

**Efecto *Aharonov-Bohm* para una donadora  $D^0$  en un anillo cuántico de forma elíptica**

**Trabajo de Tesis como requisito parcial para optar al título de  
Magíster en Física**

**Javier del Cristo López Ortiz**

**Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física  
Bucaramanga  
2009**

---

**Efecto *Aharonov-Bohm* para una donadora  $D^0$  en un anillo cuántico de forma elíptica**

**Trabajo de Tesis como requisito parcial para optar al título de Magíster en Física**

**Autor**

**Javier del Cristo López Ortiz**

**Director**

**Ph. D. Harold Paredes Gutiérrez**

**Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física  
Bucaramanga  
2009**

---

*A mis padres...*  
***Fredis López Díaz y Gilma Ortiz López***

*Para ti, por brindarme la oportunidad  
de conocer mejor el milagro de la vida.*  
***A mi hijo Juan Diego López Bran.***

*También a una persona muy especial*  
***Luz Elena Bran***

## Agradecimientos

En primera instancia, agradezco a **DIOS** por brindarme la oportunidad de cosechar triunfos en la vida, por permitirme que éste sueño sea una realidad. También, por mantenerme activo en los momentos difíciles donde la angustia suele reinar y la desesperación martirizar. Doy gracias a mi DIOS, por todas esas cosas lindas que me permite ver a diario.

Agradezco de manera muy especial a todas las personas que me brindaron su amistad y su apoyo incondicional. A mis profesores del postgrado: Javier Betancur, Ilia Mikhailov, Carlos Beltrán, Francisco García y Harold Paredes, por sus enseñanzas y sugerencias, las cuales contribuyeron con mi proceso de formación académica. Que con su paciencia, dedicaron parte de su valioso tiempo para que avanzara con firmeza por las sendas del conocimiento en el área de la física.

Manifiesto, a través de estas líneas, la gratitud enorme que siento por mis amigos más cercanos, sin duda estoy en deuda con todos ellos, a los que les doy las gracias de manera muy especial. Arnoldo Teherán Herrera, Carmelo Ortiz Ríos y Familia, Jairo Humberto Marín, Mercaluz Hernández, que sin su ayuda, no hubiera sido posible llevar acabo muchos de los detalles de este proceso. Igualmente, estoy agradecido con mi inconfundible amigo Juan Carlos Piña Velásquez por su incondicional colaboración y apoyo que fue muy significativo.

También, quiero agradecer a los profesores Rosbel Jiménez y Tomás Suárez, de la Universidad de Córdoba en Montería. Quienes siempre me han brindado su apoyo y han creído en mí, depositando su confianza para que siga adelante, ellos me impulsaron con sus consejos a dar éste paso que hoy muestra sus mejores frutos. A todos, ellos muchas gracias.

A todos mis compañeros de postgrado, que compartieron conmigo en las aulas de clases la sabiduría que éstas encierran, con sus sugerencias y consejos apoyaron mis sueños de realizarme profesional y moralmente Elkin Ulloa, William Gutiérrez, Carlos Gómez y Jesús Eduardo Galván.

En este período de dificultades que no fueron invencibles, quiero agradecer a mis padres a los que les dedico este trabajo. Ellos que siempre me apoyaron haciéndome sentir valiente ante las adversidades, hoy por hoy ven un logro más en mi vida que de no ser por ellos no hubiera sido posible.

Hay un ser especial en mi vida a quien no quisiera pasar por alto y que durante toda esta etapa fue mi fuente de inspiración y con quien estoy muy agradecido. Admiro la tenacidad y paciencia con la que la mujer más linda de toda mi vida ha esperado durante estos dos largos años y que ha sufrido y reído a mi lado a ella dedico especialmente este trabajo de tesis *Luz Elena Bran Urrego* cuyo nombre es sinónimo de estrella.

Doy las gracias especialmente a la facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Industrial de Santander que a través de la Escuela de Física me brindó el apoyo económico para que este trabajo fuera posible. Agradezco a aquellas personas que de una u otra forma me apoyaron y colaboraron en el transcurso de la maestría y que por obvias razones no aparecen en estas páginas.

---

## ÍNDICE GENERAL

	Pág.
PARTE I	1
Fundamentos Teóricos	1
Introducción	2
Capítulo 1 Métodos de Aproximación y Modelamiento del Problema	5
1.1 Sistemas de un electrón	5
1.1.1 Electrones de valencia	6
1.1.2 Aproximación adiabática o de Born-Oppenheimer	6
1.1.3 Aproximación de campo central	7
1.2 Anillo cuántico circular de sección transversal muy pequeña con un electrón en ausencia de campos	7
1.3 Electrón en un anillo de sección transversal pequeña en presencia de campo magnético uniforme	15
1.4 Anillo cuántico de forma elíptica en presencia de una impureza $D^0$ en un campo magnético uniforme y paralelo al eje $z$	20
Capítulo 2 Resultados	29
2.1 Energía como función del campo magnético: caso circular	29
2.2 Energía como función del semieje mayor: caso circular	35
2.3 Energía como función del campo magnético: caso elíptico	37
2.4 Energía como función del semieje mayor: caso elíptico	40
PARTE III	42
Conclusiones	42
Capítulo 3 Conclusiones	43
Bibliografía	45

---

## ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1.1 Electrón en un anillo cuántico de forma circular de sección transversal muy pequeña en un potencial de confinamiento $V_{conf}$	8
Así,	11
Figura 1.2. Electrón en el interior de un anillo cuántico de forma circular, inmerso en un campo magnético uniforme y paralelo al eje z.	15
Figura 1.3. Sección transversal de un anillo cuántico de forma circular delgado en un campo magnético uniforme paralelo al eje z.	17
Figura 1.4. Energía de un electrón en un anillo cuántico circular, como función del campo magnético, para un valor del radio $R=4.0 a_0^*$ .	19
Figura 1.5. Energía de un electrón en un anillo cuántico circular, como función del campo magnético, para un valor del radio $R=5.0 a_0^*$ .	19
1.4 Anillo cuántico de forma elíptica en presencia de una impureza $D^0$ en un campo magnético uniforme y paralelo al eje z	20
Por otro lado, el potencial de confinamiento es tal que, dentro del anillo vale cero y fuera del mismo se hace muy grande ( $V_{conf} \rightarrow \infty$ ). Denotaremos la distancia que hay del centro de la elipse al centro del disco circular sobre la sección transversal del anillo por $R$ , que cambia con la posición angular, es decir, $R = R(\phi)$ . El valor de $R$ es muy grande comparado con el valor que toma $R_t$ ( $R \gg R_t$ ), y como el electrón se moverá en el plano vertical de la sección transversal circular del anillo, escogeremos un punto arbitrario para describir su movimiento allí.	20
Figura 1.6. Anillo cuántico elíptico de sección transversal circular inmerso en un campo magnético uniforme paralelo al eje z.	21
Figura 2.1. Curvas de energías de un anillo cuántico circular en un campo magnético paralelo al eje de simetría z para los casos: límite (gráficos (a) y (b)) en ausencia de impureza, y modelo utilizado en la tesis con impureza muy lejos y radio de la sección transversal muy pequeño (gráficos (c) y (d)).	31

Figura 2.2. Gráficos de las curvas de energía de un anillo cuántico circular delgado ( $a=b$ ) en un campo magnético uniforme y paralelo al eje de simetría  $z$ , para valores fijos e iguales del radio de la sección transversal y también de la posición de la impureza. 32

Figura 2.3. Gráficos de las curvas de energía de un anillo cuántico circular delgado ( $a=b$ ) en un campo magnético uniforme y paralelo al eje de simetría  $z$ , para cuatro valores diferentes de la posición de la impureza y el mismo valor del radio de la sección transversal. 34

Figura 2.4. Gráficos de las curvas de energía como función del semieje mayor, para el mismo valor del semieje menor, el mismo valor de la posición de la impureza y cuatro valores diferentes del radio de la sección transversal del anillo. 36

Figura 2.5. Gráficos de las curvas de energía como función del campo magnético para un anillo cuántico delgado de forma elíptica para cuatro valores diferentes de la posición de la impureza y el mismo valor del radio de la sección transversal. 38

Figura 2.6. Gráficos de las curvas de energía como función del campo magnético de un anillo cuántico delgado elíptico, para cuatro valores diferentes del semieje menor, con la impureza fija en  $3.5a_0^*$  y radio de la sección transversal igual a  $0.2a_0^*$ . 39

Figura 2.7. Gráficos de las curvas de energía como función del semieje mayor de un anillo cuántico delgado elíptico, para cuatro valores diferentes de la posición de la impureza y valores fijos del parámetro  $\gamma$  que caracteriza la intensidad del campo magnético igual a 0.5 y radio de la sección transversal igual a  $0.2a_0^*$ . 40

## RESUMEN

**TÍTULO: EFECTO AHARANOV-BOHM PARA UNA DONADORA  $D^0$  EN UN ANILLO CUÁNTICO DE FORMA ELIPTICA <sup>1</sup>**

AUTOR: Javier del Cristo López Ortiz\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Anillo cuántico, efecto Aharanov-Bohm, aproximación adiabática, pozo cuántico.

**DESCRIPCIÓN:** Se estudia el espectro energético de una impureza donadora neutra  $D^0$  confinada en un anillo cuántico de InAs/GaAs con forma elíptica y sección transversal circular. El estudio se realiza asumiendo que el electrón está obligado a moverse dentro del anillo, mientras que el centro de carga positiva se localiza en un punto cualquiera sobre el semieje mayor.

Los cálculos del espectro de energías se hacen suponiendo que el radio de la sección transversal del anillo es muy pequeño, comparado con los valores promedios correspondientes a los semiejes mayor y menor respectivamente. Esta comparación, nos permite hacer uso de la aproximación adiabática con el propósito de separar el movimiento lento de rotación alrededor del eje de simetría axial  $z$ , del movimiento rápido que ejecuta el electrón en la sección transversal del anillo. Nuestro modelo es lo suficientemente flexible para abarcar el caso del anillo circular como una situación particular.

También, se empleó el método de barrido trigonométrico por las características que posee éste frente a otros métodos, que al momento de resolver el problema de valores propios arroja todos los estados electrónicos del problema que estudiamos de manera inmediata, convirtiéndolo así, en uno de propiedades robustas. En relación a lo anterior, los resultados obtenidos para el caso cuando los de semiejes mayor y menor son iguales están en buen acuerdo con los reportados en la literatura y casos límites.

-

---

<sup>1</sup>Proyecto de grado de maestría

\*\*Facultad de ciencias, Escuela de física; PhD. Harold Paredes.

## ABSTRAC

### TITLE: **Aharanov-BOHM EFFECT FOR DONOR $D^0$ IN A QUANTUM RING ELLIPTICALLY SHAPED**

AUTOR: Javier del Cristo López Ortiz\*\*

KEY WORDS: Anillo cuántico, efecto Aharanov-Bohm, aproximación adiabática, pozo cuántico.

DESCRIPTION: We study the energy spectrum of a neutral donor impurity  $D^0$  confined in a quantum ring of InAs / GaAs with elliptical shape and circular cross section. The study is performed assuming that the electron is constrained to move inside the ring, while the positive charge center is located at any point on the semi-major axis.

The energy spectrum calculations are made assuming that the radius of the ring cross section is very small compared with the average values for the major and minor semiaxes respectively. This comparison allows us to use the adiabatic approximation in order to separate the slow movement of rotation about the z axis of axial symmetry, from rapid movement that runs the electron in the cross section of the ring. Our model is flexible enough to cover the case of the circular ring as a particular situation.

Also, we used the trigonometric sweep method for the features it has over other methods, that in the moment when solving the eigenvalue problem gives all electronic states immediately, making it, in one property robust. In relation to this, the results for the case where the major and minor semiaxes are equal are in good agreement with those reported in the literature and borderline cases.

---

<sup>1</sup>master's degree project

\*\*Sciences Faculty, College of Physics; PhD. Harold Paredes.

---

---

# **PARTE I**

---

---

## **Fundamentos Teóricos**

Una línea de investigación en física bastante activa es el campo de la materia condensada, y en esta área se realizan muchas investigaciones en materiales semiconductores. En los últimos años (incluyendo la actualidad) ha surgido un gran interés por estudiar muchas propiedades que poseen los sistemas físicos construidos con estos materiales, propiedades tales como las de transporte entre otras.

Cuando dos materiales semiconductores se unen en forma de capas continuas, se crea una heterojuntura semiconductor, al apilar en forma consecutiva muchas heterojunturas semiconductoras, de tal forma que las capas queden en secuencia alternada, entonces se construye una heteroestructura semiconductor. La manipulación tanto del ancho de las capas como de la dirección de crecimiento de las heteroestructuras nos permite construir sistemas de tres dimensiones (3D), sistemas de dos dimensiones (2D), sistemas de una dimensión (1D), y de dimensión casi cero (0D), formándose así sistemas de baja dimensionalidad no existentes en la naturaleza [1,2].

Los sistemas de baja dimensionalidad son conocidos también como nanoestructuras, porque las dimensiones topológicas que los caracterizan son del orden de los nanómetros. En el caso de las nanoestructuras semiconductoras ha surgido un interés bastante grande por estudiar las propiedades de transporte en general. Los sistemas nanoestructurados se han convertido en eje central de los estudios científicos y tecnológicos por su gran capacidad para transportar carga eléctrica (corriente eléctrica), espín (corriente magnética) y energía (sonido y/o calor), haciendo posible la creación de una nueva línea de investigación conocida como nanotecnología. Los sistemas de baja dimensionalidad o nanoestructuras más comunes en los que se está invirtiendo mucho esfuerzo por explorar y aprovechar la nueva física que los engloba son: los pozos cuánticos (QW's), puntos cuánticos (QD's), hilos cuánticos (QWW's), anillos cuánticos (QR's) y súper redes [1,2].

La ventaja de los sistemas de baja dimensionalidad, en comparación con los sistemas micrométricos, radica en que ellos se utilizan para diseñar sistemas que contengan muchos componentes. Si se controlan las interacciones y la complejidad de las nanoestructuras se pueden lograr nuevos conceptos en

diseños de dispositivos electrónicos, circuitos más pequeños con funciones más sofisticadas, reducción grande en la potencia consumida y del área específica de trabajo. Estos sistemas han sido posibles gracias a las maravillosas técnicas de crecimiento de cristales que han sido desarrolladas en las últimas décadas [1,2].

Actualmente una de las técnicas de crecimiento de cristales más utilizadas para fabricar nanoestructuras son las de crecimiento epitaxial, las cuales se subdividen en tipos de técnicas, siendo una de las más importantes y utilizadas la de crecimiento por fases moleculares (Molecular Beam Epitaxi MBE). La técnica epitaxial consiste en el crecimiento de capas orientadas sobre una superficie llamada sustrato. También, existen otras técnicas de crecimiento distintas a las epitaxiales tales como: deposición química en fase de vapor (Chemical Vapour Deposition (CVD)), pulverización catódica en magnetización por radiofrecuencias, entre otras [2,3].

Aún cuando los otros tipos de nanoestructuras ya sean (QW's), (QWW') y (QD's) son de muchísima importancia tanto a nivel teórico como experimental. No cabe duda que, los anillos cuánticos son los que mayores expectativas vienen generando por las bondades que brinda el confinamiento de portadores de carga en este tipo de sistemas de baja dimensionalidad.

La geometría del anillo es crucial para la manifestación de los efectos cuánticos. Por ejemplo, un efecto interesante que se presenta en un anillo cuántico es la existencia de una corriente en equilibrio llamada corriente persistente, que es consecuencia de introducir el anillo en un campo magnético. Hay que resaltar que, el fenómeno de la corriente persistente en un anillo cuántico está relacionado con el efecto de interferencia Aharonov-Bohm que es originado directamente en este caso por la simetría de anillo [4,5]. Efectos de este tipo motivan a que sistemas de esta naturaleza sigan siendo investigados con el fin de establecer algún tipo de vínculo entre los diferentes fenómenos que puedan surgir en anillos cuánticos.

Por otro lado, está claro que hasta el momento, se han realizado relativamente pocas investigaciones teóricas sobre impurezas donadoras confinadas en QR's. Por ejemplo, A. Bruno-Alfonso y A. Latgé [4], publican un trabajo en el (2000) donde presentan un estudio detallado de estados de impurezas 1s en QR's toroidales de GaAs-(Ga,Al)As con forma circular. Estos estudios fueron realizados usando procedimientos variacionales que les permitió indagar los efectos del confinamiento sobre los estados de impureza debida a la topología de las estructuras. También, H. Hu, J. Zhu y J. Xiong [6], analizan dos electrones en un anillo nanoscópico mediante el método de diagonalización exacta.

El impacto de las interacciones espín-órbita sobre los estado de energía electrónicos en anillos y puntos cuánticos semiconductores fueron estudiados teóricamente por O. Voskoboynikov et al. [7]. En éste artículo se empleó la aproximación de Hamiltoniano efectivo de dos bandas con un potencial de acoplamiento espín-órbita para describir y evaluar los efectos de la transición en la topología de la nanoestructura de punto a anillo cuántico. Mientras que, J. Planelles et al. [8], en el mismo año 2001 hicieron reporte de un trabajo relacionado con la estructura de la energía de anillos cuánticos dentro de un campo magnético. Estos autores investigaron la influencia que el campo magnético tiene sobre los estados biparticulares formados por dos electrones o dos huecos.

Jia-Lin Zhu et al. [9], (2003) reportaron un estudio detallado del espectro de energía y las oscilaciones Aharanov-Bohm (AB) en un nanoanillo bidimensional (2D) de doble barrera. En (2003) T. Ihn et al. [10], hacen un reporte sobre las mediciones de magneto transporte en anillos cuánticos semiconductores. En este mismo año, H. Pan y J. L. Zhu [11] analizan el problema de una  $D^0$  y una  $D^-$  en un anillo bidimensional mediante el método de diagonalización exacta; otro trabajo de Zhu et al. [12], donde se obtiene una solución exacta para el problema de dos electrones en un anillo unidimensional mediante expansión en series.

En (2004) B. S. Monzon et al [13], estudiaron analíticamente y numéricamente el problema de una impureza centrada en un anillo cuántico semiconductor en presencia de un campo eléctrico dirigido radialmente. Los cálculos analíticos se basaron en una aproximación adiabática semiclásica, mientras que los resultados numéricos se obtuvieron mediante el método de diferencias finitas en dos y tres dimensiones. En este mismo año (2004) S. Viefers et al. [14] publican un trabajo haciendo una revisión de las aproximaciones teóricas hechas sobre los anillos cuánticos unidimensionales y casi unidimensionales con pocos electrones.

J. L. Zhu [15], et al., publican nuevamente un trabajo en (2005) en el que ahora estudiaban el tamaño, efectos de la forma en el espectro de energía, transición de espín y la ocupación para estados de un electrón en un nano anillo con tres electrones con y sin impureza. En (2005) A. Bruno-Alfonso y A. Latgé [16] publican un trabajo teórico sobre estados electrónicos de conducción en anillos cuánticos de GaAs en presencia de un campo magnético y uno eléctrico, calculados a partir de la aproximación de masa efectiva poniendo atención de manera muy especial en los efectos que los campos eléctricos y excentricidad tienen sobre estos estados. Otro estudio que podemos mencionar es el de una centrada en un QR, realizado por Gutiérrez et al. [17], usando el método variacional.

---

---

## Capítulo 1 Métodos de Aproximación y Modelamiento del Problema

---

---

Para estudiar las propiedades electrónicas en anillos cuánticos, consideramos de particular importancia estudiar el sistema mono electrónico, ya que este sistema servirá para evaluar la validez de nuestros resultados en el caso límite cuando la donadora se sitúe a una gran distancia del anillo. Esbozamos de manera muy breve, como un problema que inicialmente es de muchos electrones se transforma en un problema uniparticular mediante la aplicación de aproximaciones apropiadas que permiten reducir la complejidad del sistema.

### 1.1 Sistemas de un electrón

Un modelo útil para estudiar estados localizados y ciertas propiedades específicas de heteroestructuras semiconductoras, es el modelo de un electrón. Si tomamos al sólido como un cristal perfecto, podemos utilizar el siguiente Hamiltoniano para describirlo,

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_j \frac{P_j^2}{2M_j} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,l \\ i \neq l}} \frac{Z_i Z_l e^2}{|R_i - R_l|} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{e^2}{|r_i - R_j|} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{Z_j e^2}{|r_i - R_j|} \quad (1.1)$$

El primer término de la ecuación representa la energía cinética de los electrones, el segundo la energía cinética de los centros atómicos, el tercer término corresponde a la energía potencial Coulombiana entre los núcleos, el cuarto término es la energía potencial de interacción Coulombiana entre los electrones y el término restante es el término de interacción Coulombiana electrón-núcleo.

El problema planteado en la ecuación (1.1) obviamente no tiene solución analítica, pero se logra reducir la complejidad introduciendo algunas aproximaciones [2, 3, 18]

### 1.1.1 Electrones de valencia

La primera aproximación que hacemos con el fin de reducir la complejidad del sistema es separar los electrones en dos grupos, es decir, electrones de valencia y electrones del “core” atómico, éstos últimos se encuentran fuertemente ligados a los núcleos de los átomos del cristal, mientras que los primeros se encuentran débilmente ligados a los núcleos atómicos y son responsables del enlace químico [2].

### 1.1.2 Aproximación adiabática o de Born-Oppenheimer

La esencia de este método reside en la enorme diferencia de masa que hay entre los núcleos atómicos y los electrones. Esta diferencia, permite la separación del movimiento electrónico del movimiento nuclear, debido al mayor valor de energía cinética de los electrones con relación al núcleo.

El Hamiltoniano de la expresión (1.1) se puede escribir como una suma de términos correspondientes a un Hamiltoniano iónico que denotamos por  $H_L$  y un Hamiltoniano electrónico que denotamos por  $H_e$ . Si  $\Psi(r,R)$  es la función de onda total, esta se puede escribir como el producto de una función de onda electrónica  $\varphi(r,R)$  por una función de onda iónica  $\chi(R)$ , es decir,  $H=H_L+H_e$  y  $\Psi(r,R)=\varphi(r,R)\chi(R)$  donde  $H_L$  y  $H_e$  están dados por:

$$H_L = \sum_j \frac{P_j^2}{2M_j} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,l \\ i \neq l}} \frac{Z_i Z_l e^2}{|R_i - R_l|} \quad (1.2)$$

$$H_e = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{e^2}{|r_i - R_j|} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{Z_j e^2}{|r_i - R_j|} \quad (1.3)$$

La ecuación de Schrödinger para el problema completo, ahora se puede dividir en dos partes, una ecuación de Schrödinger puramente iónica y una puramente electrónica [2, 3, 18].

$$H_L \chi(R) = E_L \chi(R) \quad (1.4)$$

$$H_e \varphi(r, R) = E_e \varphi(r, R) \quad (1.5)$$

### 1.1.3 Aproximación de campo central

El problema planteado para el movimiento electrónico en la ecuación (1.5) sigue siendo un problema de muchos electrones y se puede reducir a un problema de un solo electrón eligiendo la energía potencial como función únicamente de la posición y que todos los electrones experimenten el mismo potencial. Siendo así, este problema se reduce a:

$$H_{1e} \phi_n(r) = \left( \frac{p^2}{2m} + v(r) \right) \phi_n(r) = E_n \phi_n(r) \quad (1.6)$$

donde  $\phi_n(r)$  es la función de onda de un electrón,  $E_n$  la energía de un electrón y  $n$  el conjunto de números cuánticos que especifican el estado de un electrón [2,18,19].

## 1.2 Anillo cuántico circular de sección transversal muy pequeña con un electrón en ausencia de campos

Consideremos un electrón confinado dentro de un anillo cuántico que tiene una sección transversal circular de radio  $R_t$  muy pequeño comparado con el radio medio del anillo  $R$  ( $R \gg R_t$ ). Una representación esquemática del sistema en 3D se muestra en la figura 1.1.

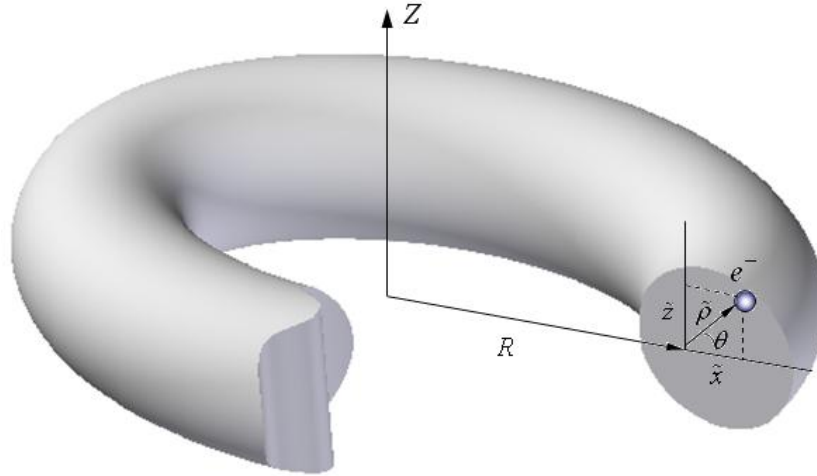


Figura 1.1 Electrón en un anillo cuántico de forma circular de sección transversal muy pequeña en un potencial de confinamiento  $V_{conf}$

Asumiremos que el electrón se encuentra atrapado en un pozo de potencial  $V_{conf}$ , el cual está definido por:

$$V_{conf} = \begin{cases} 0, & \text{Si } 0 \leq \tilde{\rho} \leq R_t; \\ \infty & \text{En otro caso} \end{cases} \quad (1.7)$$

Donde  $\tilde{\rho}$ , es la posición radial del electrón en la sección transversal circular del anillo como se muestra en la figura 1.1. Los estados electrónicos del sistema se obtienen resolviendo la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

$$H\Psi(r) = E\Psi(r) \quad (1.8)$$

donde  $H$  denota el operador Hamiltoniano del sistema,  $\Psi(r)$  la función de onda completa y  $E$  la energía del mismo. Este Hamiltoniano está dado por:

$$H = -\Delta + V_{conf} \quad (1.9)$$

Aquí,  $\Delta$  representa el operador Laplaciano en coordenadas cilíndricas, y viene dado por:

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \quad (1.10)$$

Aún cuando el problema puede resolverse utilizando otro tipo de coordenadas, se utilizarán las coordenadas cilíndricas porque brindan una mayor sencillez de trabajo por la simetría que tiene el problema.

En la realización de los cálculos, se aprovechará la condición impuesta anteriormente, en que  $R_r \ll R$ , esto se hace con el propósito de utilizar la aproximación adiabática, para llevar a cabo una separación de las variables.

Para comprender el sentido de esta aproximación, nos apoyaremos en la figura 1.1 donde se resalta la sección transversal del anillo, que además muestra al electrón en un punto cualquiera en el interior.

Denotemos por  $\rho$  la posición radial del electrón y  $\varphi$  la posición angular alrededor del eje de simetría  $z$ . La altura del electrón por encima del plano medio del anillo está denotada por la coordenada  $z$ . En términos generales, el electrón ejecutará dos movimientos en el interior del anillo, uno de rotación alrededor del eje  $z$ , asociada con la variación angular  $\varphi$  y otro sobre la sección transversal circular del mismo.

Para aplicar la aproximación adiabática empezaremos analizando la parte radial del operador Hamiltoniano contenida en el Laplaciano.

$$\Delta_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \quad (1.11)$$

En la figura 1.1 se observa que la posición radial del electrón en el instante considerado es justamente  $\rho = R + \tilde{x}$ . Dado que el radio medio del anillo es constante, podremos expresar las derivadas que aparecen en términos de  $\rho$  como derivadas que dependen de  $\tilde{x}$ . Así, tendremos entonces que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2}\end{aligned}\tag{1.12}$$

Con las expresiones dadas en las ecuaciones (1.12), la parte radial del Hamiltoniano toma la siguiente forma:

$$\Delta_{\rho} = \Delta_{\tilde{x}} = \frac{1}{(R + \tilde{x})} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2}\tag{1.13}$$

Como  $\tilde{x} \leq R_t$  y  $R \gg \tilde{x}$ , entonces la parte radial del operador Laplaciano se puede aproximar como:

$$\Delta_{\rho} \approx \Delta_{\tilde{x}} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2}\tag{1.14}$$

Con ésta aproximación los movimientos ejecutados por electrón al interior del anillo pueden ser separados.

La figura 1.1 muestra también que la coordenada  $z$  no sufre ningún cambio, así,  $z = \tilde{z}$ . Adicionalmente, nótese que la ecuación (1.14) es una consecuencia de la aproximación adiabática. Sin embargo, para hacer más evidente la comparación de las variables tratadas en el problema, tengamos presente que  $-R_t \leq \tilde{x}, \tilde{z} \leq R_t$ . Ahora, si hacemos el siguiente cambio de variable temporalmente:

$$\bar{x} = \frac{\tilde{x}}{R_t}, \quad \bar{z} = \frac{\tilde{z}}{R_t}.$$

Así,

$$|\tilde{x}| \leq 1, \quad |\tilde{z}| \leq 1.$$

Entonces tenemos la siguiente expresión para el Hamiltoniano:

$$\bar{H} = -\frac{1}{R_t^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + V_{conf}.$$

Este Hamiltoniano tiene un aspecto similar al de un átomo de hidrógeno libre. En nuestro caso, ésta ecuación puede interpretarse como la descripción de dos partículas que interactúan a través de un potencial efectivo  $V_{conf}$ . La primera partícula que haría las veces de electrón en nuestro caso, tiene una masa hipotética de valor  $2m=R_t^2$  y su movimiento se efectúa en el plano  $\bar{x}\bar{z}$  que corresponde a la sección transversal del anillo, esto con el fin de hacer válida la comparación con el átomo de hidrógeno. La segunda partícula, tiene una masa hipotética  $2M=R^2$  y su movimiento corresponde a uno de rotación alrededor del eje z. Se aprecia que la primera partícula es menos inercial que la segunda ya que  $R_t \ll R$ , entonces podemos decir que la energía cinética de la primera es mucho mayor que la energía cinética de la segunda. Este tipo de separación de los movimientos lento y rápido, se conoce en mecánica cuántica como aproximación adiabática.

El Hamiltoniano que queremos para describir nuestro problema tiene la siguiente forma:

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} + V_{conf} \quad (1.15)$$

Este Hamiltoniano puede escribirse como la suma de dos Hamiltonianos, uno que corresponde al movimiento lento del electrón a lo largo del interior del anillo y otro que describe el movimiento rápido efectuado en la sección transversal, esto es,  $H=H_l+H_r$ , donde  $H_l$  y  $H_r$  están dados por:

$$H_l = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1.16)$$

$$H_r = -\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} + V_{conf} \quad (1.17)$$

Como resultado de esto la función de onda completa que nos permite describir el problema se puede escribir como el producto de dos funciones de onda, una para el movimiento rápido  $\Psi_r$  y otra para el movimiento lento  $\Psi_l$ , así:  $\Psi_{total} = \Psi_r \Psi_l$ . Por consiguiente, nuestro objetivo ahora se centra en el siguiente par de problemas.

$$\begin{aligned} H_l \Psi_l &= E_l \Psi_l \\ H_r \Psi_r &= E_r \Psi_r \end{aligned} \quad (1.18)$$

donde  $E_l$  y  $E_r$  son las energías que describen los movimientos lento y rápido respectivamente.

El Hamiltoniano que describe el movimiento rápido puede reescribirse mediante el uso de las coordenadas polares  $(\tilde{\rho}, \theta)$  y las relaciones  $\tilde{x} = \tilde{\rho} \cos \theta$  y  $\tilde{z} = \tilde{\rho} \sin \theta$ , en la siguiente forma es:

$$H_r = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \tilde{\rho} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} - \frac{1}{\tilde{\rho}^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + V_{conf} \quad (1.19)$$

La función de onda del movimiento rápido será función de las variables  $\tilde{\rho}$  y  $\theta$ , es decir  $\Psi_R = \Psi_R(\tilde{\rho}, \theta)$ . En términos generales, el problema en la sección transversal se reduce a resolver la ecuación diferencial en derivadas parciales con condiciones de contorno siguientes:

$$\begin{aligned} \left( -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \tilde{\rho} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} - \frac{1}{\tilde{\rho}^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + V_{conf} \right) \Psi_R(\tilde{\rho}, \theta) &= E_R \Psi_R(\tilde{\rho}, \theta) \\ \Psi_R(0, \theta) = \Psi_R(R_t, \theta) &= 0 \\ \Psi_R(\tilde{\rho}, 0) = \Psi_R(\tilde{\rho}, 2\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

La ecuación (1.20) junto con sus condiciones de contorno, la resolvemos proponiendo una solución de la forma  $\Psi_R(\tilde{\rho}, \theta) = \chi(\tilde{\rho})\Theta(\theta)$ . Luego de aplicar separación de variables, descomponemos la ecuación diferencial parcial en dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\tilde{\rho}^2 \frac{d^2}{d\tilde{\rho}^2} \chi(\tilde{\rho}) + \tilde{\rho} \frac{d}{d\tilde{\rho}} \chi(\tilde{\rho}) + (E_R \tilde{\rho}^2 - m^2) \chi(\tilde{\rho}) = 0 \quad \chi(0) = \chi(R_t) = 0 \quad (1.21)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \Theta(\theta) + m^2 \Theta(\theta) = 0 \quad \Theta(0) = \Theta(2\pi) = 1 \quad (1.22)$$

La ecuación (1.22) se satisface solo cuando  $m$  es un entero, debido a las condiciones impuestas. Por consiguiente, las soluciones que buscamos son del tipo:

$$\Theta(\theta) = e^{im\theta} \quad \text{con } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (1.23)$$

Por otro lado, si se examina la forma de la ecuación (1.21), se encuentra que ésta es una ecuación de Bessel y, dadas las condiciones, las soluciones que queremos son del tipo:

$$\chi_m(\tilde{\rho}) = J_m\left(\frac{\tilde{\rho}_{mv}}{R_t} \tilde{\rho}\right) \quad \text{con } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{y } \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (1.24)$$

donde  $\tilde{\rho}_{mv}$  corresponde a las raíces de las funciones de Bessel de primera clase de orden  $m$ . También se encuentra de la ecuación (1.24) que los valores propios de energía están dados por:

$$E_r = \frac{\tilde{\rho}_{mv}^2}{R_t^2} \quad (1.25)$$

Las funciones propias que describen el movimiento rápido, que se da en la sección transversal de anillo son del tipo:

$$\Psi_r(\tilde{\rho}, \theta) = C_1 J_m\left(\frac{\tilde{\rho}_{mv}}{R_t} \tilde{\rho}\right) e^{im\theta} \quad (1.26)$$

donde  $C_1$  es una constante de normalización.

Retornemos al movimiento lento. La ecuación que describe a éste alrededor del eje  $z$  es:

$$-\frac{1}{R^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \Psi_l = E_l \Psi_l \quad (1.27)$$

donde  $E_l = E - E_r$  es el valor propio de energía para el movimiento lento. La ecuación diferencial anterior se ajusta a las condiciones de contorno

$\Psi_l(0) = \Psi_l(2\pi) = 1$  debido a la periodicidad en el movimiento. Sus soluciones son senos y cósenos, es decir, del tipo  $\exp(in\varphi)$ , donde  $n$  es un número entero. Lo anterior nos permite escribir al valor de  $E_l$  como  $E_l = n^2 / R^2$ , por lo tanto la energía total en el sistema dependerá de los valores que tomen los enteros  $m$  y  $n$ . Así, los valores propios que denotamos por  $E_{mn}$  son de la forma:

$$E_{mn} = \frac{\tilde{p}_{mv}^2}{R_t^2} + \frac{n^2}{R^2} \quad (1.28)$$

### 1.3 Electrón en un anillo de sección transversal pequeña en presencia de campo magnético uniforme

Trataremos el problema de un electrón confinado en un sistema en forma de anillo cuántico circular de radio medio  $R$ , constante. Aplicaremos la aproximación adiabática y se asumirá como en el caso anterior, que el anillo posee una sección transversal circular de radio  $R_t \ll R$ . En la figura 1.2 se muestra una representación esquemática de la nueva situación, en la cual el anillo se ubica en un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$  paralelo al eje  $z$ . El electrón estará confinado en el anillo por un potencial que denotaremos por  $V_{conf}$  y cuyo valor está definido en (1.7). Debido al confinamiento, el electrón ejecutará dos movimientos: uno lento y otro rápido (como en la sección anterior).

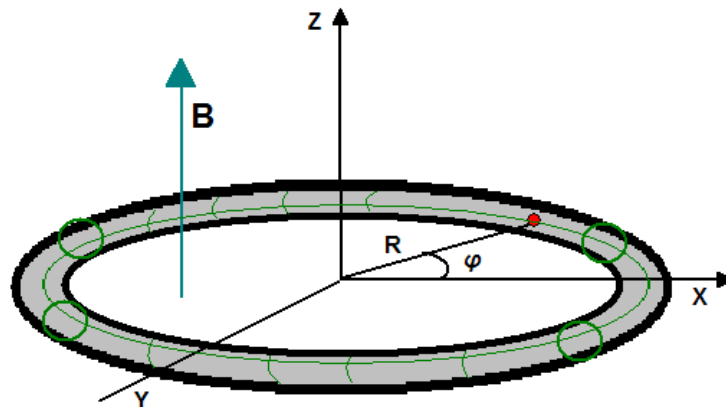


Figura 1.2. Electrón en el interior de un anillo cuántico de forma circular, inmerso en un campo magnético uniforme y paralelo al eje  $z$ .

Tomemos una imagen instantánea de la sección transversal plana del anillo, donde se encuentra el electrón en dicho instante, como se muestra en la figura 1.3. El Hamiltoniano que permite obtener los estados electrónicos del sistema ahora está dado por:

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V_{conf} \quad (1.29)$$

Donde  $\mathbf{A}$  es el potencial vectorial magnético,  $V_{conf}$  el potencial de confinamiento,  $e$  el valor absoluto de la carga fundamental,  $m$  la masa efectiva del electrón y  $c$  la rapidez de la luz en el vacío. Dado que, el electrón se está moviendo alrededor del eje  $z$  se establecerá una corriente en la dirección angular  $\varphi$ . En consecuencia, el potencial vectorial, es tal que:  $\mathbf{A} = A_\varphi(r) \hat{\mathbf{e}}_\varphi$

Recordemos que  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ . Entonces, el término  $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p})$  que resulta de desarrollar el cuadrado en la energía cinética, puede reescribirse utilizando el gauge de Coulomb apropiado. Por consiguiente, el Hamiltoniano toma la forma:

$$H = \frac{1}{2m} \left( p^2 + 2\frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{c^2} A^2 \right) + V_{conf} \quad (1.30)$$

Escogiendo al potencial vectorial  $\mathbf{A}$ <sup>3</sup> como:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} = \frac{1}{2} B_0 r \hat{\mathbf{e}}_\varphi \quad (1.31)$$

y reemplazando  $\mathbf{A}$  en el Hamiltoniano tendremos que:

---

<sup>3</sup> Se sabe de la electrodinámica clásica, que la escogencia del potencial vectorial que satisface la condición de Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  no es única. Sin embargo, escogemos ésta porque se ajusta a las condiciones físicas del problema.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - i\left(\frac{\hbar e B_0}{2mc}\right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left(\frac{e^2 B_0^2}{8mc^2}\right) \rho^2 + V_{conf} \quad (1.32)$$

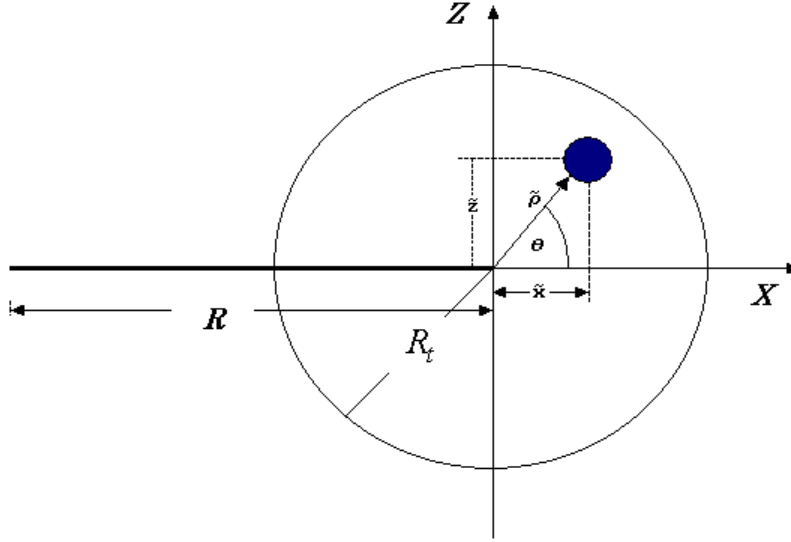


Figura 1.3. Sección transversal de un anillo cuántico de forma circular delgado en un campo magnético uniforme paralelo al eje z.

En coordenadas adimensionales, el Hamiltoniano toma la forma dada a continuación.

$$H = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} + V_{conf} \quad (1.33)$$

Con el Hamiltoniano anterior, resolvemos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, la cual permite calcular los estados electrónicos del sistema. Aplicando la aproximación adiabática de nuevo, podemos separar los movimientos efectuados por el electrón. Ahora, como  $R$  es constante, las derivadas respecto a  $\rho$  y  $z$  se pueden escribir en términos de derivadas respecto a  $\hat{\rho}$  y  $\tilde{z}$ . Por consiguiente, el nuevo Hamiltoniano aproximado es:

$$H \approx -\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\gamma^2 R^2}{4} + V_{conf} \quad (1.34)$$

Se nota de nuevo que, la ventaja de utilizar coordenadas adimensionales, radica en separar los movimientos rápido y lento del electrón en el interior del anillo. Por tal razón, éste se puede escribir nuevamente como la suma de los términos  $H_l$  y  $H_r$ , correspondientes al movimiento lento y rápido respectivamente, similar al caso anterior. En tal caso, las expresiones para estos son:

$$H_r = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \tilde{\rho} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} - \frac{1}{\tilde{\rho}^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + V_{conf} \quad (1.35)$$

$$H_l = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\gamma^2 R^2}{4} \quad (1.36)$$

Similar al caso de la sección 1.2, tenemos que resolver dos problemas.

$$H_l \Psi_l = E_l \Psi_l \quad \text{y} \quad H_r \Psi_r = E_r \Psi_r$$

donde  $\Psi_r, \Psi_l, E_r,$  y  $E_l$  son las funciones propias y energías propias respectivamente de los movimientos lento y rápido. Recordemos que, el problema  $H_r \Psi_r = E_r \Psi_r$  fue resuelto en la sección anterior con funciones propias de las formas dadas por la expresión (1.26) y energías propias dadas por la expresión (1.25).

Para el caso del movimiento lento, la ecuación  $H_l \Psi_l = E_l \Psi_l$  nos conduce a la ecuación diferencial ordinaria:

$$-\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi_l}{\partial \varphi^2} - i\gamma \frac{\partial \Psi_l}{\partial \varphi} + \frac{\gamma^2 R^2}{4} \Psi_l = E_l \Psi_l \quad (1.37)$$

Proponemos una solución de la forma  $\Psi_l = Ae^{im\varphi}$  para la función de onda, dado que ésta función cumple con las condiciones de continuidad y periodicidad

exigidas, es decir,  $\Psi_l(0) = \Psi_l(2\pi)$ . Por consiguiente, los valores propios de energía son de la forma.

$$E_l^{(m)} = \frac{m^2}{R^2} + \gamma m + \frac{\gamma^2 R^2}{4} \quad (1.38)$$

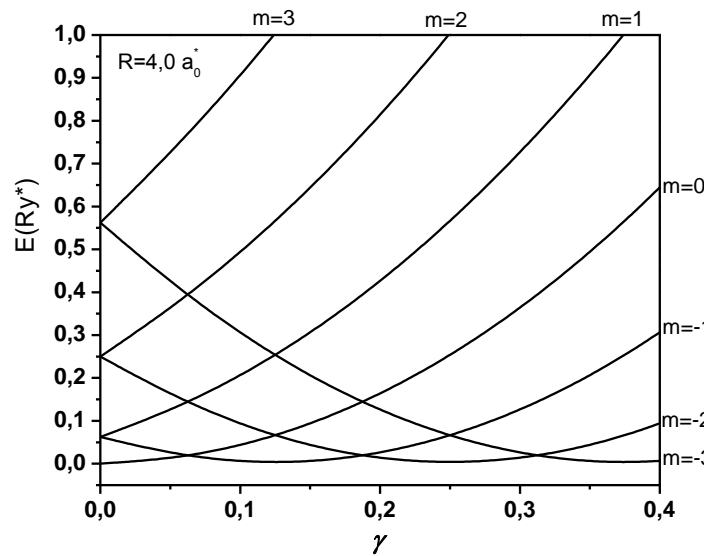


Figura 1.4. Energía de un electrón en un anillo cuántico circular, como función del campo magnético, para un valor del radio  $R=4.0 a_0$ .

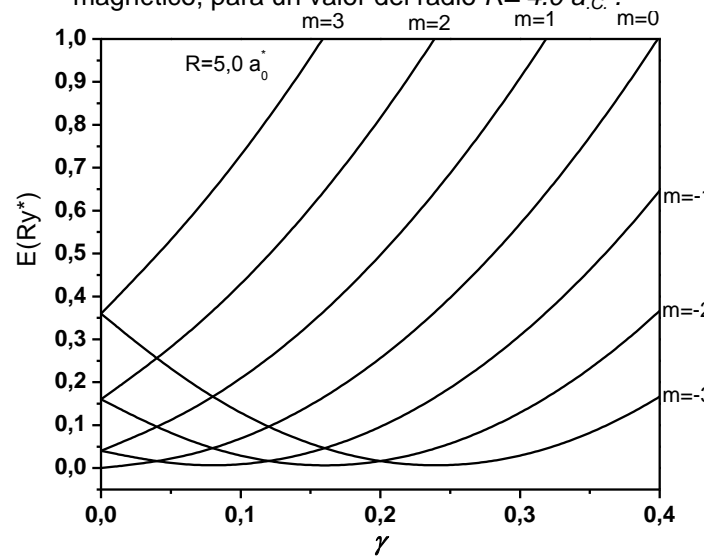


Figura 1.5. Energía de un electrón en un anillo cuántico circular, como función del campo magnético, para un valor del radio  $R=5.0 a_0$ .

Las figuras 1.4 y 1.5 representan las curvas de energías para un electrón en un anillo cuántico circular unidimensional, estas figuras estarán en correspondencia

con nuestro modelo, dado que éstos son un caso límite del que hemos planteado en este trabajo de tesis.

#### **1.4 Anillo cuántico de forma elíptica en presencia de una impureza $D^0$ en un campo magnético uniforme y paralelo al eje z**

Trataremos el problema de un electrón confinado en un sistema de anillo cuántico de forma elíptica, que se encuentra localizado en un campo magnético uniforme y paralelo al eje z. Asumiremos que el anillo es delgado y tiene una sección transversal circular de radio  $R_t$  que es muy pequeño comparado con los semiejes menor y mayor de la elipse media, es decir,  $a > b \gg R_t$ , como se muestra en la figura 1.6. La posición del electrón se mide desde el centro de la elipse y, la impureza se localiza a una distancia  $\xi$  del centro de la elipse, sobre el semieje mayor.

Por otro lado, el potencial de confinamiento es tal que, dentro del anillo vale cero y fuera del mismo se hace muy grande ( $V_{\text{conf}} \rightarrow \infty$ ). Denotaremos la distancia que hay del centro de la elipse al centro del disco circular sobre la sección transversal del anillo por  $R$ , que cambia con la posición angular, es decir,  $R = R(\phi)$ . El valor de  $R$  es muy grande comparado con el valor que toma  $R_t$  ( $R \gg R_t$ ), y como el electrón se moverá en el plano vertical de la sección transversal circular del anillo, escogeremos un punto arbitrario para describir su movimiento allí.

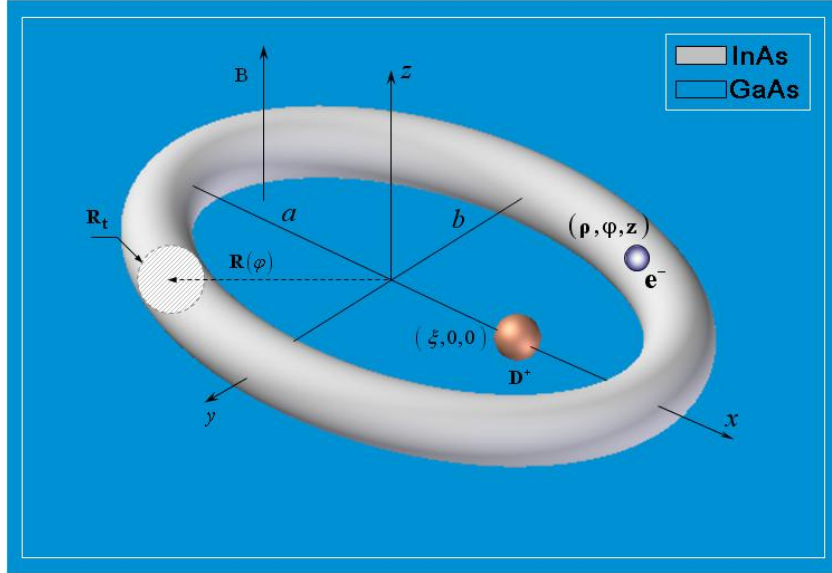


Figura 1.6. Anillo cuántico elíptico de sección transversal circular inmerso en un campo magnético uniforme paralelo al eje z.

Denotaremos la posición del electrón en el sistema de coordenadas de la sección transversal del anillo ( como se muestra en la figura 1.3), por  $\tilde{\rho}$  y  $\tilde{z}$  para un determinado valor de  $\phi$ . No obstante, el valor de  $R(\phi)$  se mantendrá constante en este plano porque solo las coordenadas  $\tilde{\rho}$  y  $\tilde{z}$  estarán cambiando. Debido a la simetría del problema, se utilizarán las coordenadas polares  $\tilde{\rho}$  y  $\theta$  para describir el problema.

El Hamiltoniano que describe el problema nuevo y permite calcular los estados electrónicos del sistema está dado por:

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V_{conf} + V_{coul} \quad (1.39)$$

La expresión anterior, es similar a la ecuación (1.29), sólo que en ésta última, aparece el término  $V_{coul}$ , que describe la interacción coulombiana entre el centro de carga positivo fijo  $D^+$  y el electrón, cuya expresión está dada por:

$$V_{coul} = \frac{-2}{(R^2 + 2R\tilde{\rho} \cos\theta + \tilde{\rho}^2 + \xi^2 - 2(R + \tilde{\rho} \cos\theta)\xi \cos\phi)^{1/2}} \quad (1.40)$$

Introduciremos unidades adimensionales porque facilitan el trabajo computacional simplificándolo. En consecuencia, se definirán las unidades de longitud y energía, en radios de Bohr y Rydberg efectivos respectivamente por:

$$r = a_0^* \rho \quad E = Ry^* \tilde{E} \quad a_0^* = \frac{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 \hbar^2}{m_0 e^2}$$

$$Ry^* = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_r \epsilon_0 a_0^*} \quad \gamma = \frac{\hbar e B}{2mcRy^*}$$

Por consiguiente, el Hamiltoniano de la ecuación (1.39) se puede escribir en coordenadas cilíndricas como:

$$H = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - i\gamma \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} + V_{conf} + V_{coul} \quad (1.41)$$

Los parámetros utilizados para el InAs son  $\epsilon = 15.15$  y  $m = 0.023 m_0$ , siendo  $m_0$  la masa del electrón en reposo en el vacío. El radio de Bohr efectivo para éstos parámetros es  $a_0^* = 34.856$  nm, el Rydberg efectivo es  $Ry^* = 1.3634$  meV y la unidad de campo magnético  $\gamma = 1 \leftrightarrow B = 1.6252$  T, [22,23]. Obsérvese que éste nuevo problema es una extensión de los dos caso particulares tratados en las secciones 1.2 y 1.3.

Por otro lado, en la expresión adimensional (1.41), podemos llevar a cabo una simplificación adicional usando la siguiente sustitución.

$$\rho(\phi) = R(\phi) + \tilde{x} \quad (1.42)$$

con

$$R^2(\phi) = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi} \quad (1.43)$$

donde las cantidades  $a$  y  $b$  representa los valores ya adimensionados, de los semiejes mayor y menor respectivamente de la elipse media. Por tanto, como la sección transversal del anillo considerado es circular, la figura 1.3 se utiliza también para representar esquemáticamente de forma similar, como se hizo en la sección anterior, la posición del electrón. Así, del mismo modo se aprecia en la figura 1.3 que, las coordenadas cartesianas  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  se pueden expresar en coordenadas polares, entonces tendremos,  $\tilde{x} = \tilde{\rho} \cos \theta$  y  $\tilde{z} = \tilde{\rho} \sin \theta$ . Por consiguiente, el potencial que confina al electrón  $V_{conf}$ , en estas nuevas coordenadas, está completamente definido de la misma manera como se hizo en la ecuación (1.7).

Como ya se había mencionado en las secciones anteriores, se podrá utilizar la aproximación adiabática para llevar a cabo una separación de las coordenadas en el Hamiltoniano correspondiente al sistema  $D^0$  en un anillo elíptico. Para ello, nótese que el movimiento del electrón puede separarse en uno lento asociado a la coordenada  $\phi$  y uno rápido asociado a las coordenadas  $(\tilde{\rho}, \theta)$ , que ocurre en la sección transversal del anillo. Cuando el electrón se mueve en el interior del anillo, la coordenada  $z$  no cambia, lo que implica que  $z = \tilde{z}$ . Por consiguiente, el Hamiltoniano se reescribirá como la suma de dos contribuciones: el del movimiento rápido  $H_r$  y el del movimiento lento  $H_l$ , dados por:

$$\begin{aligned} H_r &= -\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} + V_{conf} \\ H_l &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - i\gamma \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\gamma^2}{4} (R + \tilde{\rho} \cos \theta)^2 + V_{coul} \end{aligned} \quad (1.44)$$

La energía cinética relacionada al movimiento rápido se puede expresar en términos de las coordenadas  $(\tilde{\rho}, \theta)$  la cual está dada por:

$$H_r = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \tilde{\rho} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} - \frac{1}{\tilde{\rho}^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + V_{conf} \quad (1.45)$$

con los hechos anteriores escribimos la función de onda como un producto de funciones de onda<sup>4</sup> una correspondiente al movimiento rápido y otra correspondiente al movimiento lento  $\Psi_r$  y  $\Psi_l$  respectivamente, esto es, la función de onda total viene dada por  $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_r \Psi_l$ . Cada movimiento cumple por separado la ecuación de Schrödinger.

$$\begin{aligned} H_r \Psi_r &= E_r \Psi_r \\ H_l \Psi_l &= E_l \Psi_l \end{aligned} \quad (1.46)$$

donde  $E_r$  y  $E_l$  son las energías en el movimiento rápido y en el movimiento lento respectivamente. La energía del movimiento rápido puede obtenerse del problema planteado en la primera ecuación del conjunto de ecuaciones anteriores y, es útil para saber cuánto vale la energía en el movimiento lento  $E_l = E - E_r$ .

Por otro lado, resolviendo el problema para el movimiento lento y, tomando el estado base se encuentra que la función de onda está dada por:

$$\Psi(\tilde{\rho}) = J_0\left(\frac{2.4048 \tilde{\rho}}{R_l}\right) \quad (1.47)$$

El valor 2.4048 corresponde al primer cero de la función de Bessel de orden cero,  $R_l$  es el radio de la sección transversal del anillo. En relación a lo anterior, es necesario para el Hamiltoniano del movimiento lento promediarlo, con el fin de utilizar la aproximación de anillo delgado dejándolo en la forma siguiente:

---

<sup>4</sup> Hecho que se sigue directamente de aplicar la aproximación adiabática.

$$H_l = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - i\gamma \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\gamma^2}{4} \langle (R + \tilde{\rho} \cos \theta)^2 \rangle + \langle V_{coul} \rangle \quad (1.48)$$

donde  $\langle V_{coul} \rangle$  es el valor promedio de la interacción coulombiana entre el electrón y el centro de carga iónico, el cual está dado por:

$$\langle V_{coul} \rangle = -2 \frac{\int_0^{R_t} \frac{J_0^2\left(\frac{2.4048 \tilde{\rho}}{R_t}\right) \tilde{\rho} d\tilde{\rho}}{(R^2 + \tilde{\rho}^2 + \xi^2 - 2R\xi \cos \phi)^{1/2}}}{\int_0^{R_t} J_0^2\left(\frac{2.4048 \tilde{\rho}}{R_t}\right) \tilde{\rho} d\tilde{\rho}} \quad (1.49)$$

mientras que el promedio del último término en la ecuación (1.48) corresponderá a:

$$\frac{\gamma^2}{4} \langle (R + \tilde{\rho} \cos \theta)^2 \rangle = \frac{\gamma^2}{4} R^2 + \frac{\gamma^2}{8} \langle \tilde{\rho}^2 \rangle .$$

Así, tendremos que, el valor simplificado de la interacción coulombiana promedio será:

$$\langle V_{coul} \rangle = -2 \frac{\int_0^{R_t} J_0^2\left(\frac{2.4048 \tilde{\rho}}{R_t}\right) \tilde{\rho}^3 d\tilde{\rho}}{\int_0^{R_t} J_0^2\left(\frac{2.4048 \tilde{\rho}}{R_t}\right) \tilde{\rho} d\tilde{\rho}} \quad (1.50)$$

Todo lo anterior, conduce en últimas después de las simplificaciones, a una ecuación de Schrödinger de la forma:

$$\left(-\frac{1}{R^2} \frac{d^2}{d\phi^2} - i\gamma \frac{d}{d\phi} + \left(\frac{\gamma^2 R^2}{4} + \langle V_{coul} \rangle\right)\right) \Psi_l = E_l \Psi_l \quad (1.51)$$

También, la ecuación anterior se puede escribir de forma más sencilla como:

$$-f(\phi)\Psi_l'' - i\gamma\Psi_l' + V_{\text{eff}}(\phi)\Psi_l = E_l\Psi_l \quad (1.52)$$

Donde  $f(\phi) = 1/R^2(\phi)$  y  $V_{\text{eff}} = \langle V_{\text{coul}} \rangle + \gamma^2 R^2 / 4$ . Para resolver la ecuación (1.52) proponemos una solución de la forma  $\Psi_l(\phi) = Q(\phi)e^{i\eta(\phi)}$ , que reemplazando a  $\Psi_l(\phi)$  y sus derivadas en la ecuación (1.52), se encuentra que:

$$(-f(\phi)(Q'' - Q\eta'^2) + \gamma Q\eta' + (V_{\text{eff}} - E_l)Q) + i(-f(\phi)(2Q'\eta' + Q\eta'') - \gamma Q') = 0 \quad (1.53)$$

Al separar la parte real e imaginaria de la ecuación anterior encontramos el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\begin{aligned} -f(\phi)(Q'' - Q\eta'^2) + \gamma Q\eta' + (V_{\text{eff}} - E_l)Q &= 0 \\ -f(\phi)(2Q'\eta' + Q\eta'') - \gamma Q' &= 0 \end{aligned} \quad (1.54)$$

Con el fin de resolver las ecuaciones anteriores hacemos los siguientes cambios.

$$\begin{aligned} u &= \eta' & u' &= \eta'' \\ w &= \frac{Q'}{Q} & \frac{Q''}{Q} &= w' + w^2 \end{aligned} \quad (1.55)$$

De acuerdo con la periodicidad de la función de onda, entonces  $u = \eta' = m$ . Por consiguiente, obtenemos que:

$$w' = m^2 - w^2 + (\gamma m + V_{\text{eff}} - E_l) / f(\phi) \quad (1.56)$$

Para terminar, hacemos un último cambio, donde aplicamos el método de barrido trigonométrico para resolver numéricamente y de manera eficiente, la ecuación diferencial anterior. Para ello, hacemos las transformaciones  $w = \tan \delta(\phi)$  y

$w' = \delta'(\varphi) / \cos^2 \delta(\varphi)$ . Así, la ecuación que nos permite calcular los estados electrónicos es simplemente:

$$\delta'(\varphi) = m^2 \cos^2 \delta(\varphi) - \operatorname{sen}^2 \delta(\varphi) + (\gamma m + V_{\text{eff}} - E) \cos^2 \delta(\varphi) / f(\varphi) \quad (1.57)$$

En el resultado anterior, se empleó el método de barrido trigonométrico porque permite transformar una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en una de primer orden. Además proporciona todas las soluciones buscadas en un número menor de operaciones que otros métodos utilizados para resolver problemas de este estilo.

---

---

## PARTE II

---

---

### Análisis de los Resultados y Discusión

## 2.1 Energía como función del campo magnético: caso circular

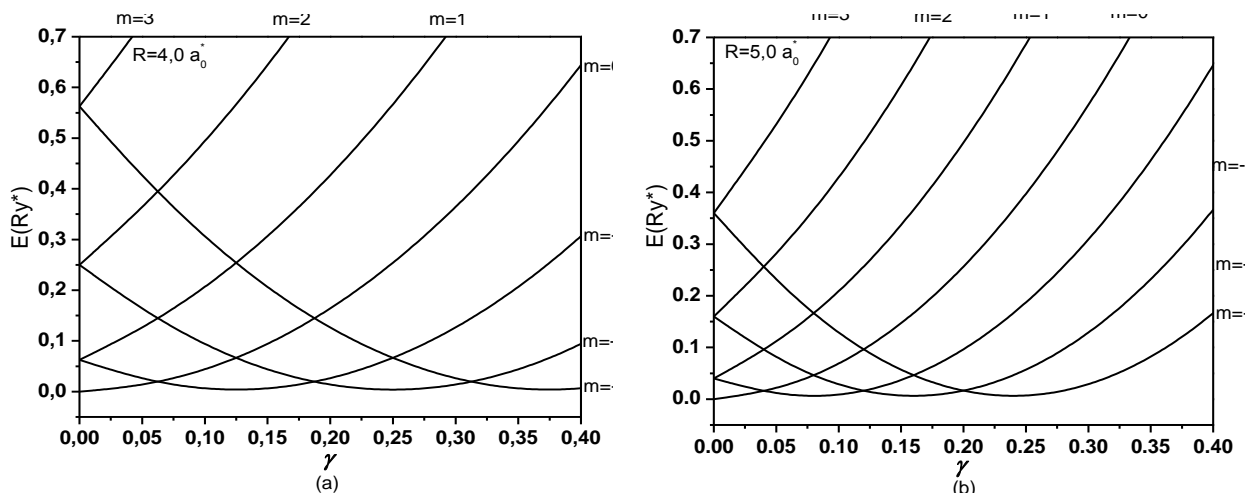
Con el propósito de discutir la eficiencia del método que se propuso para resolver el problema de determinar el espectro energético para una donadora  $D^0$  en un anillo cuántico de forma elíptica, en presencia de un campo magnético paralelo al eje de simetría  $z$ , como se muestra en la figura 1.6, se analizan las curvas de energía como función de la intensidad de campo magnético  $\gamma$ , así como de la posición de la impureza  $\xi$ . Los resultados se contrastarán con el caso límite de anillo circular, es decir,  $a=b=R$ .

En la figura 2.1 y en las subsecuentes, se muestran los niveles de energía  $E(M, n, s)$  para diferentes valores de los números cuánticos  $(M, n, s)$  los cuales tienen diferentes significados: El número cuántico  $M$  se relaciona con la rotación alrededor del eje de simetría  $z$ ,  $n$  está asociado con la rotación en la sección transversal del anillo y  $s$  está asociado con la simetría de la función de onda, es decir, con la paridad de ésta, uno si es par, cero si es impar. Es por eso que, siempre el último valor de cada nivel terminará en cero o uno. A continuación, los niveles de energía que se mostrarán en cada una de las gráficas incluyendo las de la figura 2.1 son  $a=E(0,0,0)$ ,  $b=E(-1,1,1)$ ,  $c=E(1,1,1)$ ,  $d=E(-2,0,0)$ ,  $e=E(2,0,0)$ ,  $f=E(-2,2,1)$ ,  $g=E(2,2,1)$ , y están en orden creciente. El primer estado corresponde al estado base y los siguientes a los primeros niveles excitados más bajos.

Las gráficas de la figura 2.1, muestran a la energía como función de la intensidad de campo magnético  $\gamma$ , para dos valores diferentes del radio medio del anillo que son:  $4.0a_0^*$  y  $5.0a_0^*$ , respectivamente. Los valores para las energías están comprendidas entre 0.0 y 0.7 y se miden en Rydberg efectivo ( $Ry^*$ ), mientras que al parámetro  $\gamma$  se varía desde 0.0 hasta 0.4 y es adimensional. Los valores asignados a las distancias se miden en radios de Bohr efectivos ( $a_0^*$ ).

Específicamente, las curvas de energía son para el caso de anillo circular. Por lo tanto, éstas permiten comparar los resultados del caso límite de anillo circular **1D** (gráficos (a) y (b)) en un campo magnético paralelo al eje de simetría  $z$ , con los conseguidos en nuestro modelo de anillo circular delgado (gráficos (c) y (d)), también en un campo magnético uniforme y paralelo al eje de simetría  $z$ , en el cual los semiejes mayor y menor del anillo elíptico son iguales, es decir,  $a=b=R$ , siendo  $R$  el radio medio del anillo. No obstante, en el modelo que hemos propuesto, las curvas de energía se grafican para valores de la posición de la impureza y el radio de la sección transversal fijos, con valores dados por:  $R_t = 10^{-5} a_0^*$  para el radio de la sección transversal y  $\xi = 500 a_0^*$  para la posición de la impureza.

Los gráficos (a) y (b) de la figura 2.1, son justamente los de las figuras 1.4 y 1.5, respectivamente, y son calculados con la ecuación (1.38), mientras que los gráficos (c) y (d) son el resultado de nuestro modelo, y se obtienen empleando la ecuación (1.56). Se aprecia que existe bastante aproximación de las curvas del modelo empleado en este trabajo de tesis y los resultados del caso límite. Es natural que, por ser una aproximación los resultados difieran, y es una evidencia más de que a pesar que la impureza iónica se encuentre muy lejos del electrón, los efectos de la interacción coulombiana son apreciables, ello se nota en los valores tomados por las energías en la comparación de los dos casos. De modo que, los resultados referentes al caso límite se puede consultar en la referencia [25].



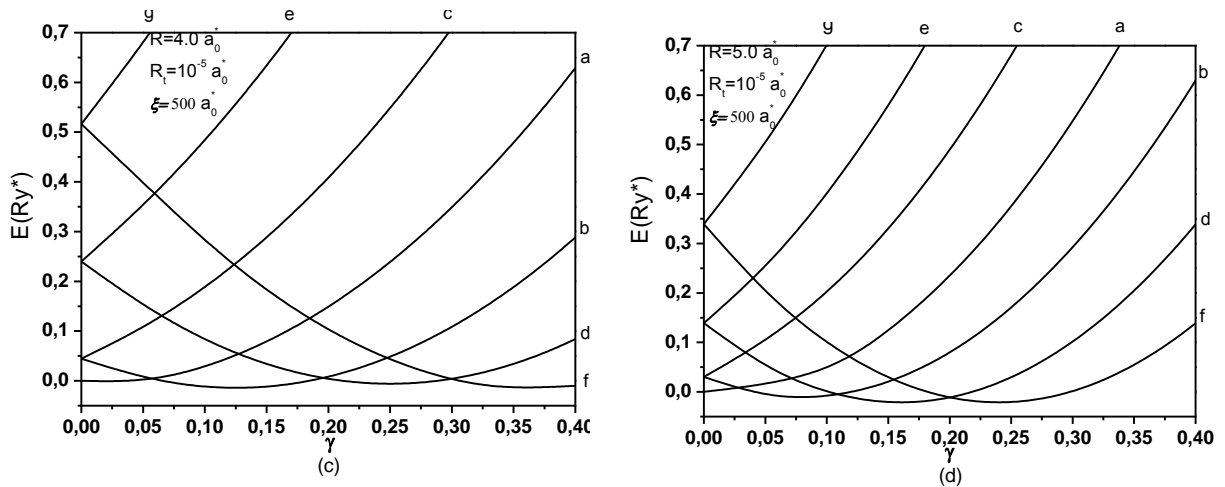


Figura 2.1. Curvas de energías de un anillo cuántico circular en un campo magnético paralelo al eje de simetría  $z$  para los casos: límite (gráficos (a) y (b)) en ausencia de impureza, y modelo utilizado en la tesis con impureza muy lejos y radio de la sección transversal muy pequeño (gráficos (c) y (d)).

La figura 2.2 muestra una situación diferente, en ésta se consideran también cuatro gráficos para las curvas de energía de un anillo cuántico delgado de forma circular con un electrón confinado, para cuatro valores constantes del radio medio del anillo e igual a:  $R = 3.0a_0^*$ ,  $R = 3.5a_0^*$ ,  $R = 4.0a_0^*$  y  $R = 5.0a_0^*$ , para el radio de la sección transversal y la posición de la impureza iguales a:  $R_t = 0.2a_0^*$ , y  $\xi = 1.0a_0^*$  respectivamente. En los cuatro gráficos se aprecia que la distancia de la impureza al electrón es bastante menor comparada con la situación considerada en los gráficos (c) y (d) de la figura 2.1. En este caso, la impureza surte efectos bastante considerables sobre las energías, lo cual se aprecia en el comportamiento de las curvas, y que a ello se le debe sumar la fuerte competencia entre los términos paramagnéticos y diamagnéticos presentes en el Hamiltoniano de la ecuación (1.41) de la sección 1.4.

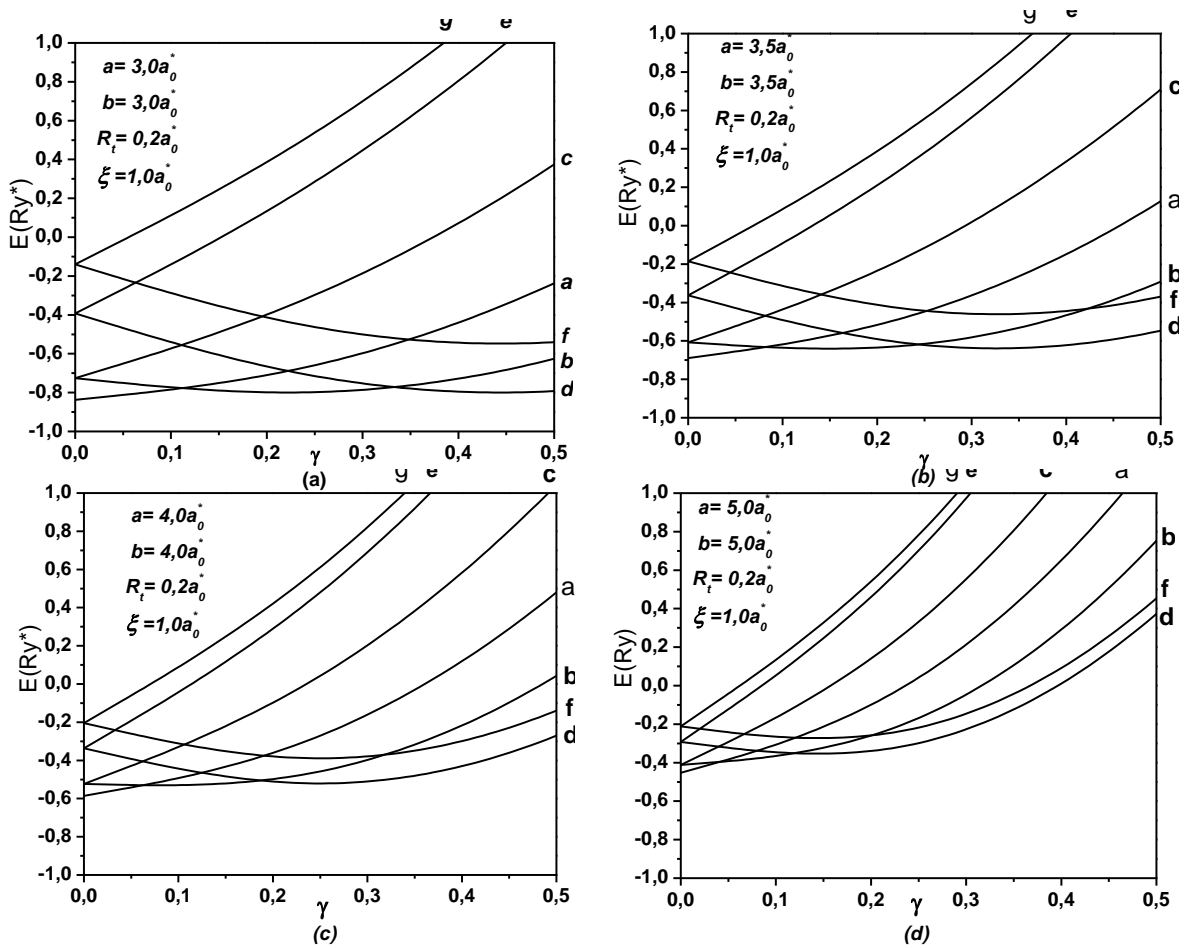


Figura 2.2. Gráficos de las curvas de energía de un anillo cuántico circular delgado ( $a=b$ ) en un campo magnético uniforme y paralelo al eje de simetría  $z$ , para valores fijos e iguales del radio de la sección transversal y también de la posición de la impureza.

En lo que respecta a los términos relacionados con el campo magnético, el paramagnético varía linealmente con el campo, mientras que el diamagnético varía cuadráticamente con éste. Por lo que, son éstas dependencias las que explican porque las curvas para pequeños valores de  $\gamma$  y  $M < 0$  inician en forma lineal y pendientes negativas. Pero cuando el valor del campo magnético aumenta, las curvas comienzan a sufrir lentamente una transformación del comportamiento lineal a uno parabólico, porque el término diamagnético se impone sobre el paramagnético. Adicionalmente, se puede ver que independientemente de los parámetros geométricos que se utilicen en cada gráfico, el espectro energético exhibe un comportamiento oscilatorio con el campo magnético, que como se verá

en lo que resta, del trabajo siempre se presenta y se cumplirá para gráficos de energías como función del campo magnético.

Por otro lado, se logra apreciar también que, al aumentar el valor del radio medio del anillo manteniendo al centro iónico en la misma posición, la separación entre los niveles de energía para valores correspondientes a los mismos números cuánticos de momento angular orbital, disminuye. Es natural que esto ocurra, dado que el electrón se encontrará más alejado del centro de carga iónico. Por consiguiente, su movimiento será más lento al rededor del eje  $z$ , lo cual es una consecuencia de haber aumentado la distancia media entre el centro iónico y el electrón.

A partir de la figura 2.2 (a), se observa que el mínimo de energía correspondiente al estado base  $E(0,0,0)$ , ocurre cuando  $0 < \gamma < 0.1$ , el mínimo de energía correspondiente al estado  $E(-1,1,1)$ , ocurre cuando  $0.1 < \gamma < 0.35$ , el mínimo de energía correspondiente al estado  $E(-2,0,0)$ , ocurre cuando  $0.35 < \gamma < 0.6$ . Por consiguiente, éste comportamiento oscilatorio del mínimo en la energía se mantiene para otros valores de los parámetros geométricos que se empleen, con la condición de que los rangos en que cada estado mantiene su carácter de energía mínima disminuye, al aumentar el radio medio del anillo, lo cual es una consecuencia de que el término de energía potencial hace una mayor contribución a la energía total que el término correspondiente al de energía cinética.

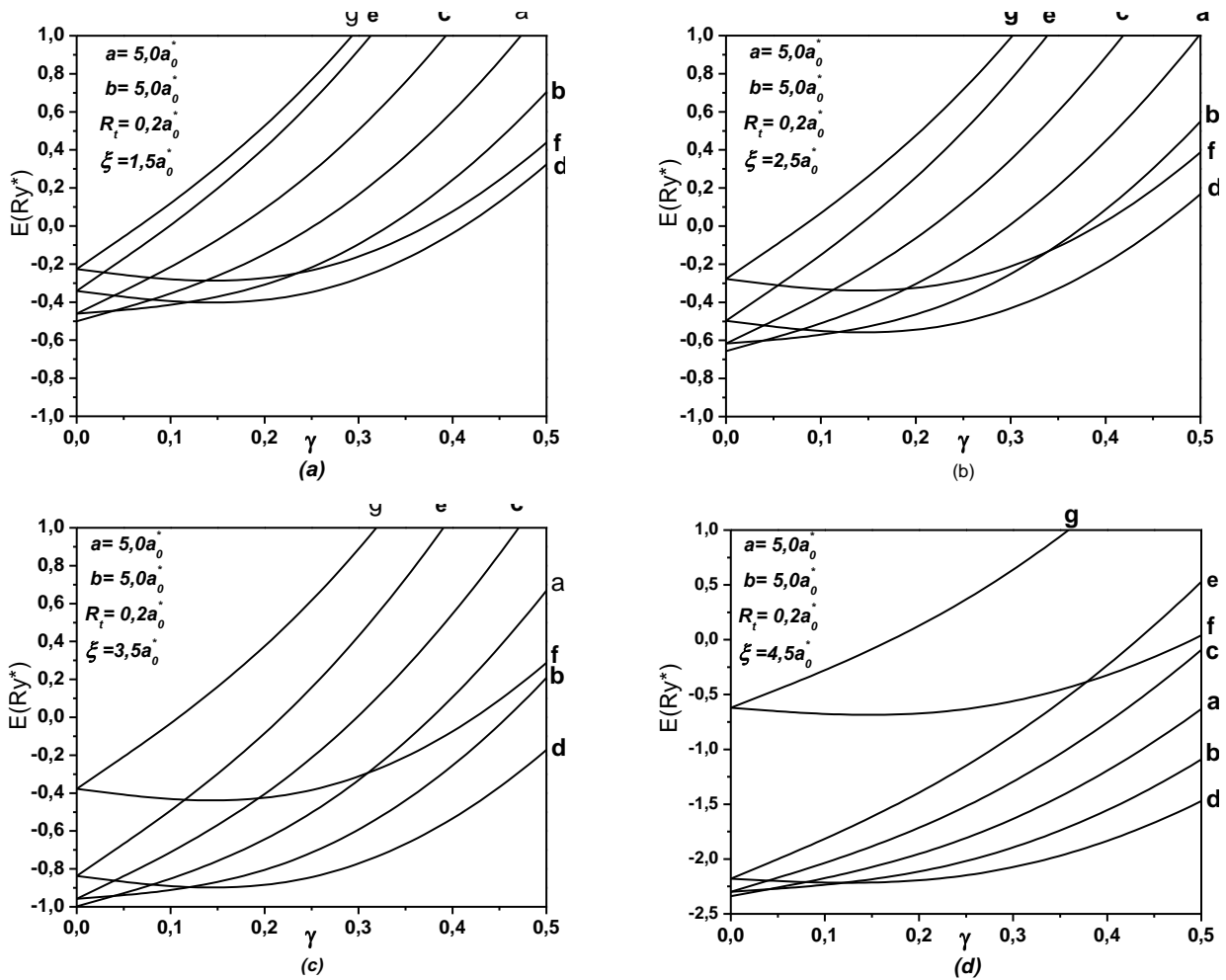


Figura 2.3. Gráficos de las curvas de energía de un anillo cuántico circular delgado ( $a=b$ ) en un campo magnético uniforme y paralelo al eje de simetría  $z$ , para cuatro valores diferentes de la posición de la impureza y el mismo valor del radio de la sección transversal.

La figura 2.3, muestra también cuatro gráficos de la energía como función de la intensidad del campo magnético. Se observa en estas curvas que el valor del radio medio es el mismo en todos los casos e igual a  $5.0a_0^*$ , mientras que la impureza se sitúa en diferentes posiciones. Como en todos los casos anteriores el comportamiento lineal se sigue manteniendo para valores pequeños de  $\lambda$  y la curvatura aparece cuando su valor aumenta, además el radio de la sección transversal se sigue manteniendo igual a  $0.2a_0^*$ .

Con relación a los gráficos de la figura 2.2, se nota que la posición del centro de carga iónico se mantiene fija siempre en el mismo valor, situación que no ocurre en los gráficos de la figura 2.3. También, se aprecia que los tres primeros gráficos (a), (b) y (c) todos están comprendidos en el rango de energías que va desde  $-1.0a_0^*$  hasta  $1.0a_0^*$ , variando  $\gamma$  de 0.0 hasta 0.5 y el gráfico (d)  $-2.5a_0^*$  hasta  $1.0a_0^*$ .

En la figura 2.3, se puede evidenciar que cuando la impureza iónica se acerca más al contorno del anillo, las curvas de energías para los estados inferiores se separan más de los estados superiores, adicionalmente se observa claramente que los niveles inferiores aumentan su valor cada vez más negativamente, se debe a que el electrón se ve más atraído por el centro de carga positivo haciendo que se encuentre más ligado a dicho centro de carga. Como en los casos pero ya no son tan evidentes como en los casos pasados, debido a que la contribución hecha por la energía potencial prima por encima de los demás términos, lo cual trata de destruir las oscilaciones Aharonov-Bohm.

## 2.2 Energía como función del semieje mayor: caso circular

En esta sección consideremos una situación nueva respecto a los gráficos de energía, ahora se está representando a la energía como una función del semieje mayor, es decir, se estudia como es el comportamiento de las curvas cuando se comienza a variar la longitud del semieje mayor manteniendo a la impureza donadora en una posición fija.

En la figura 2.4 se muestran cuatro gráficos de energía como función del semieje mayor todos para un valor fijo de: semieje menor e igual a  $b = 5.0a_0^*$ , posición de la impureza igual a  $\xi = 3.5a_0^*$  y cuatro valores diferentes del radio de la sección transversal iguales a  $R_t = 0.2a_0^*$ ,  $R_t = 0.4a_0^*$ ,  $R_t = 0.6a_0^*$  y  $R_t = 0.8a_0^*$ , correspondientes a los gráficos (a), (b), (c) y (d) respectivamente. Además de ello,

se encuentra que las energías están comprendidas en el rango de  $-3.5Ry^*$  hasta  $2.5Ry^*$ , mientras que el semieje mayor está comprendido entre  $1.0a_0^*$  y  $5.0a_0^*$ . Como se puede notar, el semieje mayor varía continuamente hasta llegar a  $5.0a_0^*$ , convirtiendo la elipse en un círculo, es en este sentido que llamamos a éste caso como “energía como función del semieje mayor: caso circular”

La figura 2.4 muestra aspectos importantes, como por ejemplo: cuando el valor del radio de la sección transversal aumenta, la profundidad en las curvas de energía disminuye, es decir, éstas se vuelven más suaves, lo cual se logra evidenciar de manera muy clara porque la distancia vertical (medida en unidades de energía) entre mínimo y mínimo de cada curva se hace más pequeña.

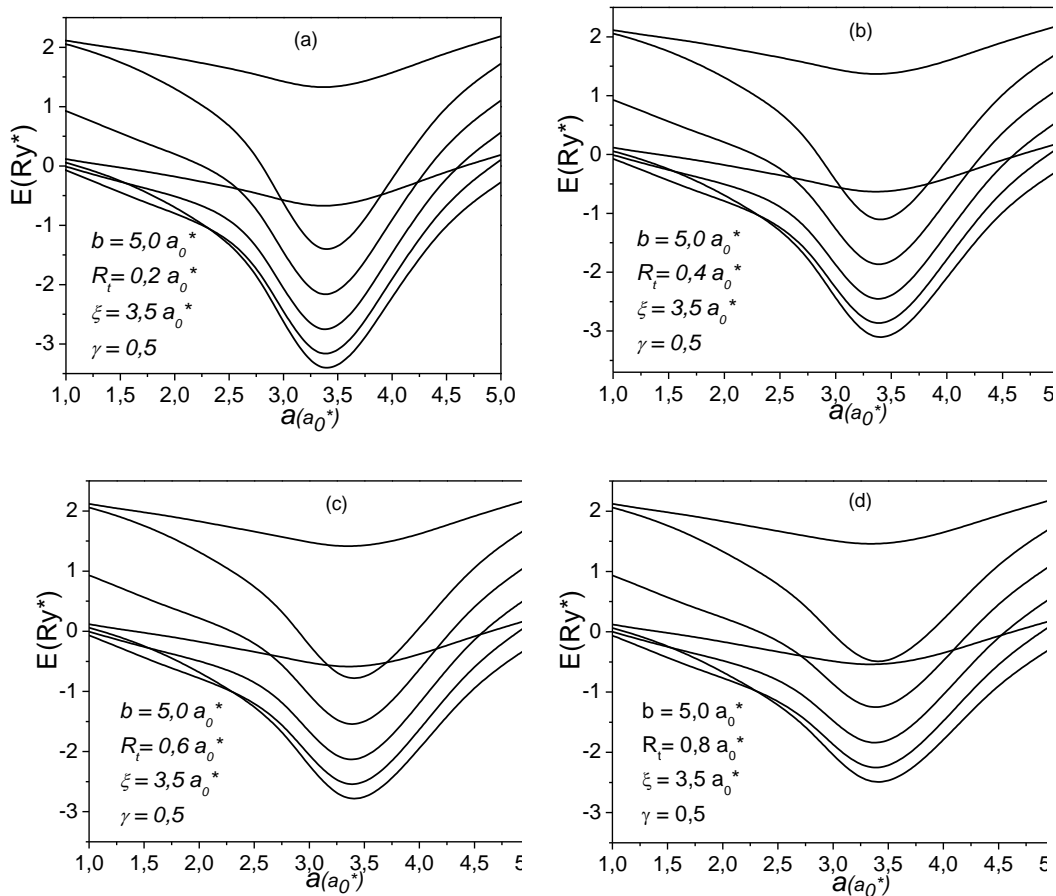


Figura 2.4. Gráficos de las curvas de energía como función del semieje mayor, para el mismo valor del semieje menor, el mismo valor de la posición de la impureza y cuatro valores diferentes del radio de la sección transversal del anillo.

Con relación al hecho anterior, esto sucede porque al aumentar el radio de la sección transversal del anillo, se le brinda mayor libertad al electrón, en el sentido de que se verá menos confinado. En consecuencia, habrá una disminución significativa del término de la energía cinética que contribuye a la energía total del sistema (electrón en el interior del anillo). Adicionalmente, otro aspecto importante es la existencia de un mínimo en cada una de las curvas, que se alcanza para cada caso un valor mínimo que está bastante cerca de alrededor de los  $3.5a_0^*$ , es decir, cerca del valor donde se localiza el centro de carga iónico sobre el semieje mayor, que es muy obvio si se tiene en cuenta que es en ese punto donde se alcanza el máximo valor de la energía potencial electrostática entre el electrón y la impureza.

### **2.3 Energía como función del campo magnético: caso elíptico**

En esta sección consideramos un caso bastante diferente, con relación a los anteriores, esta nueva situación esbozada en la figura 2.5, muestra las curvas de energía también como función del parámetro  $\gamma$  que caracteriza la intensidad del campo magnético. Ahora, los valores de los parámetros geométricos correspondientes a los semiejes mayor y menor son diferentes e iguales a  $8.0a_0^*$  y  $5.0a_0^*$  respectivamente, para un radio de la sección transversal constante igual a  $0.2a_0^*$  y cuatro valores diferentes de la posición de la impureza.

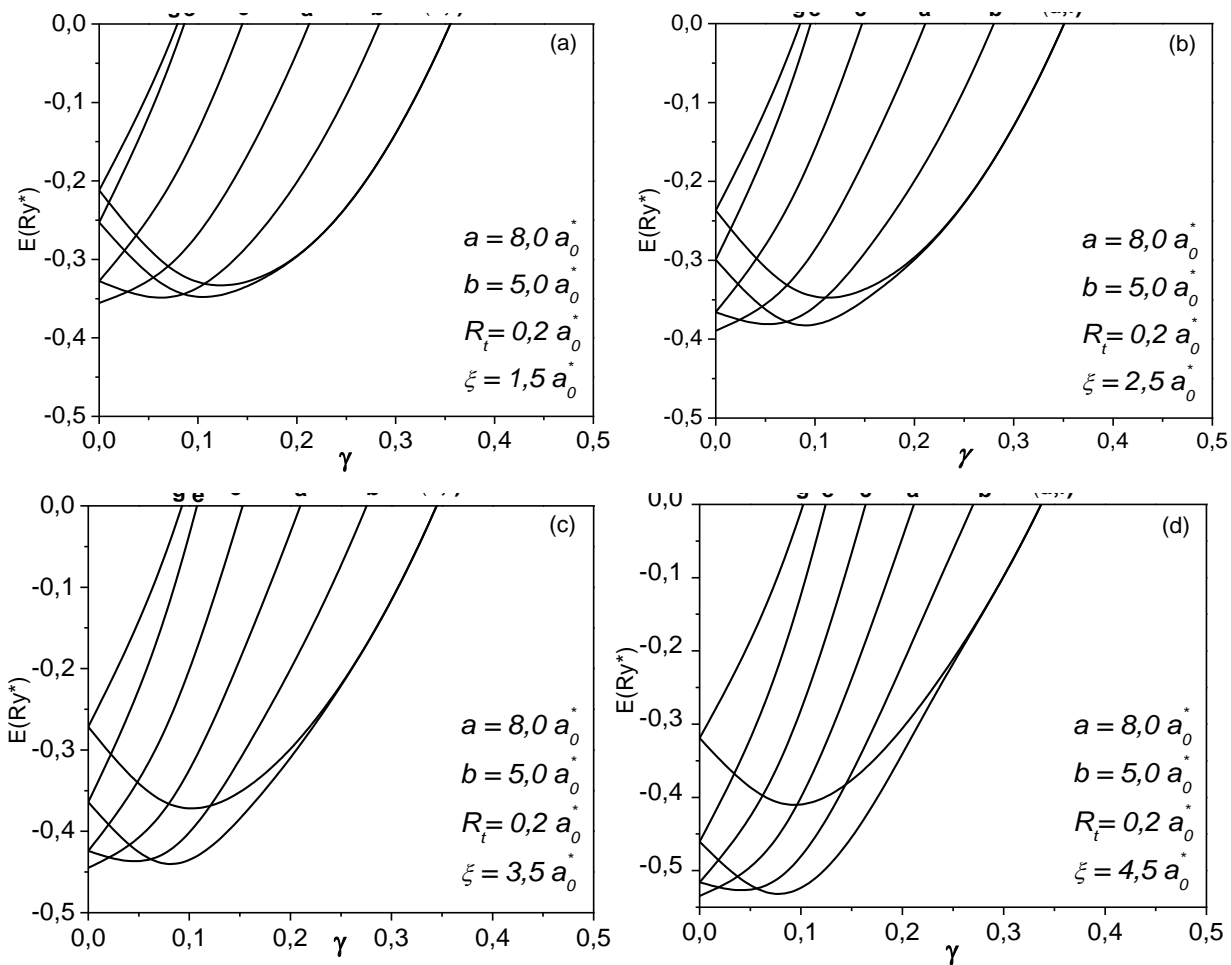


Figura 2.5. Gráficos de las curvas de energía como función del campo magnético para un anillo cuántico delgado de forma elíptica para cuatro valores diferentes de la posición de la impureza y el mismo valor del radio de la sección transversal.

Como se logra apreciar, cada uno de los gráficos muestra una curvatura bastante distinta para las curvas de energía comparada con los casos anteriores, en éste caso es más pronunciada. A su vez, también se puede notar que cuando la posición de la impureza aumenta acercándose al contorno del anillo, las curvas inician en valores cada vez más negativos. En consecuencia, es natural que eso ocurra porque el electrón se encontrará más cerca al centro de carga iónico, lo que conduce a una interacción coulombiana más fuerte. Por consiguiente, esto hace que la separación en energías entre los estados excitados superiores y los estados excitados inferiores aumente. No obstante, aunque exista un campo

magnético las oscilaciones en el espectro de energía se hacen menos pronunciadas porque la interacción electrostática se hace, lo cual se aprecia en el cambio brusco que sufre el período de las oscilaciones.

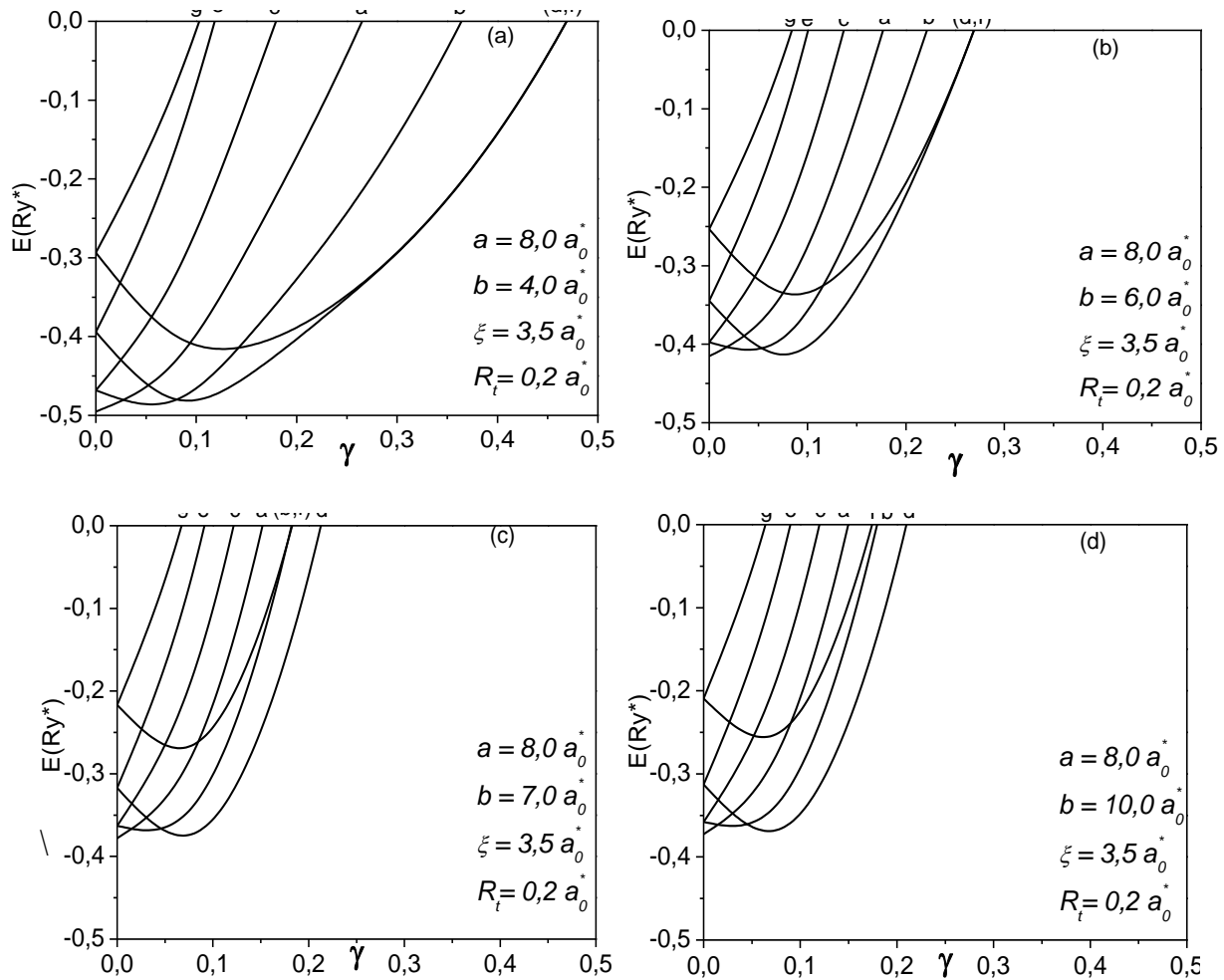


Figura 2.6. Gráficos de las curvas de energía como función del campo magnético de un anillo cuántico delgado elíptico, para cuatro valores diferentes del semieje menor, con la impureza fija en  $3.5a_0^*$  y radio de la sección transversal igual a  $0.2a_0^*$ .

En la figura 2.6 se muestra también cuatro gráficas de energía en función de  $\gamma$ , con la impureza localizada en una posición fija sobre el semieje mayor e igual a  $3.5a_0^*$ , radio de la sección transversal constante de  $0.2a_0^*$ , semieje mayor de  $8.0a_0^*$  y cuatro valores diferentes del semieje menor. En estos nuevos gráficos se aprecia que al haber aumentado el valor del semieje menor  $b$ , provocó que los niveles de

energía se levantarán más con relación a la situación anterior, lo cual se logra evidenciar comparando los gráficos de las figuras 2.5 y 2.6. Por tanto, este hecho se debe como ya se dijo antes, a que el electrón se va acercando más al centro de carga iónica y por tanto la contribución de la energía potencial predominará sobre la cinética.

## 2.4 Energía como función del semieje mayor: caso elíptico

La figura 2.7 muestra a la energía como función del semieje mayor. Las curvas presentadas aquí corresponden a cuatro valores de la posición de la impureza igual  $4.0a_0^*$ ,  $5.5a_0^*$ ,  $6.5a_0^*$  y  $7.5a_0^*$ ,  $\gamma=0.5$  y radio de la sección transversal del anillo igual a  $R_t = 0.2a_0^*$ , pero con el mismo valor del semieje menor igual a  $R_t = 5.0a_0^*$ .

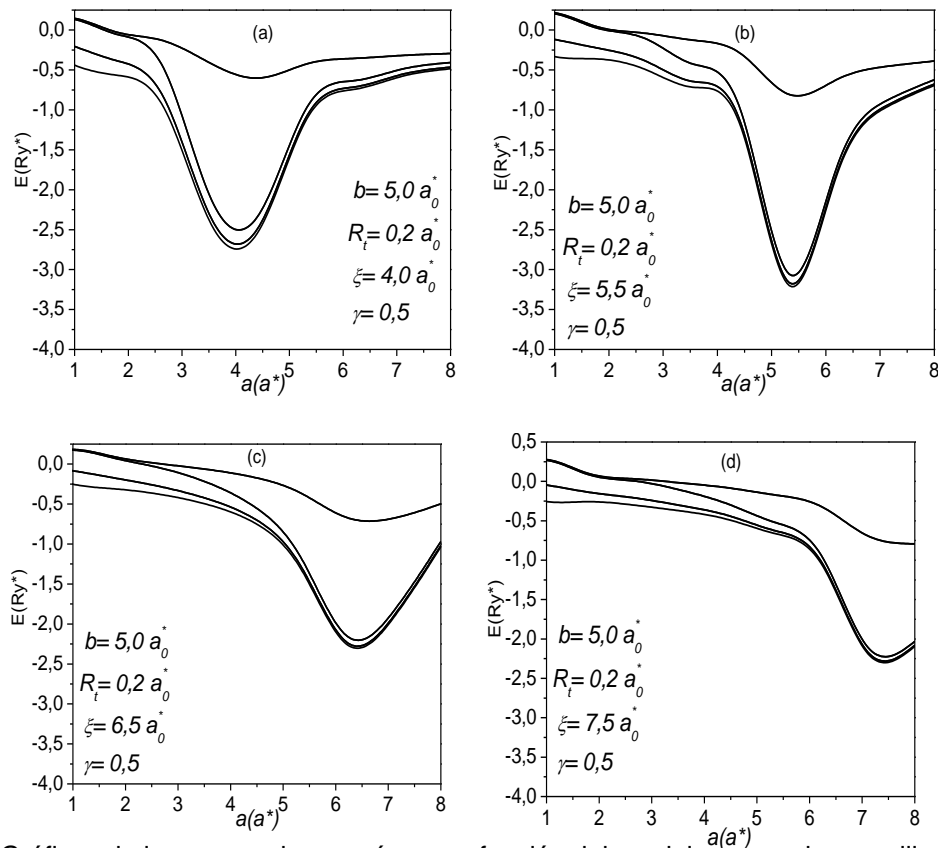


Figura 2.7. Gráficos de las curvas de energía como función del semieje mayor de un anillo cuántico delgado elíptico, para cuatro valores diferentes de la posición de la impureza y valores fijos del parámetro  $\gamma$  que caracteriza la intensidad del campo magnético igual a 0.5 y radio de la sección transversal igual a  $0.2a_0^*$ .

Cuando el valor de la posición de la impureza se acerca más al valor del semieje menor las curvas de energías se estrechan como se mencionó anteriormente en el caso circular, lo que implica una mayor atracción entre el electrón y la impureza iónica. Adicionalmente, también se sigue manteniendo el hecho de que las curvas alcanzan un valor mínimo alrededor del valor donde se localiza la impureza, este valor se desplaza conforme cambie el valor de la posición de la impureza y se logra observar que a medida que el centro de carga se aleja del valor que tome el semieje menor, los valores en los mínimos de las energías se reduce. Es natural de esperar esta situación, porque la separación electrón-ión es menor, caso que está en concordancia con el comportamiento que muestran las curvas cuando los semiejes mayor y menor son iguales, mostradas en las gráficas de la figura 2.4.

---

---

## PARTE III

---

---

### Conclusiones

Se calcularon las energías de los niveles más bajos como función del campo magnético y del semieje mayor para una donadora neutra  $D^0$  confinada en un anillo cuántico de forma elíptica, se encontró que los resultados están en buen acuerdo con los reportados ya en la literatura y concuerdan muy bien con el caso límite de un anillo circular unidimensional en un campo magnético y uniforme paralelo al eje de simetría  $z$ .

Fue confirmado que, al introducir el anillo cuántico de forma elíptica en un campo magnético uniforme y paralelo al eje  $z$  aparecieron oscilaciones en el espectro de energía del sistema. Adicionalmente se verificó que el campo magnético produce un rompimiento en la simetría del sistema.

Se encontró que cuando la posición de la impureza está muy cercana al contorno del anillo los niveles de energía se hacen más estrechos, lo que da muestra de una manifestación del aumento de la interacción coulombiana electrón-ión, también que la energía siempre alcanza un valor mínimo y que éste se localiza siempre al rededor donde se ubica a la impureza. Se observó que el mínimo en la energía se desplaza junto con la posición del centro de carga iónico.

Se implementó un método de solución que permite calcular de manera sencilla los niveles de energía, considerando el hecho de que el anillo, se puede modelar como un anillo delgado, es decir, uno cuyo radio de la sección transversal es pequeño comparado con la distancia que hay desde el centro de coordenadas del sistema a la elipse media en el anillo.

En éste trabajo, cabe la posibilidad de una extensión donde se considere no solo a un centro de carga iónico y un electrón, sino también sistemas que contengan ya

sea: un electrón y dos centros de carga iónicos ( $D^+$ ) o dos electrones y un centro de carga iónico ( $D^-$ ).

- [1] P. Harrison, *Quantum Wells, wires, and Dots* 2<sup>a</sup> ed, John Wiley and Sons, Chichester, 2005.
- [2] A. Rolo, A. Yukio, C. Silva, et al., *Nanoestructuras semiconductoras fundamentos y aplicaciones*, CYTED, Madrid, 2003.
- [3] M. Cardona, P. Yu, *Fundamentals of Semiconductors*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.
- [4] A. Bruno-Alfonso, A. Latgé, Phys. Rev. B 52, 15887 (2000.)
- [5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addyson-Wesley, New York, 1995.
- [6] H. Hu, J. Zhu and J. Xiong, Phys. Rev. B. 62, 16777 (2000).
- [7] O. Voskoboynikov, H. C. Huang, et al., Solid state communications, 119 (2001).
- [8] J. Planelles, W. Jaskolski, J. I. Aliaga, Phys. Rev. B 65, 033306 (2001).
- [9] Jia-Lin Zhu, Xiquan Yu, Zhensheng Dai, Xiao Hu, Phys. Rev. B 67, 075404 (2003).
- [10] T. Ihn, A. Fuhrer, T. Heinzl, K. Ensslin, W. Wegscheider, M. Bichler, Physica E, 16 (2003) 83-89.
- [11] H. Pan and J. L. Zhu, J. Phys.: Condens Matter 15, 7287 (2003).
- [12] J. L. Zhu, Z. Dai and X. Hu, Phys. Rev. B. 68, 45324 (2003).

- [13] B. S. Monzon, M. V. Ivanov, P. Schmelcher, Phys. Rev. B 70, 205336 (2004).
- [14] S. Viefers, P. Koskinen, P. Singha Deo, M. Manninen, Physica E, 21 (2004) 1-35.
- [15] Jia-Lin Zhu, Shuo Hu, Zhensheng Dai, Xiao Hu, Phys. Rev. B 72, 075411 (2005).
- [16] A. Bruno-Alfonso, A. Latgé, Phys. Rev. B 71, 125312 (2005).
- [17] W. Gutiérrez, J. H. Marín, F. García and I. D. Mikhailov, Rev. Col. Fís 37, 150 (2005).
- [18] F. García, J. H. Marín, H. Paredes Gutiérrez and I. D. Mikhailov, Phys. Stat. Sol. (c) 2, 3630 (2005).
- [19] B. K. Ridley, *Quantum Processes in Semiconductors 4<sup>a</sup> ed*, Clarendon, Oxford, 1999.
- [20] D. Campos, *Fundamentos de Física Atómica y molecular*, eun editorial Universidad Nacional de Colombia, Bogota, 1997.
- [21] Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. 115, 485 (1959).
- [22] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [23] <http://www.ioffe.ru/SVA/NSM/Semicond/InAs/basic.html>.

[24] A. Dargys, J. Kundrotas, *Handbook on Physical Properties of Ge, Si, Ga, As and InP, InAs*, Science and Encyclopedia Publisher, Vilnius, 1994.

[25] S Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin 1974.