LIMITES DE SUCESIONES CON GRÁFICAS Y PAPEL CALCANTE

JENNY PAOLA COBOS
Y
LUZ STELLA RANGEL

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

LIMITES DE SUCESIONES CON GRÁFICAS Y PAPEL CALCANTE

JENNY PAOLA COBOS
Y
LUZ STELLA RANGEL

Trabajo de grado para optar al título de Especialistas en educación matemática

Director
GABRIEL YÁÑEZ CANAL
Ph. D. En Educación matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

A Dios por todas las oportunidades que nos ha dado para seguir adelante, y por darnos fortaleza para afrontar cada prueba que ha puesto en nuestro camino.

Agradecimientos

A Olga, Edna, Johanna, y Álvaro nuestros estudiantes, quienes por su colaboración y dedicación hicieron posible este trabajo.

Al señor Eduardo Vásquez, rector del Colegio Integrado Yarima por permitirnos llevar a cabo el proyecto en la Institución.

A Gabriel Yáñez, nuestro querido y respetado orientador, por su incondicional ayuda y enorme paciencia.

A nuestros amigos del semestre, por aquellos momentos compartidos.

A nuestras familias por su apoyo moral.

A Julyus y Eduard por su amor.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN

TITULO
LÍMITE DE SUCESIONES CON GRÁFICAS Y PAPEL CALCANTE*

AUTORES
RANGEL GUALDRÓN, Luz Stella; COBOS LOZADA, Jenny Paola**

PALABRAS CLAVES
1. Límite de sucesiones. 2. Gráficas de funciones. 3. Papel calcante. 4. Infinito potencial. 5. Infinito actual.

DESCRIPCIÓN O CONTENIDO

Este trabajo tiene como objetivo orientar a los estudiantes en la construcción del concepto de límite de una sucesión, a través de actividades gráfico-manuales, motivando el aprendizaje desde un punto de vista dinámico. En este estudio participaron cuatro estudiantes de undécimo grado del Colegio Integrado Yarima. La investigación se ocupó de la siguiente pregunta específica: "*¿Cómo llegan los estudiantes a comprender el concepto de límite de una sucesión, cuando este es enseñado de manera activa?".*

El método de investigación usado es el estudio de casos cualitativo. Es de tipo descriptivo y se centra en analizar el concepto intuitivo de límite, trabajando el límite de sucesiones con los estudiantes que cursan el grado once.

Algunas actividades desarrolladas incluyeron el uso de espejos paralelos y de pequeñas tiras de papel traslúcido (calcante) de ancho ε. Los talleres permitieron el manejo de diferentes representaciones de un mismo objeto matemático, en particular la visualización de una sucesión de manera algebraica, numérica y gráfica. En cada uno se usaron tiras de papel calcante para la evaluación de la convergencia o no de las sucesiones. Se incluyeron sucesiones monótonas, oscilantes, convergentes y divergentes.

Las actividades con las tiras de papel calcante, combinadas con diversos tipos de sucesiones ayudaron a los estudiantes a desarrollar una correcta concepción del límite de una sucesión.

---

* Trabajo de Grado
** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Gabriel Yánez Canal

SUMMARY

TITLE
LÍMITE DE SUCESIONES CON GRÁFICAS Y PAPEL CALCANTE*

AUTHOR
RANGEL GUALDRÓN, Luz Stella; COBOS LOZADA, Jenny Paola**

Key Words: Limits, Successions, Graphs, Functions, Translucent Paper, Potential Infinite, Infinite Present

DESCRIPTION
This work has as objective to orient to the students in the construction of the concept of it limits of a succession, through manual activities graphical, motivating the learning from a dynamic point of view. In this study four students of eleventh degree of the integrated School Yarima participated. The investigations I occupy of the following specific question: "How the students get to understand the concept of limit of a succession, when this he is taught of active way". The used method of investigation is the qualitative study of cases. It is of descriptive type and it is centered in analyzing the intuitive concept of limit, working the limit of suseciones with the students who attend degree eleven. Some developed activities included the use of parallel mirrors and small strips of translucent paper (calcante) of wide. The factories allowed the handling of different representations from a same mathematical object, in individual the visualization of a succession of algebraic, numerical and graphical way. In each one strips of calcante paper were used for the evaluation of the convergence or not of the successions. Successions monotones, oscillating, convergent and divergent were included. The activities with strips of calcante paper, combined with diverse types of successions helped the students to develop a correct conception of the limit of a succession

Work of degree Faculty of sciences. School of Mathematics. Director: Gabriel Yánez Canal

---

* Graduation Project
** Ability of Sciences. Specialiation in Mathematical Education. Director: Gabriel Yánez Canal

Introducción

La reflexión continua que hacemos los maestros sobre nuestras experiencias en el aula de clase nos conducen a la búsqueda de nuevas estrategias que posibiliten el cambio de algunas prácticas educativas, contribuyendo en el mejoramiento de los procesos de aprendizaje de nuestros estudiantes. Nuestra búsqueda se centra en los procesos de enseñanza del concepto de límite.

¿Por qué el concepto de límite? Este concepto juega un papel fundamental en la comprensión de otros conceptos del Cálculo, por ejemplo, la suma de una serie infinita, la continuidad de una función, la derivada de una función y la integral de una función, llevan en su definición el concepto de límite. Y su complejidad resulta ser fuente de dificultad tanto para su aprendizaje como para su enseñanza.

Tradicionalmente, ¿cómo abordamos su enseñanza? Es común que los maestros partamos del empleo de aproximaciones sucesivas, por ejemplo, para encontrar el $\lim_{x \to 2}(x-2)^2$, invitamos al estudiante a construir una tabla de *valores cercanos a* 2 tanto por la derecha como por la izquierda y a partir de la tabla observar que cuando el acercamiento a 2 ($x \to 2$) se hace por la izquierda, la función tiende al mismo valor que cuando $x \to 2$ por la derecha, llamando a dicho resultado el límite de la función cuando $x \to 2$, que en nuestro ejemplo es cero.

$x < 2$ x se acerca a 2 por la izquierda

x se acerca a 2 por la derecha

	1	1,5	1,9	1,99	1,99	2	2,001	2,01	2,1	2,5	3
$f(x)$	1	0,25	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	?	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}	0,25	1

$f(x)$ se acerca a 0

$f(x)$ se acerca a 0

Realizamos de igual forma dos o más ejemplos similares, para luego desarrollar de manera mecánica, con énfasis en el proceso algebraico, variados ejercicios.

Esta manera de enfocar la enseñanza del límite no hace más que favorecer el desarrollo de una serie de habilidades relacionadas con el cálculo, pero no con la comprensión del concepto.

Inquietas ante esta realidad, fuimos reflexionando, consultando, y profundizando sobre diversos aspectos que involucran el aprendizaje de este concepto, entre ellos las principales dificultades, los errores en la concepción y su tratamiento a través de la historia. Surgiendo así la pregunta de nuestra investigación: *¿Cómo llegan los estudiantes a comprender el concepto de límite de una sucesión, cuando este es enseñado de manera activa?*

Interrogante que motivó la realización de un estudio de caso al orientar a nuestros estudiantes del Colegio Integrado Yarima en la construcción del concepto de límite de una sucesión, a través de actividades gráfico-manuales, motivando el aprendizaje desde un punto de vista dinámico.

Para fundamentar la investigación consultamos toda la literatura posible alrededor del aprendizaje y la enseñanza de este concepto. Realmente nos sorprendió encontrar muchas investigaciones en torno al límite y con diversos enfoques, dejando ver que nos enfrentamos a un concepto bastante complejo.

Nuestro principal interés fue el guiar de muy buena forma, a nuestros estudiantes de undécimo grado del Colegio Integrado Yarima, en la construcción del concepto de límite de una sucesión, sin que fuera necesario el aprendizaje de una definición y de unas propiedades de manera memorística, posibilitando que sean los mismos estudiantes quienes lleguen a la formulación de los conceptos y propiedades.

Decidimos hacer una estrategia didáctica específica, en la que planteamos una serie de actividades que tuvieran en cuenta algunas premisas de la didáctica de las matemáticas, “partir de un diagnóstico inicial”, “utilizar material manipulable”, “recurrir a diferentes representaciones de un concepto”, entre otras. Algunas de estas actividades son una adaptación a nuestro contexto escolar del estudio realizado por la Dra. Kyeong Hah Roh en el año 2005 con un grupo de estudiantes de primer año de universidad.

Dividimos la presentación de este documente en seis capítulos:

CAPÍTULO 1: ANTECEDENTES. En el presentamos una revisión de la literatura alrededor de esta problemática, mostrando estudios y algunas investigaciones que guiaron la realización de este trabajo.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO. Damos a conocer al lector los aspectos teóricos que soportan y orientan este estudio: Dificultades en el aprendizaje del concepto, Registros de comprensión, representación y aprendizaje, y una breve descripción de los aspectos más relevantes en el estudio de las sucesiones.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN. En el que describimos el proceso investigativo.

CAPÍTULO 4: LAS ACTIVIDADES. En este capítulo relatamos paso a paso la intención, forma y análisis de la actividad diagnostica y hacemos una breve presentación y descripción de los talleres formulados.

CAPÍTULO 5: LOS RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA. En el cual realizamos el análisis de las respuestas de los estudiantes a cada una de las respuestas de los cuestionarios y se hacen algunas observaciones recogidas en las grabaciones y filmaciones de las clases. CAPÍTULO 6: LAS CONCEPCIONES DEL INFINITO Y DEL LÍMITE. Del análisis de los datos recogidos surgen dos categorías “El infinito como un proceso paso a paso, sin fin” y “El límite como una idea de aproximación”.

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES. Para finalizar, formulamos los aspectos más relevantes encontrados al realizar y analizar nuestra experiencia.

Capítulo 1

Antecedentes

En este capítulo presentamos un corto recorrido por el desarrollo histórico del concepto de límite y de infinito y algunos aspectos teóricos y resultados de investigaciones que se han realizado alrededor de las concepciones de los estudiantes acerca del límite (obstáculos epistemológicos[1] y concepciones erróneas) así como una breve descripción de las propuestas que algunos investigadores han formulado para superar dichos problemas.

1.1 La comprensión del concepto de límite

Creemos importante hacer una breve revisión del desarrollo histórico del concepto de límite, ya que los matemáticos tuvieron durante muchos años serias confusiones y dificultades al abordar los límites -hasta que Karl Weierstrass (1815–1897) sugirió la definición rigurosa del límite- y esas confusiones las viven hoy muchos de nuestros estudiantes.

Las primeras manifestaciones de la idea intuitiva de límite se presentan en la época griega, al encontrar procesos geométricos infinitos que surgen de las paradojas de Zenón, del descubrimiento de los números irracionales y del cálculo de áreas y volúmenes de figuras curvilíneas mediante la comparación de figuras rectilíneas, utilizando el método de aproximaciones sucesivas (Cornu, 1991, p. 159).

---

[1] "Aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas" Brousseau (1983).

En el siglo XVII cuando Isaac Newton (1642–1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) formularon el cálculo, el límite fue descrito como "la cantidad a la cual una variable se acerca pero nunca se sobrepasa". En particular, el límite fue considerado como un valor al cual ciertas cantidades en movimiento "se aproximan continuamente más que cualquier diferencia dada, pero nunca puede alcanzarla o ir más allá, antes de que las cantidades hayan disminuido indefinidamente" (Grabiner, citado por Roh, 2005).

A finales del siglo XVI y comienzos del XVII varios matemáticos, como Stevin, Luca Valerio y Cavalieri, basados en los trabajos griegos y aprovechando la inserción del infinito en los razonamientos matemáticos de los filósofos de la época, propusieron nuevos métodos para resolver problemas de áreas de figuras curvilíneas.

A principios del siglo XIX, los matemáticos empezaron a interesarse por la falta de precisión en los conceptos y demostraciones de varias ramas del análisis, pero el uso de los procesos de aproximación continuó siendo la principal herramienta para definirlo. Cauchy propone como definición "Cuando los sucesivos valores asignados a una variable se aproximan indefinidamente a una valor fijo de modo que terminan por diferir de él tan poco como se desee, este último valor es llamado límite de los otros" (Boyer, 1992, p.647).

En todas estas definiciones el límite es conceptualizado como un valor que las cantidades abordan más y más cerca, pero que nunca alcanzan o exceden. Dichas definiciones causaron en su época los mismos problemas que diversos estudios han detectado hoy en los estudiantes.

1.2 La concepción del infinito

El infinito es un concepto fundamental en matemáticas –y en otras ciencias- y son numerosas las ideas relacionadas con este concepto: potencialidad y actualidad, distintos tamaños de infinito, lo muy grande y lo muy pequeño, existencia del continuo, tiempo y espacio, etc. En el estudio del concepto de límite destacamos dos significados fundamentales:

- *infinito potencial* –o en potencia- representando un proceso sin fin, reiterativo, sin final, ilimitado, inacabado; se caracteriza por la idea de uno más. En esta concepción el infinito siempre existe en potencia, nunca en acto, es decir, podemos acercarnos al infinito tanto como queramos, pero nunca podremos alcanzarlo realmente. El infinito potencial es incomparable con otro infinito y no se puede contar.
- *infinito actual* -o en acto- en el sentido de totalidad completa, acabado, terminado, en un todo; aparece cuando ya hemos llegado, cuando tenemos el total. En esta concepción la infinitud es alcanzable. El infinito actual es considerado como "la toma de conciencia simultanea de todos los elementos de un conjunto infinito" Hitt (1997, p. 1). Se concibe al infinito en su totalidad, como por ejemplo el conjunto de los números naturales, son todos, no algunos. Es comparable con cualquier otro infinito actual y se puede contar.

En primaria, al iniciar el estudio de los números naturales, preguntamos a nuestros estudiantes ¿cuántos elementos tiene el conjunto de los números naturales? Su respuesta es "muchos, infinitos" introduciendo en el estudiante la idea intuitiva de que el infinito es sinónimo de lo que no tiene fin, de algo que sigue y sigue y no termina. Idea que reforzamos al hablar de la línea recta y enfatizar en que no tiene principio ni final, que nunca acaba, que sigue y sigue.

Esta misma idea fue la que predominó en los matemáticos durante mucho tiempo. La historia de infinito comienza con los griegos antiguos. La palabra griega "apeiron" quiso decir *ilimitada*, *indefinida*, o *indefinido* (Boyer, 1992). Para los griegos, el infinito no existió en realidad, en su lugar surge la idea de una construcción potencial. Para Aristóteles, por ejemplo, el infinito no es algo acabado, sino "*aquello por fuera de lo cual siempre hay algo*". Este filósofo distingue dos tipos de infinito: por adición –presente en el proceso de contar, ya que siempre se puede obtener un número más grande que otro agregándole una unidad- y por divisibilidad –se puede dividir un segmento en subsegmentos quienes se pueden dividir en otros más pequeños y así sucesivamente. Esta concepción de un proceso que nunca termina dio lugar a numerosos problemas y paradojas, como la de Aquiles y la tortuga; por eso algunos matemáticos le temían al uso de la palabra infinito, por ejemplo Euclides, quien en sus Elementos prefiere utilizar la expresión "*lo que no tiene fin*" o "*una cantidad mayor que cualquier dada*" en lugar de "existe una cantidad infinita de"; otros tantos matemáticos rechazaban la idea del infinito, por ejemplo los socráticos, quienes lo asociaban con algo malo, perverso, desordenado, caótico e imperfecto.

Desde la Antigüedad Clásica y hasta el siglo XIX la única concepción del infinito considerada como válida era la del infinito potencial. El infinito era unánimemente rechazado. Gauss por ejemplo negaba su existencia "*protesto contra el uso de una cantidad infinita como si fuera una entidad real, esto nunca se permite en las matemáticas. El infinito es sólo una manera de hablar, en la cual propiamente se habla de los límites a los que ciertas razones pueden acercarse tanto como se desee"* (Gauss, citado por Ortiz 1994). Pero, en 1872, cuando Cantor llevaba a cabo una investigación sobre series de Fourier, fue llevado a introducir la idea de infinito actual. Sin embargo, su teoría generó grandes controversias y la noción de infinito actual no tuvo grandes adeptos, incluso al mismo Cantor no le resultó fácil aceptar esa noción como válida, en 1883 el escribió "*la idea de considerar lo infinitamente grande no sólo en la forma de una magnitud que se incrementa ilimitadamente [...] sino también de fijarlo matemáticamente por medio de números en la forma definida del infinito absoluto me fue impuesta lógicamente, casi contra mi voluntad puesto que es contraria a las tradiciones que yo había llegado a venerar en el curso de muchos años de esfuerzos e investigaciones científicas*." (Cantor, citado por Ortiz 1994). Analizando los trabajos relacionados con el infinito, observamos que en los estudiantes se identifican las mismas concepciones que en la evolución histórica del concepto de infinito.

1.3 Los enfoques de las investigaciones en torno a la concepción del límite

Dentro de la literatura que consultamos al respecto, encontramos tres grandes enfoques en las investigaciones:

1. Concepciones equivocadas que tienen los estudiantes en relación a la comprensión del límite.
2. Obstáculos epistemológicos presentes en el aprendizaje del concepto de límite, y
3. Estrategias metodológicas que ayuden a los estudiantes a superar los obstáculos cognitivos y corregir las concepciones equivocadas.

Dentro de las investigaciones del primer enfoque destacan las investigaciones realizadas por Tall y Schwarzenberger (1978), Tall y Vinner (1981), Davis y Vinner (1986) y por Cornu (1991), quienes encontraron que los estudiantes poseían concepciones equivocadas relacionadas con la *no comprensión del proceso infinito inherente en los límites* y con la sola *concepción del movimiento dinámico de los límites (infinito potencial) sin concebir el límite como el resultado último de este proceso dinámico (infinito actual*), razón por la cual, por ejemplo, muchos estudiantes consideran a 0.999… como una aproximación del número 1, pero siempre menor que 1 (Tall y Schwarzenberger, 1978).

En el segundo enfoque destacan las investigaciones realizadas por Tall y Vinner (1981), Sierpinska (1987), Cornu (1991), y Lakoff y Núñez (2000). Sus estudios mostraron que las experiencias diarias y el lenguaje coloquial conducen a imágenes conflictivas en la mente, y que dichas imágenes a menudo no desaparecen fácilmente. El contexto y las experiencias de los estudiantes se mezclan con los nuevos conceptos matemáticos produciendo sus propias concepciones personales; dichas experiencias pueden interferir en la comprensión de los conceptos matemáticos. Cornu y Sierpinska resaltan en sus investigaciones la ruptura con el significado de la palabra límite en el lenguaje cotidiano como uno de los obstáculos epistemológicos. Por ejemplo, el uso cotidiano de la expresión *"tiende a" o "se aproxima a"* puede causar la concepción equivocada del límite como un "*acercarse a pero nunca alcanzar",* eliminando toda posibilidad de concebir idea de variación y de movimiento y de poder alcanzar o sobrepasar.

En el tercer enfoque encontramos las investigaciones de:

Tall y Schwarzenberger (1978) quienes en una de sus estudios, presentan una propuesta teórica para la enseñanza del límite de sucesiones. La idea principal de esta propuesta es centrarse, o más bien enfatizar que "s_n (termino general de una sucesión) y s (el límite de la sucesión) son prácticamente indistinguibles". Sin embargo, su propuesta, centrada en aproximaciones y acercamientos a un número dado, puede reforzar la idea de que el límite es algo que nunca se alcanza, que se aproxima.

Davis y Vinner (1986) desarrollaron una experiencia con estudiantes de un curso especial de cálculo del segundo año. Quisieron determinar una propuesta exitosa para "iniciar la comprensión de límite de una sucesión infinita". La idea de estos investigadores en el desarrollo del curso fue crear primero la necesidad del conocimiento para luego introducirlo. Así, ellos iniciaron el curso con un problema particular y poco a poco su desarrollo creó la necesidad de introducir los respectivos conceptos, fórmulas, etc. Al final del trabajo los autores señalaron no haber verificado si las concepciones erróneas que poseían los estudiantes frente al límite habían desaparecido o no.

Páez (2003), llevó a cabo un estudio en dos etapas, la primera con estudiantes de primer semestre de Licenciatura en matemáticas y la segunda con estudiantes de Maestría en matemáticas para analizar las concepciones y problemas de aprendizaje relacionados con el concepto de límite. Para ello utilizó 22 cuestionarios tendientes a crear algunos conflictos cognitivos de estos estudiantes que posibilitaran la superación de los obstáculos cognitivos y la corrección de las concepciones erróneas. Los resultados de su investigación mostraron entre otras cosas, que la principal idea que poseen los estudiantes –tanto de la licenciatura como de la maestría- es que el límite *es el valor al cual nos estamos aproximando.*

Roh (2005) realizó un estudio dirigido a encontrar la comprensión intuitiva de los estudiantes en relación al límite de una sucesión y su reversibilidad -lo cual es una habilidad para poner al revés el orden de ε y N según se requiera en la definición rigurosa de límite. En este estudio participaron once estudiantes de un curso de primer año en la Universidad, que no habían tenido ninguna experiencia con demostraciones formales usando la definición rigurosa de límite.

La investigación se ocupó de la siguiente pregunta específica: "¿Una actividad que involucre ilustraciones gráficas de una sucesión y afirmaciones describiendo la relación de reversibilidad entre ε y N, influye en el desarrollo y acomodamiento de la comprensión intuitiva del concepto límite en los estudiantes?" Surgiendo cuatro sub-preguntas:

1. ¿Cómo explican los estudiantes su comprensión de la convergencia y el límite de una sucesión?
2. ¿Cómo explican los estudiantes la relación ε - N en el contexto del límite de una sucesión?
3. ¿Cómo son los niveles del desarrollo de reversibilidad de estudiantes, es decir, la habilidad para comprender la relación ε - N, asociada con la comprensión intuitiva del límite de una sucesión?
4. ¿Qué tan diferente es la comprensión intuitiva del límite de los estudiantes de una sucesión después del experimento educativo? ¿Qué tan diferente es la reversibilidad de los estudiantes después de la experiencia con las tiras ε?

Cuando la Dra. Roh habla de pensar en reversibilidad plantea el cambiar la dirección del proceso de pensamiento en un problema de límite:

> "Así, la reversibilidad en el contexto del límite de una sucesión, significa la habilidad para pensar en los procesos infinitos en la definición del límite en términos del índice y simultáneamente revertir el proceso para encontrar un índice apropiado en términos de un error arbitrariamente escogido.

> Por ejemplo, al leer el símbolo $\lim_{n\to\infty} a_n$, es natural primero considerar si en la n del índice "*n tiende a* infinito" y luego mirar el término correspondiente a_n para ver si a_n se acerca a un cierto número L. En este orden los estudiantes podrían pensar que al evaluar un límite primero deberían escoger a *N*, y luego deberían tomar un ε suficientemente pequeño dependiendo de la *N* escogida: es decir,
>
> > *Para cualquier número entero positivo N, existe un* $\varepsilon > 0$ *tal que si* $n > N$*, entonces* $/ a_n - L /< \varepsilon$.
>
> Sin embargo, en la definición rigurosa de límite, el orden de los pasos es *al revés.* El índice *N* es dependiente de ε:
>
> > *Para cualquier* $\varepsilon > 0$*, existen un número entero positivo N tal que si* $n > N$ *entonces* $/ a_n - L /< \varepsilon$.
>
> En este orden, al utilizar la definición ε - N para solucionar problemas del límite u otros problemas de cálculo que requieren límites, los estudiantes primero deben escoger un margen arbitrariamente pequeño ε alrededor de L y luego determinar si la sucesión satisface la condición tomando un índice N suficientemente grande".

Los datos recogidos surgieron de una serie de sesiones de 1 hora semanal durante cinco semanas, en las que los estudiantes respondieron cuestionarios y entrevistas semiestructuradas.

Los cuestionarios presentaban sucesiones monótonas, constantes, infinitas, convergentes, oscilantes o divergentes. Los estudiantes representaron cada sucesión tanto de forma numérica como gráfica para determinar su convergencia.

Algunas actividades incluyeron el uso de espejos paralelos y de pequeñas tiras de papel traslúcido de ancho ε, especialmente desarrolladas en este estudio para explorar la relación ε - *N* en la evaluación del límite de una sucesión.

Finalmente, a los estudiantes les fueron presentadas las siguientes definiciones de la tira ε, con las cuales evaluaron la conveniencia de las definiciones y afirmaciones del límite de una sucesión.

> *Definición A de la tira ε: Un cierto valor L es el límite de una sucesión cuando infinitamente muchos puntos en la gráfica de la sucesión están cubiertos por cualquier tira épsilon tan ancha como la tira épsilon que cubre L.*

> *Definición B de la tira ε: Un cierto valor L es el límite de una sucesión cuando sólo finitamente muchos puntos en la gráfica de la sucesión no están cubiertos por cualquier tira épsilon tan ancha como la tira épsilon que cubre L.*

Al analizar la información recogida, encontró que los estudiantes entienden la definición del límite de una sucesión, asociado no sólo con su concepción de límite sino también con su nivel de reversibilidad. Además, se encontró que los estudiantes mejoraron la reversibilidad y / o su concepción de límite a través de la actividad de las tiras de ancho ε, si bien no hubo en las entrevistas con los estudiantes una forma o método para indicar sus errores, corregir conceptos equivocados acerca del límite, o confirmar la conveniencia de las definiciones de la tira ε.

Este estudio muestra que las actividades con las tiras ε, combinadas con los diversos tipos de sucesiones usadas en este experimento educativo, es un buen método instructivo para ayudar a los estudiantes a desarrollar y acomodar su concepción del límite de una sucesión, por eso decidimos adaptar algunas de las actividades desarrolladas por él en nuestra investigación.

1.4 A manera de conclusión

Hemos visto que las nociones de infinito y de límite han ido variando de acuerdo a los cambios conceptuales que se han ido dando históricamente. Sus concepciones son bastante complejas, por lo que importantes matemáticos a lo largo de la historia se enfrentaron a confusiones y obstáculos; varios son los estudios realizados en educación matemática tendientes a encontrar los problemas generados en su aprendizaje –sean estos por el surgimiento de obstáculos cognitivos o por concepciones erróneas- y otros tantos han formulado propuestas de instrucción que posibiliten la superación de dichos problemas, sin embargo estos aún no han desaparecido.

Capítulo 2

Marco teórico

El interés de nuestra investigación se enfoca en el proceso de construcción del concepto de límite de una sucesión, por esto presentamos en este capítulo algunos aspectos que orientaron el diseño de cada uno de los talleres. Analizaremos las dificultades más comunes en el aprendizaje del concepto de límite, así como el punto de vista de Duval (2004) sobre el como se construyen los conceptos matemáticos, según la teoría de las representaciones semióticas. Al final del capítulo se hace un breve repaso de los conceptos más importantes en relación a las sucesiones.

2.1 Dificultades en el aprendizaje del concepto de límite

En un comienzo, al reflexionar en torno a algunas de las dificultades que tienen los estudiantes en el concepto de límite, pensamos que estas estaban relacionadas, en su mayoría, con la manera como se enseña el tema. Sin embargo, al revisar la historia de las matemáticas encontramos que el concepto es bastante complejo y que muchos matemáticos no lograron superar el obstáculo generado por el infinito potencial para concebir el infinito actual y probablemente dichos obstáculos aparecerán en el aula de matemáticas. Por lo que el problema no se reduce a la vivencia del aula.

Mostramos a continuación las concepciones erróneas y los obstáculos epistemológicos más comunes presentes en los estudiantes al construir el concepto de límite, encontrados en las investigaciones realizadas en educación matemática mencionadas en el capítulo anterior. Dichas investigaciones encontraron como principales dificultades las siguientes:

- El sentido común de la palabra límite, que induce concepciones persistentes del límite como una barrera infranqueable.

- El tránsito entre diferentes sistemas semióticos de representación, por ejemplo del gráfico al numérico, del algebraico al gráfico, del verbal al gráfico, etc.
- La idea de límite como una idea de aproximación, de acercarse pero sin alcanzar.
- La idea del infinito solo proceso reiterativo, como la realización paso a paso sin límites.
- El significado de las diferentes notaciones:
  a. ¿Qué significa $\underset{n\to\infty}{lím}\, a_n = L$?
  b. En la notación $\underset{n\to\infty}{lím}\, a_n = L$ ¿qué significa "*n* tiende al infinito"?
  c. ¿Qué significa $\underset{x\to a}{lím}\, f(x) = L$?
  d. En la notación $\underset{x\to a}{lím}\, f(x) = L$ ¿qué significa "*x* tiende a *a*"?
- Conflictos con la creencia de que el límite como una simple sustitución.
- Conflictos con la creencia de que las funciones discontinuas, en general, no tienen límite.
- El conflicto entre la intuición y los procesos de demostración.
- Las asociadas con la manipulación algebraica de las funciones.
- Conflictos para otorgarle un significado a la definición de límite en términos de (ε, N) en el caso de sucesiones y series y a la definición (ε, δ) en el caso de límite de funciones en un punto, o en el caso del límite de funciones cuando x crece sin límites.

Algunas de estas dificultades se generan por los diversos lenguajes utilizados en matemáticas, como lo son el algebraico, analítico, geométrico, gráfico y verbal, los cuales generan contextos lingüísticos matemáticos diferentes.

Los estudiantes no solo tienen que resolver un mismo problema representado de diferente forma (que tiene representación distinta) sino que deben resolver un mismo problema expresado en diferentes lenguajes matemáticos (lo que comúnmente denominamos contextualizar matemáticamente el problema).

Cada lenguaje matemático utiliza una combinación de ciertos registros de representación semiótica (Duval, 2004) que pueden ser del tipo lingüístico (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal,...) o de otro tipo (figuras geométricas, gráficos cartesianos, esquemas,...)

2.2 Registro de representación, comprensión y aprendizaje

Las representaciones matemáticas se han entendido desde los años 80, como todas aquellas herramientas -signos o gráficos- que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas. Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas; de ahí su interés didáctico.

Desde entonces las representaciones se han considerado parte esencial del aparato conceptual necesario para analizar los procesos de aprendizaje y comprensión de las matemáticas. Pero esta elección no ha estado exenta de dificultades ya que el término elegido es complejo y encierra múltiples significados.

Para el desarrollo de este trabajo nos hemos centrado en la teoría de las representaciones semióticas, desde el punto de vista cognitivo, desarrollada por Duval (2004), quien afirma: “Aprender Matemáticas es aprender a discriminar y coordinar los sistemas semióticos de representación para llegar a ser capaces de transformar cualquier representación” y “la característica esencial de la actividad matemática es el cambio de registro de representación y que la conversión de las representaciones es un problema crucial en el aprendizaje de las matemáticas”.

Duval también menciona una gran variedad de representaciones semióticas posibles: figuras, esquemas, gráficos, expresiones simbólicas, expresiones lingüísticas, etc., las cuales comúnmente se clasifican en dos grandes grupos, según conserve o no algunas de las propiedades pertenecientes al objeto que representan: *las representaciones analógicas* (las imágenes, por ejemplo, cuyos elementos conservan las relaciones de vecindad existente entre los elementos del modelo) y *las representaciones no-análogas*, como las lenguas, que no conservan ninguna relación del modelo pero que pueden representar operaciones o trasformaciones de éste.

También clasifica las representaciones en *concientes* y *no concientes*. Por concientes, entiende aquellas en las que "aparece algo", y por no concientes, las que se escapan completamente a la percepción de la persona.

Así mismo, clasifica las representaciones en *internas* y *externas*, entendiendo por externas aquellas que son visibles y observables públicamente, y por internas, las privadas que no la son. Considera que las representaciones externas "son por naturaleza semióticas, ya que se producen mediante un sistema de signos y son accesibles a todos los sujetos capaces de interpretar este sistema de signos". Las representaciones externas (enunciados, fórmulas, gráficas, etc.) son el medio por el cual las personas exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a las otras personas. Las representaciones externas juegan un doble papel:

1. actúan como un estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales y
2. expresan la red de significados personales de los sujetos que los usan.

La noción de representación semiótica presupone, entonces, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro. Esta operación ha de ser descrita en primer lugar como un "cambio de forma". Por ejemplo, trazar la curva correspondiente a una ecuación de segundo grado, o pasar del enunciado de una relación a su escritura literal, habrá de considerarse como el "*cambio de la forma en que un conocimiento está representado*" (Duval, 2004).

Remarca la existencia de diversos sistemas de representación ligados a un mismo objeto matemático. Cada uno de estos sistemas tiene potencialidades y limitaciones, por lo que su utilización conjunta es esencial para producir diferentes sentidos o bien para escoger uno de ellos. Sin embargo, es aquí donde surgen las causas profundas de los errores, ya que siempre que se cambia de sistema semiótico, el contenido de la representación se modifica, mientras que el objeto permanece igual. Como los objetos matemáticos pueden ser identificados por cualquiera de sus representaciones, al comienzo los estudiantes son incapaces de discriminar el contenido de la representación y el objeto representado. Es decir, para ellos los objetos cambian cuando cambia la representación. Estudios afirman que cambiar la forma de una representación es, para muchos estudiantes de los diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso para algunos imposible.

Para Duval existen tres actividades cognitivas fundamentales en las representaciones semióticas:

- *Formación*, como el recurso de un(os) signo(s) para actualizar "la mirada de un objeto" o para sustituir la visión de este objeto, ya sea para expresar una representación mental, o para evocar un objeto real.
- *Tratamiento* es la trasformación de una representación –inicial- en otra representación –final- respecto a una cuestión, a un problema o a una necesidad. Un tratamiento es una *transformación de la representación interna a un registro de representaciones o a un sistema*.
- *Conversión* es la transformación de la representación de un objeto -de una situación o de una información dada en un registro- en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro. La conversión es una *transformación externa relativa al registro de*

> *la representación de partida***.** La conversión puede ser congruente (en concordancia lógica) y no congruente (sin concordancia lógica).

Afirma además, que las causas profundas de los errores “hay que buscarlas en la no congruencia entre sistemas semióticos, la cual revela una carencia de coordinación (capacidad para reconocer dos representaciones distintas como representaciones de un mismo objeto) entre dichos sistemas”.

Posibilitar el cambio de registro constituye una variable fundamental en didáctica, facilitando considerablemente el aprendizaje ya que ofrece diversos procedimientos de interpretación. Por ejemplo, las operaciones con racionales pueden ser más fácilmente introducidas y practicadas con el empleo partición de figuras, que con la escritura de fracciones. El progreso en matemáticas implica necesariamente el desarrollo de numerosos sistemas semióticos de representación, de tal forma que cada nuevo sistema semiótico aporte nuevos significados de representación y procesos para el pensamiento matemático.

Para Duval, “la diversificación de representaciones semióticas de un mismo objeto aumenta la comprensión de los objetos”.

Apoyando las ideas de Duval, Hitt (1997) recomienda el uso de diversos tipos de representación para la enseñanza de un concepto tan complejo como el de límite:

> “Es posible que los profesores de matemáticas restrinjan su instrucción a una enseñanza de corte algebraico. Dada la complejidad del concepto se muestra necesario otros acercamientos de enseñanza en donde las tablas y las gráficas jueguen un mejor rol. Entonces una posibilidad es la de introducir los procesos algébricos utilizados hasta ahora, acompañados de un acercamiento que promueva tareas de conversión entre las representaciones numérica, gráfica y algebraica de un problema de cálculo de límites. La predicción del límite se puede obtener por medio del uso de una tabla o de la lectura correcta de una gráfica -este acercamiento parece

> ser desdeñado por la instrucción. Una vez realizada la predicción, se puede pasar al cálculo algebraico". Hitt (1997, p. 17).

Estas recomendaciones las hemos tenido en cuenta al plantear cada una de las actividades a desarrollar con los estudiantes de grado once para el acercamiento al concepto de límite.

2.3 Sucesiones

2.3.1 Definición

El término sucesión (o secuencia) en la vida cotidiana y en las matemáticas tienen el mismo significado: un conjunto de cosas o sucesos que se presentan en un orden determinado.

> *Si A es un conjunto cualquiera no vacío, entonces una sucesión infinita de elementos de A es una función cuyo dominio es un subconjunto infinito de los números naturales N, es decir, $f : N \to A$. El elemento $f(n) \in A$ con $n \in N$ se llama término n-ésimo de la sucesión.*

La gráfica de una sucesión infinita $f : N \to A$ está constituida por un conjunto infinito de parejas de la forma $(n, f(n))$ para todo $n \in N$ y $f(n) \in A$ que anotamos (n, a_n), en la que $a_n = f(n)$. Usualmente representamos las sucesiones con notación de subíndice, en lugar de la anotación funcional. Así:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_n & \cdots \end{array}$$

indica que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, …, $f(n) = a_n$, etc. Las imágenes o valores a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_n$ se llaman los términos de la sucesión, la cual podemos representar con $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ o simplemente mediante el símbolo $\{a_n\}$.

Ejemplo 1: Encontrar los cinco primeros términos de las sucesiones, en las cuales se da el término general o término n-ésimo de una sucesión.

a. $\{a_n\} = \{2 + (-1)^n\}$

b. $\{b_n\} = \{n(n+1)(n+2)\}$

c. $\{c_n\} = \left\{\dfrac{n}{1+2n}\right\}$

Para encontrar los cinco primeros términos de las sucesiones infinitas dadas, evaluamos el término general en los números naturales 1, 2, 3, 4, 5. Así:

a. $a_1 = 2 + (-1)^1 = 1$

$a_2 = 2 + (-1)^2 = 3$

$a_3 = 2 + (-1)^3 = 1$

$a_4 = 2 + (-1)^4 = 3$

$a_5 = 2 + (-1)^5 = 1$

Luego $\{a_n\} = \{1,3,1,3,1,...2 + (-1)^n,...\}$

b. $b_1 = 1(1+1)(1+2) = 6$

$b_2 = 2(2+1)(2+2) = 24$

$b_3 = 3(3+1)(3+2) = 60$

$b_4 = 4(4+1)(4+2) = 120$

$b_5 = 5(5+1)(5+2) = 210$

Luego $\{b_n\} = \{6,24,60,120,210,\cdots n(n+1)(n+2),...\}$

c. $c_1 = \dfrac{1}{1+2(1)} = \dfrac{1}{3}$

$$c_2 = \frac{2}{1+2(2)} = \frac{2}{5}$$

$$c_3 = \frac{3}{1+2(3)} = \frac{3}{7}$$

$$c_4 = \frac{4}{1+2(4)} = \frac{4}{9}$$

$$c_5 = \frac{5}{1+2(5)} = \frac{5}{11}$$

Luego $\{c_n\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots \frac{n}{1+2n}, \ldots\right\}$

Ejemplo 2: Establecer el término general de la sucesión cuyos términos son:

$$\{s_n\} = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots\right\}$$

Se observa que los términos de la sucesión son números fraccionarios, donde el denominador está formado por el número natural más 1, y el denominador es el número natural, entonces: $\{s_n\} = \left\{\frac{n+1}{n}\right\}, n \in N$.

2.3.2 Límite de una sucesión de números reales

Analizaremos el concepto de límite de una sucesión, a través de la representación gráfica de ella sobre una recta real, para luego, con base en este análisis dar una definición formal.

Realicemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Dada la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{3}{n+1}\right\} = \left\{\frac{3}{2,}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \ldots\right\}$, analizar sus términos y encontrar su límite.

Al graficar la sucesión en un plano cartesiano se puede observar que los términos de la sucesión se están acercando se cada vez más al punto cero. Esto indica que a medida que n toma valores grandes, los términos de la sucesión se aproximan al valor 0. Decimos que el límite de $\left\{\frac{3}{n+1}\right\}$ es 0, cuando n toma valores muy grandes. Esto se escribe simbólicamente $\underset{n\to\infty}{lím}\left\{\frac{3}{n+1}\right\}=0$, y se lee "el límite de la sucesión $\left\{\frac{3}{n+1}\right\}$, cuando n tiende a infinito, es igual a cero".

Se debe tener presente que ∞ no es un número, es un símbolo que indica que los valores que toma n pueden ser más grande.

Ejemplo 2:

Hallar el límite de la sucesión $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}=\left\{2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\frac{7}{6},\ldots\frac{100}{99},\ldots,\frac{1000}{999},\ldots\right\}, n>0$.

Al analizar la representación gráfica de la sucesión, se observa que los términos se acercan al valor 1. Es decir, que a medida que n toma valores más grandes los términos de la sucesión se aproximan al valor 1, lo que indica, que el límite de la sucesión $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}, n>0$, cuando n toma valores muy grandes es igual 1.

Simbólicamente: $\underset{n\to\infty}{lím}\left\{\frac{n+1}{n}\right\}=1, n>0$ y $n\in N$.

Los resultados obtenidos en los ejemplos anteriores los podemos explicar diciendo que el valor absoluto de la diferencia $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}-1, n\in N$ y $n>0$, se hace cada vez más pequeño cuando n toma valores más grandes. Veámoslo con alguno de los términos de la sucesión:

$|2-1|=1;\ \left|\frac{3}{2}-1\right|=\left|\frac{1}{2}\right|=0.5;\ \left|\frac{4}{3}-1\right|=\left|\frac{1}{3}\right|=0.333;$

$\left|\frac{5}{4}-1\right|=\left|\frac{1}{4}\right|=0.25;\ \left|\frac{6}{5}-1\right|=\left|\frac{1}{5}\right|=0.2;$

$$\left|\frac{1000}{999}-1\right|=\left|\frac{1}{999}\right|=0.001001$$

Generalizando, definimos:

Límite de una sucesión:

> *Un número real* L *es el límite de una sucesión* $\{a_n\}$ *si el valor absoluto de la diferencia entre* s_n *y* L *es tan pequeño como deseemos, siempre que* n *tome valores cada vez más grandes:*
>
> $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, *si* $|a_n - L| < m$, *donde* m *se hace tan pequeño como deseemos cuando* n *se hace muy grande.*

La expresión $|a_n - L| < m$, se puede escribir como: $L - m < a_n < L + m$

Esta expresión en forma de intervalo, es $(L-m, L+m)$. Este intervalo recibe el nombre de vecindad del punto L.

Utilizando este concepto de vecindad, podemos formular otra definición del límite de una sucesión:

> *Un número real* L *es el límite de una sucesión* $\{a_n\}$ *si, para cualquier número positivo* m, *existe un número, por ejemplo* N_0 *tal que todos los términos de la sucesión, comenzando por el término* a_{N_0+1}, *pertenece a la vecindad del punto L.*

Generalmente, al valor m se le llama épsilon (ε).

2.3.3 Propiedades de los límites de sucesiones

Los límites de sucesiones cumplen ciertas propiedades que simplifican notablemente el límite de una sucesión convergente. Estas propiedades son clásicas y sus demostraciones se pueden encontrar en cualquier libro de cálculo.

Sean a_n y b_n dos sucesiones convergentes tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ entonces:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n - L| = 0$
2. Su límite es único y finito.
3. Si k es un número real fijo, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n} = 0$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n = kL$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L + M$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n . \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L.M$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{L}{M}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p = L^p$

Nuestra propuesta de aula con los estudiantes de once grado no contempla la demostración de estas propiedades.

Capítulo 3

Metodología de la Investigación

En este capítulo describimos la metodología usada en este trabajo, los sujetos de estudio, el contexto donde se realiza, el tipo de investigación que estamos realizando y el relato de las fases de la experimentación así como las etapas de esta investigación.

3.1 Tipo de investigación

El diseño de este trabajo se clasifica como un estudio de casos. Es de tipo descriptivo y se centra en analizar el concepto intuitivo de límite, trabajando el límite de sucesiones con los estudiantes que cursan el grado once.

3.2 Los estudiantes y los casos

Este trabajo lo desarrollamos con un grupo de 16 estudiantes del grado once del Colegio Integrado Yarima, Institución de carácter oficial, ubicada en el corregimiento de Yarima, en donde funcionan los grados de sexto a undécimo, en la jornada de la mañana. Sin embargo para el análisis del trabajo solamente tomamos la información de cuatro estudiantes: Álvaro, Edna, Johanna y Olga. Estos estudiantes fueron escogidos teniendo en cuenta su rendimiento académico en el área de matemáticas -teniendo así estudiantes sobresalientes, promedio y con ciertas dificultades- y la información recogida a través de la actividad diagnóstica, la cual la expondremos con más detalle en el transcurso de este capítulo.

3.2.1 Los casos

A continuación queremos hacer una breve descripción de los cuatro estudiantes que participaron de este trabajo:

Johanna es una joven de 16 años que llegó a culminar su último grado de educación media en esta institución. Es alegre, extrovertida, sencilla; participa con agrado en las actividades propuestas y las desarrolla fácilmente debido a los conocimientos previos del área. Cabe resaltar su disposición en este trabajo, pues su área favorita son las matemáticas.

Olga, es una joven de 17 años, nacida en Barrancabermeja. Es introvertida y callada, se le dificulta expresar sus ideas en forma oral y considera que el área de matemáticas no es su fuerte.

Edna es la líder del grupo. Tiene 16 años. Se destaca por organizar y preparar las diferentes actividades que en el Colegio se asigna al grado once. En el área de matemáticas expone sus ideas siempre y cuando se encuentre segura de ellas. Se esfuerza por rendir en el área, y constantemente pregunta, en privado, por las cosas que se le dificultan.

Álvaro un joven de 17 años. No se destaca por su participación continua, pero sus intervenciones son elocuentes, lo cual le permite confrontar sus conceptos con otros compañeros, especialmente con Johanna que siempre le está corrigiendo.

3. 2. 2 El colegio y su región

Yarima es un corregimiento que pertenece al municipio de San Vicente de Chucurí cuenta con 2.734 habitantes[2], se encuentra aproximadamente a 137Km de Bucaramanga en la vía que conduce al municipio de Barrancabermeja. Su economía está basada en la producción de la Palma Africana, algunos cultivos de caucho y la industria maderera; las vías de acceso son precarias, pues se halla en total abandono. Después de tres décadas se instaló una

[2] Dato recuperado de la pagina del gobierno municipal, http://www.sanvicentedechucuri-santander.gov.co

estación de policía, hecho acontecido en septiembre del 2005, ya que este territorio era sitio de conflictos de grupos alzados en armas.

En la actualidad Yarima cuenta con su iglesia, un puesto de salud y con una sola institución educativa el Colegio Integrado Yarima, el cual trata de brindar la máxima cobertura a jóvenes y adultos del área rural; la idiosincrasia del lugar no les permite a los jóvenes proyectar sus vidas en el ámbito educativo, es decir traspasar las fronteras del colegio una vez terminado su bachillerato. Las carencias económicas y las falencias educativas que son reflejadas en los resultados de las pruebas ICFES son la principal causa de la falta de estudios superiores.

3.2.3 Características notorias en el grado undécimo

Este grado está compuesto por 16 estudiantes provenientes de diferentes zonas del departamento e instituciones educativas.

El desempeño académico de los estudiantes no es sobresaliente. En particular, en matemáticas se perciben falencias en conceptos básicos y especialmente en los procesos algebraicos, los cuales no les permiten un rendimiento acorde a las necesidades del grado.

3.3 Etapas de la investigación

Este trabajo se realizó en cuatro etapas:

- Etapa 1: Revisión bibliográfica. Antes de iniciar cualquier actividad con los estudiantes estuvimos examinando algunos autores y teorías que nos dieron luces para diseñar tanto la prueba diagnóstica como los talleres.
- Etapa 2: Construcción, aplicación y análisis de la prueba diagnóstica. En esta etapa se diseñó una prueba diagnóstica que pretendía indagar el nivel de comprensión de los estudiantes en algunos conceptos previos y también algunas ideas que los estudiantes tienen antes de iniciar el tema de límites.
- Etapa 3: Construcción de los talleres. Posteriormente y basados en la prueba diagnóstica se diseñaron seis talleres tendientes a guiar a los estudiantes al concepto de límite de una sucesión. En ellos se utilizaron diversas representaciones semióticas.
- Etapa 4: Análisis de la información. Se analizaron las producciones escritas de las estudiantes (respuestas a los problemas propuestos en los talleres) y las grabaciones y filmaciones llevadas a cabo en cada una de las clases.

Capítulo 4

Las actividades

El punto de partida para el diseño de nuestra experiencia es el entender que cuando los estudiantes llegan a aprender las nociones de infinito y de límite en el aula de clase, ya tienen una idea previa, un conocimiento que proviene de su experiencia diaria. El uso de estos términos en el lenguaje cotidiano puede ser crucial para el aprendizaje futuro de los estudiantes. Por eso, inicialmente elaboramos una prueba diagnóstica para averiguar cómo usan los estudiantes las nociones de infinito y de límite en el lenguaje coloquial.

Diseñamos y aplicamos un total de siete actividades, la primera como diagnóstico. En cada uno de los talleres diseñados utilizamos diferentes sistemas semióticos de representación del lenguaje matemático, como el algebraico, numérico, gráfico y verbal. Cada taller fue desarrollado en sesiones de clase de 80min. Las socializaciones y discusiones se llevaron a cabo en cuatro horas de clase de 50min. Estas actividades abarcaron el mes de octubre y la primera mitad de noviembre del año 2006.

El trabajo con los estudiantes se estableció a partir de actividades, de manera individual y grupal, para posibilitar en algunos de los talleres la comunicación, la discusión y la toma de decisiones frente a la evaluación de sus argumentos, favoreciendo procesos, como el razonamiento y la modelación.

A continuación presentamos el primer taller aplicado: La actividad diagnóstica la cual tenía como principal objetivo el identificar los presaberes y/o intuiciones que los estudiantes tenían de los conceptos de infinito y límite, y el tratamiento de los números reales. Esta actividad fue desarrollada de manera individual y cada estudiante pudo manifestar con tranquilidad lo que creía y como entendía las situaciones e interrogantes formulados.

Además fue posible observar el comportamiento de los estudiantes frente al diseño de la actividad en sí, el cómo organizaban sus ideas para posteriormente presentarlas por escrito.

4. 1. TALLER 0

Planteamos dos primeras preguntas cuyo objetivo era evaluar las ideas intuitivas que los estudiantes presentaban frente al concepto de infinito y de límite, para identificar la presencia de concepciones erróneas o de obstáculos epistemológicos comunes en este tipo de conceptos.

1. ¿Qué entiende por infinito?
2. ¿Qué entiende por límite? Dé un ejemplo.

Con la pregunta 3 pretendíamos revisar las ideas de los estudiantes frente a la cardinalidad de los conjuntos infinitos.

3. En las siguientes expresiones, ¿Cuál tiene más términos?

a. 1 2 3 . . .

b. 1 2 3 4 5 . . .

La pregunta 4 pretendía revisar las técnicas empleadas por los estudiantes para transformar expresiones fraccionarias en expresiones decimales.

4. Escriba la siguiente fracción en su forma decimal:

a. $\frac{1}{3}$

Con la preguntas 5 pretendíamos identificar las técnicas que los estudiantes utilizan para reconocer representaciones equivalentes en expresiones decimales.

5. ¿Qué número es mayor?

a. 0,333 . . . ó **b. 0,333333 . . .**

La pregunta 6 buscaba conocer las ideas que poseían los estudiantes y las técnicas empleadas para justificar entre valores aproximados y un valor conocido.

6. ¿Es 0,999... igual a 1? Explique

La pregunta 7 pretendía identificar el conocimiento que tienen los estudiantes sobre el orden en los decimales y el reconocimiento de los números reales como un conjunto denso.

7. Dada la siguiente secuencia,

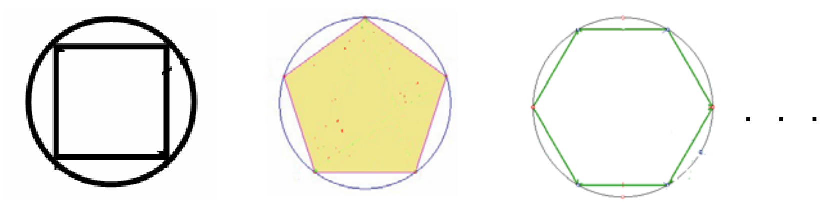
$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad . \ . \ .$$

a. Encuentre un término menor que 0,0035. ________________

b. ¿Cuántos términos menores que 0,0035 hay?

Con las preguntas 8 y 9 quisimos llevar al estudiante a confrontar las ideas del infinito como proceso sin fin y el reconocimiento intuitivo del infinito actual. Sus respuestas nos permitirán explorar los esquemas conceptuales –asociados a la noción de infinito actual- de los estudiantes. En particular, la pregunta 9 enfrentará a los estudiantes con una situación que, en la realidad es impensable: la disminución infinita del dinero, que chocará con la idea del infinito como un proceso que nunca acaba.

8. Según los dibujos



¿El área de los polígonos en algún momento será igual a la del círculo? Explique.

9. Un ganadero tiene cierta cantidad de dinero. El primer día gasta la mitad de ese dinero, al segundo día gasta la mitad de lo que le queda, y así sucesivamente.

a. ¿Qué sucede con el dinero a medida que transcurre el tiempo?
b. ¿Cuánto dinero disponible tiene el ganadero al terminar el tercer día?
c. ¿Al cabo de cuántos días el ganadero tendrá disponible menos del 10% del dinero inicial?
d. ¿En algún momento el ganadero se quedaría sin dinero? Explique.

Análisis de las respuestas encontradas:

1. ¿Qué entiende por infinito?

En esta primera pregunta los cuatro estudiantes participantes de este estudio de casos coincidieron en describir el infinito como *"algo que no tiene fin*", "*algo que nunca acaba*" y ponen de ejemplo a los números reales "*los cuales se pueden contar pero nunca terminan*". Olga y Edna dicen:

1. ¿Qué entiende por infinito?

QUE NO TIENE FIN.

Algo que no tiene fin, o no se le conoce donde termina.

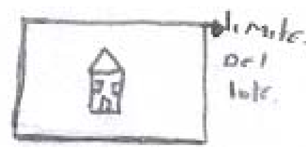
Los estudiantes poseen la idea natural que todos tenemos y construimos primeramente acerca del infinito: como una construcción paso a paso, sin fin, sin límites.

2. ¿Qué entiende por límite? Dé un ejemplo.

Aquí descubrimos la idea intuitiva del límite como una barrera, vista desde el contexto geográfico: los estudiantes dan como ejemplos "*el límite entre dos fincas*" o "*la cerca que divide dos fincas*" o "*límite entre dos países*". Por ejemplo Olga responde:

2. ¿Qué entiende por límite? Dé un ejemplo

ES lo QUE DIVIDE UN LUGAR CON OTRO.



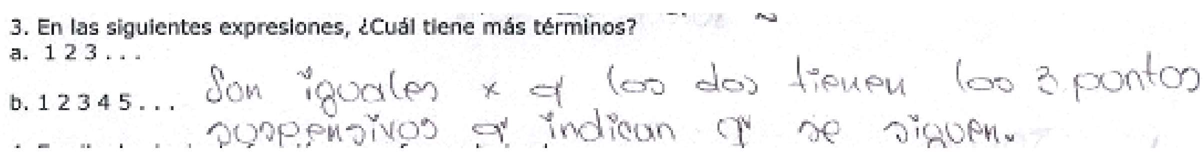
Olga ejemplifica mediante el dibujo de un lote y su línea divisoria dando a entender que todo lo que este encerrado por un perímetro tiene límite.

Esta idea intuitiva hace parte de uno de los obstáculos epistemológicos que algunas de las investigaciones consultadas refieren. El significado que tiene la palabra límite en el lenguaje común explica esta primera idea intuitiva, ya el uso que se le da a esta palabra desde el punto de vista geográfico es el de borde, barrera, lo que no se puede sobrepasar (incluso desde la moral en el uso de las reglas de convivencia), cota que prohíbe ser alcanzada. Los resultados al respecto que la investigación adelantada por Cornu (1991) encontró, muestran que estas concepciones pueden ocasionar grandes dificultades en la interpretación adecuada del concepto de límite, y que dichas posiciones son muy fuertes y difíciles de corregir, creando un obstáculo de tipo epistemológico.

3. En las siguientes expresiones, ¿Cuál tiene más términos?

a. 1 2 3 . . .

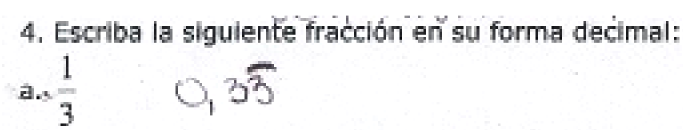
b. 1 2 3 4 5 . . .


3. En las siguientes expresiones, ¿Cuál tiene más términos?
a. 1 2 3 . . .
b. 1 2 3 4 5 . . . Son iguales x q los dos tienen los 3 puntos suspensivos q indican q se siguen.

La presencia de los puntos suspensivos indica a los estudiantes la presencia de un proceso interminable. Para ellos estos conjuntos tienen la misma cardinalidad. No hubo un solo estudiante que dijera lo contrario.

4. Escriba la siguiente fracción en su forma decimal:

a. $\frac{1}{3}$


4. Escriba la siguiente fracción en su forma decimal:
a. $\frac{1}{3}$ $0,\widehat{33}$

En esta pregunta tampoco se presentó ninguna confusión. Todos los estudiantes acertaron al responder. Hay facilidad para transformar expresiones fraccionarias en expresiones decimales e identificar las expresiones decimales infinitas.

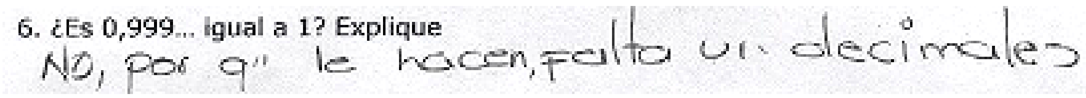
5. ¿Qué número es mayor?

a. 0,333 . . . ó **b. 0,333333 . . .**

En este numeral solamente Johanna responde acertadamente. Edna y Olga eligieron la respuesta b por ser la que más números tenía:


5. ¿Qué número es mayor?
a. 0,333 . . . ó b. 0,33333 . . .

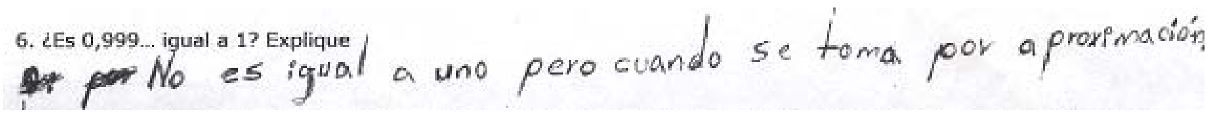
6. ¿Es 0,999... igual a 1? Explique



6. ¿Es 0,999... igual a 1? Explique

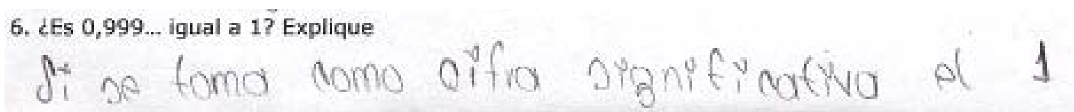
NO, por q" le hacen, falta un decimales

En esta pregunta ya se vislumbra la idea del límite inmersa en la representación decimal de los números reales. Corroboramos lo que varios autores han observado en sus investigaciones en el sentido de concebir el límite como algo que no se alcanza, que siempre se puede hacer una mejor aproximación (Cornu, 1991 y Páez 2003).



6. ¿Es 0,999... igual a 1? Explique

~~por~~ No es igual a uno pero cuando se toma por aproximación



6. ¿Es 0,999... igual a 1? Explique

Si se toma como cifra significativa el 1

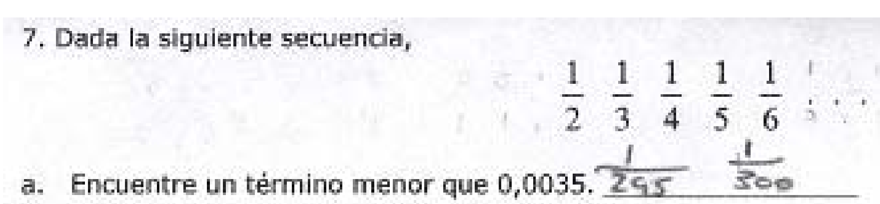
Al representar mediante expresiones decimales a los números reales enfrentamos al estudiante con el problema del infinito. Al escribir 0,999… se concibe el número como un proceso infinito de aproximaciones, como expresiones dinámicas, en movimiento y por lo tanto no es aceptada igual a una representación estática, a 1, una representación de tipo objeto. La dificultad que vivieron los matemáticos para pensar en el fin de procesos infinitos, es decir de superar el obstáculo del infinito potencial (como proceso reiterativo que nunca acaba) y el infinito actual (como totalidad del proceso) aparece en las concepciones de los estudiantes.

7. Dada la siguiente secuencia,

$$\frac{1}{2}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{1}{4}\quad \frac{1}{5}\quad \frac{1}{6}\quad \ldots$$

a. Encuentre un término menor que 0,0035. ________________

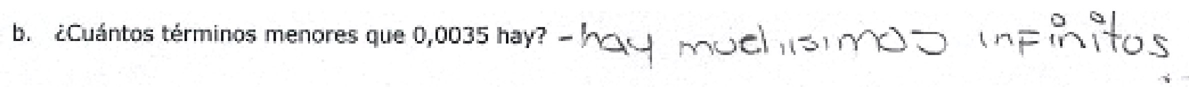
b. ¿Cuántos términos menores que 0,0035 hay?



7. Dada la siguiente secuencia,

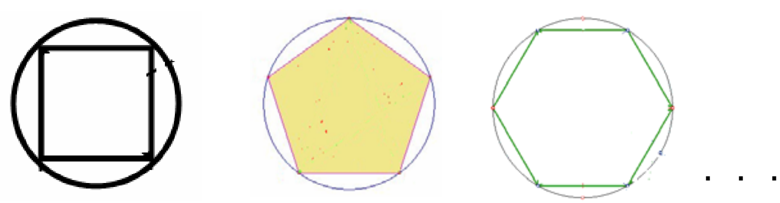
$$\frac{1}{2}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{1}{4}\quad \frac{1}{5}\quad \frac{1}{6}\quad \ldots$$

a. Encuentre un término menor que 0,0035. $\frac{1}{295}$ $\frac{1}{300}$


b. ¿Cuántos términos menores que 0,0035 hay? - hay muchisimos infinitos

Todos los estudiantes coincidieron en decir que hay infinitos términos menores que 0,0035 llevando inmersa la idea de la densidad de los números reales. Sin embargo la aceptación de esta idea representó en los estudiantes un obstáculo epistemológico al hallar el límite de una sucesión ya que "*es imposible llegar a un número dado porque siempre vamos a encontrar más y más números entre cualquier par de números dados*".

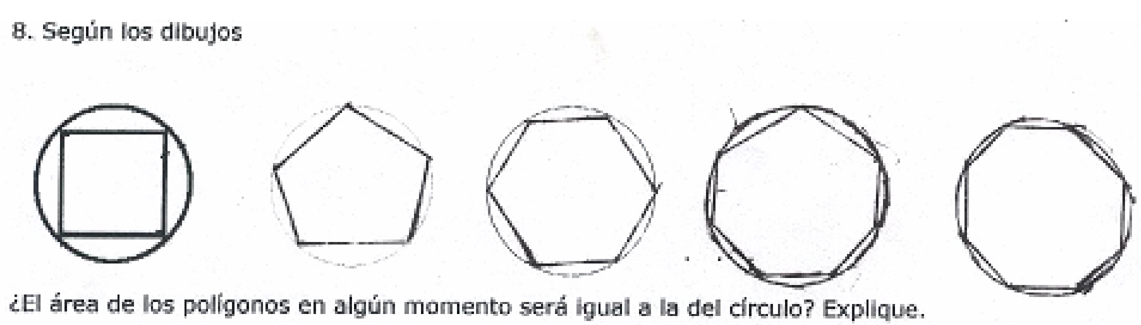
8. Según los dibujos



¿El área de los polígonos en algún momento será igual a la del círculo? Explique.

Al realizar esta actividad se llevó a los estudiantes a pensar en términos del infinito potencial.

Observamos que tres de los estudiantes –a excepción de Edna- se centraron en terminar la representación gráfica y no dieron respuesta al interrogante formulado. Álvaro realizó algunos dibujos como los siguientes:


8. Según los dibujos

¿El área de los polígonos en algún momento será igual a la del círculo? Explique.

Johanna incluso hablo de que así se recrearía "*un fractal*" sin dar mayores explicaciones. Edna da una respuesta mas acertada desde el punto de vista intuitivo.

¿El área de los polígonos en algún momento será igual a la del círculo? Explique. Si por entre más se hagan puede llegar hacer igual al área del círculo.

Edna alcanza a comprender el infinito como un proceso paso a paso, como movimiento interminable, sin embargo concibe la idea de un final, de un límite, para ella el uso de las aproximaciones sucesivas llevaran al alcance del área del círculo.

9. Un ganadero tiene cierta cantidad de dinero. El primer día gasta la mitad de ese dinero, al segundo día gasta la mitad de lo que le queda, y así sucesivamente.

a. ¿Qué sucede con el dinero a medida que transcurre el tiempo?
b. ¿Cuánto dinero disponible tiene el ganadero al terminar el tercer día?
c. ¿Al cabo de cuántos días el ganadero tendrá disponible menos del 10% del dinero inicial?
d. ¿En algún momento el ganadero se quedaría sin dinero? Explique.

Esta pregunta los cautivó de manera sorprendente, generándose gran discusión entorno a su solución.

Para facilitar el análisis varios estudiantes le asignaron una cierta cantidad de dinero al ganadero y a partir de ahí hicieron sus cálculos y sus observaciones.

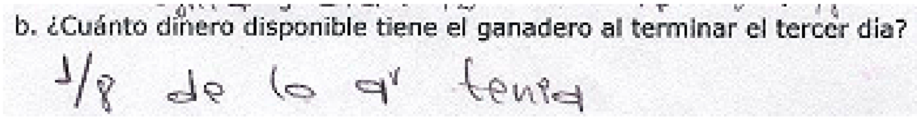
Por ejemplo Olga solucionó la situación asignando un valor inicial de $50.000:

9. Un ganadero tiene cierta cantidad de dinero. El primer día gasta la mitad de es dinero, al segundo día gasta la mitad de lo que le queda, y así sucesivamente.
tiene = 50.000 Primer día: 25.000 tercer día: 6.250 quinto día: 1.550
segundo día: 12.500 cuarto día: 3.100

Detectando que el dinero "*se le va acabando*" a medida que transcurre el tiempo. Y que ya en el séptimo y octavo día es muy poco lo que le queda, por lo tanto si es posible que el ganadero se quede sin dinero.

Johanna, utiliza representaciones fraccionarias como la mitad, una cuarta parte,…

a. ¿Qué sucede con el dinero a medida que trascurre el tiempo?
Se va dividiendo lo sobrante en 2.
Ejm → 1r día → 1/2 2do → 1/4 3r → 1/8 4to → 1/16


b. ¿Cuánto dinero disponible tiene el ganadero al terminar el tercer dia?

1/8 de lo q' tenía

Ella describe matemáticamente lo que le va pasando a medida que transcurre el tiempo. Concluye diciendo que


d. ¿En algún momento el ganadero se quedaría sin dinero? Explique

Si, pasado x los pesos y x los centavos.

Es decir, ella piensa en el infinito como un proceso, en el cual el dinero pasa en un momento de pesos a centavos, pero estos se agotan. Choca aquí la comprensión de un proceso infinito con la posibilidad de un final. Surge entonces en socialización la no concepción del problema como un proceso infinito, porque "*en algún momento se le acaba el dinero, ya no tendrá que repartir*" No es posible pensar simultáneamente en el infinito potencial y en el infinito actual.

A excepción de Álvaro que afirma que dicho proceso no tendrá fin, ya que "las fracciones no tienen fin", los estudiantes dedujeron que en un día determinado (cercano al sexto día) se agotaría el dinero. La respuesta de Álvaro muestra nuevamente la concepción de que mediante aproximaciones sucesivas no se puede alcanzar un número, ya que siempre encontraríamos otro en el camino, por eso el dinero no puede llegar a cero.

4.1.3 A manera de conclusiones

Se observó que los estudiantes poseen la idea intuitiva del infinito como un proceso que continúa indefinidamente sin ninguna barrera, es decir, que los procesos infinitos no tienen límite, que continúan sin parar. Que aquello que tiene límite no es el resultado de un proceso infinito.

Por esta razón a los estudiantes les cuesta identificar las diversas representaciones de los números reales [en el caso de 0.9999...=1] y la forma como se escriben.

Estos elementos fueron de gran importancia para orientar el trabajo en las demás actividades y analizar los procesos de aproximación infinita y de construcción del concepto del límite de una sucesión.

4. 2 Las demás actividades

Luego de analizadas las respuestas de los estudiantes en la prueba diagnóstica, planteamos una propuesta metodológica para la enseñanza del concepto de límite mediante la utilización de material concreto y el enfrentamiento a una serie de cuestionamientos y actividades que guiaran a los estudiantes a la superación de los obstáculos observados y a una correcta concepción del límite.

Los talleres fueron diseñados con base en las actividades propuestas por Roh (2005) en su tesis doctoral, en las que encontró la posibilidad de que estudiantes de primer año de universidad desarrollaran el concepto de límite de una sucesión. Además de las recomendaciones realizadas por Hitt (1997) y Duval (2004) en el uso de diversas representaciones claves en la construcción de los conceptos.

Al finalizar cada taller se realizó una actividad de socialización, en las cuales los estudiantes participaron muy activamente, generándose polémicas sobre aspectos muy interesantes del concepto de límite que comentaremos en el próximo capítulo. Estas socializaciones quedaron registradas en grabaciones y filmaciones.

Durante el desarrollo de los talleres se les suministró a los estudiantes los materiales y objetos para facilitar la ejecución de las actividades propuestas, tales como: espejos, papel calcante, fotocopias y lapiceros.

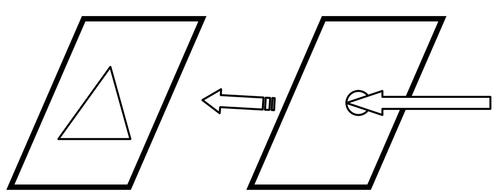
4.2.1 Taller 1: Explorando el infinito

El estudio de las sucesiones involucra la utilización de aproximaciones sucesivas, de procesos infinitos, siendo necesaria la observación de dichos procesos de manera dinámica. De ellos se desprenden resultados de gran importancia en el cálculo, como lo son el de convergencia de sucesiones, la densidad de los números reales y el infinito. Estos conceptos son bastante abstractos y pueden ocasionar grandes dificultades en su comprensión. Por esto propusimos una actividad en la que fuera posible observar estos procesos, utilizando material manipulable.

Este taller tenía como objetivo "explorar el infinito" mediante la utilización de material concreto y recursos del medio (dos espejos planos, cinta, papel y lápiz, que fueron proporcionados a los estudiantes para que trabajaran en parejas).

Así mismo, quisimos revisar algunos aspectos de los números reales que nos parecían bastante pertinentes, entre ellas, conocer las técnicas utilizadas por los estudiantes para obtener con exactitud representaciones decimales.

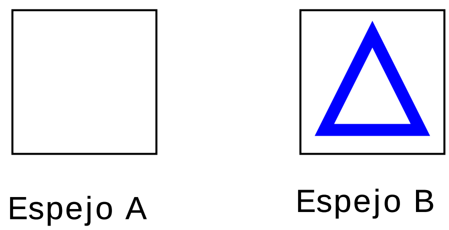
La primera actividad del taller consistió en ubicar una hoja enfrente de la otra y suponer que las hojas eran espejos con el fin de percibir la capacidad de representación mental de la situación. Luego propusimos el uso de espejos, actividad diseñada para proporcionar un ejemplo físico del infinito y la visualización de una sucesión convergente de manera concreta. Uno de los espejos usados tenía un pequeño punto raspado en la parte posterior "un punto transparente", este punto posibilitó el que los estudiantes pudieran ver el otro espejo a través de el.



ACTIVIDAD 1.

Materiales: Dos espejos planos,
Cinta
Papel
Lápiz.

1. Tome las dos hojas de papel ubique una en frente de la otra en forma paralela.



Suponga que las dos hojas son espejos.

a. Dibuje lo que espera ver en el espejo A.

b. Dibuje lo que espera ver en el espejo B.

2. Con los dos espejos que se le entregan, observe a través del orificio que tiene el espejo B.

a. Describa con sus palabras o dibuje lo que ve.

b. ¿Cuántas imágenes del triángulo observa?

3. De acuerdo con la actividad anterior responda ¿Puede caber el infinito en un espacio no muy grande? Explique

ACTIVIDAD 2.

Cualquier número racional puede representarse por al menos un número decimal periódico. Por ejemplo:

$\frac{13}{4} = 3{,}25 = 3.25000...$ $\qquad$ $\frac{7}{33} = 0{,}21212121...$

1. Escriba los siguientes números racionales en su representación decimal:

a) $\dfrac{55673}{100} =$ b) $\dfrac{76}{10000} =$

c) $\dfrac{7}{3} =$ d) $\dfrac{32}{11} =$

2. Exprese como fracciones los siguientes números reales:

a) 0,000045 = b) 0,099 = c) 3,141592 =

3. Encuentre la fracción equivalente de:

a) 0,4444...= b) 0,525252...= c) 2,153153153...=

4. Ahora, ¿Qué puede decir de las siguientes igualdades?

a) 0,77777...= $\dfrac{7777}{10000}$ b) 1,59999...=1,6

5. Encuentre un número que sea mayor que el número de la derecha y menor que el de la izquierda.

$\dfrac{1}{3}$		$\dfrac{1}{2}$
0,727272...		$\dfrac{8}{11}$
0,636363...		$\dfrac{63636363}{100000000}$
0,00001		0,0001

6. Completa la siguiente tabla

Extremo izquierdo	Intermedio	Extremo derecho
1	1,5	2
1	1,375	1,5
1	1,1875	1,375
1		
1		
1		
1		
1		
1		
1		

De acuerdo con la tabla anterior responda:

a. ¿Se puede encontrar un número real que sea el siguiente de 1?

b. ¿Siempre se puede encontrar un número real entre cualesquiera dos números reales que se propongan? En caso afirmativo describa el procedimiento.

c. ¿Cuántos números reales existirán entre 1 y 0,9?

d. ¿Cuántos números reales existirán entre 1 y 0,99?

4.2.2 Taller 2

Mediante este taller llevamos a los estudiantes a manejar tanto representaciones de tipo numérico como gráfico de un mismo objeto matemático, en este caso el de la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ y a evaluar el límite de dicha sucesión mediante el uso de tiras de papel calcante (traslúcido) de diferente ancho ε.

El taller utilizó tres contextos: El algebraico al definir la sucesión mediante una expresión algebraica, el numérico al solicitar la evaluación de diferentes términos de la sucesión y el gráfico al pedir plasmar en el plano cartesiano el comportamiento de la sucesión. Además implicó una actividad manual al manipular material concreto (tiras de papel calcante) para evaluar la convergencia o no de la sucesión.

Luego de dar la sucesión en su representación algebraica, como suele hacerse, se pidió a los estudiantes el hallar algunos de los términos de la sucesión, quienes luego fueron graficados como parejas ordenadas en un plano cartesiano. Mediante el análisis de los términos resultantes y de la gráfica realizada se guió a los estudiantes en la determinación de la convergencia o divergencia de la sucesión, y de ser convergente en determinar el límite. Formulamos interrogantes como

- ¿Cuál es el valor del primer término?
- ¿Cuál es el valor del segundo término?
- ¿Cuál es el valor del tercer término?
- ¿Cuál es el valor del 100 término?
- Y por último se le preguntaba por el límite: ¿Esta sucesión tiene un límite?

Para finalizar la actividad se pidió describir el comportamiento al interior y exterior de las tiras de papel calcante. Para ello se les pidió a los estudiantes tomar la tira de papel calcante más ancha y colocarla sobre la gráfica, justo donde ellos creían que los puntos de la gráfica se están acercando y que respondieran las siguientes preguntas:

- ¿Cómo es el comportamiento de los puntos de la sucesión en el interior y en el exterior del calcante?
- ¿Cuántos puntos deja de cubrir el calcante?
- ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?

Luego debían encontrar la mayor de las diferencias entre el valor de 0 y cualquier valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.

También debían tomar la "tira dos" (la de tamaño mediano) y realizar el mismo procedimiento que con la tira uno, asimismo con la última tira "tira tres" (la más pequeña) y también responder las mismas preguntas. Estas actividades se diseñaron para orientar al estudiante en la determinación del límite de una sucesión.

Este procedimiento contiene inmerso el concepto de límite, ya que la tira de papel se asemeja a la definición de límite usando épsilon y delta, asumiendo que la altura de las tiras de papel corresponde a épsilon ε.

CONTEXTO NUMÉRICO

Considere la secuencia $a_n = \frac{1}{n}$ donde n es positivo. Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el valor del primer término?___________

b) ¿Cuál es el valor del segundo término?__________

c) ¿Cuál es el valor del tercer término?___________

d) ¿Cuál es el valor del cuarto término?____________

e) ¿Cuál es el valor del 10 término?______________

f) ¿Cuál es el valor del 100 término?_____________

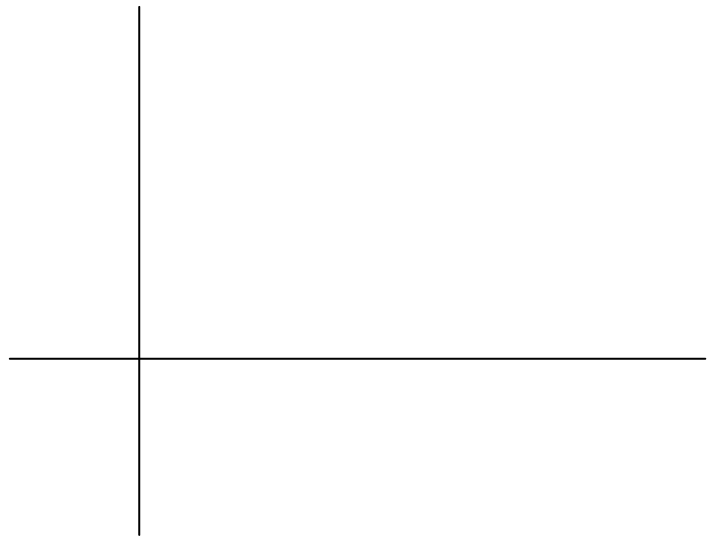
g) ¿Cuál seria el valor del 1000000 término?__________

h) ¿Esta sucesión tiene límite? ________________________ Explique

CONTEXTO GRÁFICO

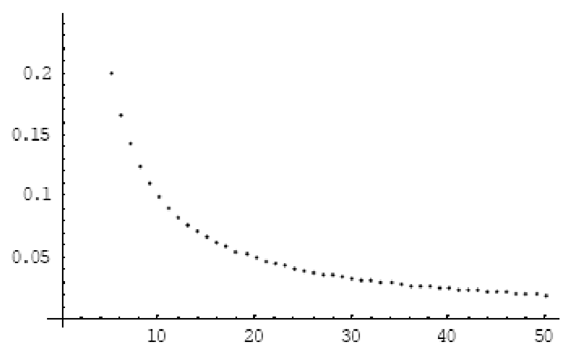
1. Según los datos anteriores complete la siguiente tabla y grafique los puntos

n	$a_n = \frac{1}{n}$
1	1
2	
3	
4	
5	
10	



2. La siguiente gráfica corresponde a la secuencia $a_n = \frac{1}{n}$, marque con rojo los siguientes términos:

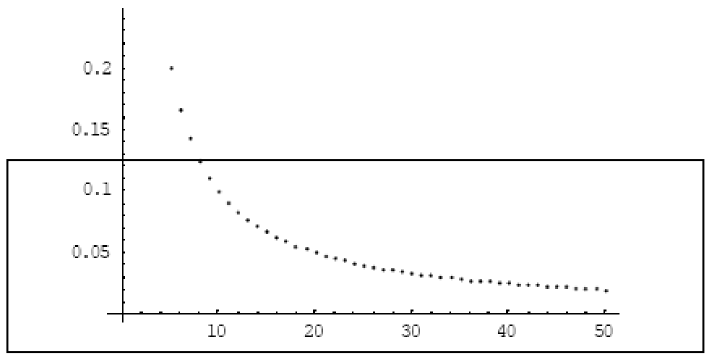
a) El término 10
b) El término 15
c) El término 20
d) El término 30
e) El término 40
f) El término 45
g) El término 50



3. Según lo anterior y con base en la gráfica responda

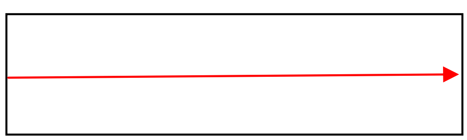
a) ¿En donde se sitúa el término 70?_______
b) ¿En donde se sitúa el término 100?_______
c) ¿Esta sucesión tiene límite?________________
d) ¿Cómo explica usted esto?____________________

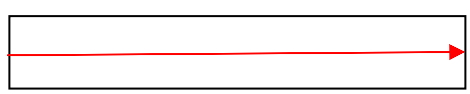
4. Analice la siguiente gráfica y responda:

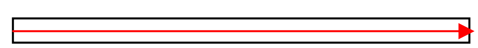


a) Describa el comportamiento de los puntos en el interior y en el exterior del rectángulo____
b) ¿Cuantos puntos deja de cubrir del rectángulo?_____
c) ¿Cuantos puntos cubre del rectángulo?________
d) Determine la máxima de las diferencias entre el valor de 0 y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.____________________.

5. Tome las siguientes tiras de papel calcante y colóquelas sobre la gráfica una por una de tal forma que la línea roja sea el valor hacia el cual usted crea que los puntos de la gráfica se están acercando.


Tira uno


Tira dos


Tira tres

Para cada tira responda:

TIRA UNO

a) Describa el comportamiento de los puntos en el interior y en el exterior del calcante____
b) ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?_____
c) ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________

d) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.________________

TIRA DOS

a) Describa el comportamiento de los puntos en el interior y en el exterior del calcante____
b) ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?_____
c) ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________
d) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.________________

TIRA TRES

a) Describa el comportamiento de los puntos en el interior y en el exterior del calcante____
b) ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?_____
c) ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________
d) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.________________

6. Según lo realizado en el punto cuatro responda lo siguiente:

a) Si la tira papel calcante es cada vez mas y mas pequeña
¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?_____
¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________
b) ¿Esta sucesión tiene límite?________________
c) ¿Cuál es el límite?_________________________
d) ¿Cómo explica usted esto?____________________

4.2.3 Taller 3

En este taller planteamos actividades muy similares al Taller 2.

Presentamos dos sucesiones o secuencias expresas de forma algebraica, $a_n = \frac{1}{2^n}$ y $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$ con n ≥ 1. Se les solicita a los estudiantes el hallar algunos términos de cada sucesión (contexto numérico), graficarlas en el plano cartesiano (contexto gráfico) y evaluar mediante una actividad con el material concreto (tiras de papel calcante) su convergencia.

Quisimos trabajar dos sucesiones convergentes a) $a_n = \frac{1}{2^n}$ y b) $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$ pero de comportamiento diferente (la una decreciente y la otra creciente), para no producir en los estudiantes la percepción de que las únicas sucesiones convergentes son las decrecientes.

Teníamos la idea de que la segunda sucesión crearía algunos choques cognitivos en los estudiantes por la posibilidad de que un proceso de crecimiento infinito no necesariamente conlleva a valores extremadamente grandes.

Nuevamente se hace uso de las tiras de papel calcante de diferente ancho para evaluar el comportamiento y el número de puntos interiores y exteriores a la tira de papel.

CONTEXTO NUMÉRICO

1. Considere las secuencias **a)** $a_n = \frac{1}{2^n}$ y **b)** $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$ donde $n \in Z$ y $n \geq 1$.

Escoja una de las secuencias anteriores y responda las siguientes preguntas:

¿Cuál es el valor del primer término?__________
¿Cuál es el valor del segundo término?_________
¿Cuál es el valor del tercer término?__________
¿Cuál es el valor del cuarto término?___________

¿Cuál es el valor del 10 término?_____________
¿Cuál es el valor del 100 término?____________
¿Cuál seria el valor del 1000000 término?_________
¿Por qué usted espera ese resultado?____________________________
¿Esta sucesión tiene límite? ______________________
Explique

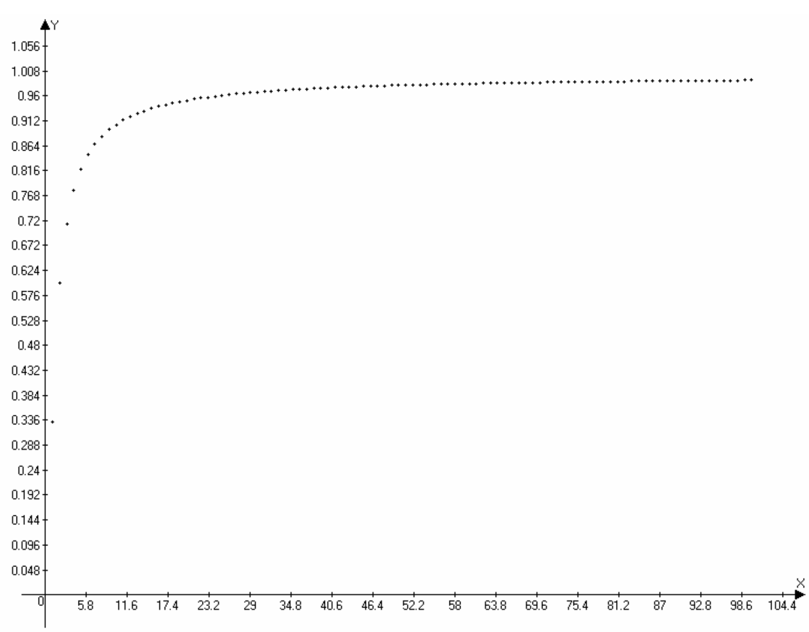
CONTEXTO GRÁFICO

1. Según los datos anteriores complete la siguiente tabla y grafique los puntos

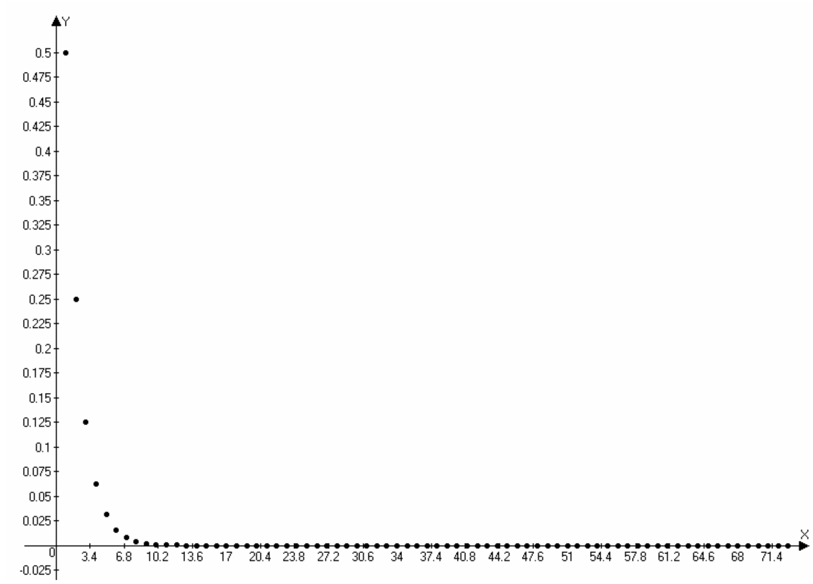
n	$a_n =$_____
1	
2	
3	
4	
5	
10	

2. Las siguientes gráficas corresponden a las secuencias **a)** $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$ y **b)** $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ respectivamente, marque con rojo los siguientes términos en la gráfica elegida:

a) El término 10
b) El término 15
c) El término 20
d) El término 30
e) El término 40
f) El término 45
g) El término 50



a) $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$



b) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$

3. Según lo anterior y con base en la gráfica responda

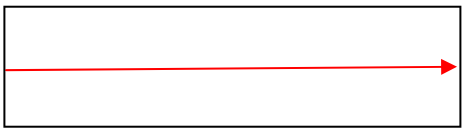
a) ¿En donde se sitúa el término 70?_______
b) ¿En donde se sitúa el término 100?_______
c) ¿Esta sucesión tiene límite?________________
d) Explique ____________________

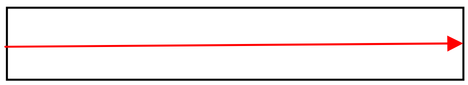
4. Ahora toma el pedazo de calcante colóquelo encima de la gráfica correspondiente (del punto anterior) y responda:

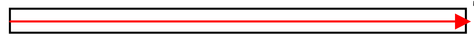
a) Describa el comportamiento de los puntos en el interior y en el exterior del calcante
b) ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?_____
c) ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________

d) Determine la máxima de las diferencias entre el valor de 0 y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.____________________.

5. Tome las siguientes tiras de papel calcante y colóquelas sobre la gráfica una por una de tal forma que la línea roja sea el valor hacia el cual usted crea que los puntos de la gráfica se están acercando.


Tira uno


Tira dos


Tira tres

Para cada tira responda:

Tira uno

a) Describa el comportamiento de los puntos en el interior y en el exterior del calcante ____
b) ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?_____
c) ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________
d) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante________________

Tira dos

a) Describa el comportamiento de los puntos en el interior y en el exterior del calcante ____
b) ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?_____
c) ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________
d) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.________________

Tira tres

a) Describa el comportamiento de los puntos en el interior y en el exterior del calcante ____
b) ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?_____
c) ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________

d) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.________________

6. Según lo realizado en el punto anterior responda lo siguiente:

a) Si la tira de papel calcante es cada vez y mas pequeña ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?____
b) ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________________________________
c) ¿Cual es el límite?____
d) ¿Cómo explica usted esto?____

4.2.4 Taller 4

El objetivo principal de este taller fue el llevar a los estudiantes al reconocimiento de sucesiones divergentes, sucesiones que no tienen límite, ya que las sucesiones presentadas en los anteriores talleres se caracterizaron por su convergencia y no quisimos provocar ideas erróneas frente a la posibilidad de creer que toda sucesión tiene límite.

Presentamos entonces la sucesión $a_n = \sqrt{n}$ con n como entero no negativo, la cual no es convergente. Quisimos observar hasta donde los estudiantes podían construir conclusiones acertadas, basados en las observaciones realizadas en los anteriores talleres.

La dinámica fue la misma empleada en los talleres anteriores, involucrando los contextos algebraico, numérico y gráfico, y utilizando las tiras de papel calcante para evaluar el comportamiento de los puntos internos y externos a ella y resolver algunas preguntas acerca del límite de dicha sucesión.

CONTEXTO NUMÉRICO

1. Considere la secuencia $a_n = \sqrt{n}$ donde n es no negativo. Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el valor del primer término?__________

b) ¿Cuál es el valor del segundo término?_________

c) ¿Cuál es el valor del tercer término?__________

d) ¿Cuál es el valor del cuarto término?___________

e) ¿Cuál es el valor del 10 término?_____________

f) ¿Cuál es el valor del 100 término?____________

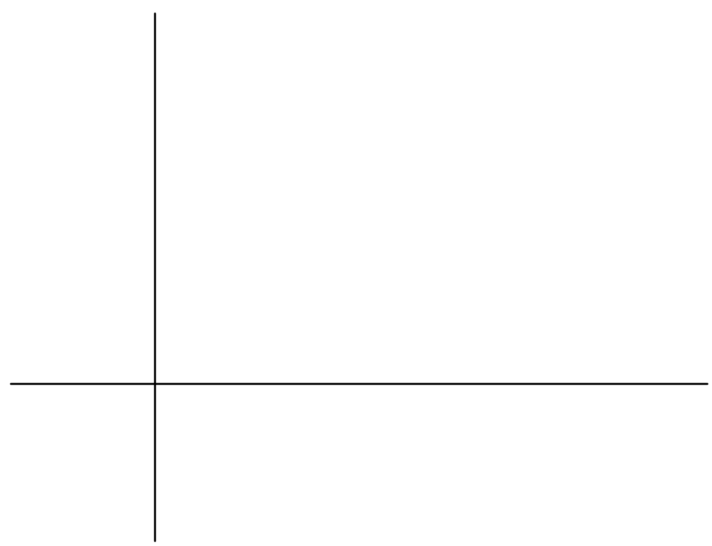
g) ¿Cuál es el valor del 1000000 término?_________

h) ¿Esta sucesión tiene límite? ______________________ Explique

CONTEXTO GRÁFICO

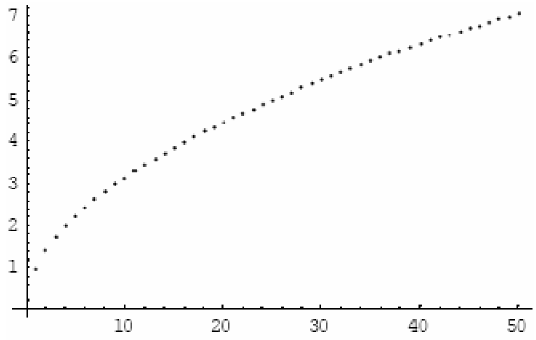
1. Según los datos anteriores complete la siguiente tabla y grafique los puntos

n	$a_n = \sqrt{n}$
1	1
2	
3	
4	
5	
10	



2. La siguiente gráfica corresponde a la secuencia $a_n = \sqrt{n}$, marque con rojo los siguientes términos:

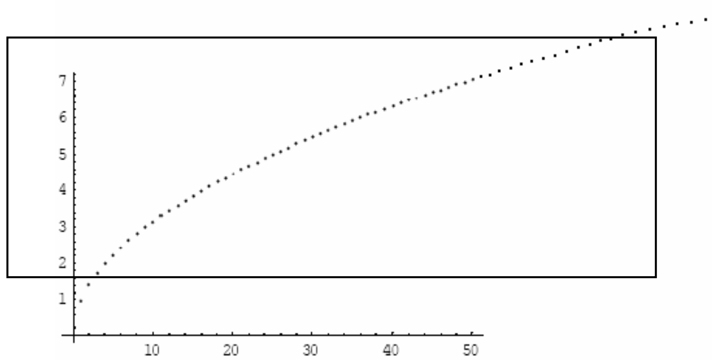
a) El término 10
a) El término 15
b) El término 20
c) El término 30
d) El término 40
e) El término 45
f) El término 50



3. Según lo anterior y con base en la gráfica responda

a) Ubique el término 70?_______
b) Ubique el término 100?_______
c) ¿Esta sucesión tiene límite?________________ Explique su respuesta

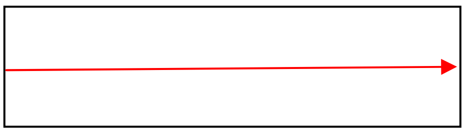
4. Analice la siguiente gráfica y responda.

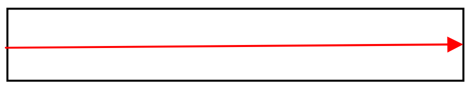


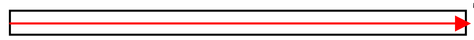
a) Describa el comportamiento de los puntos en el interior y en el exterior del rectángulo ____
b) ¿Cuántos puntos deja de cubrir el rectángulo?_____
c) ¿Cuántos puntos cubre el rectángulo?________

d) Si el rectángulo fuera movible, ¿Dónde lo colocaría para que dentro de él estén casi todos los puntos de la sucesión?____

5. Tome las siguientes tiras de papel calcante y colóquelas sobre la gráfica una por una de tal forma que la línea roja sea el valor hacia el cual usted crea que los puntos de la gráfica se están acercando.


Tira uno


Tira dos


Tira tres

Para cada tira responda:

TIRA UNO

a) ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?_____
b) ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________
c) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.________________
d) Existe un papel calcante que pueda contener todos los puntos de la sucesión. Explique____

_____

TIRA DOS

a) ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?_____
b) ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________

c) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.________________

d) Existe un papel calcante que pueda contener todos los puntos de la sucesión. Explique____

_____

TIRA TRES

a) ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?_____

b) ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________

c) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.________________

d) Existe un papel calcante que pueda contener todos los puntos de la sucesión. Explique____

_____

6. Según lo realizado en el punto cuatro responda lo siguiente:

a) Si la tira papel calcante es cada vez mas y mas pequeña

b) ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?_____

c) ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________

d) ¿Esta sucesión tiene límite?________________

e) ¿Cuál es el límite?_________________________ Explique

4.2.5 Taller 5

Este taller también involucró representaciones de la sucesión en los contextos algebraico, numérico y gráfico y la utilización de las tiras de papel calcante para evaluar diversos puntos de la sucesión.

La variedad fue la presentación, evaluación y análisis de una sucesión oscilante. Queríamos que los estudiantes identificaran una sucesión no convergente y que no crece o decrece indefinidamente. La sucesión propuesta fue $a_n = (-1)^n$ *donde n es un entero positivo.*

También quisimos observar las estrategias utilizadas por los estudiantes al utilizar las tiras de papel calcante, que aunque cubrían una buena parte de los puntos de la sucesión, dejaba por fuera otros tantos, analizando en detalle sus conclusiones.

CONTEXTO NUMÉRICO

Considere la secuencia $a_n = (-1)^n$ donde n positivo y $n \neq 0$. Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el valor del primer término?__________

b) ¿Cuál es el valor del segundo término?_________

c) ¿Cuál es el valor del tercer término?__________

d) ¿Cuál es el valor del cuarto término?___________

e) ¿Cuál es el valor del 10 término?_____________

f) ¿Cuál es el valor del 100 término?____________

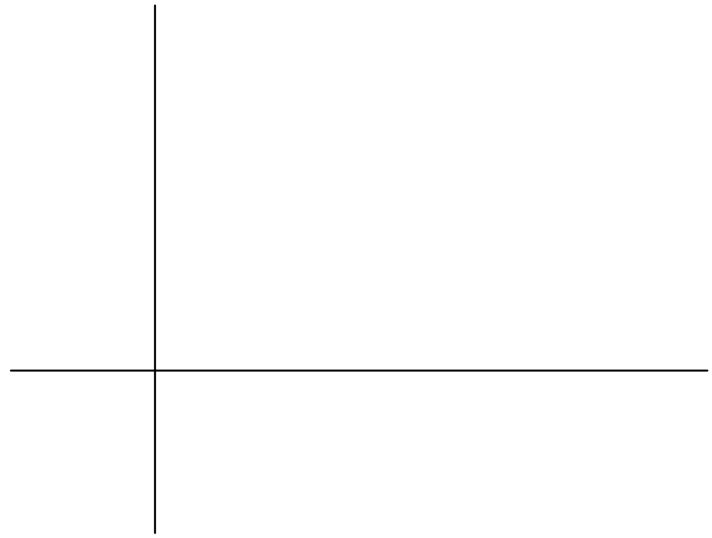
g) ¿Cuál es el valor del 1000000 término?_________

h) ¿Esta sucesión tiene límite? ______________________ Explique

CONTEXTO GRÁFICO

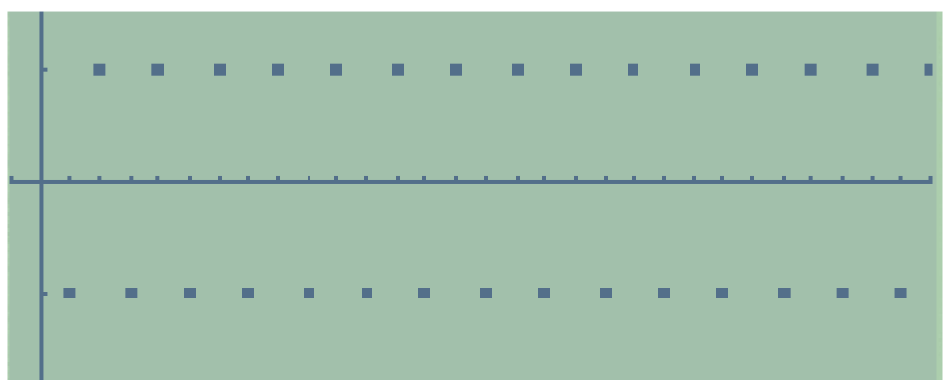
1. Según los datos anteriores complete la siguiente tabla y grafique los puntos

n	$a_n = (-1)^n$
1	-1
2	
3	
4	
5	
10	



2. La siguiente gráfica corresponde a la secuencia $a_n = (-1)^n$, marque con rojo los siguientes términos:

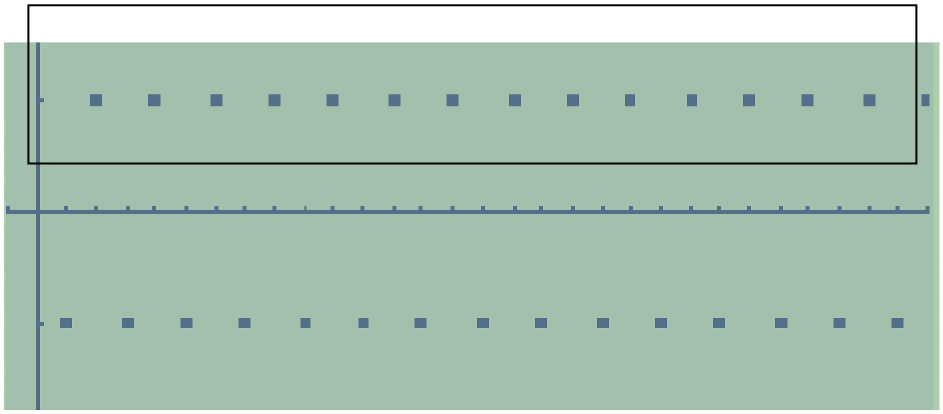
a) El término 10
b) El término 15
c) El término 20
d) El término 30
e) El término 40
f) El término 45
g) El término 50



3. Según lo anterior y con base en la gráfica responda

a) Ubique el término 70_______
b) ¿En donde se sitúa el término 80?_______
c) ¿En donde se sitúa el término 100?_______
d) ¿Esta secuencia tiene límite?______ Explique

4. Analice la gráfica y responda

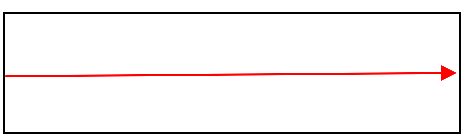


a) ¿Cuántos puntos deja de cubrir el rectángulo?_____

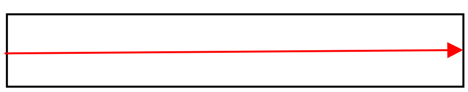
b) ¿Cuántos puntos cubre el rectángulo?________

c) Determine la máxima de las diferencias entre el valor de 1 y cada valor de la sucesión cubierta por el rectángulo.____________________.

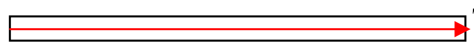
5. Tome las siguientes tiras de papel calcante y colóquelas sobre la gráfica una por una de tal forma que la línea roja sea el valor hacia el cual usted crea que los puntos de la gráfica se están acercando.



Tira uno



Tira dos



Tira tres

Para cada tira responda:

TIRA UNO

a) ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?_____

b) ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________
c) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.________________

TIRA DOS

a) ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?_____
b) ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________
c) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.________________

TIRA TRES

a) ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?_____
b) ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________
c) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.________________

6. Según lo realizado en el punto cuatro responda lo siguiente:

a) Si la tira papel calcante es cada vez mas y mas pequeña ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante?_____ ¿Cuántos puntos cubre el papel calcante?________
b) ¿Esta sucesión tiene límite?________________
c) ¿Cuál es el límite?_________________________ Explique

4.2.6 Taller 6

Con este último taller pretendíamos identificar las concepciones que los estudiantes habían desarrollado alrededor del comportamiento de sucesiones y el límite de las mismas durante la ejecución de las actividades anteriores y las discusiones generadas en cada socialización. Presentando sucesiones convergentes y divergentes.

Planteamos interrogantes cómo

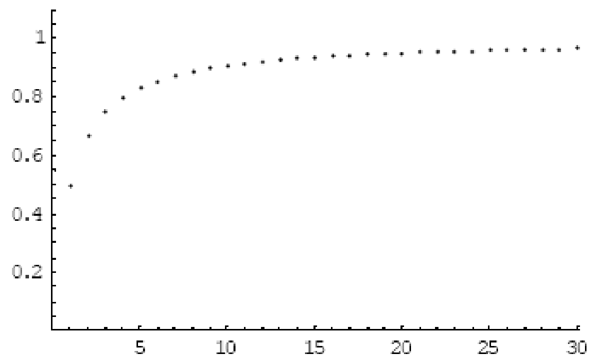
- ¿Si una sucesión tiene límite entonces los términos de la sucesión nunca pueden ser iguales al límite?
- ¿Si una sucesión tiene límite entonces los términos de la sucesión nunca pueden superar al límite?
- ¿Una sucesión puede no tener límite?
- ¿Si el límite de una sucesión existe, es único?

Cuestionamientos que nos mostrarían la comprensión de la noción de límite.
En el último punto se les presentó solamente la gráfica de una sucesión y se les indagó sobre la expresión algebraica de dicha sucesión y el límite.

Al finalizar este último taller se hizo una socialización general de todos los resultados hallados en las actividades desarrolladas. Es decir, con este último taller "cerramos la experiencia". Una de las profesoras investigadoras presentó a los estudiantes las ideas formales alrededor del concepto del límite de una sucesión, la unicidad del límite y los casos de no existencia del límite, temas que los estudiantes habían afrontado en la realización de los talleres y en los que ellos discutieron. Los conceptos formales se confrontaron con las respuestas e ideas de los estudiantes para finalizar nuestra experiencia.

Encuentre el límite de cada una de las siguientes sucesiones.

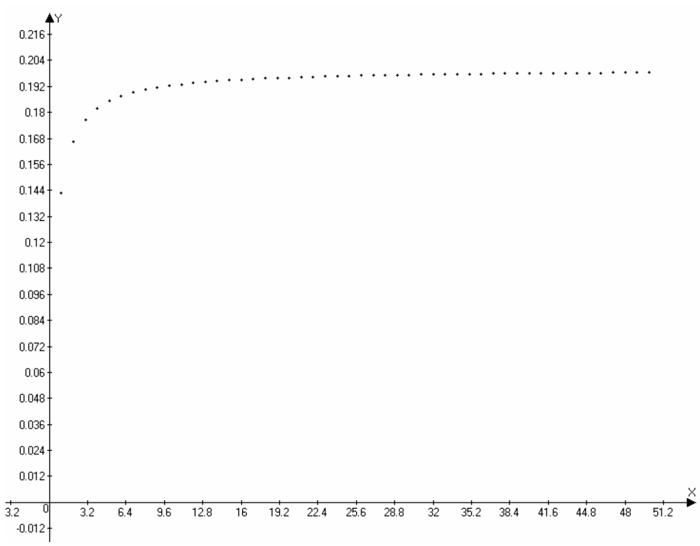
1. Considere la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ donde n es un número entero positivo



El límite de esta sucesión es: ____________________________

Explique __________________________

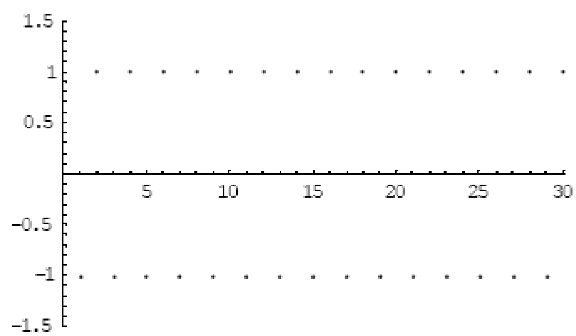
2. Considere la sucesión $a_n = \dfrac{n}{5n+2}$ donde n es un número entero positivo



El límite de esta sucesión es: ___________________________________

Explique__________________________

3. Considere la sucesión $a_n = \begin{cases} 1 & si \quad n \quad es \quad par \\ -1 & si \quad n \quad es \quad impar \end{cases}$ donde n es un número entero positivo.



El límite de esta sucesión es: ______________________________
Explique____________________________

4. Sea $a_n = n + (-1)^n$ una sucesión donde n es un número entero positivo
El límite de esta sucesión es: ______________________________
Explique____________________________

6. Sea $a_n = (-1) \cdot n$ una sucesión donde n es un número entero positivo
El límite de esta sucesión es: ______________________________
Explique____________________________

7. Sea $a_n = 1 + (-1)^n \dfrac{1}{n}$ una sucesión donde n es un número entero positivo
El límite de esta sucesión es: ______________________________
Explique____________________________

8. Sea $a_n = \dfrac{n^3}{2^n}$ una sucesión donde n es un número entero positivo
El límite de esta sucesión es: ______________________________
Explique____________________________

9. Sea $a_n = n$ una sucesión donde n es un número entero positivo

El límite de esta sucesión es: ___________________________
Explique_________________________

10. Sea $a_n = 1$ una sucesión donde n es un número entero positivo
El límite de esta sucesión es: ___________________________
Explique_________________________

Para las preguntas que hay a continuación responda con sus propias palabras y con base en todo lo realizado hasta el momento.

11. Escriba con sus propias palabras cuando una sucesión tiene límite: __________

12. ¿Los términos de una sucesión siempre son infinitos?___________Explique____

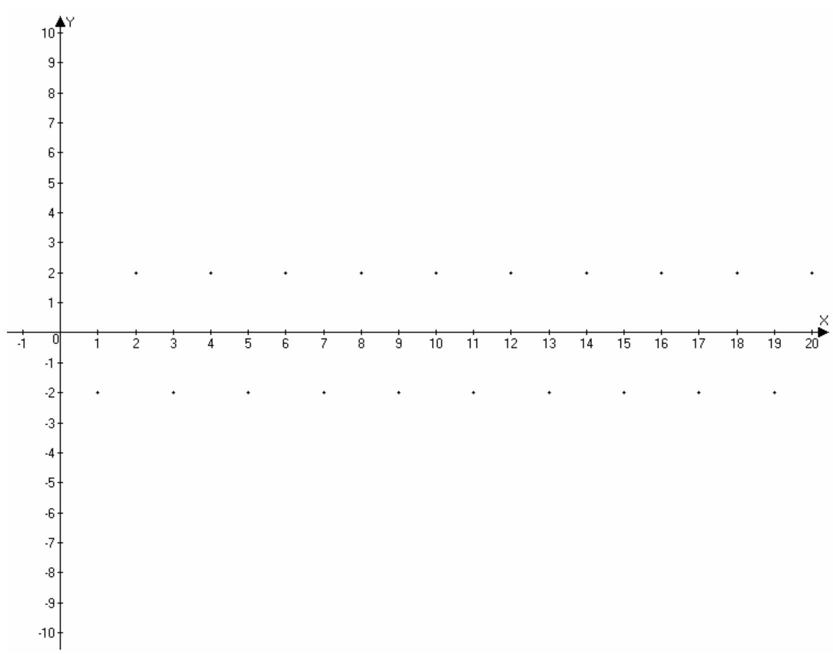
13. ¿Si una sucesión tiene límite entonces los términos de la sucesión nunca pueden ser iguales al límite?___________Explique_________________________________

14. ¿Si una sucesión tiene límite entonces los términos de la sucesión nunca pueden superar al límite?_________Explique__________________________________

15. ¿Una sucesión puede no tener límite?___________Explique________________

16. ¿Si el límite de una sucesión existe este es único?___________Explique______

17. La siguiente gráfica corresponde a una sucesión.



a) La expresión algebraica que corresponde a esta gráfica es:_______________
b) ¿Esta sucesión tiene límite?____
c) Si la respuesta anterior es afirmativa escriba ¿cual es el límite?___________

Finalizando así cada una de las actividades aplicadas en el aula de clases.

En el próximo capítulo se analizarán las respuestas dadas por los estudiantes a cada uno de los talleres.

Capítulo 5

Los resultados de la experiencia

En este capítulo presentamos el análisis hecho a los datos recolectados a través de las respuestas dadas a los talleres y las grabaciones y filmaciones de las clases. Presentaremos la posición de los cuatro estudiantes elegidos para el estudio en cada una de las actividades realizadas.

5.1 Taller 1: Explorando el infinito

En esta primera actividad los estudiantes tuvieron la oportunidad de observar una sucesión de imágenes en un espejo creadas por las reflexiones del par de espejos colocados en paralelo, experiencia que no es del todo desconocida, ya que es común encontrar este tipo de situaciones en los salones de belleza.

La actividad mostró la posibilidad de producir un número infinito de imágenes sin que estas ocupen mucho espacio.

Se hizo notorio que a los estudiantes les agrada trabajar con material concreto; ante las observaciones de lo sucedido en los espejos ellos mostraban interés, alegría y buena disposición para el trabajo de clase.

También permitió la promoción de un ambiente positivo de aprendizaje, donde los estudiantes pueden comprender conceptos matemáticos de gran abstracción como el de infinito potencial y el de sucesiones que convergen, mediante desarrollo de actividades prácticas. Johanna, por ejemplo, exclamó con gran euforia:

"*Profe, ¡conocí el infinito*!"

(Grabación fílmica, 20 de octubre de 2006).

También Edna en pequeño diálogo con Johanna da muestra de sus observaciones:

Edna: ¿Ya exploro el infinito Johanna?

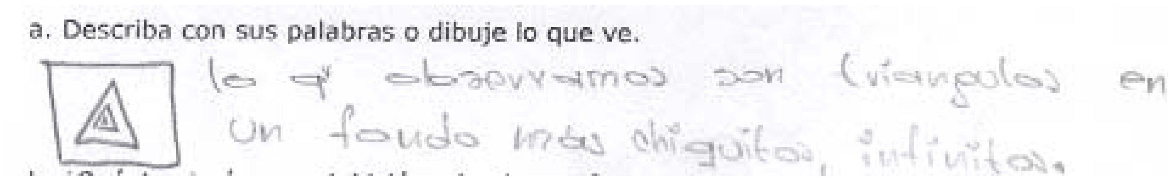
Johanna: Sí. ¿Y usted?

Edna: También, es un túnel de puros triángulos.

(Grabación fílmica, 20 de octubre de

2006).

Los estudiantes percibieron el infinito en objetos físicos, lo que les causó asombro y les generó una imagen mental que plasmaron luego en el papel:


a. Describa con sus palabras o dibuje lo que ve.
lo q' observamos son triangulos en un fondo más chiquitos, infinitos.

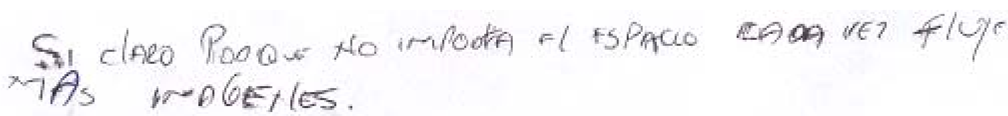
(Johanna, Taller 1, 20 de Octubre del 2006).

Actividad que va en contravia con lo que muchas veces ocurre en el aula de clases, donde no se realizan los experimentos sino que se les pide a los estudiantes que se los imaginen y que den cuenta de los resultados que se podrían obtener.

Ante el interrogante ¿Puede caber el infinito en un espacio no muy grande? Los estudiantes respondieron por unanimidad que si, dando argumentos como


Si, ejm: el experimento del triangulo no importando su tamaño

(Johanna, Taller 1, 20 de Octubre del 200
6).


Si claro Porque no importa el espacio cada vez fluye más imagenes.

(Olga, Taller 1, 20 de Octubre del 2006).

La segunda parte de este taller exploramos los números reales desde sus diferentes representaciones, así como sus relaciones y algunas propiedades.

Representación mediante expresiones decimales de números fraccionarios

a) $\frac{55673}{100} = 556,73$ b) $\frac{76}{10000} = 0,0076$

c) $\frac{7}{3} = 2,33333...$ d) $\frac{32}{11} = 2,90909090...$

(Álvaro, Taller 1, 20 de Octubre del 2006).

Al igual que en la actividad diagnóstica, aquí los estudiantes respondieron acertadamente a cada uno de los incisos de la primera pregunta. Se les facilita bastante la transformación de fracciones a expresiones decimales. Para ello utilizan la división.

El proceso contrario, la conversión de expresiones decimales a fraccionarios no resulta tan fácil, menos aún al convertir decimales periódicos infinitos.

Álvaro por ejemplo, no tiene dificultad al trabajar con decimales finitos,

2. Exprese como fracciones los siguientes números reales:

a) $0,000045 = \frac{45}{1'000.000}$ b) $0,099 = \frac{99}{1,000}$ c) $3,141592 = \frac{3141592}{1000.000}$

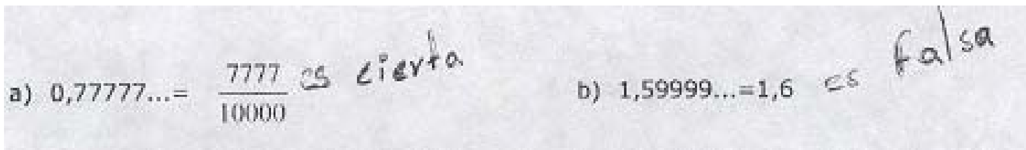
pero al tratar de convertir los decimales infinitos periódicos, no puede expresarlos en forma fraccionaria

a) $0,4444... = \frac{4444000}{100}$ b) $0,525252... = \frac{52525200}{10}$ c) $2,153153153... = \frac{4596}{3}$

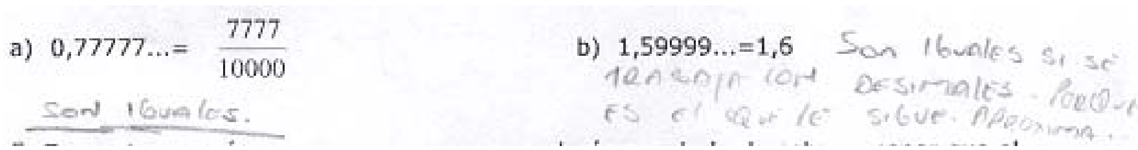
Al observar sus respuestas notamos que ignora la presencia de los puntos suspensivos que indican el periodo del número, tomando el número como un simple decimal finito.

Esta misma dificultad la presentaron los cuatro estudiantes, y es que el procedimiento que se realiza para realizar dichas conversiones no es nada fácil, incluso para los más diestros en matemáticas, ya que de no saberse “el truco” (algoritmo) es imposible resolverlo.

Refuerzan la idea de truncar el periodo de un decimal infinito las respuestas dadas al cuarto numeral por Álvaro y Edna, respectivamente:


a) $0,77777\ldots = \frac{7777}{10000}$ es cierta

b) $1,59999\ldots = 1,6$ es falsa


a) $0,77777\ldots = \frac{7777}{10000}$

Son Ibuales.

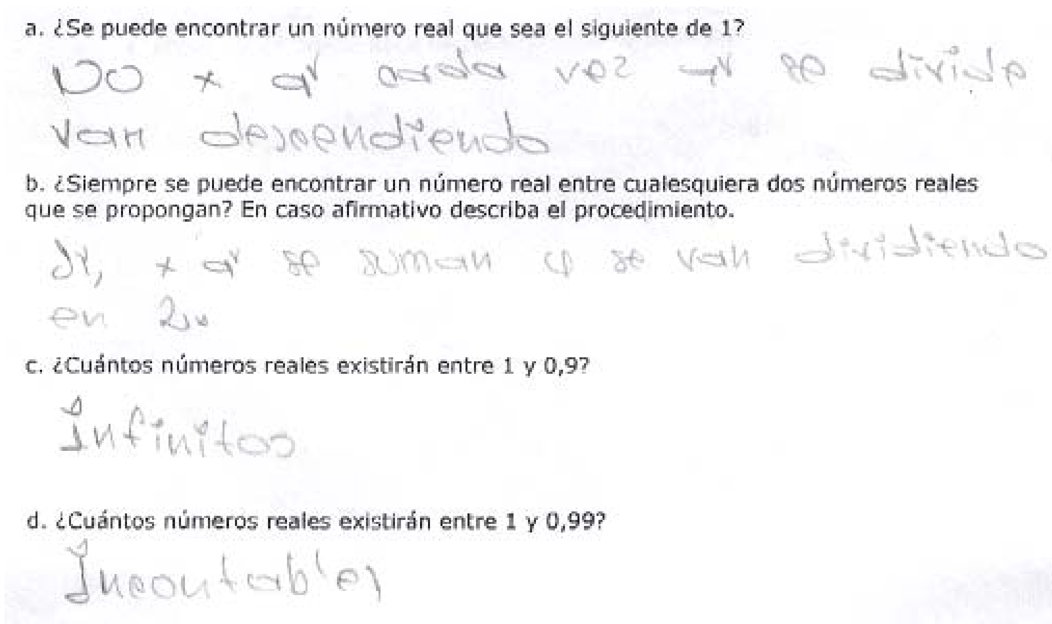
b) $1,59999\ldots = 1,6$ Son Ibuales si se trabaja con desimales. Porque es el que le sigue. Aproxima.

El inciso b plantea el mismo obstáculo analizado en la actividad diagnóstica al evaluar si 0,9999… = 1.

No se concibe la idea de que un proceso de aproximación infinita pueda ser igual a un número estático. Se concibe como una forma de aproximación, pero nunca de igualdad. Predomina en los estudiantes el enfoque del infinito como un proceso paso a paso, considerando por lo tanto que los procesos infinitos siempre van a ser de aproximación, nunca alcanzarán un número en particular. Para los estudiantes el símbolo a utilizar no deber ser el de igualdad "=" sino el de aproximación "≈". No ven posible considerar el proceso de aproximación infinita como un proceso terminado. El infinito no puede tener fin, no puede terminar.

Esta idea se convierte en un obstáculo epistemológico, que aparece naturalmente al considerar el modelo de límite como algo inalcanzable, como una barrera a la que no se puede llegar y mucho menos sobrepasar.

En la última pregunta del taller llevamos a que los estudiantes percibieran la densidad de los números reales, en el sentido de que los reales no se pueden numerar porque entre dos reales distintos cualesquiera siempre es posible encontrar otro que esté en el medio de los dos. Ratificando las ideas encontradas en la actividad diagnóstica. Johanna respondió:


a. ¿Se puede encontrar un número real que sea el siguiente de 1?

No x q' cada vez q' se divide van descendiendo

b. ¿Siempre se puede encontrar un número real entre cualesquiera dos números reales que se propongan? En caso afirmativo describa el procedimiento.

Si, x q' se suman y se van dividiendo en 2

c. ¿Cuántos números reales existirán entre 1 y 0,9?

Infinitos

d. ¿Cuántos números reales existirán entre 1 y 0,99?

Incontables

5.2 Taller 2

Este taller permitió el manejo de diferentes representaciones de un mismo objeto matemático, en particular la visualización de una sucesión de manera algebraica, numérica y gráfica. Lo más interesante de la actividad fue el uso de las tiras de papel calcante para la evaluación de la convergencia o no de las sucesiones.

En primera instancia se les pidió a los estudiantes evaluar la sucesión y hallar una serie de términos. Ninguno de los estudiantes presentó dificultad en la evaluación de las sucesiones, por el manejo que ya poseen de las funciones de variable real. Por ejemplo, las respuestas de Edna fueron:

1. Considere la secuencia $a_n = \frac{1}{n}$ donde $n \in Z$ y $n \neq 0$. Responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el valor del primer término? 1

b. ¿Cuál es el valor del segundo término? 0.5

c. ¿Cuál es el valor del tercer término? 0.33..

d. ¿Cuál es el valor del cuarto término? 0.25

e. ¿Cuál es el valor del 10 término? 0.1

f. ¿Cuál es el valor del 100 término? 0.01

g. ¿Cuál seria el valor del 1000000 término? 0.000001

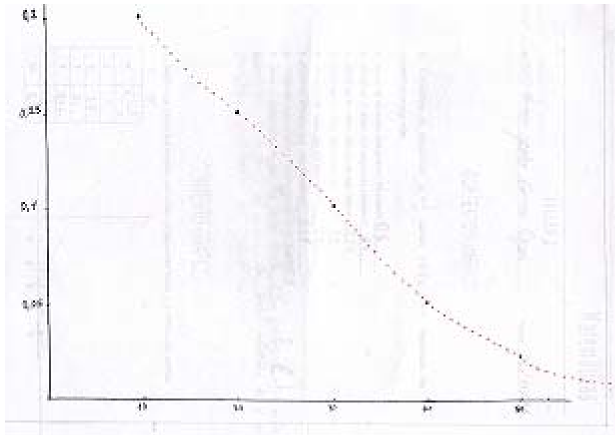
h. ¿Esta sucesión tiene límite? Si, porq" todo nos indica q" llega a "0", pero lo más posible es q" no porq" los # no tienen fin ni límite.

Sin embargo, el último cuestionamiento genera choque en las concepciones de los estudiantes. La lógica les muestra que cada vez los valores se acercan a 0, pero así mismo no es lógico para ellos que tenga límite, "*ya que los números no tienen fin*". Las actividades planteadas están surgiendo efecto, ya que los estudiantes están enfrentando sus ideas intuitivas con los resultados que ellos han encontrado.

Sin embargo, aún varios estudiantes presentan concepciones erróneas, Olga por ejemplo, concluye que "*las sucesiones no se acaban, no tienen límite*" .

Para complementar estas ideas, se posibilitó la exploración de la representación gráfica de una sucesión. Tampoco hubo dificultad en la realización de esta actividad, ya que en muchas ocasiones gráficaron funciones utilizando una tabla de valores.

En un comienzo discutieron ellos la posibilidad o no de unir mediante una línea curva suave los puntos encontrados. Álvaro y Johanna plantearon el rechazo a la idea, ya que inicialmente se plantea que la variable n solo toma valores enteros positivos:



(Álvaro, Taller 2, 2 de Noviembre del 2006).

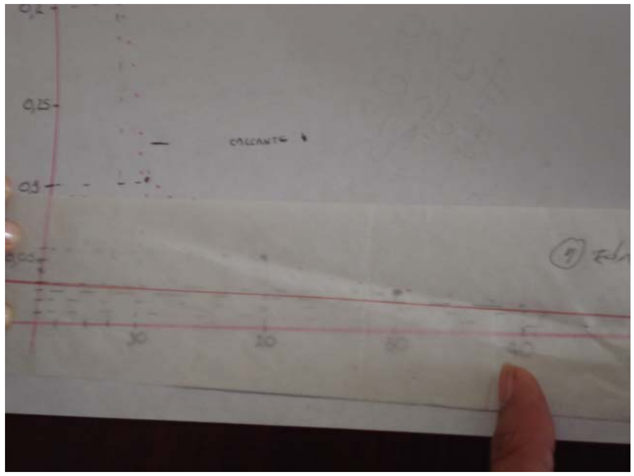
Posteriormente se les mostró a los estudiantes la misma gráfica pero con una mayor evaluación de puntos, y se les solicitó hallar otros términos. Aquí no hubo ninguna dificultad.

Al examinar la gráfica, los estudiantes debían responder una serie de preguntas para determinar la convergencia y el límite de la sucesión: ¿En dónde se sitúa el término 70? ¿En dónde se sitúa el término 100? ¿Esta sucesión tiene un límite? ¿Cómo explica usted esto?

¿Esta sucesión tiene un límite? Olga responde "*quizás, pero se pueden localizar cada vez más números*"

(Olga, Taller 2, 2 de Noviembre del 2006).

En la última parte del taller se plantean una serie de actividades con tiras de papel calcante de diferente ancho. Existían tiras de tres tipos de anchura constante, hechas del papel translúcido (calcante) de modo que el estudiante pudiera observar el gráfico de la sucesión a través de la tira. En el medio de cada tira de papel calcante, una línea roja fue dibujada para marcar un punto posible del límite. Estas tiras fueron ideadas para representar pictóricamente la convergencia o no convergencia de una sucesión.



Esta actividad permitió a los estudiantes estar en un ambiente de reflexión, diálogo y cuestionamiento permanente con los demás compañeros. Cumpliéndose así uno de los objetivos que esperábamos lograr con las actividades diseñadas.

Luego de realizar las actividades con el papel calcante, se invitó a los estudiantes a extraer conclusiones acerca de la experiencia e inferir el límite de esta sucesión.

En las respuestas dadas por Johanna, podemos observar la concepción del límite como un acercamiento, una aproximación, como un número que no se alcanza.

Sin embargo, las tiras de papel calcante cumplen su objetivo, el observar que en una sucesión convergente, "*se recubre un número infinito de puntos*" como lo expresa Johanna en sus respuestas:

6. Según lo realizado en el punto cuatro responda lo siguiente:

a) Si la tira papel calcante es cada vez mas y mas pequeña

¿Cuantos puntos deja de cubrir el papel calcante? los más separados.

¿Cuantos puntos cubre el papel calcante? infinitos

b) ¿Esta sucesión tiene limite? llegaría acercada/ a cero

c) ¿Cuál es el limite? cerca a "0"

d) ¿Cómo explica usted esto? q' cada vez se donda más cantidad a más decimales

(Johanna, Taller 2, 2 de noviembre del 2006).

5.3 Taller 3

Este taller plantea la misma metodología que el anterior.

En términos generales, podemos decir que hubo gran claridad en la realización de las actividades, y se generaron discusiones alrededor de la convergencia o no convergencia de de estas sucesiones.

Resaltamos la participación de los estudiantes en la socialización de los ejercicios, ya que les permitió a muchos aclarar sus dudas.

En el trabajo con el "contexto numérico" ya los estudiantes empezaban a realizar sus conjeturas de manera más acertada, como lo expresa Álvaro:

a. ¿Cuál es el valor del primer término? 0,5

b. ¿Cuál es el valor del segundo término? 0,25

c. ¿Cuál es el valor del tercer término? 0,125

d. ¿Cuál es el valor del cuarto término? 0,0625

e. ¿Cuál es el valor del 10 término? 0,0009765625

f. ¿Cuál es el valor del 100 término? 0000000000000000000000000000000,7888609052

g. ¿Cuál seria el valor del 1000000 término? Math ERROR Explique 0,(124)

h. ¿Esta sucesión tiene límite? En este caso el limite es 0 Explique Este número cada vez es mas pequeño y aunque se le un valor mas grande siempre dan un resultado mayor que cero

(Álvaro, Taller 3, 15 de noviembre del 2006).

Se pudo observar que desde el principio de la actividad los estudiantes ya tenían una conjetura sobre el posible límite de la sucesión, y paso a paso se fueron convenciendo más de sus suposiciones.

Creemos necesario aclarar que en el desarrollo de estos talleres no se realizaron ninguno de los procedimientos que tradicionalmente usamos para el cálculo de los límites.

También se pudo observar un mayor entendimiento de la actividad con las tiras de papel calcante, lo que llevó de una manera más rápida a las conclusiones alrededor del límite de las sucesiones:

TIRA UNO

a) Describa el comportamiento de los puntos en el interior y en el exterior del calcante se ven mejor en el interior
b) ¿Cuantos puntos deja de cubrir el papel calcante? 2
c) ¿Cuantos puntos cubre el papel calcante? el resto
d) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.________

TIRA DOS

a) Describa el comportamiento de los puntos en el interior y en el exterior del calcante hay más en el interior
b) ¿Cuantos puntos deja de cubrir el papel calcante? 3
c) ¿Cuantos puntos cubre el papel calcante? el resto
d) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.________

TIRA TRES

a) Describa el comportamiento de los puntos en el interior y en el exterior del calcante hay mas en en el exterior
b) ¿Cuantos puntos deja de cubrir el papel calcante? 4
c) ¿Cuantos puntos cubre el papel calcante? el resto.
d) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante.________

6. Según lo realizado en el punto anterior responda lo siguiente:

a) Si la tira de papel calcante es cada vez y mas pequeña ¿Cuántos puntos deja de cubrir el papel calcante? casi todos
b) ¿Cuantos puntos cubre el papel calcante? muy pocos
c) ¿Cual es el límite? el limite es (6)
d) ¿Cómo explica usted esto? porq' lleva sucesion

(Edna, Taller 3, 15 de noviembre del 2006).

Sin embargo, se podía estar generando en los estudiantes la creencia de que toda sucesión tiene límite, como lo muestra el último argumento de Edna. Por ello la importancia del planteamiento y evaluación de sucesiones divergentes, presentes en el taller 4.

Al analizar las respuestas dadas por Olga en este taller, observamos que aún hay conflictos cognitivos, por eso al responder por el límite de la segunda sucesión encontramos frases como

"Se acercaría a 1, pero cada vez salen más números"

(Olga, taller 3, 15 de noviembre 2006).

5.4 Taller 4

Las respuestas de los estudiantes a las actividades propuestas en este taller muestran la determinación de manera correcta de la divergencia de las sucesiones planteadas. Identificaron que la sucesión $a_n = \sqrt{n}$ es divergente, ya que no encontraron ningún número real a que la sucesión podría acercarse al crecer continuamente el valor de n. Esta sucesión divergente no ocasionó ninguna dificultad, ya que no hay ningún conflicto con el infinito.

Sin embargo, varios estudiantes no estaban seguros si el límite de la sucesión era infinito o debían decir que no tenía límite. Esta situación generó una rica discusión en clase. El taller además, mostró a los estudiantes que no todas las sucesiones son convergentes.

Resaltamos la respuesta dada por Olga a la convergencia o no de esta sucesión:

"La sucesión tiene límite si tiene un punto de llegada!
Pero como no nos dicen a que punto llegará seguirá y no tendrá límite"

(Olga, taller 4, noviembre 2006).

Mostrando una mayor comprensión del concepto. Si retrocedemos un poco y observamos las respuestas dadas por Olga en los anteriores talleres, nos damos cuenta de los avances logrados por la estudiante.

5.5 Taller 5

Este taller fue uno de los más polémicos en toda la experiencia, por el comportamiento de la sucesión $a_n = (-1)^n$.

En clase, por ejemplo, se generaron diálogos como los siguientes:

> *Andrea: Profe, ¿puedo poner el calcante de otra forma?*
>
> *Profesora: Lo importante es: ¡dónde ubique la línea roja!*
>
> *Edna: Si pongo el calcante en los puntos de arriba, los de abajo no los toma, ¿y entonces?...*
>
> *Andrea: Si, ¿no podemos poner el calcante cruzado? De esa manera metemos todos los puntos.*
>
> *Profesora: No, acuérdese de la línea roja.*
>
> *Edna: [Umm] Si ahora coloco el calcante abajo los de arriba quedan sin taparse.*

Para solucionar las preguntas del taller los estudiantes se valieron de calculadoras, celulares y cualquier material que tuvieran a la mano y que les pudiera servir. Esto les permitió resolver cada pregunta con más facilidad.

> Sin embargo el conflicto aquí generado fue muy importante. Pudimos observar que los estudiantes confundieron “acercarse a” con “aglomerarse en torno a”, por ello la respuesta de Álvaro quien asegura que la sucesión si tiene límite, explicando “*Esto es un Bumerang, sube al 1 y baja al -1 y así*

sucesivamente, o sea que este es el límite" y termina diciendo que el límite es 1 y -1 "porque de ahí no pasa" (Álvaro, taller 5, noviembre 2006).

Para cada tira responda:

TIRA UNO

a) ¿Cuantos puntos deja de cubrir el papel calcante? 2
b) ¿Cuantos puntos cubre el papel calcante? 5
c) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante. 3

TIRA DOS

a) ¿Cuantos puntos deja de cubrir el papel calcante? 2
b) ¿Cuantos puntos cubre el papel calcante? 5
c) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante. 3

TIRA TRES

a) ¿Cuantos puntos deja de cubrir el papel calcante? 2
b) ¿Cuantos puntos cubre el papel calcante? 5
c) Determine la máxima de las diferencias entre el valor donde esta situada la línea roja y cada valor de la sucesión cubierta por el papel calcante. 3

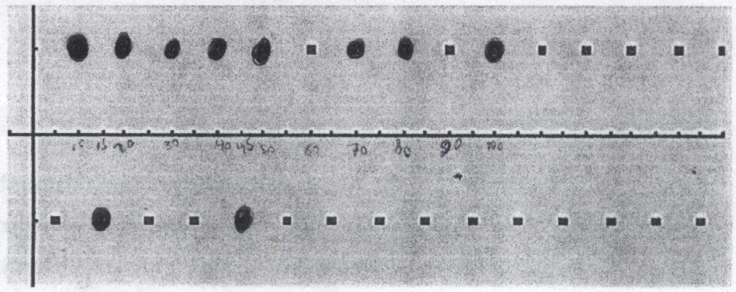
6. Según lo realizado en el punto cuatro responda lo siguiente:

a) Si la tira papel calcante es cada vez mas y mas pequeña ¿Cuantos puntos deja de cubrir el papel calcante? Ninguno ¿Cuantos puntos cubre el papel calcante? 7
b) ¿Esta sucesión tiene limite? Si
c) ¿Cuál es el limite? 1, -1 Explique Este es el limite porque de hay no pasa.

(Álvaro, taller 5, noviembre 2006).

2. La siguiente grafica corresponde a la secuencia $a_n = (-1)^n$, marque con rojo los siguientes términos:

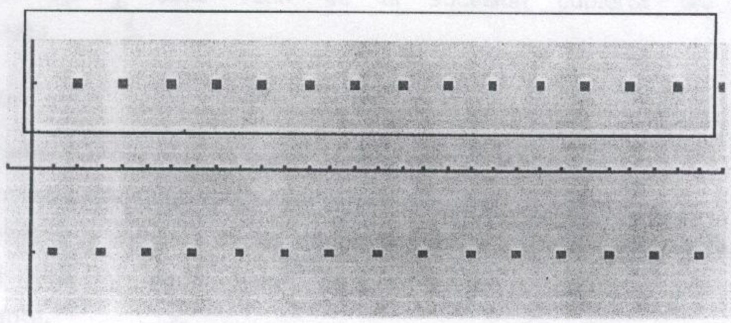
a) El término 10
b) El término 15
c) El término 20
d) El término 30
e) El término 40
f) El término 45
g) El término 50



3. Según lo anterior y con base en la grafica responda

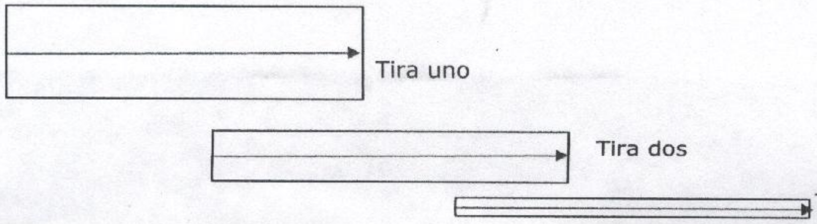
a) Ubique el término 70 1
b) ¿En donde se sitúa el término 80? 1
c) ¿En donde se sitúa el término 100? 1
d) ¿Esta secuencia tiene limite? Si Explique Esto es un Bumerang, sube al 1 baja al -1 y así sucesivamente, osea que esto es el limi

4. Analice la gráfica y responda



a) ¿Cuantos puntos deja de cubrir el rectángulo? 20
b) ¿Cuantos puntos cubre el rectángulo? 8
c) Determine la máxima de las diferencias entre el valor de 1 y cada valor de la sucesión cubierta por el rectángulo. 6.

5. Tome las siguientes tiras de papel calcante y colóquelas sobre la grafica una por una de tal forma que la línea roja sea el valor hacia el cual usted crea que los puntos de la grafica se están acercando.



(Álvaro, taller 5, noviembre 2006).

Olga responde que "*el límite es 1, ya que esa es la altura que alcanzan los puntos*".

Johanna responde que el límite es 1, -1 ó 0 "*ya que los puntos siempre nos conllevan a 1 y -1, pero el punto medio entre ellos es cero. Su límite mayor será 1 y el menor -1*".

Mostrando en sus respuestas el no reconocimiento de la unicidad del límite. En las discusiones de clase, los muchachos no aceptaban la ausencia del límite, "*si siempre la sucesión se acerca a alguien, a 1 si n es par y a -1 si n es impar*" apuntaba Johanna, y continuaba discutiendo "*¿Cómo entonces que no vaya a ver límite, si siempre es constante, o es 1 o es -1*". Esta fue una de las concepciones erróneas más difíciles de corregir.

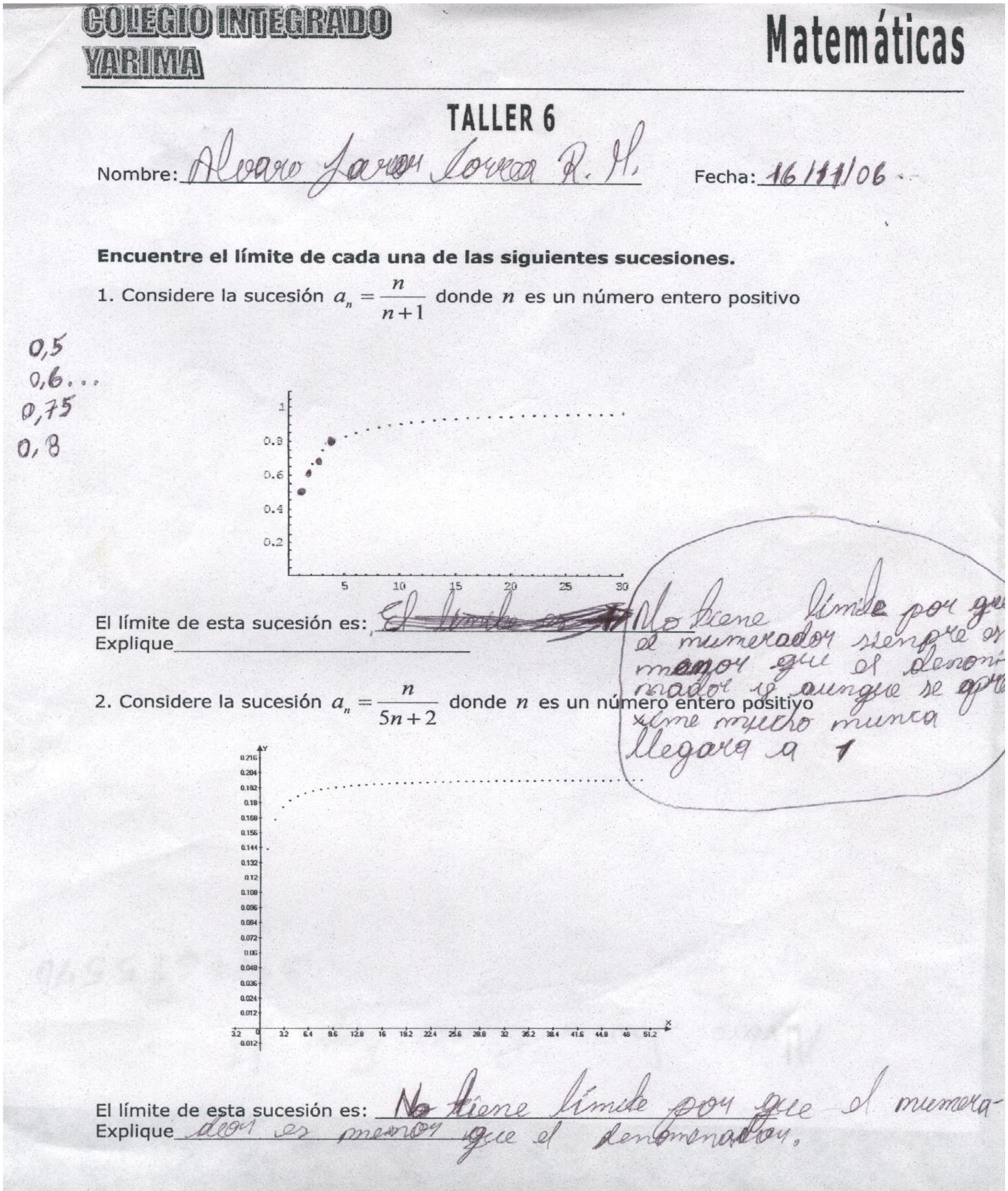
5.5 Taller 6

Este taller invitó a los estudiantes a hallar el límite de tres sucesiones $a_n = \frac{n}{n+1}$, $a_n = \frac{n}{5n+2}$ y $a_n = \begin{cases} 1 & si \quad n \quad es \quad par \\ -1 & si \quad n \quad es \quad impar \end{cases}$ en las cuales se mostraba su representación gráfica.

La tercera sucesión fue para los estudiantes **"***la más complicada*", según ellos, ya que no era una función conocida, costando trabajo entenderla.

Olga afirma que el límite de la sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$ es 1, "*porque no va a pasar de más de 1*".

Edna respondió "*Si tiene, y es 1 porque hasta ahí llega la sucesión*", en cambio para Álvaro la sucesión no tiene límite, "*porque el numerador siempre es menor que el denominador, y aunque se aproxime mucho nunca llegará a 1*" Igual argumentación dio al indagar por la sucesión $a_n = \frac{n}{5n+2}$.



COLEGIO INTEGRADO YARIMA

Matemáticas

TALLER 6

Nombre: Álvaro Javier Correa R. H. Fecha: 16/11/06

Encuentre el límite de cada una de las siguientes sucesiones.

1. Considere la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ donde n es un número entero positivo

0,5
0,6...
0,75
0,8

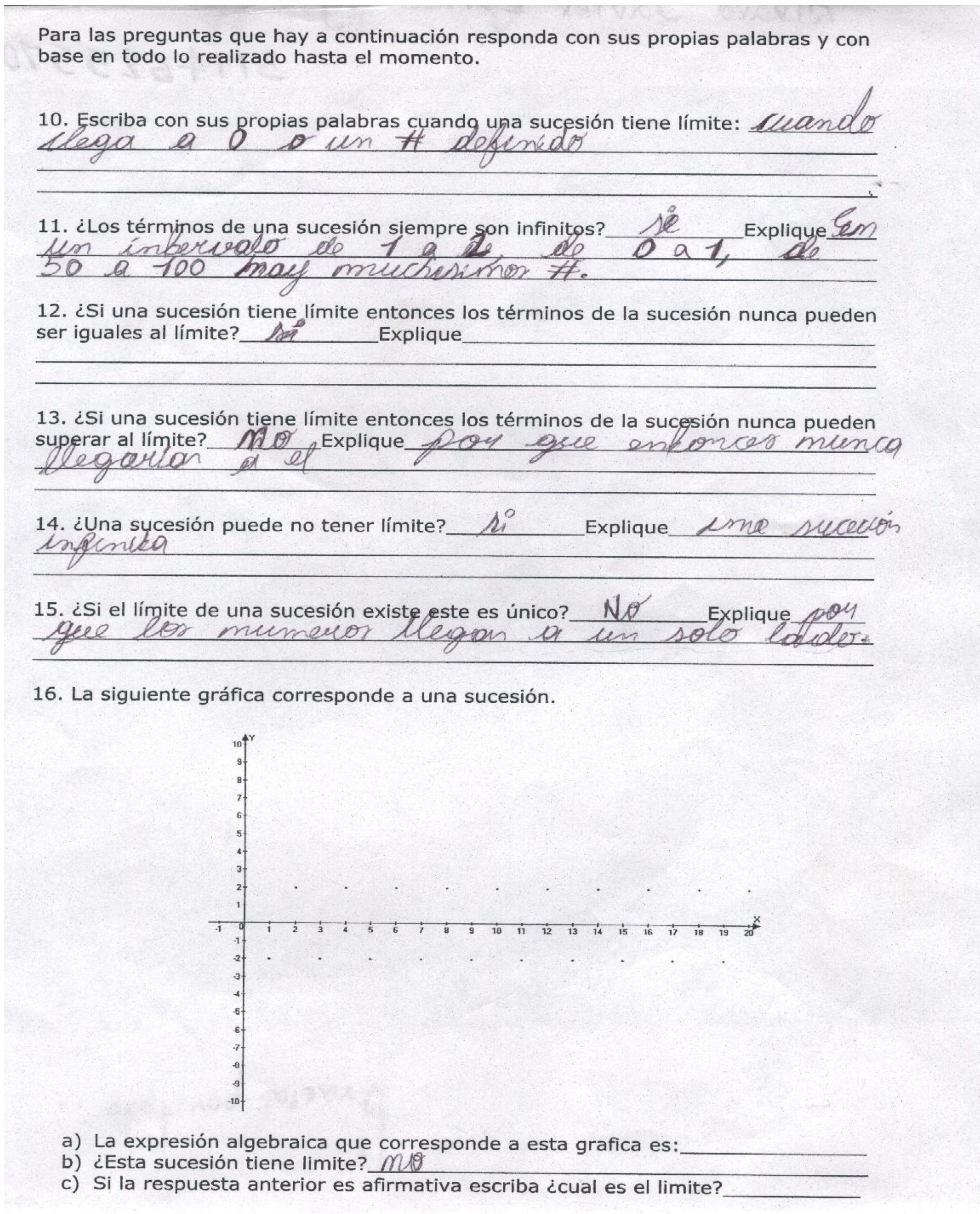
El límite de esta sucesión es: ~~El límite es~~ No tiene límite por que el numerador siempre es menor que el denominador y aunque se aproxime mucho nunca llegara a 1
Explique

2. Considere la sucesión $a_n = \dfrac{n}{5n+2}$ donde n es un número entero positivo

El límite de esta sucesión es: No tiene límite por que el numerador es menor que el denominador.
Explique

(Álvaro, taller 6, 16 de noviembre 2006).

La tercera sucesión, similar a la presentada en el taller anterior fue fácilmente identificada por Olga, Edna y Johanna quienes dijeron que la sucesión no tenía límite, ya que *se acercaba a más de un valor*. Sin embargo, Álvaro afirma que "*el límite es 1 y -1 porque de 1 pasa a -1 y así sucesivamente"*. Sin embargo, en la respuesta a la última actividad del taller reconoce que la sucesión no tiene límite.



Para las preguntas que hay a continuación responda con sus propias palabras y con base en todo lo realizado hasta el momento.

10. Escriba con sus propias palabras cuando una sucesión tiene límite: cuando llega a 0 o un # definido

11. ¿Los términos de una sucesión siempre son infinitos? sí Explique En un intervalo de 1 a 2, de 0 a 1, de 50 a 100 hay muchísimos #.

12. ¿Si una sucesión tiene límite entonces los términos de la sucesión nunca pueden ser iguales al límite? sí Explique

13. ¿Si una sucesión tiene límite entonces los términos de la sucesión nunca pueden superar al límite? no Explique por que entonces nunca llegarían a el

14. ¿Una sucesión puede no tener límite? sí Explique una sucesión infinita

15. ¿Si el límite de una sucesión existe este es único? No Explique por que los numeros llegan a un solo lado.

16. La siguiente gráfica corresponde a una sucesión.

a) La expresión algebraica que corresponde a esta grafica es:
b) ¿Esta sucesión tiene limite? no
c) Si la respuesta anterior es afirmativa escriba ¿cual es el limite?

Capítulo 6

Las concepciones de infinito y de límite

Es este capítulo presentamos las categorías encontradas al analizar los diferentes registros de la investigación: *El concepto del infinito como un proceso paso a paso, sin fin* y *El límite como aproximación.* Tratamos aquí de confrontar las voces que los estudiantes, la voz de los autores referenciados y nuestra percepción.

6.3 El concepto del infinito como un proceso paso a paso, sin fin

> *Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros. No hablo del Mal cuyo limitado imperio es la ética: hablo del infinito.*
>
> ***Jorge Luis Borges*** (Citado por Ortiz, 1994).

Comúnmente se utiliza la palabra infinito para denotar algo muy grande, ilimitado, o imposible de contar. Pero el infinito va más allá de lo «muy grande» y de la posibilidad humana (temporal) de contar. La noción de infinito como idea de algo ilimitado o inalcanzable, ha sido una fuente de confusión a través de la historia. Perturbó a los antiguos griegos, quienes trataron inútilmente de comprenderlo sometiendo el infinito a la intuición del sentido común, la cual, lamentablemente, estaba inspirada en un mundo finito y, generalmente, los condujo a conclusiones contradictorias y paradójicas.

Entre los filósofos griegos de la "época de oro" (siglos VI al II A.C.) surgió la idea del infinito potencial de manera natural, permitiendo designar la posibilidad de ir más lejos. En cambio, el surgimiento tardío del concepto de infinito actual y su uso sistemático en los trabajos matemáticos se dio hacia el siglo XIX.

El cálculo de procesos infinitos, enfrenta a los estudiantes a la necesidad de diferenciar y conceptualizar el infinito potencial y el infinito actual. Un ejemplo de ello es el caso de la representación decimal de los números reales. Los estudiantes participantes tienen dificultades al respecto. Ellos no lograron identificar 0,9999… con 1, sino como una aproximación, siempre menor que 1. Para ellos no es posible pensar que una representación como 0,999… concebida como un proceso infinito (infinito potencial) sea igual a 1, un número alcanzado (infinito actual).


6. ¿Es 0,999... igual a 1? Explique
NO, por q'' le hacen falta un decimales

Para los estudiantes la expresión correcta no debe ser "igual a" sino "aproximado a". No ven posible considerar el proceso de aproximación infinita como un proceso terminado. Esta idea se convierte en un obstáculo epistemológico, que aparece naturalmente al considerar el modelo de límite como algo inalcanzable.

"*No es lógico decir que el infinito puede tener fin, si es infinito no puede terminar*".
(Apunte de Álvaro, octubre 26 de 2.006).

Similares resultados surgieron en la investigación adelantada por Tall y Schwarzenberger (1978), en la cual encontraron que la representación decimal de los números reales enfrentó a sus estudiantes con el problema del infinito. Los estudiantes no aceptan que la representación de un número decimal infinito sea igual a una representación estática.

Las actividades realizadas, con los lenguajes y las representaciones usadas tuvieron un gran impacto en la percepción del infinito y sobre los razonamientos de los estudiantes. Se generaron conflictos cognitivos que los llevaron a dudar de la permanencia del infinito potencial. Sin embargo, los registros analizados nos muestran que a pesar de ellas, predomina en los estudiantes la idea de imaginar el infinito asociado a los procesos paso a paso, inacabados, sin fin, excluyendo la posibilidad de concebir el infinito actual.

Es necesario que los estudiantes traspasen este obstáculo que no permite distinguir el concepto de infinito potencial y el infinito actual, en su uso coherente en las actividades matemáticas propias de los procesos infinitos, ya que no es suficiente con dominar los procesos algorítmicos asociados a los límites, para entender su concepto.

6. 2. El Límite como una idea de aproximación

La primera idea intuitiva que tienen los estudiantes es el de límite como una posición geográfica, como una frontera, o el límite como una regla social, al ser cotidianas frases como "el límite de velocidad en carretera es…".

Otra idea de límite muy arraigada es la de expresarlo en términos de acercamiento de algo a lo que no se puede llegar, y mucho menos sobrepasar.

> *"límite es una aproximación sucesiva hasta el infinito pero nunca llega a ser el número"* (Olga, taller 2, octubre 2006).

> *"Yo nunca he pensado que el límite sea un valor, o sea que siempre he pensado que se 'aproxima' o que 'tiende a' indefinidamente […]"*
>
> (Johanna, dialogo de clase, noviembre 2006).

> *"Yo si creo que deba ser una igualdad pero dependiendo de cómo nos definan el límite. Es que si nos dicen, digamos este: el límite de* $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$ *es uno porque* $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$ *se aproxima tanto como se quiere a uno, o sea, la definición de límite es que se aproxime tanto como se quiera, entonces si es uno, o sea, quiere decir que esto,* $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$ *se está aproximando a uno".* (Edna, dialogo de clase, noviembre 2006).

Esta fue la concepción de límite que aún prevaleció en varios de los estudiantes de once, a pesar de las actividades realizadas. Por ello, al finalizar el sexto taller aún encontramos frases como:

> *"No tiene límite porque el numerador siempre es menor que el denominador y aunque se aproxime mucho nunca llegará a 1"* (Álvaro, taller 6, noviembre 2006).

> *"Si, tiene límite porque todo nos indica que llega a 0, pero lo mas posible es que no, porque los números no tienen fin ni límite".* (Edna, taller 2, noviembre 2006).

> *"Cuando se acerca a un punto al cual no toca ni llegará"*
>
> (Johanna, taller 6, noviembre 2006).

Aunque Olga parece manifestar otra idea de límite al final de este proceso.

> *"Es cuando nos dicen a que punto vamos a llegar, ejemplo, llegar a 10 entonces el límite en ese caso sería 10, porque ahí si dice que punto llegar"* (Olga, taller 6, noviembre 2006)

Superando el pensamiento de algo que no se alcanza. Y esta conclusión es más destacable aún si observamos que Olga era una de las estudiantes que más dificultades y confusiones presentaba en los primeros talleres. Ella ha superado la visión del infinito potencial, aceptando el fin del proceso.

Creemos que esta idea de límite que expresa Olga, proviene de la manera como se presentaron las actividades en los talleres, y el uso de las tiras de papel calcante que debían colocarse sobre un punto en la gráfica al cual la sucesión estaba tendiendo, y este punto sería un candidato fuerte a ser el límite. Pero cuando la gráfica de una sucesión no mostraba ninguna tendencia no habría ningún candidato para colocar la tira de papel calcante, manifestando entonces que en el caso de la sucesión $a_n = \sqrt{n}$:

> *“¡Tiene límite si tiene un punto de llegada! Pero como no nos dicen a que punto llegar seguirá y no tendrá límite”* (Olga, taller 4, noviembre 2006).

Es decir para ella la estrategia de colocar el papel calcante fue decisiva para determinar el límite, pero además juzgamos por sus respuestas que ella esta tratando de concebir el límite con la idea del infinito actual.

Capítulo 7

Conclusiones

Para finalizar la presentación de nuestra investigación hacemos mención de las conclusiones más relevantes en nuestro estudio.

1. Una primera conclusión que este trabajo nos deja como docentes, es que a la hora de abordar un concepto tan importante dentro de la matemática como es el concepto de límite, debemos partir por la identificación de las ideas primitivas (intuitivas) que poseen los estudiantes y confrontarlas con las ideas promovidas en el aula de clase, para posibilitar la superación de obstáculos y la corrección de las concepciones equivocadas.

2. Así mismo, es de resaltar la importancia que tiene la idea del infinito en la construcción del concepto de límite, ya que las ideas intuitivas sobre este concepto pueden obstaculizar de alguna manera la adquisición del concepto de límite.

3. Con respecto a la metodología usada en la construcción del concepto y con respecto a las actividades realizadas podemos decir que:

   - Usar diferentes representaciones como la aproximación numérica y la interpretación gráfica además de la intuición para encontrar el límite de una sucesión generó en los estudiantes un aprendizaje más reflexivo y con mayor significado creando la posibilidad de llegar a construir por si mismos conceptos fundamentales en matemáticas.

   - El uso de los espejos y de las tiras de papel calcante lograron hacer comprensible conceptos tan abstractos como el de infinito y el de convergencia de una sucesión.

- El ambiente de la clase cambió favorablemente, ya que esta vez no fuimos las maestras quienes dimos las definiciones –metodología que acentúa la concepción de las matemáticas como un conjunto de objetos con una serie de leyes predeterminadas y a veces poco comprensibles- y las explicaciones no enfatizaron en la resolución de algunos ejercicios, surgiendo así la concepción de un conocimiento en construcción y comprensible.

- Las actividades generaron muchas expectativas en los estudiantes y los motivó a participar con una excelente disposición. En el desarrollo de los talleres comprendieron que su participación no estaba limitada a un resultado para evaluarlos, sino por el contrario el éxito de éstos radicaba en la participación y puesta en discusión de sus respuestas.

- La planeación curricular elaborada para el grado once, planteaba el estudio del límite a finales del cuarto periodo, como se realizó, sin embargo, debido a las diversas actividades que se desarrollan en las instituciones educativas al cerrar el año escolar, algunas de las actividades inicialmente pensadas no pudieron ser ejecutas, por ello no fue posible el construir una definición formal de límite; sin embargo creemos que las actividades desarrolladas y las discusiones generadas al interior del aula de clases hicieron posible la corrección de las concepciones equivocadas y la superación en algunos de los estudiantes, de los obstáculos cognitivos detectados a analizar los cuestionarios.

- Los estudiantes construyeron el concepto de límite de una sucesión y hallaron algunos criterios para su convergencia; algunos con mejores resultados que otros.

4. Dentro de estos obstáculos cognitivos y las concepciones erróneas encontramos:

- La concepción del límite como barrera (posición geográfica), como norma, como ley (el límite de velocidad) por ser estos los significados en el lenguaje cotidiano.
- El de concebir el límite como un proceso dinámico, como un “se acerca más y más” (infinito potencial). El uso de expresiones como “aproximarse a”, “tiende a” provocó que los estudiantes interpretaran el límite de una sucesión como algo que no se alcanza. Por ejemplo, los estudiantes argumentaron que $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$ ya que *“los valores de la sucesión se acercan a 0 sin alcanzarlo”*. Idea que prevaleció hasta el final de la experiencia en dos de los estudiantes de este estudio.
- El esquema conceptual de los estudiantes no siempre se mantiene coherente, estableciendo afirmaciones contradictorias en momentos diferentes. Los estudiantes no perciben al infinito en algunas ocasiones como acabado y los límites alcanzados, sin embargo, en otras situaciones si es aceptada la completes del proceso.
- La visión del límite como un fenómeno físico, como movimiento interminable, siendo lógicamente imposible que una sucesión infinita tenga límite. Es decir, no es posible que determinado número sea el límite de una sucesión, “*ya que entre cada número que se encuentre siempre es posible encontrar otros y otros más”*.
- Los estudiantes tuvieron inicialmente dificultades para diferenciar el “*acercarse a*” con el “*aglomerarse en*” concluyendo por ejemplo, que la sucesión $a_n = (-1)^n$ puede o tener varios límites (1 y -1) argumentando el hecho de la aglomeración infinita alrededor de estos dos números, o poseer un único límite, que sería el número que se encuentre en la mitad de estos valores, es decir 0. Sin embargo, detectamos en la última actividad que tres de los cuatro estudiantes cuyas respuestas analizamos superaron dicha dificultad.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistemolgiques et les próblemes en mathematiques Recherches en Didactique des Mathematiques. Vol 4, No. 2, pp. 165.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153- 166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Davis, R. y Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol *5*, pp. 281-303.

Duval, R. (2004) Semiosis y pensamiento humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Segunda edición, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía. Cali. Colombia. Editorial Peter Lang.

Hitt, F. (1997) El concepto de límite y la importancia del infinito potencial y actual. Memorias del VI simposio Internacional en Educación Matemática. Grupo editorial Iberoamerica. Mexico, pp. 31-38

Páez, R (2003) Procesos de construcción del concepto de limite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión. Disertación doctoral no publicada. Cinvestav-IPN. México, D.F, México.

Ortiz, J. (1994) El concepto de infinito. Asociación Matemática Venezolana, Boletín Vol. I, Nº 2, Año 1994. Recuperado el 12 de septiembre de 2006, de www.emis.de/journals/ BAMV/ conten/vol1/vol1n2p59-81.pdf .

Roh, K. (2005). *College students' intuitive understanding of the limit of a sequence and theirlevels of reverse thinking*, Tesis doctoral, The Ohio State University, Columbus, OH. Recuperado Septiembre 8, 2006, de http://www.allacademic.com/meta/p24801_index.html

Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 371-397.

Tall, D. y Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching, 8*, 44-49. Recuperado el 8 de septiembre de 2006 de http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1978c-with-rolph.pdf

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151 169. Recuperado el 20 de septiembre de 2006 de www.warwick.ac.uk/staff/David.**Tall**/ pdfs/dot1981a-**concept-image**.pdf.