamentales, pero ahora teniendo en cuenta las primeras correcciones post-newtonianas [2]. Mostraremos que es posible idear un formalismo en donde, tomando como punto de partida ciertos modelos newtonianos, se obtiene el correspondiente modelo estelar corregido a orden 1PN. Dado que, desde un principio, dicha formulación se establecerá desde el enfoque estadístico, los nuevos modelos obtenidos poseerán la propiedad de ser autoconsistentes (a orden 1PN) [2].

Desde el punto de vista estadístico, el estado del sistema se encuentra descrito por la función de distribución $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ ⁶. Así como se ha asumido en el seno de la teoría newtoniana, el sistema estelar (una galaxia) puede seguir siendo modelado satisfactoriamente por un conjunto de partículas sin colisiones y, en consecuencia, la FD debe obedecer a la ecuación de Boltzmann sin colisiones. En la aproximación 1PN, dicha expresión se escribe[119] ⁷

$$v^i \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial F}{\partial v^i} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} (4\phi + v^2) - \frac{\partial \phi}{\partial x^j} v^i v^j + \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right) \frac{\partial F}{\partial v^i} = 0. \quad (3.129)$$

Además, la FD determina la distribución de materia mediante las siguientes ecuaciones[119]:

$$T^{00}(\mathbf{x}, t) = c^2 \int F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v, \quad (3.130)$$

$$T^{00}(\mathbf{x}, t) = \int (v^2 + 2\phi(\mathbf{x}, t)) F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v, \quad (3.131)$$

$$T^{ij}(\mathbf{x}, t) = \int v^i v^j F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v, \quad (3.132)$$

$$T^{0i}(\mathbf{x}, t) = c \int v^i F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (3.133)$$

Un sistema estelar caracterizado por una FD que satisface (3.129), está descrito por una distribución de masa y energía, dada por (3.130)-(3.133), cuya interacción gravitacional está codificada por un trío de potenciales dados por (1.2)-(1.4). Dichas ecuaciones están escritas al estilo newtoniano y, en consecuencia,

⁶En esta sección, por simple conveniencia, comenzaremos denotando a la función de distribución con la letra F , en vez de f , como se ha hecho en muchas partes de esta tesis.

⁷Es preciso señalar que el nombre usado por los autores es *ecuación de Liouville* en vez de *ecuación de Boltzmann sin colisiones*.

podemos distinguir claramente entre las contribuciones post-newtonianas (acompañadas por un factor c^{-2}) y las newtonianas.

Rezania y Sobouti [119] encontraron la versión post-newtoniana de los polítopos de Eddington [44], partiendo de una FD que tiene la misma forma que en el escenario newtoniano (es decir $F \propto E^{n-3/2}$, donde E es la energía y n es un entero positivo), que describe un sistema esféricamente simétrico en equilibrio termodinámico. Ellos mostraron que F es una solución estacionaria de (3.129), si y sólo si, la energía E de una partícula de prueba está corregida a nivel 1PN (ver ecuación (3.154)). Introduciendo esta FD en (3.130)-(3.133), el lado derecho de (1.2)-(1.4) puede escribirse como una función de ϕ y ψ , obteniendo un conjunto de ecuaciones diferenciales. Para un potencial newtoniano dado ϕ_N , estas ecuaciones determinan las correcciones post-newtonianas ϕ_{PN} y Ψ ($\zeta_i = 0$ debido a que ellos consideraron sistemas estacionarios [119]).

Mostraremos que un procedimiento análogo puede implementarse en el caso axialmente simétrico, es decir, tomando un PDP newtoniano con una FD dependiente del momento angular azimutal L_z y la energía E , integrales de (3.129), formulamos dos *ecuaciones fundamentales de la autogravitación*, con el fin de determinar, a partir de una solución newtoniana, sus campos post-newtonianos asociados. Debido al hecho de que, en este caso tales ecuaciones son mas complicadas que las correspondientes al caso esféricamente simétrico ⁸[119], tenemos que introducir restricciones adicionales para simplificar el problema. Por ejemplo, restringiremos nuestra atención a modelos descritos por una FD dependiente de la integral de Jacobi J , un caso de interés en astrofísica. Otra simplificación se logra si nos restringimos a las distribuciones discoidales usando coordenadas esferoidales oblatas: mostraremos que las correcciones post-newtonianas pueden calcularse mediante ecuaciones algebraicas, en vez de ecuaciones diferenciales [2].

Presentaremos una serie de aplicaciones en donde las ecuaciones algebraicas resultantes pueden resolverse exactamente, lo cual significa que es posible obtener soluciones analíticas. La importancia de estas soluciones puede ser evaluada a través de una comparación entre los perfiles de masa y curvas de rotación descritos, tanto desde la gravitación newtoniana, como desde el enfoque de la aproximación 1PN. Nos enfocaremos en los modelos DGK y PRG.

⁸En el caso esféricamente simétrico el formalismo conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias mientras que en el axialmente simétrico, para distribuciones volumétricas de materia, se obtienen dos ecuaciones elípticas.

3.2.1. Método de Hunter en la Aproximación 1PN

Mostraremos que, en la aproximación 1PN el método de Hunter puede implementarse en el caso de sistemas autogravitantes en estado estacionario, es decir, cuando ϕ y ψ son independientes del tiempo y ζ_i se anula. Por tanto, (1.2)-(1.4), en el vacío, se reducen a dos ecuaciones de Laplace: $\nabla^2\phi = 0$ y $\nabla^2\psi = 0$. Debido a la simetría axial, podemos usar coordenadas cilíndricas (R, φ, z) , para decir que ambos campos son independientes de φ , es decir $\phi = \phi(R, z)$ y $\psi = \psi(R, z)$. Además, si el disco se encuentra en el plano ecuatorial, es natural requerir que los campos post-newtonianos tienen simetría de reflexión con respecto al plano $z = 0$:

$$\phi(R, z) = \phi(R, -z), \quad \psi(R, z) = \psi(R, -z), \quad (3.134)$$

de tal forma que

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(R, -z) = -\frac{\partial\phi}{\partial z}(R, z), \quad \frac{\partial\psi}{\partial z}(R, -z) = -\frac{\partial\psi}{\partial z}(R, z), \quad (3.135)$$

en concordancia con el carácter atractivo de la gravitación. También asumiremos que $\partial\phi/\partial z$ y $\partial\psi/\partial z$ no se anulan en la zona del disco, con el fin de obtener la correspondiente distribución delgada de energía y momentum. Dicha distribución, restringida a la región $0 \leq R \leq a$ del plano $z = 0$ (recordemos que a denota el radio del disco), será descrito por una distribución de energía y momentum tipo “cascarón”. Si definimos

$$T^{00} = c^2 \Sigma(R) \delta(z), \quad 0 \leq R \leq a \quad (3.136)$$

$$T^{00} + T^{ii} = \sigma(R) \delta(z) \quad 0 \leq R \leq a \quad (3.137)$$

(δ es la distribución delta de Dirac), usando (1.2)-(1.4), el teorema de Gauss y las relaciones (3.135), puede mostrarse que

$$\Sigma(R) = \frac{1}{2\pi G} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{z=0^+}, \quad (3.138)$$

$$\sigma(R) = \frac{1}{2\pi G} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)_{z=0^+}. \quad (3.139)$$

Nótese que Σ puede ser interpretado como una densidad superficial de masa, mientras que σ es una densidad superficial de energía y momento. Las anteriores relaciones implican que con el fin de tener una distribución de materia como la

descrita por (3.138)-(3.139), debemos exigir que

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(R, 0^+) \neq 0, \quad R \leq a, \quad (3.140)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(R, 0^+) = 0, \quad R > a, \quad (3.141)$$

con la misma condición para ψ . En este punto resulta conveniente invocar las coordenadas esferoidales oblatas, las cuales sabemos que se adaptan de forma natural a la geometría del problema. Recordemos que ellas están relacionadas con las cilíndricas mediante la relación

$$R = a\sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)}, \quad (3.142)$$

$$z = a\xi\eta, \quad (3.143)$$

donde $0 \leq \xi < \infty$ y $-1 \leq \eta < 1$. Nótese que (i) el disco tiene coordenadas $\xi = 0$, $\eta^2 = 1 - R^2/a^2$; (ii) las condiciones (3.140)-(3.141) adoptan la forma

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi}(0, \eta) = H(\eta), \quad (3.144)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\xi, 0) = 0, \quad (3.145)$$

donde H es una función par de η . La solución general de la ecuación de Laplace que satisface las condiciones anteriores puede escribirse como

$$\phi(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad (3.146)$$

donde A_{2n} son constantes arbitrarias, $P_{2n}(\eta)$ y $q_{2n}(\xi) = i^{2n+1} Q_{2n}(i\xi)$ son los usuales polinomios de Legendre y las funciones de Legendre de segunda clase, respectivamente. El potencial post-newtoniano ψ tiene la misma forma,

$$\psi(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad (3.147)$$

pero aquí las constantes de expansión son las B_{2n} . Es preciso señalar que, tomando el límite $c \rightarrow \infty$, ϕ debe ser igual al potencial gravitacional Newtoniano mientras que ψ se anula junto con la ecuación (1.3). Esto sugiere que podemos asumir que las constantes de expansión A_{2n} pueden ser expresadas como

$$A_{2n} = C_{2n} + D_{2n}/c^2, \quad (3.148)$$

de tal forma que ϕ también puede expresarse como $\phi = \phi_N + \phi_{PN}$, donde ϕ_N es la solución newtoniana, determinada a través de las constantes C_{2n} , y ϕ_{PN} es la corrección post-newtoniana, determinada por D_{2n} .

Podemos deducir fórmulas explícitas para Σ y σ en coordenadas esferoidales oblatas, introduciendo (3.146)-(3.147) en (3.138)-(3.139), obteniendo:

$$\Sigma = \frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} (2n+1) q_{2n+1}(0) P_{2n}(\eta), \quad (3.149)$$

$$\sigma = \frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} (2n+1) q_{2n+1}(0) P_{2n}(\eta). \quad (3.150)$$

Aquí, de acuerdo con (3.148), observamos que Σ puede también escribirse como la suma de un término newtoniano Σ_N y una corrección post-newtoniana Σ_{PN} .

Ahora que hemos establecido la estructura fundamental de los modelos con correcciones 1PN, tenemos que dar el siguiente paso: exigir que los modelos obtenidos sean autoconsistentes, es decir, que ellos estén descritos por una FD dependiente de las integrales de movimiento, relacionada de forma consistente con la distribución superficial de masa.

3.2.2. Ecuaciones Post-Newtonianas de la Autogravitación: Sistemas Estacionarios con Simetría Axial

La FD correspondiente a un sistema discoidal axialsimétrico, debe depender de las velocidades y posiciones en la forma $F = f(R, v_R, v_\varphi) \delta(z) \delta(v_z)$, donde f es una función de distribución tal que se anula cuando $R > a$. Introduciendo F en (3.129) e integrando con respecto a z y v_z (usamos coordenadas cilíndricas), puede mostrarse que la distribución f obedece a la siguiente relación [2]:

$$v_R \frac{\partial f}{\partial R} - \left(1 - \frac{R}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial R}\right) \frac{v_R v_\varphi}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} - \left[\left(1 + \frac{4\phi + v_\varphi^2}{c^2}\right) \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial R} - \frac{v_\varphi^2}{R} \right] \frac{\partial f}{\partial v_R} = 0, \quad (3.151)$$

donde $\partial \phi / \partial R$ y $\partial \psi / \partial R$ son evaluados en $z = 0$. La ecuación anterior es la versión 1PN de la ecuación de Boltzmann para un cascarón bidimensional axialmente simétrico en estado estacionario. En consecuencia, $f(R, v_R, v_\varphi)$ desempeña el rol de función de distribución (reducida) que describe dicho cascarón discoidal. De hecho, a partir de (3.130)-(3.132) y (3.136)-(3.137), uno puede mostrar fácilmente

que f está relacionada con Σ y σ a través de

$$\Sigma(R) = \int \int f(R, v_R, v_\varphi) dv_R dv_\varphi, \quad (3.152)$$

$$\sigma(R) = \int \int [4E - 2\phi] f(R, v_R, v_\varphi) dv_R dv_\varphi, \quad (3.153)$$

donde ϕ y ψ son evaluados en $z = 0$. Es importante señalar que

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \Phi, \quad \text{con} \quad \Phi \equiv \phi + \frac{2\phi^2 + \psi}{c^2} \quad (3.154)$$

y

$$L_z = Rv_\varphi e^{-\phi/c^2} \approx Rv_\varphi(1 - \phi/c^2) \quad (3.155)$$

son integrales aisladas de (3.151) que pueden ser interpretadas como generalizaciones a orden 1PN de la energía y el momento angular acimutal clásicos, respectivamente [119]. Esto significa que cualquier f dependiente de E y L_z es solución de (3.151) y viceversa: una solución de (3.151) siempre puede ser expresada como una función de E y L_z . Como es usual en teoría newtoniana, resulta conveniente definir un potencial relativo Ψ y una energía relativa ε de una partícula como

$$\varepsilon = -E + \Phi_0 \quad (3.156)$$

$$\Psi = -\Phi + \Phi_0 \quad (3.157)$$

donde Φ es evaluado en $z = 0$ y Φ_0 es una constante escogida de tal manera que $f > 0$ para $\varepsilon > 0$ y $f = 0$ para $\varepsilon \leq 0$. El potencial relativo depende sólo de la coordenada η , que en el disco satisface la relación $\eta^2 = 1 - R^2/a^2$. Por esta razón Ψ puede ser considerado como una función que depende de R en el intervalo $0 \leq R \leq a$.

En esta sección, estamos especialmente interesados en FDs dependientes de la integral de Jacobi $J = \Omega L_z - E$, que clásicamente es interpretada como la energía medida desde un marco de referencia que rota con velocidad angular Ω [11]. Trataremos con modelos discoidales descritos por esta clase de FD: los primeros dos miembros de los DGK y los modelos PRG. Específicamente, en términos de la energía relativa, las FDs correspondientes a estos modelos dependen de

$$J = \varepsilon + \Omega L_z - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2. \quad (3.158)$$

Nuestro objetivo es obtener modelos estelares en la aproximación 1PN descritos por FDs que tengan la misma dependencia funcional. Con el fin de hacer esto,

examinemos primero el comportamiento de J a la luz de la aproximación 1PN. Esta puede escribirse explícitamente como

$$J = \Psi + (1 - 2\phi/c^2)\Omega^2 R^2/2 - \Omega^2 a^2/2 - (1/2)[v_R^2 + (v_\varphi - \Omega R(1 - \phi/c^2))^2], \quad (3.159)$$

en donde hemos utilizado (3.154), (3.155), (3.157) y el hecho de que términos con c^{-4} se desprecian, como es requerido por la aproximación 1PN. A partir de la anterior ecuación, uno puede observar que J varía entre un valor mínimo $J_{min} = 0$ y un valor máximo

$$J_{max} = \Psi - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 \eta^2 (1 - \frac{2\phi}{c^2}) - \frac{\Omega^2 a^2 \phi}{c^2}, \quad (3.160)$$

donde hemos usado el hecho de que, en correspondencia con el caso newtoniano, Φ_0 es Φ evaluado en $\xi = 0$ y $\eta = 0$, es decir $\Phi_0 = \Phi(0, 0)$. Los valores J_{min} y J_{max} determinan los límites de (3.152) y (3.153), cuando ellos son escritos en términos de J . Teniendo en cuenta que $2\pi dJ = dv_R dv_\varphi$, la relación (3.152) puede escribirse como

$$\Sigma = 2\pi \int_0^{J_{max}} f(J) dJ, \quad (3.161)$$

mientras que (3.153) requiere de cálculos más extensos, para escribirla en términos de J . Primero obsérvese que $E = \Phi_0 - \Omega^2 a^2/2 + \Omega L_z - J$ y recuérdese que, en este caso, $L_z = Rv_\varphi$, para ser consistentes con la aproximación 1PN. Entonces, usando el hecho de que

$$\int \int v_\varphi f dv_R dv_\varphi = 2\pi \langle v_\varphi \rangle \int_0^{J_{max}} f(J) dJ, \quad (3.162)$$

escribimos

$$\sigma = 4\pi(2\Phi_0 - \Omega^2 a^2 - \phi + 2a\Omega\sqrt{1 - \eta^2} \langle v_\varphi \rangle) \int_0^{J_{max}} f(J) dJ - 8\pi \int_0^{J_{max}} J f(J) dJ \quad (3.163)$$

Finalmente, exigiremos que los modelos 1PN sean auto consistentes, es decir, que Σ , dada por (3.161), sea equivalente a la obtenida mediante (3.149). Así, llegamos a la *primera ecuación de la autogravitación en aproximación 1PN*:

$$\begin{aligned} 2\pi a G \eta \Sigma_N &+ \sum_{n=0}^S (D_{2n}/c^2) (2n+1) q_{2n+1}(0) P_{2n}(\eta) \\ &= 4\pi^2 a G \eta \int_0^{J_{max}} f dJ. \end{aligned} \quad (3.164)$$

Por otra parte, también exigiremos que σ , dado por (3.163), sea equivalente a la obtenida usando (3.150). El resultado es la *segunda ecuación de la autogravitación en la aproximación 1PN*:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^S B_{2n}(2n+1)q_{2n+1}(0)P_{2n}(\eta) &= -16\pi^2 a G \eta \int_0^{J_{max}} J f dJ \\ &+ 8\pi^2 a G \eta [2\Phi_0 - \Omega^2 a^2 - \phi + 2a\Omega\sqrt{1-\eta^2}\langle v_\varphi \rangle] \int_0^{J_{max}} f dJ. \end{aligned} \quad (3.165)$$

Una vez escogemos $f(J)$, el lado derecho de (3.164) y (3.165) se puede expandir explícitamente como una combinación lineal de potencias pares de η . En particular, la aparición de ϕ^2 impone una regla acerca de la máxima potencia en la combinación lineal: si el potencial newtoniano es un polinomio de orden k en η , la máxima potencia de η en el lado derecho de la ecuación fundamental es $2k$. Este hecho sugiere que podemos imponer la condición de que $S = 2k$ en el lado izquierdo de (3.164) y (3.165). Como veremos más adelante, invocando la independencia lineal de los polinomios, podemos obtener ecuaciones algebraicas que conectan las constantes de expansión desconocidas B_{2n} y D_{2n} (post-newtonianas) con las constantes newtonianas C_{2n} (conocidas).

3.2.3. Disco de Kalnajs en la Aproximación 1PN

Recordemos los DGK, cuyo potencial es

$$\phi_N^{(m)} = - \sum_{n=0}^m C_{2n}^{(m)} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad (3.166)$$

donde $m = 1, 2, \dots$ y el subíndice N denota el hecho de que estamos tratando con un modelo newtoniano. Las constantes de expansión están dadas por

$$C_{2n}^{(m)} = \frac{MG\pi^{1/2}(4n+1)(2m+1)!}{a^{2m+1}(2n+1)(m-n)!\Gamma(m+n+\frac{3}{2})q_{2n+1}(0)}, \quad (3.167)$$

para $n \leq m$ y $C_{2n}^{(m)} = 0$ para $n > m$. El caso $m = 1$ representa el conocido disco de Kalnajs, cuya distribución de masa es [76],

$$\Sigma_N^{(1)} = \frac{3M}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2}} = \frac{3M\eta}{2\pi a^2}, \quad (3.168)$$

y está caracterizado por la FD

$$f(J) = \frac{3M}{4\pi^2 a^3} [2(\Omega_o^2 - \Omega^2)J]^{-1/2} \quad (3.169)$$

donde

$$\Omega_o^2 = \frac{3\pi GM}{4a^3}, \quad (3.170)$$

y Ω es una constante que equivale a la velocidad angular media. Esto significa que (3.169) describe un sistema autogravitante que rota como un cuerpo rígido (la velocidad angular es independiente de R) con radio a , masa total M , velocidad angular Ω y, en consecuencia, velocidad angular media $\langle v_\varphi \rangle = \Omega R$.

Ahora, con el fin de obtener el correspondiente modelo 1PN, tenemos que introducir (3.166)- (3.169), recordando que $m = 1$, en (3.164) y (3.165), teniendo en cuenta que debemos hacer $S = 2$ en las sumas. La primera ecuación de autogravitación puede ponerse en forma de una ecuación polinomial, $c_0 + c_2\eta^2 + c_4\eta^4 = 0$, donde c_{2n} son constantes dadas en términos de D_0 , D_2 , D_4 , B_0 , B_2 y B_4 . De hecho, debido a la independencia lineal de los monomios, tenemos que $c_{2n} = 0$ para todo n , y en consecuencia, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$D_0 - D_2 + D_4 = 9\pi G^2 M^2 \Omega^2 / [8a^2(\Omega_o^2 - \Omega^2)], \quad (3.171)$$

$$\gamma D_2 + \vartheta D_4 = B_2 - 15B_4/8, \quad (3.172)$$

$$\begin{aligned} \chi D_4 &= 35B_4/16 - 3\pi G^2 M^2 / 4a^2 \\ &\quad - GM\Omega^2 a, \end{aligned} \quad (3.173)$$

donde

$$\gamma = [24a^3(\Omega_o^2 - \Omega^2) - 9\pi MG] / (9\pi MG), \quad (3.174)$$

$$\vartheta = [135\pi MG/8 - 80a^3(\Omega_o^2 - \Omega^2)] / (9\pi MG), \quad (3.175)$$

$$\chi = 70[128a^3(\Omega_o^2 - \Omega^2) - 27\pi MG] / (864\pi MG). \quad (3.176)$$

Ahora, efectuando un procedimiento similar en la aplicación de la segunda ecuación de autogravitación, obtenemos

$$B_0 - B_2 + B_4 = 0, \quad (3.177)$$

$$3B_2 - 10B_4 = 6MGa\Omega^2 - 27\pi G^2 M^2 / 4a^2, \quad (3.178)$$

$$B_4 = 9\pi G^2 M^2 / 140a^2 - 30GM\Omega^2 a. \quad (3.179)$$

De esta manera, tenemos un sistema de 6 ecuaciones lineales para 6 variables, D_0 , D_2 , D_4 , B_0 , B_2 y B_4 , que puede ser resuelta trivialmente: la ecuación (3.179) proporciona automáticamente el valor de B_4 y puede ser introducido en (3.178), determinando el valor de B_2 . Nuevamente, dichos valores son introducidos en

(3.177) para obtener B_0 ; y así sucesivamente. Encontramos los siguientes resultados:

$$D_0 = -\frac{27G^3\pi^2M^3}{8a^2(a^3\Omega^2 - 3GM\pi)} - \frac{47709G^3\pi^2M^3}{448a^2(128a^3\Omega^2 - 357GM\pi)} - \frac{3G^2\pi(1 + 80\pi)M^2}{320a^2} - \frac{9(28G^3M^3\pi^3 - 95G^3M^3\pi^2)}{28a^2(8a^3\Omega^2 - 21GM\pi)}, \quad (3.180)$$

$$D_2 = -\frac{3G^2\pi(7\pi - 13)M^2}{28a^2} - \frac{9(28G^3M^3\pi^3 - 95G^3M^3\pi^2)}{28a^2(8a^3\Omega^2 - 21GM\pi)}, \quad (3.181)$$

$$D_4 = \frac{27G^2M^2\pi(184\Omega^2a^3 + 39GM\pi)}{140a^2(128a^3\Omega^2 - 357GM\pi)}, \quad (3.182)$$

$$B_0 = 2aGM(\pi - 1)\Omega^2 - \frac{3G^2M^2\pi(15\pi - 1)}{20a^2}, \quad (3.183)$$

$$B_2 = \frac{2}{7}aGM(7\pi - 10)\Omega^2 - \frac{3G^2M^2\pi(21\pi - 2)}{28a^2}, \quad (3.184)$$

$$B_4 = \frac{18GM}{35a} \left(\frac{GM\pi}{8a} - \frac{5a^2\Omega^2}{3} \right). \quad (3.185)$$

Estas constantes determinan completamente las correcciones post-newtonianas de ϕ y el potencial escalar ψ , así como la distribución de masa y las curvas de rotación correspondientes al nuevo modelo. De hecho, usando valores típicos de una galaxia ($M \sim 10^{40}kg$, $a \sim 10^{20}m$, $\Omega \sim 10^{-13}Hz$, $G = 6,67 \times 10^{-11}m^3/Kgs^2$, $c = 3 \times 10^8m/s$), mostramos las gráficas generadas según la teoría newtoniana y según la aproximación 1PN (densidad de masa y curva de rotación). Las correcciones en la densidad de masa son despreciables, como es confirmado por la figura 3.3(a), donde las líneas a trazos y llena (modelos newtoniano y 1PN, respectivamente) prácticamente coinciden. Sin embargo, la velocidad circular revela correcciones significativas que crecen con el radio (Fig. 3.3(b)). Entre mayor sea R , mayor es la corrección en v_ϕ .

3.2.4. Segundo Modelo GKD en la aproximación 1PN

El miembro $m = 2$ de la familia GKD puede también describirse mediante una FD dependiente de J [111] :

$$f(J) = \frac{2M}{\sqrt{3}a^2} \left(\frac{10a^3}{G^3M^3\pi^{11}J} \right)^{1/4}, \quad (3.186)$$

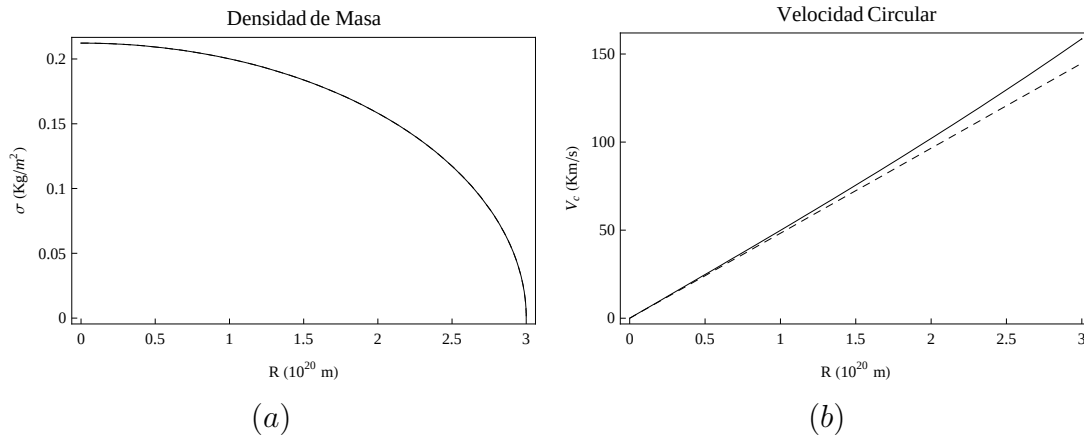


Figura 3.3: **(a)** Densidad superficial de masa según la teoría newtoniana (línea a trazos) y según la aproximación 1PN (línea sólida). Hemos usado valores típicos en una galaxia: $M = 4 \times 10^{40} \text{ kg}$, $a = 3 \times 10^{20} \text{ m}$, $\Omega = 2 \times 10^{-13} \text{ Hz}$, $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{Kg s}^2$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$. Ambas gráficas coinciden prácticamente. Las correcciones 1PN en la masa no son significativas, a pesar de que las correcciones en v_φ son importantes. **(b)** Curvas de rotación según la teoría newtoniana (línea a trazos) y según la aproximación 1PN (línea sólida). Hemos usado los mismos parámetros que en la figura previa. Las correcciones 1PN son significativas y aumentan con el radio, a pesar de que las correcciones en la densidad de masa son despreciables.

que conduce a una densidad superficial de masa dada por

$$\Sigma_N^{(2)} = \frac{5M}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{3/2} = \frac{5M\eta^3}{2\pi a^2}, \quad (3.187)$$

y una velocidad circular media $\langle v_\varphi \rangle = \sqrt{15\pi GM/32a^3} R$. El potencial gravitacional asociado está dado por (3.166), haciendo $m = 2$.

Apoyándonos en la experiencia con el modelo $m = 1$, empezamos con (3.165) la cual, después de algunos cálculos, adopta la forma

$$\sum_{n=0}^4 B_{2n}(2n+1)q_{2n+1}(0)P_{2n}(\eta) = \sum_{n=0}^4 \tilde{C}_{2i}\eta^{2i}, \quad (3.188)$$

donde $\tilde{C}_0 = \tilde{C}_2 = 0$ y

$$\begin{aligned} \tilde{C}_4 &= (25\pi^2 10! G^2 M^2)/(160a^2) \\ \tilde{C}_6 &= -(75\pi^2 10! G^2 M^2)/(160a^2) \\ \tilde{C}_8 &= (75\pi^2 10! G^2 M^2)/(2240a^2). \end{aligned} \quad (3.189)$$

Obsérvese que hemos escogido $S = 4$ en la segunda ecuación fundamental, debido a que estamos tratando con un modelo $m = 2$. La relación (3.188) se puede resolver usando la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre y la relación ([9])

$$\int_{-1}^1 \eta^{2j} P_{2i}(\eta) d\eta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2j+1)}{2^{2j} \Gamma(j-i+1) \Gamma(j+i+3/2)}. \quad (3.190)$$

Entonces, integrando (3.188) con respecto a η , obtenemos

$$B_{2n} = \sum_{i=0}^4 \frac{\sqrt{\pi} \hat{C}_{2i} 2^{-2i-1} (4n+1) \Gamma(2n+1)}{q_{2n+1}(0) (2n+1) \Gamma(i-n+1) \Gamma(i+n+3/2)}, \quad (3.191)$$

y, en consecuencia, el potencial post-newtoniano asociado ψ está completamente determinado mediante la ecuación (3.147).

Podemos efectuar un procedimiento similar para obtener la corrección post-newtoniana de ϕ , determinada por la primera ecuación fundamental. Después de algunos cálculos, (3.165) puede escribirse como

$$\sum_{n=0}^4 \left\{ D_{2n} [\vartheta_{2n} P_{2n}(\eta) + q_{2n}(0) P_{2n}(0)] - \hat{C}_{2i} \eta^{2i} - B_{2n} q_{2n}(0) P_{2n}(\eta) \right\} = 0, \quad (3.192)$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned} \vartheta_{2n} &= \pi(2j+1)/(32a^2) q_{2n+1}(0) - q_{2n}(0) \\ \hat{C}_0 &= (675\pi^2 G^2 M^2)/(4096a^2) + \psi(0,0) \\ \hat{C}_2 &= -(1575\pi^2 G^2 M^2)/(4096a^2) \\ \hat{C}_4 &= -(1125\pi^2 G^2 M^2)/(2048a^2) \\ \hat{C}_6 &= -(2025\pi^2 G^2 M^2)/(4096a^2) \\ \hat{C}_8 &= (2025\pi^2 G^2 M^2)/(8192a^2). \end{aligned} \quad (3.193)$$

Entonces, las constantes de expansión que determinan ϕ_{PN} , son

$$D_{2n} = \sum_{i=0}^4 \frac{\sqrt{\pi} \hat{C}_{2i} 2^{-2i-1} (4n+1) \Gamma(2j+1)}{\vartheta_{2n} (2n+1) \Gamma(i-n+1) \Gamma(i+n+3/2)} + \frac{B_{2n} q_{2n}(0)}{\vartheta_{2n}}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \quad (3.194)$$

y

$$D_0 = \frac{1}{\vartheta_0 + \pi/2} \left[\sum_{i=0}^4 \frac{\sqrt{\pi} \hat{C}_{2i} 2^{-2i-1} \Gamma(2j+1)}{\Gamma(i+1) \Gamma(i+3/2)} - \sum_{i=1}^4 D_{2i} q_{2i}(0) P_{2i}(0) \right]. \quad (3.195)$$

Ahora que hemos determinado ϕ y ψ , estamos en condiciones de mostrar la correspondiente distribución de masa y curvas de rotación. Usando nuevamente valores típicos $M \sim 10^{40}kg$, $a \sim 10^{20}m$, graficamos tanto las predicciones newtonianas como las post-newtonianas y observamos un fenómeno similar al del primer DGK: Las correcciones en la distribución de masa son despreciables (ver Fig. 3.4(a)) mientras que la velocidad circular revela correcciones significativas (ver Fig. 3.4 (b)); de hecho la curva de rotación 1PN es mejor comportada que la newtoniana.

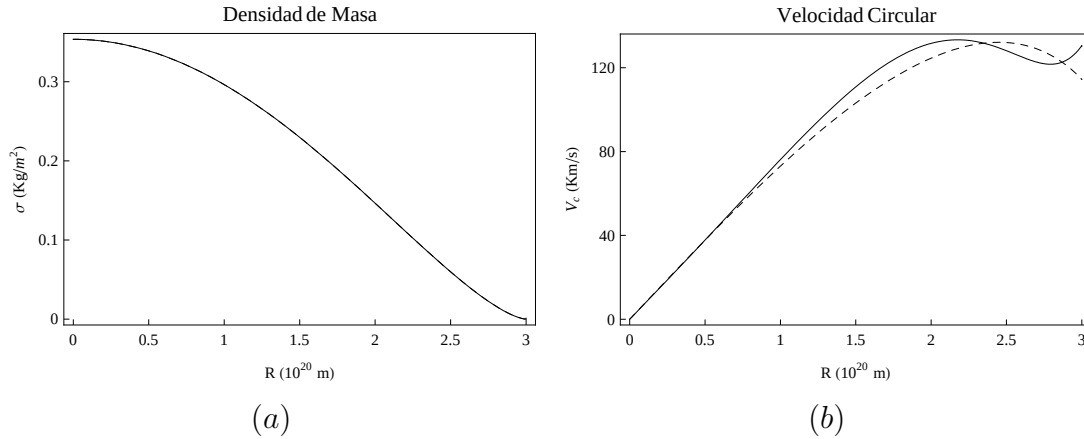


Figura 3.4: **(a)** Densidad superficial de masa para el segundo miembro de la familia DGK ($m = 2$), con $M = 4 \times 10^{40}kg$, $a = 3 \times 10^{20}m$, $G = 6,67 \times 10^{-11}m^3/Kgs^2$, $c = 3 \times 10^8m/s$. Ambas gráficas, newtoniana (línea a trazos) y 1PN (línea completa), coinciden, prácticamente. **(b)** Curva de rotación para el segundo miembro de la familia DGK, usando los mismos parámetros de la figura anterior. A pesar de que las correcciones 1PN a la distribución de masa son despreciables, ellas resultan ser apreciables en la velocidad circular.

3.2.5. Versión Post-newtoniana de los Modelos PRG

Recordemos que los modelos PRG, etiquetados con $k = 2, 3, \dots$, están caracterizados por una densidad de masa

$$\Sigma_N^{(k)} = \frac{M}{2\pi a^2} \sum_{m=1}^k \beta_m^{(k)} (2m+1) \eta^{2m-1}, \quad (3.196)$$

k	$\beta_{1\min}^{(k)}$	$\beta_2^{(k)}$	$\beta_3^{(k)}$	$\beta_4^{(k)}$	$\beta_5^{(k)}$
2	0	1			
3	0.182292	-7/12	1		
4	0.287827	-21/128	-9/16	1	
5	0.381071	-231/2560	-99/640	-11/20	1

Cuadro 3.2: Constantes de expansión para los primeros cuatro miembros de la familia PRG.

cuyo potencial gravitacional es

$$\phi_N^{(k)} = - \sum_{m=1}^k \sum_{i=0}^m \beta_m^{(k)} C_{2i}^{(m)} q_{2i}(\xi) P_{2i}(\eta), \quad (3.197)$$

donde las constantes $\beta_m^{(k)}$ son cantidades adimensionales definidas unívocamente, excepto por $\beta_1^{(k)}$, el cual es un parámetro libre (para el k -ésimo modelo) con un límite inferior. Estas constantes, para los primeros cuatro miembros de la familia PRG, son especificados en la tabla 3.2:

Cada PDP descrito arriba admite una FD que depende de J , dada por

$$f^{(k)}(J) = \frac{M}{8\pi^2 a^2 k} \sum_{m=1}^k \frac{\beta_m^{(k)} (4m^2 - 1)}{\alpha_{k0}^{(k)}} \left(\frac{J}{\alpha_{k0}^{(k)}} \right)^{(2m-2k-1)/2k}, \quad (3.198)$$

donde

$$\alpha_{sr}^{(m)} = \frac{(-1)^r (4s - 2r)! C_{2s}^{(m)} q_{2s}(0)}{2^{2s} r! (2s - 2r)! (2s - r)!}. \quad (3.199)$$

Puede mostrarse que la velocidad circular media, correspondiente al k -ésimo modelo, es

$$\langle v_\varphi \rangle^{(k)} = \Omega^{(k)} R = \Omega^{(k)} a \sqrt{1 - \eta^2} \quad (3.200)$$

donde $\Omega^{(k)}$, la velocidad angular media, está dada por

$$\Omega^{2(k)} = \Omega_o^2 \left[\beta_1^{(k)} - \beta_1^{(k)*} \right], \quad (3.201)$$

con

$$\beta_1^{*(k)} = \frac{5\pi^{1/2} \Gamma(2k+1) \alpha_{k0}^{(k)}}{2^{2k+1} \Gamma(k) \Gamma(k+1+\frac{3}{2}) C_2 q_2(0)} - \sum_{i=0}^{k-2} \beta_{k-i}^{(k)}. \quad (3.202)$$

Para obtener la versión 1PN de estos modelos, introducimos la anterior información en (3.165), que toma la forma

$$\sum_{n=0}^{2k} B_{2n}^{(k)} (2n+1) q_{2n+1}(0) P_{2n}(\eta) = \frac{2MG}{a} \sum_{m=1}^k \beta_{2m}^{(k)} (2m+1) \eta^{2m} \times \left[\frac{2k-2m+1}{2k+2m-1} \alpha_{k0}^{(k)} \eta^{2k} - \frac{3}{2} \Omega^{(k)2} a^2 \eta^2 + \Omega^{(k)2} a^2 + \phi_0^{(k)} \right]. \quad (3.203)$$

Para obtener $B_{2n}^{(k)}$ explícitamente en términos de parámetros newtonianos, procedemos como en la anterior aplicación (DGK, $m=2$). El resultado es

$$B_{2i}^{(k)} = \frac{2\sqrt{\pi}GM(4i+1)}{a(4i+2)q_{2i+1}(0)} \sum_{m=1}^k \frac{\beta_m^{(k)}(2m+1)}{2^{2m}} \times \left[\frac{\alpha_{k0}^{(k)}(2k-2m+1)\Gamma(2k+2m+1)}{2^{2k}(2k+2m-1)\Gamma(k+m-i+1)\Gamma(k+m+i+3/2)} - \frac{3\Omega^{(k)2}a^2\Gamma(2m+3)}{8\Gamma(m-i+2)\Gamma(m+i+5/2)} + \frac{(\Omega^{(k)2}a^2 + \phi_0^{(k)})\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m-i+1)\Gamma(m+i+3/2)} \right], \quad (3.204)$$

y así, de la ecuación (3.147), tenemos el campo posnewtoniano $\psi^{(k)}$, asociado al k -ésimo disco. Efectuando un procedimiento similar, empezando por la segunda ecuación fundamental, podemos escribir

$$\sum_{j=0}^{2k} D_{2j}^{(k)} (2j+1) q_{2j+1}(0) Y_{ij}^k = \frac{GM}{2ak\alpha_{k0}^{(k)}} \sum_{m=1}^k (4m^2-1) \beta_m^{(k)} \left[\mu X_i^m + \sum_{j=0}^{2k} \nu_j Y_{ij}^m + \sum_{n=1}^k \sum_{j=0}^n \lambda_{nj} (Y_{ij}^m - Y_{ij}^{m+1}) + \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^l \sum_{n=1}^k \sum_{s=0}^n \varpi_{ljns} Z_{ijs}^m \right] \quad (3.205)$$

para $i=0, 1, \dots, 2k$. Hemos definido dos cantidades independientes de $D_{2j}^{(k)}$,

$$\mu = \left[2\phi_N^{(k)2} + \psi^{(k)} \right]_{\eta=0} - \sum_{j=0}^{2k} D_{2j}^{(k)} q_{2j}(0) P_{2j}(0), \quad (3.206)$$

$$\nu_j = \left(D_{2j}^{(k)} + B_{2j}^{(k)} \right), q_{2j}(0) \quad (3.207)$$

y las constantes conocidas

$$\lambda_{nj} = \Omega^2 a^2 \beta_n^{(k)} C_{2j}^{(n)} q_{2j}(0), \quad (3.208)$$

$$\varpi_{ljns} = -2\beta_l^{(k)} \beta_n^{(k)} C_{2j}^{(l)} C_{2s}^{(n)} q_{2j}(0) q_{2s}(0), \quad (3.209)$$

junto con

$$X_i^m = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2m+1)}{2^{2m} \Gamma(m-i+1) \Gamma(m+i+3/2)}, \quad (3.210)$$

$$\begin{aligned} Y_{ij}^m &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m+4j}} \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^l 2^{2l} (4j-2l)!}{l! (2j-2l)! (2j-l)!} \\ &\times \frac{\Gamma(2m+2j-2l+1)}{\Gamma(m+j-l-i+1) \Gamma(m+j-l+i+3/2)}, \end{aligned} \quad (3.211)$$

y

$$\begin{aligned} Z_{ijs}^m &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m+4j+4s}} \sum_{l=0}^j \sum_{t=0}^s \frac{(-1)^{l+t} 2^{2l+2t}}{l! t! (2j-2l)! (2j-l)!} \\ &\times \frac{\Gamma(2m+2j-2l+2s-2t+1)}{(2s-2t)! \Gamma(m+j-l+s-t-i+1)} \\ &\times \frac{(4j-2l)! (4s-2t)!}{(2s-t)! \Gamma(m+j-l+s-t+i+3/2)}. \end{aligned} \quad (3.212)$$

La relación (3.205) es un sistema de $2k+1$ ecuaciones lineales en $2k+1$ incógnitas, las constantes de expansión $D_{2j}^{(k)}$. Resolvimos dicho sistema para $k=2, 3, 4$, definiendo la corrección 1PN de ϕ . Las correspondientes densidad de masa y curva de rotación son mostradas en la figura 3.5, donde escogimos $M \sim 10^{40} Kg$ y $a \sim 10^{20}$. Aunque, como en las aplicaciones anteriores, presentamos los resultados newtoniano (línea a trazos) y post-newtoniano (línea sólida), ellas se superponen en todos los casos. Entonces, tomando valores típicos de radio y masa, las correcciones 1PN son despreciables en modelos PRG.

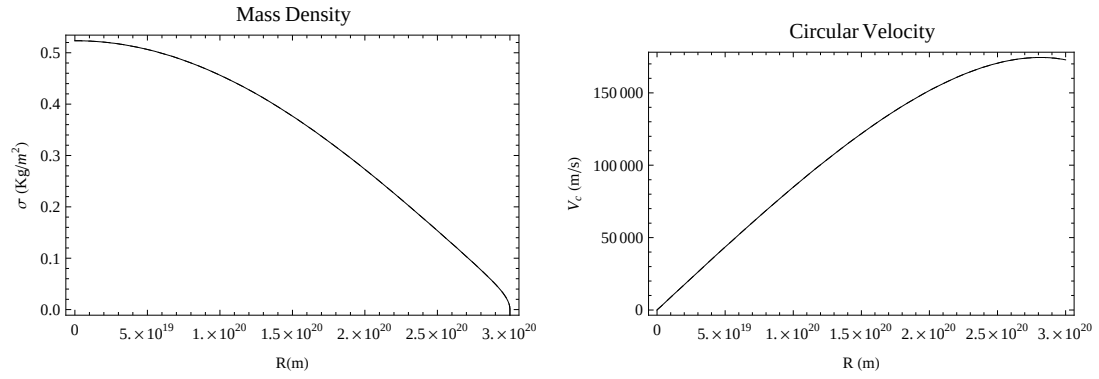


Figura 3.5: **(a)** Densidad superficial de masa para el modelo PRG con $k = 2$ y $M = 4 \times 10^{40} \text{kg}$, $a = 3 \times 10^{20} \text{m}$, $\beta_1^{(2)} = 0,8$, $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{Kgs}^2$, $c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$. Ambas gráficas, newtoniana y post-newtoniana, coinciden, prácticamente. **(b)** Velocidad circular correspondiente al mismo modelo y empleando los mismos parámetros que en la figura anterior. Nuevamente, ambas gráficas coinciden.

DESCRIPCIÓN ESTADÍSTICA DE SISTEMAS ESTELARES: II. RÉGIMEN COLISIONAL

Una de las bases físicas en las cuales se sustenta la ecuación de Boltzmann sin colisiones es la conservación del número de partículas descritas por la FD. En realidad, la cantidad de estrellas no se conserva debido a que ellas nacen y mueren, entonces su flujo a través del espacio de fase sería descrito más acertadamente por una ecuación del tipo [11]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = B - D, \quad (4.1)$$

donde $B(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ y $D(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ son las tasas por unidad de volumen del espacio de fase a las cuales las estrellas nacen y mueren. En la ecuación de Boltzmann sin colisiones, $B - D$ es igual a 0, lo cual es una aproximación útil si y sólo si $B - D$ es menor en magnitud que los términos a la izquierda de la ecuación (4.1). El término $\dot{\mathbf{x}} \cdot \partial f / \partial \mathbf{x}$ es del orden de vf/R , donde v y R son la velocidad característica y el radio de la galaxia. De manera similar, el término $\dot{\mathbf{v}} \cdot \partial f / \partial \mathbf{v}$ es del orden de af/v , donde a es la aceleración característica. Como $a \approx v/t_{cross}$, los dos últimos términos del lado derecho de la ecuación (4.1) son del orden de f/t_{cross} . Entonces, consideremos el parámetro

$$\gamma = \left| \frac{B - D}{f/t_{cross}} \right|. \quad (4.2)$$

La ecuación de Boltzmann sin colisiones es válida si $\gamma \ll 1$, lo cual no siempre se cumple. Por ejemplo, esto sucede en el caso de sistemas de vida corta como las nebulosas planetarias, en donde $B \simeq D$ [11]. Incluso suponiendo que $\gamma \ll 1$, la ecuación de Boltzmann sin colisiones presenta otra limitante: sistemas estelares con un alto grado de correlación entre estrellas. Veamos.

La densidad de estrellas en un elemento de volumen infinitesimal del espacio de fase es Nf , donde N es el número total de estrellas en la galaxia. Sin embargo, en la práctica lo único que podemos medir es la densidad promedio en un volumen lo suficientemente grande para contener varias estrellas. La suposición que usualmente se hace es que la densidad en dicho volumen es $N\bar{f}$, donde $\bar{f}$ es el promedio de f (sobre el mismo volumen). No obstante, esto solo sería correcto si las posiciones de las estrellas en el espacio de fase no estuvieran correlacionadas; es decir, cuando el hecho de que una estrella se encuentre en un determinado punto del espacio de fase no influye en la probabilidad de que otra estrella tenga una localización dada. En realidad, la presencia de una estrella en A siempre incrementa la probabilidad de que otra estrella se encuentre en un B cercano, debido a la naturaleza atractiva de la interacción gravitacional. Por lo tanto, la suposición de que las distribuciones de probabilidad de estrellas individuales sean separables no es estrictamente válida. Los múltiples encuentros que, de forma persistente perturban las trayectorias medias de las estrellas, generan correlaciones entre ellas y activan el proceso de relajación del sistema. Si dicho sistema tiene una edad superior (o del mismo orden) a su tiempo de relajación, la contribución de los encuentros en su evolución es significativa. Las partículas pierden la memoria de sus condiciones iniciales y efectúan trayectorias que, vistas en el espacio de fase, se dispersan o difunden por el efecto de dichos encuentros, y se dice entonces que el sistema se encuentra en un régimen colisional.

Uno de los principales problemas a tratar en este capítulo es el de la obtención de una ecuación cinética¹ que incluya las correcciones relativistas y que incorpore el proceso de relajación en la evolución del sistema. Como fue señalado por Kandrup, los los objetos astrofísicos donde las correcciones relativistas son significativas en el proceso de relajación son principalmente en los núcleos activos y, quizás, conglomerados de estrellas relativistas cuya edad es menor que su tiempo de relajación [80]. Existe una sólida evidencia observacional de que existen núcleos que contienen agujeros negros masivos formados por la inestabilidad dinámica de los sistemas relativistas de estrellas [80]. En particular, los efectos relativistas podrían ser importantes en el caso de núcleos galácticos desacoplados del resto de la galaxia, los cuales podrían llegar ser mas y mas densos (y relativistas) en una escala de tiempo del orden de su tiempo de relajación

¹Se hace alusión a lo que, en el contexto histórico de la mecánica estadística, se entiende por ecuación cinética: una relación que expresa la razón de cambio temporal de f en términos de sus gradientes (de posición y de velocidad), evaluados en un mismo instante de tiempo (ver por ejemplo las referencias [14, 6]).

[117, 118]. Dado que estos sistemas están compuestos por estrellas con velocidad mucho menor que la velocidad de la luz, el enfoque post-newtoniano proporciona la herramienta adecuada para investigar su comportamiento.

Dado que, en la obtención de la ecuación cinética deseamos ser lo mas rigurosos posibles, estableciendo una deducción partiendo de primeros principios, adoptaremos desde un inicio el enfoque de la mecánica estadística del no equilibrio, esbozando de paso una dinámica post-newtoniana de correlaciones y finalmente deduciendo la secuencia BBGKY, cuya primera ecuación servirá como punto de partida para la obtención de la ecuación cinética².

²Cabe señalar que determinar si es posible o no obtener una ecuación cinética que describa la evolución de los sistemas autogravitantes, a partir de los métodos usuales de la mecánica estadística, es un problema abierto. Por una parte, no está claro si estos sistemas alcanzan un estado de equilibrio térmico bien definido. Por otra parte, se sabe que existen divergencias en ciertos términos de las ecuaciones [6, 112]. Estos dos obstáculos son debidos a la naturaleza atractiva y de largo alcance de la interacción gravitacional. Una alternativa para superar este escollo, está en aprovechar la preponderancia que tienen los encuentros débiles en sistemas de esta naturaleza [11]. Como se ilustrará más adelante, esto permite tratar al sistema en la aproximación GDA (Gas Débilmente Acoplado). Precisamente para los GDA sí es posible la formulación de una ecuación cinética bien comportada [6, 112].

4.1. HACIA UNA DINÁMICA POST-NEWTONIANA DE CORRELACIONES

4.1.1. Ecuaciones de Movimiento para un Sistema de Partículas Puntuales

Recordemos que, de acuerdo con la aproximación 1PN, una partícula que se mueve lentamente bajo la acción de la gravedad, experimenta una aceleración dada por [132]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} = & -\nabla\phi + \frac{1}{c^2} \left[-\nabla(2\phi^2 + \psi) - \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathcal{E}) \right. \\ & \left. + 3\mathbf{v} \frac{\partial\phi}{\partial t} + 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\phi - \mathbf{v}^2 \nabla\phi \right], \end{aligned} \quad (4.3)$$

(el punto denota derivada respecto a t) donde ϕ , $\mathcal{E}$ y ψ son los potenciales newtoniano, post-newtoniano vectorial y post-newtoniano escalar, respectivamente. Están determinados por el tensor energía-momento T^{ab} , mediante las siguientes relaciones [132]:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -G \int d^3\mathbf{x}' \frac{{}^0T^{00}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (4.4)$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = - \int \frac{d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}', t)}{\partial t^2} + G {}^2T^{00}(\mathbf{x}', t) + G {}^2T^{ii}(\mathbf{x}', t) \right], \quad (4.5)$$

$$\mathcal{E}_i(\mathbf{x}, t) = -4G \int d^3\mathbf{x}' \frac{{}^1T^{i0}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (4.6)$$

Para el caso en que la fuente de la interacción gravitacional sea un sistema de N masas puntuales idénticas (que se mueven con velocidad $\ll c$), las componentes

del tensor energía-momento tienen la forma:

$$T^{00}(\mathbf{x}', t) = m \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i(t)), \quad (4.7)$$

$$T^{0j}(\mathbf{x}', t) = m \sum_{i=1}^N \left[\phi(\mathbf{x}', t) + \frac{\mathbf{v}_i^2}{2} \right] \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i(t)), \quad (4.8)$$

$$T^{1j}(\mathbf{x}', t) = m \sum_{i=1}^N v_i^j \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i(t)), \quad (4.9)$$

$$T^{jk}(\mathbf{x}', t) = m \sum_{i=1}^N v_i^j v_i^k \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i(t)), \quad (4.10)$$

de manera que, introduciendo (4.7)-(4.10) en (4.4)-(4.6) y después de efectuar algunos cálculos, se encuentra que la aceleración puede ser escrita en la forma

$$\dot{\mathbf{v}} = -Gm \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} + \sum_{i=1}^N \Lambda(w, w_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \quad (4.11)$$

en donde ³

$$\begin{aligned} \Lambda(w, w_i) \equiv & \frac{Gm}{c^2} \left\{ \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} \right)^2 - \mathbf{v}^2 - 2\mathbf{v}_i^2 + 4\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i + \frac{4mG}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} \right] \right. \\ & \left. + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \frac{(4\mathbf{v} - 3\mathbf{v}_i) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \right\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \equiv & \frac{G^2 m^2}{2c^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} \left\{ \frac{8(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^3} - \frac{7(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \right. \\ & \left. - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \frac{(\mathbf{x} - 3\mathbf{x}_i + 2\mathbf{x}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^2 |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Puede observarse que las correcciones relativistas a la aceleración de una partícula son del orden de $c^{-2}(v^2 + GNm/r)$ veces $\nabla\phi$. Tomando valores típicos para la velocidad ($v \sim 10^7 \text{ cm/s}$), la masa ($m \sim 10^{33} \text{ g}$), el número de estrellas ($N \sim 10^{10}$) y una *distancia mínima*⁴ entre estrellas ($r \sim 10^{18} \text{ cm}$), se puede estimar que $\Lambda + \Upsilon$

³Usaremos la notación $w \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{v})$, y también $dw \equiv d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$, mas adelante.

⁴Nos referimos a un estimativo de la mínima separación requerida para que la aproximación de partículas puntuales sea válida

es de alrededor 10^4 veces más pequeña que la aceleración debida a la interacción newtoniana. Desde este punto de vista, considerando un corto intervalo de tiempo, el efecto de las contribuciones post-newtonianas sobre la trayectoria individual de una partícula (en una galaxia, por ejemplo), es prácticamente despreciable. Sin embargo, a lo largo de grandes intervalos de tiempo, puede esperarse también que el efecto colectivo persistente de estas pequeñas contribuciones, en el seno del sistema, logren desviarla apreciablemente de su trayectoria newtoniana inicialmente estimada. La persistencia de estos *encuentros*, a lo largo del tiempo (durante intervalos del orden de la edad del sistema), determinará la importancia de las contribuciones relativistas.

De acuerdo con (4.11), (4.12) y (4.13), la dinámica microscópica del sistema autogravitante en cuestión está descrita por las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\dot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{v}_j, \quad \dot{\mathbf{v}}_j = \sum_{n \neq j} (\mathbf{g}_{jn} + \mathbf{\Lambda}_{jn}) + \sum_{n \neq j} \sum_{k \neq j, n} \mathbf{\Upsilon}_{jnk}, \quad j = 1, \dots, N \quad (4.14)$$

en donde

$$\mathbf{g}_{jn} = -Gm \frac{\mathbf{r}_{jn}}{r_{jn}^3}, \quad \mathbf{r}_{jn} \equiv \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_n, \quad r_{jn} = |\mathbf{r}_{jn}|. \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_{jn} = & \frac{Gm}{c^2} \left\{ \frac{\mathbf{r}_{jn}}{r_{jn}^3} \left[\frac{3}{2} \left(\mathbf{v}_n \cdot \frac{\mathbf{r}_{jn}}{r_{jn}} \right)^2 - v_j^2 - 2v_n^2 + 4\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_n + 4 \frac{Gm}{r_{jn}} \right] \right. \\ & \left. + (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_n)(4\mathbf{v}_j - 3\mathbf{v}_n) \cdot \frac{\mathbf{r}_{jn}}{r_{jn}^3} \right\}, \quad (4.16) \end{aligned}$$

$$\mathbf{\Upsilon}_{jnk} = \frac{G^2 m^2}{2c^2 r_{jn}} \left[8 \frac{\mathbf{r}_{jk}}{r_{jk}^3} - 7 \frac{\mathbf{r}_{nk}}{r_{nk}^3} + 2 \frac{\mathbf{r}_{jn}}{r_{nk} r_{jn}^2} - \frac{\mathbf{r}_{jn}}{r_{jn}^2} \frac{\mathbf{r}_{nk} \cdot \mathbf{r}_{jn}}{r_{nk}^3} \right]. \quad (4.17)$$

Nótese el carácter ternario de la interacción $\mathbf{\Upsilon}$. Esto generará, en la descripción estadística, un cambio sustancial en las ecuaciones de evolución de las funciones de distribución reducidas. A propósito, dichas entidades, fundamentales en la formulación de la jerarquía BBGKY⁵ post-newtoniana, serán el objeto de la siguiente subsección.

⁵La jerarquía BBGKY es una secuencia de ecuaciones mediante las cuales se encuentran relacionadas todas las funciones de distribución reducidas f_s . En el caso newtoniano f_1 se encuentra determinada por f_2 , f_2 está determinada por f_3 , y así sucesivamente [11].

4.1.2. Las Funciones de Distribución Reducidas

En la descripción estadística del problema de muchos cuerpos, la función de distribución de N partículas es la entidad que, por excelencia, codifica el estado del sistema en su totalidad,

$$F(w_1, \dots, w_N, t),$$

y constituye una medida de la densidad de probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado $(w_1, \dots, w_N)$, en el instante t (de aquí en adelante se usará la notación $w_j \equiv (\mathbf{x}_j, \mathbf{v}_j)$, y también $dw_j \equiv d^3\mathbf{x}_j d^3\mathbf{v}_j$). Por lo general, se exige que F esté normalizada:

$$\int dw_1 \cdots dw_N F(w_1, \dots, w_N, t) = 1. \quad (4.18)$$

Junto con F , también se definen las llamadas funciones de distribución reducidas [6]:

$$f_s(w_1, \dots, w_s, t) = \frac{N!}{(N-s)!} \int dw_{s+1} \cdots dw_N F(w_1, \dots, w_N, t), \quad s = 1, \dots, N, \quad (4.19)$$

que constituyen una medida de la densidad de probabilidad de que s partículas (arbitrarias) tengan coordenadas de fase $w_1, \dots, w_s$ en el instante t . Se acostumbra expresar a las f_s a través de la denominada expansión cluster [6, 112]:

$$f_2(w_1, w_2) = f_1(w_1)f_1(w_2) + g_2(w_1, w_2), \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} f_3(w_1, w_2, w_3) &= f_1(w_1)f_1(w_2)f_1(w_3) + f_1(w_1)g_2(w_2, w_3) \\ &\quad + f_1(w_2)g_2(w_1, w_3) + f_1(w_3)g_2(w_1, w_2) + g_3(w_1, w_2, w_3), \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (4.21)$$

A las $g_s(w_1, \dots, w_s)$ se les denomina *funciones de correlación de s -partículas*, y representan el grado de dependencia estadística entre cuerpos. Es natural pensar que dicha dependencia estadística es provocada por las interacciones, las cuales, con el transcurso del tiempo, conducen al sistema través de diversas configuraciones o *estados de correlación*. Para comprender cómo se lleva a cabo la secuencia entre estados de correlación, es necesario emprender un estudio de la *dinámica de las correlaciones* [6]. Para ello, comenzaremos enunciando el problema de cómo formular una jerarquía BBGKY post-newtoniana.

4.1.3. Jerarquía BBGKY en la aproximación 1PN

El punto de partida para la deducción de la secuencia BBGKY es la ecuación de Liouville [6, 11],

$$\partial_t F + \sum_{j=1}^N \{ \nabla_j \cdot (F \dot{\mathbf{x}}_j) + \partial_j \cdot (F \dot{\mathbf{v}}_j) \} = 0, \quad (4.22)$$

en donde $\nabla_j \equiv \partial/\partial \mathbf{x}_j$ y $\partial_j \equiv \partial/\partial \mathbf{v}_j$ son los gradientes de posición y velocidad de la j -ésima partícula. La ecuación anterior es la expresión del conocido teorema de Liouville: *como consecuencia del carácter determinista de las ecuaciones de movimiento, el número de microestados de un conjunto de Gibbs dado, debe conservarse a través del tiempo* [6, 112]. De manera que si $F(w_1, \dots, w_N, t)$ es la densidad de microestados, debe satisfacer la ecuación de continuidad (4.22). En dicha ecuación deben introducirse las ecuaciones de movimiento en la aproximación 1PN

$$\dot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{v}_j, \quad \dot{\mathbf{v}}_j = \sum_{n \neq j} (\mathbf{g}_{[jn]} + \mathbf{\Lambda}_{jn}) + \sum_{n \neq j} \sum_{k \neq j, n} \mathbf{\Upsilon}_{jnk}, \quad j = 1, \dots, N \quad (4.23)$$

en donde

$$\mathbf{g}_{[jn]} = -Gm \frac{\mathbf{r}_{jn}}{r_{jn}^3}, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_{jn} = & \frac{Gm}{c^2} \left\{ \frac{\mathbf{r}_{jn}}{r_{jn}^3} \left[\frac{3}{2} \left(\mathbf{v}_n \cdot \frac{\mathbf{r}_{jn}}{r_{jn}} \right)^2 - v_j^2 - 2v_n^2 + 4\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_n + 4 \frac{Gm}{r_{jn}} \right] \right. \\ & \left. + (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_n)(4\mathbf{v}_j - 3\mathbf{v}_n) \cdot \frac{\mathbf{r}_{jn}}{r_{jn}^3} \right\}, \quad (4.25) \end{aligned}$$

$$\mathbf{\Upsilon}_{jnk} = \frac{G^2 m^2}{2c^2 r_{jn}} \left[8 \frac{\mathbf{r}_{jk}}{r_{jk}^3} - 7 \frac{\mathbf{r}_{nk}}{r_{nk}^3} + 2 \frac{\mathbf{r}_{jn}}{r_{nk} r_{jn}^2} - \frac{\mathbf{r}_{jn}}{r_{jn}^2} \frac{\mathbf{r}_{nk} \cdot \mathbf{r}_{jn}}{r_{nk}^3} \right]. \quad (4.26)$$

En las expresiones anteriores se ha empleado la notación

$$\mathbf{r}_{jn} \equiv \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_n, \quad r_{jn} = |\mathbf{r}_{jn}|. \quad (4.27)$$

Como se verá más adelante, es conveniente mostrar explícitamente las propiedades de simetría (con respecto al intercambio de partículas) que exhiben los términos de interacción $\mathbf{g}_{[jn]}$, $\mathbf{\Lambda}_{jn}$ y $\mathbf{\Upsilon}_{jnk}$. De (4.24), se observa que $\mathbf{g}_{[jn]}$ es *antisimétrico* (en adelante el símbolo $[jn]$ denotará antisimetría con respecto a j, n ; es decir, que el término en cuestión cambia de signo cuando las j -ésima y n -ésima partículas

son intercambiadas). De forma similar, (jn) denotará simetría con respecto al intercambio $j \leftrightarrow n$, mientras que Λ_{jn} y Υ_{jnk} , según (4.25) y (4.26) no muestran explícitamente ninguna propiedad de simetría. Sin embargo, si se definen

$$\Lambda_{(jn)} = \frac{1}{2}[\Lambda_{jn} + \Lambda_{nj}], \quad \Lambda_{[jn]} = \frac{1}{2}[\Lambda_{jn} - \Lambda_{nj}], \quad (4.28)$$

como la parte simétrica y antisimétrica de Λ_{jn} , y, similarmente

$$\Upsilon_{(jn)k} = \frac{1}{2}[\Upsilon_{jnk} + \Upsilon_{nj k}], \quad \Upsilon_{[jn]k} = \frac{1}{2}[\Upsilon_{jnk} - \Upsilon_{nj k}], \quad (4.29)$$

como la parte simétrica y antisimétrica de Υ_{jnk} , entonces

$$\Lambda_{jn} = \Lambda_{(jn)} + \Lambda_{[jn]}, \quad \Upsilon_{jnk} = \Upsilon_{(jn)k} + \Upsilon_{[jn]k}. \quad (4.30)$$

Introduciendo ahora (4.24) y (4.30) en (4.23), combinando este resultado con (4.22), y usando las identidades

$$\sum_{j=1}^N \sum_{n \neq j} B_{(jn)} A_j = \sum_{j < n} \sum_{=1}^N B_{(jn)} (A_j + A_n), \quad (4.31)$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{n \neq j} B_{[jn]} A_j = \sum_{j < n} \sum_{=1}^N B_{[jn]} (A_j - A_n), \quad (4.32)$$

se obtiene la siguiente forma para la ecuación de Liouville:

$$\partial_t F = \sum_{j=1}^N L_j^0 F + \sum_{j < n} \sum_{=1}^N [L_{jn}^{g\Lambda} + L_{jnk}^{\Upsilon}] F, \quad (4.33)$$

en donde se ha definido

$$L_j^0 = -\mathbf{v}_j \cdot \nabla_j, \quad (4.34)$$

$$L_{jn}^{g\Lambda} = \{\mathbf{g}_{[jn]} - \Lambda_{[jn]}\} \cdot \partial_{jn} - \{\Lambda_{(jn)} \cdot D_{jn} + 23(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_n) \cdot \mathbf{g}_{[jn]}\}, \quad (4.35)$$

$$L_{jnk}^{\Upsilon} = -\Upsilon_{(jn)k} \cdot D_{jn} - \Upsilon_{[jn]k} \cdot \partial_{jn}. \quad (4.36)$$

En estas ecuaciones se ha empleado la notación

$$\partial_{jn} \equiv \partial_j - \partial_n, \quad D_{jn} \equiv \partial_j + \partial_n. \quad (4.37)$$

Nótese que, de acuerdo con (4.35) y (4.36), $L_{jn}^{g\Lambda}$ y L_{jnk}^{Υ} son simétricos con respecto a j, n .

En este punto, ya es posible obtener una expresión para la jerarquía BBGKY. Se asumirá, primero que todo, que F es simétrica con respecto a cualquier intercambio $w_j \leftrightarrow w_n$. Esta suposición está basada en el hecho de que el sistema en consideración se compone de partículas idénticas [6, 11]. También se asumirá que F se anula en las fronteras del espacio de fase. Esto implica, a la luz del teorema de Gauss que

$$\int d^3\mathbf{x} \nabla F = \int d^3\mathbf{v} \partial F = 0.$$

Puede verificarse que, de acuerdo con estas condiciones, se cumple que

$$\int dw_j L_j^0 F = \int dw_j dw_j L_{jn}^{g\Lambda} F = \int dw_j dw_j L_{jnk}^{\Upsilon} F = 0.$$

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, combinando (4.19) con (4.33), después de efectuar los correspondientes cálculos, se obtiene la siguiente expresión para la jerarquía BBGKY:

$$\begin{aligned} \partial_t f_s &= \sum_{j=1}^s L_j^0 f_s + \sum_{j < n} \sum_{=1}^s \left(L_{jn}^{g\Lambda} + \sum_{\substack{k \leq s \\ k \neq j, n}} L_{jnk}^{\Upsilon} \right) f_s \\ &+ \int dw_{s+1} \left(\sum_{j=1}^s L_{j(s+1)}^{g\Lambda} + \sum_{j < n} \sum_{=1}^s L_{jn(s+1)}^{\Upsilon} + \sum_{j=1}^s \sum_{\substack{k \leq s \\ k \neq j}} L_{j(s+1)k}^{\Upsilon} \right) f_{s+1} \\ &+ \sum_{j=1}^s \int dw_{s+1} dw_{s+2} L_{j(s+1)(s+2)}^{\Upsilon} f_{s+2}, \quad s = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Se observa que en el caso de los sistemas autogravitantes post-Newtonianos (en la aproximación 1PN), esta secuencia presenta una diferencia crucial con la jerarquía correspondiente al caso puramente Newtoniano (y en general, con cualquier sistema regido por interacciones binarias). En este último, la razón de cambio de f_s depende sólo de f_s y f_{s+1} [11].

4.1.4. Ecuación de Liouville Generalizada y Dinámica de Correlaciones

Ya señalamos antes que, las f_s pueden expresarse como una combinación lineal de *patrones de correlación*. Esto se expresa, de forma general, como [6]

$$f_s(w_1, \dots, w_s) = \sum_{\Omega_s} |1 \cdots s| \Omega_s, \quad (4.39)$$

en donde el símbolo Ω_s representa las siguientes situaciones:

$$\Omega_s = \begin{cases} 0 & \text{(Correlación nula)} \\ C & \text{(Correlación total)} \\ 1, 2, \dots, s, 12, 13, \dots, 123, 124, \dots, 123 \dots (s-2) & \text{(Correlación parcial)} \end{cases}$$

Los patrones con $\Omega = 0$ corresponden a términos completamente separables (no dependen de las funciones de correlación). Ellos denotan *estados de vacío* (la palabra *vacío* en este contexto significa ausencia de correlaciones o independencia estadística). Los patrones con $\Omega = C$ son términos no separables con respecto a todas las coordenadas de fase involucradas. Ellos denotan *estados de correlación total*. Por último, los patrones con $\Omega = 1, 2, \dots, s, \dots$ corresponden a términos parcialmente separables y denotan *estados de correlación parcial*.

Las primeras cuatro distribuciones reducidas, usando la notación empleada en (4.39), tienen la siguiente representación (obsérvese la correspondencia con (4.20) y (4.21)):

$$f_1(w_1) = |1|0\rangle \quad (4.40)$$

$$f_2(w_1, w_2) = |12|0\rangle + |12|C\rangle \quad (4.41)$$

$$f_3(w_1, w_2, w_3) = |123|0\rangle + |123|1\rangle + |123|2\rangle + |123|3\rangle + |123|C\rangle \quad (4.42)$$

$$f_4(w_1, w_2, w_3, w_4) = |1234|0\rangle + |1234|1\rangle + \dots + |1234|12\rangle + \dots + |1234|C\rangle \quad (4.43)$$

La representación de las f_s en términos de patrones de correlación, constituye la antesala para la definición de una entidad fundamental en la mecánica estadística del no equilibrio. Se trata del *vector de distribución* $\mathbf{f}(t)$, cuyas componentes son el conjunto de todos los patrones de correlación [6] :

$$\mathbf{f}(t) = \{|1 \dots s|\Omega_s\rangle\}, \quad s = 1, \dots, N. \quad (4.44)$$

A través de esta consideración, el sistema (4.38) puede representarse como [6]

$$\partial_t |\{s\}|\Omega_s\rangle = \sum_{r=1}^N \sum_{\Omega'_r} \langle \Omega_s |\{s\}|\mathcal{L}^0 + \mathcal{L}^{g\Lambda} + \mathcal{L}^{\Upsilon} |\{r\}|\Omega'_r\rangle \quad |\{r\}|\Omega'_r\rangle, \quad (4.45)$$

en donde, empleando la notación de Dirac, se han introducido las definiciones

$$\langle \Omega_s |\{s\}|\mathcal{L}^0 |\{r\}|\Omega'_r\rangle = \delta_{sr} \delta_{\Omega_s \Omega'_r} \sum_{j=1}^s L_j^0, \quad 1 \leq s \leq N, \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}
\langle \Omega_s | \{s\} | \mathcal{L}^{g\Lambda} | \{r\} | \Omega'_r \rangle &= \delta_{sr} \delta_{\Omega_s \Omega'_r} \sum_{j < n} \sum_{=1}^s L_{jn}^{g\Lambda} \\
&+ \delta_{(s+1)r} \delta_{\Omega_{s+1} \Omega'_r} \int dw_{s+1} \sum_{j=1}^s L_{j(s+1)}^{g\Lambda}, \quad 1 < s \leq N-1,
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Omega_s | \{s\} | \mathcal{L}^\Upsilon | \{r\} | \Omega'_r \rangle &= \delta_{sr} \delta_{\Omega_s \Omega'_r} \sum_{j < n} \sum_{=1}^s \sum_{\substack{k \leq s \\ k \neq j, n}} L_{jnk}^\Upsilon \\
&+ \delta_{(s+1)r} \delta_{\Omega_{s+1} \Omega'_r} \int dw_{s+1} \left\{ \sum_{j < n} \sum_{=1}^s L_{jn(s+1)}^\Upsilon + \sum_{j=1}^s \sum_{\substack{k \leq s \\ k \neq j}} L_{j(s+1)k}^\Upsilon \right\} \\
&+ \delta_{(s+2)r} \delta_{\Omega_{s+2} \Omega'_r} \sum_{j=1}^s \int dw_{s+1} dw_{s+2} L_{j(s+1)(s+2)}^\Upsilon, \quad 2 < s \leq N-2
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Omega_2 | 12 | \mathcal{L}^\Upsilon | \{r\} | \Omega'_r \rangle &= \delta_{r3} \delta_{\Omega'_r \Omega'_3} \int dw_3 (L_{123}^\Upsilon + L_{132}^\Upsilon + L_{231}^\Upsilon) \\
&+ \delta_{r4} \delta_{\Omega'_r \Omega'_4} \int dw_3 dw_4 (L_{134}^\Upsilon + L_{234}^\Upsilon),
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\langle 0 | 1 | \mathcal{L}^{g\Lambda} | \{r\} | \Omega'_r \rangle = \delta_{r2} \delta_{\Omega'_r 0} \int dw_2 L_{12}^{g\Lambda}, \quad \langle 0 | 1 | \mathcal{L}^\Upsilon | \{r\} | \Omega'_r \rangle = \delta_{r3} \delta_{\Omega'_r 0} \int dw_2 dw_3 L_{123}^\Upsilon. \tag{4.50}$$

Las ecuaciones (4.46)-(4.50) definen la representación matricial de los operadores $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^{g\Lambda}$ y $\mathcal{L}^\Upsilon$. Ellos conforman lo que se denomina el *operador de Liouville generalizado* $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 + \mathcal{L}^{g\Lambda} + \mathcal{L}^\Upsilon, \tag{4.51}$$

y por esta razón, la expresión (4.45), que también puede ser escrita como

$$\partial_t \mathbf{f}(t) = \mathcal{L} \mathbf{f}(t), \tag{4.52}$$

es llamada la *ecuación de Liouville generalizada*. Nótese que $\mathcal{L}^0$ no genera transiciones entre estados de correlación, mientras que $\mathcal{L}^{g\Lambda}$ y $\mathcal{L}^\Upsilon$ sí lo hacen. El primero produce transiciones entre estados Ω_s y Ω_{s+1} , y el segundo entre estados Ω_s , Ω_{s+1} y Ω_{s+2} . Por ello se dice que la ecuación (4.45), que expresa la razón de cambio de cada estado en términos de estas transiciones, describe la dinámica de correlaciones del sistema.

4.1.5. Sobre la Obtención de una Ecuación Cinética

La representación (4.44) posee una propiedad fundamental. El conjunto $\{|1 \cdots s| \Omega_s\rangle\}$ consta de dos subconjuntos: (i) El subconjunto de todos los estados de vacío ($\Omega = 0$); (ii) El subconjunto de todos los estados de correlación (total y parcial), correspondientes a $\Omega = 1, 2, \dots, s, \dots, C$. En otras palabras, el vector de distribución puede ser expresado como la suma de una componente de vacío, que será denotada por $V\mathbf{f}(t)$, y otra componente de correlaciones, simbolizada como $C\mathbf{f}(t)$:

$$\mathbf{f}(t) = V\mathbf{f}(t) + C\mathbf{f}(t). \quad (4.53)$$

Esta ecuación sugiere que es conveniente introducir dos operadores de proyección, V y C , en el espacio de los vectores de distribución. El primero proyecta a $\mathbf{f}(t)$ sobre su componente de vacío y el segundo lo proyecta sobre su componente de correlación. Deben obedecer, por tanto, las siguientes propiedades

$$V^2 = V, \quad C^2 = C, \quad VC = CV = 0, \quad V + C = I. \quad (4.54)$$

Es fácil mostrar que, tras introducir (4.53) en (4.52), usando las propiedades (4.54), se obtiene

$$\partial_t V\mathbf{f}(t) = V\mathcal{L}V\mathbf{f}(t) + V\mathcal{L}C\mathbf{f}(t). \quad (4.55)$$

Esta relación expresa el hecho de que la razón de cambio de $V\mathbf{f}(t)$ depende de $V\mathbf{f}(t)$ y $C\mathbf{f}(t)$. Dicha dependencia (en términos de la componente de correlación), hace que (4.55) no se muestre explícitamente como una ecuación de tipo cinético, pues no es cerrada en $V\mathbf{f}(t)$. ¿Cómo mostrar que, a partir de la ecuación de Liouville, puede deducirse una ecuación cinética que describa la evolución irreversible de un sistema dinámico?

Hacia la década de los 70's, la escuela de Bruselas propuso una alternativa para este problema, la cual consiste en asumir que

1. El vector de distribución se expresa como la suma de una *componente cinética*, $\bar{\mathbf{f}}(t)$, y una *componente no cinética*, $\hat{\mathbf{f}}(t)$:

$$\mathbf{f}(t) = \bar{\mathbf{f}}(t) + \hat{\mathbf{f}}(t). \quad (4.56)$$

2. Cada una estas componentes evolucionan independientemente, obedeciendo su propia *subdinámica*:

$$\partial_t \bar{\mathbf{f}}(t) = \mathcal{L}\bar{\mathbf{f}}(t), \quad \partial_t \hat{\mathbf{f}}(t) = \mathcal{L}\hat{\mathbf{f}}(t). \quad (4.57)$$

Las suposiciones anteriores sugieren la definición de dos nuevos operadores de proyección cinética y no cinética, los cuales deben satisfacer ciertas condiciones especiales [6]. Al efectuar el proceso de construcción de dichos operadores (los detalles de este tratamiento, que por cierto es bastante extenso, pueden consultarse en [6]), se encuentra que es posible obtener una relación de la forma

$$\partial_t V \bar{\mathbf{f}}(t) = V \mathcal{L} V \bar{\mathbf{f}}(t) + V \mathcal{Q} V \bar{\mathbf{f}}(t). \quad (4.58)$$

en donde $\mathcal{Q}$ es un operador independiente del tiempo, cuya forma explícita se mostrará en 4.1.5. Esta última expresión, que es una ecuación cerrada para $V \bar{\mathbf{f}}(t)$, es denominada la *ecuación cinética general*.

La aplicación de este enfoque depende de si es posible o no construir los operadores de proyección cinética y no cinética. Ello, evidentemente, depende de la naturaleza del sistema dinámico en cuestión. Se sabe que para el caso de los gases débilmente acoplados y plasmas, es aplicable el anterior formalismo. También se sabe que, por ejemplo, para un sistema compuesto por tres partículas que interactúan por medio de fuerzas centrales, no es aplicable (dicho sistema no alcanza un estado de equilibrio). Surge entonces una cuestión fundamental: *¿Es posible obtener una ecuación cinética para los sistemas autogravitantes?* Una primera aproximación a la respuesta de este interrogante, descansa en el terreno de la fenomenología y en un examen de los trabajos precedentes en el campo de la teoría cinética.

A través de un enfoque alternativo, basado en procesos estocásticos, Rosenbluth-MacDonald-Judd [120], Chandrasekar [26, 27], Kandrup [?], entre otros, han mostrado que la evolución de los sistemas autogravitantes puede describirse por medio de la ecuación cinética de Fokker-Planck [11]. Su deducción (en particular, la simplificación del término de colisiones) está basada en la preponderancia de los encuentros débiles: *la mayor parte de la dispersión de partículas, en el espacio de fase, es debida a procesos en los cuales el cambio fraccionario en la velocidad es pequeño ($\delta v/v \ll 1$)* [26, 11]. Por otra parte, la ecuación de Fokker-Planck puede considerarse como un caso especial de la ecuación cinética de un gas débilmente acoplado (GDA). Se sabe que dicha expresión, en el límite hidrodinámico se reduce a la ecuación de Landau, la cual contiene como caso especial a Fokker-Planck [6]. Estas coincidencias sugieren que, en una primera aproximación, *debido a la preponderancia de los encuentros débiles en la evolución de un sistema autogravitante de muchas partículas, su descripción cinética es equivalente a la de un gas débilmente acoplado*.

La Aproximación GDA

Considerar que el sistema se comporta como un GDA (Gas Débilmente Acoplado) consiste en asumir que $\mathcal{L}^{g\Lambda} + \mathcal{L}^{\Upsilon}$ genera sobre la evolución una contribución pequeña frente a la generada por $\mathcal{L}^0$. Esto puede ser cuantificado a través de un pequeño parámetro adimensional λ de la siguiente forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 + \lambda \mathcal{L}', \quad \mathcal{L}' = \mathcal{L}^{g\Lambda} + \mathcal{L}^{\Upsilon}, \quad 0 < \lambda \ll 1. \quad (4.59)$$

Después de emplear los métodos de la teoría de perturbaciones, en las expresiones finales puede hacerse $\lambda = 1$. Su función es de carácter práctico y no introduce ninguna implicación física adicional. Es tan sólo una forma de cuantificar la preponderancia de los encuentros débiles en la evolución de los sistemas autogravitantes.

Al introducir (4.45) en la componente cinética de (4.52), aplicando luego el proyector V (usando (4.53), (4.54) y teniendo en cuenta que V y C conmutan con $\mathcal{L}^0$ [6]), se obtiene

$$\partial_t V \bar{\mathbf{f}}(t) = \mathcal{L}^0 V \bar{\mathbf{f}}(t) + \lambda V \mathcal{L}' V \bar{\mathbf{f}}(t) + \lambda V \mathcal{L}' C \bar{\mathbf{f}}(t). \quad (4.60)$$

Como se señaló anteriormente, es posible encontrar la relación entre $C \bar{\mathbf{f}}(t)$ y $V \bar{\mathbf{f}}(t)$ a través de una ecuación de la forma (4.58). El procedimiento para lograr esto, que por cierto es bastante extenso, se encuentra detalladamente en [6]. En dicha referencia se deduce la siguiente expresión

$$\lambda V \mathcal{L}' C \bar{\mathbf{f}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} V \Delta_n V \bar{\mathbf{f}}(t), \quad (4.61)$$

en donde el operador $V \Delta_n V$ está dado por

$$\begin{aligned} V \Delta_n V &= \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_4 \cdots \int_0^\infty d\tau_{2n} \int_0^{\tau_1 - \tau_2} d\tau_3 \int_0^{\tau_3 - \tau_4} d\tau_5 \cdots \int_0^{\tau_{2n-3} - \tau_{2n-2}} d\tau_{2n-1} \\ &\times V \mathcal{G}(\tau_2) V \tilde{\mathcal{U}}(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3) V \mathcal{G}(\tau_4) V \tilde{\mathcal{U}}(\tau_3 - \tau_4 - \tau_5) V \mathcal{G}(\tau_6) V \\ &\times \cdots V \tilde{\mathcal{U}}(\tau_{2n-3} - \tau_{2n-2} - \tau_{2n-1}) V \mathcal{G}(\tau_{2n}) V \tilde{\mathcal{U}}(\tau_{2n-1} - \tau_{2n} - \tau_{2n+1}) V. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Aquí aparece el llamado *propagador de Vlasov*,

$$V \tilde{\mathcal{U}}(\tau) V = V \exp \{ \tau V (\mathcal{L}^0 + \lambda \mathcal{L}') V \}, \quad (4.63)$$

y el operador $\mathcal{G}(\tau)$, dado por

$$\mathcal{G}(\tau) = (2\pi)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{m+2} \int_C dz \exp(-iz\tau) \mathcal{L}' \{C\mathcal{R}^0(z)\mathcal{L}'\}^m \mathcal{R}^0(z) C\mathcal{L}', \quad (4.64)$$

en términos del llamado *operador resolvente*,

$$\mathcal{R}^0(z) = -(\mathcal{L}^0 + iz)^{-1}. \quad (4.65)$$

Introduciendo (4.61) en (4.60), se obtiene

$$\partial_t V\bar{\mathbf{f}}(t) = V(\mathcal{L}^0 + \lambda\mathcal{L}')V\bar{\mathbf{f}}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} V\Delta_n V\bar{\mathbf{f}}(t). \quad (4.66)$$

En la serie que aparece en el lado derecho se tomarán los términos de hasta segundo orden (λ^2). Según (4.63), λ^0 corresponde al término de más bajo orden para el propagador de Vlasov y, de acuerdo con (4.64), la serie de $\mathcal{G}$ comienza con un término λ^2 . Esto significa que $n = 0$, en (4.61), el primer término de la serie del operador cinético, es por lo menos de segundo orden. Por tanto, en esta aproximación, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} V\Delta_n V \approx V\Delta_0^{[2]} V. \quad (4.67)$$

Usando algunas relaciones del formalismo presentado en [6], se obtiene que

$$V\Delta_0^{[2]} V = \lambda^2 \int_0^{\infty} d\tau V\mathcal{L}' C\mathcal{U}^0(\tau) \mathcal{L}' \mathcal{U}^0(-\tau) V, \quad (4.68)$$

en donde

$$\mathcal{U}^0(\tau) = \exp(\tau\mathcal{L}^0). \quad (4.69)$$

Así, (4.61) adopta la forma

$$\partial_t V\bar{\mathbf{f}}(t) = \mathcal{L}^0 V\bar{\mathbf{f}}(t) + \lambda V\mathcal{L}' V\bar{\mathbf{f}}(t) + \lambda^2 \int_0^{\infty} d\tau V\mathcal{L}' C\mathcal{U}^0(\tau) \mathcal{L}' \mathcal{U}^0(-\tau) V\bar{\mathbf{f}}(t). \quad (4.70)$$

Esta es la ecuación cinética general de segundo orden para un GDA. La integral que aparece en el lado derecho corresponde al término de colisiones, el cual contiene términos en c^0 , c^{-2} y c^{-4} . Los términos con c^{-4} tendrán que ser despreciados, a fin de obtener una ecuación cinética consistente con la aproximación 1PN.

Con el objetivo de mostrar cómo reducir (4.70) a la forma de una ecuación cinética estándar, se tomará, por simplicidad, el caso puramente Newtoniano. Esto corresponderá a hacer

$$\mathcal{L}^{g\Lambda} \rightarrow \mathcal{L}^g, \quad \mathcal{L}^{\Upsilon} \rightarrow 0,$$

en todas las expresiones anteriores. Ahora, se escribirá (4.70) para la primera componente de $V\bar{f}(t)$, es decir, $|1\rangle|0\rangle$. Para esto es necesario tener una expresión para las componentes $\langle 0|1| - |\{r\}\rangle|\Omega'_r\rangle$ de cada operador involucrado allí. De acuerdo con (4.46)-(4.50) (despreciando términos en c^{-2}), se tiene que

$$\langle 0|1|V\mathcal{L}^0V|\{r\}\rangle|\Omega'_r\rangle = \delta_{r1}L_1^0, \quad (4.71)$$

$$\langle 0|1|V\mathcal{L}^gV|\{r\}\rangle|\Omega'_r\rangle = \delta_{r2} \int dw_2 L_{12}^g, \quad (4.72)$$

$$\langle 0|1|V\mathcal{L}^gCU^0(\tau)\mathcal{L}^gU^0(-\tau)V|\{r\}\rangle|\Omega'_r\rangle = \delta_{r2} \int dw_2 L_{12}^g U_{12}^0(\tau) L_{12}^g U_{12}^0(-\tau), \quad (4.73)$$

en donde

$$U_{12}^0(\tau) = \exp(\tau L_{12}^g) \quad (4.74)$$

Recordando que $|1\rangle|0\rangle = f_1(w_1, t)$, tras la introducción de (4.71)-(4.73) en (4.70), se obtiene (tomando ya $\lambda = 1$)

$$\begin{aligned} \partial_t f_1(w_1, t) &= L_1^0 f_1(w_1, t) + \int dw_2 L_{12}^g f_1(w_1, t) f_1(w_2, t) \\ &+ \int_0^\infty d\tau \int dw_2 L_{12}^g U_{12}^0(\tau) L_{12}^g U_{12}^0(-\tau) f_1(w_1, t) f_1(w_2, t) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Después de efectuar algunos cálculos, se puede mostrar que esta expresión adquiere la forma [6]

$$\begin{aligned} \partial_t f_1(w_1, t) &= -\mathbf{v}_1 \cdot \nabla_1 f_1(w_1, t) - \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_1, t) \cdot \partial_1 f_1(w_1, t) \\ &+ \int dw_2 \int_0^\infty d\tau \partial_{12} \cdot \{ \nabla_1 \phi_{12} \nabla_1 \tilde{\phi}_{12} \} \cdot (\partial_{12} + \tau \nabla_{12}) f_1(w_1, t) f_1(w_2, t), \end{aligned} \quad (4.76)$$

en donde

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_1, t) = -Gm \int dw_2 f_1(w_2, t) \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad (4.77)$$

es el campo gravitacional Newtoniano medio, y

$$\tilde{\phi}_{12} = -\frac{Gm}{|\mathbf{r}_{12} - \mathbf{v}_{12}\tau|}, \quad \mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2. \quad (4.78)$$

La expresión (4.76) se muestra explícitamente como una ecuación cinética. Al comparar dicha expresión con el límite newtoniano de (4.128), se puede establecer que la función de correlación de dos partículas debe tener la siguiente forma (la siguiente relación también puede ser deducida a partir de (4.60) [6]):

$$g_2(w_1, w_2, t) = \int_0^\infty d\tau \nabla_1 \tilde{\phi}_{12} \cdot (\partial_{12} + \tau \nabla_{12}) f_1(w_1, t) f_1(w_2, t). \quad (4.79)$$

Esto proporciona una alternativa para simplificar el problema de la obtención de una ecuación cinética para sistemas estelares: al asumir $g_3 = 0$ y que la dependencia estadística entre partículas es debida principalmente a la interacción Newtoniana, entonces *la evolución del sistema autogravitante está descrita por (4.76) y (4.79)*. Precisamente, en la siguiente sección miraremos este problema con más detalle, aunque empleando un enfoque distinto y menos intrincado.

4.2. TEORÍA CINÉTICA POS-NEWTONIANA

Presentaremos dos formulaciones para ecuaciones cinéticas tipo Fokker-Planck-Rosenbluth (FPR) en la aproximación 1PN [113]. La primera formulación parte de la ecuación de Fokker-Planck covariante para un gas simple, introducida recientemente por Chacón-Acosta y Kremer [25]. La segunda formulación se apoya en el establecimiento de una jerarquía BBGKY post-newtoniana, desarrollada sistemáticamente partiendo de las ecuaciones 1PN y usando el método de Klimontovich-Dupree (KD) [82, 40]. Cerraremos la jerarquía mediante la introducción de una función de correlación de dos partículas que describa adecuadamente el proceso de relajación. Este esquema revela un aspecto que no es considerado en la primera formulación: la contribución de las correlaciones ternarias en los coeficientes de difusión, como consecuencia de la naturaleza ternaria de la interacción 1PN. Ambas formulaciones pueden ser consideradas como una generalización de la ecuación deducida por Rezanian y Sobouti en 2000 [119], para sistemas estelares en los cuales los efectos relativistas de la gravitación son importantes.

4.2.1. La Ecuación de Fokker-Planck-Rosenbluth

La ecuación de Boltzmann sin colisiones en la aproximación 1PN para un sistema autogravitante, embebido en un espacio-tiempo minkowskiano, fue deducida por Rezanian y Sobouti en 2000 [119], encontrando algunas soluciones relevantes. El propósito de este apartado consiste en ir mas allá del caso colisional e incorporar situaciones en donde los encuentros entre partículas desempeñan un rol significativo, y deducir una ecuación cinética tratable que describa la evolución de esta clase de sistemas autogravitantes.

Es bien sabido que la evolución de los clusters globulares, donde se asume que las correcciones relativistas no son importantes, está descrita satisfactoriamente por la ecuación cinética de Fokker-Planck. En la aproximación local, es posible obtener relaciones explícitas para los coeficientes de difusión, en términos de los potenciales de Rosenbluth, y dicha ecuación adopta una forma bastante tratable [11] (la denominaremos ecuación FPR):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial}{\partial v_i} (A_N^i f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (B_N^{ij} f), \quad (4.80)$$

en donde hemos empleado la convención de suma $(i, j = 1, 2, 3)$. Aquí, A_N^i y B_N^{ij}

son los coeficientes de difusión o coeficientes de Rosenbluth (el subíndice N remarca el hecho de que estamos tratando con la teoría newtoniana). Dicha ecuación describe la evolución de funciones de distribución $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ de una partícula de prueba, que se mueve a través de un mar homogéneo de estrellas campo. Ellas están descritas por una función de distribución estática e independiente de la posición, $\Psi(\mathbf{v})$, que determina D^i y D^{ij} . Si cada estrella campo tiene la misma masa m que la estrella de prueba, los coeficientes de Rosenbluth toman la forma [11, 120]

$$A_N^i = 8\pi G^2 m^2 \ln \Lambda \frac{\partial}{\partial v_i} \int d^3 \mathbf{v}' \frac{\Psi(\mathbf{v}')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}, \quad (4.81)$$

$$B_N^{ij} = 4\pi G^2 m^2 \ln \Lambda \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \int d^3 \mathbf{v}' \Psi(\mathbf{v}') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|, \quad (4.82)$$

donde $\ln \Lambda$ es el logaritmo de Coulomb y G la constante gravitacional. Como es sabido, la obtención de (4.81)-(4.82) requiere de tres hechos fundamentales: (i) Asumir que los encuentros binarios dominan el proceso de relajación del sistema [26, 27]; (ii) asumir que todos estos encuentros son locales (esto es, con parámetros de impacto mucho menores que el tamaño del sistema); (iii) un conocimiento detallado de la dinámica microscópica de dos cuerpos.

Tal vez, una forma natural de obtener una versión 1PN de (4.80), es comenzando por la ecuación covariante de Fokker-Planck y luego efectuar su aproximación post-newtoniana. Actualmente, podemos encontrar diferentes versiones de este tipo de ecuaciones cinéticas, como la obtenida por Kandrup [78, 79, 80], basada en un punto de vista estocástico (esto es, partiendo de una ecuación master covariante). Un esquema más fundamental ha sido introducido recientemente por Chacón-Acosta y Kremer [25], quienes derivaron una ecuación de Fokker-Planck para un gas simple en presencia de un campo gravitacional, comenzando desde la ecuación de Boltzmann relativista general. Existen varias razones que nos impulsan a adoptar dicho esquema. Dado que dicha deducción está soportada por la ecuación de Boltzmann, la correspondiente relación de Fokker-Planck es consistente con situaciones donde el sistema evoluciona hacia un estado de equilibrio, caracterizado por la función de distribución de Maxwell-Jüttner [23]. Por otra parte, dicha ecuación es válida para sistemas cuyo proceso de relajación está dominado por encuentros débiles, que es la imagen usual para modelar el comportamiento de sistemas autogravitantes. Además, los coeficientes de difusión que caracterizan la ecuación de Fokker-Planck covariante (ver ecuación (4.83)) están presentes en una forma que facilita la implementación de la aproximación 1PN.

Las limitaciones del esquema anterior pueden ser visualizadas a través de la consideración de un punto de vista aún más fundamental [113], basado en la jerarquía BBGKY[13, 15, 81, 138]. Examinando la dinámica del sistema en el nivel microscópico, podemos observar un aspecto fundamental de la interacción descrita por la aproximación 1PN que no es contemplado cuando se parte de la formulación covariante. Como mostraremos más adelante, la fuerza 1PN ejercida sobre cada partícula tiene una naturaleza ternaria (ver (4.114),(4.117)). Esta característica conduce a la aparición de patrones de correlación de tercer orden en la primera ecuación BBGKY y no todos ellos se anulan después de introducir la suposición de encuentros binarios (ver (4.128), (4.131)), un hecho empleado en la formulación de términos de colisiones tipo Landau [90, 6, 84] o tipo Fokker-Planck.

A pesar de que la aparición de patrones de tercer orden dan origen a un término de colisiones que no se muestra de una forma estándar (ecuación (4.131)), este puede llevarse a una forma FPR escogiendo adecuadamente la función de correlación de dos puntos g_2 y haciendo $g_3 = 0$ [113]. Aquí, dos factores desempeñarán un papel importante: (i) La ecuación FPR clásica puede ser deducida de la primera relación BBGKY, escogiendo una función de correlación correspondiente a un gas débilmente acoplado (GDA) en el régimen hidrodinámico (esto no es un hecho sorprendente, ya que la deducción usual de la ecuación FPR se asume que los encuentros débiles juegan un rol importante en el proceso de relajación); (ii) en la aproximación 1PN la ley de conservación del momento para un sistema de partículas puntuales es el mismo que en teoría newtoniana, y esto se cumple si y sólo si cada partícula obedece la ecuación newtoniana de movimiento [132]. Esto significa que el proceso de dispersión y, en consecuencia, la forma explícita de g_2 en la aproximación 1PN es la misma que en el caso newtoniano. Estas consideraciones nos permiten incorporar la función de correlación de un GDA en el límite hidrodinámico, en la contribución post-newtoniana del término de colisiones, para su posterior simplificación [113].

4.2.2. Deducción a partir de la Ecuación Covariante de Fokker-Planck

Comenzaremos diciendo que la función de distribución $f(x^\mu, p^i)$ de un gas autogravitante de partículas, todas con igual masa en reposo m , satisface la ecuación

covariante de Fokker-Planck[25]:

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma p^\mu p^\nu \frac{\partial f}{\partial p^\sigma} = -\frac{\partial}{\partial p^\mu} (f D^\mu) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^\mu \partial p^\nu} (f D^{\mu\nu}) \quad (4.83)$$

donde $p^\mu = mU^\mu$ es el 4-momento, $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ son los símbolos de Christoffel, $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ son las coordenadas del espacio de configuraciones y D^μ , $D^{\mu\nu}$ son los coeficientes de difusión dados por

$$D^\mu = \int f_* \Delta p_*^\mu F \sigma d\Omega \sqrt{-g} \frac{d^3 p_*}{p_{*0}}, \quad (4.84)$$

$$D^{\mu\nu} = \int f_* \Delta p_*^\mu \Delta p_*^\nu F \sigma d\Omega \sqrt{-g} \frac{d^3 p_*}{p_{*0}}, \quad (4.85)$$

donde $f_* = f(x^\mu, p_*^i)$, $\Delta p_*^\mu = p_*'^\mu - p_*^\mu$, $g = \det(g_{\mu\nu})$, $F = \sqrt{(p_*^\alpha p_\alpha)^2 - m^4 c^4}$ es el flujo invariante, σ es la sección eficaz diferencial y $d\Omega$ es un elemento de ángulo sólido que caracteriza el proceso de dispersión. Las cantidades p^μ y p_*^μ denotan el 4-momento de la estrella de prueba y de las estrellas de campo antes del encuentro, respectivamente, mientras que p'^μ y $p_*'^\mu$ representan sus 4-momentos después del encuentro.

Con el fin de efectuar la aproximación 1PN de (4.83), tenemos que tener en cuenta varios factores importantes. Necesitamos una expansión de (4.83)-(4.85) hasta orden $(\bar{v}/c)^4$, donde $\bar{v}$ es una velocidad newtoniana típica en el sistema. En esta aproximación $g_{\mu\nu}$ está dado en términos de el potencial Newtoniano Φ y los campos post-newtonianos ψ , ξ_i (ver Apéndice B y la referencia [113]) :

$$g_{00} = -1 - 2\Phi/c^2 - 2(\Phi^2 + \psi)/c^4, \quad (4.86)$$

$$g_{0i} = \xi_i/c^3, \quad (4.87)$$

$$g_{ij} = (1 - 2\Phi/c^2)\delta_{ij}. \quad (4.88)$$

(los índices latinos varían de 1 a 3). Por otra parte, la 4-velocidad U^μ está relacionada con la velocidad clásica $v^i = dx^i/dt$ a través de la ecuación

$$U^\mu = U^0 V^\mu, \quad V^\mu = (1, v^i/c), \quad (4.89)$$

estando restringida por la relación

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -c^2. \quad (4.90)$$

Otro hecho importante es que en la aproximación 1PN la ley de conservación del momento para un sistema de partículas puntuales es satisfecha si y sólo si

cada partícula obedece la ecuación newtoniana de movimiento [132]. En otras palabras: deben obedecer la ley de conservación del momento clásica. Inmediatamente observamos dos implicaciones que jugarán un papel fundamental en el cálculo de los coeficientes de difusión. Estos fueron obtenidos en la referencia [25] escogiendo el marco de referencia del centro de masa de las partículas que participan en la colisión. El hecho de que en la aproximación 1PN ellas obedecen la ley clásica de conservación del momento, implica que $\Delta U_*^0 = 0$ y, en consecuencia, $D^0 = D^{00} = 0$. Por otro lado, también en virtud de la ley clásica de conservación del momento, debemos considerar $\sigma d\Omega$ como la sección eficaz newtoniana. estas consideraciones nos permiten escribir (4.83)-(4.85) como

$$\mathcal{L}_U f = -\frac{\partial}{\partial U^i}(f A^i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial U^i \partial U^j}(f B^{ij}) \quad (4.91)$$

donde $\mathcal{L}_U$ es el operador de Liouville, definido como

$$\mathcal{L}_U = U^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^i U^\mu U^\nu \frac{\partial}{\partial U^i} \quad (4.92)$$

y

$$A^i = \int f_* \Delta U_*^i \sqrt{(U_*^\alpha U_\alpha)^2 - c^4} \tilde{\sigma} d\Omega \sqrt{-g} \frac{d^3 U_*}{U_{*0}}, \quad (4.93)$$

$$B^{ij} = \int f_* \Delta U_*^i \Delta U_*^j \sqrt{(U_*^\alpha U_\alpha)^2 - c^4} \tilde{\sigma} d\Omega \sqrt{-g} \frac{d^3 U_*}{U_{*0}}. \quad (4.94)$$

Hemos decidido expresar la ecuación de Fokker-Planck en términos de la 4-velocidad en vez del 4-momento para facilitar la implementación de algunos resultados usados por Rezania y Sobouti en el caso no colisional [119]. Ahora $f(x^\mu, U^i)$ es una densidad de fase en el espacio 6-dimensional (x^i, U^i) y $\tilde{\sigma}$ es la sección eficaz diferencial newtoniana. El lado izquierdo de (4.91) en la aproximación 1PN, puede escribirse como [119]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_U f = & \frac{U^0}{c} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial v^i} - \frac{1}{c^2} \left[(4\Phi + v^2) \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right. \right. \\ & \left. \left. - v^i v^j \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} - v^i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} \right) v^j + \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right] \frac{\partial f}{\partial v^i} \right\}, \end{aligned} \quad (4.95)$$

donde U^0/c , determinado a partir de (4.90), está dado por

$$\frac{U^0}{c} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{\Phi}{c^2}. \quad (4.96)$$

En consecuencia, la ecuación (4.91) puede ponerse en la forma

$$(\mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{PN})f = \lambda \left[-\frac{\partial}{\partial U^i}(fA^i) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial U^i \partial U^j}(fB^{ij}) \right] \quad (4.97)$$

donde $\mathcal{L}_N$ y $\mathcal{L}_{PN}$ son los operadores de Liouville newtoniano y post-newtoniano, dado por

$$\mathcal{L}_N = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial v^i} \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{PN} = & -\frac{1}{c^2} \left[(4\Phi + v^2) \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - v^i v^j \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} - v^i \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} \right) v^j + \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right] \frac{\partial}{\partial v^i}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

y $\lambda = c/U^0$, a orden c^{-2} , equivale a

$$\lambda = 1 - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{\Phi}{c^2}. \quad (4.100)$$

De acuerdo con (4.97), necesitamos una expansión del operador de Fokker-Planck (término entre paréntesis en el lado derecho) a orden c^{-2} . Aquí tenemos que tener en cuenta que $\partial v^i / \partial U^j$ está dada por [119]

$$\frac{\partial v^j}{\partial U^i} = \begin{cases} Q^{-1} v^j (g_{0i} + g_{ik} v^k / c) & \text{para } i \neq k \\ -Q^{-1} [c^3 U^{0-2} + \sum_{k \neq i} v^k (g_{0k} + g_{lk} v^l / c)] & \text{para } i = k \end{cases}$$

donde

$$Q = U^0 (g_{00} + g_{0l} v^l / c). \quad (4.101)$$

Entonces obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial U^i} = \frac{\partial v^j}{\partial U^i} \frac{\partial}{\partial v^j} = \beta \frac{\partial}{\partial v^i} + \frac{1}{c^2} \left(\sum_{k \neq i} v^k v^k \frac{\partial}{\partial v^i} - \sum_{j \neq i} v^i v^j \frac{\partial}{\partial v^j} \right), \quad (4.102)$$

con

$$\beta = 1 - \frac{3v^2}{2c^2} + \frac{\Phi}{c^2}. \quad (4.103)$$

Ahora obtendremos A^i y B^{ij} a orden c^{-2} . Es útil considerar que, en el marco de referencia del centro de masa, $U_*^0 = U^0$, $U_*^i = -U^i$ y, como consecuencia de la condición (4.90), tenemos que $g_{00} = g_{00*}$, $g_{0i} = -g_{0i*}$, $g_{ij} = g_{ij*}$. Esto nos

ayudará a simplificar el cálculo de cantidades como $\Delta U_*^i/U_{0*}$, d^3U_* y $U_*^\alpha U_\alpha$. De hecho, después de algunos cálculos, encontramos [113]

$$\frac{\Delta U_*^i}{U_{*0}} = \left(-1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \frac{\Delta v_*^i}{c}, \quad \sqrt{-g} = 1 - \frac{2\Phi}{c^2}, \quad d^3U_* = \left(1 + \frac{5v^2}{2c^2} - \frac{3\Phi}{c^2}\right) d^3v_*,$$

y

$$\sqrt{(U_*^\alpha U_\alpha)^2 - c^4} = c \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{4\Phi}{c^2}\right) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_*|.$$

Introduciendo estas relaciones en (4.93)-(4.94), obtenemos a orden c^{-2}

$$A^i = \int \gamma |\mathbf{v} - \mathbf{v}_*| f_* \Delta v_*^i \tilde{\sigma} d\Omega d^3v_*, \quad (4.104)$$

$$B^{ij} = \int \eta |\mathbf{v} - \mathbf{v}_*| f_* \Delta v_*^i \Delta v_*^j \tilde{\sigma} d\Omega d^3v_*, \quad (4.105)$$

con

$$\gamma = -1 - \frac{7v^2}{2c^2} + \frac{11\Phi}{c^2}, \quad \eta = -1 - \frac{4v^2}{c^2} + \frac{12\Phi}{c^2}. \quad (4.106)$$

De las ecuaciones (4.104)-(4.105) uno puede observar que la relación entre A^i , B^{ij} y los coeficientes de Rosenbluth clásicos. Para esto, uno debe asumir que f_* puede ser reemplazada por una función de distribución de un mar homogéneo de estrellas campo en equilibrio y considerar la sección eficaz diferencial correspondiente a una ley de fuerzas de cuadrado inverso. Es decir

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_*, t) \rightarrow \Psi(\mathbf{v}_*), \quad \tilde{\sigma} = G^2 m^2 |\mathbf{v} - \mathbf{v}_*|^{-4} \sin^{-4}(\theta/2), \quad (4.107)$$

donde $\Psi(\mathbf{v}_*) = \Psi_*$ es la FD de la estrella campo y θ es el ángulo de dispersión medido en el marco de referencia del centro de masa. Introduciendo (4.107) en (4.104)-(4.105) uno puede observar que los factores c^0 de A^i y B^{ij} son equivalentes a los coeficientes de Rosenbluth A_N^i y B_N^{ij} , dados por (4.81)-(4.82) (detalles de este cálculo pueden consultarse en [120]). Por tanto, podemos escribir

$$A^i = -A_N^i - A_{PN}^i, \quad B^{ij} = -B_N^{ij} - B_{PN}^{ij}, \quad (4.108)$$

donde A_N^i y B_N^{ij} están dados por (4.81)-(4.82) y

$$A_{PN}^i = \frac{G^2 m^2}{c^2} \int \left(\frac{7v^2}{2c^2} - \frac{11\Phi}{c^2} \right) \frac{\Psi(\mathbf{v}_*) \Delta v_*^i d\Omega d^3v_*}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_*|^3 \sin^4(\theta/2)}, \quad (4.109)$$

$$B_{PN}^{ij} = \frac{G^2 m^2}{c^2} \int \left(\frac{4v^2}{c^2} - \frac{12\Phi}{c^2} \right) \frac{\Psi(\mathbf{v}_*) \Delta v_*^i \Delta v_*^j d\Omega d^3v_*}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_*|^3 \sin^4(\theta/2)}. \quad (4.110)$$

Finalmente, introduciendo (4.108) y (4.102) en (4.97), encontramos que la aproximación 1PN de (4.91) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{PN})f &= -\frac{\partial}{\partial v_i}(A_N^i f) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}(B_N^{ij} f) - \frac{\partial}{\partial v_i}(A_{PN}^i f) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}(B_{PN}^{ij} f) \\
 &\quad + \frac{1}{c^2} [\mathcal{J}_i(A_N^i f) + \mathcal{K}_{ij}(B_N^{ij} f)], \tag{4.111}
 \end{aligned}$$

donde hemos definido los operadores $\mathcal{J}_i$ y $\mathcal{K}_{ij}$ como

$$\mathcal{J}_i = (v^2 - 2\Phi) \frac{\partial}{\partial v^i} + \delta_{ij} v^j \left(2 + v^l \frac{\partial}{\partial v^l} \right), \tag{4.112}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_{ij} &= \left(v^2 - \frac{11\Phi}{4} \right) \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} + \frac{3v^i v^l}{4} \frac{\partial^2}{\partial v_l \partial v_j} \\
 &\quad + \delta_{ij} \left(2 + v^l \frac{\partial}{\partial v^l} \right) + \frac{11v^i}{2} \frac{\partial}{\partial v^j}. \tag{4.113}
 \end{aligned}$$

La relación (4.111), en contraste con (4.83), es una ecuación cinética no covariante que se puede interpretar como una extensión 1PN de la ecuación FPR clásica (4.80). Aquí, las contribuciones newtoniana y post-newttoniana aparecen separadas tanto en el lado derecho como en el izquierdo. Observamos que los campos post-newttonianos ψ y ξ_i contribuyen tan sólo a través de $\mathcal{L}_{PN}$ y no aparecen en el término de colisiones. En la próxima sección veremos que la deducción de la ecuación cinética a partir de la dinámica microscópica revela contribuciones adicionales a los coeficientes de difusión. La razón es que la interacción 1PN presenta contribuciones provenientes de ψ y ξ_i , que no desaparecen cuando la secuencia BBGKY es cerrada [113].

4.2.3. Derivación a partir de la Dinámica Microscópica: La Primera ecuación 1PN-BBGKY

En esta sección vamos a esbozar la descripción estadística del sistema auto-gravitante partiendo de la dinámica microscópica [113]. En particular, trataremos con la jerarquía BBGKY, la cual, formalmente, equivale a la ecuación de Liouville. En particular, consideraremos sólo la primera ecuación de la secuencia, desde la cual obtendremos la ecuación cinética. Dado que empezamos a partir de la ley de fuerza 1PN no covariante, la correspondiente ecuación de evolución será también expresada en una forma no covariante. Como se dijo en la sección anterior, esta es una propiedad que caracteriza la aproximación 1PN.

Sea un sistema compuesto por N partículas puntuales idénticas, con masa m , interactuando gravitacionalmente y moviéndose con velocidad $\ll c$. De acuerdo con la aproximación 1PN, cada partícula experimenta una aceleración dada por

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}_K(\mathbf{x}, t) + \mathbf{\Gamma}_K(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad (4.114)$$

donde $\mathbf{g}_K$ y $\mathbf{\Gamma}_K$ son la fuerza gravitacional (por unidad de masa) newtoniana y post-newtoniana, respectivamente (el subíndice K , motivado por el posterior uso de las funciones de Klimontovich, indica que tratamos con campos exactos en vez de campos medios). Ellos están dados por [132]

$$\mathbf{g}_K = -Gm \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}, \quad (4.115)$$

$$\begin{aligned} c^2 \mathbf{\Gamma}_K = & -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(2\Phi^2 + \psi) - \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{v} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \times \xi \right) \\ & + 3\mathbf{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 4\mathbf{v} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \Phi - \mathbf{v}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (4.116)$$

La última ecuación representa la corrección relativista de la fuerza en la aproximación 1PN, la cual incluye la contribución de los potenciales post-newtonianos ξ y ψ . En este caso (masas puntuales idénticas), podemos obtener una forma explícita para $\mathbf{\Gamma}_K$, en términos de posiciones y velocidades. Hemos encontrado que la contribución puede escribirse en una forma bastante sugestiva (ver apéndice B):

$$\mathbf{\Gamma}_K = \sum_{i=1}^N \mathbf{\Lambda}(\mathbf{w}, \mathbf{w}_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \quad (4.117)$$

donde $\mathbf{w} \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ (esta notación será usada de aquí en adelante). Aquí, la fuerza relativista total se muestra como el resultado de dos contribuciones: un término de interacción binaria dependiente de la velocidad $\mathbf{\Lambda}$, y el término de interacción ternaria $\mathbf{\Upsilon}$. Ellos son definidos como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}(\mathbf{w}, \mathbf{w}_i) \equiv & \frac{Gm}{c^2} \left\{ \frac{\mathbf{r}_{xx_i}}{r_{xx_i}^3} \left[\frac{4mG}{r_{xx_i}} - \mathbf{v}^2 - 2\mathbf{v}_i^2 + 4\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_{xx_i}}{r_{xx_i}} \right)^2 \right] + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \frac{(4\mathbf{v} - 3\mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{r}_{xx_i}}{r_{xx_i}^3} \right\}, \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \equiv \frac{G^2 m^2}{2c^2 r_{xx_i}} \left[8 \frac{\mathbf{r}_{xx_j}}{r_{xx_j}^3} - 7 \frac{\mathbf{r}_{x_i x_j}}{r_{x_i x_j}^3} + \mathbf{r}_{xx_i} \frac{2r_{x_i x_j}^2 - \mathbf{r}_{xx_i} \cdot \mathbf{r}_{x_i x_j}}{r_{xx_i}^2 r_{x_i x_j}^3} \right] \quad (4.119)$$

con

$$\mathbf{r}_{xx_i} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_i. \quad (4.120)$$

Como mostraremos, $\mathbf{\Lambda}$ conduce a la incorporación de la función de correlación de dos puntos en la descripción estadística. Por otra parte, $\mathbf{\Upsilon}$ origina la aparición de patrones de correlación de tercer orden, que es una diferencia esencial con el caso puramente newtoniano.

Con el fin de introducir la descripción estadística de la evolución para este sistema, usaremos el formalismo KD [82, 40]. Dicha formulación de la mecánica estadística del no equilibrio, ha sido ampliamente usada en el tratamiento probabilista de sistemas dominados por interacciones de la clase (4.114) (ver por ejemplo [139, 58, 100]). El método comienza introduciendo la densidad de fase microscópica de una partícula o densidad de espacio de fase (función KD):

$$f_K(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{i=1}^N \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_i(t)], \quad (4.121)$$

donde δ es la función delta de Dirac 3-dimensional. Claramente, esta función satisface la siguiente ecuación de evolución (ecuación KD):

$$\frac{\partial f_K}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_K}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}_K \cdot \frac{\partial f_K}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{\Gamma}_K \cdot \frac{\partial f_K}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (4.122)$$

donde g_K y $\mathbf{\Gamma}_K$ están dados por (4.115) y (4.117), o por las relaciones equivalentes

$$\mathbf{g}_K(\mathbf{x}, t) = -Gm \int d^6 \mathbf{w}' f_K(\mathbf{w}', t) \frac{\mathbf{r}_{xx'}}{r_{xx'}^3}, \quad (4.123)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_K(\mathbf{w}, t) &= \int d^6 \mathbf{w}' f_K(\mathbf{w}', t) \mathbf{\Lambda}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \\ &+ \int d^6 \mathbf{w}' d^6 \mathbf{w}'' f_K(\mathbf{w}', t) f_K(\mathbf{w}'', t) \mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}''). \end{aligned} \quad (4.124)$$

La función de distribución de una partícula (que representa el estado del sistema), así como la primera ecuación BBGKY (que describe su evolución temporal), son obtenidas promediando la función KD y la ecuación KD, respectivamente. De hecho, es fácil ver que el promedio de f_K es

$$\langle f_K(\mathbf{w}, t) \rangle = f(\mathbf{w}, t), \quad (4.125)$$

donde f es la usual FD de una partícula, la cual representa el comportamiento de una partícula promedio en el sistema. También, existen relaciones que conectan las funciones de correlación, f y f_K [6, 58]:

$$\langle f_K f'_K \rangle = f f' + g_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}', t) + \delta(\mathbf{w}' - \mathbf{w}) f, \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned}
\langle f_K f'_K f''_K \rangle &= f f' f'' + g_3(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \mathbf{w}'', t) + f g_2(\mathbf{w}', \mathbf{w}'', t) + f' g_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}'', t) \\
&+ f'' g_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}', t) + \delta(\mathbf{w} - \mathbf{w}') [f f'' + g_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}'', t)] \\
&+ \delta(\mathbf{w} - \mathbf{w}'') [f f' + g_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}', t)] + \delta(\mathbf{w} - \mathbf{w}') \delta(\mathbf{w} - \mathbf{w}'') f \\
&+ \delta(\mathbf{w}' - \mathbf{w}'') [f f' + g_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}', t)].
\end{aligned} \tag{4.127}$$

Aquí g_2 y g_3 son funciones de correlación de dos y tres puntos, respectivamente, y $f = f(\mathbf{w}, t)$, $f' = f(\mathbf{w}', t)$, etc.

Como es usual, asumimos que f debe satisfacer una ecuación cinética que describa su evolución. Con el fin de deducir dicha ecuación, empezamos por la primera ecuación BBGKY la cual es obtenida tomando el promedio de (4.122), usando la relaciones (4.125)-(4.127):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{\Gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{F}, \tag{4.128}$$

donde $\mathbf{g}$ y $\mathbf{\Gamma}$, el potencial gravitacional medio newtoniano y post-newtoniano, están dados por [113]

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = -Gm \int d^6 \mathbf{w}' f' \frac{\mathbf{r}_{xx'}}{r_{xx'}^3}, \tag{4.129}$$

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{w}, t) = \int d^6 \mathbf{w}' f' \mathbf{\Lambda}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') + \int d^6 \mathbf{w}' d^6 \mathbf{w}'' f' f'' \mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}''), \tag{4.130}$$

mientras que el lado derecho (término de colisiones), $\mathbf{F}$ tiene la forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &\equiv \int d^6 \mathbf{w}' g_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}', t) \left[\mathbf{\Lambda}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') - Gm \frac{\mathbf{r}_{xx'}}{r_{xx'}^3} \right] \\
&+ \int d^6 \mathbf{w}' d^6 \mathbf{w}'' [g_2(\mathbf{w}', \mathbf{w}'', t) f + g_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}'', t) f' \\
&+ g_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}', t) f'' + g_3(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \mathbf{w}'', t)] \mathbf{\Upsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'').
\end{aligned} \tag{4.131}$$

La ecuación (4.128) es la primera ecuación de la jerarquía BBGKY en la aproximación 1PN. El lado izquierdo, (término convectivo) depende de los campos medios $\mathbf{g}$, $\mathbf{\Gamma}$, y tiene la misma estructura de un término cinético de campo medio (el lado izquierdo de la ecuación de Vlasov [130, 59]). Además, es fácil ver que este término convectivo es equivalente al de la ecuación (4.97). Sin embargo, el

término de colisiones está dado en una forma no estándar. Podemos interpretarlo como la suma de dos términos: (i) un término de dos partículas, caracterizado por g_2 y las interacciones binarias $\mathbf{g}$, $\mathbf{\Lambda}$; (ii) un término de tres partículas, caracterizado por la interacción ternaria $\mathbf{\Upsilon}$ y los patrones de correlación ternarios de la forma $f g_2$ y g_3 . Esta última contribución hace un tanto difícil la tarea de cerrar la jerarquía, con el fin de obtener una ecuación cinética tratable. Sin embargo, como veremos más adelante, encontramos que es posible hacer esto, estableciendo algunas suposiciones razonables acerca del comportamiento de las funciones de correlación. En particular, asumiremos que el proceso de relajación del sistema sigue algo así como una dinámica de correlaciones tipo GDA. Esta suposición proviene del hecho de que la ecuación FPR puede ser deducida directamente a partir de la primera ecuación BBGKY, introduciendo una función de correlación correspondiente a un GDA en el régimen hidrodinámico [113]. La validez de estas afirmaciones será el tema de la próxima sección.

Una Deducción Alternativa de la Ecuación FPR: La Aproximación GDA Hidrodinámica

Como se ha dicho antes, los encuentros débiles juegan un papel dominante en el proceso de relajación de los clusters de estrellas [26, 27]. Esto sugiere que podemos esperar una estrecha analogía entre el proceso de relajación del cluster (dominado por encuentros débiles) y el proceso de relajación de un GDA (basado en interacciones débiles). De hecho, podemos mostrar que la introducción de una función de correlación (en el régimen hidrodinámico) en el término de colisiones de la primera relación BBGKY newtoniana, conduce a la usual ecuación FPR [113]. Antes de hacer esto, expondremos brevemente algunos aspectos relevantes de la dinámica de correlaciones de un GDA.

Un GDA clásico es comúnmente descrito como un conjunto de partículas que interactúan por medio de un potencial gaussiano de la forma [6]

$$V(r) = V_o \exp[-(r/\alpha)^2], \quad (4.132)$$

donde r es la separación entre partículas, V_o representa el máximo valor del potencial y α es una *longitud de interacción* (para r mayor que α la interacción prácticamente se anula). La evolución temporal, para esta clase de sistemas, está descrita por la *ecuación cinética propia de orden 2* (ver [6], p. 574) y hay un aspecto en el que estamos especialmente interesados, en torno de dicha ecuación: la forma explícita de las funciones de correlación. Observamos que (a orden 2) g_3 , g_4 , etc,

se anulan y que g_2 está dada por la relación [6]:

$$g_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}', t) = \int_0^\infty d\tau \frac{\partial V(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \tau)}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\nabla_{vv'} + \tau \nabla_{xx'}) [ff'], \quad (4.133)$$

donde hemos usado la notación

$$\nabla_{xx'} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}, \quad \nabla_{vv'} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'}, \quad \mathbf{u}_{vv'} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{v}'. \quad (4.134)$$

y

$$V(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \tau) = V_o e^{-(|\mathbf{r}_{xx'} - \tau \mathbf{u}_{vv'}|/\alpha)^2}. \quad (4.135)$$

Además, si consideramos que el GDA está en régimen hidrodinámico, entonces la variación espacial de f está caracterizada por una longitud hidrodinámica L_h , definida como [6]

$$L_h = \max \frac{f}{|\partial f / \partial \mathbf{x}|} \gg \alpha. \quad (4.136)$$

Dado que $L_h \gg \alpha$, el sistema puede ser considerado prácticamente homogéneo (f no depende de las coordenadas espaciales), sobre distancias del orden de α . Podemos sacar provecho de esto y simplificar (4.133). En la expansión de Taylor de f' en $\mathbf{x}'$ alrededor de $\mathbf{x}$,

$$f(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) - \mathbf{r}_{xx'} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t)}{\partial \mathbf{x}} + \dots, \quad (4.137)$$

el segundo término es de orden α/L_h comparado con el primero (los siguientes términos son más pequeños). Entonces, podemos tomar $f(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) \approx f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t)$ y luego $\partial[ff']/\partial \mathbf{x}' \approx 0$. Efectuando un procedimiento similar, partiendo de la expansión de f en $\mathbf{x}$ alrededor de $\mathbf{x}'$, también obtenemos $\partial[ff']/\partial \mathbf{x} \approx 0$. Esto significa que, en el límite hidrodinámico, podemos hacer $\nabla_{xx'}[ff'] \approx 0$ y reemplazar f' por $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t)$ en el factor restante $\nabla_{vv'}[ff']$ de (4.133). Así, efectuando la integral (4.133), g_2 puede escribirse como

$$g_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}', t) = \mathcal{G}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \cdot \nabla_{vv'} [f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)], \quad (4.138)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \equiv & \frac{\sqrt{\pi} V_o}{u_{vv'}^2} e^{-(r_{xx'}/\alpha)^2} \left\{ \frac{\mathbf{u}_{vv'}}{\sqrt{\pi}} + (Q_{ww'} \mathbf{u}_{vv'} \right. \\ & \left. - u_{vv'} \mathbf{r}_{xx'} / \alpha) [1 + \text{Erf}(Q_{ww'})] e^{Q_{ww'}^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.139)$$

donde $\text{Erf}(Q_{ww'})$ es la función error y

$$Q_{ww'} = \frac{\mathbf{u}_{vv'} \cdot \mathbf{r}_{xx'}}{u_{vv'} \alpha}. \quad (4.140)$$

Ahora contemplemos las implicaciones concernientes a la implementación de (4.138) en el término de colisiones de la primera ecuación BBGKY newtoniana, que escribimos como [113]

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{F}_N = -Gm \int d^6 \mathbf{w}' g_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}', t) \frac{\mathbf{r}_{xx'}}{r_{xx'}^3}. \quad (4.141)$$

Nuevamente, el subíndice N denota el hecho de que tratamos con el caso newtoniano. En C mostramos que después de la introducción de (4.138) en la anterior ecuación, esta se reduce a

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{F}_N = -\frac{\partial}{\partial v_i} (\tilde{A}_N^i f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (\tilde{B}_N^{ij} f) \quad (4.142)$$

donde hemos introducido las definiciones

$$\tilde{A}_N^i = -4\pi^{3/2} \alpha V_o Gm \frac{\partial}{\partial v_i} \int d^3 \mathbf{v}' \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t)}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}, \quad (4.143)$$

$$\tilde{B}_N^{ij} = -2\pi^{3/2} \alpha V_o Gm \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \int d^3 \mathbf{v}' f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|. \quad (4.144)$$

A partir de las anteriores relaciones, podemos notar inmediatamente que (4.142) equivale al término de colisiones FPR (4.80), escogiendo V_o como

$$V_o = -\frac{2Gm}{\alpha\sqrt{\pi}} \ln \Lambda, \quad (4.145)$$

y asumiendo que

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \approx \Psi(\mathbf{v}'), \quad (4.146)$$

donde $\Psi(\mathbf{v}')$, en el contexto de la ecuación FPR deducida en §8.1 de [11], es una función de distribución de las estrellas campo. Con (4.145)-(4.146), A_N^i y B_N^{ij} son exactamente los coeficientes de Rosenbluth (4.81)-(4.82), describiendo el efecto de deriva y difusión generado por un mar homogéneo de partículas campo, de masa m y función de distribución $\Psi(\mathbf{v}')$, sobre una estrella de prueba con la misma masa y función de distribución $f(\mathbf{w}, t)$.

La suposición (4.146) es proporcionada por la aproximación hidrodinámica, la cual establece que el sistema es prácticamente independiente de las coordenadas espaciales sobre el rango de correlación α . Además, como es usual, exigimos que la distribución homogénea Ψ satisfaga la relación

$$\int d^3 \mathbf{v}' \Psi(\mathbf{v}') = \frac{N}{V}, \quad (4.147)$$

donde V es el volúmen del sistema.

Todas las consideraciones anteriores nos conducen a establecer que, con el fin de obtener la ecuación FPR partiendo de la jerarquía BBGKY, podemos escoger $g_3 = g_4 = \dots = 0$ y una función de correlación de dos partículas [113]

$$g_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}', t) = \mathcal{G}(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \cdot \nabla_{\mathbf{v}\mathbf{v}'} [\Psi(\mathbf{v}') f(\mathbf{w}, t)], \quad (4.148)$$

donde $\mathcal{G}$ está dado por la ecuación (4.139), definiendo previamente la constante V_o a través de (4.145).

4.2.4. La Ecuación Fokker-Planck-Rusenbluth en la Aproximación 1PN

En este punto estamos en condiciones de deducir una ecuación cinética alternativa para el sistema autogravitante en la aproximación 1PN. Aquí, un hecho importante, proveniente de nuestra experiencia ilustrada en el apartado 4.2.2, jugará un papel crucial: dado que en la aproximación 1PN la conservación del momentum para un sistema de partículas es satisfecha, si y sólo si, cada partícula obedece a la ecuación newtoniana de movimiento, el proceso de dispersión está caracterizado por una sección eficaz diferencial asociada a la ley newtoniana de fuerza. En otras palabras: la correlación estadística entre dos partículas, en aproximación 1PN, debe ser descrita por la función de correlación de dos puntos correspondiente al escenario newtoniano. Esto significa que, como consecuencia de las afirmaciones entabladas aquí, en la sección anterior, podemos modelar satisfactoriamente el proceso de relajación del sistema autogravitante introduciendo (4.148) en el término de colisiones (4.131), donde también hacemos $g_3 = 0$.

Entonces, introduciendo (4.148) en (4.128) y haciendo $f' \approx \Psi(\mathbf{v}')$, $f'' \approx \Psi(\mathbf{v}'')$ (suposición (4.146)) en el término de colisiones (4.131), obtenemos (ver apéndice C y la referencia [113])

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{\Gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = - \frac{\partial}{\partial v_i} (A^i f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (B^{ij} f), \quad (4.149)$$

donde A^i y B^{ij} son el vector de deriva 1PN y el tensor de difusión 1PN, respec-

tivamente. Estos se encuentran dados por

$$\begin{aligned}
A^i &= 8\pi G^2 m^2 \ln \Lambda \frac{\partial}{\partial v_i} \int d^3 \mathbf{v}' \frac{\Psi(\mathbf{v}')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \\
&+ \int d^3 \mathbf{v}' \Psi(\mathbf{v}') \left[\frac{\partial}{\partial v'_j} - \frac{\partial}{\partial v_j} \right] \Omega_{PN}^{ij}(\mathbf{w}, \mathbf{v}') \\
&+ \int d^3 \mathbf{v}' d^3 \mathbf{v}'' \Psi(\mathbf{v}') \Psi(\mathbf{v}'') \left[\frac{\partial}{\partial v''_j} - \frac{\partial}{\partial v'_j} \right] \Phi_{PN}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{v}', \mathbf{v}''),
\end{aligned} \tag{4.150}$$

$$\begin{aligned}
B^{ij} &= 4\pi G^2 m^2 \ln \Lambda \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \int d^3 \mathbf{v}' \Psi(\mathbf{v}') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \\
&- 2 \int d^3 \mathbf{v}' \Psi(\mathbf{v}') \Omega_{PN}^{ij}(\mathbf{w}, \mathbf{v}'),
\end{aligned} \tag{4.151}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Omega_{PN}^{ij}(\mathbf{w}, \mathbf{v}') &= \int d^3 \mathbf{x}' \Lambda^i(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \mathcal{G}^j(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \\
&+ 2 \frac{N}{V} \int d^3 \mathbf{x}' d^3 \mathbf{x}'' \Upsilon_S^i(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') \mathcal{G}^j(\mathbf{w}, \mathbf{w}'),
\end{aligned} \tag{4.152}$$

$$\Phi_{PN}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{v}', \mathbf{v}'') = \int d^3 \mathbf{x}' d^3 \mathbf{x}'' \Upsilon_S^i(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') \mathcal{G}^j(\mathbf{w}', \mathbf{w}''). \tag{4.153}$$

El primer término del lado derecho de (4.150) y (4.151) corresponde a la contribución newtoniana (coeficientes de Rosenbluth clásicos) y el otro representa la corrección post-newtoniana que puede ser calculada explícitamente una vez escojamos una expresión particular para la distribución de estrellas campo Ψ . En este esquema, los coeficientes de difusión parecen ser mas complicados que en la formulación mostrada en el apartado 4.2.2. Al respecto, debemos señalar que ellos no necesariamente deben coincidir, aún despreciando correlaciones ternarias. La forma en la cual A_{PN}^i y B_{PN}^{ij} determinan el término de colisiones en la primera formulación, difiere de la presentada en esta sección [113].

Perspectivas sobre la Obtención de Soluciones Particulares

Una manera de evaluar directamente la forma en que las correcciones relativistas de la gravitación introducen nuevos efectos en la evolución de las galaxias, reside en el cálculo de soluciones particulares del sistema autoconsistente conformado por las ecuaciones (4.149), (4.129) y (4.130). Recientemente se han

desarrollado metodos numéricos de solución de la ecuación de Fokker-Planck 3-dimensional, con un término de colisiones general [95]. Para incorporar dicho tratamiento numérico dentro del modelo evolutivo propuesto aquí, es necesario calcular explícitamente los coeficientes de difusión de (4.149). Esto se logra escogiendo una forma particular para Ψ , la cual, en una primera instancia, podría ser la distribución Maxwelliana:

$$\Psi(\mathbf{v}) = \frac{\bar{\eta}}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-v^2/2\sigma^2}, \quad (4.154)$$

en donde σ es la dispersión de velocidades de las estrellas campo. Otra situación de interés físico lo constituyen los sistemas estelares modelados como discos delgados. En este caso la función f debe restringirse a los planos $z = 0$ y $v_z = 0$,

$$f(x, y, z, v_x, v_y, v_z) \rightarrow f(x, y, z, v_x, v_y, v_z) \delta(z) \delta(v_z). \quad (4.155)$$

Puede mostrarse que tanto la forma de la ecuación Vlasov-Fokker-Planck, como la forma de los coeficientes de difusión, son preservadas bajo dicha restricción, pero proyectados en $z = 0$ y $v_z = 0$. En esta dirección, también se han desarrollado métodos numéricos autoconsistentes de solución para la ecuación de Fokker-Planck [95]. La incorporación del método propuesto en la referencia anterior, dentro del formalismo presentado aquí, requiere (además de la restricción (4.155)), el cálculo específico de los coeficientes de difusión. Puede asumirse que Ψ sea de la forma (4.154), pero bidimensional:

$$\Psi(\mathbf{v}) = \frac{\bar{\eta}}{2\pi\sigma^2} e^{-(v_x^2+v_y^2)/2\sigma^2}. \quad (4.156)$$

CONCLUSIONES

Es el momento de exponer los aspectos más importantes que se estudiaron, descubrieron y formularon a lo largo de la investigación que dio como fruto esta tesis. Para estudiar el efecto de las correcciones post-newtonianas en la evolución de los sistemas estelares, fue necesario, desde un principio, efectuar un análisis extensivo desde la perspectiva newtoniana, ya que es considerada comúnmente como el paradigma de la dinámica de galaxias. Nos interesamos especialmente en el caso axialmente simétrico ya que, además de aportar simplicidad, constituye una imagen con la que pueden ser identificadas muchas de las galaxias observadas. En el análisis efectuado, además de aprender las técnicas pertinentes, se logró obtener un número apreciable de resultados nuevos e importantes. A continuación enumero las principales novedades que surgieron en el escenario de la gravitación newtoniana:

- Emprendimos la descripción del movimiento de partículas en campos axialmente simétricos, examinando en detalle el caso en que la fuente tiene deformación cuadrupolar y octupolar (sección 2.2.2). Encontramos que la deformación octupolar en objetos astrofísicos puede introducir modificaciones significativas en la estructura del espacio de fase. Aparte del incremento en la caoticidad, dicha estructura está caracterizada por la aparición de toroides deformados en regiones de regularidad, lo cual se debe a la asimetría de la fuente con respecto a su plano ecuatorial. Entre mayor sea dicha asimetría mayor distorsión se producirá en las curvas KAM y más prominente serán las zonas estocásticas en el espacio de fase.
- En lo que respecta a la cinemática alrededor de los DGK (sección 2.2.3), un hecho notable es que la estabilidad de las órbitas circulares ante perturbaciones radiales y verticales crece con el parámetro m (para $m \geq 2$). Otro hecho importante es que el rango del momento angular axial para el cual podemos encontrar movimiento acotado dentro del disco, decrece con m . En otras palabras, entre más estable es el DGK, menos posibilidades tiene de mantener las partículas dentro del disco. Estas consideraciones tienen

especial relevancia en la búsqueda de funciones de distribución de equilibrio consistentes con estos modelos de galaxia. En efecto, en la sección 3.1.4 mostramos la obtención de dichas FDs, para los primeros dos modelos.

- Los cálculos numéricos mostrados en el apartado 2.2.3 confirman el análisis hecho por Hunter acerca de las órbitas que cruzan el disco. Existe un movimiento caótico inducido por la presencia del disco y a pesar de que las actuales versiones del teorema KAM no son aplicables (debido a la discontinuidad del campo de fuerza), existe también un rango significativo de órbitas regulares. Además, ya que en nuestro caso tratamos con modelos de discos finitos, una distinción entre las órbitas que cruzan el disco y las que no, es a veces necesaria. En el último caso no encontramos movimiento caótico, aún en situaciones extremas donde los puntos de silla ubicados fuera de la fuente, y las regiones con y sin disco están conectadas (Figuras 2.20(a) y 2.20(b)). Aunque uno estaría tentado a pensar que dichos puntos hiperbólicos pueden inducir caos en una región libre de disco, lo que realmente sucede es lo contrario. Estas consideraciones tienen especial relevancia en modelos de galaxias compuestos por un disco delgado y un halo. Las partículas pertenecientes al halo seguirán un movimiento como el descrito en el apartado 2.2.3 y, como ha sido probado por algunos autores, este hecho determina decisivamente la estructura interna de dichos sistemas estelares [107] .
- En las subsecciones 2.1.2 y 3.1.5, presentamos la obtención de un conjunto de modelos para galaxias planas axialmente simétricas (los modelos PRG), mediante la superposición de miembros pertenecientes a DGK. La distribución de masa de cada modelo (etiquetado con el parámetro $m = 2, 3, \dots$), descrito por (2.37), es máximo en el centro y se anula en el borde, en concordancia con una gran variedad de galaxias. Sin embargo, la densidad de masa puede ser expresada como una función del potencial gravitacional (ver ecuación (2.47)), que hace posible deducir, de forma exacta, las FDs que dan cuenta de las características de los citados modelos.
- Los modelos PRG tienen otras características interesantes concernientes a su cinemática. Por una parte, mostramos que para algunos valores de B_1 , la velocidad circular tiene un comportamiento muy similar al visto en muchas galaxias discoideas. Por otra parte, el análisis de las frecuencias epicíclica y vertical, asociado a órbitas cuasicirculares, revela que los modelos son

estables ante perturbaciones radiales pero inestables ante perturbaciones verticales, aparte de las inestabilidades debidas a la presencia del cascarón de materia. Puede ser que dichas limitaciones sean superadas mediante la introducción de un halo esférico (oscuro).

- En lo que compete al movimiento exterior de partículas de prueba alrededor de los modelos PRG, encontramos que el comportamiento de las órbitas que cruzan el disco es similar al visto en los DGK. Sin embargo, para ciertos valores del parámetro B_1 , la sección de Poincaré generada sugiere la existencia de una tercera integral de movimiento, en principio, no analítica.
- Encontramos dos clases de FDs para los modelos. La primera clase de soluciones la constituyen funcionales de la integral de Jacobi y describen sistemas cuyo estado rotacional, en promedio, es similar al de un cuerpo rígido. La segunda clase de soluciones se obtiene mediante el procedimiento introducido en [39], obteniendo FDs que representan sistemas con un estado rotacional medio consistente con el principio de máxima entropía y, por tanto, más probables que los primeros. Estas afirmaciones sugieren que la familia presentada aquí, puede considerarse como un conjunto de modelos realistas que describen satisfactoriamente una gran variedad de galaxias
- En la sección 2.1.3 mostramos la formulación de cuatro modelos particulares de discos delgados, contruidos de tal forma que se ajustaran a los datos observacionales de las curvas de rotación para las galaxias NGC3877, NGC3917, NGC3949 y NGC4010 del cluster de la osa mayor. Estos modelos presentan densidades de masa bien comportadas (similar al perfil de luminosidad de muchas galaxias espirales) y los valores obtenidos para la correspondiente masa total $\mathcal{M}$ están dentro del orden de magnitud esperado para dicha magnitud. En consecuencia, las expresiones aquí obtenidas para la velocidad circular, ecuación (2.54), puede ser considerada como un especie de “curva de rotación universal” para galaxias planas, la cual puede fácilmente ser ajustada a los datos observados para una galaxia en particular.
- En uno de los modelos mencionados en el párrafo anterior obtuvimos una pequeña región de inestabilidad radial cerca del borde del disco. Ahora, como los modelos son completamente determinados por las constantes A_{2n} , fijadas numéricamente mediante el ajuste de los datos obtenidos a partir de la curva de rotación, no existen parámetros libres que puedan ser

ajustados exigiendo estabilidad radial. Una posible solución de este problema puede ser considerado un ajuste numérico menos restrictivo que deje algunos parámetros libres. Esto se puede hacer tomando la sumatoria en la expresión (2.54) hasta un valor de m mayor que el número de puntos disponibles.

- Los modelos contruidos para las cuatro galaxias mencionadas, presentan una región central con fuertes inestabilidades ante perturbaciones verticales en órbitas cuasicirculares. Este resultado era de esperarse debido al hecho de que los modelos en consideración consideran sólo el disco galáctico. De hecho, como podemos inferir a partir de la expresión (2.59), la inestabilidad vertical siempre estará presente en modelos contruidos a partir de soluciones de la ecuación de Laplace y ajustadas de tal forma que sus velocidades circulares reproduzcan el comportamiento observado, es decir, una proporcionalidad directa con el radio. Por lo tanto, modelos más realistas deben considerar el carácter *no delgado* del disco galáctico, o la contribución de un halo esférico.
- Creemos que los valores de $\mathcal{M}$ que fueron obtenidos para las cuatro galaxias estudiadas, pueden considerarse como un estimativo bastante preciso de su cota superior de masa, ya que en el modelo está apoyado en el hecho de toda la masa está concentrada en el disco galáctico.
- En el tercer capítulo, uno de los aspectos estudiados más importantes, es el hecho de que en la actualidad disponemos de una variedad de técnicas para hallar FDs axialmente simétricas, que dependan de dos integrales. En particular, se introdujo el formalismo de la derivada fraccional, el cual, en contraste con los métodos basados en técnicas de transformadas integrales, no requiere que la densidad de masa tenga una continuación analítica de argumentos complejos. De hecho, esta es la principal desventaja involucrada en tales métodos. Además, dicho formalismo puede ser considerado como un método general que contiene, como casos particulares, los resultados obtenidos en [50], [77] y [75]. Puede ser aplicado a una gran variedad de modelos axialmente simétricos, debido a la forma funcional de la densidad. Otra ventaja de este formalismo es que puede ser aplicado directamente tanto a sistemas tridimensionales como a sistemas planos, sin necesidad de introducir una pseudo densidad. Por tanto, tomando en cuenta lo dicho, este formalismo representa una poderosa herramienta en la construcción de

modelos estelares autoconsistentes.

De acuerdo con la naturaleza del presente trabajo, los resultados más importantes fueron obtenidos en el marco de la aproximación post-newtoniana. Aquí, apoyándonos en el examen previo de los modelos newtonianos, establecimos una comparación para evaluar la incidencia de las contribuciones 1PN, tanto desde un enfoque microscópico (movimiento de partículas) como desde la descripción macroscópica que proporciona la mecánica estadística. Desde ambos puntos de vista, la implementación del formalismo que trae consigo la aproximación 1PN se logró establecer de forma directa y natural.

1. En una primera etapa se efectuó un análisis de órbitas post-newtonianas alrededor de objetos estáticos con simetría axial, enfocándonos especialmente en fuentes con deformación prolata oblata y octupolar. El estudio dio como resultado que, si trabajamos con parámetros astrofísicos usuales, la repercusión de las correcciones 1PN, se traduce tan sólo en una ligera modificación de la estructura del espacio de fase, sin introducir grandes desviaciones con respecto a las trayectorias clásicas. Si se usan valores más grandes para los momentos multipolares, se aprecian cambios significativos, pero con una dudosa precisión, ya que ello exigiría, tal vez, la adopción de una aproximación post-newtoniana de orden superior. Estas consideraciones, sugieren que, en el nivel de descripción microscópico, el rol que desempeñan las correcciones 1PN en galaxias, es bastante modesto. Sin embargo, las contribuciones 1PN se hacen apreciables cuando adoptamos el enfoque estadístico.
2. En lo que respecta al estudio de sistemas estelares en equilibrio sin colisiones (galaxias, principalmente), encontramos varios resultados interesantes. En la sección 3.2 se desarrolló un método para obtener modelos de galaxias con correcciones 1PN, partiendo de PDPs caracterizados por una FD dependiente de la integral de Jacobi. Dichos modelos describen discos delgados axialmente simétricos estacionarios de radio finito. El método comienza implementando el método de Hunter en el formalismo proporcionado por la aproximación 1PN; luego se considera la ecuación de Boltzmann sin colisiones en aproximación 1PN y sus soluciones estáticas axialmente simétricas, en particular, dependientes de la integral de Jacobi; finalmente, se impone la condición de que dichas FDs sean consistentes con las ecuaciones planteadas desde el principio. Así, los modelos corregidos son también auto consistentes, debido a que es un requerimiento planteado por el mismo

formalismo. Se mostraron algunos casos de interés a los cuales el método puede aplicarse: los primeros dos miembros de GKD y la familia de modelos PRG. Los primeros dos casos revelan diferencias significativas entre las curvas de rotación predichas por la teoría newtoniana y las sugeridas por la aproximación 1PN. En particular, observamos correcciones significativas en el modelo $m = 2$; a grandes radios la curva de rotación se aleja apreciablemente de la predicción newtoniana (Figura 3.4 (b)). Sin embargo, los modelos newtoniano y post-newtoniano coinciden en la distribución de masa. Por otra parte, al introducir la familia de modelos PRG (con curvas de rotación mejor comportadas) en el formalismo, se encontró que, esencialmente no hay diferencia apreciable entre la predicción newtoniana y la post-newtoniana.

3. El análisis de sistemas estelares cuya evolución se encuentra en el régimen colisional y en estado no estacionario, demandó estudiar, con cierta profundidad, algunos conceptos y técnicas concernientes a la mecánica estadística del no equilibrio. Fue así como se logró esbozar un esquema de la dinámica de correlaciones post-newtonianas, a través de la formulación de la ecuación de Liouville generalizada (sección 4.1.4), pasando por la obtención de la jerarquía BBGKY post-newtoniana (ecuación 4.38), la cual presenta una diferencia crucial con la jerarquía correspondiente al caso puramente Newtoniano (y en general, con cualquier sistema regido por interacciones binarias). En este último, la razón de cambio de f_s depende sólo de f_s y f_{s+1} [11], mientras que, al introducir las correcciones 1PN, aparece una nueva dependencia con f_{s+2} (esto es debido a que la interacción 1PN presenta términos de carácter ternario). Como en gravitación newtoniana, queda abierto el problema de la deducción de una ecuación cinética exacta, es decir, a partir de la ecuación (4.52).
4. En la sección 4.2 se presentó la deducción de dos ecuaciones tipo FPR que pueden ser usadas, para modelar la evolución en el régimen de difusión, de sistemas estelares donde los efectos relativistas juegan un papel significativo. En la primera formulación, la contribución de patrones de correlación de tercer orden en los coeficientes de difusión es despreciada, mientras que en la segunda esto sí se toma en cuenta. Ya que el lado izquierdo de (4.111) y (4.149) son equivalentes, se puede esperar que ellos sean consistentes con la ecuaciones post-newtonianas de la hidrodinámica en relatividad general [119]. Sin embargo la generalización a las ecuaciones eulerianas de la

hidrodinámica newtoniana, deducida en cada formalismo, diferirán en el término asociado a una aceleración de deriva, ya que está determinada por los coeficientes de difusión.

5. Ya que (4.111) y (4.149) están escritas de una forma no covariante (como consecuencia del esquema 1PN) su interpretación física, así como sus diferencias con la ecuación FPR newtoniana, pueden ser vislumbradas en un lenguaje newtoniano. Debemos señalar que ellas tienen un punto en común: Una vez esogida la función de distribución para las estrellas campo, los coeficientes de difusión (4.109)-(4.110) o (4.150)-(4.151) pueden calcularse explícitamente, haciendo posible encontrar soluciones numéricas a las ecuaciones (4.111) y (4.149) (por ejemplo, usando el método mostrado en [61]).
6. El formalismo KD nos permitió deducir, de una forma relativamente simple, la primera relación BBGKY post-newtoniana, (4.128). Constituye un ejemplo interesante acerca de la importancia de este método, cuando tratamos con la descripción estadística de un sistema dinámico dominado por interacciones dependientes de la velocidad [58]. El factor más relevante que puede observarse a través de (4.128) es quizás la aparición de factores de correlación de tercer orden en el término de colisiones. Esta característica, ausente en el caso puramente newtoniano, es una consecuencia de la interacción ternaria Υ (ver (4.119)). Uno podría ir más lejos y pensar que aproximaciones post-newtonianas mas refinadas (2PN, 3PN y así sucesivamente) conducirían descripciones basadas en correlaciones de orden mayor. No sería sorprendente el hecho de que la teoría gravitacional de Einstein *incrementa el nivel de correlación*, en una descripción de la mecánica estadística del no equilibrio.
7. Mediante las hipótesis (4.148) y (4.146), la ecuación (4.128) se reduce a la usual ecuación FPR (4.80) (en el caso puramente newtoniano). Este hecho sugiere que la aproximación local, empleada en los enfoques estocásticos de la teoría cinética (ver por ejemplo §8.3 de [11]), es equivalente a la aproximación GDA hidrodinámica, usada aquí. A través de dicha aproximación modelamos el proceso de relajación mediante una dinámica de correlaciones correspondiente a un gas dominado por interacciones débiles de corto alcance, $V(r) = -(2Gm \ln \Lambda / \alpha \sqrt{\pi}) \exp(-r^2/\alpha^2)$. El rango de interacción α , introducido aquí, define una escala característica de distancias sobre las

cuales (i) los encuentros juegan un papel dominante, y (ii) la función de distribución puede ser considerada homogénea. Uno puede estimar su orden de magnitud teniendo en cuenta las consideraciones hechas en la aproximación local y decir que α debe ser del orden del mínimo parámetro de impacto para el cual dicha aproximación se cumple. Es decir, $\alpha \sim R/N$, donde R es el radio característico del sistema [11]. De acuerdo con estas afirmaciones, la ecuación (4.149), mostrada en la sección 4.2.4, describe la evolución de la función de distribución correspondiente a una partícula de prueba que interactúa con un mar homogéneo de estrellas campo en equilibrio termodinámico, tomando en cuenta correcciones 1PN.

8. Los principales resultados de esta tesis se han divulgado a través de una serie de 8 artículos internacionales, de los cuales ya han sido aceptado 4:

- *Fokker-Planck-Rosenbluth-type Equations for Self-Gravitating Systems in 1PN Approximation.* Javier F. Ramos Caro and Guillermo A. González Villegas. Classical and Quantum Gravity, 25, 045011 (2008).
- *Chaotic and Regular Motion around Generalized Kalnajs Disks.* Javier F. Ramos Caro, Likidcen F. López Suspez and Guillermo González. Monthly Notices of the Astronomical Society, 386 (1), 440 (2008).
- *An Infinite Family of Self-consistent Models for Axisymmetric Flat Galaxies.* Juan F. Pedraza, Javier Ramos Caro and Guillermo A. González. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 390 (4), 1587 (2008).
- *Fractional Derivative Approach to the Self-gravitation Equation.* Juan F. Pedraza, Javier Ramos Caro and Guillermo A. González. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters, 391 (1), L24 (2008).
- *Two-Integral Distribution Functions for Generalized Kalnajs Discs.* Juan F. Pedraza, Javier Ramos Caro and Guillermo A. González. arxiv:0806.4275v1 [astro-ph]
- *Self-consistent Models for Axisymmetric Flat Galaxies in 1PN Approximation.* C. Akimushkin, J. Ramos-Caro and G. González. arxiv:0910.1627 [astro-ph].
- *Finite thin disc models of four galaxies in the Ursa Major cluster: NGC3877, NGC3917, NGC3949 and NGC4010.* Guillermo A. González, Sandra Plata and Javier Ramos-Caro. arxiv:0906.1355 [astro-ph.GA]

- *Chaotic and Regular Motion around bodies with Octupolar deformation.* Javier Ramos-Caro, Fransol López and Guillermo A. González. arxiv:0806.4282 [gr-qc]

9. Así mismo, varios de los resultados obtenidos fueron presentados como a través de las siguientes ponencias internacionales:

- SEGUNDO CONGRESO LATINOAMERICANO DE FÍSICA.
 - (a) *An Infinite Family of Self-Consistent Models for Flat Axisymmetric Galaxies.*
 - (b) *Movimiento Caótico alrededor de Objetos Estelares con Deformación Octopolar: Formulación Newtoniana y Post-Newtoniana.* Zacatecas, Zacatecas, México. Octubre 20-24 de 2008
- SEGUNDA REUNIÓN COLOMBO-VENEZOLANA DE RELATIVIDAD Y GRAVITACIÓN.
 - (a) *Regular and Chaotic Orbits Around Axisymmetric Galaxies.*
 - (b) *A Fokker-Planck-Rosenbluth equation in 1PN Approximation.* Armenia, Colombia, Octubre 28-31 de 2007
- SEGUNDO CONGRESO BINACIONAL DE RELATIVIDAD Y GRAVITACIÓN.
 - Post Newtonian Kinetic Theory for Many Particle Self-gravitating Systems: The 1PN Collisional Vlasov Equation.* Isla Coche, Venezuela, Noviembre 7-11 de 2006.
- PRIMERA REUNIÓN COLOMBO-VENEZOLANA DE RELATIVIDAD Y GRAVITACIÓN.
 - Teoría Cinética Post-Newtoniana de Sistemas Autogravitantes de Muchas Partículas.* Cartagena, Colombia. Noviembre 1-3 de 2005.

La Derivada Fraccional

En cálculo diferencial, se define la primera derivada de una función por medio de un límite apropiado, el cual representa la razón de cambio de dicha función. También se definen las derivadas sucesivas enteras de una función: segunda derivada, tercera derivada, etc. Sin embargo, es posible concebir teóricamente, en lugar de la primera derivada de una función, una derivada de orden no entero, utilizando para ello técnicas especiales.

La historia del concepto referente una derivada de orden no entero se remonta al nacimiento mismo del cálculo diferencial [121]. A finales del siglo XVII, G. W. Leibniz, filósofo y creador del cálculo moderno, propuso la existencia de la derivada de orden $1/2$ y planteó su posible significado. Sin embargo, la primera investigación rigurosa fue realizada por primera vez por Liouville en una serie de artículos entre 1832-1837, en donde esbozó los primeros avances relacionados con operadores fraccionales. Más adelante, nuevas investigaciones y desarrollos efectuados entre otros por Riemann, condujeron a la construcción del operador fraccional de Riemann-Liouville, el cual ha sido la piedra angular del cálculo fraccional desde entonces.

Antes de Liouville y Riemann, Euler realizó el primer paso en el estudio de la integración fraccional. Él estudió el caso simple correspondiente a integrales fraccionales de monomios de orden real; se ha dicho que esto lo condujo a la construcción de la función gamma, la cual generaliza el operador factorial para valores reales. Los resultados obtenidos por Liouville fueron retomados más adelante por el matemático sueco Holmgren, quien en 1865 realizó importantes contribuciones en el desarrollo del cálculo fraccionario. Sin embargo, fue Riemann quien dio la forma final al operador derivada fraccionario, haciéndolo mucho más útil que sus predecesores.

En la actualidad, aunque existen diferentes formas y definiciones equivalentes del operador fraccional, el operador de Riemann-Liouville es aún el mas utilizado al efectuar derivadas de orden fraccional. Este operador esta dado por

$$D_x^{n+\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \left[\int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^{\alpha-n+1}} dy \right], \quad (\text{A.1})$$

donde $0 < \alpha < 1$ y n es cualquier número natural.

Potenciales Post-newtonianos para un Sistema de N Partículas Puntuales Idénticas

En la aproximación 1PN, Φ , ξ y ψ están dados por [132]

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -G \int d^3\mathbf{x}' \frac{{}^0T^{00}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (\text{B.1})$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = - \int \frac{d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x}', t)}{\partial t^2} + G {}^2T^{00}(\mathbf{x}', t) + G {}^2T^{aa}(\mathbf{x}', t) \right], \quad (\text{B.2})$$

$$\xi_a(\mathbf{x}, t) = -4G \int d^3\mathbf{x}' \frac{{}^1T^{a0}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (\text{B.3})$$

(Denotamos $a, b = 1, 2, 3$). Para un sistema compuesto por N partículas puntuales idénticas, las componentes del tensor energía-momento, a este orden, son

$${}^0T^{00}(\mathbf{x}', t) = m \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i(t)), \quad (\text{B.4})$$

$${}^2T^{00}(\mathbf{x}', t) = m \sum_{i=1}^N \left[\Phi(\mathbf{x}', t) + \frac{\mathbf{v}_i^2}{2} \right] \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i(t)), \quad (\text{B.5})$$

$${}^1T^{0a}(\mathbf{x}', t) = m \sum_{i=1}^N v_i^a \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i(t)), \quad (\text{B.6})$$

$${}^2T^{ab}(\mathbf{x}', t) = m \sum_{i=1}^N v_i^a v_i^b \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i(t)). \quad (\text{B.7})$$

Introduciendo (B.4) en (B.1), y (B.6) en (B.3), obtenemos

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = - \sum_{i=1}^N \frac{Gm}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)|}, \quad (\text{B.8})$$

$$\xi(\mathbf{x}, t) = - \sum_{i=1}^N \frac{4Gm\mathbf{v}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)|}, \quad (\text{B.9})$$

mientras que, introduciendo (B.5) y (B.7) en (B.2) (la expresión T^{aa} indica suma sobre a), ψ toma la forma

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) = & - \sum_{i=1}^N \frac{(3/2)Gm\mathbf{v}_i^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{G^2 m^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \\ & + \frac{Gm}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{i=1}^N \int \frac{d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| |\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i(t)|}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Con el fin de resolver la integral en el lado derecho, introducimos la identidad [4]

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{k^2} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')},$$

que nos permite escribir

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| |\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i|} = \frac{1}{4\pi^4} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}'}{k^2 k'^2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}_i)} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}' }.$$

La integral sobre $\mathbf{x}'$ de esta última expresión, en virtud de la identidad

$$\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{x}' e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}'},$$

equivale a

$$\int \frac{d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| |\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i|} = \frac{2}{\pi} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{k^4} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}. \quad (\text{B.11})$$

Definiendo coordenadas cartesianas, tales que k_z está en la dirección de

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_i, \quad (\text{B.12})$$

y luego, cambiando a coordenadas esféricas e introduciendo la transformación $u = kr = k|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$, la integral del lado derecho de (B.11), toma la forma

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{k^4} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)} = 4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| \int_0^\infty du \frac{\sin u}{u^3}. \quad (\text{B.13})$$

Dado que

$$\int_0^\infty du \frac{\sin u}{u^3} = -\frac{\pi}{4},$$

encontramos que (B.11) se reduce a

$$\int \frac{d^3 \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| |\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i|} = -2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|. \quad (\text{B.14})$$

Entonces, tenemos que tener en cuenta el término

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)| = \frac{\mathbf{v}_i^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} - \frac{[\mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)]^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} \cdot \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}.$$

en (B.10). Aquí, en concordancia con el orden de la aproximación, debemos tomar

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -Gm \sum_{j \neq i} \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3}.$$

Finalmente, podemos escribir (B.10) como

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) = & -G^2 m^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{(\mathbf{x} - 3\mathbf{x}_i + 2\mathbf{x}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{2|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \right\} \\ & -Gm \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{2\mathbf{v}_i^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} - \frac{[\mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)]^2}{2|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Introduciendo las relaciones (B.8), (B.9) y (B.15) en (4.116), podemos expresarla como en (4.130).

Deducción de las Relaciones (4.142)-(4.144)

Introduciendo (4.138) en (4.141), esta puede expresarse como

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{F}_N = \int d^3 \mathbf{v}' \nabla_{vv'} \cdot \boldsymbol{\Omega}_N \cdot \nabla_{vv'} [f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)], \quad (\text{C.1})$$

donde el subíndice N indica que estamos tratando con un caso newtoniano y que $\boldsymbol{\Omega}_N$ es un tensor de segundo rango, definido como

$$\boldsymbol{\Omega}_N = \int_0^\infty d\tau \int d^3 \mathbf{r} \left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{x}} \right] \left[\frac{\partial V(\mathbf{r} - \tau \mathbf{u}_{vv'})}{\partial \mathbf{x}} \right], \quad (\text{C.2})$$

donde hemos cambiado el dominio de integración $\mathbf{x}'$ por $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, y hemos llamado $\Phi(\mathbf{r}) = -Gm/r$. Es conveniente expresar $\Phi(\mathbf{r})$ y $V(\mathbf{r})$ en la expansión de Fourier:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3 \mathbf{k} \Phi_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad V(\mathbf{r}) = \int d^3 \mathbf{k} V_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (\text{C.3})$$

con

$$\Phi_k = -\frac{Gm}{2\pi^2 k^2}, \quad V_k = \frac{\alpha^3 V_o}{8\pi^{3/2}} e^{-(k\alpha/2)^2}. \quad (\text{C.4})$$

Introduciendo (C.3) en (C.2), encontramos¹

$$\boldsymbol{\Omega}_N = 8\pi^3 \int_0^\infty d\tau \int d^3 \mathbf{k} e^{i\tau \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{vv'}} \Phi_k V_k \mathbf{k} \mathbf{k}. \quad (\text{C.5})$$

La integral con respecto a τ puede ser evaluada usando la representación (ver apéndice 2 de [7])

$$\int_0^\infty d\tau e^{\pm i x \tau} = \pi \delta(x) \pm i \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right), \quad (\text{C.6})$$

donde $\mathcal{P}(1/x)$ denota la parte principal. Teniendo en cuenta que $\delta(x)$ es una función par, $\mathcal{P}(1/x)$ es impar, y $\Phi_k V_k \mathbf{k} \mathbf{k}$ es impar en el vector $\mathbf{k}$, obtenemos

$$\boldsymbol{\Omega}_N = 8\pi^4 \int d^3 \mathbf{k} \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{vv'}) \Phi_k V_k \mathbf{k} \mathbf{k}. \quad (\text{C.7})$$

¹En esta ecuación, el símbolo $\mathbf{k} \mathbf{k}$ representa el producto exterior del vector $\mathbf{k}$ por sí mismo.

El cálculo de la integral anterior es simplificado usando coordenadas esféricas y escogiendo el eje Z en la dirección $\mathbf{u}_{vv'}$ (detalles de esta transformación son mostrados en [6], sección 11.6). Encontramos que

$$\boldsymbol{\Omega}_N = C \frac{u_{vv'}^2 \mathbf{I} - \mathbf{u}_{vv'} \mathbf{u}_{vv'}}{u_{vv'}^3} \quad (\text{C.8})$$

donde $\mathbf{I}$ es el tensor densidad de segundo rango y

$$C = 8\pi^5 \int_0^\infty dk k^3 \Phi_k V_k = -\pi^{3/2} G m \alpha V_o. \quad (\text{C.9})$$

La relación (C.8) nos permite escribir la divergencia de velocidad de $\mathbf{F}_N$ en la forma Fokker-Planck:

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{F}_N = -\frac{\partial}{\partial v_i} (\tilde{A}_N^i f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (\tilde{B}_N^{ij} f) \quad (\text{C.10})$$

en donde hemos usado la convención de sumatoria ($i, j = 1, 2, 3$) y

$$\tilde{A}_N^i = \int d^3 \mathbf{v}' f(\mathbf{x}, \mathbf{v}') \left[\frac{\partial}{\partial v_j} - \frac{\partial}{\partial v'_j} \right] \Omega_N^{ij}, \quad (\text{C.11})$$

$$\tilde{B}_N^{ij} = 2 \int d^3 \mathbf{v}' f(\mathbf{x}, \mathbf{v}') \Omega_N^{ij}. \quad (\text{C.12})$$

Finalmente, introduciendo (C.8) y (C.9) en las últimas relaciones, obtenemos (4.143)-(4.144).

Bibliografía

- [1] A. Abramovici, W.E. Althouse, R.W.P. Drever, Y. Gursel, S. Kawamura, F.J. Raab, D.H. Shoemaker, L. Sievers, R.E. Spero, K.S. Thorne, R.E. Vogt, R. Weiss, S.E. Whitcomb, and M.E. Zucker. *Science*, 256, 325 (1992).
- [2] C. Akimushkin, J. Ramos-Caro and G. González. arxiv:0910.1627 [astro-ph].
- [3] H. Andréason. *Living Rev. Rel.*, 8 (2005).
- [4] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*, 2nd Ed., Academic Press, San Diego, U.S.A. (1973).
- [5] H. Balasin and D. Grumiller. *Int. J. Mod. Phys. D*, 17, 475 (2008).
- [6] R. Balescu *Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics*. Jhon Wiley, New York, U.S.A (1975).
- [7] R. Balescu. *Statistical Mechanics of Charged Particles*. Wiley Interscience (1963).
- [8] V. Bagin. *Astron. Zhur.*, 49, 1249 (1972).
- [9] H. Bateman. *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, McGraw Hill, New York, U.S.A. (1953).
- [10] G. Benettin, L. Galgani, and A. Giorgilli. *Phys. Rev. A*, 14, 2338 (1972).
- [11] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, Princeton, U.S.A. (2008)
- [12] R. Blandford, and S.A. Teukolsky. *Astrophys. J.*, 205, 580-591, (1976).
- [13] N. N. Bogoliubov . *J. Phys. USSR*. 10, 257 (1938).
- [14] L. Boltzmann. *Lectures on Gas Theory*. University of California Press, U.S.A. (1964).
- [15] M. Born. and H.S. Green. *Proc. R. Soc. Lond. A*188, 10 (1946).

- [16] C. Bradaschia, R. Del Fabbro, A. Di Virgilio, A. Giazotto, H. Kautzky, V. Montelatici, D. Passuello, A. Brillet, O. Cregut, P. Hello, C.N. Man, P.T. Manh, A. Marraud, D.H. Shoemaker, J. Y. Vinet, F. Barone, L. di Fiore, L. Milano, G. Russo, J.M. Aguirregabiria, H. Bel, J.P. Duruisseau, G. Le Denmat, P. Tournenc, M. Capozzi, M. Longo, M. Lops, I. Pinto, G. Rotoli, T. Damour, S. Bonazzola, J.A. Marck, Y. Gourghoulon, L.E. Holloway, F. Fuligni, V. Iafolla and G. Natale. Nucl. Instrum. Methods A, 289, 518-525 (1990).
- [17] J. C. Brandt, *Astrophys. J.*, 131, 211 (1960).
- [18] J. C. Brandt and M. J. S. Belton, *Astrophys. J.*, 136, 352 (1962).
- [19] D. Boccaletti and G. Pucacco, *Theory of Orbits, Volume 1*. Springer. Third edition (2004).
- [20] W.L. Burke. *J. Math. Phys.*, 12, 401 (1971).
- [21] California Institute of Technology, *LIGO Laboratory Home Page*. URL: <http://www.ligo.caltech.edu>.
- [22] S. Capozziello, V.F. Cardone and A. Troisi. arXiv:astro-ph/0602349.
- [23] C. Cercignani and G. M. Kremer. *The relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications* (Birkhäuser Verlag, Basel, 2002).
- [24] E. Weinsstein. <http://mathworld.wolfram.com/SurfaceofSection.html>
- [25] G. Chacón-Acosta and G. M. Kremer. *Phys. Rev. E* 76, 021201 (2007).
- [26] S. Chandrasekar. *Rev. Mod. Phys.* 21, 383 (1949).
- [27] S. Chandrasekar. *Rev. Mod. Phys.* 15, 1 (1943).
- [28] S. Chandrasekhar. *Astrophys. J.*, 142, 1488 (1965).
- [29] S. Chandrasekhar. *Astrophys. J.*, 158, 45 (1969).
- [30] S. Chandrasekhar and F.P. Esposito. *Astrophys. J.*, 160, 153 (1970).
- [31] S. Chandrasekhar and Y. Nutku. *Astrophys. J.*, 158, 55 (1969).
- [32] S. Chandrasekhar and , F.P. Esposito. *Astrophys. J.*, 160, 153 (1970)

- [33] A. R. Cooray. Mon. Not. R. Astron. Soc. 313, 783 (2000).
- [34] F. I. Cooperstock and S. Tieu. arXiv:astro-ph/0507619.
- [35] F. I. Cooperstock and S. Tieu. arXiv:astro-ph/0512048.
- [36] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1, Interscience Publishers, New York, U.S.A. (1953).
- [37] T. Damour and J.H. Taylor. Astrophys. J., 366, 501 (1991).
- [38] H. Dejonghe. Phys. Rep., 133, 217 (1986).
- [39] H. Dejonghe and P. de Zeeuw. Astrop. J., 333, 90 (1988).
- [40] T. H. Dupree. Phys. Fluids, 10, 1049 (1967).
- [41] A. Einstein, L. Infeld and B. Hoffmann. Ann. Math., 39, 65 (1938).
- [42] A. Einstein and L. Infeld. Ann. Math., 41, 455 (1940).
- [43] A. Einstein and L. Infeld. Canad. J. Math., 1, 209 (1949).
- [44] A. Eddington. Mon. Not. R. Astron. Soc., 76, 572 (1916).
- [45] R. Epstein. Astrophys. J., 216, 92 (1977).
- [46] N. Evans. Mon. Not. R. Astron. Soc., 260, 191 (1999).
- [47] N Evans. Mon. Not. R. Astron. Soc., 267, 333 (1994).
- [48] V.A. Fock, *Theory of space, time and gravitation*, Pergamon Press, London, U.K (1959).
- [49] S. Frauendorf and V. V. Pashkevich, Z. Phys. **D** 26, S98 (1993).
- [50] W. Fricke. Astron. Nach., 280, 193 (1952).
- [51] T. Futamase and Y. Itoh. Liv. Rev. Rel. 10, 2 (2007).
- [52] D. Garfinkle. arxiv:gr-qc/0511082.
- [53] G. A. González and P. S. Letelier. Class. Quantum Grav. 16, 479 (1999).
- [54] G. A. González and P. S. Letelier, Phys. Rev. D 62, 064025 (2006).

- [55] G. González, and J. Reina. Mon. Not. R. Astron. Soc., 371 (4), 1873 (2006).
- [56] G. González, S. M. Plata-Plata and J. Ramos-Caro. arXiv:0906.1355v1 [astro-ph.GA].
- [57] H. Goldstein, Ch. Poole and J. Safko. *Classical Mechanics*, 3rd Ed., Addison-Wesley, San Francisco, U.S.A. (2002).
- [58] P. Goldstein and L.A. Turski, Physica 89A, 481 (1977).
- [59] F. Golse, Jour. Équ. Deriv. Part. IX,1 (2003).
- [60] E. Guéron & P. Letelier. Phys. Rev. D 56, 12 (1997).
- [61] E. Guéron and P. S. Letelier, Phys. Rev. E, 63, 035201(R) (2001).
- [62] E. Guéron and P. S. Letelier, Phys. Rev. E 66, 046611 (2002).
- [63] I. Hamamoto, B. Mottelson, H. Xie and X. Z. Zhang Z. Phys. **D** 21, 163 (1991).
- [64] W. D. Heiss, R. G. Nasmitdinov and S. Radu. Phys. Rev. Lett., 72, 2351 (1994).
- [65] K. Huang. *Statistical Mechanics*, 2nd Ed., John Wiley and Sons, New York, U.S.A. (1987).
- [66] R.A. Hulse and J.H. Taylor. Astrophys. J. Lett., 195, L51, (1975).
- [67] C. Hunter. Mon. Not. R. Astron. Soc., 126, 299 (1963).
- [68] C. Hunter. Astron. J., 80, 783 (1975).
- [69] C. Hunter, E. Qian. Mon. Not. R. Astron. Soc., 262, 401 (1993).
- [70] W. Israel and H. Kandrup, Ann. Phys. 152, 30 (1984)
- [71] J. C. Jackson and M. Dodgson. arXiv:astro-ph/0605102.
- [72] Z. Jiang. Mon. Not. R. Astron. Soc., 319, 1067 (2000).
- [73] Z. Jiang and D. Moss. Mon. Not. R. Astron. Soc., 331, 117 (2002).
- [74] Z. Jiang and L. Ossipkov. Mon. Not. R. Astron. Soc., 379, 1133 (2007).
- [75] Z. Jiang and L. Ossipkov. Mon. Not. R. Astron. Soc., 379,1133 (2007).

- [76] A. Kalnajs. *Astrophys. J.*, 175, 63 (1972).
- [77] A. Kalnajs. *Astrophys. J.*, 205, 751 (1976).
- [78] W. Israel and H. Kandrup. *Ann. Phys.* 152, 30 (1984).
- [79] H. Kandrup. *Ann. Phys.* 153, 44 (1984)
- [80] H. Kandrup. *Ann. Phys.* 169, 352 (1986).
- [81] J. G. Kirkwood, *J. Chem. Phys.* 14, 180 (1946).
- [82] Y. L. Klimontovich, *The Statistical Theory of Non-Equilibrium Processes in a Plasma*. Cambridge: MIT Press, U.S.A. (1967).
- [83] M. Korzynski. arxiv:astro-ph/0508377.
- [84] W. Kunkel *Plasma Physics in Theory and Application*. Mc Graw-Hill (1966).
- [85] S. Kutuzov. *Astron. & Astroph. Trans.*, 7, 191 (1995).
- [86] S. Kutuzov and L. Ossipkov. *Astron. Zhur.*, 57, 28 (1980).
- [87] S. Kutuzov and L. Ossipkov. *Trans. Astrof.*, 25, 545 (1986).
- [88] S. Kutuzov and L. Ossipkov *Astron. Zh.*, 65, 468 (1988).
- [89] G. Kuzmin and S. Kutuzov. *Bull. Abastumani Astrophys. Obs.*, 27, 82 (1962).
- [90] L. D. Landau, *Phys. Z. Sowj. Union.* 10, 154 (1936).
- [91] T. Ledvinka, Schäfer G. and Bičák J., *Phys. Rev. Let.* 100, 251101 (2008).
- [92] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier. *Class. Quantum Grav.* 10, L75 (1993).
- [93] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier. *Phys. Rev. D* 49, 5135 (1994).
- [94] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier. *Int. J. Modern Phys. D* 5, 53 (1996).
- [95] M. Ujevic and P. Letelier. *J. Comp. Phys.* 215, 485 (2006).
- [96] P. S. Letelier, and S. R. Oliveira. *J. Math. Phys.*, 28, 165, (1987).
- [97] J. Li. *J. Phys. G.* 24, 1021 (1998).

- [98] H.A. Lorentz and J. Droste, *The motion of a system of bodies under the influence of their mutual attraction, according to Einstein's theory*, in Zeeman, P., and Fokker, A.D., eds., *The Collected Papers of H.A. Lorentz*, Vol. 5, 330-355, (Nijhoff, The Hague, Netherlands, 1937). English translation of Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam, 26, 392 and 649, (1917).
- [99] D. Lynden-Bell. Mon. Not. R. Astron. Soc., 123, 447 (1962).
- [100] C. P. Ma and E. Bertschinger, *Astrophys. J.* 612, 28 (2004).
- [101] M. D. Maia , A. J. S.Capistrano and D. Muller. arXiv:astro-ph/0605688.
- [102] D. Menziesand and G. J. Mathews. arXiv:gr-qc/0604092.
- [103] M. Miyamoto. Pub. Astron. Soc. Japan, 23, 21 (1971).
- [104] M. Miyamoto and R. Nagai. Pub. Astron. Soc. Japan, 27, 533 (1975).
- [105] P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. Mc Graw Hill, New York, U.S.A. (1953).
- [106] R. Nagai, M. Miyamoto. Pub. Astron. Soc. Japan, 28, 1 (1976).
- [107] J. P. Ostriker, L. Spitzer and R. A. Chevalier. *Astrophys. J.*, 176, L51 (1972).
- [108] J.F. Plebánski and S.L. Bażyński. *Acta Phys. Pol.*, 18, 307, (1959).
- [109] J. Pedraza , J. Ramos-Caro and G. A. González, Mon. Not. R. Astron. Soc. 390, 1587 (2008).
- [110] J. Pedraza, J. Ramos-Caro and G. A. González, Mon. Not. R. Astron. Soc. 391, L24 (2008).
- [111] J. Pedraza, J. Ramos-Caro and G. A. González. arxiv:0806.4275v1 [astro-ph]
- [112] I. Prigogine *Non-Equilibrium Statistical Mechanics*. Interscience Publishers, New York, U.S.A. (1962).
- [113] J. Ramos-Caro and G. A. González. *Class. Quantum Grav.*, 25, 045011 (2008)

- [114] J. Ramos-Caro, F. López and G. González. Mon. Not. R. Astron. Soc., 386 (1), 440 (2008.)
- [115] J. Ramos-Caro, F. López and G. González. arxiv:0806.4282 [gr-qc]
- [116] B. S. Ryden., Astrophys. J. 461, 146 (1996).
- [117] M. J. Rees. Ann. Revi. Astron. Astrophys. 22, 471 (1984)
- [118] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. Astroph. J. 292, 41 (1985)
- [119] V. Rezanian and Y. Sobouti, Astron. Astrophys., 354, 1110 (2000).
- [120] M. N. Rosenbluth, W. M. MacDonald and D.L. Judd. Phys. Rev. 107, 1 (1957).
- [121] S. Samko, A. Kilbas and A. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives: theory and applications*, Gordon and Breach, Amsterdam, Holland (1993).
- [122] M. Schmidt. Bull. Astron. Inst. Neth, 13, 15 (1975).
- [123] O. Semerákand and M. Záček. Class. Quantum Grav. 17, 1613 (2000).
- [124] O. Semerákand and M. Záček. Class. Quantum Grav. 19, 3829 (2002).
- [125] M. Záček and O. Semerák. Class. Czech. J. Phys. 52, 19 (2002).
- [126] A. Toomre. Astrophys. J., 138, 385 (1963).
- [127] A. Toomre. Astrophys. J., 139, 1217 (1964).
- [128] A. Toomre. Astrophys. J., 259, 535 (1982).
- [129] M. A. W. Verheijen and R. Sancici. Astron. Astrophys., 370, 765 (2001).
- [130] A. Vlassov. Zh. Eksp. Teor. Fiz. 8, 481(1938).
- [131] B. Vogt and P. S. Letelier. arxiv:astro-ph/ 0510750.
- [132] S. Weinberg *Gravitation and Cosmology*. John Wiley, New York, U.S.A. (1972).
(2003).

- [133] C.M. Will. *Experimental gravitation from Newton's Principia to Einstein's general relativity*, in Hawking, S.W., and Israel, W., eds., *Three Hundred Years of Gravitation*, 80-127, (Cambridge University Press, Cambridge, U.K.; New York, U.S.A., 1987).
- [134] C.M. Will. *Theory and experiment in gravitational physics*, (Cambridge University Press, Cambridge, U.K.; New York, U.S.A., 1993), 2nd edition.
- [135] C.M. Will. *Gravitational Waves from Inspiring Compact Binaries: A Post-Newtonian Approach*, in Sasaki, M., ed., *Relativistic Cosmology*, Proceedings of the 8th Nishinomiya- Yukawa Memorial Symposium, Shukugawa City Hall, Nishinomiya, Hyogo, Japan, 28-29 October, 1993, vol. 8 of NYMSS, 83-98, (Universal Academy Press, Tokyo, Japan, 1994).
- [136] C.M. Will. *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, *Living Rev. Rel.*, 9, (2006).
- [137] A. B. Wyse and N. U. Mayall. *Astrophys. J.*, 95, 24 (1942).
- [138] J. Yvon. *Les Corrélations et l'Entropie en Mécanique Statistique Classique*. Dunod, Paris, France (1935).
- [139] W. Zimdahl. *Class. Quantum Grav.* 6, 1879 (1989).