Acercamiento histórico–epistemológico al concepto de derivada para favorecer las competencias matemáticas en estudiantes de educación media

Helber Adrian Caballero Jaimes

Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciado en Matemáticas

Directora

Edith Johanna Mendoza Higuera

Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2025

Dedicatoria

Dedico este trabajo a Dios por concederme tan grande mérito …

A Mis padres, Carmen Jaimes y Helmer Caballero, pilar fundamental de mi vida.

A mis hermanos Maye, Martha y Edwin, quienes siempre me han acompañado.

También, a mis profesores y amigos, mis más sinceros agradecimientos.

Agradecimientos

A Dios, fuente inagotable de luz y amor, quien guía mis pasos para que yo alcance mi ideal. Mi más profundo agradecimiento, porque ha hecho grandes obras por mí.

A mis padres, Carmen Jaimes y Helmer Caballero, por su entrega total e incondicional, amor genuino y apoyo permanente. Son ustedes el pilar fundamental de mi vida y el motor que renueva mis fuerzas.

A mis hermanos, Martha, Maye y Edwin, motivo de mis alegrías, quienes me han acompañado en los momentos más difíciles. Gracias a ustedes mí vida tiene sentido.

A todos mis familiares, agradezco inmensamente su constante apoyo y sus sinceras oraciones. Vuestro ejemplo de resiliencia, me enseñaron que ante cualquier adversidad, la familia siempre debe permanecer unida.

A mis profesores, de quienes aprendí que educar es un acto de amor. De manera especial, a mi directora Johanna, agradezco tu confianza, paciencia, orientación y apoyo, cruciales para la culminación de este proyecto. Asimismo, al profe Jairo y Fiallo, porque con ustedes se materializo el más grande reto de mi formación profesional.

Extiendo mis más profundos agradecimientos a mis amigos de vida, de iglesia y de carrera. Su amistad es el tesoro más grande. De manera especial, a Daniel, quien me ha acompañado de forma incondicional incluso en los últimos días de este proyecto.

A todos los mencionados y a quienes han trabajado desde el anonimato. Mi gratitud más inmensa. Cada gesto, mensaje, sonrisa, compañía y oración han dejado en mí una huella invaluable. MUCHAS GRACIAS

Tabla de contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Resumen

Título: Acercamiento histórico-epistemológico al concepto de derivada para favorecer las competencias matemáticas en estudiantes de educación media*

Autor: Helber Adrian Caballero Jaimes**

Palabras Clave: Derivada, Epistemología, Historia, Pensamiento Variacional, Secuencia Didáctica.

Descripción:

Actualmente la enseñanza y aprendizaje de la derivada representa un reto escolar en la educación media. Por ello, el objetivo de esta investigación consistió en diseñar, implementar y valorar una secuencia didáctica orientada hacia el aprendizaje de la derivada como razón de cambio desde una perspectiva histórico-epistemológica, promoviendo el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de décimo y undécimo grado.

El estudio se fundamenta en el análisis histórico-epistemológico de la derivada (Vrancken y Engler, 2013); el papel de la historia de las matemáticas en su enseñanza (Guacaneme, 2016) y el concepto de ser ciudadano matemáticamente competente (MEN, 2006). La *investigación de Diseño* de corte cualitativa (Molina et al. 2011) se conforma de cuatro etapas: los elementos teóricos, la construcción, implementación y análisis de la secuencia didáctica, aplicada a 23 estudiantes del Semillero Matemático Euler de la UIS, donde se administró una prueba diagnóstica, dos talleres y una evaluación final.

Los resultados evidencian que las actividades promovieron una resignificación y superación de obstáculos epistemológicos del concepto de función, razón de cambio, noción de límite, recta tangente y la derivada como la mejor aproximación a la velocidad en un instante. Además, el uso de GeoGebra facilitó la comprensión y visualización de la derivada como el límite del cociente incremental. Este análisis permitió rediseñar la secuencia didáctica como guía para orientar futuros diseños.

* Tesis de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Directora: Dr. Edith Johanna Mendoza Higuera. Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Abstract

Title: A historical–epistemological approach to the concept of derivative to promote mathematical competencies in secondary education students*

Author: Helber Adrian Caballero Jaimes**

Key Words: Derivative, Epistemology, History, Variational Thinking, Didactic Sequence

Description:

Currently the teaching and learning of the derivative represent a school challenge in secondary education. Therefore, the objective of this research was to design, implement, and evaluate a didactic sequence aimed at learning the derivative as a rate of change from a historical-epistemological perspective, promoting the development of mathematical competencies in students of the tenth and eleventh grade.

The study is grounded in the historical-epistemological analysis of the derivative (Vrancken & Engler, 2013); the role of the history of mathematics in its teaching (Guacaneme, 2016); and the concept of being a mathematically competent citizen (MEN, 2006). The research is a qualitative design study (Molina et al., 2011) consisting of four stages: theoretical elements, construction, implementation, and analysis of the didactic sequence, applied to 23 students from the Euler Mathematics Club at UIS, where a diagnostic test, two workshops, and a final evaluation were administered.

The results show that the activities promoted a reinterpretation and overcoming of epistemological obstacles related to the concept of function, rate of change, notion of limit, tangent line, and the derivative as the best approximation to instantaneous velocity. Additionally, the use of GeoGebra facilitated the understanding and visualization of the derivative as the limit of the difference quotient. This analysis made it possible to redesign the didactic sequence as a guide to future designs.

* Bachelor thesis

** Science Faculty. Mathematics school. Bachelor´s degree in Mathematics. Director: PhD. Edith Johanna Mendoza Higuera. Doctor (PhD) in the specialty of Mathematics Education

Introducción

Desde las últimas décadas, la comunidad internacional de educadores matemáticos ha investigado y reflexionado sobre la formación matemática de los niños, niñas, jóvenes y comunidades en general. Asimismo, esta propuesta de investigación es consciente que**:**

> La educación matemática debe responder a nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos. (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006, p.46)

En relación con la cita anterior, esta investigación apunta hacia la formación de ciudadanos matemáticamente competentes, este último término, puede ser entendido como el conjunto de las capacidades, habilidades y destrezas que va alcanzando el estudiante en su vida escolar (MEN, 2006). Más específicamente, el objetivo consiste en que un estudiante de educación media (entre 15 a 17 años), sea capaz de resolver problemas de cambio y variación que se presenten en su vida cotidiana o académica. De hecho, el Ministerio de Educación Nacional (2006) plantea en una de las competencias estándar de matemática que al finalizar undécimo grado el estudiante interprete la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva en contextos matemáticos y no matemáticos.

Con respecto a la derivada, es un componente imprescindible del Cálculo en la educación media, que se enfoca en el estudio del *cambio* y la *variación* (Caballero, 2012; Cantoral, 2013; Fiallo y Parada, 2018; Rodríguez, 2020). Sin duda, es una herramienta fundamental para analizar y describir fenómenos del mundo real, por ello, "en la actualidad el Cálculo continúa teniendo un papel importante y forma parte de los currículos tanto de educación secundaria como terciaria de muchos países" (Fuentealba et al., 2023, p. 42).

Sin embargo, los resultados de las investigaciones de Artigue (1995), Carlson et al. (2002/2003), Cantoral (2013), Rodríguez (2020) y Fuentealba y coautores (2023), entre otros, han reportado una problemática alarmante en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo de carácter internacional que no tardó en hacerse evidente: Las instituciones educativas que se encargan de la educación media (entre los 16 y 17 años) no logran conceptualizar nociones de límite, de continuidad, y menos del concepto de derivada de acuerdo con las exigencias de los currículos nacionales que apuntan hacia una educación de calidad, desencadenando serias dificultades en su formación como ciudadanos matemáticamente competentes.

Cabe señalar que, estos problemas escolares conllevan consecuencias significativas en el desarrollo académico y profesional del estudiante, como la incapacidad de abstracción y generalización, de construcción y análisis de modelos matemáticos, de resolución problemas de cambio y variación de su vida cotidiana, de hacer conexiones interdisciplinares con diversos campos de la ciencia, incluso todo esto puede conllevar a la deserción escolar, como asevera Parada (2018), "la alta reprobación en los cursos de Cálculo impacta fuertemente en la alta deserción de la Educación Superior" (p. 11).

Pese a las problemáticas descritas, muchos investigadores especializados en educación matemática han hecho grandes aportes durante las últimas décadas. Se destacan las siguientes: se ha propuesto un marco conceptual de los niveles de razonamiento covariacional (Carlson et al., 2002/2003); se ha caracterizado el Pensamiento y Lenguaje Variacional (Caballero, 2012); se ha propuesto la visualización como estrategia para el estudio gráfico de la derivada (Cantoral, 2013); se han identificado las habilidades cognitivas del pensamiento variacional (Fiallo y Parada, 2018), se han planteado los conocimientos fundamentales que requiere el estudiante para lograr aprender el Cálculo (MEN, 2016), se ha ofrecido una caracterización de un Ciudadano Matemáticamente Competente (Gutiérrez, 2019), incluso, han tratado de vincular las habilidades cognitivas con el razonamiento covariacional (Rodríguez, 2020), entre otros.

Hechos como los descritos, motivaron a esta investigación a desarrollar una aproximación al concepto de derivada, desde el componente histórico y epistemológico coherente para dar sentido a la expresión *ser matemáticamente competente* (MEN, 2006). Por tanto, se investiga *¿cómo una mirada histórica y epistemológica del cálculo diferencial impacta didácticamente en el desarrollo de las competencias matemáticas en estudiantes de la educación media?* Cabe aclarar, la epistemología alude al estudio de la naturaleza y construcción del objeto de estudio, y el papel del profesor y del estudiante en su enseñanza y aprendizaje. En cambio, la historia estudia sucesos del pasado de la humanidad en determinado tiempo y espacio y proporciona un análisis cronológico del mismo. Ambas disciplinas están entrelazadas y son esenciales para la comprensión profunda y crítica del concepto de la derivada en la educación.

Además, este enfoque es novedoso y valioso respecto a otros estudios porque quien conoce el desarrollo histórico-epistemológico de la derivada incluso antes de su surgimiento, desarrollo y evolución, comprenderá tanto las dificultades como las contribuciones que le dieron la forma al concepto de derivada que hoy en día se promulga. Y la apropiación de este conocimiento será como una brújula para el docente, ya que le permite trazar progresivos caminos de aprendizaje y promueve la construcción sólida y significativa del concepto en el alumnado.

En esta investigación se coincide con D'Amore (2007) y Guzmán (1993) citados en Cantoral (2013) afirman que "una mirada histórica–epistemológica a las matemáticas posibilita el análisis de la evolución de ideas y el desarrollo de hechos que construyeron los objetos matemáticos como hoy se conocen” (p. 15). Sin duda, en la historia del cálculo diferencial se encuentran ideas brillantes que pueden suscitar el análisis y la discusión en el aula de clases como estrategia enriquecedora para el aprendizaje. De esta manera, se pretende realizar un análisis histórico–epistemológico como aproximación al concepto de derivada a partir de los trabajos de Ávila et al (2013), Vrancken y Engler (2013) y Vega (2019).

En concreto, *esta investigación se propuso desde un análisis histórico–epistemológico del Cálculo diferencial diseñar una serie de actividades que permitan una aproximación al concepto de derivada a fin de favorecer competencias del pensamiento variacional en estudiantes de educación media*. Como afirma Artigue (1995) “el objetivo de estas actividades es justamente hacer nacer y estructurar progresivamente el cálculo a partir de nociones cotidianas y de los interrogantes que ellas plantean” (p. 117).

De acuerdo con Molina et al. (2011) este tipo de investigaciones de diseño requiere de un proceso como la caracterización de la situación de enseñanza/aprendizaje, la revisión bibliográfica, los principios teóricos, el diseño instruccional, los ciclos iterativos de implementación, análisis y ajustes, finalmente un análisis retrospectivo del diseño. Invito al lector interesado a recorrer este análisis, donde la historia y la epistemología se entrelazan para resignificar el aprendizaje de la derivada y contribuir a la formación de ciudadanos de ciudadanos matemáticamente competentes. Para conocer a detalle este proceso, que da forma a la propuesta de investigación, se recomienda al lector tener en cuenta la siguiente ruta:

Cap. 1: Planteamiento de la investigación. En este apartado se describe el panorama actual alrededor de la enseñanza y aprendizaje del concepto de la derivada en la educación media e inicios de la educación superior, se expone los principales problemas, así como algunos avances. Finaliza con el planteamiento de la pregunta y objetivo de investigación.

Cap. 2. Antecedentes: En esta sección se condensan en cinco ejes temáticos la revisión bibliográfica encontrada en relación con: el papel de la historia y la epistemología en la enseñanza y aprendizaje del concepto de la derivada; aquellos referidos a las competencias del pensamiento variacional fundamentados en aspectos curriculares nacionales y principales aportes de estudios recientes en la didáctica del Cálculo.

Cap. 3. Aspectos teóricos y conceptuales: En esta parte de la investigación se establece la relación entre la historia y la epistemología y su papel en la Educación Matemática, seguidamente se presenta un análisis histórico-epistemológico de la derivada desde la edad antigua hasta la edad contemporánea, precisando los principales acercamientos epistemológicos de la derivada. También, se caracterizan las competencias del pensamiento variacional en relación con la derivada según los referentes curriculares nacionales.

Cap. 4. Metodología: En este capítulo se precisan cuatro etapas en relación con la estructura metodológica de la investigación de diseño descrita por Molina et al., (2011): los elementos teóricos, la construcción del diseño instruccional, la experimentación y el análisis retrospectivo. Estas etapas son la ruta para responder a la pregunta de investigación.

Cap. 5. Análisis de los datos: En la primera parte de este apartado se analiza lo siguiente: 1) examinar cómo se integró los acercamientos históricos – epistemológicos en la secuencia didáctica, 2) analizar cómo el componente histórico-epistemológico favoreció en el desarrollo de competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales, 3) Ajustar la secuencia didáctica según los resultados del pilotaje para fomentar una comprensión más sólida del concepto de derivada.

Cap. 6. Conclusiones y consideraciones finales: se concluyen los resultados del análisis de los datos. Luego, se concluye los puntos más importantes de la investigación y sus implicaciones en la educación.

Capítulo 1: Planteamiento del problema

Esta investigación partió de la ingenuidad, como joven investigador, al revisar los referentes curriculares nacionales y encontrar que el MEN (2006), en el apartado que presenta los estándares básicos de competencia de cada nivel, afirma que un estudiante al terminar undécimo grado: "Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos" (MEN, 2006, p. 89). Esto hecho, fue el detonante para la realización de esta investigación, puesto que es poco común que se logre abordar tal concepto en el colegio. A continuación, se describe el problema, la pregunta y el objetivo de investigación que guiaran este recorrido investigativo.

Esta investigación aborda principalmente un objeto del Cálculo, la derivada, comúnmente interpretada como razón de cambio instantánea o valor de la pendiente de la recta tangente a una curva (MEN, 2006). Sin embargo, en la búsqueda del verdadero significado de la derivada y cuál es su importancia se encuentran un sin números de discursos, a veces envolventes, que se empeñan en mostrar que la derivada consiste en aplicar la definición que se presenta a continuación: La derivada de una función $y = f(x)$ en x está dada por $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ siempre que el límite exista.

En los mejores de los casos, explican y justifican con procesos analíticos y algebraicos que esta definición de derivada se obtiene del límite de h cuando tiende a cero de la pendiente de la recta secante a la función. De esta manera, le asocian el significado de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto. Caballero (2012) señala que:

> La elección del conocimiento matemático en la que se apoya el profesor para resolver una situación (ya sea como estructura variacional o no) influye en el tipo de análisis que se hace de la situación, pudiendo propiciar u obstaculizar un pensamiento (p. 132).

Además, se pone en cuestión ¿cómo es que Fermat, Newton y Leibniz del siglo XII calculaban derivadas sin conocer esta definición formal de la derivada que hoy se emplea en la enseñanza? Interrogante que invita a indagar sobre el trasfondo histórico y epistemológico del concepto de derivada. Pues, los fundadores del cálculo diferencial desarrollaron métodos y razonamientos intuitivos para calcular razones de cambio antes la formalización mediante límites. Sin duda, tuvo razón Maza (1994) al afirmar que en la escuela en ocasiones "trastornan el orden histórico de adquisición" (p. 19), como ocurre con la enseñanza actual de la derivada. Seguidamente, Maza (1994) manifiesta que "se impone la lógica de la generalización matemática y un estilo deductivista que oculta el proceso de construcción original de la Matemática" (p. 19). Aunado a esto, Artigue (1995) asevera que muchas investigaciones a nivel de secundaria y superior de la enseñanza de los principios del cálculo confluyen en que:

> Si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas (p. 97).

Lo anterior, debe hacer reflexionar al docente sobre su gran responsabilidad como educador, que no caiga en el discurso magistral, ni el uso excesivo de algoritmos que invisibiliza la verdadera naturaleza del objeto matemático.

Siguiendo este panorama actual de la enseñanza de la derivada, resulta relevante la siguiente pregunta: ¿Acaso se ha inhibido el pilar más importante de la derivada: el cambio y la variación? Sumado a esto, Vrancken y Engler (2013) afirman que "a pesar de que la determinación de razones de cambio (idea fundamental del Cálculo) está presente de una u otra manera en la vida diaria, todo lo relacionado con él resulta muy abstracto para el alumno en el aprendizaje formal y desemboca en graves problemas para su enseñanza" (p. 54). También, Cantoral (2013) y Fuentealba, et al. (2023) concuerdan en que la estructura conceptual asociada al concepto de "derivada" de los estudiantes de bachillerato no están presentes significados gráficos que pongan en juego su pensamiento y lenguaje variacional. Por tanto, el estudio de la variación como base fundamental del Cálculo "se suelen presentar en forma estática, pero ganarían mucho en flexibilidad y generalidad y atraerían más el interés de los estudiantes si se presentan en forma dinámica y variacional" (MEN, 2006, p. 69)

En las últimas décadas, muchas investigaciones han identificado las principales dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la derivada en la educación media e inicios de la educación superior. En particular, Dubarbie (2024) hace una larga lista de las dificultades que presentan los estudiantes en Cálculo según el profesorado de Matemáticas de Ecuador y Colombia. Entre sus resultados acerca de la noción de derivada muchos coinciden en las siguientes:

- Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.
- Expresión de la derivada como límite del cociente incremental.
- Dificultades algebraicas en el cálculo de derivadas, ya sea en la aplicación de su definición como límite o en la utilización de las correspondientes fórmulas.
- Aplicaciones de la derivada en la vida real.
- Falta de conocimientos previos sobre nociones como función, límite o continuidad.

- Se les complica reemplazar el valor de la función $f(x)$ en $f(x+h)$ para poder resolver el límite
- Cometen errores con la regla de la cadena

Como colofón, entre los resultados de Dubarbie, muchos profesores concuerdan que la inclusión de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) y una prueba diagnóstica junto con un plan de refuerzo, son las mejores estrategias didácticas para minimizar las dificultades de aprendizaje.

Entre otras investigaciones, Cantoral (2013) y Fuentealba et al. (2023) caracterizan las estrategias que usan los estudiantes de bachillerato y primer año universitario para bosquejar la derivada de una función. Ambos concuerdan que los estudiantes se apoyan de algoritmos, técnicas de derivación o reglas para "derivar". Estas son más evidencias que ponen en juicio que la enseñanza y aprendizaje actual de la derivada pareciera prescindir del núcleo central del Cálculo: el cambio y la variación. A su vez, son el principal fundamento del pensamiento y lenguaje variacional. Aunque es importante tener en cuenta que:

> la construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento, pues requiere la integración de distintos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos, visuales, gráficos y geométricos, así como una adecuada comprensión de procesos matemáticos específicos, como: número, variable, constante, parámetro, función, límite, continuidad, derivada, integral, convergencia, representación e infinito para tener una adecuada construcción de las nociones de cambio y la variación. (Cantoral, 2013, p. 45)

Otra investigación para destacar es la de Artigue et al. (1995), quienes con base en numerosas investigaciones significativas en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo condensan las principales dificultades y obstáculos epistemológicos, cognitivos y didácticos en tres grandes estudios: aquellas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del Cálculo (números reales, sucesiones, funciones), aquellas asociadas a la conceptualización de la noción de límite y aquellas vinculadas a la ruptura álgebra/Cálculo. Por mencionar algunas de estas: la compresión de número real tiende a confundirse en la asociación entre número real y número decimal; las concepciones erróneas de función, como creer que siempre debe representarse por una fórmula o que su gráfica debe ser suave y continua; reducir el proceso del límite a una operación algebraica en lugar de verlo como un proceso dinámico e infinito; dificultades para articular de los registros gráfico cuando se maneja simultáneamente la información de la función y su derivada, entre otras.

En fin, existe un sin número de dificultades en el aprendizaje y enseñanza de la derivada en la educación media que requiere de atención inmediata, pero es importante aclarar que, asimismo como las investigaciones descritas con anterioridad caracterizan ciertas problemáticas en la Didáctica del Cálculo, también proponen estrategias didácticas para superar las dificultades en la enseñanza y aprendizaje. Se destacan las siguientes:

- Énfasis en la resolución de problemas: la conexión de la derivada con problemas de la vida cotidiana, de las mismas matemáticas o de otras ciencias hace parte del núcleo central del currículo (MEN, 1998)
- Uso de múltiples representaciones: utilizar representaciones gráficas, numéricas y algebraicas para ilustrar el concepto de derivada puede ayudar a los estudiantes a construir una comprensión más sólida (Sánchez-Matamoros et al., 2008)
- Fortalecer los conocimientos previos: antes de abordar la derivada, es importante asegurarse de que los estudiantes tengan una buena comprensión de los conceptos intuitivos de función, límite y continuidad para que comprendan el significado de la derivada, más allá de las fórmulas y los procedimientos (Dubarbie, 2024)

- Promover el uso de las TIC: el uso de herramientas tecnológicas digitales, como los softwares de geometría dinámica, permite visualizar, explorar e interactuar con diferentes representaciones del concepto de la derivada (Serna, 2023).

En fin, este trabajo investigativo aborda varias problemáticas alarmantes en el aprendizaje del cálculo, principalmente, los desafíos en la conceptualización de la noción de derivada en la educación media, puesto que, muchos estudiantes enfrentan dificultades para comprender su significado y utilidad, lo que impacta negativamente en su formación como personas matemáticamente competentes. Por ello, esta investigación propone una secuencia didáctica sustentada desde un enfoque histórico-epistemológico orientado a fortalecer las competencias matemáticas del pensamiento variacional de los estudiantes de décimo y undécimo grado, potenciando su capacidad de razonamiento y su comprensión de la derivada como núcleo del cambio y la variación en la resolución de problemas.

Por lo tanto, el eje central de esta investigación está en responder la siguiente pregunta:

¿Cómo favorecer el aprendizaje de la derivada desde un acercamiento histórico–epistemológico que potencie el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de décimo y undécimo grado?

En respuesta a esta situación, la investigación propone como objetivo:

Diseñar, implementar y valorar una secuencia didáctica orientada hacia el aprendizaje de la derivada como razón de cambio desde una perspectiva histórico-epistemológica, a fin de promover el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de décimo y undécimo grado.

Capítulo 2: Antecedentes

Para visualizar con claridad el panorama de la enseñanza y aprendizaje de la derivada en la educación media, se emprendió la búsqueda en la literatura, diálogos con profesores, lectura de investigadores reconocidos, conferencias, entre otros, que cambiaron la manera de ver las matemáticas del presente autor y motivaron esta investigación a seguir adelante.

Esta búsqueda bibliográfica se orientó hacia cinco ejes temáticos: a) trabajos referidos al papel de la historia y la epistemología en la enseñanza de las matemáticas; b) aquellos de corte histórico–epistemológico del pensamiento variacional asociados a la enseñanza de la derivada; c) el pensamiento y lenguaje variacional y sus acercamientos con la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada; d) aquellos referidos a las competencias del pensamiento matemático fundamentados en aspectos curriculares nacionales; e) estudios recientes y sus principales aportes a la didáctica del Cálculo.

2.1 El papel de la historia y la epistemología en la enseñanza de las matemáticas

La historia estudia sucesos del pasado de la humanidad y proporciona un análisis cronológico del mismo, a la par, una de las ramas de la filosofía, la epistemología, estudia la evolución del conocimiento humano, su origen y las circunstancias, en que se produce y se valida el conocimiento científico, así que, no es posible desligar los estudios de la epistemología de la matemática de aquellos de la historia de la matemática (D'Amore, 2007).

Por un lado, Maza (1994) analiza los elementos que relacionan la enseñanza de las matemáticas con la historia de esta ciencia. Distingue entre enseñar historia de la matemática, como lo haría un historiador, y enseñar matemáticas históricamente, como lo haría un profesor de bachillerato. Mientras que la primera toma una forma narrativa, la segunda puede consistir en un conjunto de problemas históricos que fomenten discusiones durante el proceso de enseñanza. Sus principales aportes para esta investigación son los objetivos de la historia de la matemática como instrumento didáctico que se describen en los aspectos conceptuales de este documento.

En la misma línea, Guacaneme (2016) presenta una aproximación al estado del arte en torno a este vínculo: Historia de las Matemáticas – Educación Matemática. En cuanto a esta relación bidireccional, podemos encontrar entre sus reflexiones y conclusiones una de sus líneas, aquella de dirección: la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas (HM–EM). A este respecto, Guacaneme (2016) encuentra tres formas de cómo interviene la HM–EM: uso, integración y permeador, estas tres formas de intervención también se ampliarán en los aspectos conceptuales.

Por otra parte, D'Amore (2007) considera que el futuro docente de la escuela debe prepararse en la Epistemología de la Matemática, movido por factores históricos, culturales, didácticos o profesionales. D'Amore explica cada uno de estos factores a detalle, y con lo que respecta a la epistemología se apoya en la "teoría de los obstáculos" de Guy Brousseau (1983) y en el "triángulo de la didáctica" de Chevallard (1985), para establecer los tres tipos de obstáculos en la didáctica:

- Tipo ontogénicos: Relacionados con el desarrollo y aprendizaje del alumno.

- Tipo Didácticos: Relacionados con la enseñanza y métodos del maestro.

- Tipo Epistemológicos: Relacionados con el conocimiento y su naturaleza

Es importante puntualizar que un obstáculo epistemológico es "una concepción, un conocimiento que resulta ser eficaz ante ciertas situaciones; pero que cuando es enfrentado a otro tipo de situaciones resulta ser inadecuado, llevando a conclusiones erróneas" (Vega, 2019, p. 2).

De las anteriores investigaciones, tales como los principales aportes de D'Amore (2007) que reflexiona sobre la historia y la epistemología en la formación de los docentes de la escuela secundaria y los de Guacaneme (2016) acerca del ámbito de la historia de las matemáticas en la enseñanza de las matemáticas como uso, integración y permeador y las ideas de Maza (1994) sobre la historia de las matemáticas como instrumento didáctico, fueron parte fundamental para justificar los elementos de la estructura metodológica de la secuencia didáctica de Gutiérrez (2020) y el diseño didáctico de Rey (2022). Gutiérrez (2019), diseñó una secuencia mediada por recursos históricos y epistemológicos para el estudio de la trigonometría con el objetivo de caracterizar los aprendizajes en tres dimensiones (Ser, Saber, Hacer) en la formación de un ciudadano matemáticamente competente. En cambio, Rey (2022) plantea y valora un diseño didáctico basado en el componente histórico–epistemológico del razonamiento proporcional para favorecer la inclusión en el aula de matemáticas de quinto grado.

Como concluyó D'Amore (2007): "la Epistemología y la Historia son medios culturales fuertes, abstractos y profundos, que la Didáctica de la Matemática hace concretos y útiles al progreso de la humanidad, a la construcción de competencias, a la conciencia del propio saber" (p. 19).

2.2 Potencial didáctico de la historia y la epistemología en el pensamiento variacional

Vimos que D'Amore (2007), Guacaneme (2016), Gutiérrez (2019), Maza (1994) y Rey (2022) concuerdan en que el papel de la historia y la epistemología es un pilar poderoso en la educación, que da sentido a la construcción evolutiva del conocimiento matemático en la escuela. Para esta investigación, se estudiará de manera íntegra la dimensión histórica y epistemológica del origen y desarrollo del cálculo diferencial, principalmente de la derivada, esto será fundamental para comprender la naturaleza del objeto matemático en cuestión.

Para empezar, Vega (2019) identificó algunos obstáculos de carácter epistemológico en el análisis del desarrollo histórico de la derivada desde el paso de la geometría de la antigüedad griega hasta el análisis matemático del siglo XIX. Por ejemplo, la idea de mantener la tangencia de manera local que promulgó la civilización griega sobre la recta tangente a una circunferencia en un punto fue un obstáculo para generalizar el concepto de recta tangente a una curva.

Un trabajo similar, pero con mayor densidad es la investigación de Vrancken y Engler (2013), quienes sintetizan epistemológicamente la construcción de la derivada desde la variación y el cambio a lo largo de la historia, describiendo los aportes más importantes de cada época, desde la edad antigua hasta el rigor del análisis matemático del siglo XIX y XX. Vrancken y Engler a diferencia de Vega, realizan este análisis desde cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, el plano cognitivo y el didáctico. Por otro lado, ambos estudios concuerdan en que el papel de los infinitesimales en los trabajos de Newton y Leibniz son las nociones más cercanas e intuitivas del cálculo diferencial e integral.

Se da claridad, que en esta línea de investigación se encuentran más aportaciones, por ejemplo, Ávila, Ávila y Parra (2013) tienen en cuenta los dos principios de Leibniz y el papel de la filosofía en la antigüedad. En cambio, Nieves (2011) observó que el libro de Larson aborda primero el cálculo diferencial y posteriormente la integración, en cambio, el libro de Apóstol fue al revés, y afirma que los enfoques están justificados desde lo histórico, pedagógico y práctico. Además, Nieves (2011) afirma que “los textos abordan, organizan y aclaran ideas del origen un poco confuso del Cálculo y las convierten en un medio importante para quien desea acercarse a las ideas puras del cálculo mismo” (p.3). Y advierte que “para que el proceso enseñanza–aprendizaje del cálculo diferencial sea asertivo, el docente debe tratar de armonizar adecuadamente las dos componentes que lo integran: el componente heurístico y los contenidos específicos del pensamiento matemático" (p. 4). Otro aporte novedoso, es el canal de divulgación de matemáticas: El Axioma del Infinito https://youtu.be/8peKjQdVMOM?si=Q6QslSqMRbMnQnD7, donde presenta una saga de cuatro videos en la plataforma de YouTube publicados durante el año 2022, acerca del origen, el desarrollo y las contribuciones de los infinitésimos al cálculo diferencial.

A todo esto, las investigaciones de Ávila et al. (2013), Vrancken y Engler (2013), Vega (2019) y el canal El Axioma del Infinito (2022) concuerdan en que los principales problemas que dieron surgimiento al cálculo en el siglo XVII fueron:

- Hallar la ecuación de la tangente a una curva dada en un punto.
- Encontrar el valor máximo y/o mínimo de una cantidad.
- Problemas de cuadraturas, como hallar el área de figuras con lados curvos.
- La matematización del movimiento, como hallar la velocidad dada la distancia recorrida.

En efecto, estas investigaciones ofrecen una visión profunda de cómo evolucionó el concepto de derivada a lo largo de la historia. Estos trabajos serán una herramienta valiosa para realizar un amplio y profundo análisis histórico–epistemológico del desarrollo de la derivada desde el cambio y la variación.

2.3 La derivada como objeto de estudio en la didáctica de las matemáticas

A lo mejor, el motivo de que tantos discursos indiquen que derivar consiste en aplicar ciertas definiciones o reglas, sea el resultado de un proceso gráfico que contempló Newton y Leibniz, como explican Vrancken y Engler (2013):

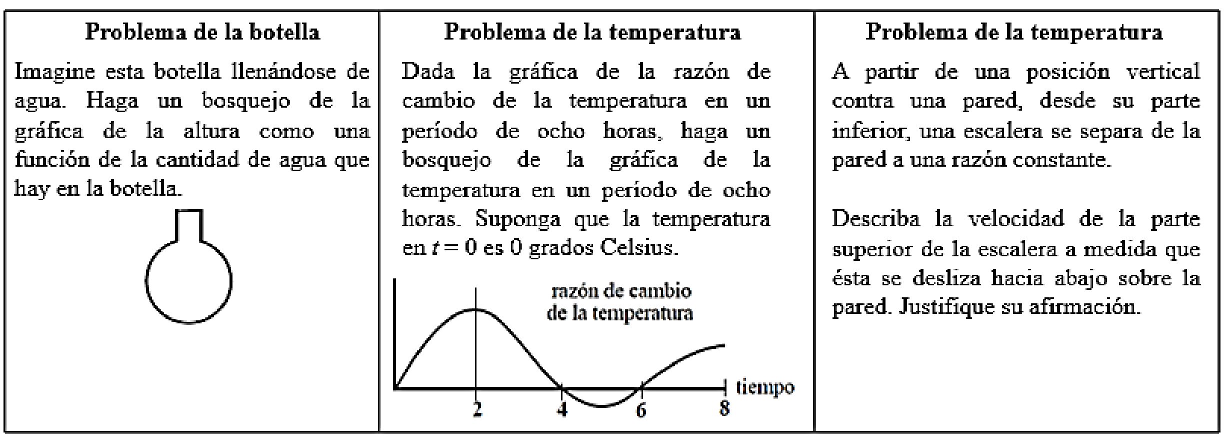
> El método de determinar la tangente a partir de la pendiente de una secante y hallar el límite de esa pendiente cuando uno de los puntos de corte se aproxima tanto como se quiera al

otro, fue el método utilizado por Newton para el Cálculo de velocidades instantáneas y fue la base gráfica del Cálculo de derivadas en los libros clásicos. (p.69)

Mejor aún, Carlson et al. (2002/2003) proporcionan un marco conceptual, que describen cinco niveles de razonamiento variacional (coordinación, dirección, coordinación cuantitativa, razón promedio y razón instantánea) que suponen los estudiantes deberán transitar. Los autores, explican que si un estudiante se clasifica en nivel cinco (razón instantánea) muy posiblemente activará en su mente acciones mentales que demuestran que comprende que la razón de cambio instantánea (derivada en un punto) es resultado de refinamientos más y más pequeños de la razón de cambio promedio.

Figura 1

Tareas de covariación implementadas en Carlson (2002/2003)



Nota. Adaptado de el "problema de la botella" (p. 132), el "problema de la temperatura" (p.143) y el "problema de la escalera" (p. 145), por Carlson et al., 2002/2003, EMA, 8(2), 121–156.

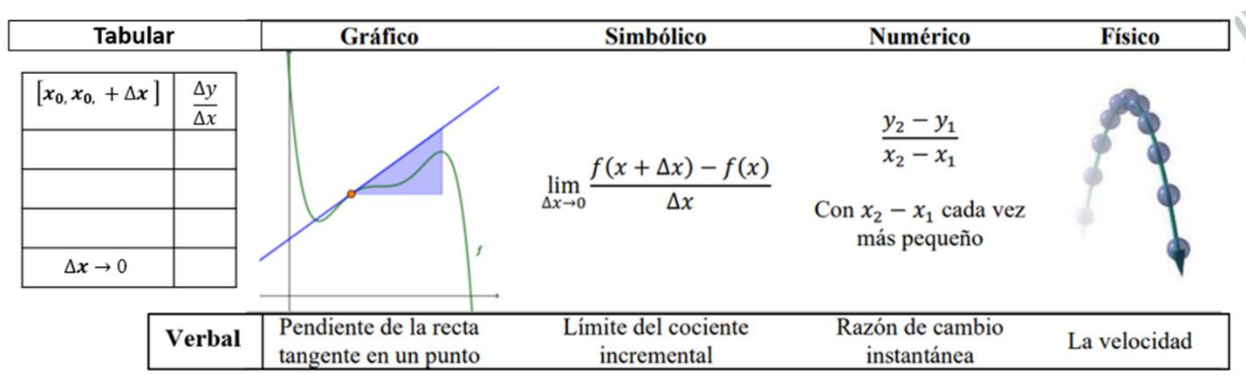
Los problemas abordados por Carlson et al. (2002/2003) como se aprecian en la **Figura *1*** presentan contextos extra-matemáticos que difícilmente un estudiante de educación media con un promedio académico medio logrará diferenciar y relacionar estas dos formas de interpretar la derivada: "Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva" (MEN, 2006, p. 89).

Sánchez–Matamoros, et al. (2008), revisaron las contribuciones de múltiples investigaciones de Educación Matemática para identificar las aportaciones hacia la comprensión de la derivada como objeto de investigación en la didáctica de las matemáticas. Además, "subrayan la importancia de la relación entre razón de cambio y cociente incremental en la comprensión de la derivada, así como la influencia de los contextos en la construcción del significado y las transformaciones entre diferentes representaciones" (p. 276).

El MEN (2006), Sánchez–Matamoros et al. (2008), Rodríguez (2020) y Serna (2023) consideraron las diferentes representaciones de derivada (ver **Figura *2***).

Figura 2

Representaciones de la derivada



Nota. Adaptado de "representaciones de la derivada" (p. 44), por C. Rodríguez, 2022, Universidad Industrial de Santander.

Además, Sánchez–Matamoros et al. (2008) citan a Habre y Abboud (2006) para indicar "que los significados que construyen los alumnos están vinculados a determinados modos de representación y que tales significados no están conectados" (p. 277). Por cierto, Serna (2023) diseñó una unidad para el aprendizaje de la derivada en el Aula Virtual de Aprendizaje Moodle, dando muestra de la importancia de hacer uso de la tecnología para facilitar el acceso a la información y recursos educativos.

En general, las investigaciones en la didáctica del Cálculo sugieren utilizar múltiples representaciones (gráfica, algebraica, verbales, entre otras), conectarlas con diferentes contextos y hacer uso de tecnología para desarrollar una comprensión más profunda de la derivada como objeto de investigación.

2.4 Competencias matemáticas cimentadas en aspectos curriculares nacionales

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), en Colombia, señalan que es necesario pasar de una enseñanza orientada sólo en el logro de objetivos de contenidos del área, hacia una enseñanza orientada en el desarrollo de competencias matemáticas, donde el maestro aproveche espacios para la observación analítica, la reflexión crítica, la investigación y el autorreconocimiento como constructor del saber en su ámbito de acción. En cuanto al quehacer matemático, promueve una estructura curricular que tiene en cuenta tres aspectos, según el MEN (1998):

1. Los procesos generales, tiene que ver con el aprendizaje, estos son: el razonamiento; la resolución de problemas; la comunicación; la modelación; y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
2. Los conocimientos básicos, son aquellos que desarrollan el pensamiento matemático, que resulta de articular cinco tipos de pensamientos: El pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional.

3. El contexto, tiene que ver con el entorno del estudiante y les da sentido a las matemáticas, por ejemplo, las condiciones sociales y culturales, las situaciones problemáticas de las mismas matemáticas, de la vida diaria y de las otras ciencias.

En la misma línea, los Estándares Básicos de Competencia (EBC) “son unos referentes que permiten evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los y las estudiantes en el transcurrir de su vida escolar” (MEN, 2006, p. 12). La estructura de los EBC de Matemáticas asocia las competencias con los cinco pensamientos matemáticos y en cada estándar pone el énfasis en uno o dos de los procesos generales de la actividad matemática. En el mismo hilo conductor encontramos los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) que detallan los saberes, habilidades y aprendizajes que se espera adquirieran los estudiantes en cada estándar de competencia según el grado de la educación escolar (MEN, 2016).

Con lo que respecta al pensamiento variacional, en la **Tabla 1** se describe el conjunto de aprendizajes para la educación media (nivel 10–11) en relación con la noción de derivada y también algunas competencias del nivel anterior a modo de referencia para identificar los conocimientos previos y competencias a desarrollar.

Tabla 1

Competencias en la educación secundaria en relación con la derivada

	Estándares Básicos de Competencia	Derechos Básicos de Aprendizaje
Nivel 8–9	Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.	Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

Nivel 10–11	Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos. Interpreto la noción de la derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la recta tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.	Utiliza instrumentos, unidades de medida, sus relaciones y la noción de derivada como razón de cambio, para resolver problemas, estimar cantidades y juzgar la pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto.

Nota. Esta tabla contiene los aprendizajes esperados de la noción de derivada en los últimos niveles de la educación. Son tomados del MEN (1998), MEN (2006) y MEN (2016).

Por otro lado, Parada (2018) en apoyo de la comunidad de profesores–investigadores en educación matemática adscritos al Grupo de Investigación en Educación Matemáticas (EDUMAT) y autoridades educativas presenta un avance de los resultados de una investigación innovadora de desarrollo curricular que se ha implementado paulatinamente desde 2012 en la Universidad Industrial de Santander, este, se basó en tres ejes:

1) Diseño y desarrollo de alternativas curriculares, donde desarrollaron un curso de precálculo basado en los talleres que actualmente se recopilan en el libro de Fiallo y Parada (2018)

2) Acompañamiento y desarrollo profesional de profesores adjudicados al programa de licenciatura en matemáticas que realizan prácticas docentes en los colegios.

3) Atención, Seguimiento y Acompañamiento a los Estudiantes (ASAE), que, a su vez, es un programa que ofrece tutorías individuales y grupales a estudiantes de Cálculo con bajo rendimiento académico.

Cabe destacar, que Fiallo y Parada (2018) caracterizan las habilidades del Pensamiento Variacional asociados a los cinco procesos matemáticos planteados por el MEN (1998) que son necesarias para la comprensión del cálculo diferencial. Esto último, serán pieza importante para definir las competencias que se van a favorecer en el diseño didáctico desde las tres dimensiones que contemplan los currículos escolares para el proceso de enseñanza y aprendizaje integral: Saber, Hacer y Ser.

2.5 Enseñanza y aprendizaje de la derivada en la educación media y superior

En este apartado, se busca contextualizar cómo se enseña y cómo se aprende la derivada en la educación media de acuerdo con algunas investigaciones de las últimas décadas. Desde las investigaciones con experimentos de enseñanza tales como García y Dolores (2016) y Vrancken y Engler (2014) permiten vislumbrar dos realidades de metodologías de enseñanza de la derivada en la educación, aquellas con un enfoque geométrico y aquellas con un enfoque de razón de cambio. A continuación, se describen estos tipos de enseñanza:

El enfoque geométrico: Este es el método más tradicional, respaldado por una multitud de recursos didácticos, que comienza con la noción de una recta secante que atraviesa dos puntos de una curva. Al acercar progresivamente estos dos puntos, los estudiantes pueden observar cómo esta recta se transforma en una recta tangente. El objetivo radica en determinar la pendiente de la recta tangente a través del cálculo de la pendiente de la recta secante a medida que los puntos se aproximan. Este enfoque geométrico establece un anclaje visual sumamente poderoso, donde el interés se centra en la pendiente de la recta tangente. Sin embargo, este ejercicio puede parecer abstracto, carente de una aplicación práctica evidente.

El enfoque de la razón de cambio: Comienza con el estudio de la razón de cambio teóricamente a través de la velocidad promedio que se aproxima a una velocidad instantánea. A diferencia del geométrico el método consiste en calcular velocidades promedio en intervalos cada vez más pequeños. Si no se acompaña de un pensamiento visual-grafico puede parecer abstracto y puede dar la impresión de que solo aplica a problemas de movimiento o que involucra el tiempo.

La mejor manera de enseñar no consiste en elegir un enfoque radical de estos sino en ¿cómo entrelazar ambos de manera significativa? entre el enfoque geométrico y el de razón de cambio. Este será el mayor de los retos de esta investigación.

2.5.1 Enseñanza y aprendizaje de la derivada en relación con el docente

Con el propósito de analizar el pensamiento y las estrategias variacionales de seis profesores que impartieron alguna vez Cálculo, Caballero (2012) desde una caracterización del Pensamiento y Lenguaje Variacional plantea la comparación, predicción, seriación y estimación como estrategias variacionales. En el análisis de las actividades, encuentra que un grupo de profesores emplea en mayor medida las estrategias de comparación y predicción en sus análisis tabulares y gráficos. En cambio, otro grupo, no recurren al pensamiento variacional sino a la comparación de expresiones algebraicas. Caballero (2012) hace hincapié en que el actual discurso escolar no propicia el desarrollo de ideas variacionales, por eso, ha de formarse en el estudio de la variación.

Por otra parte, Sánchez–Matamoros et al. (2012) citando a Jacobs et al. (2010) considera tres destrezas interconectadas del docente para interpretar el pensamiento matemático de sus estudiantes:

- Identificar las estrategias usadas por los estudiantes
- Interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes
- Decidir cómo responder teniendo en cuenta la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes (p. 98)

Los investigadores, consideran a estas destrezas como la competencia “mirar con sentido”. Con el objetivo de caracterizar el grado de desarrollo de esta competencia, presentan a 30 estudiantes del máster (postgrado) de profesorado de educación secundaria de distintas licenciaturas tres problemas de la derivada de una función en un punto resueltos por un estudiante de bachillerato, donde los profesores en formación debían describir cómo el estudiante comprende el concepto de derivada de una función en un punto y qué haría para mejorar esta comprensión a partir del procedimiento del estudiante. Como era de esperarse, no todos los profesores en formación fueron capaces de mencionar explícitamente los "elementos matemáticos de la función derivada en un punto en los distintos modos de representación y las relaciones entre ellos que eran necesarios para describir las respuestas dadas por los estudiantes" (Sánchez-Matamoros et al., 2012, p. 503), menos de caracterizar la comprensión de los estudiantes, pues, solamente 9 de los 30 educadores en formación lograron dar cuenta de esta destreza de interpretación.

En efecto, el trabajo de Caballero (2012) pone de manifiesto que el docente ha de formarse en la didáctica del Cálculo, asimismo, deben adquirir competencias para reconocer, comprender los procesos matemáticos de sus estudiantes y poner en acción estrategias didácticas eficaces para mejorar la comprensión de sus alumnos (Sánchez-Matamoros et al., 2012).

2.5.2 Enseñanza y aprendizaje de la derivada en relación con el estudiante

Las investigaciones de Fiallo y Parada (2018) y Vrancken y Engler (2014) favorecieron la construcción del concepto de derivada con actividades muy distintas. Por un lado, Vrancken y Engler (2014) en la línea del Pensamiento y Lenguaje Variacional diseñaron una secuencia de actividades con el objetivo de indagar las nociones de derivada de los estudiantes de un curso de Matemática de la carrera de agronomía.

Un gran aporte, se encuentra en la actividad 3, esta consistió en considerar una función de posición–tiempo de la caída libre del lanzamiento de una piedra. Los estudiantes debían hallar la velocidad media de ciertos intervalos. Luego, se les propuso hallar la velocidad instantánea. Ante la imposibilidad de usar la fórmula de la velocidad media, realizan aproximaciones de razones de cambio medias en intervalos cada vez más pequeños. En la segunda fase, se propuso un acercamiento gráfico mediante el cálculo de pendientes de rectas secantes, "importante para una concepción dinámica de la tangente y la formación de la noción de dirección de una curva” (p. 461). Y en la última actividad, se consideran intervalos *infinitamente pequeños* y se introduce la tendencia hacia un número con el símbolo (→), donde analizaron acercamientos por izquierda y derecha de las velocidades medias alrededor de un punto dado. Vrancken y Engler (2014) afirman que esto favoreció que la mitad de los estudiantes conjeturarán sobre la relación de la velocidad instantánea con la velocidad media y “reconozcan la necesidad de realizar el paso al límite para determinar la razón de cambio instantánea” (p. 465).

Por otro lado, Fiallo y Parada (2018) diseñaron un curso–laboratorio de precálculo, donde presentan una secuencia didáctica de 14 talleres con las respectivas sugerencias didácticas para el docente, que apuntan al desarrollo de las habilidades del pensamiento variacional asociadas a los procesos matemáticos (comunicación, representación, razonamiento, procedimiento) de los estudiantes. Cada actividad se desarrolla con el uso del software GeoGebra, esto, para apreciar el movimiento y la variación de los fenómenos que son la esencia del cálculo. Además, comparten algunas reflexiones sobre la evolución histórica y epistemológica de los objetos matemáticos del cálculo diferencial. Cabe señalar que el libro de Fiallo y Parada (2018) está apoyado también de otros trabajos previos, como López y Fiallo (2015) y Barajas, Parada y Molina (2018).

Serna (2023) también propone actividades en GeoGebra, y describe los beneficios de diseñar e implementarlas en la plataforma virtual Moodle para el aprendizaje del concepto de la derivada en estudiantes de primer semestre que cursan ingeniería mecánica. Se apoya de cuatro perspectivas: La histórica, el pensamiento variacional, la modelación matemática y el apoyo de tecnologías digitales. En cuanto la histórica, describe la derivada como pendiente de la recta tangente, límite y razón de cambio. En la modelación tiene en cuenta los enunciados verbales, la construcción de representaciones y análisis de datos. Sin embargo, en el diseño de cada actividad en Moodle fueron netamente ejercicios matemáticos tomados del libro de cálculo de una variable de Zill & Wright (2011), que era el libro guía del curso. Por otra parte, dejó el eje central del currículo de último, pues, el planteamiento de situaciones problemáticas la abordó en la sección de razones de cambio y la de optimización.

Encontramos más trabajos, por ejemplo, Fuentealba et al. (2023) y Cantoral (2013) caracterizaron los métodos que usan los estudiantes cuando resuelven tareas de hallar las derivadas sucesivas a partir de una gráfica, además, proponen la visualización como un medio para favorecer los procesos de abstracción. Con respecto a las nociones de cambio y variación, Cantoral afirma que:

> La construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento, pues requiere la integración de distintos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos, visuales, gráficos y geométricos, así como una adecuada comprensión de procesos matemáticos específicos, como: número, variable, constante, parámetro, función, límite, continuidad, derivada, integral, convergencia, representación e infinito para tener una adecuada construcción de las nociones de cambio y la variación. (Cantoral, 2013, p. 45)

En fin, todos los aportes de los trabajos descritos en los antecedentes serán pieza importante en la construcción articulada de un diseño didáctico con un enfoque integrador histórico–epistemológico del concepto de la noción derivada analizada desde el cambio y la variación con el propósito de favorecer competencias matemáticas en estudiantes de décimo y undécimo grado.

Capítulo 3: Aspectos teóricos y conceptuales

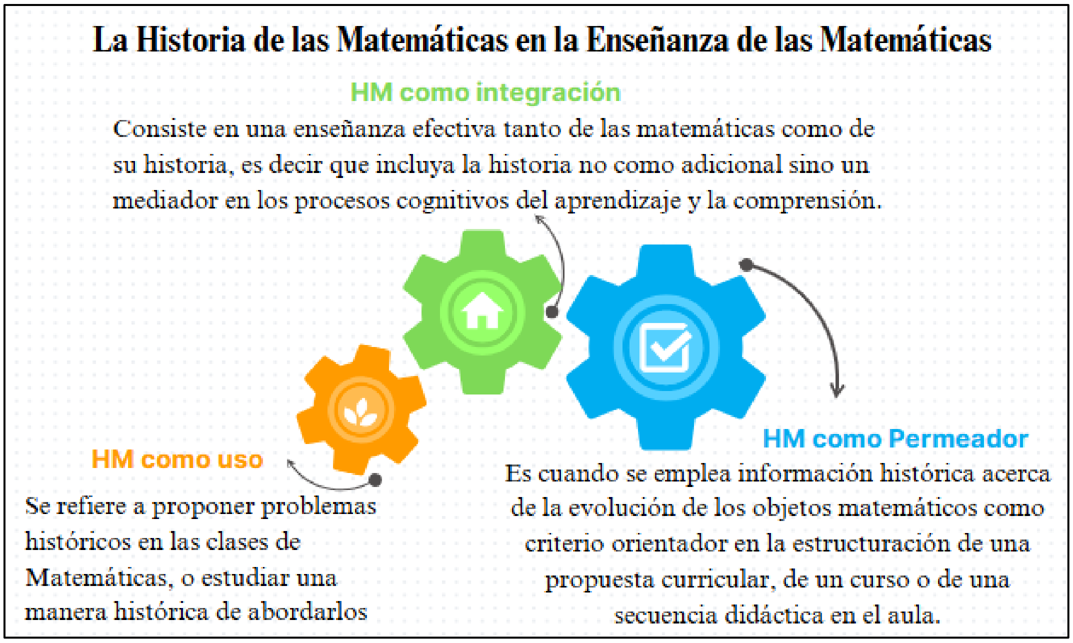
En este apartado se definen los fundamentos teóricos y conceptuales que justifican: la relación estrecha entre la Historia de las Matemáticas y la Enseñanza de las Matemáticas, la unidad del término histórico-epistemológico, las circunstancias que confluyeron en el surgimiento, desarrollo y evolución del concepto de derivada, los fundamentos conceptuales y epistemológicos de la derivada, el marco curricular de las competencias del pensamiento variacional y la definición de ser ciudadano matemáticamente competente.

3.1 Historia de las matemáticas en la enseñanza de las matemáticas

Los aportes de Guacaneme (2016), Gutiérrez (2019), Maza (1994), y Rey (2022) proponen un análisis de los elementos que relacionan la Historia de la Matemáticas en la Enseñanza de las Matemáticas (HM–EM). Por un lado, Guacaneme (2016) identifica tres formas interrelacionadas en que HM–EM interviene: como uso, como integración y como permeador (ver **Figura *3***).

Figura 3

La Historia de las Matemáticas en la Enseñanza de las Matemáticas

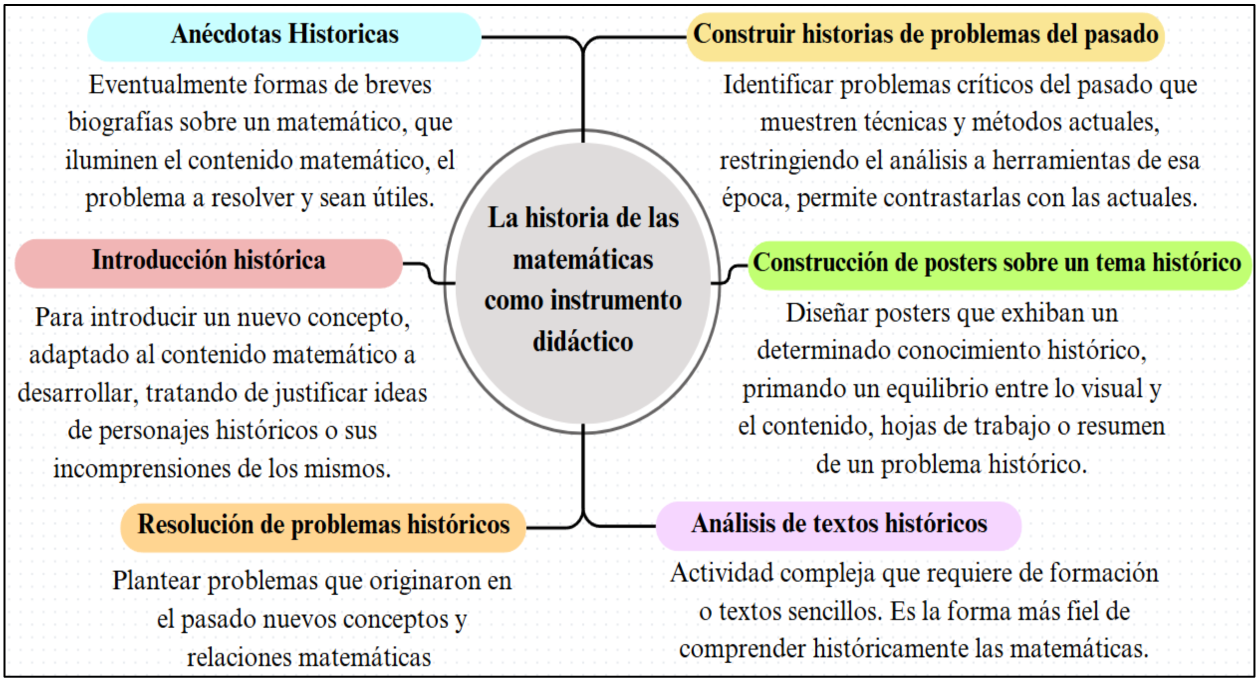


Nota. Elaboración con base en la relación HM–EM según Guacaneme (2016)

Por otra parte, Maza (1994) describe seis formas de enfocar la historia de la matemática como instrumento didáctico, las cuales se observan en la **Figura *4***.

Figura 4

Estrategias de enseñanza y aprendizaje usando la historia de las matemáticas



Nota. Elaboración con base en las ideas de Maza (1994).

Con base en las formas de enseñar propuestas por Guacaneme (2016) y las estrategias didácticas de Maza (1994) se sustentan el uso de la historia de las matemáticas en los diseños didácticos de Gutiérrez (2019) y Rey (2022). A modo de ejemplo, se presentan los elementos de la estructura metodológica del diseño de Gutiérrez (2019) a la luz de los aportes de Maza y Guacaneme (ver **Tabla 2**).

Tabla 2

Elementos de la secuencia didáctica de Gutiérrez (2019)

Elementos	HM– EM	Estrategia	Justificación
Indicadores de logro	Integración	Análisis histórico y epistemológico	Los indicadores se conforman de relacionar las competencias con el desarrollo alcanzado por el humano en la historia de las matemáticas.
Preguntas orientadoras	Uso	Introducción Histórica	Se introduce históricamente un concepto y se indaga sobre sus aspectos históricos, los hechos o los personajes en cuestión.
¿Qué sabemos de?	Uso	Ejercicio de saberes previos	Se elijen situaciones desde la historia para valorar el aprendizaje e identificar los presaberes del estudiante y retroalimentar.

Recurriendo a la historia	Integración	Resolución de problemas históricos	Conceptualización y análisis histórico del objeto matemático desde una perspectiva histórica y epistemológica.
Haciendo contexto	Uso	Recrear problemas históricos en el presente.	Recrea hechos y plantea problemas históricos vinculados con la realidad, la vida cotidiana o las matemáticas.
Desarrollo Conceptual	Permeador	Conceptualizar	La aproximación histórica y epistemológica permite comprender el objeto de estudio y orienta la construcción del concepto.
Matematicomanía	Permeador	Resolución de problemas históricos	Aplicaciones que surgen de la historia para confrontar el contenido desarrollado a partir de problemas críticos.
¿Qué aprendimos?	Integración	Situaciones problemáticas del contexto actual	Evaluación del aprendizaje mediante un análisis integral de los diferentes saberes, situaciones históricas o de contexto mediante la resolución de problemas.
Para profundizar	Integración	Páginas web, textos, videos, etc.	Documentos y referencias bibliográficos relacionados, con el objeto de que puedan complementar, ampliar y precisar.

Nota. La tabla valida cada elemento de la secuencia didáctica de Gutiérrez (2020) según Guacaneme (2016) y Maza (1994).

De la misma manera que se sustentan los elementos de Gutiérrez (2019), se fundamentará la estructura curricular de la secuencia didáctica con la finalidad de favorecer el desarrollo de competencias del pensamiento variacional mediante una aproximación histórica–epistemológica de la derivada.

3.2 Análisis histórico–epistemológico del concepto de derivada

Como se ha señalado en la literatura, Guacaneme (2016) y Maza (1994) destacan la importancia de que el docente utilice el potencial de la historia de las matemáticas como instrumento didáctico para la construcción del conocimiento matemático. En sintonía, se presenta un análisis histórico–epistemológico acerca de la enseñanza y aprendizaje de la derivada desde el cambio y la variación, pues “resulta importante reconocer las nociones que a lo largo de la historia se han mostrado resistentes a su evolución y generalización y que se constituyen por lo tanto en obstáculos para el aprendizaje” (Vrancken y Engler, 2013, p. 55).

Este análisis histórico–epistemológico permitirá identificar las circunstancias más relevantes que confluyeron para llegar a la *noción* de derivada que se tiene actualmente, explorando cómo las ideas de cambio y variación han sido abordadas desde la antigüedad hasta la actualidad, en cada periodo histórico. Sin embargo, Nieves (2011) advierte “que el desarrollo histórico del Cálculo no se dio de forma lineal dentro de una elite erudita” (p. 17), tampoco surgió de manera espontánea, sino de un proceso complejo, como se evidencia en los trabajos de Vega (2019) y Vrancken y Engler (2014).

3.2.1 El mundo antiguo. La abnegación de los procesos infinitos, el predominio geométrico y la ausencia de notación.

Desde la antigua Grecia, el concepto del infinito fue muy controvertido. Un claro ejemplo, es la paradoja de "Aquiles y la Tortuga" de Zenón de Elea (~ s.V a. C), aludiendo a una crítica hacia el infinito, ¿cómo puede alguien más veloz alcanzar a otro en un espacio infinitamente divisible que los separa? En cambio, otro filosofó influyente fue la concepción de Anaxágoras (~ s.V a. C), quien sostiene que cada partícula, sin importar su tamaño, contiene a su vez infinitas partículas. Estas concepciones influyeron tanto en el rechazó del infinito en acto como la aceptación del infinito potencial por muchos siglos, dificultando el desarrollo de los conceptos precursores del cálculo diferencial. Aunado a esto, el apego de las civilizaciones a la geometría euclidiana, que durante siglos fue la principal herramienta para estudiar las curvas, limitó la comprensión de tangente a una curva, pues, la concepción de Euclides consideró que una recta tangente a un círculo es aquella que pasa por un punto y prolongada no la corta, hecho, que limitó su interpretación a ideas geométricas y no ideas de cambio y variación. Como diría Fiallo y Parada

(2018): "allí se percibe ya la ruta divergente de la geometría con respecto a la aritmética en cuanto a las bases de las matemáticas" (p. 21).

Más tarde, Diofanto aporta sus ideas de sucesión con los números poligonales, las progresiones geométricas y sus ecuaciones de soluciones enteras descritas en su mayoría en enunciados literales de problemas empíricos u geométricos, ausentes de un lenguaje simbólico. Es claro, que la ausencia de una notación y lenguaje adecuado dificultó generar múltiples representaciones de los objetos matemáticos.

Se identificaron obstáculos epistemológicos significativos en la antigüedad, como el rechazo de lo infinitamente pequeño, la dicotomía entre la geometría y la aritmética, la prevalencia de la geometría euclidiana y la ausencia de notación. Estas son barreras que dificultaron la adquisición de nuevos conocimientos y el cambio de ideas preconcebidas. Es importante aclarar, que no son necesariamente negativas, pueden ser una oportunidad para reflexionar sobre nuestras creencias y poner a prueba nuestros conocimientos matemáticos.

3.2.2 La edad media. Nociones de variable y dependencia, representación cinemática y geométrica, y notaciones simbólicas.

En esta época medieval, la influencia de la iglesia y la monarquía, junto con el poder ideológico y cultural conllevó a condenar todo aquello que estuviese en contra de sus principios dogmáticos. Consecuentemente, muchos avances científicos fueron destruidos, y las matemáticas no fueron la excepción. Cabe destacar, que los árabes y los hindúes salvaguardaron algunos aportes matemáticos como el sistema numérico decimal, las funciones trigonométricas y el álgebra retórica.

En esta época, pasaron de plantear situaciones aritméticas a resolver ecuaciones de primer, segundo y tercer orden. Sin embargo, el enfoque excesivo de la geometría limitó su compresión a demostraciones geométricas de ecuaciones de dimensionalidad homogénea, para encontrar las soluciones de incógnitas positivas. Al respecto, Vrancken y Engler (2013) advierten que esta mirada geométrica para la solución de ecuaciones "fue la razón de que, por mucho tiempo, los matemáticos se expresaran en términos de incógnitas y no de variables" (p. 57).

Mas tarde, los inicios de la imprenta y la traducción de textos restituyeron muchos trabajos, al mismo tiempo, las universidades de Oxford y París empezaron a analizar fenómenos sujetos al cambio, como el calor, la luz, la densidad, la velocidad, entre otros. Esto se evidencia en los estudios cinemáticos (velocidad–tiempo) de Oresme (1323–382) quién propuso una aproximación geométrica para hacer más sencillo comprender la naturaleza de los cambios, pasando de indagar en porqué suceden los cambios, a cómo cambian las variables. Cantoral (2013) explica que "la expresión cambio se entiende como una modificación de estado, en tanto que el vocablo variación la entendemos como cuantificación de dicho cambio" (p. 45). Precisamente estas son nociones del concepto de función y el comienzo del Cálculo.

3.2.3 La edad moderna. Puente del álgebra simbólica y geométrica, la noción función, de infinitesimal y de recta tangente

En los comienzos del Renacimiento, se dieron profundos cambios y trasformaciones en todas las esferas del conocimiento, incluyendo matemáticas. Dentro de estas, Boyé (2007) expone la transición del álgebra retórica al álgebra simbólica, donde Viète (1540–1603), Galileo (1564–1642), Descartes (1596–1650) y Fermat (1601 – 1665) fueron pieza fundamental. Por un lado, Viète introduce notaciones de letras para representar valores desconocidos y variables, Boyé (2007) explica que lo que nosotros escribimos como $2x^2 - 5x = 23$, Viète lo escribiría así:

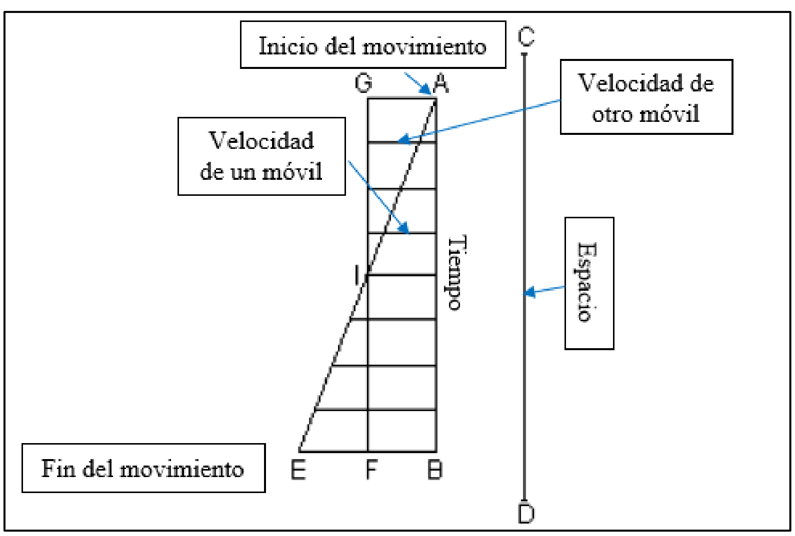
$2Aq - 5A\ aeq\ 23$, donde A designa la incógnita, al lado de la A la q designa el cuadrado, Aequatur (aeq) significa "igual" y los signos (+) y (–) designa suma y resta.

En efecto, Viète es pionero del álgebra moderna, sin embargo, la mayor debilidad de su álgebra fue su concepción geométrica, también conocida como las operaciones entre mismas especies o homogeneidad dimensional, donde A (es decir x) es la longitud A, Aq (es decir x^2) es un cuadrado de lado A, Ac (x^3) designa el cubo. De esta manera, su regla de homogeneidad solo reconoce operaciones entre incógnitas de la misma dimensión con soluciones positivas, limitando sus generalidades.

Al mismo tiempo, Galileo (1564–1642) con sus estudios de caída libre establece una relación de dependencia de la aceleración, velocidad y distancia recorrida con el tiempo, a partir de sus gráficos aludiendo al movimiento uniforme, incluso, llegó a interpretar el área bajo la curva de la velocidad como la distancia recorrida.

Figura 5

Gráfica del Teorema de Galileo de un cuerpo con movimiento uniforme



Nota. AB representa el tiempo y los segmentos perpendiculares a AB velocidades. Adaptado de "Gráfica de Galileo" (p.61), por S. Vrancken y A. Engler, 2013, *UNIÓN – Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 9*(33).

Con respecto a la **Figura *5***, Vrancken y Engler (2013) explican que el triángulo ABE describe el movimiento uniformemente acelerado y el rectángulo ABFK un movimiento uniforme de velocidad contante de otro móvil, de esta manera, Galileo concluyó que los dos móviles recorren espacios iguales. Noten que el estudio del cambio favoreció el desarrollo de las nociones de variable y dependencia, como afirma Fiallo y Parada (2018):

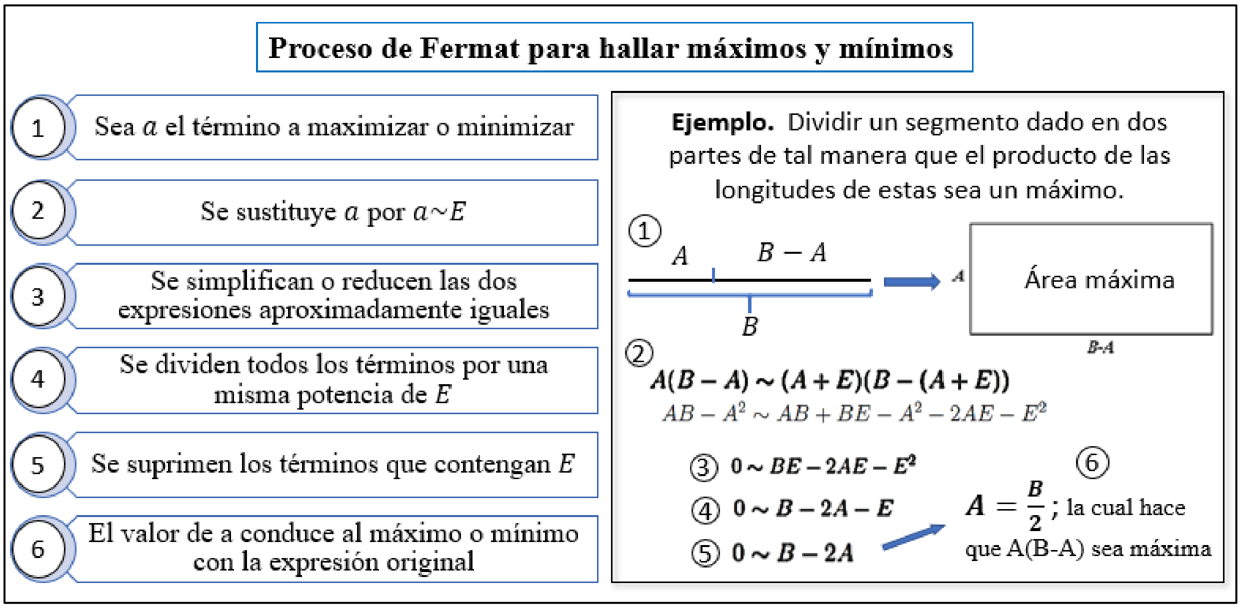
> El cambio como núcleo conceptual del cálculo surge de la resolución de problemas en los que se requiere identificar y usar variables, no como letras que representan números o valores desconocidos en una ecuación, sino como cantidades mensurables que cambian cuando las situaciones en que ocurren cambian. (p. 31)

Poco después, Rene Descartes (1596–1650) en su obra *géométrie* donde traduce curvas geométricas en ecuaciones, rompe con la necesidad de homogeneidad de Viète y vincula las ecuaciones con relaciones de interdependencia, construyendo diferentes representaciones de un mismo objeto matemático. Descartes en sus intentos consideró un plano coordenado de dos dimensiones y comprendió que "una ecuación es una manera de expresar una dependencia entre dos cantidades variables, de modo que a partir de ella es posible calcular los valores de una variable correspondientes a determinados valores de la otra" (p. 61).

A su vez, Fermat (1601 – 1665) da un gran avance al considerar las ecuaciones como lugares geométricos y es pionero de las ideas de los infinitesimales, pues, consideró una cantidad muy pequeña E, para determinar máximos y mínimos de problemas matemáticos, como se explica en la **Figura *6***.

Figura 6

Proceso de Fermat para hallar máximos y mínimos

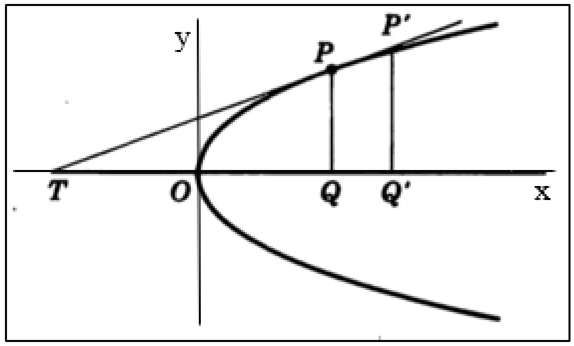


Nota. Elaboración propia basada en [la descripción del proceso expuesto por Fermat] (p.25–27) por S. Vega, 2019, Universidad del Valle.

De lo anterior, procede uno de los Teoremas que lleva su nombre, donde establece que la recta tangente es horizontal en los máximos o mínimos. Pero, va más allá, como se evidencia en Boyer (1968/1986), Vega (2019), Vrancken y Engler (2013) acerca cómo Fermat consideró la recta tangente a una curva. Sea $y = f(x)$ una curva algebraica, $P(a, b)$ un punto de este y P' un punto muy próximo a P con coordenadas $x = a + E, y = f(a + E)$

Figura 7

Gráfica de Fermat para el problema de la tangente a una curva



Nota. Adaptado de [Gráfica de Fermat para el problema de la tangente] (p.441), por C. Boyer, 1968/1986, Alianza Editorial.

De acuerdo con la **Figura** *7*, se puede notar que los triángulos TPQ y TP'Q' son semejantes, así $\frac{TQ\prime}{TQ} = \frac{P\prime Q\prime}{PQ}$ que es equivalente a $\frac{f(a)}{TQ} = \frac{f(a+E)}{TQ+E}$, siguiendo el mismo proceso de Fermat para hallar máximos y mínimos se tiene la tangente en el punto P, qué es precisamente la pendiente de la curva en ese punto $x = a$. Este método de Fermat, son los primeros acercamientos a los infinitesimales, cabe señalar que el taller 12 "Área máxima" y taller 13 "caja sin tapa" diseñado e implementado por Fiallo y Parada (2018) es muestra de cómo favorecer el proceso de razonamiento con el método de Fermat para hallar el área máxima del rectángulo con perímetro fijo y el volumen máximo de la caja.

Finalmente, Vega (2019) explica que James Gregory (1638–1675) introdujo una primera definición de función, "como una cantidad que se obtiene a partir de otras cantidades a través de operaciones algebraicas o mediante variadas operaciones" (p. 50). La **Tabla 3** sintetiza algunos de los aportes históricos.

Tabla 3

Análisis Histórico–epistemológico de la derivada en los siglos XVI y XVII

La edad Moderna [Siglos]	**Personaje /Suceso**	**Aporte**	**Avance y limitaciones**
XVI	Viète (1540 – 1603)	Notación simbólica	En la edad moderna se produjo la transición del álgebra retórica al álgebra simbólica, gracias a los trabajos de Viète. Este cambio permitió a los matemáticos considerar variables en vez de incógnitas. A pesar de los avances, persistió la concepción geométrica, que implicó evadir las cantidades negativas. Además, Galileo construyó gráficas para representar la relación de dependencia entre magnitudes cinemáticas, así, contribuyó con la idea de función. En apoyo de los conocimientos anteriores, Descartes logró representar curvas con ecuaciones mediante el sistema coordenado. También, rompió con la tradición griega al abandonar la homogeneidad dimensional y estableció una relación de dependencia entre las variables, considerando lugares geométricos. Fermat, por su parte, consideró cantidades muy pequeñas para determinar máximos y mínimos de curvas. Este enfoque implicó nuevas concepciones del infinito y de la recta tangente, sentando las bases para el desarrollo del cálculo diferencial.
XVI–XVII	Galileo (1564 – 1642)	Análisis de la caída libre y relación entre aceleración, velocidad y distancia	
XVII	Descartes (1596 – 1650)	La geometría analítica y el plano cartesiano para representar curvas de ecuaciones.	
	Fermat (1601 – 1665)	Método para hallar máximos y mínimos	
	Gregory (1638 – 1675)	Introduce una definición de función	
Noción de derivada	Las nociones de recta tangente, de función y de infinitesimal		

Nota. Esta tabla sintetiza algunos de los aportes que dan partida a las nociones de los infinitesimales que permiten un acercamiento a la derivada en la edad moderna.

3.2.4 Finales de la edad moderna. Newton y Leibniz los fundadores del cálculo diferencial

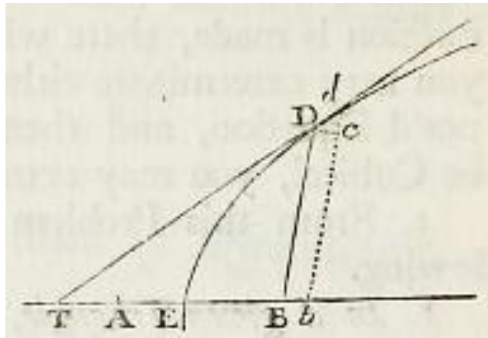
A finales de la edad moderna, se estableció la noción más aproximada del concepto de la derivada, como resultado de la culminación de muchos procesos de razonamiento llevados a cabo a lo largo de la historia, que consistió en la acumulación de elementos claves del cálculo diferencial e integral (Vrancken y Engler, 2013). Ya vimos que los aportes de Descartes y Fermat fueron las bases para establecer el concepto de función como una relación de interdependencia, a su vez, Fermat fue el pionero del análisis infinitesimal al definir un método para hallar máximos y mínimos con la idea de "cantidades muy pequeñas". Todos estos procesos de razonamientos llegan a manos de Newton (1643–1727) y Leibniz (1646 – 1716), quienes son los principales fundadores del cálculo infinitesimal.

Por un lado, Newton comprende la derivada como una razón de cambio instantánea, visión cinemática que le llevo a definir las “fluentes” como cantidades que varían continuamente respecto al tiempo, es decir funciones parametrizadas: y(t) y x(t). También, definió las “fluxiones”, como la rapidez de cambio de las fluentes con los símbolos $\dot{\boldsymbol{x}}$ y $\dot{\boldsymbol{y}}$, en la modernidad, son las derivadas de las funciones parametrizas con respecto al tiempo, es decir, $\dot{y} = \frac{d}{dt}\,\mathrm{y(t)}$ y $\dot{x} = \frac{d}{dt}\,\mathrm{x(t)}$. Finalmente, se basa en la idea de cantidades evanescentes (noción de infinitesimal), que representa una cantidad muy pequeña distinta de cero, con el símbolo “*o*”, que le permitió manipular de manera algebraica y geométrica las fluentes (es decir, funciones), considerando ciertos momentos que denota con los símbolos $\dot{x}o$, que son incrementos en la abscisa para determinar el cociente de las fluxiones (es decir, la derivada), que gráficamente es la pendiente de la recta tangente, que interpretó como razones de cambio instantáneo. De esto, Vrancken y Engler (2013) afirman que la concepción mecánica de Newton hacía que “las curvas no fueran consideradas como gráficas de la relación funcional, sino más bien como trayectorias de puntos en movimiento resultó otro obstáculo al desarrollo de la concepción de función” (p. 67).

Veamos el ejemplo de Newton (1736) de la recta tangente que explica en su libro *The method of fluxions and infinite series*, donde considera la recta vertical BD como la ordenada y la recta horizontal AB como la línea base (abscisas en la modernidad), donde estas son funciones dependientes del tiempo y ED la trayectoria del movimiento (ver **Figura 8**).

Figura 8

Diagrama usado por Newton para explicar su método de las tangentes.



Nota. Tomado de [Gráfica de Newton para el problema de la tangente] (p. 46), por S. Newton, 1736, London: Henry Woodfall.

Newton (1736) afirma que “Let this Ordinate move through an indefinitely final Space to the place *bd*, for that it may be increased by the Moment *cd*, while AB is increased by the Moment B*d*, to which D*c* is equal and parallel” [Dejemos que esta ordenada se mueva a través de un espacio indefinidamente final hasta el lugar *bd*, para lo cual puede ser aumentada por el momento *cd*, mientras que AB se incrementa por el momento B*d*, al que D*c* es igual y paralelo] (p. 46). Cabe señalar que Vega (2019) explica que los "momentos" son *incrementos infinitesimales*. Seguidamente, Newton (1736) afirma que “the Ration of the Fluxion of AB to the Fluxion of BD, and TD Will touch the Curve in the Point D” [la razón de la fluxión AB con la fluxión de BD, y TD tocará la curva en el punto D] (p. 46).

Se da claridad que tanto Newton como Leibniz van más allá, incluso encuentran la relación inversa de las tangentes y las cuadraturas, sin embargo, para esta investigación solo se presentan algunos ejemplos, como el anterior. De hecho, en Vega (2019) muestran cómo calcular la fluxión de $y = x^n$, considerando el método de Newton, que es muy similar al de Fermat, pero con un mejor sustento conceptual.

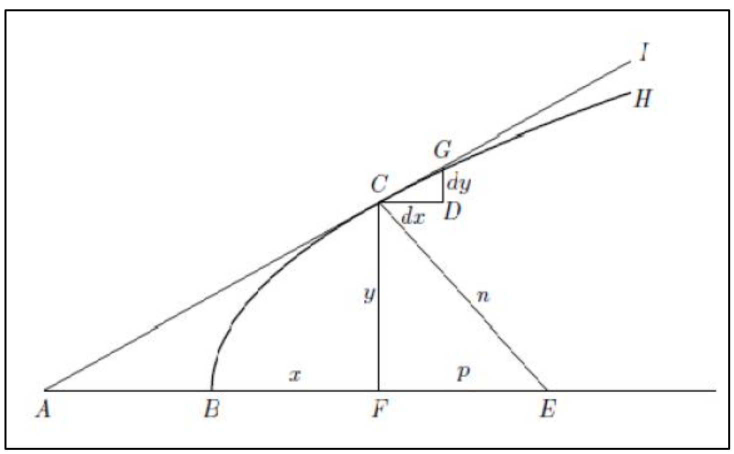
Al mismo tiempo, Leibniz (1646 – 1716) desarrolla su cálculo diferencial e integral, que se destacó por su notación, que es el lenguaje simbólico que actualmente usamos. Leibniz denotó

$\frac{dy}{dx}$, para referirse al cociente de diferencias infinitesimales. Además, denotaba con $\int dx$, para referirse a la suma infinita de rectángulos cuya abscisa tiende a cero. De esta manera "Leibniz dedujo que el Cálculo de cuadraturas y de tangentes también eran operaciones inversas una de otra" (Vega, 2019, p. 42).

Leibniz incorporó el triángulo característico, es decir, de lados infinitesimales. Vega (2019) proporciona el siguiente ejemplo: considere la curva BCH, la tangente AI en C de coordenada (x, y), al trazar segmentos paralelos a los ejes, se forma el triángulo característico CDG, donde sus lados son infinitesimales, Vega (2019) explica que Leibniz consideró $CD = dx$, y $DG = dy$ cantidades infinitamente pequeñas, y su cociente determinan la tangente a la curva (ver **Figura *9***).

Figura 9

La obtención de la tangente con el triángulo característico de Leibniz



Nota. Tomado de [Triángulo característico de Leibniz] (p. 43), por S. Vega, 2019, Universidad del Valle.

Además, Según Ávila et al. (2023), Leibniz tiene dos principios:

1. Toda curva puede considerarse como un polígono que tiene una infinidad de lados. Cada lado es un segmento infinitesimal.

2. Si A es una cantidad finita y $\boldsymbol{a}$ es un infinitesimal (cuando se le compara con A) entonces, $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{a}$ puede sustituirse por A en los cálculos. (p. 1229)

En resumen, los trabajos de Newton y Leibniz representan las aproximaciones más cercanas al concepto de derivada. En donde la "cantidad indefinidamente pequeña" se aproxima al concepto de límite. Y la fluxión de Newton y el cociente diferencial de Leibniz que resulta de considerar infinitesimales son las nociones más próximas del concepto moderno de derivada. Sin embargo, la comunidad matemática de la época difícilmente acepto el trabajo de Newton y Leibniz, pues, "al no poseer en esos tiempos un concepto claro de límite y función, los fundamentos del Cálculo infinitesimal presentaban falta de rigor" (Nieves, 2011, p. 13). Todo lo anterior se condensa en la **Tabla 4**.

Tabla 4

Análisis histórico–epistemológico de la derivada en el siglo XVII

<table>
<tr><th>La edad Moderna [Siglos]</th><th>Matemático</th><th>Aporte</th><th>Avance y limitaciones</th></tr>
<tr><td rowspan="2">XVII–XVIII</td><td>Isaac Newton (1643–1727) Físico y teólogo</td><td>Sus libros acerca de los fluentes y las fluxiones en el estudio de la cinemática</td><td rowspan="2">A finales de la Edad Moderna, Newton y Leibniz, desarrollaron de manera independiente el cálculo diferencial. Por un lado, Newton, concibe la curva como puntos en movimiento en el sistema ordenado en vez de una relación funcional. Cabe destacar que su método de las fluxiones determinaba la derivada a partir de considerar incrementos "evanescentes", que a veces eran cero y otras veces no. En cambio, Leibniz proporciona un lenguaje más sencillo, donde considera diferencias infinitesimales, que correspondían a los lados del triángulo característico, lo que le permitió definir la derivada como el cociente diferencial (dy/dx). Ambos, logran establecer la relación inversa entre las cuadraturas y las tangentes, transitando de los "indivisibles" a "infinitamente pequeño", donde consideraron rectángulos con anchura infinitesimal. También, interpretaron la derivada como una razón de cambio instantánea y como la pendiente de la recta tangente a la curva. Sus ideas, aunque con falta de rigor matemático moderno,</td></tr>
<tr><td>Gottfried Leibniz (1646–1716) Filósofo y matemático</td><td>La notación actual, el triángulo característico y dos principios del Cálculo infinitesimal</td></tr>
</table>

	fueron fundamentales para el desarrollo del cálculo y tuvieron un impacto profundo en la ciencia.
Noción de derivada	La tangente a una curva como resultado del cociente de diferencias u incrementos infinitesimales

Nota. Esta tabla sintetiza algunos de los métodos infinitesimales que permiten un acercamiento a la derivada en la edad moderna.

3.2.5 Edad contemporánea. La consolidación del sistema simbólico, consecuentemente los conceptos claves del cálculo.

El "Cálculo infinitesimal fue tan grande que durante casi todo el siglo XVIII los matemáticos se dedicaron a explorar sus aplicaciones obteniendo resultados importantes en el cálculo variacional, la astronomía, la hidrodinámica y otros campos de la mecánica" (Vrancken y Engler, 2013, p. 67). Sin embargo, recibió fuertes críticas los infinitésimos porque infringía el principio de igualdad, cómo es posible que $f(x) = f(x + ox)$ y la propiedad arquimediana, dado que el infinitésimo es menor que cualquier número mayor que cero, $0 < dx < \varepsilon$, sin embargo, unas veces se podían dividir y en otras se despreciaban.

En los siglos XVIII y XIX se consolida el sistema de representación simbólica, con los trabajos de Leonard Euler (1707–1783) con su libro de *Álgebra*. Seguidamente, Lagrange (1736–1813) denota la derivada como $f'(x)$ y plantea un el método muy reconocido como "multiplicadores de Lagrange" para hallar máximos y mínimos de funciones multivariables. A la par, Laplace (1749–1827) propone métodos para resolver ecuaciones diferenciales de orden superior.

Al mismo tiempo, Cauchy (1789–1857) fue pionero de la teoría de límites y continuidad, más aún, "define la derivada de una función como el límite de cocientes de los incrementos de las variables" (Vega, 2019, p. 48) de*nota*ndo la derivada como Dxf. Y la continuidad la define así:

“la función f(x) permanecerá continua respecto de x entre los límites dados si, entre esos límites, un incremento ínfimamente pequeño de la variable produce siempre un incremento ínfimamente pequeño de la función” (Cauchy, 1994, citado en Vega, 2019, p.60). Mas tarde, Riemann (1826–1866) define técnicas para derivar. Dirichlet (1805–1859), entre muchos otros conceptualizan la noción de función como un proceso de cambio y variación, y trasladan la idea de infinitamente pequeño con infinitamente cercano. Al poco tiempo de Cauchy, Simón Lhuilier (1750–1840) ganó el premio de Lagrange, introduciendo la notación Lím.

Poco después, en la persistente búsqueda de dar rigurosidad al cálculo se definió la derivada en un punto como el límite de un cociente de incrementos infinitesimales:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \mathit{siempre\ que\ el\ límite\ exista}$$

Aunque los matemáticos usualmente la representan de manera un poco más estática:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(h)}{h}, \mathit{siempre\ que\ el\ límite\ exista}$$

Más tarde, los trabajos de Bolzano (1781–1848), seguido de Weierstrass (1815–1897), desligaron la intuición de las matemáticas, evadieron los aspectos geométricos, desligaron las ideas físicas y cambiaron el formato retorico para fundar el análisis matemático que construye los números reales, las funciones, la derivada desde el rigor matemático. Comúnmente reconocida por usar las notaciones de épsilon (ε) y delta (δ) que le dieron una demostración rigurosa y completa al cálculo. Así, por ejemplo, el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a a es L, se denota como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Desde el discurso analítico, es:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0): (|x - a| < \delta \;\Rightarrow |f(x) - L| < \; \varepsilon)$$

Frente a esto, Vega (2019) hace una fuerte crítica: “esta definición esconde completamente los procesos infinitos y desemboca en una noción fundamentada en el álgebra de inecuaciones” (p. 67). Asimismo, Fiallo y Parada (2018) afirman que “el traslado de ese cambio de marco epistémico a la enseñanza generó y sigue generando desequilibrios graves en los procesos de aprendizaje” (p. 25).

En la **Tabla 5**, se sintetizan algunos de los principales avances del concepto de la derivada en la edad contemporánea:

Tabla 5

Análisis histórico–epistemológico de la derivada en la edad contemporánea

<table>
<tr><th>[Siglos]</th><th>Matemático</th><th>Aporte</th><th>Avance y limitaciones</th></tr>
<tr><td rowspan="3">XVII–XVIII</td><td>Jean Bernoulli (1667 - 1748)</td><td rowspan="7">Definen formalmente conceptos del cálculo tales como: función, limite, continuidad y derivada</td><td rowspan="9">La edad contemporánea fue un periodo de grandes avances del cálculo, impulsados por grandes avances científicos y tecnológicos. Por un lado, Euler consolidó el sistema de representación simbólica, que dan lenguaje al cálculo, mientras que Lagrange introdujo f’(x) para la derivada y desarrolló un método para maximizar funciones con restricciones. Mas tarde, Cauchy y Dirichlet definieron formalmente los conceptos del cálculo como procesos de cambios y variación. Al mismo tiempo, Bolzano y Weierstrass desde el logicismo introduce las notaciones de épsilon (ε) y delta (δ) que le permitieron dar una demostración rigurosa y completa al cálculo. Sin bien el rigor matemático de estos autores generó desequilibrios en la educación al desprender la intuición, evadir la geometría y desligar las ideas físicas en favor de un enfoque formal y lógico, también permitió establecer resultados más sólidos. El desarrollo del cálculo no se detuvo allí, en el siglo XX, la teoría de funciones de variable compleja y el análisis funcional se basaron en la definición rigurosa de la derivada y ampliaron el avance del cálculo a nuevos problemas y aplicaciones.</td></tr>
<tr><td>Euler (1707 – 1783)</td></tr>
<tr><td>Lagrange (1736 –1813)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">XVIII–XIX</td><td>Laplace (1749–1827)</td></tr>
<tr><td>Lhuilier (1750 –1840)</td></tr>
<tr><td>Bolzano (1781 –1848)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">XIX</td><td>Cauchy (1789–1857)</td></tr>
<tr><td>Dirichlet (1805–1859)</td><td rowspan="2">Rigor del análisis matemático, con notación de épsilon y delta</td></tr>
<tr><td>Weierstrass (1815 –1897)</td></tr>
<tr><td>Concepto de derivada</td><td colspan="3">Se define la derivada como el límite de un cociente diferencial y como la pendiente de la recta tangente</td></tr>
</table>

3.3 Aspectos conceptuales de la derivada

En la actualidad se encuentran diferentes tipos de derivadas como: Derivada direccional, derivada total, derivada parcial, etc. Sin embargo, todos los tipos de derivadas se centran en describir el cambio instantáneo y la variación local de una función. De hecho, en el siglo XVII, Newton desarrolló la idea de *fluxiones* como tasas de cambio continuo entre cantidades variables, y Leibniz formuló la notación diferencial dy/dx para expresar la relación entre incrementos infinitesimales de dos variables (Leibniz llamó dx al cambio infinitesimal en x). Esta simbología y concepción del cálculo sentaron las bases para posteriores formalizaciones analíticas (Boyer, 1968/1986).

En el siglo XIX, Cauchy propuso una definición rigurosa al interpretar la derivada como el límite del cociente incremental:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

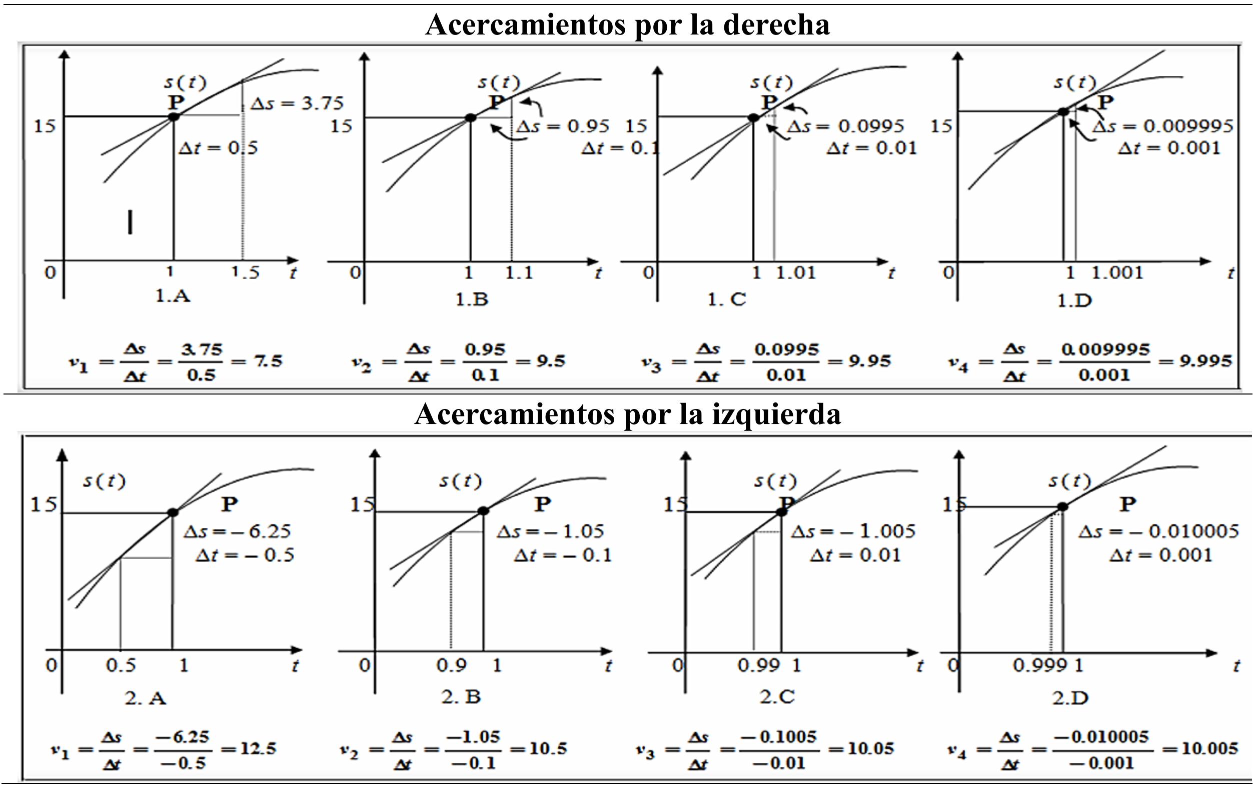
siempre que dicho límite exista. Esta definición marca el paso de las ideas infinitesimales heurísticas a una fundamentación analítica basada en el concepto de límite, el cual Cauchy adopta como piedra angular del análisis matemático (Boyer, 1968/1986).

Tomando como referencia a García y Dolores (2016) presentan el concepto de derivada desde diferentes registros (numérico, gráfico, algebraico y verbal) y define esta misma definición formal de la derivada, enfatizando que representa la tasa de cambio instantánea y coincide con la pendiente de la línea tangente a la curva $y = f(x)$.. Asimismo, Sánchez-Matamoros et al. (2008) explica que la noción de derivada conlleva diversos aspectos "su perspectiva gráfica, como pendiente de la tangente a la curva; su perspectiva analítica, como límite del cociente incremental; su carácter puntual o global y, según exija la resolución de una determinada tarea" (p. 269). En ambos enfoques, este límite fundamental estructura todo el desarrollo del cálculo diferencial.

3.3.1 La conexión entre lo gráfico y lo analítico en la construcción de la derivada

García y Dolores (2016) explican que a medida que los cambios de tiempo se hacen más pequeños, los cambios de distancias también se hacen más pequeños, de esta manera, las velocidades medias tienden a un valor en específico. Como se observa en la **Figura 10**.

Figura 10
Acercamientos por derecha y por izquierda de la derivada gráficamente



Nota. Adaptado de "aproximaciones por derecha" y "aproximaciones por izquierda" (p. 60), por García, 2011 citada en García y Dolores, 2016.

De lo anterior, como la sucesión de las velocidades medias tienden a 10 m/s tanto por izquierda como por derecha entonces la velocidad en $t = 1$ es exactamente 10m/s. Siguiendo este ejemplo, de una forma generalizada, García y Dolores (2016) explican que la velocidad media del cuerpo en cuestión entre el punto P y Q, está dada por $V_{media} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_i + \Delta t) - s(t_i)}{t_f - t_i}$, que es precisamente la pendiente de la recta secante $m_{secante} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ que pasa por los puntos los puntos P (x_1, y_1) y Q (x_2, y_2) que pertenecen a la curva $f(x)$, donde $s(t) = f(x)$. De esta manera afirman que "la velocidad media y la pendiente de la secante son nociones equivalentes" (García y Dolores, 2016, p. 61). Como el interés es la velocidad instantánea, esta corresponde a $V_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, que es análogo a $m_{tangente} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, que corresponde gráficamente a la pendiente de la recta tangente. Por tanto, "así como la velocidad media equivale a la pendiente de la secante, la velocidad instantánea equivale a la pendiente de la tangente en el punto P" (García y Dolores, 2016, p. 62).

Como colofón, explican que cuando $\Delta t \to 0$, es decir, si Δt es infinitamente pequeño, el triángulo PQR también es infinitesimal, y al hacer suficiente zoom en P, la curva seria prácticamente una recta. Este argumento de llevan a considerar que las curvas bien definidas están "formadas por segmentos de recta infinitamente pequeños" (García y Dolores, 2016, p. 61). De hecho, desde el análisis histórico-epistemológico estas fueron las mismas ideas de Leibniz donde Δt y Δs corresponde a los catetos infinitamente pequeños dt y ds.

García y Dolores, explican que para facilitar el manejo de las diferencias infinitamente pequeñas, es necesario establecer un acuerdo en cuanto a la notación: "si $\Delta t \to 0$ entonces Δt se denota dt; análogamente si $\Delta s \to 0$ entonces se escribirá como ds. De este modo ds y dt son diferencias infinitamente pequeñas de s y de t, respectivamente" (p. 62). Por lo tanto, la expresión $V_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$

Según García y Dolores (2016), la derivada no solo es el límite del cociente incremental en una formulación formal, sino que adquiere un significado profundo como variación y como la articulación entre distintos registros de representación (numérico, gráfico, algebraico y verbal). Desde su concepción, entender la derivada implica reconocer cómo una razón de cambio media se aproxima a una razón de cambio instantáneo, transitar entre representaciones de ese cambio y relacionar esos distintos registros con el límite formal.

3.4 Competencias del pensamiento variacional en relación con la derivada

Recordemos que “los estándares son unos referentes que permiten evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los y las estudiantes en el transcurrir de su vida escolar” (MEN, 2006, p. 12). La estructura de los Estándares Básicos de Competencia (EBC) de Matemáticas asocia las competencias con los cinco pensamientos matemáticos: Numérico, Espacial, Métrico, Aleatorio y Variacional. Además, cada estándar pone el énfasis en uno o dos de los procesos generales de la actividad matemática: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar; y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos (MEN 1998, MEN 2006).

El objetivo de analizar los Referentes Curriculares de Colombia es garantizar una enseñanza de calidad. Pues bien, los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencia (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (2016) permiten establecer las competencias asociadas al pensamiento variacional que deben desarrollar los estudiantes en la educación media, asimismo, conocer los criterios para evaluar si han alcanzado los aprendizajes esperados. Lo anterior, con la finalidad de plantear y diseñar una propuesta de aprendizaje coherente y flexible con situaciones y actividades enriquecedoras que favorezcan la formación integra de los estudiantes en el desarrollo de sus competencias matemáticas.

A continuación, se encuentra las definiciones de Competencias Matemáticas según el MEN (2006) de Colombia, la definición de habilidad cognitiva que adopta Parada (2018) y la definición del pensamiento variacional en común (ver **Tabla *6***).

Tabla 6

Definición de competencia, habilidad cognitiva y pensamiento variacional.

Definición de Competencias Matemáticas	Definición de Habilidad Cognitiva
"como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores" (MEN, 2006, p. 49).	"las habilidades cognitivas pueden considerarse como un conjunto de acciones secuenciales coherentes y coordinadas realizadas por un individuo, en la consecución de un objetivo de aprendizaje" (Parada, 2018, p. 13).
Definición del Pensamiento Variacional	
Parada (2018) en base del MEN (2006) define el Pensamiento Variacional como "el estudio de la variación y el cambio, en contextos matemáticos y no matemáticos; el cual implica adquirir habilidades para razonar, comunicar, representar y desarrollar algoritmos (usando o no tecnologías digitales) que permitan modelar y resolver situaciones que los impliquen" (p. 13)	

Nota. La tabla muestra la definición de competencias matemáticas, habilidad cognitiva y pensamiento variacional.

El *ser matemáticamente competente* se puede entender, de acuerdo con el MEN (2006) como quien es capaz de:

- Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas (…);
- Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista (…);
- Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración; y
- Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz (…). (MEN, 2006, p. 51)

De acuerdo con las anteriores definiciones, el desarrollo de las competencias matemáticas del pensamiento variacional son el conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes que adquiere el individuo desde el estudio del cambio y la variación, estimuladas por procesos de comunicación, razonamiento, procedimientos y representaciones, que le permiten facilitar su desempeño en la resolución de problemas. Por lo tanto, el ser matemáticamente competente consiste en la capacidad de coordinar conocimientos, habilidades y actitudes, que debidamente relacionadas, permiten un desempeño eficaz y eficiente en la resolución de problemas en diferentes contextos de la vida cotidiana, académica y profesional.

Por cierto, las competencias desde los planes escolares se distinguen en tres dimensiones: el Saber, el Hacer y Ser.

- La dimensión del Saber propone aprendizajes para la adquisición de conocimientos y hábitos intelectuales que contribuyen al desarrollo conceptual del estudiante.
- La dimensión del Hacer se promueven aprendizajes enfocados en desarrollar destrezas y técnicas matemáticas, que permiten desarrollar diferentes estrategias de solución.
- La dimensión del Ser busca influir en las actitudes, valores y hábitos morales de los estudiantes, promoviendo el desarrollo socioemocional.

Cabe señalar, que es esencial que las tres dimensiones se implementen de manera equilibrada y complementaria, solo así se puede asegurar una formación integral.

En cuanto a las dimensión cognitiva y procedimental, Fiallo y Parada (2018) en apoyo del grupo de Investigación en Educación Matemáticas (EDUMAT) caracterizan las habilidades básicas del pensamiento variacional necesarias para la comprensión del cálculo diferencial, asociados a cinco procesos matemáticos planteados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998). Como se muestra en la **Tabla 7**.

Tabla 7

Habilidades del pensamiento variacional para la comprensión del cálculo diferencial

Comunicación	**Interpretar enunciados**	**Explicar ideas**	**Justificar ideas**	**Argumentar ideas**	**Evaluar ideas**
Ejercitación y elaboración de procedimientos	Reconocer datos y relaciones entre variables	Plantear procedimientos	Ejecutar procedimientos	Comparar procedimientos	Validar procedimientos
Representación	Reconocer representaciones	Interpretar representaciones	Construir representaciones	Transformar representaciones	Coordinar representaciones
Razonamiento	Plantear una conjetura matemática	Explicar una afirmación matemática	Justificar una afirmación matemática	Argumentar matemáticamente	Validar con reglas matemáticas

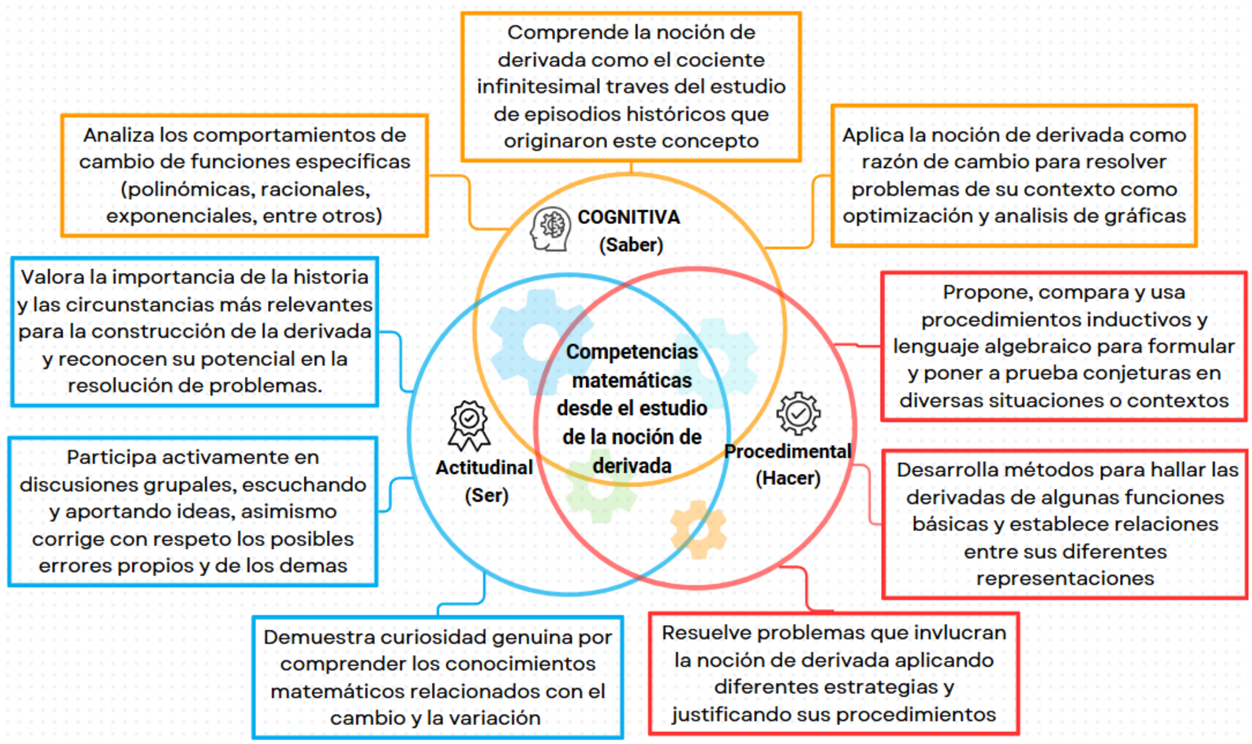
Nota. Cada proceso muestra un mayor grado de nivel de desarrollo en las habilidades cognitivas del pensamiento variacional. Adaptado de (p. 228), por J. Fiallo y S. Parada, 2018, Ediciones UIS.

De esta manera, si un estudiante comparte sus ideas expresadas de forma verbal, numérica, gráfica o analítica relacionadas con el cambio, la variación, la interdependencia, la aproximación y la tendencia para tratar los conceptos como la derivada. El estudiante dará cuenta de habilidades de comunicación, procedimientos, representación y razonamiento según su desempeño en los talleres (Fiallo y Parada, 2018).

Con base en las anteriores habilidades cognitivas, las dimensiones de las competencias matemáticas y sin disentir del análisis histórico-epistemológico de la noción de derivada del apartado anterior. Se propone las siguientes competencias matemáticas del pensamiento variacional, que se pretenden desarrollar en estudiantes de educación media mediante el estudio de la noción de derivada, en apoyo de una secuencia didáctica diseñada desde la mirada histórica-epistemológica (ver **Figura *11***).

Figura 11

Competencias variacionales sobre la derivada en sus tres dimensiones



Nota. Esta tabla ilustra las competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales relacionadas con la noción de derivada mediada por el componente histórico-epistemológico

Siguiendo las ideas del esquema anterior, se busca que la implementación de las tres dimensiones de manera íntegra: conceptual, procedimental y actitudinal favorezca competencias matemáticas del pensamiento variacional en estudiantes de educación media. En otras palabras, se pretende que el estudiante de decimo o undécimo grado sea capaz de resolver problemas que impliquen aplicar su noción de derivada como el cociente infinitesimal, ejecutar estrategias para hallar la derivada de ciertas funciones básicas y valorar la riqueza de la historia en la construcción del concepto.

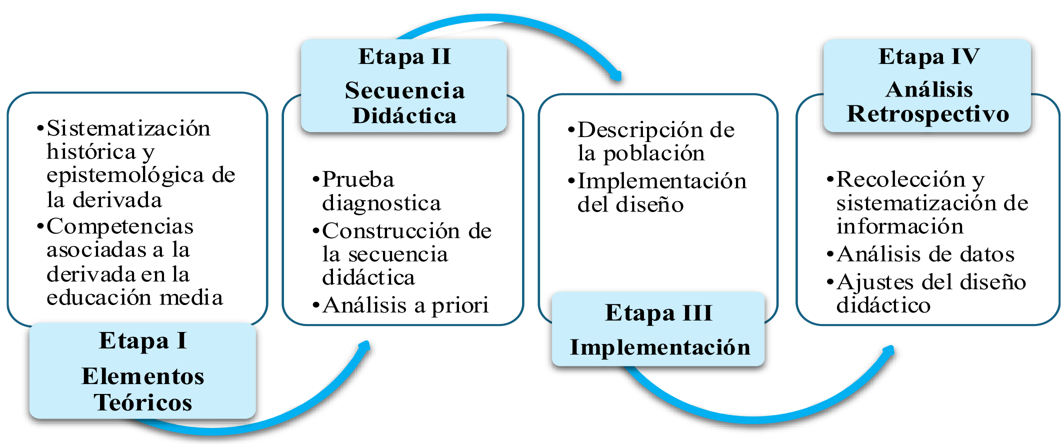
Capítulo 4: Metodología

La presente *Investigación de Diseño* de corte cualitativa, ubicada dentro de las Ciencias del Aprendizaje (Molina et al., 2011). Se centró en diseñar, implementar y valorar una secuencia didáctica para el aprendizaje de la derivada como razón de cambio desde una mirada histórica-epistemológica para el nivel de educación básica secundaria y media técnica, a fin de favorecer un aprendizaje significativo de este concepto, asimismo, favorecer el desarrollo de competencias matemáticas.

La estructura general de esta investigación se desarrolla con base en la metodología de la investigación de diseño descrita por Molina, et al. (2011), donde sus principales elementos son: la caracterización de la situación de enseñanza/aprendizaje, el problema y objetivos de investigación, los principios teóricos, el diseño instruccional, los ciclos continuos de puesta en práctica, análisis y rediseño y los resultados teóricos sobre el diseño instruccional. En este sentido, el desarrollo de esta investigación se llevó a cabo en cuatro etapas que permitieron articular los fundamentos teóricos con la práctica educativa, como se muestra en la **Figura *12***.

Figura 12

Esquema metodológico



4.1 Etapa I: Elementos teóricos de la investigación

Las evidentes problemáticas tanto en la enseñanza como el aprendizaje la derivada en la educación media motivó a esta investigación a desengranar el significado de la derivada, investigar cómo es su proceso de construcción y explorar su vínculo con la historia coherente para dar sentido a la expresión *ser matemáticamente competente* (MEN, 2006). Por ello, se realizó un análisis de corte histórico y epistemológico de la derivada, donde quedó de manifiesto que el concepto de derivada es la culminación de un largo proceso histórico de avances y limitaciones de construcción colectiva (Vega, 2019; Vrancken y Engler, 2013) que se amplío en la sección 3.2 del capítulo 3.

A grandes rasgos, el análisis histórico-epistemológico reveló que desde la edad antigua hasta mediados de la edad moderna se presentaron obstáculos epistemológicos en la formación de los pilares del Cálculo: la noción de límite, concepto de números reales y concepto de función. Y a finales de la edad moderna, estos pilares, fueron pieza fundamental para transitar de una visión geométrica y algebraica estática hacia una visión analítica y geométrica dinámica, este fue el detonante para concebir las primeras nociones de derivada. A continuación, se condensa grosso modo el análisis histórico-epistemológico en la **Tabla 8**.

Tabla 8

Sistematización de los acercamientos histórico - epistemológicos de la derivada

Momento Histórico	Enfoque	Acercamiento Epistemológico	Descripción
Antigüedad (~3000 a. C. – 476 d. C.)	Geométrico	Abnegación de procesos infinitos (Anaxágoras y Zenón) y recta tangente como aquella que toca en un punto a la circunferencia (Euclides).	Dificultó las ideas de infinitamente pequeño y el estudio de la pendiente de la recta tangente.
Edad Media (476 – 1492)	Cinemático–Aritmético y Geométrico	La unificación entre la geometría y álgebra retórica: resolución de ecuaciones por construcciones geométricas (árabes e hindúes) e intentos de cuantificar y establecer regularidades en tablas.	El predominio geométrico y la ausencia de notación limitó la resolución de ecuaciones a construcciones geométricas de dimensionalidad homogéneas y a expresar en términos verbales ecuaciones de incógnitas positivas y no de variables.

		Estudios cuantitativos de fenómenos sujetos al cambio y al movimiento (Universidades de Oxford y Paris) y acercamientos gráficos para el estudio de la variación (Oresme).	El estudio de los fenómenos dinámicos y la introducción de representaciones gráficas contribuyó a la construcción de las nociones de variable, variación y dependencia.
Edad Moderna (1492 – 1789)	Analítico (álgebra – cálculo – geometría)	Introducción del algebra simbólica (Viete), relación de interdependencia entre magnitudes variables como distancia y tiempo (Galileo), representación de ecuaciones en el plano coordenado (Descartes) y un método para hallar máximos y mínimos de curvas (Fermat).	Favoreció el paso de incógnita a variable, así mismo, el desarrollo del concepto de función como una relación de interdependencia entre cantidades variables y su representación como lugar geométrico. Fermat por su parte, considero cantidades muy pequeñas (infinitésimos) para hallar máximos y mínimos curvas, dando una nueva concepción del infinito y de recta tangente.
		Por un lado, Newton comprende la fluxión (derivada) como la razón de cambio instantánea que se obtiene de comparar las fluxiones de las fluentes (derivadas de funciones parametrizadas). Por otro lado, Leibniz, la considera como el cociente diferencial (dy/dx). Ambos, desde el contexto gráfico coinciden en la derivada como la pendiente de la recta tangente.	Tanto Newton como Leibniz de manera independiente llegan a interpretar la fluxión o cociente diferencial como la mejor aproximación de la tasa de cambio alrededor de un punto de una función y como la pendiente de una recta tangente a una curva (derivada) mediante el cálculo infinitesimal.
Edad Contemporánea (1789 – Actualidad)	Lógico – formal	Se consolidó el sistema de representación algebraica (Euler) y la derivada como el límite del cociente de diferencias (Cauchy) y desde el formalismo matemático como inecuaciones entre distancias de épsilon y delta (Bolzano y Weierstrass).	Por un lado, la derivada se define formalmente a partir de la conceptualización de los reales, función y limite como el límite del cociente incremental. Por otro lado, el rigor matemático desprende cualquier sustento empírico del concepto de derivada, definiéndola desde construcciones lógico-formal con las notaciones de épsilon (ε) y delta (δ).

Dado que este modelo histórico-epistemológico debe ser coherente con los lineamientos curriculares, los estándares básicos de competencia y los derechos básicos de aprendizaje como sugiere el MEN para garantizar una educación de calidad, por tanto, se propuso lograr las competencias matemáticas del pensamiento variacional asociadas a la construcción de la noción de derivada como razón de cambio en estudiantes de educación media, descritas en la **Figura *13***.

Figura 13

Competencias matemáticas en relación con la derivada

Dimensiones	***Cognitivas***	***Procedimentales***	***Actitudinales***
Taller 1	Comprende y argumenta los fundamentos conceptuales y teóricos de los objetos básicos del Cálculo (concepto de función, noción de límite y continuidad) en contextos matemáticos y no matemáticos.	Determina razones de cambio, establece su relación con la pendiente de una recta y utiliza técnicas de aproximación para resolver problemas de cambio y variación.	Participa activamente en discusiones grupales, escuchando y aportando ideas y juzga la pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto.
Taller 2	Comprende la noción de derivada como el límite del cociente infinitesimal través del estudio de episodios históricos que originaron este concepto	Determina razones de cambio instantáneas en problemas que involucran la noción de derivada como razón de cambio.	Analiza críticamente los aportes históricos en la construcción del concepto de derivada y relaciona el concepto con aplicaciones de la realidad.

Cabe señalar que estas competencias es el resultado de conjugar las dimensiones de las competencias matemáticas que caracteriza Gutiérrez (2019) con las habilidades cognitivas de Fiallo y Parada (2018) sin prescindir del análisis histórico-epistemológico de la noción de derivada. Además, se puede apreciar la coherencia vertical y horizontal como sugieren los Estándares Básicos de Competencia del MEN (2006). Es relevante aclarar que estas competencias se afinan en el rediseño de la secuencia didáctica, así como afirman Molina et al. (2011) “no consiste en la confirmación de unos constructos teóricos previamente construidos, sino en la acomodación del modelo a la realidad observada” (p. 77).

4.2 Etapa II: Construcción de la secuencia didáctica

En sintonía con el objetivo de investigación, la construcción de la secuencia didáctica se fundamentó en los elementos teóricos previamente descritos. Es decir, que el conjunto de las actividades que componen la secuencia didáctica, están orientados hacia la enseñanza y aprendizaje de la derivada a través del potencial didáctico del componente histórico-epistemológico. En primer lugar se describe de manera general las actividades diseñadas, seguidamente se describen los elementos de la estructura metodológica de las actividades, finalmente, un breve panorama del análisis a priori.

4.2.1 Actividades diseñadas

Se diseñaron un conjunto de actividades articuladas en una secuencia progresiva, en el cual, el primer taller aborda contenidos clave del cálculo (concepto de función y razón de cambio, concepto de tangencia a una curva y noción de límite) y en el segundo taller se aborda una aproximación a la derivada (los infinitésimos y el límite del cociente incremental), como se muestra en la **Tabla 9**.

Tabla 9

Descripciones de las actividades del taller 1 y taller 2

	Actividad	Situación Problemática	Descripción
Taller 1	Concepto de función y razón de cambio	**1.1** Descubriendo razones de cambio con el experimento de Galileo.	En la primera situación se presenta la posición de 4 pelotas en diferentes representaciones (gráfico, tabular, algebraico y descriptivo) como resultado de un experimento de Galileo en el que se hacen rodar cuatro pelotas.
		1.2 Siguiendo las huellas de Galileo en Pisa: Un análisis gráfico del movimiento.	En la segunda, se requiere analizar el gráfico de posición vs. tiempo correspondiente a un recorrido realizado por Galileo en Pisa.

	Concepto de tangencia a una curva	**2.1** Explorando conceptos de tangencia a una curva.	En GeoGebra, se presentan diferentes curvas con una recta tangente movible que permite identificarla como aquella que pasa por un punto con la misma dirección de la curva, así podrá contrastar la definición de Euclides.
		2.2 Conectando conceptos de tangencia a una curvan con razón de cambio.	En la segunda situación, se muestran estas mismas curvas pero con la pendiente de la recta tangente con el propósito de descubrir su relación con las razones de cambio.
	Noción de límite	**3.1** La carrera con más de 2000 años sin resolver: Aquiles y la tortuga.	Se presenta la paradoja de Aquiles y la tortuga compuesta por Zenón, con el propósito de diferenciar aquellas situaciones de procesos de aproximación infinitos (infinito potencial) de las situaciones límite entendida como la culminación del proceso infinito (infinito actual)
Taller 2	Los infinitésimos	**1.1** El rectángulo de mayor área. **1.2** El método de Fermat para hallar máximos y mínimos	Se trata de encontrar las dimensiones del rectángulo de mayor área con perímetro fijo e introducir los infinitesimales con el método de Fermat para hallar máximos mediado por el aula virtual de GeoGebra.
	Límite del cociente infinitesimal	**2.1** Explorando el cociente infinitesimal. **2.2** Problema del lanzamiento vertical.	Se examina un ejemplo explicado por Newton y Leibniz para calcular la velocidad exacta en un tiempo específico de un objeto en movimiento. Seguidamente, se plantea un problema de lanzamiento vertical, con el objetivo de determinar la velocidad instantánea con soporte en GeoGebra.

Es importante señalar que las situaciones problemáticas (1.1, 2.1 y 3.1) del taller 1 y (1.1) del taller 2 son las mismas que se plantearon para la prueba diagnóstica pero sin uso de GeoGebra, con la finalidad de identificar las habilidades o dificultades del grupo relacionadas con conceptos básicos del cálculo, con el objetivo de preparar a los estudiantes en situaciones de fenómeno de cambio para más tarde poder relacionar estas ideas con las propias de la derivada (García y Dolores, 2016). Cabe aclarar que las actividades se diseñaron a partir de los resultados del análisis histórico y epistemológico del concepto de la derivada (Vega, 2019; Vrancken y Engler, 2013), donde, algunas son propias y otras son adaptaciones de actividades encontradas en otras investigaciones o fuentes digitales. Además, se sugiere ver los talleres en los anexos (al final de este documento).

4.2.2 Estructura de la secuencia

Esta estructura está basada en varios elementos tomados de diferentes guías, talleres, secuencias y libros educativos, dando como resultado un estilo pedagógico propio, sin embargo, podrá ser modificado según el formato y las directrices exigidas por el respectivo plan educativo institucional en el que se desee implementar.

Es pertinente aclarar que el primer taller se compone de tres actividades (concepto de función y razón de cambio; concepto de recta tangente a una curva y noción de límite) que buscan alcanzar las competencias asociados a los conceptos fundamentales del cálculo y el segundo taller se compone de dos actividades (los infinitésimos y el límite del cociente infinitesimal) que buscan el desarrollo de las competencias asociadas a la derivada. Y, cada actividad tiene asociados tres indicadores de logro, que miden el alcance de cada competencia matemática. Por consiguiente, en la **Tabla 10**, se muestran los elementos de la estructura metodológica de las actividades.

Tabla 10

Elementos que componen la estructura de cada actividad

Elementos	Descripción	HM– EM
Competencias matemáticas	Conformadas al relacionar los lineamientos curriculares y los acercamientos histórico- epistemológicos	Permeador
Indicadores de logro	Los indicadores se construyen de relacionar las competencias con el desarrollo alcanzado por el humano en la historia de las matemáticas.	Permeadora
Introducción histórica	Se presenta un personaje histórico en forma de historieta acompañado de un enlace a un video corto de su biografía.	Uso
Saberes previos	Se elijen situaciones o preguntas cortas para evaluar los presaberes del estudiante y retroalimentar.	Uso
Planteamiento de la situación	Situación problemática inspirada desde la historia para introducir un nuevo concepto.	Integración
Exploración en GeoGebra	Tiene la opción de resolver la situación problemática en el digital virtual de GeoGebra, es más dinámico e interactivo.	Permeador
Preguntas orientadoras	Son preguntas progresivas orientadas hacia la construcción del concepto desde una aproximación histórica y epistemológica del objeto de estudio.	Integración
Discusión y Socialización	Puesta en común con el docente como mediador	Integración

Nota. HM-EM refiere a la relación de la Historia de la Matemáticas en la Enseñanza de las Matemáticas

Cabe destacar que los elementos descritos fundamentan la estructura curricular de la secuencia didáctica. Además, se justifican a la luz de las formas en la que interviene la historia de las matemáticas en su enseñanza según Guacaneme (2016).

4.2.3 Trayectoria hipotética del aprendizaje

En esta trayectoria hipotética se delineó el recorrido cognitivo que se esperaba que los estudiantes transitaran. Es claro, que se trata de una conjetura inicial que se refinaría en la medida que se completen ciclos continuos de puesta en práctica, análisis y rediseño (Molina et al., 2011).

A partir de los trabajos de Artigue et al. (1995), Neira (2012), Vega (2019) y Vrancken y Engler (2014) se previó que los estudiantes presentarían los mismos obstáculos epistemológicos que se caracterizaron en el análisis histórico-epistemológico del cálculo diferencial, como el rechazo del infinito, la concepción de recta tangente como aquella que toca al círculo en punto, entre otros. De hecho, en la prueba diagnóstica (constó de 4 problemas históricos retadores) se anticipó que los estudiantes reflejarían estas mismas limitaciones.

No obstante, al retomar los mismos problemas de la prueba diagnóstica en el primer taller y parte inicial del segundo, acompañados por preguntas orientadoras y applets en GeoGebra. Se esperaba que comprendieran: el concepto de función como una relación de interdependencia; el concepto de razón de cambio como la comparación entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido asimismo su relación con la pendiente de la recta; la recta tangente como aquella que toca por un punto y comparte la misma dirección de la curva y en la actividad de Aquiles y la tortuga comprendieran el concepto de límite como la culminación de un proceso infinito. Superando así las concepciones escolares tradicionales (Ver apéndices A y B).

En el segundo taller, se conjeturó que al aplicar el método de Fermat para encontrar un punto máximo de una función cuadrática: $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$, los estudiantes comprenderían que los infinitesimales son una cantidad muy pequeña que tiende a cero pero que no es cero y que el método de Fermat representa una razón de cambio.

Finalmente, en la actividad sobre Newton y Leibniz, se esperaba que al estudiar un ejemplo de cómo Newton y Leibniz calculaban la velocidad instantánea en su época, acompañado de la visualización en Geogebra, los estudiantes identificarían que el "momento" que llamó Newton correspondería a un infinitesimal, al igual que los lados dx y dy en el triángulo característico de Leibniz. Además, que la expresión de Leibniz que usó para hallar la pendiente de la recta tangente $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$, correspondería a una razón de cambio que sirve para hallar la velocidad en un instante.

Más adelante, en el análisis a priori del diseño didáctico, se profundizará esta trayectoria, justificando cómo la integración de problemas y contextos históricos permitiría a los estudiantes vincular los conceptos básicos del cálculo (función, razón de cambio, recta tangente y límite) con la derivada como el límite del cociente incremental.

4.3 Epata III: implementación de la secuencia didáctica

Dada la multiplicidad de las realidades educativas, se realizaron dos observaciones previas, que permitieron precisar las condiciones particulares del entorno educativo, tales como el lugar, el tiempo, los recursos, la metodología y las características del grupo. Además, se diseñó una prueba diagnóstica, dos talleres y una evaluación final en función de lograr competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales.

La implementación de la secuencia didáctica se llevó a cabo a modo de pilotaje con 23 estudiantes sobresalientes de edades entre 15 a 17 años de los grados décimo (13 estudiantes) y undécimo (10 estudiantes), provenientes de diferentes colegios públicos de los municipios de Bucaramanga, Girón y Floridablanca que participan en el Semillero Matemático Euler. Este programa es un proyecto de extensión del Grupo de Educación Matemática (EDUMAT) de la Universidad Industrial de Santander. El objetivo del Club es potenciar el desarrollo del pensamiento matemático de los jóvenes a través de la exploración y la resolución de problemas, con el propósito de incentivar a los jóvenes para que continúen con su formación académica a nivel profesional en la UIS, ofreciendo clases todos los sábados en modalidad presencial y virtual durante un periodo académico semestral. Cabe agregar que en la **Tabla 11** se muestra el cronograma de actividades realizadas los sábados entre el 21 de abril y 11 de marzo del 2025 durante el pilotaje de la secuencia didáctica en uno de los grupos de clase.

Tabla 11

Cronograma de actividades para la ejecución de la secuencia didáctica

Actividad	Descripción	Fecha
Primera Observación	El reconocimiento del entorno educativo y obtención de información sobre las características del grupo.	Sáb. 05 de abril del 2025
Segunda Observación	Caracterización de la situación de enseñanza y aprendizaje, es decir, identificar la metodología, las interacciones entre los estudiantes, las actividades, etc.	Sáb. 12 de abril del 2025
Prueba Diagnóstica	Evaluar las habilidades cognitivas y procedimentales de los estudiantes	Sáb. 03 de mayo del 2025
Primera intervención	Reforzar los conocimientos previos durante la implementación del primer taller.	Sáb. 10 de mayo del 2025

Segunda intervención	Se finaliza el primer taller y se inició con la primera parte del segundo taller	Sáb. 17 de mayo del 2025
Tercera intervención y evaluación final	Introducir la noción de derivada como razón de cambio mediante la resolución de problemas. Para esto se realizó la segunda parte del segundo taller.	Sáb. 24 de mayo del 2025

Este grupo en particular contó con un aula dotada de computadores, un tablero, un proyector de pantalla y facilidades de acceso a internet, por ello, el potencial didáctico de los recursos en GeoGebra tuvo un papel valioso para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la derivada. Por otro lado, se contó con un espacio de 4 horas para cada intervención, sin embargo, como varios son provenientes de otras ciudades, requerían salir más temprano para sus casas, además de contar con un descanso intermedio de 30min, así que el tiempo fue un factor que limitó el buen desarrollo de cada actividad. Por otra parte, fue gratificante encontrar un grupo de estudiantes muy participativo con diversidades de formas de pensar, hacer y ser, pero con algo en común, el gusto por las matemáticas (ver **Figura *14***).

Figura 14

Imagen de los participantes del pilotaje de la secuencia didáctica

4.4 Etapa IV: Análisis retrospectivo

El análisis retrospectivo no busca caracterizar aprendizajes sino contribuir al desarrollo de un modelo teórico que aporta directrices para guiar futuros diseños. De acuerdo con Molina et al. (2011), en el caso de los experimentos de enseñanza: “el objetivo es tanto práctico (promover el aprendizaje) como teórico (elaborar un modelo teórico de dicho proceso de aprendizaje)” (p. 84). En este sentido, el proceso de diseño, puesta en práctica y análisis retrospectivo se consolidan en un producto final, que para esta investigación, es el rediseño de las actividades orientadas hacia el aprendizaje de la derivada. La construcción de este material proporciona un marco pedagógico desde el potencial didáctico del componente histórico-epistemológico de la derivada. Con la finalidad de favorecer el desarrollo de las competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales de las estudiantes asociadas al pensamiento variacional.

También, es relevante mencionar que la recolección de los datos se obtuvo mediante observaciones, fotos, videograbación y principalmente mediante las hojas de trabajo y las transcripciones de audio. Estos instrumentos permitieron capturar casi todo el proceso a lo largo del desarrollo del experimento permitiendo identificar y analizar la construcción de las nociones de derivada como razón de cambio, asimismo, evaluar la calidad de secuencia didáctica.

El marco teórico de esta investigación se compone de la relación estrecha entre la Historia de las Matemáticas y la Enseñanza de las Matemáticas (Guacaneme, 2016; Maza, 1994); el análisis histórico-epistemológico de la derivada (Vega, 2019; Vrancken y Engler, 2013); las competencias matemáticas asociadas al concepto de derivada desde los referentes curriculares nacionales (MEN, 1998; MEN, 2006; MEN, 2016) y los aspectos conceptuales de la derivada (García y Dolores, 2016; Sánchez-matamoros et al., 2008). Por tanto, el análisis retrospectivo de los datos se interpretó a la luz de los aspectos teóricos y conceptuales y esto develó los ajustes pertinentes para el rediseño de la secuencia didáctica como producto final de esta investigación. Como afirman Molina et al. (2011):

> En los estudios de diseño se persigue el desarrollo de una teoría, y adicionalmente algún otro producto del diseño, sin necesidad de que respondan a una problemática existente. El objetivo, por tanto, no es dar respuesta a un problema, sino un producto particular ya sea teórico o de otra índole, así como información sobre el proceso de diseño que aportes directrices para guiar futuros diseños. (p. 78)

Capítulo 5: Análisis de los datos

Desde el principio se ha investigado *¿Cómo favorecer el aprendizaje de la derivada desde un acercamiento histórico–epistemológico que potencie didácticamente en el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de décimo y undécimo grado*? por este motivo, se propuso: 1) examinar cómo se integró los acercamientos históricos – epistemológicos en la secuencia didáctica, 2) analizar cómo el componente histórico-epistemológico favoreció en el desarrollo de competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales, 3) Ajustar la secuencia didáctica según los resultados del pilotaje para fomentar una comprensión más sólida del concepto de derivada. Así como explica Molina et al. (2011), el objetivo de la investigación de diseño es analizar los aprendizajes mediante el diseño de herramientas y estrategias de enseñanza y el estudio sistemático de las formas particulares de aprendizaje y explicar por qué el diseño instruccional funciona y sugerir formas con las cuales puede ser adaptado a nuevas circunstancias.

Se puntualiza, que la caracterización como punto de partida para el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula de matemáticas posibilitó el acercamiento a la realidad escolar del grupo (Arciniegas, 2022), que permitieron delimitar la estructura y los alcances del diseño didáctico.

Es importante señalar que las situaciones problemáticas del taller 1 (1.1, 2.1, 3.1,) y del taller 2 (2.1) son las mismas que se plantearon para la prueba diagnóstica, con la finalidad de identificar las competencias cognitivas y procedimentales del grupo relacionadas con conceptos básicos del cálculo, con el objetivo de "preparar a los estudiantes con el trabajo con el fenómeno de cambio para más tarde poder relacionar estas ideas con las propias de la derivada" (García y Dolores, 2016)

Cabe aclarar que las actividades se diseñaron a partir de los resultados del análisis histórico y epistemológico del concepto de la derivada (Vrancken y Engler, 2013), donde, algunas son propias y otras son adaptaciones de actividades encontradas en otras investigaciones o fuentes digitales. Con el fin de facilitar la comprensión del análisis, se sugiere revisar simultáneamente los talleres implementados. Se pone a disposición los documentos en formato PDF en la siguiente carpeta:

https://drive.google.com/drive/folders/133N4VaUzMM1ygJG9wgstMGJ6IlZToZ03?usp=sharing

5.1 Potencial didáctico del componente histórico-epistemológico en la secuencia didáctica

A continuación, se presenta un análisis a priori del diseño didáctico a través del lente del potencial didáctico del componente histórico-epistemológico, donde se describe las posibles formas en que los estudiantes podrían interactuar con cada actividad antes de su puesta en práctica y se muestra la manera en que se integró los acercamientos epistemológicos de la derivada (ver **Tabla 8**) para interpretarlos a la luz del marco teórico. Esto permitirá al docente evaluar la idoneidad de cada situación, de cada pregunta y anticipar posibles estrategias frente a nuevas circunstancias durante su implementación.

5.1.1 Primer Taller: Explorando los cimientos del cálculo

En este primer taller los estudiantes enfrentarán los más temidos obstáculos cognitivos caracterizados en la literatura y reforzarán sus conocimientos previos en atención a las dificultades que se detecten en la prueba diagnóstica. Como se busca una transición continua desde el álgebra escolar hasta el pensamiento abstracto del cálculo (Artigue, 1995) se propone como principal objetivo en este primer taller, que los estudiantes logren las competencias propuestas en la **Tabla *12***.

Tabla 12

Competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales del primer taller

Cognitivas	Procedimentales	Actitudinales
Comprende y argumenta los fundamentos conceptuales y teóricos de los objetos básicos del Cálculo (concepto de función, noción de límite y continuidad) en contextos matemáticos y no matemáticos.	Determina razones de cambio, establece su relación con la pendiente de una recta y utiliza técnicas de aproximación para resolver problemas de cambio y variación.	Participa activamente en discusiones grupales, escuchando y aportando ideas y juzga la pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto.

En busca de abordar problemas históricos que promuevan procesos matemáticos para la comprensión de los conceptos claves del cálculo, como función, razón de cambio, recta tangente a una curva, la noción de límite y continuidad. Se abordaron del desarrollo histórico de la derivada aportes significativos tales como: Los experimentos de Galileo rodando esferas sobre un plano para estudiar el movimiento; la concepción de recta tangente a una curva según Euclides; y la reconocida paradoja de Aquiles y la tortuga de Zenón. A este respecto, según Guacaneme (2016), estos problemas históricos cumplen la función integradora en la enseñanza de la matemática porque son mediador en los procesos cognitivos del aprendizaje y la comprensión. Y una función permeadora cuando son eje central para el buen funcionamiento del currículo.

5.1.1.1 El concepto de función y razón de cambio con Galileo

La actividad matemática central de este taller es favorecer la conceptualización de función y de razón de cambio. De acuerdo con Fiallo y Parada (2018) la idea de función va más allá de una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos, es una generalización de la interdependencia entre dos magnitudes variables, donde una variable depende de otra, $y = f(x)$. Por otra parte, según Carlson et al. (2002/2003) el análisis covariacional de esta relación funcional implica el reconocimiento de la cantidad de cambio de la variable dependiente con respecto a un incremento uniforme de la variable independiente, esto expresa, la razón de cambio. Por tanto, los indicadores de aprendizaje para esta primera actividad se describen en la **Tabla 13**.

Tabla 13

Indicadores de logro para el concepto de función y razón de cambio

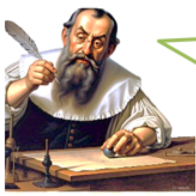
	Indicador de logro:
Cognitiva	Comprende el concepto de función como una relación de interdependencia entre magnitudes variables.
Procedimental	Determina razones de cambio de funciones básicas en sus distintas representaciones en el contexto cinemático.
Actitudinal	Colabora y comparte sus resultados en equipo, discutiendo su análisis frente a las razones de cambio.

En concordancia con la historia, sabemos que Galileo en el siglo XVII realizó muchos experimentos para el estudio cinemático, por ejemplo, el experimento de dejar caer dos esferas de diferente masa desde la Torre de Pisa, utilizar rampas inclinadas para estudiar el movimiento de los cuerpos, realizar observaciones astronómicas a través de un telescopio, etc. Parte del éxito de sus descubrimientos fue gracias al estudio minucioso del cambio y la variación. Caballero (2018) citado en Arciniegas (2022) explica que la construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional debe responder a cinco interrogantes específicos ¿qué cambia?, ¿respecto de qué cambia?, ¿cómo cambia?, ¿cuánto cambia?, y ¿por qué cambia de esa manera? Por ello, se plantean dos situaciones problemáticas con preguntas orientadas a fortalecer la noción del concepto de función, estas situaciones son: “Descubriendo razones de cambio con el experimento de Galileo” y “Siguiendo las huellas de Galileo en Pisa: Un análisis gráfico del movimiento” que buscan favorecer el pensamiento variacional.

La primera situación se trata de interpretar diferentes representaciones (gráfica, tabular, algebraica y verbal) la posición de cuatro pelotas lanzadas sobre un plano no inclinado y sin fricción con el objetivo de determinar las razones de cambio de cada pelota, y al compararlas se puede justificar cuál es la más rápida y la más lenta, como se muestra en la **Figura *15***.

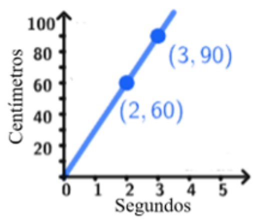
Figura 15

Descubriendo razones de cambio con el experimento de Galileo



En uno de mis experimentos hice rodar cuatro bolas a diferentes velocidades sobre una superficie horizontal con poca fricción. Y usé diferentes representaciones para registrar la distancia y el tiempo de cada pelota, como se muestra a continuación. **Determina** cuál fue la más rápida y cuál fue la más lenta.

Pelota A



Pelota B

Segundos	centímetros
4	220
12	660
14	770

Pelota C

Esta pelota rueda d centímetros en s segundos según la ecuación de velocidad $V = 25$

Pelota D

Esta pelota rueda 225 centímetros en 4.5 segundos

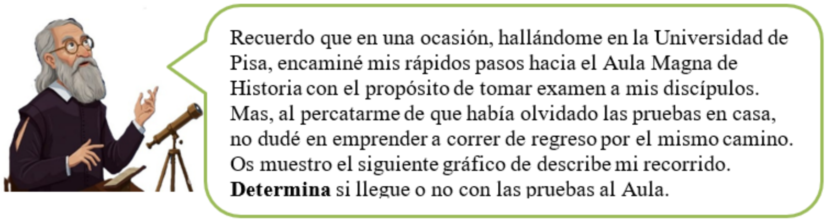
Para guiar la actividad grupal, se plantean preguntas como: ¿Qué magnitudes cambian al hacer rodar las pelotas? ¿Qué valores puede tomar la distancia y el tiempo? ¿Cuántos centímetros avanza cada pelota por segundo? Se solicita al estudiante que exprese la distancia de cada pelota en función del tiempo, calcule la velocidad de cada pelota y explique qué representa la pendiente de la recta. Se espera que los estudiantes de décimo y undécimo grado reconozcan con facilidad que la distancia recorrida depende del tiempo, y que toma valores positivos, ya que, la distancia es una magnitud positiva. Seguramente, muchos hallaran la velocidad aplicando la fórmula $v = \frac{d}{t}$, y como la variación es constante, obtendrán el cociente entre la distancia por un tiempo determinado. Seguidamente, al comparar las velocidades determinarán la más rápida y la más lenta.

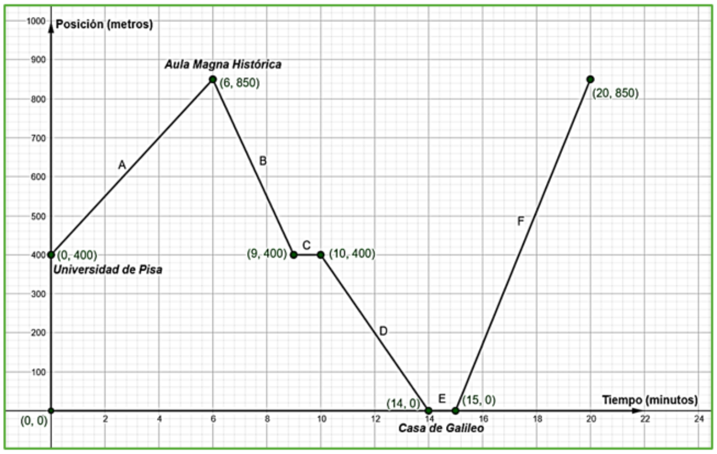
Pero, es importante que el docente oriente la actividad hacia construir la expresión que representa la distancia recorrida en función del tiempo a partir de la representación del movimiento de cada pelota y guíe a los estudiantes a asociarle atributos a la expresión $f(x) = mx + b$ desde las múltiples representaciones y desde contexto cinemático que profesa la situación, por ejemplo, que la pendiente de la función lineal representa una razón de cambio entre la distancia y el tiempo, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{Distancia}{Tiempo} = V$ que es precisamente la velocidad. Esto se podrá afianzar más en la segunda situación.

En esta segunda situación (Siguiendo las huellas de Galileo en Pisa: Un análisis gráfico del movimiento***)*** se pretende que el estudiante realice un análisis gráfico de la posición vs tiempo de un recorrido hecho por Galileo en Pisa, con el propósito de que diferencie los conceptos de velocidad y rapidez, y determine razones de cambio de funciones lineales. Las distancias tomadas en la gráfica (ver **Figura *16***) son estimaciones reales con apoyo de Google maps y algunos mapas de la época en Pisa, Italia.

Figura 16

Siguiendo las huellas de Galileo en Pisa: Un análisis gráfico del movimiento





Posiblemente, se les dificulte interpretar que se trata de un movimiento rectilíneo con velocidad constate, donde el signo de la velocidad representa un avance o un retroceso en el contexto, puesto que es una variable vectorial, es decir, que presenta una magnitud, un sentido y una dirección. Es importante que el docente explique estas ideas, así mismo, que favorezca procesos de modelación, es decir, que los estudiantes expresen la función de la posición, para que relacionen su pendiente con la velocidad.

El análisis gráfico se orienta con preguntas como: ¿A qué velocidad se movía Galileo durante los primeros 6 minutos? ¿entre los instantes 6 y 9 min? ¿entre 9 y 10 min? ¿entre 10 y 14 min? ¿entre 14 y 15? ¿y entre 15 y 20 min? Es necesario que el docente explique al menos un ejemplo de cómo obtener la velocidad en al menos uno de los tramos e interprete la razón de cambio obtenida en el contexto de la situación, para que los estudiantes asocien que la fórmula para hallar la pendiente de una recta corresponde a la misma fórmula para hallar la razón de cambio. Cabe señalar que las dos situaciones problemáticas previamente descritas corresponden en la propuesta de Maza (1994) a la resolución de problemas históricos, dado que se trata de un experimento y un recorrido de Galileo que permiten fortalecer el concepto de función

5.1.1.2 Concepto de recta tangente a una curva con Euclides

Esta actividad tiene como propósito abordar un obstáculo epistemológico relacionado con la noción de recta tangente a una curva, que comúnmente, es entendida entre los estudiantes de secundaria, como aquella recta que toca en un punto al círculo y prolongada no corta a la circunferencia, a este respecto, Neira (2012) explica que “todas estas propiedades son globales y no tienen nada que ver con la idea de dirección común. (…) Claramente, no hay una filiación directa entre esta tangente y la definida en cálculo” (p. 31). En efecto, son las mismas ideas de Euclides, que perduraron por más de un milenio y dificultó de adquirir nuevos conocimientos. De hecho, las investigaciones de orden histórico del cálculo diferencial como las de Ávila et al. (2013), Boyer (1968/1986), Vega (2019) y Vrancken y Engler (2013) afirman que este problema de hallar la ecuación de la tangente a una curva dada en un punto fue uno de los principales problemas que dieron surgimiento al cálculo. Salvo aclarar que, la concepción euclidiana de tangencia es un concepto arraigado en los estudiantes de bachillerato, que no funciona para una curva general, así que se hace necesario crear contextos que resignifiquen este concepto. En este sentido, se propone en la **Tabla 14** los indicadores de logro para el concepto de recta tangente a una curva.

Tabla 14

Indicadores de logro de la actividad: tangencia a una curva

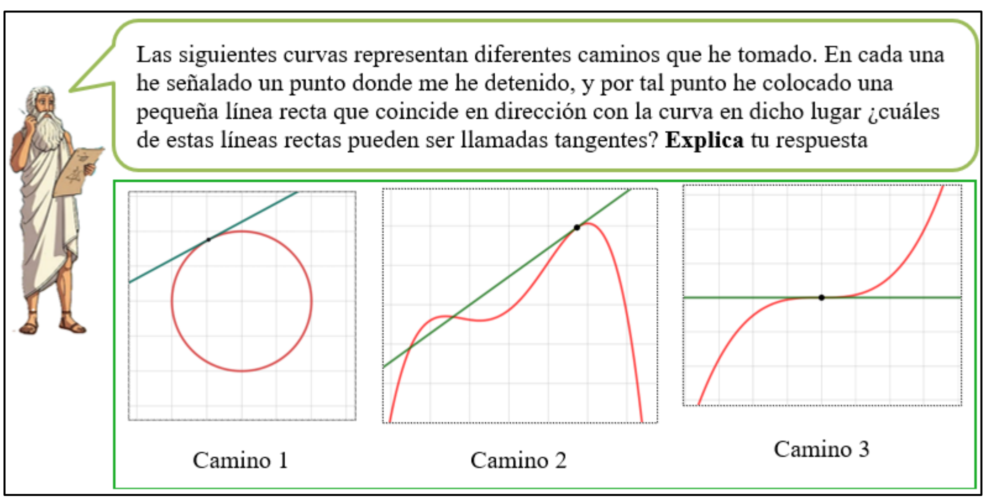
	Indicador de logro:
Cognitiva	Reconoce la recta tangente a una curva, como aquella que pasa por un punto y comparte la misma dirección de la curva en ese punto.

Procedimental	Establece relaciones entre las rectas tangentes y el comportamiento de la función
Actitudinal	Juzga la pertinencia de las diferentes justificaciones geométricas de sus compañeros

Precisamente, Maza (1994) manifiesta que una estrategia efectiva es: "construir historias en torno a problemas críticos del pasado que ilustren técnicas y métodos actuales" (p. 25). Por ello, al identificar este problema crítico del pasado, se reconstruye una historia, donde se muestran tres recorridos que realizó Euclides, y en cada camino se detuvo en un punto, para ubicar una recta con la misma dirección del camino (ver figura). Observe que los tres gráficos representan una recta tangente a una curva diferente. La primera, es una recta tangente a una circunferencia que coindice con la definición de Euclides. La segunda, es una recta tangente a una curva que, al prolongarse corta en otros puntos, esto genera confusión con la idea de que "la toca en un punto". Y la tercera, la recta tangente está en un punto de inflexión de la curva, así que contradice la idea de "tocar", puesto que, esta recta es tangente, pero la atraviesa, como se muestra en la **Figura *17***.

Figura 17

Explorando conceptos de tangencia a una curva

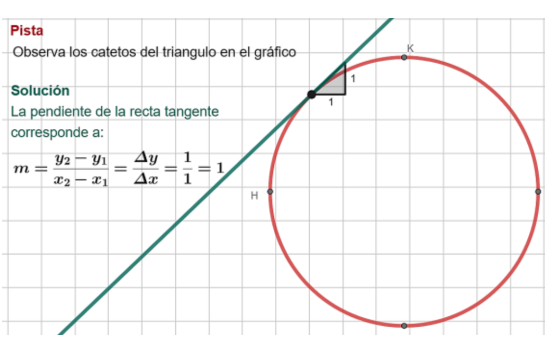


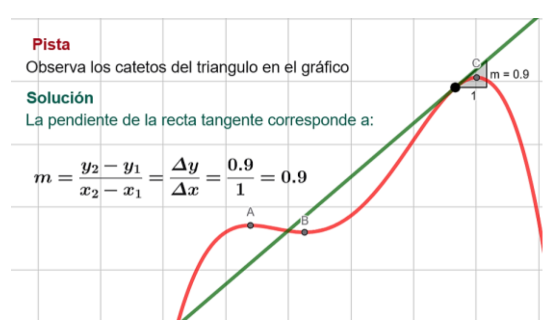
Observe que estas dos últimas gráficas crean un conflicto cognitivo al contradecir la concepción de tangencia de Euclides. Es necesario motivar a los estudiantes a buscar nuevas explicaciones de por qué las tres gráficas son rectas tangentes, fomentando así la búsqueda de argumentos más sólidos que las propias afirmaciones geométricas. Aquí el papel de la visualización es una estrategia eficaz, por ello, se propone, llevar una cuerda y una recta, y pedirle a un estudiante que recorra la cuerda, y cuando se detenga en un punto, que ubique la flecha sobre la misma cuerda de tal manera que continue con la misma dirección de la curva. En adición, esta misma actividad se puede realizar en GeoGebra, donde el punto de tangencia es movible haciendo dinámica la actividad. Acompañado de preguntas orientadoras como: ¿En cuáles gráficas las rectas tocan localmente en un punto a la curva? ¿Cuáles cumplen que las rectas tangentes comparten la misma dirección de la curva? Deben guiar al estudiante a resignificar que *la recta tangente a una curva es aquella que pasa por un punto y comparte la misma dirección de la curva en ese punto localmente*. Enfrentar este obstáculo estimulará procesos matemáticos que reestructuran sus esquemas de aprendizaje cognitivos.

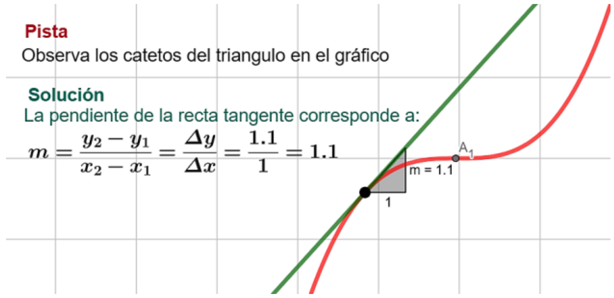
En favor del ítem procedimental, se presenta una segunda situación problemática: "Conectando conceptos de tangencia a una curva", se presentan las mismas curvas en GeoGebra pero con el valor de pendiente de la recta tangente, como se muestra en la **Tabla 15**.

Tabla 15

Conectando conceptos de tangencia a una curva







Nota. https://www.geogebra.org/m/hdfqabzd

Se espera que al analizar la pendiente de la recta tangente reconozcan que la curva tiene un comportamiento que puede ser explicado con la recta tangente, así que, con preguntas como ¿Cuáles curvas pueden considerarse como una función en un plano cartesiano? ¿si la pendiente de la recta tangente es positiva, qué tipo de variación presenta la curva, creciente o decreciente? ¿y si la pendiente es negativa qué tipo de variación presenta? ¿a qué valor se acerca la pendiente cuándo se aproxima a un punto máximo o mínimo local? ¿Cuál es la relación estrecha entre la pendiente de la recta tangente y razón de cambio de la curva? De todo esto, se espera que establezcan esta relación de forma verbal.

5.1.1.3 Noción del concepto de límite con Zenón

Desde el análisis histórico-epistemológico de la derivada se caracterizó que la idea del infinito generó paradojas y dificultades conceptuales en la antigüedad, pero que más tarde, con la noción de límite como un proceso de aproximación fue una forma para abordar problemas del cambio y la variación. Por ello, siguiendo la estrategia que sugiere Maza (1994) de introducir un nuevo concepto mediante problemas históricos, se propone como actividad de partida, la resolución de la paradoja de Aquiles y la tortuga para fomentar la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite. En este sentido, los indicadores de logro para este momento son los propuestos en la **Tabla 16**.

Tabla 16

Indicadores de logro de la noción del concepto de límite

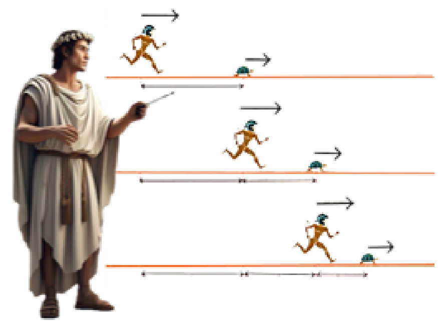
	Indicador de logro:
Cognitiva	Diferencia las dos formas de interpretación del infinito, aquellas situaciones de procesos de aproximación infinitos (infinito potencial) de las situaciones límite entendida como la culminación del proceso infinito (infinito actual)
Procedimental	Utiliza técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos con precisión
Actitudinal	Evalúa críticamente el margen de error en sus aproximaciones

Un ejemplo clásico que muestra esta interpretación dual de la noción del concepto de límite es pedirles a los estudiantes comparar los números 0.999… y 1. Artigue (1995) explica que la frecuencia de respuestas erradas ante esta situación: “demuestra la dificultad que hay para percibir la notación 0.9999… como algo diferente a un proceso dinámico que no se detiene jamás, y para ver a cambio la designación de un número” (p. 113). Asimismo, al explorar la actividad de Aquiles y la tortuga (ver **Figura *18***), se espera que un gran número de estudiantes afirme que Aquiles nunca va a alcanzar la tortuga, y que la distancia es infinita.

Figura 18

La carrera con más de 2000 años sin resolver: Aquiles y la tortuga

Zenón fue un filósofo y matemático griego del siglo V a.C. que planteó una famosa paradoja:



En una carrera, Aquiles le da una ventaja de 1km a una tortuga. Mientras Aquiles corre para alcanzar a la tortuga, cuando llega al punto donde estaba la tortuga, está ya ha avanzado la mitad del recorrido anterior, es decir, ½ km más. Cuando Aquiles llega a ese nuevo punto, la tortuga nuevamente habrá avanzado la mitad del recorrido previo (¼ km), y así sucesivamente.

La paradoja plantea que Aquiles nunca podrá alcanzar a la tortuga, ya que siempre habrá una distancia cada vez más pequeña, entre ellos.

Halla la distancia total que recorre Aquiles para alcanzar la tortuga. **Justifica tus respuestas**.

Sin embargo, preguntas orientadoras como ¿Cuál es la distancia recorrida por Aquiles cuando haya avanzado tres veces? ¿Cuatro veces? ¿cinco veces? ¿A qué valor se aproxima esta suma? ¿en qué momento Aquiles la alcanza? Notarán que la suma converge a 1.99… y posiblemente muchos considerarán que este valor es diferente de 2km, aquí el profesor puede aprovechar para introducir la noción de límite, no como un valor “alcanzado” después de infinitos pasos, sino, como el resultado de un análisis del comportamiento tendencial, es decir, analizar el valor al que se aproxima la distancia recorrida por Aquiles cada vez que avanza la mitad del recorrido inmediatamente anterior. Se puede apoyar de una tabla de valores, del gráfico de la sucesión y con analogías contextualizadas de esta misma situación. Cabe aclarar que desde su interpretación rigurosa y formal el límite no es un valor “alcanzado” después de infinitos pasos, sino, que describe aproximaciones cada vez mejores. Sin embargo, los estudiantes necesitan intuición (infinito actual) para dar sentido al límite. Así que esta actividad, es una buena estrategia para ilustrar esta tensión clave entre la interpretación matemática del infinito como un proceso iterativo inalcanzable (infinito potencial) y como la culminación de un proceso infinito (infinito en acto) para construir la noción de límite como un estudio de aproximaciones y tendencias (Gonzales et al., 2013).

5.1.2 Segundo taller: Aproximación histórica al concepto de derivada

Este segundo taller tiene como principal objetivo que *el estudiante comprenda la noción de derivada como el límite del cociente incremental* desde sus diferentes representaciones mediante el estudio de episodios históricos que originaron este concepto. Así que las competencias que guían este taller se evidencian en la **Tabla 17**.

Tabla 17

Competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales del segundo taller

Cognitivas	Procedimentales	Actitudinales
Comprende la noción de derivada como el cociente infinitesimal a través del estudio de episodios históricos que originaron este concepto.	Determina razones de cambio instantáneas en problemas que involucran la noción de derivada como razón de cambio.	Analiza críticamente los aportes históricos en la construcción del concepto de derivada y relaciona el concepto con aplicaciones de la realidad.

Del desarrollo histórico de la derivada, el cálculo infinitesimal tuvo sus orígenes principalmente en el método de Fermat para hallar máximos y mínimos; el método de Newton y el método de Leibniz para calcular el cociente incremental. Estas contribuciones en la historia de las matemáticas, desde la perspectiva de Guacaneme (2016), cumplen una función permeadora en la enseñanza de la matemática porque se emplea información acerca de la evolución histórica del concepto de la derivada como criterio orientador en la estructuración de esta secuencia didáctica.

5.1.2.1 Los infinitésimos con Fermat

Esta actividad tiene por objetivo introducir a los estudiantes al razonamiento analítico, donde deberán traducir un problema de optimización de geometría plana en un problema algebraico equivalente, para luego, hacer uso del cálculo infinitesimal para determinar el punto máximo de la función. Esto prepara el camino hacia el cálculo diferencial, como afirma Vega (2019) “Fermat utilizó el método de hacer un incremento infinitamente pequeño y plantear una ecuación algebraica, que había utilizado para hallar máximos y mínimos, para resolver el problema de la tangente” (p. 28). Así que, en la **Tabla 18** se encuentran los indicadores de logro que se esperan que alcancen los estudiantes.

Tabla 18

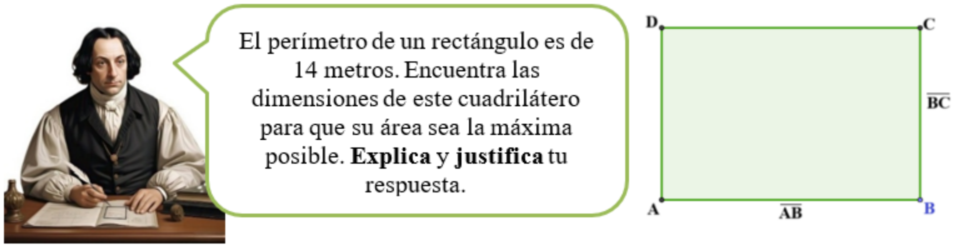
Indicadores de logro de la actividad del método de Fermat

	Indicador de logro:
Cognitiva	Interpreta los infinitesimales como una cantidad variable que se puede aproximar indefinidamente a cero, pero no ser igual a cero.
Procedimental	Plantea y ejecuta métodos para determinar puntos máximos o mínimos mediante el estudio de la variación, la tendencia y razones de cambio alrededor de estos puntos.
Actitudinal	Juzga la pertinencia de las diferentes justificaciones de sus compañeros en cuanto al método para hallar máximos y mínimos de Fermat

En este sentido, la presente actividad consiste en aplicar el método de Fermat para determinar el rectángulo de mayor área con un perímetro fijo (ver **Figura *19*** El rectángulo de mayor área mediante el estudio de la variación, la tendencia y razones de cambio alrededor del punto máximo de la función que modela este problema.

Figura 19

El rectángulo de mayor área

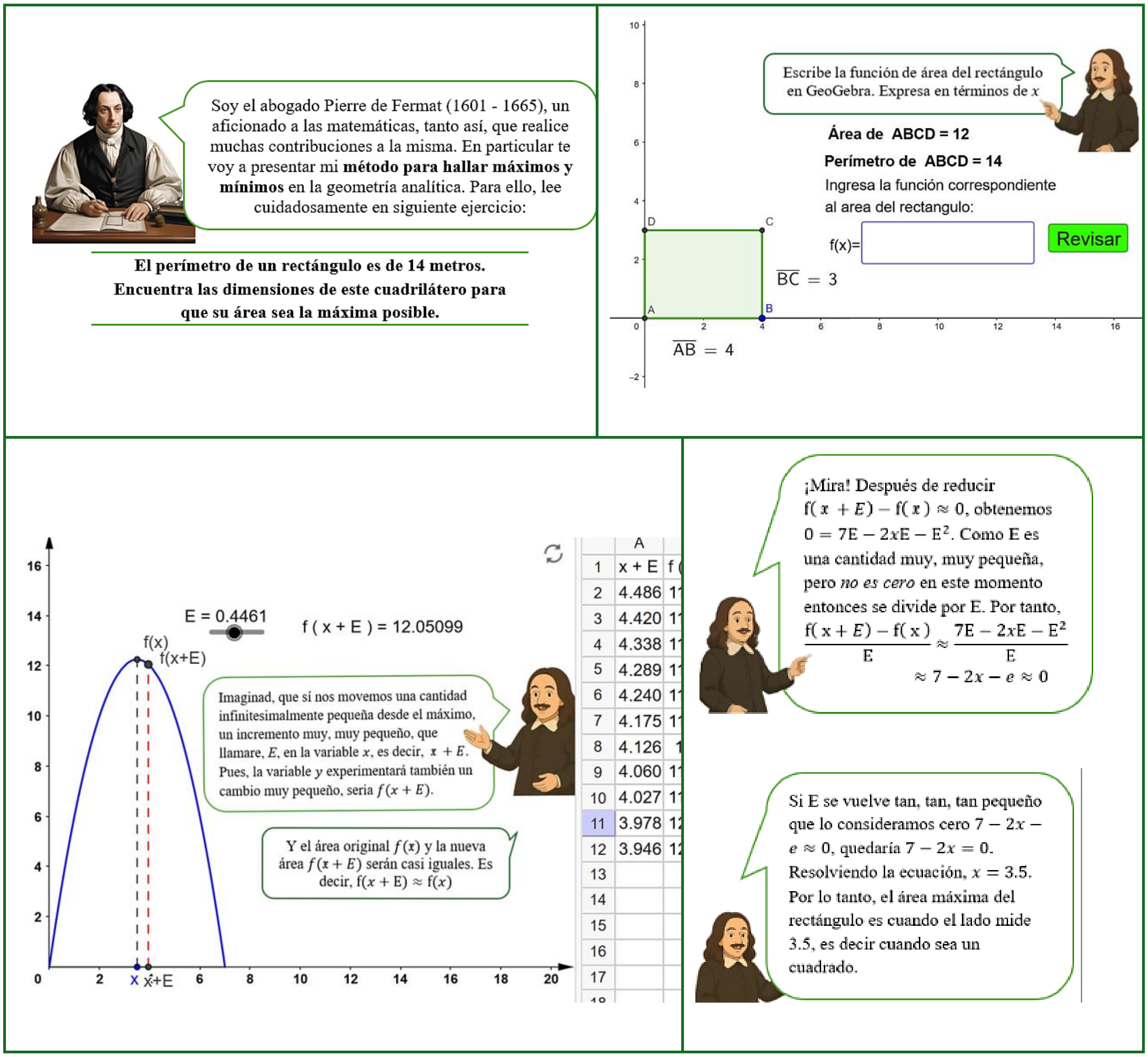


Es importante precisar que esta actividad corresponde al taller 12 del libro de Fiallo y Parada (2018), donde, describen que los primeros intentos de los estudiantes para hallar el área máxima consisten en realizar algunos cálculos numéricos de casos particulares, donde los estudiantes que solo usan números naturales propondrán como solución que el rectángulo tiene lados 3 m y 4 m. Los autores, explican que, por otra parte, habrá estudiantes que darán respuesta un poco más aproximadas a 3.5, pero no se atreven a decir exactamente 3.5, porque para ellos el cuadrado no es rectángulo. Y en el mejor de los casos, construirán una expresión algebraica que represente el área en función de la base o la altura del rectángulo y al calcular el vértice darán una respuesta aproximada de 3.5m.

El potencial de GeoGebra como mediador facilitará la visualización y comprensión de los objetos matemáticos involucrados, y con preguntas orientadoras como ¿Qué magnitudes varían? ¿Cuáles no varían? ¿De qué magnitudes depende el área del rectángulo? ¿Qué relación hay entre la base y la altura? ¿Qué expresión modela el área en función de la base?, guiaran a los estudiantes a encontrar la expresión algebraica $\mathrm{f}(x) = x(7-x) = 7x - x\text{^}2$, donde el vértice de la parábola corresponde al punto máximo de la misma, y a su vez, a la solución del problema. Posteriormente, se llevarán a cabo los pasos de Fermat para hallar el máximo, se presenta a modo de historieta en GeoGebra, como se muestra en la **Figura *20***.

Figura 20

Historieta del método de Fermat en GeoGebra



Nota. https://www.geogebra.org/m/zzbkqwwb

Con respecto a esta actividad, según Maza (1994) corresponde a la estrategia de resolución de problemas históricos y la construcción de historias en torno a problemas críticos del pasado, porque se plantea un problema de maximizar el área de un rectángulo con perímetro fijo, que se resuelve mediante el método de Fermat desde la visualización, el análisis variacional y tendencial en GeoGebra, siendo estos, atisbos para introducir la noción del concepto de derivada desde el cálculo infinitesimal.

5.1.2.2 Límite del cociente infinitesimal con Newton y Leibniz

De acuerdo con el análisis exhaustivo de la construcción del concepto de la derivada desde la perspectiva histórica-epistemológica de Vrancken y Engler (2013) afirman que “para llegar a lo que actualmente se conoce como derivada, formalizando una definición rigurosa en términos del límite, tuvieron que transcurrir varios siglos de desarrollo de las ideas matemáticas relacionadas con las tangentes, con la variación y con los infinitesimales” (p. 69). Así que, el buen desarrollo de las actividades descritas con anterioridad prepara el terreno para intentar construir la noción del concepto de la derivada desde los núcleos conceptuales (cambio, variación, aproximación, tendencia) por medios infinitesimales. En este sentido, los indicadores de logro para esta última actividad se proponen en la **Tabla *19***.

Tabla 19

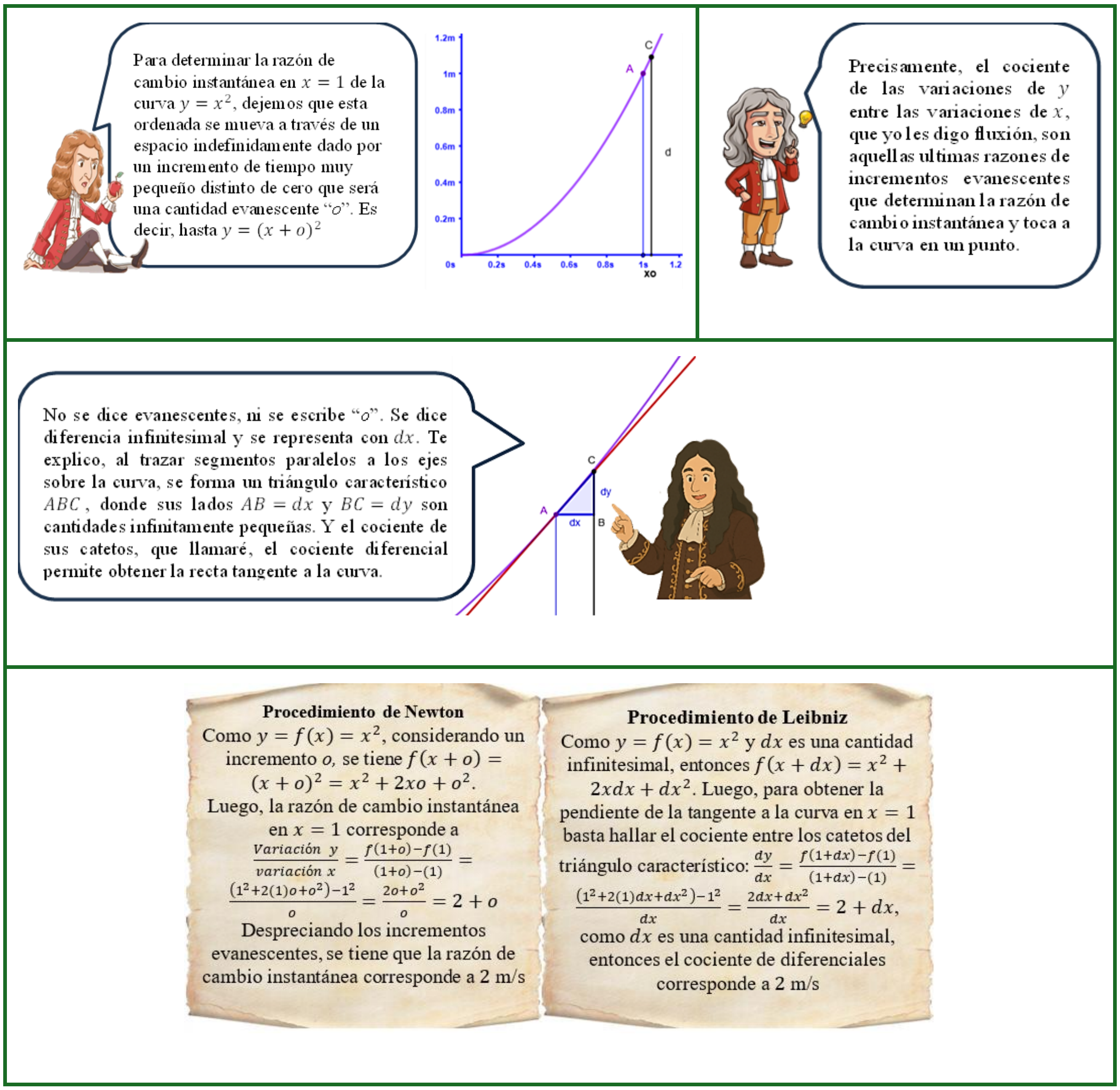
Indicadores de logro para la noción del concepto de derivada

	Indicador de logro:	**Si**	**No**
Cognitiva	Interpreta la noción de derivada como razón de cambio instantánea y establece su relación con la recta tangente a una curva		
Procedimental	Aplica el límite del cociente infinitesimal para determinar tasas de cambio instantánea		
Actitudinal	Identifica y contrasta los principales aportes de Newton y Leibniz en la construcción del concepto de derivada		

Se considera pertinente, que los estudiantes aborden las mismas ideas que desarrollaron Newton y Leibniz en la construcción del concepto de derivada. Por ello, se presenta en forma de historieta un ejemplo donde se conjugan la visión cinemática de Newton y la perspectiva geométrica de Leibniz para resolver un problema de velocidad instantánea (ver **Figura *21***). Este ejemplo integra un lenguaje matemático con conceptos fidedignos de Newton y Leibniz. A este respecto, Maza (1994) afirma que “es la forma más fiel de comprender históricamente matemáticas” (p. 26).

Figura 21

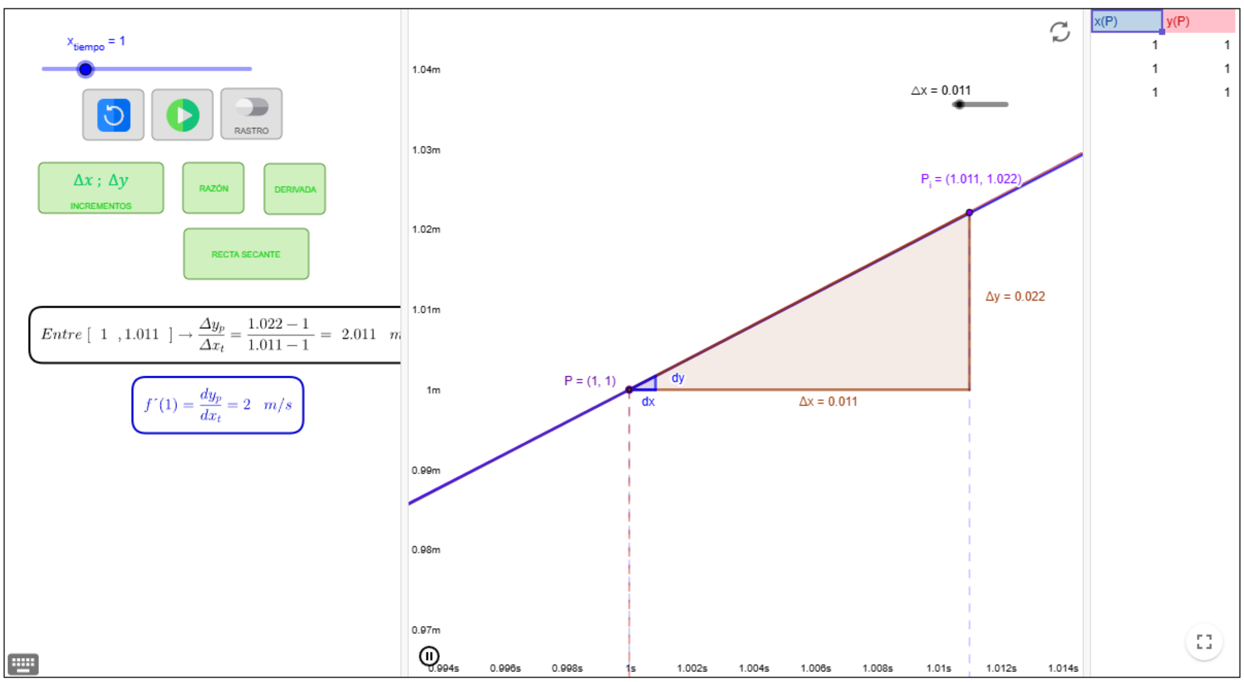
Historieta del método de Newton y Leibniz del cociente incremental



La orientación guiada del profesor en este ejemplo es fundamental para la compresión de la “tasa de cambio instantánea”. Así como en la secuencia didáctica de Vrancken y Engler (2014), se les puede pedir a los estudiantes que calculen la velocidad promedio en intervalos cada vez más próximos a $x = 1$, de $f(x) = x^\wedge 2$, por ejemplo, calcular la velocidad promedio entre $x = 1$ y $x = 1.1$, luego, $x = 1.01$, $x = 1.001$, así, sucesivamente. Paulatinamente, mostrar desde el registro tabular y gráfico de estos resultados, (preferiblemente en GeoGebra). Al compara con los valores que toma la pendiente (que corresponde a la velocidad promedio) en la medida que se van acercando los dos puntos, permitirán al estudiante comprender que, al acercarse cada vez más estos dos puntos, la velocidad en ese instante es de 2 m/s. Como se muestra en la **Tabla 20**.

Tabla 20

Análisis preliminar de razón de cambio instantánea



Nota. El applet de Geogebra es adaptado de Rodríguez (2020) https://www.geogebra.org/m/ggujpq94

Es allí, donde se vislumbra intuitivamente la noción de derivada. Con estas ideas claras, será un poco más fácil asimilar las ideas de Newton y Leibniz. Para afianzar más este concepto se recomienda ver detenidamente el video “La paradoja de la derivada | Capítulo 2, Esencia del cálculo” de Grant Sanderson publicado en su canal de YouTube s3Blue1Brown (29 abr 2017). Se espera que después de observar el video y tomar nota de los ejemplos explicados hasta ahora, el estudiante logre comprender que la noción de derivada resulta del cociente incremental, es decir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \; cuando \; dx \; \to 0$$

Cabe destacar que Vrancken y Engler (2013) afirman que:

> El método de determinar la tangente a partir de la pendiente de una secante y hallar el límite de esa pendiente cuando uno de los puntos de corte se aproxima tanto como se quiera al otro, fue el método utilizado por Newton para el cálculo de velocidades instantáneas. (p. 69)

En continuidad, se presenta un problema de lanzamiento vertical, que consiste en determinar la velocidad, para varios instantes (ver **Figura 22**). Esta actividad está acompañada de una simulación adaptada de Rodríguez (2020), dado que permite usar múltiples representaciones de los objetos matemáticos involucrados.

Figura 22

Problema del lanzamiento vertical

Al analizar el lanzamiento vertical de una pelota, se observa que la velocidad de cambio no es constante en cada instante. Para estudiar este fenómeno, se realizó un experimento donde se midió la posición en metros durante un período de 2 segundos dada por $P(x) = -5x^2 + 10x$. **Determina** la velocidad instantánea para $x = 0.5s, x = 1s$ y $x = 1.5s$

1. Abre el archivo de GeoGebra: https://www.geogebra.org/classroom/xgyudumj y responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las variables relevantes en este problema de lanzamiento vertical? **Explica** tu respuesta.

b) ¿Cómo se relaciona la altura del objeto con el tiempo transcurrido? **Expresa** la altura en función del tiempo. **Explica** tu respuesta

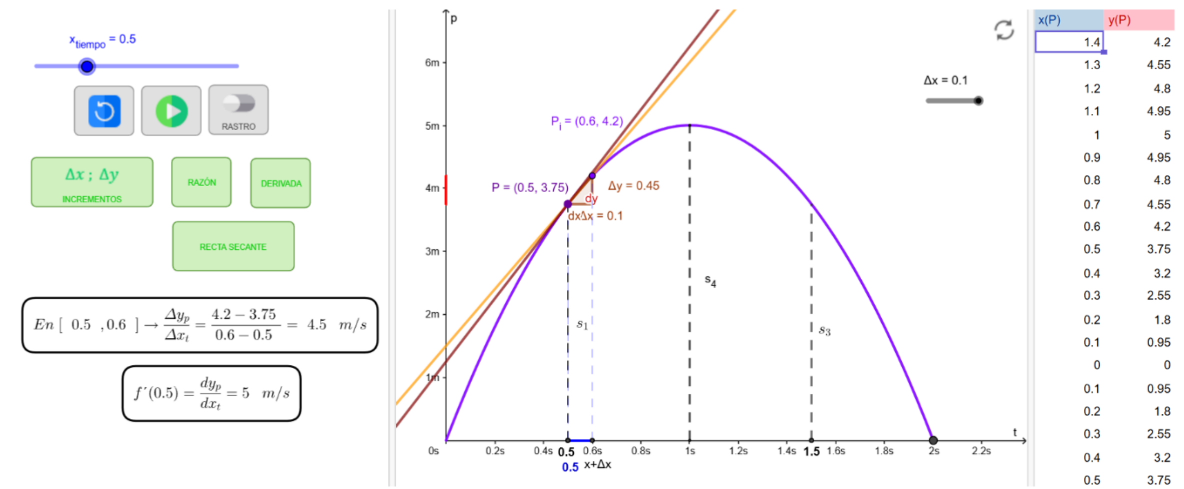
c) ¿A qué altura se encuentra la pelota en los instantes, $x = 0.5s$, $x = 1s$ y $x = 1.5s$? **Justifica** tu respuesta

d) ¿En qué intervalos de tiempo, la variación de la función fue creciente?, ¿en qué intervalos fue decreciente? y ¿en qué momento fue cero? **Explica** tu respuesta

Después de familiarizarse con el problema, se procede a fomentar procesos matemáticos para el desarrollo conceptualización de la derivada. Así que se les solicita a los estudiantes abrir el simulador y seguir las indicaciones, como se muestra en la **Figura *23***.

Figura 23

Simulación para la comprensión de la derivada adaptado de Rodríguez (2020)



2. Abre el archivo de GeoGebra: https://www.geogebra.org/classroom/wqhgxzza y responde las siguientes preguntas:

a) Activa la opción *incrementos* y la opción *razón*, ¿Qué se observa sobre la gráfica en $x = 0.5$? ¿Qué relación tiene *velocidad promedio* con $\frac{\Delta y}{\Delta x}$? ¿Cuál es la velocidad promedio del objeto durante el intervalo de tiempo $[0.5\,, 0.6]$? ¿Es la velocidad real del objeto en cada instante dentro de ese intervalo? **Explica** tu respuesta.

b) Activa la opción *recta secante*, ¿Qué sucede con la recta secante a medida que el segundo punto de intersección P_i se acerca al punto P?¿A qué se asemeja esta recta en el límite? **Explica** tu respuesta.

c) ¿Cómo se relaciona la velocidad instantánea del objeto en un momento dado con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la altura en función del tiempo en ese mismo instante? **Explica** tu respuesta.

d) Activas la opción *derivada* y haz zoom hasta observar el triángulo característico ¿Cómo podemos **expresar** y **calcular** matemáticamente la *velocidad instantánea* del objeto en el tiempo $x = 0.5$? ¿reconoces alguna estructura matemática familiar en esta expresión? *Sugerencia:* Aplica el método de Newton y Leibniz para determinar la razón de cambio instantánea. **Justifica** tus procedimientos

e) ¿En qué otros contextos de la física o la vida cotidiana podríamos aplicar el concepto de derivada como razón de cambio? **Menciona** algunos ejemplos.

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Observe que el proceso es muy similar al ejemplo, es decir, se empieza calculando la velocidad promedio para valores cercanos a un tiempo específico, analizando la tendencia de la pendiente de la recta secante a medida que el punto de intercesión se va acercando cada vez más al punto de estudio. Es importante que el estudiante tenga claro la relación estrecha entre la pendiente de la recta y la razón de cambio, para que al introducir la idea de derivada con el límite de forma gráfica y numérica observe que la recta secante se va transformando en la recta tangente y al mismo tiempo la velocidad promedio en la velocidad instantánea. Finalmente, se introduce la fórmula de la definición del cociente incremental adquirida de los métodos de Newton y Leibniz para encontrar el valor de la velocidad instantánea. En relación con esta actividad, Sánchez-Matamoros et al. (2008) afirman que “si se combinan en la enseñanza del concepto de derivada las tres aproximaciones citadas (como límite del cociente incremental, como pendiente de la recta tangente y como tabla de valores), se facilita la comprensión del estudiante (p. 283).

5.2 Desarrollo de competencias a través de la mirada histórico-epistemológica

A diferencia del análisis a priori previamente descrito, el objetivo de esta sección es analizar la secuencia didáctica desde estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje (Molina et al., 2011). Por tanto, se presenta un estudio cualitativo de las formas de aprendizaje de la derivada de acuerdo con el desempeño de los estudiantes, la calidad de la secuencia y las características del grupo.

Este pilotaje se realizó con 23 estudiantes del Semillero Matemático Euler de la UIS, donde se implementó una prueba diagnóstica, dos talleres (2 clases de 4 horas) y una evaluación final para valorar el impacto del diseño. Es importante mencionar que solamente se analizará el progreso de 17 estudiantes porque fueron quienes participaron en la mayoría de las actividades a diferencia de los restantes que por motivos personales no asistieron a algunas sesiones. Es importante tener en cuenta que la muestra no es representativa, así que los datos son muy sensibles. Para poder comparar los porcentajes de estudiantes que alcanzaron o no los indicadores de aprendizaje de cada actividad, se aplican el porcentaje sobre los 17 estudiantes, así haya estudiantes con inasistencia.

A continuación, en la **Tabla 21** se muestra un panorama general de los resultados, donde se compara la prueba diagnóstica y la evaluación final, esta última de mayor dificultad.

Tabla 21

Resultados de la Prueba Diagnóstica vs Resultados de la Prueba Final

		Prueba Diagnóstica	*Prueba Final*	
	Promedio	27/50 pts.	30,4/50 pts.	
Niveles	Insuficiente	5.9 %	23.5 %	⬆ -
	Mínimo	47.1 %	23.5 %	⬇ +
	Satisfactorio	41.2 %	17.6 %	⬇ -
	Excelente	5.9 %	35.3 %	⬆ +

Nota. Esta tabla corresponde a los resultados obtenidos de 17 estudiantes. Las flechas indican un incremento o disminución positiva o negativa con respecto a la prueba diagnóstica.

Tenga en cuenta que los niveles de desempeño (Insuficiente, mínimo, satisfactorio, excelente) describen cualitativamente las competencias de los estudiantes en cada prueba. En este sentido, un estudiante promedio en el nivel *excelente* muestra un desempeño sobresaliente en las competencias esperadas para el área y grado evaluado. En el nivel *satisfactorio*, muestra un desempeño adecuado en las competencias exigibles para el área y grado evaluado. En el nivel *mínimo*, muestra un desempeño bajo en las competencias y en el nivel *Insuficiente* no supera las preguntas de menor complejidad de la prueba (Icfes, 2018 citado en Icfes, 2020).

En la prueba diagnóstica, se observa que el 53% de los estudiantes se encuentran en los niveles de insuficiente y mínimo, es decir, que evidenciaron serias dificultades en los objetos básicos del cálculo (números reales, funciones, noción de límite). Por ello, el primer taller consistió en reforzar el concepto de función, de razón de cambio, de recta tangente y la noción de límite desde problemas históricos con Galileo, Euclides y Zenón.

Por otra parte, el segundo taller se orientó hacia la noción de derivada como el límite del cociente incremental desde episodios históricos de Fermat, Newton y Leibniz. Finalmente, se realizó una evaluación final, donde se observa que el 53.9% de los estudiantes se ubican en los niveles de satisfactorio y excelente, es decir que lograron determinar razones de cambio instantáneas en problemas cinemáticos.

Estos resultados, muestran una divergencia notable entre el incremento negativo del 17.6% de estudiantes en nivel insuficiente, junto a una reducción del nivel mínimo. En cambio, un incremento positivo del 29.4% en el nivel excelente y una reducción del nivel satisfactorio en la prueba final, respecto a la diagnóstica. Este simultáneo incremento discrepante en “insuficiente” y “excelente” puede atribuirse a la profunda complejidad de las nociones propias del cálculo y al amplio esquema de dificultades iniciales que presentaban los estudiantes frente a un tiempo dispuesto para las actividades, que no fue suficiente para el desarrollo de todas las actividades, revelando la necesidad de ajustes curriculares para su implementación. En las secciones siguientes, se presenta a mayor detalle el análisis de los hallazgos del pilotaje de la secuencia didáctica.

Siguiendo esta misma línea, las tres grandes categorías de análisis que guiarán este capítulo son los resultados de la prueba diagnóstica, el desarrollo de las **Competencias Cognitivas, Competencias Procedimentales y Competencias Actitudinales** y los resultados de la prueba final evaluadas a la luz del **potencial didáctico** del enfoque **histórico-epistemológico**.

5.2.1 Resultados de la prueba diagnóstica

El objetivo de la prueba diagnóstica consistió en identificar el nivel de conocimientos previos y habilidades procedimentales de los 17 de 23 estudiantes de décimo y undécimo grado provenientes de diferentes colegios públicos de Girón, Floridablanca y Bucaramanga. La prueba constó de 4 situaciones problemáticas: La paradoja de Zenón (noción de límite), la recta tangente a una curva según Euclides, las razones de cambio de Galileo y el área máxima de un rectángulo con Fermat (concepto de función). A continuación, se profundiza en las dificultades y fortalezas según los resultados de los estudiantes en la prueba diagnóstica (ver **Tabla** ***22***).

Tabla 22

Resultados de la prueba diagnóstica

Nombre	**Grado**	**Noción de límite**	**Noción de tangencia**	**Razón de cambio**	**Noción de función**	**Total**	**Nivel**
Est1	11	12 ✅	4 ❌	3 ❌	3 ❌	22	Mínimo
Est2	11	3 ❌	3 ❌	10 ✅	5 ❗	21	Mínimo
Est3	10	3 ❌	6 ❗	12.5 ✅	9,5 ✅	31	Satisfactorio
Est4	11	4 ❌	4 ❌	10 ✅	6 ❗	24	Mínimo
Est5	10	6 ❗	4 ❌	12.5 ✅	9 ✅	31.5	Satisfactorio
Est6	10	6 ❗	5 ❗	12.5 ✅	8 ❗	31.5	Satisfactorio
Est7	10	7 ❗	4 ❌	5 ❗	7 ❗	23	Mínimo
Est8	11	11 ✅	0 ❌	12.5 ✅	8 ❗	31.5	Satisfactorio
Est9	11	0 ❌	1 ❌	6 ❗	0 ❌	7	Insuficiente
Est10	10	10 ✅	4 ❌	10 ✅	7 ❗	31	Satisfactorio
Est11	11	6 ❗	5 ❗	12.5 ✅	3 ❌	26.5	Mínimo

Est12	10	4	❌	5	❗	10	✅	5	❗	24	Mínimo
Est13	10	9.4	✅	7	❗	12	✅	8	❗	36,4	Satisfactorio
Est14	11	11	✅	7	❗	12.5	✅	10	✅	40.5	Excelente
Est15	10	10	✅	8	❗	9	✅	7	❗	34	Satisfactorio
Est16	11	3	❌	4	❌	7	❗	6	❗	20	Mínimo
Est17	10	0	❌	5	❗	12	✅	7	❗	24	Mínimo
Promedio		**6.2**	❗	**4.5**	❗	**9.9**	✅	**6.4**	❗	**27.0**	Mínimo

Nota. Cada concepto básico del cálculo tiene una nota máx. de 12.5 pts. Los indicadores bien (✅), regular (❗) y deficiente (❌) corresponden al nivel de progreso en sus procedimientos.

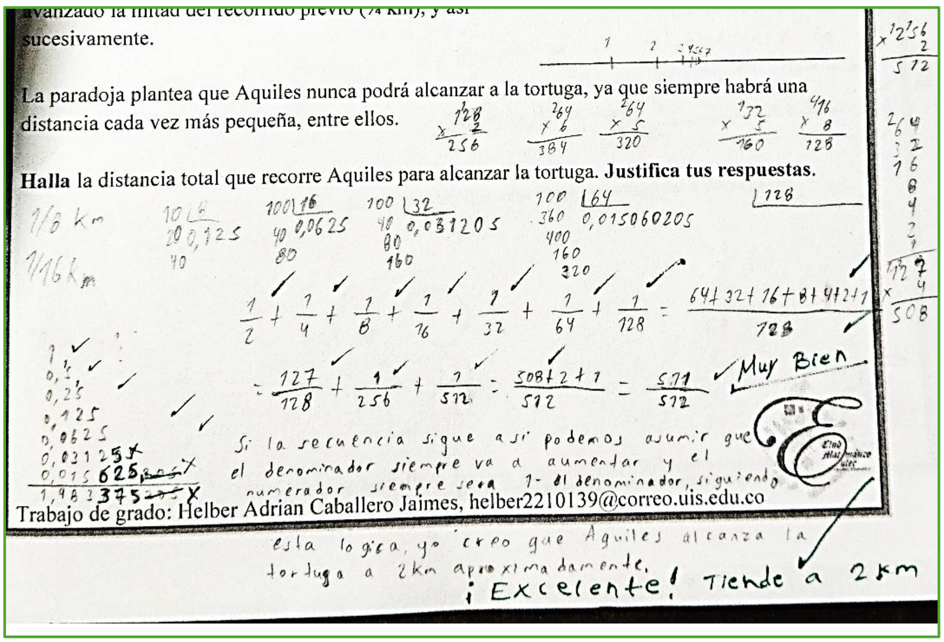
En general, los resultados son insatisfactorios, la mayoría de los estudiantes presentan dificultades en sus saberes previos como noción de límite, la noción de recta tangente, el concepto de razón de cambio, el concepto de función y sus conceptos asociados: aproximación, variable, dependencia, creciente, continuidad, etc. Todas estas dificultades corroboran los resultados descritos en la problemática.

El estudio de la **noción de límite**, el problema de Aquiles y la tortuga generó controversia y diversidad de argumentos entre las respuestas de los estudiantes. El promedio de la nota fue de 6.2 de 12.5 puntos. Por un lado, los estudiantes Est2, Est3, Est4, Est12, Est16 afirmaron que "siempre habrá una distancia entre ellos, lo que llegará a que nunca alcance a la tortuga, lo que lo llevará a recorrer una distancia infinita". Y una dificultad común entre Est2 y Est4 fue considerar la suma sin el patrón correcto: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}$... Esta dificultad coinciden con las conclusiones de Gonzales et al. (2013), quienes sostienen que la concepción del infinito potencial predomina en los estudiantes al analizar procesos infinitos.

En contraparte, los estudiantes Est1, Est7, Est8, Est15 por encima de la media, realizan sucesivas sumas de las distancias que recorre Aquiles y la tortuga, en su forma de fracción, decimal y en metros respectivamente. Concluyen que Aquiles alcanza la tortuga a los 2km, excepto Est15, en un error de una división hace que la suma resulte 2100.3 m. A continuación, en la **Figura *24*** se presenta uno de los mejores procedimientos.

Figura 24

Procedimiento de exploración para el problema de Aquiles y la tortuga



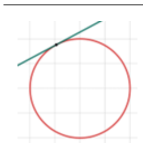
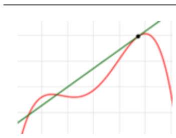
Nota. Procedimiento de la Est1

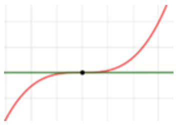
Si bien, el procedimiento de la Est1 no es representativo en el grupo, se destaca su habilidad para coordinar múltiples representaciones, habilidad cognitiva que consiste reconocer, interpretar, construir y transformar representaciones (Fiallo y Parada, 2018). Este factor le demando más tiempo, así que podría haber influido en su desempeño deficiente en los demás ejercicios. Por otra parte, llama la atención que obtuvieron una nota alrededor del promedio, escriben la suma de las distancias recorridas por Aquiles y al mismo tiempo escriben al lado las distancias de la Tortuga, al comparar la suma de las fracciones, Est5 y Est10 consideran que "Siempre llevaron menos de 2km, pero Aquiles nunca la alcanzará, aunque en la ∞P [infinito paso] estarán infinitamente cerca pero no en el mismo punto" a diferencia de Est13 que afirma que sí la alcanzará a los 2km. Según Hitt (2003) citado en Gonzales et al. (2013) señala que "el infinito es un obstáculo para el aprendizaje del límite, ya que, según sus estudios, los alumnos confunden entre procesos infinitos (infinito potencial) y situación límite (culminación del proceso infinito, infinito actual)" (p. 2). Por ello, el primer taller de refuerzo aborda la noción de límite desde estos dos enfoques del infinito.

En el estudio de **la recta tangente a una curva**, la mayoría de los estudiantes seleccionaron las gráficas 1 y 3, justificando que "una recta es tangente cuando toca, pero no corta". Sin, embargo, esta justificación es contradictoria con la gráfica 3 dado que la recta tangente atraviesa la curva. Esto es un claro indicio de un conflicto cognitivo. Recordemos que, desde el análisis histórico, el problema de hallar la recta tangente a una curva perduró por mucho tiempo sin resolverse, y fue fundamental para dar surgimiento al cálculo como aseveran Ávila et al. (2013), Boyer (1968/1986), Vega (2019) y Vrancken y Engler (2013). A continuación, en la **Tabla *23*** se muestra la gráfica que seleccionaron y los términos más empleados en su justificación:

Tabla 23

Nociones de recta tangente a una curva en la prueba diagnóstica

Gráfica	Estudiantes	Términos más empleados	Noción matemática
	Est3, Est5, Est6, Est10, Est13, Est14, Est15	"toque una vez y no la atraviese", "toca en un solo punto"	Toca en un punto especifico y no la atraviesa
	Est1, Est12, Est15	"Toca, pero no la corta", "la curva toque y no la corta"	

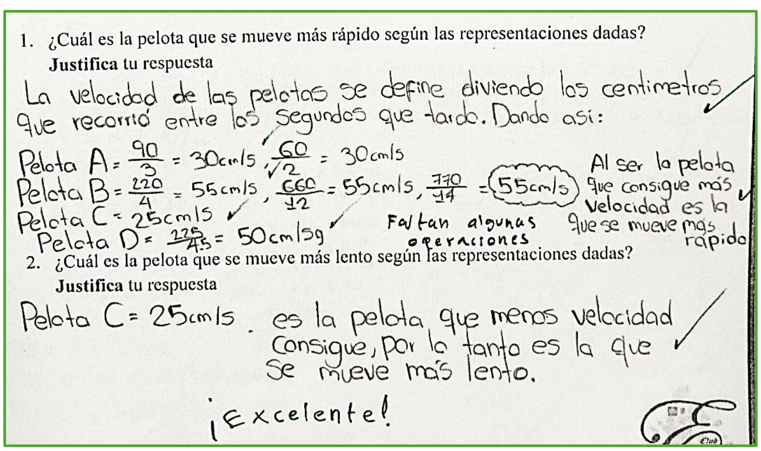
	Est2, Est3, Est4, Est5, Est6, Est7, Est13, Est14, Est15	“toca, pero no corta”, “toca en un solo punto”, “que no corte la recta”

La noción de los estudiantes no contempla la dirección y el comportamiento local de la curva, ni tampoco la pendiente de la recta. El predominio geométrico que caracteriza a la concepción de tangencia a una curva se caracterizó como un obstáculo epistemológico desde el análisis histórico-epistemológico. Sin embargo, se destaca la respuesta de Est15, consideró la idea de que “se mantenga la curva pegada a la tangente", permitiéndole afirmar que "la gráfica 1, claramente es tangente, ya que no la corta. La grafica 2, al principio no es tangente pero después sí. La grafica 3 es tangente".

En cuanto al concepto de **razón de cambio**, los resultados aparentan ser muy buenos, el promedio estuvo en 9.9pts de 12.5. De hecho, los estudiantes Est2, Est3, Est4 Est5, Est6, Est8, Est10, Est11, Est12, Est14 determina las razones de cambio de cada pelota según las funciones lineales en sus distintas representaciones en el contexto cinemático (ver **Figura *25***).

Figura 25

Procedimiento del problema de hallar razones de cambio en la prueba diagnóstica



1. ¿Cuál es la pelota que se mueve más rápido según las representaciones dadas?
Justifica tu respuesta

La velocidad de las pelotas se define diviendo los centimetros que recorrió entre los segundos que tardo. Dando así:

Pelota A $= \frac{90}{3} = 30$cm/s, $\frac{60}{2} = 30$cm/s
Pelota B $= \frac{220}{4} = 55$cm/s, $\frac{660}{12} = 55$cm/s, $\frac{770}{14} = 55$cm/s
Pelota C = 25cm/s
Pelota D $= \frac{225}{4.5} = 50$cm/s

Faltan algunas operaciones

Al ser la pelota que consigue más velocidad es la que se mueve más rápido

2. ¿Cuál es la pelota que se mueve más lento según las representaciones dadas?
Justifica tu respuesta

Pelota C = 25cm/s. es la pelota que menos velocidad consigue, por lo tanto es la que se mueve más lento.

¡Excelente!

Nota. Procedimiento de Est5

Estos resultados son alentadores, de hecho, Carlson et al. (2015) explican que cuando un estudiante empieza a razonar sobre cómo los valores de entrada y los valores de salida de una función cambian juntas, ellos serán capaces de distinguir los diferentes tipos de funciones.

Finalmente, en el estudio de la **noción de función**, el promedio fue de 6.4pts de 12.5pts. Los procedimientos no alcanzaron las expectativas del análisis a priori. Por ejemplo, los estudiantes Est1, Est4, Est7 consideran medidas longitudinales enteras, en consecuencia, afirman que las dimensiones son 3cm y 4cm, la diferencia de sus notas en la tabla de los resultados se debe a que Est1 no justifica, Est4 halla para varios casos particulares y Est7 expresa la relación del área entre sus lados. En cambio, los estudiantes Est8, Est10 y Est13 si consideraron números racionales en su representación decimal, pero consideran que el cuadrado no es un rectángulo, así que, dan como respuesta 3,4cm y 3,6cm.

Por otro lado, Est3, Est6, Est15, Est16 y Est17 plantean las relaciones entre el área y sus lados $A = b\ x\ a$, y la relación entre sus lados 2x + 2y = 14 → x + y = 7$2x + 2y = 14 \rightarrow x + y = 7$ y reconocen que el área máxima es cuando los lados son iguales (cuadrado) sin embargo, ninguno expresó el área en función de un lado, ninguno uso razonamientos analíticos a excepto de Es14 que tuvo un acercamiento. Por ejemplo, los estudiantes Est3 y Est5, realizan una tabla de valores, donde obtienen y comparan diferentes áreas de casos particulares dando con la respuesta correcta. En cambio, los Est6, Est15, Est17, Est16 sin justificar parten de la suposición de que debe ser un cuadrado, de esta manera, hallan los lados es 3.5cm y 3.5cm.

Esta carencia recurrente de razonamientos algebraicos y analíticos en la justificación de sus conjeturas concuerda con los mismos análisis descritos por Fiallo y Parada (2018), a este respecto sugieren que "estos procedimientos empíricos y concepciones erróneas las debe aprovechar el profesor para reflexionar sobre los conjuntos numéricos, las propiedades del rectángulo y la necesidad del uso de reglas teóricas y otros conceptos matemáticos para la resolución de problemas” (p. 192).

5.2.2 Análisis del desarrollo de las competencias cognitivas

Este es el corazón del análisis cognitivo dedicado a evaluar cómo la perspectiva histórica-epistemológica utilizada en el diseño de dos talleres impactó didácticamente en la enseñanza y aprendizaje de la derivada en un grupo de estudiantes de décimo y undécimo grado. Este pilotaje da cuenta de evidencias de cómo estudiantes estructuran “progresivamente el Cálculo a partir de nociones cotidianas y de los interrogantes que ellas plantean” (Artigue, 1995, p. 117). Este análisis se desarrolla en dos partes: La primera, se evalúa los alcances de la competencia cognitiva del primer taller en función de los indicadores de logro alcanzados de acuerdo con el progreso de los estudiantes en cada actividad. Asimismo, la segunda parte, se centra en los indicadores de logro asociados al segundo taller de acuerdo con cada actividad.

Para empezar, en la **Tabla 24** se muestra los indicadores de logro para la competencia cognitiva del primer taller:

Tabla 24

Indicadores de logro de la competencia cognitiva del primer taller

	Competencia Cognitiva	Actividad	Indicadores de logro	Si	No	S/E	N
Taller 1	Comprende y argumenta los fundamentos conceptuales y teóricos de los objetos básicos del Cálculo (concepto de función, noción de límite y continuidad) en contextos matemáticos y no matemáticos	Concepto de función y razón de cambio	Comprende el concepto de función como una relación de interdependencia entre magnitudes variables.	88%	0%	6%	16
		Concepto de recta tangente a una curva	Reconoce la recta tangente a una curva, como aquella que pasa por un punto y comparte la misma dirección de la curva en ese punto.	71%	0%	23%	16
		Noción de límite	Diferencia las dos formas de interpretación del infinito, aquellas situaciones de procesos de aproximación infinitos (infinito potencial) de las situaciones límite entendida	35%	6%	41%	14

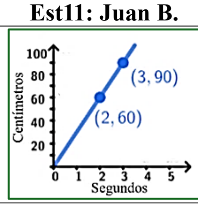
	como la culminación del proceso infinito (infinito actual)

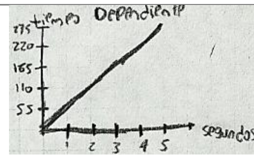
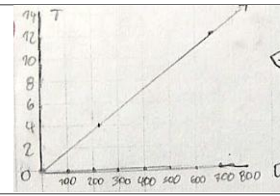
Nota. EL símbolo S/E significa Sin Evidencia y N es el número de estudiantes que participaron en el primer taller.

En primer lugar, la actividad "*Concepto de función y razón de cambio*" incluyó dos situaciones problemáticas. La primera "Descubriendo razones de cambio con Galileo con el experimento de Galileo" tienen por énfasis introducir el concepto de función como la generalización de la interdependencia entre dos variables (Fiallo y Parada, 2018) y el concepto de razón de cambio como la medida de cuánto cambia una magnitud con respecto a otra magnitud variable, en palabras de Carlson et al. (2002/2003) es la coordinación de dos cantidades que varían una respecto a la otra. Esta actividad se desarrolló en grupos de 5 estudiantes, a cada grupo les correspondió una de las representaciones de cada pelota (gráfica, tabular, algebraica o lenguaje natural). Para precisar el análisis, en la **Tabla 25** presentamos las respuestas de Est11, Est14 y Est15, en algunas de las preguntas en el desarrollo del primer taller:

Tabla 25

Rejilla de respuestas de y Concepto de función y razón de cambio

Estudiantes	**Est11: Juan B.**	**Est14: Julián M.**	**Est15: Julián V.**
Ítems		Segundos / centímetros 4 / 220 12 / 660 14 / 770	Esta pelota rueda 225 centímetros en 4.5 segundos
A) ¿Qué magnitudes varían al hacer rodar las pelotas?	Tiempo(x) independiente y distancia(y) dependiente	Distancia y tiempo	Las magnitudes que varían son la distancia, tiempo, velocidad.
B) ¿Qué valores puede tomar la distancia y el tiempo?	Números reales positivos	Valores positivos	sabiendo que no pueden ser negativos tomaron un valor natural
…			
E) ¿Cuál es la pelota más rápida y cuál es la pelota más lenta?	b) 55cm/s	B→55cm/s C→25cm/s	La pelota más rápida es la B, la más lenta la C
F) Establece la razón entre la posición y el tiempo recorrido	P=30t	La relación se llama pendiente (55cm/s)	La razón es posición/tiempo recibe el nombre de velocidad

de cada pelota ¿Qué nombre recibe?			
G) Expresa la distancia de cada pelota en función del tiempo. Explica tu respuesta	T=D/30	f(A) = 30x cm/s, f(B)=55x cm/s, f(C)=25x cm/s, f(D)=50x cm/s, x siendo el tiempo transcurrido	V=D/T → D=V*t
h) Elabora una gráfica de la función de la pelota más rápida con respecto al tiempo. Explica cómo varían las magnitudes en la gráfica		*[No alcanza por cuestiones de tiempo]*	

Nota. Los ítems (c, d) se analizan en la dimensión procedimental

Con respecto al **concepto de función** encontramos que 15 de 16 estudiantes escriben que la distancia recorrida depende del tiempo en respuesta al ítem (a), desde la historia estas ideas fueron las primeras nociones del concepto de función, pues, Galileo en la Edad Moderna (s. ~XVII) en sus experimentos de caída libre y de rodar bolas en un plano le llevaron a estudiar la relación de dependencia entre magnitudes cinemáticas y representarlas de diferentes maneras, que es precisamente, la finalidad de esta actividad, retroalimentar el concepto de función no como una correspondencia entre dos conjuntos sino como sugiere Fiallo y Parada (2016) desde los núcleos conceptuales (cambio, variación, aproximación y tendencia) como una construcción dinámica promoviendo las habilidades de representación de la interdependencia entre las magnitudes, como se evidencia con el estudiante Est14.

En cuanto al **concepto de razón de cambio**, entre los estudiantes es entendida como el cociente entre la distancia y el tiempo, cabe destacar, que algunos escriben con certeza que representa la velocidad, por ejemplo, Est14 (ver ítem f en la **Tabla 25**). Mejor aún, hay quienes la relacionaron con la pendiente, tal como Est15. Se considera pertinente que se construyan las diferentes representaciones (tabular, gráfica y algebraica) de la posición, velocidad y aceleración para dar claridad al estudiantado sobre las características de cada una y evitar confusiones entre sus interpretaciones.

A propósito, en cuanto a **los números reales**, se encontró en respuesta del ítem (b) que Est1 y Est5 afirman que toman valores naturales positivos y Est3 afirma que valores enteros, el resto afirman que toma valores positivos, y algunos precisan que reales positivos. Además, en la prueba diagnóstica fueron Est1, Est4, Est7 quienes en el último problema no dieron con la respuesta correcta debido a que solamente consideraron valores enteros positivos. Al respecto Artigue (1995) explica que los conocimientos en la escuela también pueden transformarse en obstáculos, así pues, al generalizar propiedades de orden y operaciones de otros conjuntos numéricos, por ejemplo, al aplicarlos en los reales "les es difícil encontrar natural que el cuadrado de un número pueda ser inferior al número mismo, o que una división pueda producir un número más grande que el dividendo" (Artigue, 1945, p. 112).

En segundo lugar, la actividad "*El concepto de tangente a una curva*" tuvo por objetivo abordar uno de los problemas del milenio: **La recta tangente a una curva**, que fue resuelto sino hasta la llegada del cálculo infinitesimal, hacia finales de la edad Moderna. En la prueba diagnóstica se implementó esta misma situación problemática, donde se encontró que 16 estudiantes (94,1%) comprenden la noción de recta tangente como aquella que "toca en un punto especifico y no la atraviesa" (Ver **Tabla *23***), y ninguno contemplo ideas de cambio, comportamiento u dirección a excepción de Est15. En cambio, en la implementación del taller con esta misma situación problemática, se logró que 12 estudiantes (71%) en efecto reconocieran la recta tangente a una curva como aquella que pasa por un punto y comparte la misma dirección de la curva en ese punto (ver **Tabla 26**), esto rompe con "la concepción estática de las matemáticas griegas que apartan de su propósito aquello que es susceptible de cambio, de variación" (Artigue, 1995, p. 112).

Tabla 26

Rejilla de respuestas de concepto de recta tangente a una curva

Estudiantes	Est5: David C.	Est12: Juan G.	Est14: Julián M.
a) ¿Cuáles gráficas cumplen que las rectas tocan localmente en un punto a la curva? Explica tu respuesta	Las tres graficas tocan localmente (o en un punto) las curvas por lo que las 3 son tangentes	En las 3 pero en la 2 solo es tangente a la curva en el punto señalado localmente	Todas porque en todas se corta un único punto localmente
b) ¿Cuáles gráficas cumplen que las rectas tangentes comparten la misma dirección de la curva? Explica tu respuesta	En las tres graficas comparten la misma dirección	En las 3 graficas cumplen que las rectas tangentes comparten la misma dirección de la curva pero en la 2 solo se cumple esto en el punto señalado localmente	Todas porque en las 3 curvas, la tangente corta un solo punto localmente, y además, comparten una misma dirección en esos puntos en cada curva
…			
d) ¿Cuáles podrían ser las condiciones necesarias para considerar una recta tangente a una curva? Explica tu respuesta	debe tocar un punto localmente y tener la misma dirección de la curva	una recta es tangente a una curva cuando esta recta la toca y tiene la misma dirección porque al tener la misma dirección no podrá tocar de nuevo a la curva localmente	Que corte en un solo punto localmente y que además comparta la misma dirección y pendiente en dicho punto

Nota. El ítem (c) se explica en el análisis actitudinal

Estos resultados descritos en la **Tabla 26** tienen su sustento en la actividad vivencial con orientación guiada, como se muestra en los fragmentos del video de la **Tabla 27**:

Tabla 27

Transcripción sobre la actividad de la recta tangente

2:01	1	P	Voy por mi caminito, ta, ta, ta, ta pum *[ubica un marcador tocando la cuerda]*, esa es tangente porque la toca. Esa es tangente porque la toca *[Ubica el marcador en otro punto]*. Pero fíjate que acá *[ubica el marcador sobre un punto de inflexión]* la corta pero también es tangente
	8	Est12	*[Pasa adelante y sigue las instrucciones del profesor]*
3:22	9	P	Por ejemplo, ahí, detente, pon una flechita con la misma dirección de la curva, ¿es tangente? Sigue caminando, detente, pon una flechita, ¿es tangente?
	10	Est16	Sí

	2	Est16	¿Qué?, si se corta también es tangente *[Otros estudiantes también se les escucha con intriga]*		11	p	Entonces, ¿qué condiciones deben cumplirse para que sea tangente? Una que la toque localmente (…) y además
	3	P	Entonces nos falta otra condición más para saber si es tangente				
	4	T	*[Empiezan a murmurar y debatir entre ellos]*		12	Est11	Dirección
	5	Est12	¿Qué cuando toque haya un cierto ángulo?, algo así		13	P	¿qué cosa?
2:25	6	Est6	Entonces toda función tiene una trayectoria		14	Todos	La misma dirección
3:02	7	P	En las funciones hay que analizar qué ocurre en ese punto a su alrededor. (…) ¿Alguien que quiera pasar?	4:49	15	P	Localmente, se refiere alrededor de ese punto, debe cumplirse ¿qué cosa?
					16	T	Que la toque y tenga la misma dirección

Entre los fragmentos 1-6 se creó un conflicto cognitivo, dado que los estudiantes tratan de buscar nuevas explicaciones ante el contraejemplo del fragmento 1, que contradice su noción generalizada de que “la recta tangente no atraviesa la curva”. De hecho, Artigue (1995) recurre a Brousseau (1983), y Sierpinska (1988) para explicar que la naturaleza de estos conflictos cognitivos claves en el Cálculo es esencial para alcanzar una comprensión más sólida de los objetos de estudio.

En tercer lugar, la anhelada actividad “Aquiles y la Tortuga”, se desarrolló en la segunda clase con 14 estudiantes (Est1, Est4, Est11 no asistieron), así como sugiere Maza (1994) de introducir un nuevo concepto mediante problemas históricos, se introdujo un acercamiento al concepto de límite mediante la resolución de la paradoja de Aquiles y la tortuga de Zenón (~ s.V a. C) esta consistió en hallar la distancia total que recorre Aquiles para alcanzar la Tortuga. Como ya es sabido, en la prueba diagnóstica se precisan tres importantes argumentos, quienes consideran que la distancia es infinita (Est2, Est3, Est4, Est12, Est16), quienes encuentran una distancia total (Est1, Est7, Est8, Est13, Est15) y quienes pese a reconocer que no sobrepasa los 2km consideran que Aquiles nunca alcanza la Tortuga (Est5, Est10). Es importante dar claridad que el 41% (7 de 17 estudiantes) sin evidencia (S/E) en la **Tabla 24**, se debe a un descuido en la recolección de datos, pues, no se logró tomar todas las fotos y videos suficientes para su respectiva revisión individual. A continuación en la **Tabla 28** se presenta parte de la discusión en clase:

Tabla 28

Discusión sobre la noción de límite

27/05/2025 03:29pm							
10:30	1	P	**Así es, ya lo vimos aquí 0.5, 0,25, después 0,125 y después otra vez la mitad y la mitad. Entonces a qué valor se aproxima**		17	P	**(…) El infinito lo podemos interpretar como una tendencia hacia algo, que no es exactamente ese valor, pero que tiende a ese valor. En cambio el infinito actual o en acto en cuando decimos la culminación de un proceso infinito, es decir el límite. (…). Es decir, en este proceso de la sumatoria, 0,9 y otro 9 y otro 9 y otro, ¿si hacemos todo ese proceso qué valor sería?, 1.999 si seguimos sumando, seria 1.9 periódico, si hacemos todo ese proceso a qué sería igual?**
	2	T	A 2		18	T	A 2 *[Se escuchan con intriga]*
25:40	3	P	qué pasa si colocamos toda la suma en la calculadora (…), prefiero usar GeoGebra. Listo, 1 + ½ + ¼ + 1/8 +. Qué coloco ahora		19	P	Para convencerlos ¿A qué es igual 1/3?
					20	T	0,3 periódico
					21	P	¿Cuánto es 1/3 +1/3 +1/3?
	4	Est17	1/16		22	T	3/3=1
	5	P	y ahora		23	P	¿y 0,3+0,3+0,3 periódico?
	6	Est17	1/32		24	T	0,9 periódico
	7	P	Y ahora 1/64		25	P	Y no es lo mismo que tenemos acá *[señala a las fracciones]*
	8	T	1/128 + 1/256 + 1/512 + 1/1024 + 1/2048 + 1/4096 + 1/8192		26	T	¡Oh!, *[varios de tapan la boca]* Impactados muchachos *[dice un estudiante]* Oh, impactado *[dice Est14]* *[Muchos les causó cierta expectación]*
	9	P	¿A qué valor está acercando?		27	P	Por tanto 0.9999 periódico es exactamente igual a
	10	T	2		29	T	1 *[Dicen algunos]*
	11	P	Si nosotros hacemos esa suma, nosotros nos damos cuenta de que se va acercando a ese valor. Se acerca a 2 ¿es 2 o no es 2?		30	P	Son iguales, y es por esta interpretación del infinito. Les pregunto ¿Aquiles la alcanza o no alcanza la tortuga?
					31	T	¡¡si!! *[Se escucha en coro]*
	12	T	*[Algunos dicen sí otros no]*		32	P	Si la alcanza en la culminación de ese proceso infinito (…)
	13	P	Recuerdan el problema que colocamos al inicio de 1/n, y nosotros dijimos que cuando n tiende a infinito ¿Qué ocurría?, 1/n tendía a	10:59	33	P	Para concluir, chicos, estas 2 interpretaciones del infinito deben saberlas usar de acuerdo con el contexto, vimos que 1/x cuando x tiende a infinito se aproxima a
					34	T	0
	14	T	Cero		35	P	Pero no es
	15	P	Pero no podía ser		36	T	0
	16	T	Cero		37	P	Pero en el límite es cero

En este dialogó se evidencia con claridad el proceso de asimilación de **la noción de límite**. Un primer acercamiento a las estrategias variacionales (comparación, seriación, predicción y estimación) se sustenta en los fragmentos 1-10 donde se discute las preguntas:

- (c) Si la distancia entre Aquiles y la tortuga se reduce a la mitad en cada paso ¿A qué valor se aproxima los términos a medida que Aquiles se acerca a la tortuga?
- (d) Si sumamos todos los intervalos de distancia (1 + ½ + ¼ + ⅛ + ...) ¿A qué valor se aproxima esta suma?

Desde el análisis histórico-epistemológico un primer obstáculo cognitivo caracterizado desde la antigüedad fue la abnegación de los procesos infinitos que dificultó comprender las cantidades infinitesimales. Y este obstáculo cognitivo se refleja en las respuestas de Est2, Est3, Est4, Est12, Est16, quienes consideran que “una suma infinita debe ser infinita”, sin embargo, en la discusión se escucha que afirma que distancia entre Aquiles y la tortuga se aproxima a cero y la distancia recorrida se aproxima a 2km.

Artigue (1995) y Gonzales et al. (2013) manifiestan que entre los estudiantes un común obstáculo cognitivo es la comprensión del término “límite” como una barrea intraspasable y no alcanzable o como el último término de un proceso. Precisamente, se aborda en la controvertida pregunta del fragmento 11, ¿es 2 o no es 2? Como se muestra en los próximos fragmentos, la discusión se orienta hacia a interpretación dual del infinito, infinito potencial e infinito en acto. A este respecto, Gonzales y coautores (2013) aseveran que “manejar los dos tipos de infinito resultan fundamentales para el desarrollo en la escuela de temas de Cálculo y Análisis” (p. 4), explica que el infinito potencial (visto como un proceso iterativo) es la primera etapa del trabajo intuitivo del concepto, y la acepción del infinito en acto (proceso infinito que culmina) hace parte del trabajo formal.

Esta transición entre las etapas de los intuitivo a lo formal, asimismo, del infinito potencial al infinito actual, generó un conflicto cognitivo entre los estudiantes, esto explica las expresiones de los estudiantes en el fragmento 26, cuando al comparar 1/3 + 1/3 +1/3 = 3/3 =1 con 0.999… les causa gran sorpresa que sean iguales. Cabe destacar, que estas modificaciones en sus estructuras cognitivas permitieron a los estudiantes asimilar que el límite de la sumatoria equivale a 2 km.

Es indiscutible aclarar, que el fundamento del concepto de límite recae en los núcleos conceptuales de la aproximación y la tendencia, es decir, el límite no es el valor de la función en un punto específico, sino el valor al que se aproximan las imágenes de la función f(x), a medida que la variable x se acerca por ambos lados.

En esta segunda parte del análisis de las competencias cognitivas evaluaremos el alcance de la compresión conceptual de la derivada y explicar por qué el contexto histórico fue promotor de la misma. A continuación en la **Tabla 29** se presenta los indicadores de logro del segundo taller:

Tabla 29

Indicadores de logro de la competencia cognitiva del segundo taller

	Competencia Cognitiva	Actividad	Indicadores de logro	Si	No	S/E	N
Taller 2	Comprende la noción de derivada como el límite del cociente infinitesimal través del estudio de episodios históricos que originaron este concepto.	Los infinitésimos	Interpreta los infinitesimales como una cantidad variable que se puede aproximar indefinidamente a cero pero no ser igual a cero.	94%	6%	0%	17
		Límite del cociente infinitesimal	Interpreta la noción de derivada como razón de cambio instantánea y establece su relación con la recta tangente a una curva	52%	12%	35%	17

Nota. EL símbolo S/E significa Sin Evidencia y N es el número de estudiantes.

En primer lugar, la actividad *Los infinitésimos* conformada por las situaciones problemáticas "El rectángulo de mayor área" y "El método de Fermat para hallar máximos y mínimo". En la primera exploración al problema del rectángulo de perímetro fijo de 14m, asimismo como Fiallo y Parada (2018) se abordan las preguntas: ¿Qué magnitudes varían? ¿Cuáles no varían? ¿De qué magnitudes depende el área del rectángulo? ¿Qué relación hay entre la base y la altura? ¿Qué expresión modela el área en función de la base? Estas orientaron a que los estudiantes identificaran que varía la base, la altura y el área, y no varía el perímetro y que el $área = base \times altura$, sin embargo muy pocos (~ 4 de 17) determinaron por sí mismos la expresión algebraica que modela el área en función de la base, f(x) = x(7−x) =7x – x^2, como se observa en el ítem (a). A este respecto, Caballero (2012) explica que más que la manipulación algebraica el desarrollo de pensamiento variacional debe centrarse en identificar aquello que cambia, cuantificarlo y analizar cómo varía.

La segunda situación "El método de Fermat para hallar máximos y mínimo" tuvo por objetivo introducir un acercamiento a la derivada desde un análisis infinitesimal. En la **Tabla 29** se evaluó que el 94% de los estudiantes (16 de 17) logran entender que "E es un incremento que tiende a cero", pero no todos comprenden con claridad que la expresión $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ cuando E tiende a cero en un punto máximo representa una razón de cambio que se aproxima a cero, o desde la visualización gráfica que se forma una recta tangente horizontal.

En cuanto a la **interpretación de los infinitesimales**, la historieta y la mediación de GeoGebra les permitió a los estudiantes comprender el método de Fermat de manera dinámica e interactiva desde diferentes representaciones, de esta manera logran aproximar el máximo. A continuación en la **Tabla 30** se muestra los acercamientos conceptuales de los estudiantes:

Tabla 30

Caracterización de las nociones de infinitesimal en el método de Fermat

Pregunta	Estudiantes	Términos más empleados	Noción matemática
…			
i) Fermat decía que *E* era una cantidad "muy, muy pequeña" y al final la "despreciaba". ¿Cómo podríamos describir matemáticamente esta idea?	Est1, Est5, Est2, Est7, Est8, Est11, Est15	"limite cuando E tiende a cero"; "Limite cuando E tiende a cero pero no es cero exactamente"; "$E \to 0$, $E \neq 0$" y "cantidad infinitamente pequeña que se aproxima a cero"	El infinitesimal entendido como el límite de una cantidad variable que tiende a cero pero que no es cero.
j) Si tuviéramos (f(x+E)-f(x)) /E e hiciéramos que E se acercara a cero, ¿qué estaríamos calculando? Explica tu respuesta	Est1, Est5, Est8, Est11, Est13, Est15	"razón de cambio porque la fórmula de la velocidad calcula lo mismo"; "la razón de cambio en un punto" y "estaríamos calculado la tangente"	La expresión $(f(x+E)-f(x))/E$ es interpretada como la razón de cambio en un punto y gráficamente como una tangente

A la luz del análisis histórico-epistemológico, queda en evidencia en los ítems (i) y (j) un claro acercamiento a la noción de derivada como razón de cambio desde el problema histórico del Método de Fermat, quien a su vez, fue pionero en usar infinitesimales como una cantidad muy pequeña para determinar puntos máximos y mínimos. Esta idea de "E" que se hace infinitamente pequeña es la base del concepto de límite y la expresión $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ representa una razón de cambio promedio, pero cuando "E" tiende a cero, se convierte en la derivada de la función en un punto (x, f(x)).

En fin, la mayoría entiende que la expresión $(f(x+E)-f(x))/E$ representa una razón de cambio y que (E) es un incremento que tiende a cero, pero no todos logran explicar su significado o relación con la tangente y el máximo de la función. Por ello, es relevante considerar otros problemas en contexto para que los estudiantes le den significado al método de Fermat al aplicarlo para optimizar una función.

En último lugar, la actividad compuesta por un ejemplo de Newton y Leibniz denominado "Explorando el cociente infinitesimal" y el "Problema del lanzamiento vertical" consistieron en determinar la velocidad instantánea de un objeto en caída libre mediado por GeoGebra. A continuación, en la **Tabla 31** se presenta las respuestas de Est5, Est11, Est12 y Est14:

Tabla 31

Rejilla de respuestas sobre el problema del lanzamiento vertical

Preguntas	Est5	Est12	Est14	Est11
1. a) ¿Cuáles son las variables relevantes en este problema de lanzamiento vertical?	La distancia y el tiempo	La altura y el tiempo	La altura y el tiempo	tiempo(x) y altura (y)
1. b) ¿Cómo se relaciona la altura del objeto con el tiempo transcurrido? Expresa la altura en función del tiempo.	$-5x^2+10x$	La altura respecto al tiempo	$y=-5x^2+10x$	$f(x)$ $=-5x^2+10x$ x=TIEMPO f(x)=ALTURA
1. c) ¿A qué altura se encuentra la pelota en los instantes x=0.5s, x=1s y x=1.5s? Justifica tu respuesta	0.5s=3.75m 1s = 5m 1.5s = 3.75	A los 0.5 alcanzo una altura de 3.75m, a los 1s alcanzo 5m y a los 1.5s alcanzo otra vez los 3.75s	3,5m/5m/3,5m	3,8.5.8,8
…				
2. a) ¿Cuál es la velocidad promedio del objeto durante el intervalo de tiempo [0.5 ,0.6]?	Se observa que tiene una velocidad promedio de 4.5 m/s	se observa que tiene una velocidad promedio de 4.5m/s aproximadamente, que es una razón de cambio, que tiene una velocidad promedio de 4.5m/s aproximadamente	la velocidad promedio se puede calcular en base a la razón de cambio en dos puntos	*[Por cuestiones de tiempo no responde]*
…				

En efecto, los estudiantes se enfrentan a uno de los problemas del milenio que dieron surgimiento al cálculo: La matematización del movimiento, en particular, cómo hallar la velocidad en un tiempo determinado dada la posición. El problema del lanzamiento vertical sirvió como punto de partida para reconocer que la velocidad no es contante en cada momento del tiempo, esto se evidencia en las respuestas de Est5, Est12 y Est14 en el ítem (2.a), y en la línea 26 del siguiente fragmento de audio (ver **Tabla 32**):

Tabla 32

Fragmento de la discusión sobre el problema del lanzamiento vertical

02:55	

1	P	Ahora sí vamos a enfrentarnos a uno de los problemas del milenio. Esto tiene que ver con que decía Est3, (…). Si tuviéramos esto *[Señala la expresión de Fermat]* e hiciéramos que E se acercara a cero tanto como se pudiera. Entonces ¿Qué estuviéramos calculando en cualquier punto de la curva?
2	Est11	la tangente
3	P	pero no lo veamos solo geométricamente
4	T	Una razón de cambio
5	P	(…) van a leer la historieta (…) y van a ayudarse de este applet para entender qué hizo newton y Leibniz para calcular la velocidad instantánea. (…) ,
		01:31
6	P	Cuando ustedes ingresan al applet (…). La derivada aparece en una recta de color azul y aparece una razón acá, en cambio, la recta secante aparece con una recta de color amarillo. Qué ocurre cuando hago mucho Zoom y hago clic en la derivada, Y observen qué ocurre cuando el incremento del cambio en x se acerca a cero, ¿Qué pasa con la recta?
7	T	Se unen, se acerca con la azul
8	P	La recta azul que característica tiene, qué toca en ¿qué?
9	T	En un punto
10	P	Por lo que podemos considerarla
11	T	Tangente
12	Est16	¡En un punto!
13	P	Entonces chicos, la pregunta clave es cómo hallan la razón de cambio instantánea. Ahí está la lectura de Newton y Leibniz
14	P	Recuerdan el applet de ahorita, entonces la pelota va subiendo, va subiendo, paso 0.5 segundos. ¿A qué velocidad iba?
15	Est17	5m/s
16	P	El applet me dice eso, pero ¿cómo se halla? ¿Quién quiere hallarla que pase al tablero?
17	Est6	*[Pasa al tablero]*
18	P	Vamos a hallar la velocidad instantánea a los 0.5 s.
19	Est6	Pero, cual es el f(x)
20	P	Mira es ese -5x^2 +10x
		[Mientras Est6 trata de hallar la derivada]
21	P	(…) Vamos de nuevo, la derivada ¿qué representa?
22	Est17	La aproximación a la velocidad de cambio en un punto exacto
23	P	La velocidad a la razón de cambio en un punto exacto
		04:40 *[Profe lanza una pelota hacia arriba]*
24		Un metro, dos metros, tres metros, (…) y apenas pasaron 2 segundos. (…) Entonces estamos hallando la derivada, de esto, exactamente cuando pasó medio segundo. (…). ¿Pero qué significa la derivada en este problema?
25	T	*[algunos estudiantes dicen la velocidad]*
26	Est5	Esta hallando la velocidad sobre cada instante a la iba, porque no tiene la misma velocidad siempre. Porque por acción de la gravedad, la velocidad va disminuyendo en ese momento. Pero cuando va cayendo va aumentando. Por eso tiene sentido eso.

Nota. Las próximas líneas de este fragmento corresponden al análisis procedimental

El fragmento anterior, muestra el avance en la comprensión de la derivada. Por un lado, el applet facilitó que los estudiantes, como Est11 y Est16, reconocieran que la recta secante se "convierte" en tangente (ver líneas 2 y 12). Por otra parte, el análisis cinemático del lanzamiento de la pelota permitió que Est5 y Es17 interpretaron la derivada como la mejor aproximación a la velocidad en cada instante de tiempo (Ver líneas 22 y 26). Precisamente, estos argumentos toman mayor fundamento en los resultados de la prueba final, donde efectivamente se evidencia que algunos estudiantes de décimo y undécimo grado interpretan la noción de derivada como razón de cambio, así como sugiere el MEN (2006).

5.2.3 Análisis del desarrollo de las competencias procedimentales

Este es el corazón del análisis procedimental, donde se muestra cómo la perspectiva histórica-epistemológica utilizada en la secuencia didáctica impactó en el desarrollo de las competencias procedimentales en los estudiantes de décimo y undécimo grado. Es importante mencionar que en los resultados de la prueba diagnóstica ningún estudiante empleó adecuadamente razonamientos analíticos, algebraicos y deductivos al nivel que se espera en la educación media, de acuerdo con los estándares básicos de competencias (MEN, 2006). En contraste, es significativo que tras la implementación de los talleres encontramos que varios estudiantes más allá de aplicar métodos o memorizar algoritmos, comprendieron su origen, su propósito y lógica detrás de ellos. Como afirma el MEN (1998) se "hace necesario desmenuzar los conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación para poner al descubierto las interpelaciones entre ellos" (p. 49).

A continuación, en la **Tabla 33** se presenta los indicadores de logro asociados a la competencia procedimental del primer taller:

Tabla 33

Indicadores de logros de la competencia procedimental del taller 1

	Competencia Procedimental	Actividad	Indicadores de logro	Si	No	S/E	N
Taller 1	Determina razones de cambio, establece su relación con la pendiente de una recta y utiliza técnicas de aproximación para	Concepto de función y razón de cambio	Determina razones de cambio de funciones básicas en sus distintas representaciones en el contexto cinemático.	88%	0%	6%	16
		Concepto de recta tangente a una curva	Establece relaciones entre las rectas tangentes y el comportamiento de la función.	24%	12%	59%	16

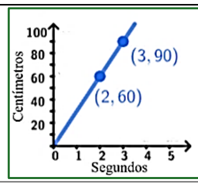
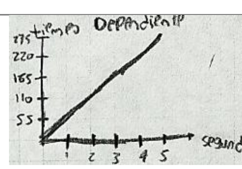
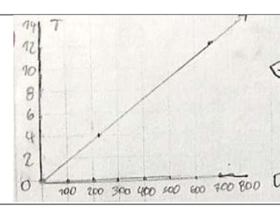
resolver problemas de cambio y variación.	Noción de límite	Utiliza técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos con precisión.	47%	0%	35%	14

Nota. S/E significa Sin Evidencia y N el número de estudiantes.

En primer lugar, la actividad *Concepto de función y razón de cambio* incluyó dos situaciones problemáticas. La primera "Descubriendo razones de cambio con Galileo", que fue analizada previamente en el apartado anterior. Ahora, se examina los ítems que corresponden al nivel procedimental de las respuestas de Est11, Est14 y Est15 (ver **Tabla 34**):

Tabla 34

Respuestas procedimentales sobre el concepto de función y razón de cambio

Estudiantes	Est11: Juan B.	Est14: Julián M.	Est15: Julián V.
Ítems		Segundos | centímetros 4 | 220 12 | 660 14 | 770	Esta pelota rueda 225 centímetros en 4.5 segundos
…			
C) ¿Cuántos centímetros recorre cada pelota al cabo de 1 segundo? ¿Y al final de dos segundos? ¿y al final de 3 segundos? ¿Cuánto avanzará cada pelota en el próximo segundo? ¿Por qué?	$1 = 30cm$ $2 = 60cm$ $3 = 90cm$ $4 = 120cm$	Nos comenta que a los 4 segundos recorre 220cm, entonces dividimos la distancia recorrida entre el tiempo, nos dará 5 o 55? Es decir, cada 1s avanza 55cm, cada 2s avanza 110cm y cada 3s avanza 165 cm	Al cabo de 1 segundo 50cm, a los 2 segundos 1m, a los 3 segundos 1,5m y avanzará 50cm cada segundo, ya que es la velocidad que lleva.
D) ¿Cuántos centímetros avanza cada pelota en cada segundo?	*30cm/s*	Avanza 55cm cada segundo porque nos dan 4s para 220cm. 220cm/4s=55cm/s	Avanza 50cm cada segundo ya que 225/4.5=50
…			
F) Establece la razón entre la posición y el tiempo recorrido de cada pelota ¿Qué nombre recibe?	*P=30t*	La relación se llama pendiente (55cm/s)	La razón es posición/tiempo recibe el nombre de velocidad
G) Expresa la distancia de cada pelota en función del tiempo. Explica tu respuesta	*T=D/30*	f(A) = 30x cm/s, f(B)=55x cm/s, f(C)=25x cm/s, f(D)=50x cm/s, x siendo el tiempo transcurrido	V=D/T → D=V*t
h) Elabora una gráfica de la función de la pelota más rápida con respecto al tiempo. Explica cómo varían las magnitudes en la gráfica		*[No alcanza por cuestiones de tiempo]*	

En cuanto al **concepto de función,** el orden de las preguntas condujo a que varios estudiantes interpretaran el ítem (g) como “expresar la velocidad” o “despejar el tiempo de la ecuación de la velocidad”. Por ejemplo, Est6, Est13, Est16 al igual que Est11, escriben $t = x/30$, donde “x” representa la distancia. En cambio, Est2, Est3 y Est4 escribieron que $f(x) = x/t$, donde “x” es la distancia y “t” el tiempo. Estos resultados tienen un sustento histórico-epistemológico, resulta que por más de un milenio se concibió el álgebra retórica, sino hasta que los trabajos de Viète (s. XV) movilizó este saber hacia el álgebra simbólica, permitiendo considerar variables en vez de incógnitas. Así, que es necesario que el docente aproveche estas dificultades para retroalimentar el concepto de función desde sus diferentes representaciones con estrategias variacionales (comparación, predicción, seriación y estimación) que permitan al estudiante identificar variables, encontrar relaciones y determinar una relación funcional (Caballero, 2012).

En cuanto al **concepto de razón de cambio**, los ítems (c, d y f) muestran que efectivamente orientan a los estudiantes a identificar la razón de cambio como la medida de cuanto recorre cada pelota en cada segundo y que se obtiene del cociente entre la distancia recorrida y el tiempo trascurrido. Con el propósito de ofrecer un panorama más amplio, se examina la segunda situación problemática “Siguiendo las huellas de Galileo en Pisa: Un análisis gráfico del movimiento”. En el desarrollo procedimental, todos los estudiantes se les facilitó hallar la razón de cambio mediante la formula $V = \frac{P_f - P_i}{t_f - t_i}$, es decir, la diferencia entre la Posición final (P_f) y la Posición inicial (P_i) dividido entre la diferencia del Tiempo final (t_f) y Tiempo inicial (t_i) así como se muestra en la **Figura 26**:

Figura 26

Respuesta de la tabla de razones de cambio

Razón de cambio / Intervalos	$\Delta p = p(t_2) - p(t_1)$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\frac{\Delta p}{\Delta t} = p(t_2) - p(t_1)$	Signo	Interpretación de $\frac{\Delta p}{\Delta t}$	Tipo de variación
$0 \leq t \leq 6$	$850 - 400 = 450\ m$	$6 - 0 = 6\ min$	$\frac{450}{6} = 75\ \frac{m}{min}$	Positivo (+)	Avanzó 75mt en un min.	Crece a razón de 75 $\frac{m}{min}$
$6 \leq t \leq 9$	400-850 = -450m	9-6 = 3min	$\frac{-450}{3}$ = -150 m/min	Neg. -	retrocedió 150mt en un minuto	Decrece a razón de -150 $\frac{m}{min}$
$9 \leq t \leq 10$	400-400 = 0m	10-9 = 1min	$\frac{0}{1}$ = 0m/min	Pos. +	Se quedo quieto	Variación cero
$10 \leq t \leq 14$	0 - 400 = -400m	14-10 = 4min	$\frac{-400m}{4 min}$ = -100 $\frac{m}{min}$	Neg. -	Retrocedió … 100 mt en un min	Decrece a razón de … -100 $\frac{m}{min}$
$14 \leq t \leq 15$	0 - 0 = 0m	15-14 = 1 min	$\frac{0}{1}$ = 0m/min	Pos +	Se quedó quieto	Variación cero
$15 \leq t \leq 20$	850-0 = 850m	20-15 = 5min	$\frac{850}{5}$ = 170m/min	Pos +	Avanzó 170m en un min	Crece a razón de 170 $\frac{m}{min}$

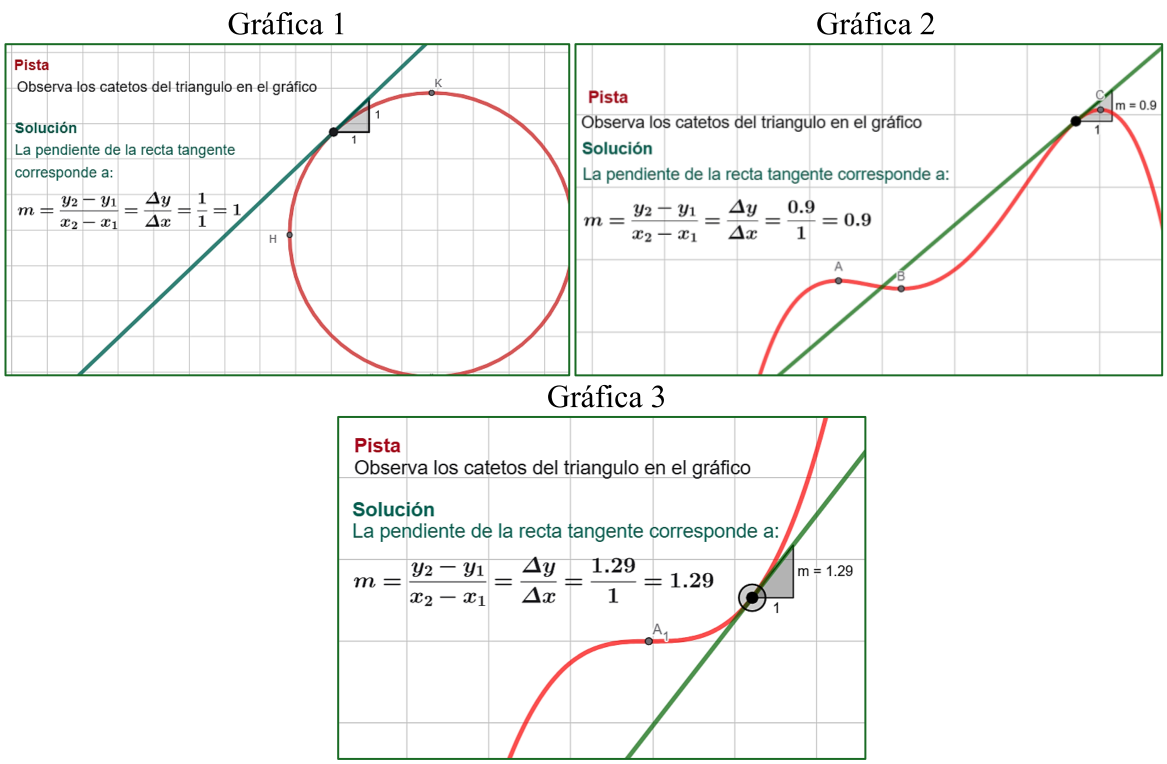
Nota. Respuesta de Est5

Cabe destacar que este análisis gráfico facilitó asociar la razón de cambio con la pendiente de la recta y reconocer ciertas características: si la pendiente (velocidad) es positiva, entonces la recta es creciente y representa un avance en el contexto; si la pendiente (velocidad) es cero, entonces la recta es horizontal y representa que "se quedó quieto" y si la pendiente (velocidad) es negativa entonces la recta es decreciente y representa un retroceso. A este respecto, el MEN (2006) afirma que "dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz. Así se vincula la habilidad procedimental con la comprensión conceptual que fundamenta esos procedimientos" (p. 51)

Ahora, en la actividad "*Concepto de recta tangente a una curva*", se examina la segunda situación problemática "Conectando conceptos de tangencia a una curva", que se dejó de tarea y tuvo por objetivo que los estudiantes descubrieran la relación estrecha entre el problema de la velocidad, de la actividad con Galileo, y el problema de la tangente con Euclides. Para ello, se muestra en el applet de GeoGebra la pendiente de las rectas tangentes de cada gráfico (ver **Figura 27**):

Figura 27

Segunda parte de la actividad tangencia a una curva



Pero, solamente los estudiantes Est5, Est10 y Est15 fueron quienes hicieron la tarea, donde Est5 con ayuda en la web lograron encontrar la relación, Est10 no respondió todas las preguntas y Est15 no logró conectar la pendiente de la recta tangente con la razón de cambio (ver **Tabla 35**).

Tabla 35

Respuestas de la relación entre razones de cambio y la recta tangente

Items\ Estudiantes	Est5†	Est10	Est15
a) De las trayectorias (ver gráficas) de los recorridos de Euclides, ¿Cuáles	Las graficas 2 y 3 pueden considerarse graficas porque al trazar una recta paralela al eje Y esta solo	La 2 y la 3, ya que al trazar una linea paralela cualesquiera al eje y tiene	La 2 y la 3. ya que al pasar una linea paralela al

† El texto se registró exactamente como lo entregaron los estudiantes, por ello, los errores ortográficos.

pueden considerarse como función en un plano cartesiano?	toca un punto de la grafica, en el caso de la grafica 1 NO se consideria funcion porque al trazar la recta esta toca 2 puntos diferentes	que tocarla en un solo punto para que sea considerada función, la primera gráfica al trazarla, la taca en 2 puntos	eje y en el grafico 1, toca 2 veces el circulo
b) De acuerdo con los caminos 2 y 3 ¿Si la pendiente de la recta es positiva, que tipo de variación presenta la curva, creciente o decreciente? ¿y si la pendiente es negativa qué tipo de variación presenta? ¿Por qué?	Si la pendiente es positiva la curva presenta una variacion creciente porque cuando el valor de X (La variable independiente) aumenta, el valor de Y (la variable dependiente) tambien aumenta si la pendiente es negativa la curva decrece, porque cuando el valor de X aumente, el valor de Y disminuirá	Si la pendiente de positiva la función será creciente y si negativa decreciente, ya que a medida que x aumenta, du función tambien	Si es positiva, presenta una variación creciente, y si la pendiente es negativa, presenta una variación decreciente porque la dirección cambia
c) De acuerdo con el camino 2, ¿a qué valor se acerca la pendiente cuándo se aproxima a un punto máximo o mínimo local? ¿Por qué?	La pendiente se acerca a 0 porque en el punto maximo o minimo local la recta tangente va a ser horizontal	*[No responde]*	Cuando se acerca al punto máximo se aproxima al valor 1.12 m y cuando se acerca al punto minimo se aproxima al valor 0.01
d) Si logramos hallar la pendeietn de la recta tangente a la curva en un punto. ¿Podiramos hallar la razón de cambio de la curva en ese instante?	Si, porque al hallar la pendiente de la recta tangente en un punto, tambien estamos encontrando la razón de cambio de ese instatnte de la recta porque nos dice que si crece o decrece y a cuanta velocidad lo hace	*[No responde]*	No, ya que necesitariamos otro punto para poder hallar una razón de cambio
e) ¿Cuál es la relación estrecha en tre la pendeinte de la recta tangente y razón de cambio de la curva?	Si hallamos la pendiente de la recta tangente tambien hallariamos la razón de cambio de la curva en ese instante, ambas nos dicen como está cambiando la curva en ese momento	*[No responde]*	De que las dos son lineas rectas que se intersectan en puntos de la curva

Si bien la actividad propuesta tiene como objetivo que los estudiantes comprendan la relación entre la pendiente de la recta tangente y la razón de cambio en un instante de la curva, los resultados evidencian ciertas limitaciones en su diseño. Por un lado, solo dos estudiantes realizaron la tarea, lo que podría indicar que no logró motivar la participación de la mayoría del grupo. Además, las preguntas no fomentan oportunidades claras para que los estudiantes desarrollen procedimientos que les permitan expresar explícitamente dicha relación. Sin embargo, se destaca que Est15 identifica la importancia de considerar otro punto y Est5 comprende el significado de la relación. En este sentido, sería recomendable incorporar tareas que orienten a los estudiantes en la construcción de esta relación y promuevan una participación más activa de todo el grupo.

En tercer lugar, la actividad *Noción de límite* fomentó la discusión de diversos procedimientos y estrategias que llegan a la misma solución. Para precisar el análisis, en la **Tabla 36** se examina las respuestas de Est3, Est5 y Est14.

Tabla 36

Rejilla de respuestas de la actividad de Aquiles y la tortuga

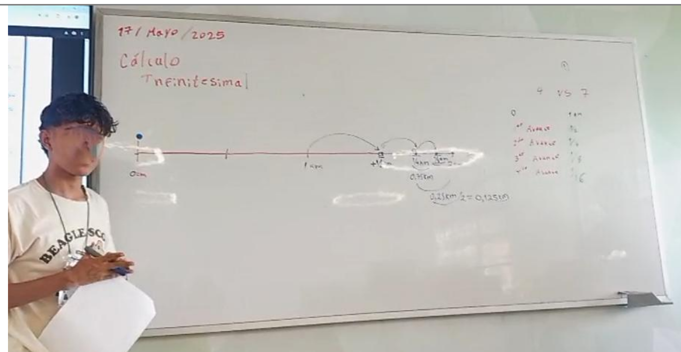
Ítems \ Estudiantes	Est3: Cesar	Est5: David C.	Est 14: Julián M.
…			
c) Si la distancia entre Aquiles y la tortuga se reduce a la mitad en cada paso (1 km, ½ km, ¼ km, ...) ¿Cuánto mide la distancia entre Aquiles y la tortuga cuando haya avanzado tres veces? ¿Cuatro veces? ¿cinco veces? ¿A qué valor se aproxima los términos a medida que Aquiles avanza hacia la tortuga? Expresa el termino general de la sucesión	0,25; 0,125; 0.06, se aproxima a 0. $\frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{2^n}$	Paso 1=0,5 km Poso 2=0.25 km Paso 3=0125 km Paso 4=0,0625 km Paso 5=0,03125km El valor de la distancia que los separa se acerca cada vez más a 0 Se define por la formula: $n = \frac{1}{2^n}$; $n = paso$	$\frac{1\,km}{2^{n-1}}$, $siendo\ n\ el\ número\ de\ paso$ $1km \rightarrow base\ (ventaja)$ $\mathbf{2^n}$ $\rightarrow$ **cada vez se recorta** a la **mitad** $n-1$ $\rightarrow$ Por la ventaja de la tortuga Distancia que hay entre Aquiles y la tortuga: (3) 0,25km (4) 0,125km (5) 0,0625km R/ estos resultados tienden a 0 cada vez
d) Si sumamos todos los intervalos de distancia (1 + ½ + ¼ + ⅛ + ...) ¿Cuál es la distancia recorrida por Aquiles cuando haya avanzado tres veces? ¿Cuatro veces? ¿cinco veces? ¿A qué valor se aproxima esta suma? Expresa en forma general la serie geométrica	1.75; 1.87; 1.93; se aproxima a 2	Paso 3 = 1km + 1/2km +1/4km = 1,75km Paso 4= 1,75km+ 0,125km = 1,875km Paso 5=1,875 km + 0,625km = 1,9375 km El valor se acerca cada vez más a 2	1 + 1/2 + 1/4 (3 paso) 1 + 0,5 + 0,25 = 1 ,75km 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 (4 pasos) 1+ 0,5+0,25+0, 125=0,875 1+1/2+1/4 + 1/8+1/16 (5 pasos) 1+0,5+0,25+0,125+0,0625=1,9375km R/Se aproxima a 2 $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$
e) Si la tortuga tiene una ventaja inicial y Aquiles se aproxima cada vez más ¿en qué momento exacto Aquiles la alcanza?	*[No responde]*	Aquiles alcanzará a la tortuga cuando llegue a 2km desde el Punto inicial	Aquiles la alcanza a los 2km y puede superarla porque es más veloz

Por un lado, la discusión del ítem (c), tuvo como propósito identificar el patrón de dividir sucesivamente por la mitad e identificar que cada vez se aproxima más a cero. Se destaca que Est14 encontró la regularidad de la distancia entre Aquiles y la tortuga en cada avance al expresar y describir $\frac{1}{2^{n-1}}$. De manera espontánea utilizó el símbolo (→) para referirse a la tendencia cuando

$n \to \infty$, sin embargo, la pregunta dirigía la atención del estudiante no tanto hacia encontrar el término n-ésimo de la sucesión o analizar su tendencia, sino a encontrar la distancia entre ellos (ver **Tabla 37**)

Tabla 37

Fragmento de audio del análisis procedimental de Aquiles y la tortuga



1	00:23 Est14: Dice el problema que la tortuga va a avanzar la mitad de lo anterior que recorrió. Es decir, al principio la tortuga avanzó un kilómetro, por lo tanto la siguiente va a avanzar medio kilómetro o un medio de kilómetro. *[Dibuja una recta con ayuda del profe y ubica un punto en 1,5km]*	6	02:07 **Est14:** Entonces, me plantea el problema que, ¿cuánto mide la distancia entre Aquiles y la tortuga cuando haya avanzado tres veces? Entonces, miremos. Para este entonces, avanzó una vez. Para este entonces, avanzó dos veces. Y para este avanzó tres veces. *[Señala los avances de la tortuga a partir de 1km con saltos en el tablero]*
2	Est14: Entonces, la tortuga avanzó un medio kilómetro, listo. Luego, Aquiles se va a ir hacia el lugar donde estaba la tortuga. Entonces, se va a desplazar acá *[Señala en 1km]*	7	**Est14:** Aquiles está aquí y la tortuga acá. De aquí a acá, ¿cuánto espacio hay? *[Pregunta al grupo]*
3	Est14: Pero la tortuga, para ese entonces ya habrá avanzado su siguiente recorrido, que es la mitad de lo que le queda. Que en ese caso, la mitad de un medio sería un cuarto. *[Escribe sobre la recta ¼ km y el profe hace una tabla con las mismas posiciones que ubica Est14 sobre la recta]*	8	**Est16:** 500mt **Est6:** 7/8, no, 0,125
4	Est14: Y Aquiles, nuevamente. Ahora quedaría en este punto y la tortuga en este. *[Ubica un punto sin rellenar para Aquiles en 1,5km y un punto rellenado para la tortuga en 1,75km]*	9	**Est14:** Traduzcamos a decimales. Serían 0,75km. Y aquí me faltarían 0,25 km. y entonces la tortuga debe avanzar la mitad de eso. La mitad de 0,25, ¼ entre 2, que sería 0,125 km *[Escribe 0,25km/2=0,125km]*
5	Est14: Después, seguimos con el problema. La mitad de un ¼ será 1/8 km. Y luego Aquiles, cuando la tortuga llegue 1/8km, va a llegar aquí donde está, a ¼ km	10	**Est14:** Y esa sería la distancia que los separa para el tercer paso. Y en base de este razonamiento se puede hallar la siguiente y la siguiente.

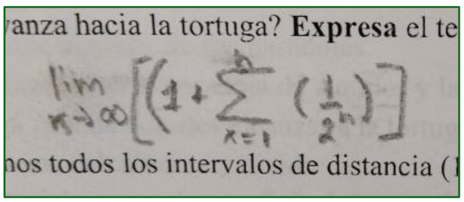
Cabe destacar que el uso de las múltiples representaciones junto con un lenguaje matemático adecuado jugó un papel crucial para la comunicación y resolución del problema, considerar una recta con longitud de 2km (véase línea 1), y hacer las particiones de ½, ¼, $1/8$, así sucesivamente ubicando las posiciones, y la traducción a decimales (véase línea 9) le facilitó comunicar las ideas a Est14 y responder a la pregunta.

En cuanto al ítem (d) de la **Tabla 36**, fueron Est6 y Est14 quienes difundieron en el grupo la generalización de la distancia que recorre Aquiles (ver **Tabla 38**):

Tabla 38

Registro de audio de la expresión del límite

Est6

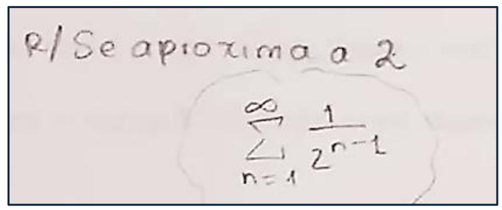


20:00
[Est6 y Est14 escriben en el tablero sus expresiones]

P: Est6, Mira que se parecen mucho, bueno, pero explícanos, ¿de dónde hallaste esto?

Est6: Bueno, el límite de n tiende a inf, es que como se repite infinitas iteraciones de esta sumatoria, pues, lo que vamos a hacer es reemplazar, por lo general se hace eso con limites, pues, como hizo el compañero, n pues por el infinito, esa fórmula *[señala la expresión de Est14]*, que sería esta misma fórmula, solo que acá, descontamos la distancia principal que le dieron 1 para la tortuga. Entonces, cuando n tiende a infinito, por lo general se reemplaza por infinito, entonces se hacen infinitas sumas, ahhh, va a ir aumentando de 1 en 1 y nos daría esa fórmula que tenemos aquí *[Señala su expresión]*

Est14



21:37

P: Vamos a apoyarnos de esta primero, observen si x=1, la reemplaza aquí, es decir que nos queda $1 + 1/2^1$. *[En la sumatoria de Est6]*. De hecho aquí, tambien podemos usurla, si n=1, nos quedaria $1/2^{1-1} = 1/2^0 = 1$ *[En la expresión de Est14]*. (…).¿Qué pasa con la sumatoria con n=2? (…) tenemos que sumarlos hasta x=2. Cuando x=1 seria $1/2^1$ y cuando x=2 seria $1/2^2$. *[En la expresión de Est6]* ¿A qué quiero llegar?, si nosotros colocamos n, significa que debemos hacer la suma desde 1 hasta n, es decir, que es los mismo que tenían escrito como $1 + 1/2\text{^}1 + 1/2\text{^}2 + 1/2\text{^}3 + 1/2\text{^}4 + \cdots + 1/2\text{^}n$ y en decimales es

T: $1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 + 0.0625$ + *[Los estudiantes dicen al profesor con ayuda en sus calculadoras]*

Se resalta que Est6 a diferencia del grupo tiene conocimientos previos del límite, sin embargo, considera que basta reemplazar con $n =\infty$ en la sumatoria para aplicar el límite, esto es un obstáculo epistemológico frecuentemente reportado en los estudios de la noción de límite. En particular, Artigue (1995) explica que cuando se trata el proceso del límite como un proceso algebraico "finito" tiene un sustento histórico-epistemológico. También, afirma que "el principio de continuidad (llamado así por Leibniz) consiste en transferir al límite las propiedades comunes de los elementos del proceso” (p. 112). Es decir, en lugar, de verlo como un proceso dinámico e infinito, lo reducen a una operación algebraica.

En fin, en efecto la actividad y las preguntas favorecieron procesos de razonamiento y comunicación, fortaleciendo el lenguaje matemático de los estudiantes, abriendo un abanico de nuevas formas de expresar ideas matemáticas más complejas.

Ahora vamos con el análisis del impacto didáctico del componente histórico-epistemológico en el desarrollo procedimental de las actividades del segundo taller. En la **Tabla 39** se muestra los indicadores de logro asociados a la competencia procedimental:

Tabla 39

Indicadores de logros de la competencia procedimental del taller 2

	Competencia Procedimental	Actividad	Indicadores de logro	Si	No	S/E	N
Taller 2	Determina razones de cambio instantáneas en problemas que involucran la noción de derivada como razón de cambio.	Introducción a los infinitésimos	Plantea y ejecuta métodos para determinar puntos máximos o mínimos mediante el estudio de la variación, la tendencia y razones de cambio alrededor de estos puntos.	59%	41%	0%	17
		Límite del cociente infinitesimal	Aplica el límite del cociente infinitesimal para determinar tasas de cambio instantáneas	41%	18%	41%	17

Nota. Sin evidencia (S/E) y Número de estudiantes (N)

De entrada la actividad *Introducción a los infinitésimos* tuvo por objetivo adentrar a los estudiantes al cálculo infinitesimal, donde, el reto inicial fue expresar el área de un rectángulo con perímetro fijo de 14m en función de la base, para luego, determinar el punto máximo de la función siguiendo el método de Fermat.

Tabla 40

Fragmento sobre introducción el problema del rectángulo de área máxima

17/05/2025 5:25pm		
1	9	**P:** Entonces va a tener un mínimo o un máximo.

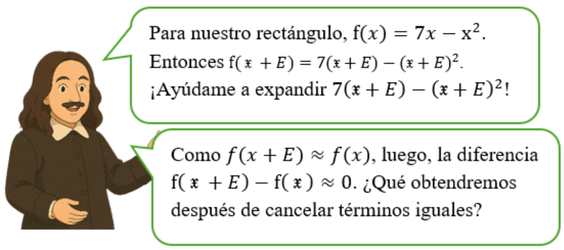
	P: Vamos a prestarle mucha atención a nuestra compañera y amiga de clase, que nos va a explicar de donde salió $Área = -b^2 + 7b$. ¿Puedes explicarnos?
2	**Est17:** la operación para sacar el área es multiplicar la base por la altura. Y habíamos dicho que la altura era igual a 7 menos B. Entonces, escribo $(7 - b) * b$ y multiplico por propiedad distributiva, 7 por b me da 7b y menos b por b me da menos b cuadrado y luego lo ordeno.
3	*[Simultáneamente el profe escribe lo que dice Est17]*
4	**P:** (…). ¿Y esto gráficamente que es?
5	**T:** *[Algunos dicen una función cuadrática otros una parábola]*
6	**P:** ¿Abre hacia arriba o hacia abajo?
7	**T:** Abajo
8	**Est14:** Abre hacia abajo porque el primero es negativo
10	**T:** Máximo.
11	**P:** Grafiquémoslo en GeoGebra. En términos de x ¿cómo sería?
12	**Est11**: $-x^2 + 7x$
13	**Est11:** entre 0 y 7 *[Aplica la restricción en GeoGebra]*
14	**P:** ¿Cuánto debe valer la base para que el área sea máxima?
15	**T:** 3.5
16	**P:** Ustedes pueden usar la misma fórmula que usaron al principio de la clase. Pero yo les propongo otra forma
17	**Est16:** Para hallar el punto máximo de la parábola
18	**P:** Vean esto, (…) vamos a hacer lo que hizo Fermat
19	*[Pese a que el profesor hizo el intento de explicar hasta el cuarto paso del método de Fermat, los estudiantes tenían muy poco interés por esos escritos y no entendían. Además, faltaba poco tiempo para terminar la clase. Así se prefirió dejar para la próxima clase]*

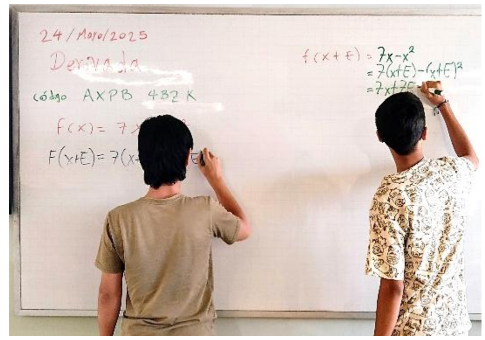
Esta situación problemática fue planteada en la prueba diagnóstica y ningún estudiante logró expresar el área en función de la base. En cambio, en la implementación del taller con las preguntas adecuadas guio a que la estudiante Est17 lograra explicar con claridad el proceso para obtener dicha expresión algebraica (Véase la línea 2 de la **Tabla 40**). Por otro lado, en las líneas 8 y 9 se evidencia que los estudiantes reconocen atributos propios de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Fiallo y Parada (2018) explican que esto se refiere a la habilidad de coordinación del proceso de representación.

En la **Figura 28**, se observa Est6 y Est13 tratando de encontrar la expresión $f(x + E)$, esta práctica a posteriori les facilitara el cálculo de la razón de cambio con infinitesimales.

Figura 28

Imagen del cálculo de f(x+e) en el método de Fermat





Desde el análisis histórico-epistemológico se encuentra que el método de Fermat consiste en aplicar 6 pasos: (1) Plantear la expresión algebraica a optimizar $y = f(x)$; (2) identificar la incógnita a maximizar o minimizar; (3) evaluar la función en $x + E$, (4) realizar la diferencia entre $f(x)$ y $f(x + E)$; (5) dividir todos los términos por la misma potencia de E y (6) suprimir los términos que contengan E. A pesar de que el método es muy mecánico y algebraico encontramos en las investigaciones de Boyer (1968/1986), Vega (2019) y Vrancken y Engler (2013) que Fermat también consideró razonamientos analíticos, considerando un incremento muy pequeño al punto del máximo, esto, le permitió establecer que la recta tangente es horizontal en los puntos máximos o mínimos de la curva. Este mismo acercamiento epistemológico se observó en la **Tabla 41**, al discutir qué significa $\frac{f(\hat{x}+E) - f(x)}{E}$.

Tabla 41

Discusión grupal de la expresión general del método de Fermat

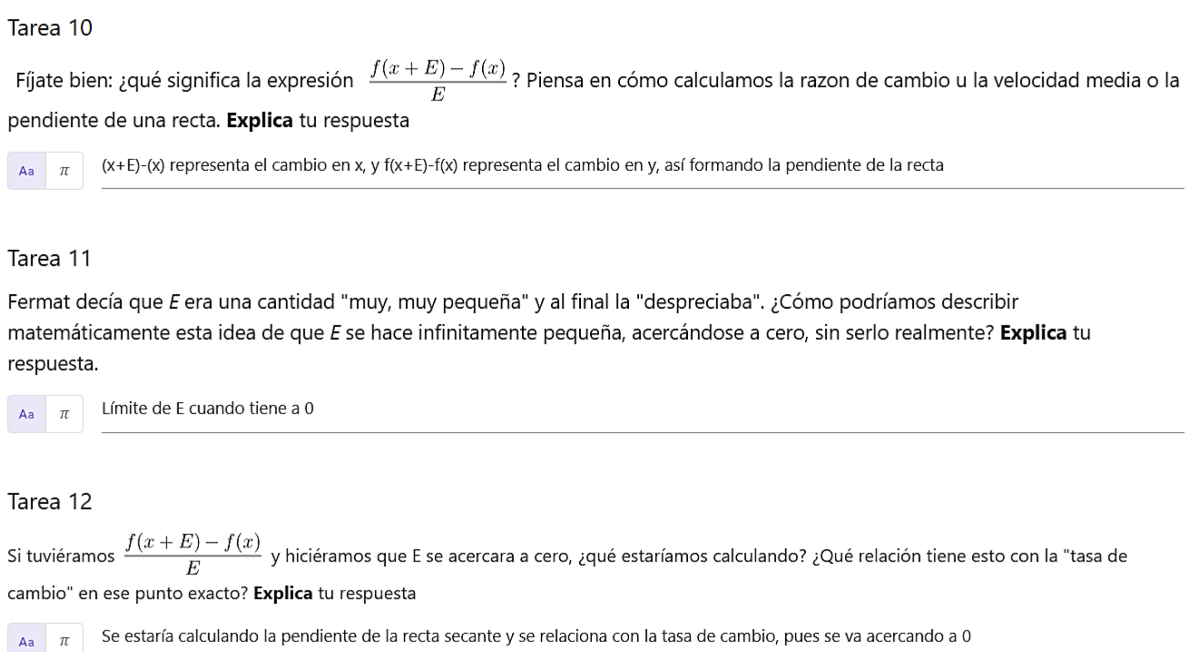
	24/05/25 03:09 pm		
1	**P:** (…) les doy una pista *[El profe escribe sobre el tablero* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x}$ *]* **P:** (…) ¿Recuerdan cómo hallamos las razones de cambio?	8	05:40 **P:** (..) si yo aproximo esto a cero, y lo acerco, esa recta secante, ¿a qué se parece? *[usa el applet]*
		9	**T:** A una tangente.
2	**Est6, Est11 y Est17:** Restábamos dos puntos	10	07:49 **P:** (...) El punto P tiene componentes x, f(x) y el punto P_i de la recta secante tiene componentes $((x + e, f(x + E))$, miren que si ustedes tratan de hallar la pendiente, van a
3	**P:** (…) Entonces la pendiente de esa recta secante *[muestra en el applet]*		

4	**Est11:** ¡Eso! **Est6:** ¿qué?, ahhh, porque toca en dos puntos.		encontrar que es precisamente lo que hacia nuestro personaje histórico. $\frac{f(x+E)\ - f(x)}{(x+E)\ - x} = \frac{f(x+E)\ - f(x)}{E}$ si ven que abajo solamente nos queda
5	**P:** Entonces es válido afirmar esto ¿sí o no? Si yo hallo la razón de cambio estoy hallando la pendiente de la recta secante		
6	**Est11:** Si **Est6:** Aproximadamente.	11	**Est3:** E
7	**P:** (…) ¿por qué? **Est11:** Porque así lo dice la ecuación [se refiere a $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$]	12	**P:** Entonces ustedes escriban que significa esa expresión.

La discusión sobre qué significa $\frac{f(\hat{x}+E)\ -f(x)}{E}$ orienta a buscar conocimientos previos, como la fórmula de la pendiente de una recta $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Además, al vincular herramientas como GeoGebra, les facilitó comprender de dónde surgió, y porqué funciona, esto se evidencia en las respuestas de Est1, Est5, Est8, Est11, Est13 y Est15 caracterizadas previamente en el análisis cognitivo. Como colofón, encontramos que los estudiantes les dan atributos claros a las operaciones de Fermat para calcular el máximo. A modo de ejemplo, en la **Figura 29** se muestran las respuestas de Est17, de las últimas preguntas de la actividad:

Figura 29

Respuesta de Est17 después de explorar el método de Fermat


Tarea 10

Fíjate bien: ¿qué significa la expresión $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$? Piensa en cómo calculamos la razon de cambio u la velocidad media o la pendiente de una recta. **Explica** tu respuesta

Aa π (x+E)-(x) representa el cambio en x, y f(x+E)-f(x) representa el cambio en y, así formando la pendiente de la recta

Tarea 11

Fermat decía que *E* era una cantidad "muy, muy pequeña" y al final la "despreciaba". ¿Cómo podríamos describir matemáticamente esta idea de que *E* se hace infinitamente pequeña, acercándose a cero, sin serlo realmente? **Explica** tu respuesta.

Aa π Límite de E cuando tiene a 0

Tarea 12

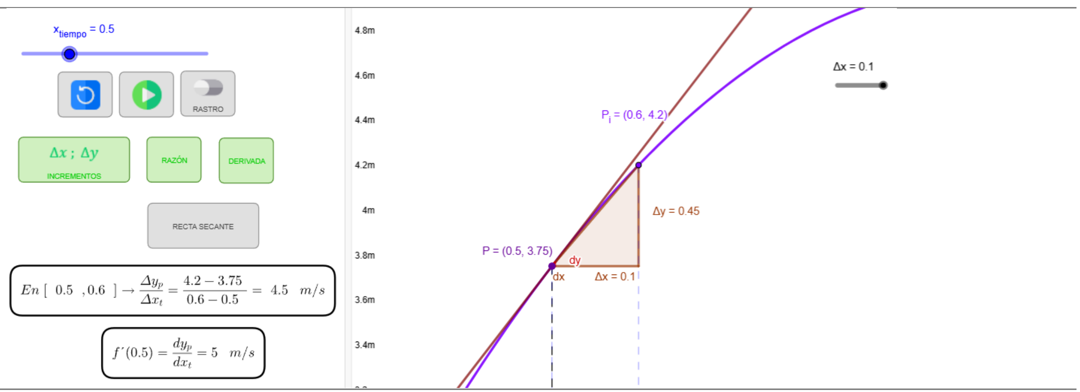
Si tuviéramos $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ y hiciéramos que E se acercara a cero, ¿qué estaríamos calculando? ¿Qué relación tiene esto con la "tasa de cambio" en ese punto exacto? **Explica** tu respuesta

Aa π Se estaría calculando la pendiente de la recta secante y se relaciona con la tasa de cambio, pues se va acercando a 0

Finalmente, en la actividad *Límite del cociente infinitesimal* con el propósito de aplicar el límite del cociente incremental para determinar razones de cambio instantáneas, como ya es sabido en el análisis cognitivo, se encontró que el contexto del problema de lanzamiento vertical y la mediación del potencial de GeoGebra facilitó el reconocimiento de velocidades instantáneas. Es importante aclarar que se tuvo poco tiempo (~1h) para esta actividad, así que las evidencias no son representativas, sin embargo, son relevantes para este análisis. Se encontró que el applet de GeoGebra permitió a los estudiantes Est5, Est12 y Est14 afianzar la relación estrecha entre las velocidades promedio $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y la pendiente de la recta secante (ver **Tabla 42**).

Tabla 42

Respuesta del cálculo de la velocidad promedio en Geogebra



¿Cuál es la velocidad promedio del objeto durante el intervalo de tiempo [0.5, 0.6]?	**Est5**: Se observa que tiene una velocidad promedio de 4.5 m/s	**Est12**: se observa que tiene una velocidad promedio de 4.5m/s aproximadamente, que es una razón de cambio, que tiene una velocidad promedio de 4.5m/s aproximadamente,	**Est14**: la velocidad promedio se puede calcular en base a la razón de cambio en dos puntos

Por otra parte, frente a la pregunta ¿Cuál o cuáles son las principales diferencias entre $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y $\frac{dy}{dx}$? Solamente alcanzó a responder Est17 quien escribió que es "la formula dada por Leibniz es más exacta al momento de calcular razones de cambio". A este respecto, García y Dolores (2016) explican que para facilitar el manejo de diferencias infinitamente pequeñas "es necesario establecer un acuerdo en cuanto a su simbología: si Δt →0 entonces Δt se denota dt; análogamente si Δs →0 entonces se escribirá como ds. De este modo ds y dt son diferencias infinitamente pequeñas” (p. 62).

En cuanto al indicador de logro de esta actividad se presenta el desarrollo procedimental del estudiante Est6, quien pasó al tablero y logró expresar y calcular matemáticamente la velocidad instantánea del objeto en el tiempo $x = 0.5$ de la función $f(x) = -5x^2 + 10x$ apoyado con algunas orientaciones del profesor, como se muestra en el siguiente fragmento de audio (ver **Tabla 43**):

Tabla 43

Fragmento de audio del cálculo de la velocidad instantánea

24/05/2025 4:50 pm					
1	P	Vamos a ayudarle a Est6	14	Est6	*[Escribe]* $\frac{-5(0.5+dx)^2+10(0.5+dx)-[5(0.5)^2+10(0.5)]}{dx}$
2	Est6	*[Escribe]* $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{x} = \frac{-5(x+dx)^2+10(x+dx)-5x^2+10x}{x}$	15	P:	Ya chicos, solo es hacer las operaciones. Vamos a hacerlas para terminar.
3	Est11	El valor en x debemos cambiarlo por 0.5	16	Est6	*[Distribuye el binomio y escribe]* $\frac{-5(0.5^2+2(0.5)dx+dx^2)+10(0.5)+10dx-[5(0.5)^2+10(0.5)]}{dx}$
4	P	Usted lo está haciendo generalizado, ¿cierto? Usted hizo algo raro, ahí debería ir dx no x.	17	Est6	(…) ¿se podría resolver ya esto de una vez?
			18		No, para poder ver que se pueden cancelar, si las multiplica nos damos cuenta de que se puede cancelar.
5		*[Se corrige la expresión* $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$*]*	19	P	*[Aplica distributiva y escribe]* $\frac{-5(0.5)^2-10(0.5)dx-5dx^2+10(0.5)+10dx-5(0.5)^2+10(0.5)}{dx}$
6	P	(…) Tenemos esta *[Señala a la expresión* $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$*]* que es el método para hallar la derivada. (…) Ustedes me ayudan, $f(0.5 + dx)$ *menos f de qué*	20		*[El profe notó que faltaba un menos y corrige]* $\frac{-5(0.5)^2-10(0.5)dx-5dx^2+10(0.5)+10dx+5(0.5)^2+10(0.5)}{dx}$
			21	P	Después de hacer todas esas operaciones miren lo que quedo
7	Est11	de 0.5	22	Est6	*[Escribe]* $\frac{-10(0.5)dx-5dx^2+10dx}{dx}$
8	Pinto	sobre dx	23	P	Después de eso, dividimos por dx y nos quedo
9	P	*[Escribe]* $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \frac{f(0.5+dx)-f(0.5)}{dx}$	24	Est6	*[Escribe]* $5 - 5dx + 10$ $= 5 - 5dx$
			25	P	Ahora solo queda el último paso,
			26	Est11	El límite de dx
10	P		27	P:	¿ dx a donde tiende?

		Ahora, lo que tenemos que hallar es la imagen de la función en 0.5+dx, (…). [Escribe con apoyo de los estudiantes $-5(0.5 + dx)^2 + 10(0.5 + dx)$]	28	T	A cero
			29	P:	O sea, que en el límite esto es
			30	T	Cero
11		Y este corresponde a ese primero, *[señala f(x+E)].* (…) Entonces, vamos a restarle, la misma función evaluada en 0.5	31	P.	O sea que la derivada va a ser igual a
			32	T	5
			33	P	¡Que nos dio aquí cinco! [Señala el applet]
12	Est6	¿Sera que yo puedo continuar?	34	T	*[Aplauden]*
13		[El profe le da marcadores a pinto y lo orienta]			

Durante el desarrollo de los procedimientos, se encontró en las líneas 2, 5 y 20 que se presentaron algunos errores por la misma complejidad en la manipulación de varias operaciones simultaneas algebraicas que surgen de la noción de derivada como $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$. Es común encontrar estudiantes que se les dificulta evaluar $f(x + dx)$, o quienes no aplican adecuadamente la propiedad distributiva al operar $f(x + dx) - f(x)$. De hecho, Dubarbie (2024) concluyo que “las mayores dificultades de aprendizaje asociadas a la noción de derivada surgen en torno a la utilización de la derivada como el límite del cociente incremental y a su interpretación geométrica” (p. 97). Además, Dubarbie (2024) explica que estas dificultades son de origen algebraico y condicionan la realización de procedimientos vinculados con la noción de derivada. Por otra parte, el uso de GeoGebra fue una herramienta eficaz para comprobar los resultados (véase línea 33 y 34), y minimizar estas dificultades.

5.2.4 Análisis del desarrollo de las competencias actitudinales

Este es el corazón del análisis cognitivo, donde las matemáticas toman una mirada más humana, no como aquella ciencia que es incuestionable. Sino como la consolidación de muchos procesos, debates, errores de la humanidad a lo largo de la historia. El hecho de que los estudiantes experimenten las mismas ideas que dieron surgimiento, desarrollo y evolución al concepto de derivada, impacta directamente en el desarrollo de su pensamiento matemático y en su formación integral. Como afirma Gutiérrez (2019) "esto tiene un impacto muy positivo en su formación integral porque ahora comprende que el aprendizaje es un proceso tortuoso y zigzagueante pero que trae sus frutos a largo plazo" (p. 113)

En la **Tabla 44**, se muestra los indicadores de logro asociados a la competencia actitudinal del primer taller:

Tabla 44

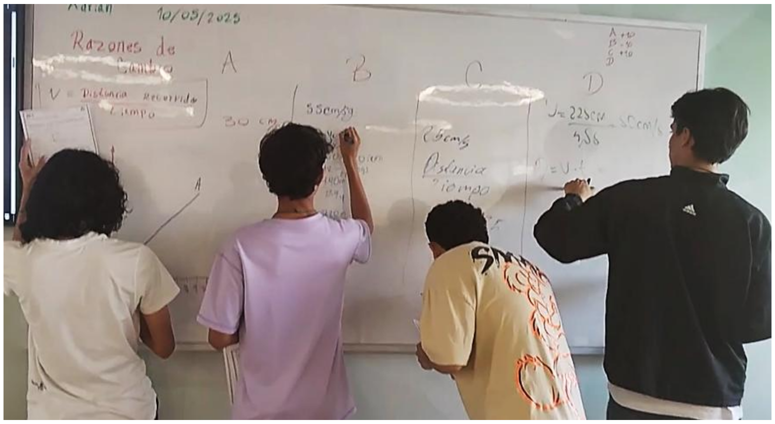
Indicadores de logro de la competencia actitudinal del primer taller

	Competencia Actitudinal	Actividad	Indicadores de logro	Si	No	S/E	N
Taller 1	Participa activamente en discusiones grupales, escuchando y aportando ideas y juzga la pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto.	Concepto de función y razón de cambio	Colabora y comparte sus resultados en equipo, discutiendo su análisis frente a las razones de cambio.	82%	6%	6%	16
		Concepto de tangencia a una curva	Juzga la pertinencia de las diferentes justificaciones geométricas de sus compañeros.	53%	12%	30%	16
		Noción de límite	Evalúa críticamente el margen de error en sus aproximaciones.	47%	0%	35%	14

En cuanto a la actividad de *Concepto de función y razón de cambio* la primera "Descubriendo razones de cambio con Galileo con el experimento de Galileo" se desarrolló en 4 grupos, a cada uno de ellos les correspondió una de las representaciones de cada pelota: la pelota A se describe su recorrido en su forma gráfica, la pelota B en forma tabular, la pelota C de forma algebraica y la pelota D en lenguaje natural. Se les solicitó elegir un representante del grupo quien pasó al tablero y determinó la razón de cambio según la pelota que corresponde, como se muestra en la **Figura 30**:

Figura 30

Estudiantes participan hallando razones cambio

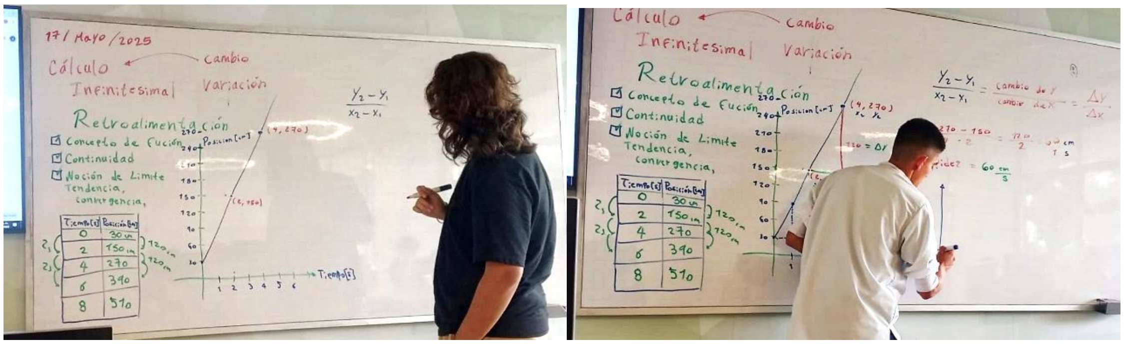


En efecto, el 82% (14 de 16) de los estudiantes discuten en cada grupo sobre las razones de cambio. De hecho, los procedimientos que plantean los representantes de cada grupo (ver imagen), es precisamente el resultado de esta discusión.

En cambio, en la segunda situación problemática “Siguiendo las huellas de Galileo en Pisa: Un análisis gráfico del movimiento” se encontró Est4, Est6, Est9 no interpretaron adecuadamente la gráfica de posición como un movimiento rectilíneo, dado que en la historia breve no identifican con claridad la posición de Galileo en cada tramo. Frente a esto, se realizó una actividad vivencial, que consistió en ubicar un punto de referencia y moverse hacia adelante y atrás de tal manera que los estudiantes notaron que la posición se da en un movimiento rectilíneo, esto les facilitó su interpretación de la posición y de la velocidad en el contexto del problema. De hecho, al notar ciertas dificultades como la anterior, se vio necesario retroalimentar el concepto de función y razón de cambio (ver **Figura 31**) en una próxima clase, como se muestra a continuación:

Figura 31

Retroalimentación del concepto de función y razón de cambio

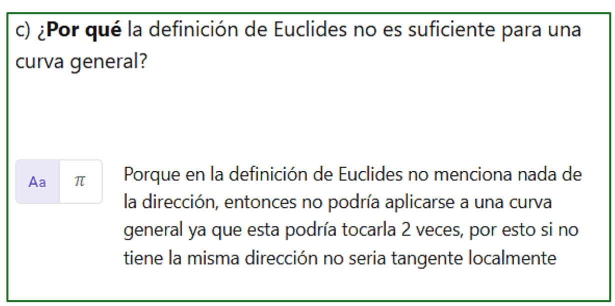


Esta actividad de retroalimentación no estaba planeada, sin embargo, se resalta que el uso de las múltiples representaciones, tales como hacer una tabla de valores, construir su respectiva gráfica, animo a Est9 a pasar al frente y hallar la pendiente de la recta en el tablero.

En cuanto a la actividad del *Concepto de tangencia a una curva*, como ya es sabido, en el análisis cognitivo se encontró que la actividad vivencial (ver **Figura 32**) donde camina sobre una cuerda y coloca el marcador con la misma dirección de la curva generó ciertos desequilibrios conceptuales en los estudiantes al notar que la definición de Euclides sobre la recta tangente no funciona para una curva en general, promoviendo nuevas formas de definir la recta tangente.

Figura 32

Actividad vivencial sobre la recta tangente a una curva


c) ¿**Por qué** la definición de Euclides no es suficiente para una curva general?

Porque en la definición de Euclides no menciona nada de la dirección, entonces no podría aplicarse a una curva general ya que esta podría tocarla 2 veces, por esto si no tiene la misma dirección no seria tangente localmente

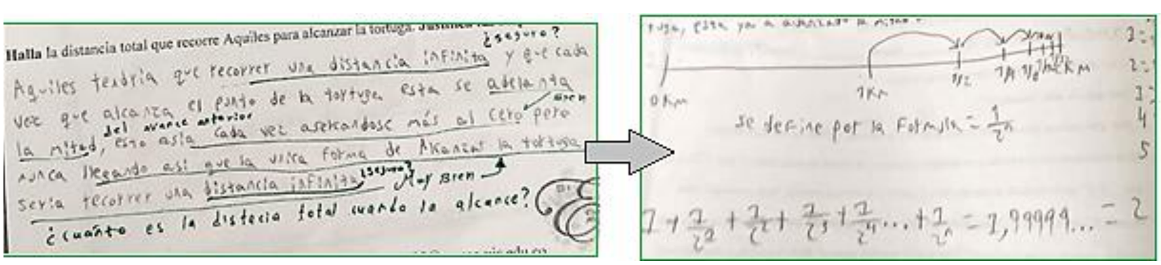
Por otra parte, se recuerda que solamente los estudiantes Est10 y Est5 fueron quienes hicieron la tarea, esta consistía en realizar la segunda parte de esta actividad denominada "Conectando conceptos de tangencia a una curva" que tuvo por objetivo que los estudiantes descubran la relación estrecha entre el problema de la velocidad de la actividad con Galileo y el problema de la tangente con Euclides, este hecho, fue favorable para su aprendizaje de la derivada. En efecto, Gutiérrez (2019) reconoce que una característica clave de un ciudadano matemáticamente competente es aquel que: “manifiesta autonomía al decidir aprender por convicción y al ser responsable de su propio aprendizaje” (p. 139).

Cabe señalar que esta actividad permitió a los estudiantes juzgar la pertinencia de las diferentes justificaciones geométricas de sus compañeros, incluso del mismo Euclides. Además, el debate sobre la idea preconcebida por un alto número de estudiantes sobre que la recta tangente es aquella que “al prolongarse no corta a la curva”, es una idea que se resuelve cuando los estudiantes identifican que el concepto de tangencia es local, es decir, alrededor de un punto.

En cuanto a la actividad *Noción de Límite* que consistió en hallar la distancia total que recorre Aquiles para alcanzar la tortuga, las preguntas orientadoras a nivel procedimental y cognitivo, fomentó el estudio de aproximaciones y tendencias. De tal manera, que a los estudiantes Est2, Est3, Est4, Est12 y Est16 quienes concuerdan, en la prueba diagnóstica, sin mayores procedimientos que la distancia es infinita. A modo de ejemplo, en la **Figura 33** se muestra los procedimientos de Est12:

Figura 33

Mejora en los procedimientos de Est12 en la noción de límite



Prueba diagnóstica Taller

En la imagen se observa los procedimientos de Est12 de la misma situación problemática, donde se muestra un razonamiento en un lenguaje natural, sin mayor esfuerzo donde llega a la conclusión: que la distancia es infinita. Por otro lado, en la otra imagen se muestra un razonamiento, donde hay operaciones aritméticas y geométricas, mostrando así un progreso significativo en sus habilidades procedimentales y cognitivas. A su vez, esto permite que desde cierto modo el estudiante pueda autoevaluarse, teniendo en cuenta el margen de error de sus aproximaciones, dando cumplimiento al logro del indicador.

En segundo lugar, se muestra el análisis del desarrollo actitudinal del pilotaje del segundo taller, a diferencia del anterior que estuvo enfocado en la participación, este se encuentras más enfocado hacia el análisis crítico de los aportes históricos. Para este análisis, se tiene en cuenta los indicadores de logro que se muestran en la **Tabla 45**:

Tabla 45

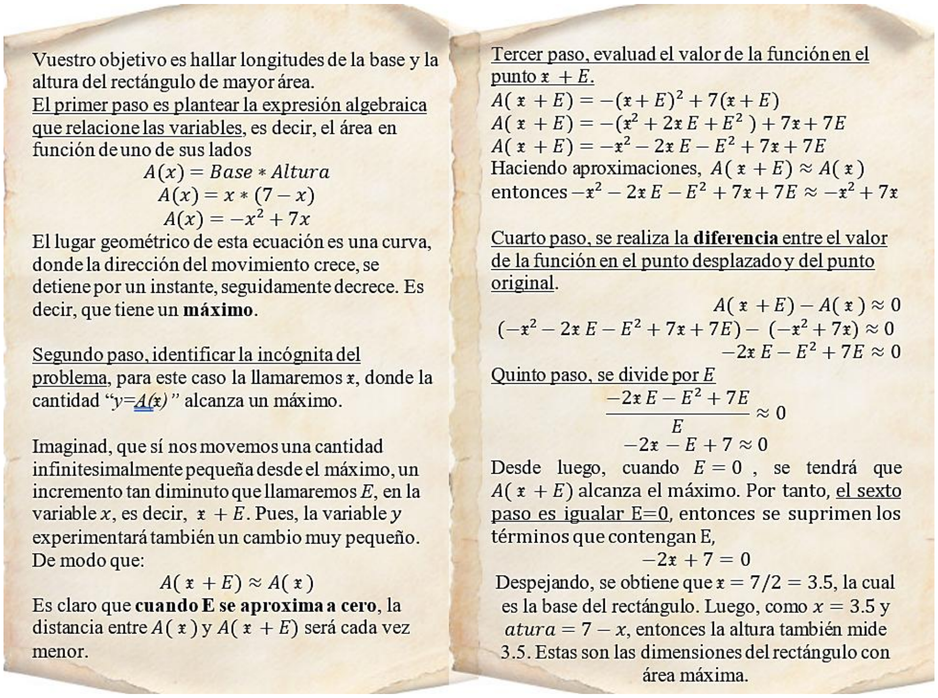
Indicadores de logro de la competencia actitudinal del segundo taller

	Competencia Actitudinal	Actividad	Indicadores de logro	Si	No	S/E	N
Taller 2	Analiza críticamente los aportes históricos en la construcción del concepto de derivada y relaciona el concepto con aplicaciones de la realidad.	Los infinitésimos	Juzga la pertinencia de las diferentes justificaciones de sus compañeros en cuanto al método para hallar máximos y mínimos de Fermat.	41%	47%	12%	17
		Límite del cociente infinitesimal	Identifica y contrasta los principales aportes de Newton y Leibniz en la construcción del concepto de derivada	30%	24%	47%	17

En cuanto a la actividad denominada *Los infinitésimos*, específicamente, en la segunda situación, se les presento un texto escrito similar al lenguaje verbal de la época, sobre el método de Fermat (ver **Figura 34**), para hallar puntos máximos y mínimos de una curva, como se muestra a continuación:

Figura 34

El método de Fermat presentado con lenguaje técnico



Esta forma de presentar el método de Fermat dificultó la compresión de este. Según Maza (1994) es "la actividad más compleja y que requerirá una amplia formación" (p. 26). A lo mejor esto explica la falta de interés y entendimiento del método. Por ello, se reajustó y modificó la actividad, y se optó por presentarla en forma de historieta en la próxima clase y los resultados fueron mucho mejor.

Con respecto, al indicador de logro se evidenció muy pocos debates entre los estudiantes, juzgando la pertinencia de las justificaciones de sus compañeros, más bien, esperaban validar sus ideas de acuerdo con la orientación del profesor. Por ello, el 47% (8 de 17) no logró este indicador. A continuación se muestra en la **Tabla *46*** un fragmento donde se debate sobre cómo se relaciona $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ con $\frac{f(x+E) - f(x)}{E}$:

Tabla 46

Discusión del método de Fermat

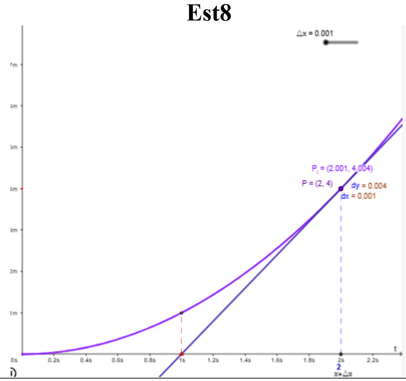
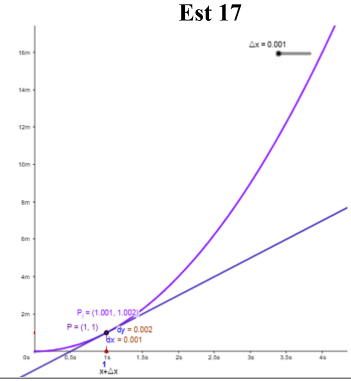
	24/05/25 03:09 pm		
1	**P:** Entonces, ¿qué es $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?	12	**P:** Y entonces chicos, estábamos hablando sobre esta razón que hay acá. Que aparece un triangulito con una "y" (Δy) y un triangulito con una "x" (Δx). Además aparece una resta entre los valores del valor en "y" de un punto P_i y del otro punto P. Y abajo los valores en x. (…) Y entonces, esa razón, (…), ¿qué significa eso?
2	Est17: Esa es la diferencia entre $f(x-e)$ y menos $f(x)$, mientras que Δy sería la diferencia que hay entre el resultado de esas funciones		
3	**P:** Casi, casi, casi, casi.		
4	**Est11:** Es la pendiente	13	**Est3:** ¿Es el valor de un instante?
5	**P:** Miren lo que nos está diciendo... Est17	14	**Est11:** Ay, la velocidad instantánea, quiere decir
6	**Est6:** Bueno, sería igual Δx a la X final, que sería la que más está a la derecha *[se refiere al incremento x+e]*, menos X inicial, y pues "y" sería más o menos lo mismo. Solo que, a pesar de que la primera y la segunda, la que más está arriba.	15	**Est3:** Es la calcular la velocidad instantánea. *[dice dudoso]* **Est6:** Es la pendiente, **P:** ¿Pero por qué dices eso? ¿Por qué hablas de velocidad?
7	**P:** ¿Es como esto? $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	16	**Est3:** ¿Ahí no estamos viendo una gráfica de velocidad?
8	**Est8 y Est3:** Si	17	**P:** (…) estábamos hablando del área de un rectángulo. (…) les doy una pista *[El profe escribe sobre el tablero* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x}$ *]* **P:** (…) ¿Recuerdan cómo hallamos las razones de cambio?
9	**P:** (..) Bueno, explícanos Est3, ¿pero por qué esto se parece a esto? $\frac{f(x+E)\ - f(x)}{E}$		
10	**Est3:** porque... Ahhh. Se parecen se acerca los valores		**Est6, Est11 y Est17:** Restábamos dos puntos
11	**P:** Miren lo que tengo acá!		**…**

En la discusión se presentan algunas inconsistencias en las afirmaciones por parte de algunos estudiantes, por ejemplo, en la línea 2, Est17 trata de explicar como $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se relaciona con $\frac{f(x+E)\ -f(x)}{E}$, sin embargo, confunde variables, y más tarde Est6 da claridad sobre lo que quería decir la Est17 con un acercamiento más puntual en su significado. Con respecto a esto, Fiallo y Parada (2018) afirman que "el papel del docente debe ser el de promotor del debate, la reflexión y la discusión de las ideas expuestas, de tal manera que se llegue a la construcción del conocimiento, que es el objetivo de la actividad" (p. 61)

Finalmente, la actividad denominada “Límite del cociente infinitesimal”, donde se propuso la situación problemática “Explorando el cociente infinitesimal” que consiste en un ejemplo de Newton y Leibniz calculando la velocidad instantánea acompañado de un applet de GeoGebra. Se pueden observar en la **Tabla 47** las respuestas de Est8 y Est17 en las que logran interpretar ciertos elementos de Newton y Leibniz.

Tabla 47

Rejilla de respuestas sobre el ejemplo de Newton y Leibniz

Ítems \ Estudiantes	**Est8** 	**Est 17** 
a) ¿A qué hace referencia el incremento evanescente que mencionó Newton?	hace referencia a una cantidad muy muy pequeña al igual que Fermat	El incremento evanescente hace referencia a una cantidad infinitamente pequeña que tiende a 0
b) ¿Qué es realmente el cociente diferencial u una fluxión en la actualidad?	Son las variaciones en x lo que conocemos como razón de cambio	El cociente diferencial podría ser el cambio entre dos puntos de una función
c) ¿Cuáles son las dos formas de interpretar el cociente diferencial gráfica y físicamente?	Razón de cambio instantánea y Derivada	*[No alcanza a responder]*
d) ¿Cuál o cuáles son las principales diferencias entre $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y $\frac{dy}{dx}$?	la formula dada por Leibniz es más exacta al momento de calcular razones de cambio	*[No alcanza a responder]*
…		

El 47% (8 de 17) de los estudiantes no respondió a estas preguntas principalmente porque, el lenguaje arcaico del ejemplo de Newton y Leibniz les resultó poco familiar y complejo, lo que generó desinterés, además por las limitaciones de tiempo se dio más énfasis en la segunda situación problemática “problema del lanzamiento vertical” que en la primera.

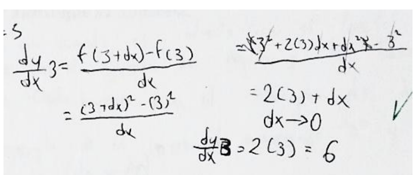
En contraste, se puede apreciar qué pese a los términos “incremento evanescente” y “cociente diferencial u fluxión” los estudiantes Est8 y Est17 apuntan con respuestas muy acertadas.

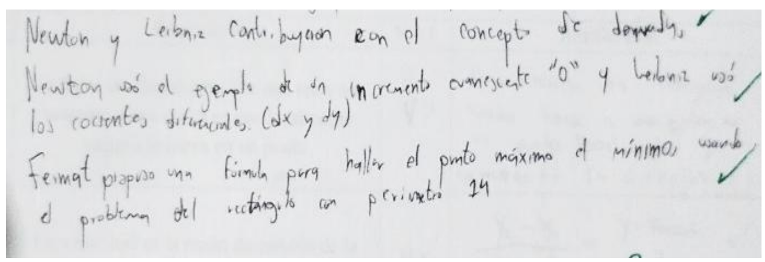
Por otra parte, en la evaluación final, el último punto consistió describir y explicar cómo las contribuciones históricas vistas en el curso facilitaron o dificultaron el desarrollo de su propio aprendizaje. En cuanto al aprendizaje de la derivada, en la **Figura 35** se evidencia que a la estudiante Est17 logra hallar la derivada y describir con claridad los aportes de Newton y Leibniz en la construcción de la derivada.

Figura 35

Respuestas de Est17 y Est8 en la evaluación final

Respuesta de Est17





5.2.5 Resultados de la prueba final

El objetivo de la evaluación final consistió en evaluar el alcance de las competencias matemáticas de los 17 estudiantes de educación media, así mismo, de identificar el nivel del alcance de las actividades implementadas. La prueba final se divide en tres secciones: los conocimientos previos (20pts), la noción de derivada (15pts) y el aporte histórico per se, por tanto, se asignó una nota máxima de 50 puntos. De manera general, en la **Tabla 48** se presentan los resultados obtenidos por cada uno de los estudiantes:

Tabla 48

Resultados de la prueba final vs prueba diagnóstica

		Prueba diagnóstica		**Prueba final**								
Grado	Nombre	Nota	Nivel	Conocimientos Previos		Noción de derivada		Aporte Histórico Per se		Total	Nivel	
10	**Est3**	31	Satisfactorio	12	!	7,5	!	1	✗	20,5	Mínimo	↓
	Est5	31.5	Satisfactorio	20	✓	15	✓	12	✓	47	Excelente	↑
	Est6	31.5	Satisfactorio	19	✓	12	✓	5	!	36	Satisfactorio	↑
	Est7	23	Mínimo	4	✗	3	✗	6	!	13	Insuficiente	↓
	Est10	31	Satisfactorio	18	✓	13	✓	12	✓	43	Excelente	↑
	Est12	24	Mínimo	20	✓	11	✓	12	✓	43	Excelente	↑
	Est13	36,4	Satisfactorio	17	✓	11	✓	12	✓	40	Excelente	↑
	Est15	34	Satisfactorio	17	✓	6	!	8	!	31	Satisfactorio	↓
	Est17	24	Mínimo	15	✓	11	✓	7,5	!	33,5	Satisfactorio	↑
11	**Est1**	22	Mínimo	16	✓	0	✗	12	✓	28	Mínimo	↑
	Est2	21	Mínimo	4	✗	2	✗	6	!	12	Insuficiente	↓
	Est4	24	Mínimo	4	✗	3	✗	6	!	13	Insuficiente	↓
	Est8	31.5	Satisfactorio	13	!	11	✓	1	✗	25	Mínimo	↓
	Est9	7	Insuficiente	10	!	7	!	0	✗	17	Insuficiente	↑
	Est11	26.5	Mínimo	16	✓	15	✓	12	✓	43	Excelente	↑
	Est14	40.5	Excelente	20	✓	15	✓	14,5	✓	49,5	Excelente	↑
	Est16	20	Mínimo	11	!	4	✗	6	!	21	Mínimo	↑
Promedio		**27**	Mínimo	13,9		8,6		7,8		30,3	Satisfactorio	↑

Nota. Los indicadores bien (✓), regular (!) y deficiente (✗) corresponden al nivel de progreso en sus procedimientos. Los símbolos (↑) o (↓) refiere un progreso positivo o negativo respectivamente.

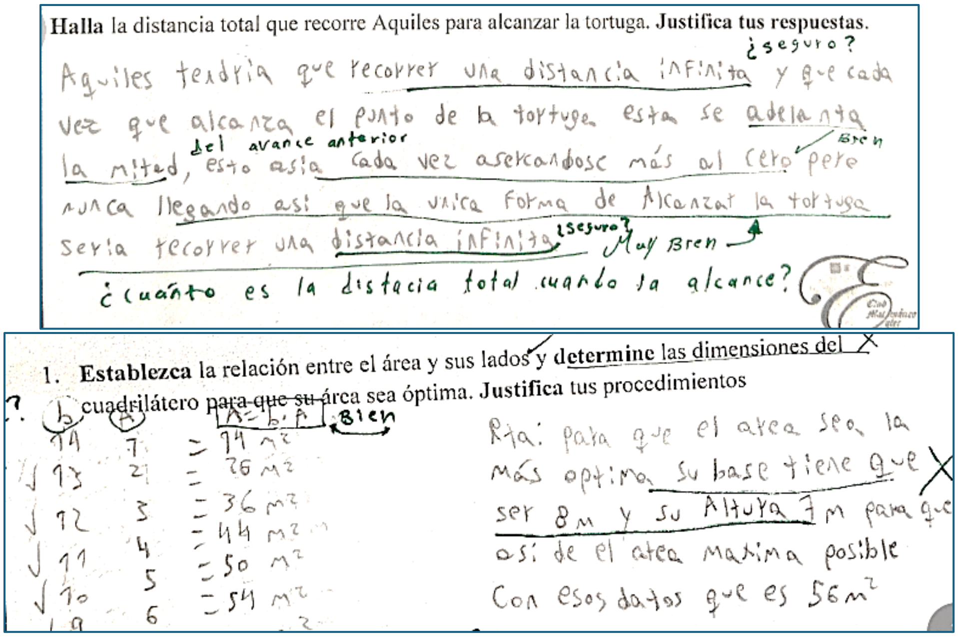
En la prueba diagnóstica, se analizó que el 58,8% (10 de 17) de los estudiantes no lograron el nivel satisfactorio, es decir, que presentaron diversas dificultades en la compresión y aplicación de conceptos básicos del cálculo tales como la noción de límite, las operaciones con interacciones infinitas, la razón de cambio, los números reales, planteamiento de funciones, la identificación de una recta tangente, entre otras. Que son directrices mínimas para poder enfrentarse a problemas más complejos del cálculo como la derivada. Pese a ello, es gratificante que el 70,6% (12 de 17) obtuvo un notorio progreso en la prueba final, siento esta, más difícil que la diagnóstica. Por otra parte, se observa que los estudiantes Est2, Est3, Est4, Est7 y Est9 obtuvieron muy bajas notas, esto se debe a que Est3 se distraía jugando en el computador, en cambio, Est2 y Est4 presentan bastantes dificultades para el nivel de undécimo grado, además, Est4 presentaba dificultades visuales, sin embargo, prefería hacerse en los puestos de atrás. Por otro lado Est9, pasó de dejar en blanco la prueba diagnóstica a hacer algunos intentos, incluso por sugerencia del docente hace una autoevaluación donde por sí mismo reconoce que "no preste atención en clase”. Como dato curioso, tanto en la prueba diagnóstica como en la prueba final los de décimo grado se destacaron mejor que los de undécimo grado.

De manera particular, el estudiante Est12, de décimo grado del colegio Juan Cristóbal Martínez de Girón asistió a todas las sesiones de clases, siempre fue muy respetuoso y en ocasiones participativo, en particular, Est12 mostró un alto progreso, pasando de contar con ciertas dificultades detectadas en la prueba diagnóstica, tras los talleres intermedios, lograr un excelente desempeño en la prueba final al resolver con éxito un problema de derivada, lo que ilustra el impacto positivo de las estrategias aplicadas.

Est12 en la prueba diagnóstica encontramos que no consideró ideas de cambio en la identificación de la recta tangente, sin embargo escribe “la condición para que sea tangente con una curva es que una de la curva toque y no corte la recta” como les pasó casi a todos. Por otro lado, al igual que Est2, Est3, Est4 y Est16 considera que es infinita. Y por otro lado, ante el problema del rectángulo de perímetro fijo no establece la relación entre el área y sus lados (ver **Figura 36**).

Figura 36

Algunas respuestas de Est12 en la prueba diagnóstica


Halla la distancia total que recorre Aquiles para alcanzar la tortuga. **Justifica tus respuestas.**

Aquiles tendría que recorrer una distancia infinita ¿seguro? y que cada vez que alcanza el punto de la tortuga esta se adelanta la mitad, del avance anterior esto asía cada vez asercandose más al cero Bien pero nunca llegando así que la única forma de alcanzar la tortuga sería recorrer una distancia infinita ¿seguro? Muy Bien

¿cuánto es la distacia total cuando la alcance?

1. **Establezca** la relación entre el área y sus lados y **determine** las dimensiones del cuadrilátero ~~para que su~~ área sea óptima. **Justifica** tus procedimientos

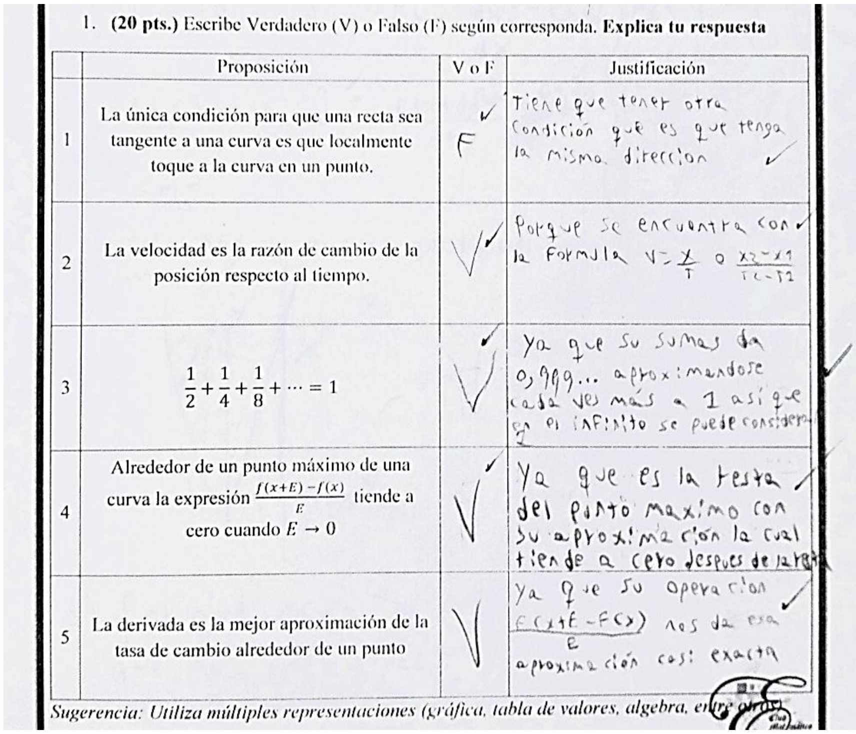
b	A	$\boxed{A = b \cdot A}$ Bien
14	1	= 14 m²
13	2	= 26 m²
12	3	= 36 m²
11	4	= 44 m²
10	5	= 50 m²
9	6	= 54 m²

Rta: para que el area sea la más optima su base tiene que ser 8m y su Altura 7m para que así de el area maxima posible Con esos datos que es 56m²

Por otro lado, en la evaluación final al igual que casi todos (excepto Est3, Est3, Est7, Est8 y Est11) consideraron la dirección de la curva como otra de las condiciones de recta tangente (ítem 1). En cuanto a la velocidad (ver **Figura 37**), casi todos reconocen que es la razón de cambio de la posición vs tiempo, como se muestra en el ítem 2:

Figura 37

Procedimientos en los conocimientos previos de la prueba final



1. **(20 pts.)** Escribe Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. **Explica tu respuesta**

	Proposición	V o F	Justificación
1	La única condición para que una recta sea tangente a una curva es que localmente toque a la curva en un punto.	F	Tiene que tener otra condición que es que tenga la misma dirección
2	La velocidad es la razón de cambio de la posición respecto al tiempo.	V	Porque se encuentra con la formula $V = \frac{X}{T}$ o $\frac{X2-X1}{T2-T1}$
3	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$	V	Ya que su sumas da 0,999... aproximandose cada ves más a 1 así que en el infinito se puede considera[illegible]
4	Alrededor de un punto máximo de una curva la expresión $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ tiende a cero cuando $E \to 0$	V	Ya que es la resta del punto maximo con su aproximación la cual tiende a cero despues de la re[illegible]
5	La derivada es la mejor aproximación de la tasa de cambio alrededor de un punto	V	Ya que su operación $\frac{F(x+E-F(x))}{E}$ nos da esa aproximación casi exacta

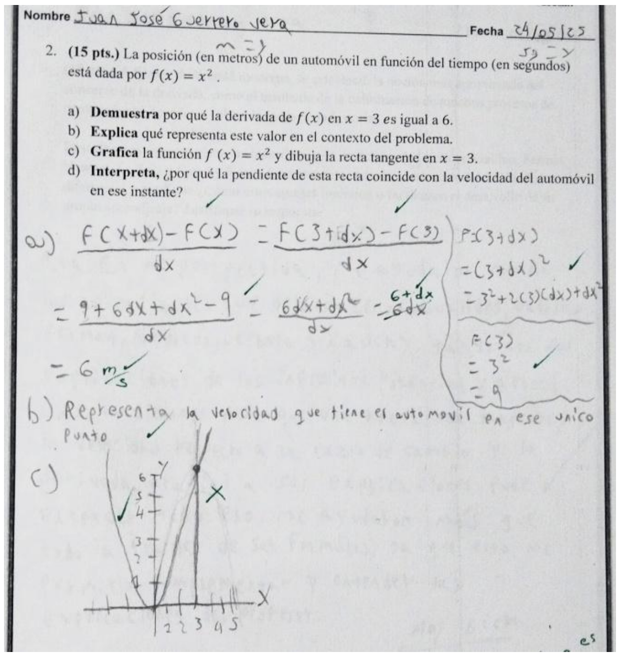
Sugerencia: Utiliza múltiples representaciones (gráfica, tabla de valores, algebra, entre otros)

Por otro lado, muy similar, Est3, Est5, desde Est8 a Est15 y Est17 afirman que es verdadero y justifican con la aproximación a 0,9 periódico. En cambio el método de Fermat solo es bien explicado por Est1, Est5, Est6, Est11, Est14 y Est17 así como Est12, (ver ítem 4). En cuanto al ítem 5, sobre qué es la derivada, los estudiantes Est1, Est2, Est4, Est7, Est8, Est9, Est16 y Est17 no respondieron u no justificaron, de resto le atribuyen características como la más velocidad más exacta. Este último refleja la necesidad de favorecer más procesos de cálculos numéricos de razones de cambio, también desde lo gráfico, con las rectas secantes, que se aproximen a la razón de cambio instantánea.

La derivada desde el contexto cinemático se presentó a los estudiantes como la velocidad instantánea dada por el límite del cociente diferencial denotado por Leibniz como $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ cuando $dx \to 0$. Desde el análisis cognitivo y procedimental, solamente Est5, Est6, Est9, Est10 y Est14 logran calcular la derivada en un punto específico, interpretar su significado en su contexto cinemático, graficar adecuadamente la recta tangente y explicar con claridad por qué la pendiente de la recta tangente coincide con la velocidad en ese punto, como se muestra en la **Figura 38**.

Figura 38

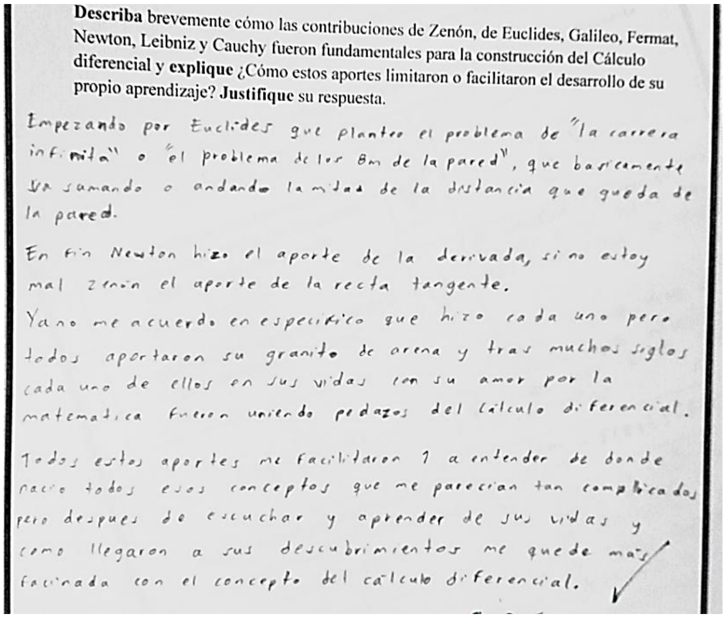
Respuesta de Est12 en el problema de calcular e interpretar la derivada



Finalmente, encontramos que el papel del contexto histórico jugo un papel de gran interés y motivador para los estudiantes Es1, Est5, Est10, Est11, Est12 y Est 13. Por ejemplo, en la **Figura 39**, el escrito de Est1 concuerda con los resultados de Gutiérrez (2019), quien afirma que: “el encuentro con la historia de la matemática generalmente es bien recibido por el estudiante porque siente que la matemática es una ciencia hecha por humanos” (p. 138).

Figura 39

Respuesta de Est1 sobre el impacto de la historia en su aprendizaje



Describa brevemente cómo las contribuciones de Zenón, de Euclides, Galileo, Fermat, Newton, Leibniz y Cauchy fueron fundamentales para la construcción del Cálculo diferencial y **explique** ¿Cómo estos aportes limitaron o facilitaron el desarrollo de su propio aprendizaje? **Justifique** su respuesta.

Empezando por Euclides que planteo el problema de "la carrera infinita" o "el problema de los 8m de la pared", que basicamente va sumando o andando la mitad de la distancia que queda de la pared.

En fin Newton hizo el aporte de la derivada, si no estoy mal Zenón el aporte de la recta tangente.

Ya no me acuerdo en especifico que hizo cada uno pero todos aportaron su granito de arena y tras muchos siglos cada uno de ellos en sus vidas con su amor por la matematica fueron uniendo pedazos del cálculo diferencial.

Todos estos aportes me facilitaron 1 a entender de donde nacio todos esos conceptos que me parecian tan complicados pero despues de escuchar y aprender de sus vidas y como llegaron a sus descubrimientos me quede mas facinada con el concepto del cálculo diferencial.

Además, causó gran impresión en el autor, cuando de manera espontánea durante la ceremonia de cierre del Club Matemático Euler 2025-1, dijo:

Tabla 49

Impacto del contexto histórico en el aula de matemáticas

	07/06/2025 00:20 Lo que más me gustó a mí, fue, a pesar de que siempre he tenido un gran amor por la matemática, me gustó que aprendimos mucho sobre, bueno, tuvimos como tres clases, sobre la historia de la matemática. (…) La matemática es un área muy extensa, pero vimos más por ejemplo Galileo, que pues un personaje muy histórico, que fue fundamental para la matemática. Entonces, no tanto (…), tengo una fórmula (…) sino más el conocimiento de quiénes hicieron esa fórmula. Y cómo llegaron ahí, y la vida de ellos, y cómo impactaron, pues la historia de las matemáticas. Eso me gustó mucho.

Los conocimientos previos son las bases de todo aprendizaje, encontramos, desde los resultados de las pruebas diagnósticas, el desarrollo del taller y la prueba final, que es importante asegurarse de que todos los estudiantes tengan una buena comprensión de los conceptos intuitivos de función, límite, continuidad, razón de cambio, variable, etc., para que comprendan el significado de la derivada, más allá de las fórmulas y los procedimientos. Por otra parte, el diseño pretendió alcanzar competencias en un tiempo de tres sesiones de clase de 4h, que al final resultaron 3h por descanso y entrada y salida de clase. Razón tuvo Cantoral (2013): "la construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento, pues requiere la integración de distintos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos, visuales, gráficos y geométricos, así como una adecuada comprensión de procesos matemáticos específicos" (p.45)

5.3 Rediseño de la secuencia didáctica

El rediseño de la secuencia didáctica es el producto final de esta investigación. Para ello, en primer lugar se presentan los resultados centrales del análisis de los datos, que permiten evaluar la idoneidad de cada situación, de cada pregunta y el impacto del potencial didáctico de la historia y la epistemología en la secuencia. Esto permitirá, en un segundo lugar, anticipar y justificar los ajustes del rediseño de la secuencia didáctica frente a nuevas circunstancias para su implementación.

5.3.1 Diagnóstico de la secuencia didáctica implementada

El potencial didáctico de la historia y la epistemología en el diseño didáctico fue justificado en el análisis a priori (sección 5.1). El desarrollo de las competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales fueron descritos e interpretados previamente a la luz del marco teórico a partir de los resultados en la prueba diagnóstica, el desarrollo de los dos talleres y la prueba final (sección 5.2). En cambio, en este apartado se sintetizan los principales resultados de los análisis previos para justificar los ajustes necesarios para el rediseño de la secuencia didáctica.

Dado que estas tres dimensiones del saber, hacer y ser “se articulan claramente con una noción amplia de competencia como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí” (p.49). Por ello, es pertinente analizar estas tres dimensiones de manera integrada, esto refleja mejor la naturaleza holística de las competencias, con la finalidad de evaluar el alcance del estándar de competencia que plantea el MEN (2006) “Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva (…)” (MEN, 2006, p. 89). Tenga en cuenta que para esta evaluación de la secuencia didáctica, los símbolos: Se logró con éxito (✅), se logró parcialmente (❗) y definitivamente no se logró (❌), corresponden al nivel que fue alcanzado el indicador de logro en función de la estructura de la actividad. Se empieza con las competencias del **taller 1**, como se exponen a continuación:

1. ***Concepto de función y razón de cambio***

En la prueba diagnóstica el promedio estuvo en 9.9pts de un máx. de 12.5, así que dentro de sus saberes previos la mayoría logra interpretar la velocidad como una razón de cambio. Consecuentemente, en el taller, el 88% comprendieron la función como una relación de interdependencia. Sin embargo, a nivel procedimental, frente a la solicitud de "expresar la distancia en función del tiempo" muchos estudiantes despejaban el tiempo de la formula $V = D/T$, asumían que la función de la pelota es $t = x/30$ o $f(x) = x/t$. Por otro lado, a la pregunta (b) ¿Qué valores puede tomar la distancia y el tiempo?, se encuentran ~4 de los 17 afirma que son naturales o entero, desconociendo propiedades de los números reales. Por otro lado, en la segunda situación problematica, se destaca que el ejercicio tabular de calcular $V = \frac{P_f - P_i}{t_f - t_i}$, les permitió a todos los estudiantes identificar la relación estrecha entre la pendiente de una recta y la velocidad. Y nivel actitudinal, el 82% participaron activamente en las discusiones grupales y mostraron disposición para compartir ideas. De todo lo anterior, la medida en que se logró cada indicador de aprendizaje se muestra en la **Tabla 50**.

Tabla 50

Evaluación de la actividad del concepto de función y razón de cambio

¿La estructura de la actividad permitió lograr los indicadores de logro?	
Comprende el concepto de función como una relación de interdependencia entre magnitudes variables.	❗
Determina razones de cambio de funciones básicas en sus distintas representaciones en el contexto cinemático.	✅
Colabora y comparte sus resultados en equipo, discutiendo su análisis frente a las razones de cambio.	✅

Por tanto, se considera pertinente en los ajustes, diseñar una actividad enfocada en el estudio de las funciones elementales desde el cambio y la variación con énfasis en las múltiples representaciones.

2. ***Concepto de tangencia a una curva:***

En la prueba diagnóstica 16 de 17 (excepto Est15) estudiantes consideran que la recta tangente es aquella recta que "toca en un punto específico y no la atraviesa", sin apreciar ideas de cambio y variación. Est15 que tuvo un acercamiento a la idea "se mantenga pegada a la curva". Durante el taller, la actividad vivencial de caminar sobre la cuerda y la interacción visual de la situación en Geogebra permitió que el 71% de los estudiantes enfrentaran este obstáculo cognitivo resignificando el concepto de *la recta tangente como aquella que pasa por un punto y comparte la misma dirección de la curva en ese punto localmente*. A nivel procedimental, ni la actividad, ni las preguntas permitieron favorecer procesos matemáticos claros que les permitan establecer relaciones entre las rectas tangentes y el comportamiento de la función, solo, el 23% dieron evidencias de este último indicador. A nivel actitudinal, poco más de la mitad, el 53% de los estudiantes "juzgó" la pertinencia de las justificaciones geométricas de sus compañeros. De acuerdo con lo anterior, en la **Tabla 51** se evalúa la estructura de la actividad:

Tabla 51

Evaluación de la actividad del concepto de recta tangente a una curva

¿La estructura de la actividad permitió lograr los indicadores de logro?	
Reconoce la recta tangente a una curva, como aquella que pasa por un punto y comparte la misma dirección de la curva en ese punto.	✅
Establece relaciones entre las rectas tangentes y el comportamiento de la función	❌
Juzga la pertinencia de las diferentes justificaciones geométricas de sus compañeros	❗

Por tanto, debe replantearse una actividad que favorezca el desarrollo de procedimientos que vinculen la velocidad promedio con la pendiente de una recta secante. Paulatinamente, la velocidad instantánea con la pendiente de la recta tangente, como sugiere García y Dolores (2016) en el marco teórico de esta investigación. También, debe redefinirse el indicador actitudinal.

3. ***Noción de límite:***

En la prueba diagnóstica hubo diversidad de posturas frente al problema de Aquiles y la tortuga, el promedio de la calificación estuvo en 6.2 pts. de los 12.5pts. Donde 5 de 17 consideran que "la distancia es infinita" y sin identificar la regularidad del patrón de los sucesivos avances. En cambio, 4 de los 17, realizan sucesivas sumas de las distancias que recorre Aquiles y la tortuga de manera fraccional, decimal y en metros, llegando a considerar que Aquiles alcanza la tortuga a los 2km.

Esto último, se promovió en el desarrollo del taller frente a la pregunta del ítem (d) Si sumamos todos los intervalos de distancia ($1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$) ¿Cuál es la distancia recorrida por Aquiles cuando haya avanzado tres veces? ¿Cuatro veces? ¿cinco veces? ¿A qué valor se aproxima esta suma? Expresa en forma general la serie geométrica. Preguntas claves, que permitió la generalización de la suma infinita, por un lado, Est14 expresó: $n \to \infty$ de $\sum_1^n \frac{1}{2^{n-1}}$, en cambio, Est6 propuso el $\lim_{n\to\infty}\left(1+\sum_1^n \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, ambos casos fueron validados en la discusión. Y la suma numérica de estas, tienden hacia 1.999…, esto generó un debate en torno ¿si 1.999… es igual a 2km o no? En la discusión la comparación $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 1 = 0.\overline{\overline{9}} = 0.\overline{3} + 0.\overline{3} + 0.\overline{3}$ causo un conflicto cognitivo entre los estudiantes, dando pasa a nuevas ideas, como considerar que en la culminación del proceso infinito de los avances de Aquiles, recorrería un total 2km. Pese a que no se logró tomar las evidencias suficientes para la respectiva valoración de estos indicadores, en la prueba final, se evidenció que 12 de 17 interpretaron la noción de límite como la culminación del proceso de aproximación infinita. A nivel actitudinal, no se presentó una pregunta clara que les permitiera evaluar el margen del error de sus aproximaciones. Todo lo anterior, se permite dar una valoración de los indicadores de aprendizaje como se muestra en la **Tabla 52**:

Tabla 52

Evaluación de la actividad de la noción de límite

¿La estructura de la actividad permitió lograr los indicadores de logro?	
Diferencia las dos formas de interpretación del infinito, aquellas situaciones de procesos de aproximación infinitos (infinito potencial) de las situaciones límite entendida como la culminación del proceso infinito (infinito actual)	✅
Utiliza técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos con precisión	✅
Evalúa críticamente el margen de error en sus aproximaciones	❌

Se concluye que es necesario que en el rediseño se empleen más representaciones y se diseñe una simulación de esta paradoja en Geogebra. Así, se favorece que los estudiantes contemplen la interpretación del infinito como un proceso iterativo inalcanzable (infinito potencial) y como la culminación de un proceso infinito (infinito en acto) para construir la noción de límite como un estudio de aproximaciones y tendencias (Gonzales et al., 2013). Y debe replantearse el indicador actitudinal.

En segundo lugar, se evalúa el diseño de acuerdo con el desempeño en las actividades del **taller 2**, como se exponen a continuación:

1. ***Los infinitésimos:***

En la prueba diagnóstica, la situación problematica de hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área con un perímetro fijo de 14m el promedio de la nota fue de 6.4pts de 12.5pts, donde, todos a ensayo y error asignan valores a los lados del rectángulo, 3 de 17 toman valores naturales, 3 toman racionales, pero, consideran que un rectángulo no es un cuadrado. Otros 5 plantean las relaciones $A = b\,x\,a$, y $x + y = 7$, pero ninguno expresó el área en función de uno de sus lados, solamente asignaron valores. Solo Est14 dibujó una parábola pero sin su expresión algebraica. En el taller, las preguntas y la discusión en clase logran que la mayoría establezcan la función del área.

Seguidamente, fue presentado el método del método de Fermat en un lenguaje arcaico, mecánico y algebraico, esto no favoreció procesos matemáticos, sin embargo, cuando se volvió a presentar, pero en forma de historieta con simulaciones en Geogebra, los resultados y la participación mejoró bastante. De hecho, la discusión de qué significa E en el método de Fermat, permitió que el 94% de los estudiantes interpretaran E como una cantidad infinitesimal que tiende a cero, pero no es cero.

A nivel procedimental, solamente el 59% de los estudiantes participaron en el planteamiento y ejecución del método de Fermat, quizás porque ya se había resuelto el problema aplicado la fórmula del vértice de una parábola $\frac{-b}{2a}$ causando desinterés. Por otro lado, con preguntas orientadoras y apoyo de Geogebra, les permitió que en la evaluación final cerca de 7 de 17, evidenciaran comprender la expresión $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$, como una razón de cambio $\frac{f(x+E)-f(x)}{(x+E)-E}$, que tiende a cero en el punto máximo. En contraste, el 41% no logran explicar el significado de $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ o su relación con la razón de cambio y el máximo de la función. A nivel actitudinal, la poca participación en el planteamiento del método de Fermat no permitió determinar argumentaciones que "juzgaran" las justificaciones de sus compañeros. Teniendo en cuenta lo anterior, se evalúa el alcance de los indicadores de logro en la **Tabla 53**.

Tabla 53

Evaluación de la actividad de los infinitésimos

¿La estructura de la actividad permitió lograr los indicadores de logro?	Interpreta los infinitesimales como una cantidad variable que se puede aproximar indefinidamente a cero pero no ser igual a cero.	✅
	Plantea y ejecuta métodos para determinar puntos máximos o mínimos mediante el estudio de la variación, la tendencia y razones de cambio alrededor de estos puntos.	❗
	Juzga la pertinencia de las diferentes justificaciones de sus compañeros en cuanto al método para hallar máximos y mínimos de Fermat	❌

Por lo tanto, se considera pertinente considerar una nueva situación problemática donde el método de Fermat cause más interés, no sea tanto algebraico, ni mecánico. Por otro lado, debe replantearse el indicador actitudinal.

2. ***Límite del cociente infinitesimal:***

El video: "Capítulo 2, Esencia del cálculo" del canal de YouTube s3Blue1Brown (29 abr 2017) y el uso del archivo de Geogebra de Rodríguez (2020) permitieron que el 52% de los estudiantes comprendieran que la expresión de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ es "la mejor aproximación a la razón de cambio instantánea" como afirmó Est17 en las transcripciones. Al reducir el incremento Δx, visualizarán que la secante se aproxima al punto P_i $(0.5,\ 3.75)$ y al hacer zoom en el software y visualizar el triángulo característico de Leibniz, y notar que efectivamente el cálculo de la pendiente de la recta secante $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y de la velocidad promedio en un cierto intervalo cada vez más pequeño definido por Δx permiten encontrar la velocidad instantánea, que se obtiene de la expresión:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) \ - f(x)}{dx} \ cuando \ dx \ \to 0$$

A nivel procedimental, cuando Est6 pasó al tablero, presentó dificultades para operar $\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$. Sin embargo, la incorporación de GeoGebra resultó fundamental para comprobar el resultado, visualizar el concepto y reducir las dificultades operativas. Esto se reflejó en la prueba final, donde el 41% aplica correctamente el límite del cociente infinitesimal para determinar tasas de cambio instantáneas, en particular, Est15, se frustró en sus intentos por hallarla por un error procedimental de expandir $(x + dx)^2$, manifestando que no entiende.

A nivel actitudinal el 30% (~5 de 17) identificó y contrastó los principales aportes de Newton y Leibniz en la construcción del concepto de derivada, es bajo índice se deba a la presentación del ejemplo de Newton y Leibniz de forma temprana y con un lenguaje arcaico, sin una aproximación más intuitiva como el cálculo numérico de velocidades medias, esto explica porque solo 9 estudiantes calcularon la derivada en un punto específico e interpreta su significado en el contexto cinemático. Por tanto, se logró en menor medida los indicadores de logro previstos, como se muestra en la **Tabla 54**.

Tabla 54

Evaluación de la actividad del límite del cociente infinitesimal

¿La estructura de la actividad permitió lograr los indicadores de logro?	Interpreta la noción de derivada como razón de cambio instantánea y establece su relación con la recta tangente a una curva	!
	Aplica el límite del cociente infinitesimal para determinar tasas de cambio instantáneas	!
	Identifica y contrasta los principales aportes de Newton y Leibniz en la construcción del concepto de derivada	✗

A causa del poco tiempo dispuesto para el desarrollo de esta última actividad no permitió favorecer un aprendizaje de calidad del concepto de derivada. Además, el análisis de las evidencias reflejo la necesidad de partir con el cálculo numérico mediante incrementos cada vez más pequeños, así podrán más tarde asimilar las ideas de Newton y Leibniz. También, debe ejercitarse previamente las operaciones de $f(x+a)$. Finalmente, se sugiere replantear el indicador actitudinal en relación con el cambio de sí mismo y del mundo.

En conclusión. se puede identificar que faltó una evaluación formativa, centrada en la autoevaluación y coevaluación para promover el autorreconocimiento de los estudiantes respecto a sus debilidades y fortalezas clave para monitorear el desarrollo de las actitudes y promover la reflexión en los estudiantes. Además, se deben replantear los indicadores del ser (actitudinal) en relación con los mismos objetos de la derivada, porque así el aprendizaje es transformador.

5.3.1.1 Ajustes de la secuencia didáctica

De acuerdo con los resultados anteriores las estructuras de todas las actividades deben ajustarse, asimismo, se ajustaron las competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales, los indicadores de logro y las actividades de los talleres. En la dimensión cognitiva se hace énfasis en los objetos claves del cálculo (función, noción de límite y números reales) y la noción de derivada como el límite del cociente incremental. En la dimensión procedimental se integra los métodos del cálculo infinitesimal. Y en la dimensión actitudinal se vincula la valoración del error como una oportunidad de aprendizaje, la curiosidad por la historia y desde el significado de los mismos objetos como medios de transformación del aprendizaje. Todo esto se aprecia en la **Tabla 55**.

Tabla 55

Competencias del rediseño de la secuencia didáctica

Dimensiones	*Cognitivas*	*Procedimentales*	*Actitudinales*
Taller 1	Comprende y argumenta los fundamentos conceptuales y teóricos de los objetos básicos del Cálculo (concepto de función, noción de límite y números reales) en contextos matemáticos y no matemáticos.	Determina razones de cambio, establece su relación con la pendiente de una recta y utiliza técnicas de aproximación para hallar la velocidad en un instante y la pendiente de una recta tangente.	Participa activamente en discusiones grupales, escuchando y aportando ideas en la construcción colectiva del conocimiento, manteniendo una actitud dispuesta a cuestionar y resignificar sus propios conceptos.
Taller 2	Comprende la noción de derivada como el límite del cociente incremental a través del estudio de episodios históricos que originaron este concepto.	Emplea técnicas y métodos del cálculo infinitesimal para resolver situaciones en las que es necesario calcular la pendiente de la recta tangente y/o la velocidad instantánea.	Manifiesta curiosidad por la historia y el aprendizaje de los objetos matemáticos del cálculo, mientras cultiva la persistencia y valora el error como un motor de la evolución matemática.

En el primer taller, la actividad del concepto de función y de razón de cambio se separan en dos actividades, la primera se retroalimentan las funciones básicas (lineal y cuadrática) desde sus diferentes representaciones y en la segunda se fortalece el concepto de razón de cambio como la medida de cuánto cambia una magnitud variable con respecto la otra y su vínculo con la pendiente de la recta. La actividad de la pendiente de la recta tangente, se agrega el proceso de cálculo numérico y geométrico de hallar la pendiente de la recta tangente, de dos formas: la primera, hallando pendientes de rectas secantes con puntos cada vez más próximos, la segunda hallando razones de cambio de intervalos cada vez más pequeños. Esta será la última actividad del primer taller, puesto que, la actividad de la noción de límite se traslada para un segundo taller, debido a su mayor complejidad. En la **Tabla 56** se muestran los nuevos indicadores de logro para cada actividad del primer taller:

Tabla 56

Indicadores de logro del rediseño del primer taller

Actividad	Cognitivas	Procedimentales	Actitudinales

El concepto de función	Comprende la función como la generalización de la interdependencia entre magnitudes variables.	Identifica y construye funciones básicas desde diferentes representaciones.	Comprende que su futuro depende de sus acciones presentes.
El concepto de razón de cambio	Interpreta la razón de cambio como la medida de cuanto varia una magnitud con respecto a otra en contextos físicos.	Determina razones de cambio y pendientes de rectas secantes en funciones básicas en el contexto cinemático.	Participa activamente en discusiones y manifiesta una actitud abierta al cambio al reconsiderar sus propias ideas y valorar los aportes de los demás.
Estudio de Rectas Tangentes y Secantes	Identifica la recta tangente a una curva como aquella que pasa por un punto y comparte la misma dirección e inclinación de la curva en ese punto.	Calcula la pendiente de la recta tangente mediante aproximaciones geométricas y aritméticas de pendientes de secantes y razones de cambio.	Cuestiona las creencias del pasado sobre los objetos matemáticos, pone a prueba sus conocimientos y reconstruye sus propios conceptos.

En el segundo taller, comienza con la actividad de Aquiles y la tortuga, dado que este es un objeto matemático más complejo y es fundamental para la comprensión de la noción de derivada. La actividad de Fermat se reformula totalmente, aún con la historieta pero acompañada de varios applets que hacen énfasis no tanto hacia lo algebraico y mecánico sino hacia lo cognitivo y dinámico. Finalmente el último taller, no parte desde el ejemplo de Newton y Leibniz para hallar la velocidad instantánea, sino que parte desde el cálculo numérico y geométrico de la velocidad instantánea del problema del lanzamiento vertical a partir de considerar incrementos cada vez más pequeños en la función, y concluye con la minihistorieta de Newton y Leibniz acompañada de Geogebra para orientar el aprendizaje de la derivada como el límite del cociente incremental. En la **Tabla 57** se muestran los indicadores de logro para cada actividad del rediseño del primer taller:

Tabla 57

Indicadores de logro del rediseño del segundo taller

Actividad	Cognitivas	Procedimentales	Actitudinales
La noción de limite	Diferencia las dos formas de interpretación del infinito,	Utiliza técnicas de aproximación en procesos	Desarrolla una actitud de paciencia

	aquellas situaciones de procesos de aproximación infinitos (infinito potencial) de las situaciones límite entendida como la culminación del proceso infinito (infinito actual)	infinitos numéricos con precisión.	y perseverancia ante problemas paradójicos que no se resuelven de inmediato.
El problema de los máximos y mínimos	Interpreta los infinitesimales como una cantidad variable que se puede aproximar indefinidamente a cero pero no ser igual a cero.	Plantea y ejecuta métodos para determinar puntos máximos o mínimos mediante el estudio de la variación, la tendencia y razones de cambio alrededor de estos puntos.	Explora procedimientos históricos no convencionales para resolver problemas de optimización con una actitud proactiva ante los posibles desafíos.
El límite del cociente incremental	Comprende la noción de derivada como el límite del cociente incremental e interpreta su significado como razón de cambio y como pendiente de la recta tangente.	Determina razones de cambio instantáneas y la pendiente de la recta tangente en contextos cinemáticos.	Muestra curiosidad genuina y compromiso ético por comprender los conocimientos matemáticos.

5.3.1.2 Reformulación de trayectoria hipotética de aprendizaje

La reformulación de la trayectoria hipotética se estructuró y refinó en comparación a la vista en la sección 4.3.3 del capítulo 4 (metodología).

El primer taller que se compone de las actividades: "El concepto de función", "El concepto de razón de cambio" y el "Estudio de rectas tangentes y secantes". Se espera que en la puesta en práctica de este taller. Los estudiantes de forma gradual resignifiquen algunos conceptos básicos del cálculo. El concepto de función transitaría del algebra escolar (ecuaciones) hacia la generalización de la interdependencia entre magnitudes variables (Fiallo y Parada, 2018). El concepto de razón de cambio se reformaría de comparar dos magnitudes, hacia la medida de cuánto cambia una magnitud variable con respecto a otra (Carlson et al. 2002/2003), y la concepción tradicional de recta tangente como aquella que toca en un punto al círculo y es perpendicular al radio (Neira, 2012) como aquella que pasa por un punto y comparte la misma dirección e inclinación de la curva localmente. En particular, esta última actividad, se espera que los estudiantes al realizar el cálculo numérico de razones de cambio y de pendientes de rectas secantes con aproximaciones por izquierda y por derecha alrededor de un instante, al encontrar los mismos resultados establezcan esta relación estrecha entre la razón de cambio instantánea y la pendiente de la recta tangente como explica García y Dolores (2016), estas serán las primeras nociones más cercanas del concepto derivada.

Lo anterior serán los fundamentos para el desarrollo del segundo taller, que está conformado por: "La noción de límite", "El problema de máximos y mínimos" y el "límite del cociente incremental". Se espera que los estudiantes resignifiquen la noción de límite desde el estudio de la tendencia, la aproximación y la tendencia pasando de considerar el proceso iterativo infinito inalcanzable (infinito potencial) hacia la culminación de un proceso infinito (infinito actual) (Gonzales et al. 2013). Por otra parte, se espera que los estudiantes, al discutir el método de Fermat para encontrar puntos máximos con apoyó de Geogebra, identifiquen que al considerar un incremento infinitesimal $(x + E, f(x + E)$ alrededor del máximo $(x, f(x))$, le permitirán al estudiante tener un acercamiento al límite del cociente incremental en los puntos máximos.

Finalmente, en la última actividad se conjetura que los estudiantes cuando realicen los procesos de iterativos de aproximación a la razón de cambio instantánea a partir de cálculos de velocidades medias al considerar un incremento $\mathbf{\Delta x}$ cada vez más pequeño. Y de manera análoga, la aproximación de la pendiente de la recta tangente mediante el cálculo de pendientes de rectas secantes. Los estudiantes logren expresar y generalizar derivada como el límite del cociente incremental. Todo lo anterior, está apoyado del potencial del software Geogebra que facilitará la comprensión de los objetos matemáticos.

Posteriormente, en las orientaciones para el profesor de la implementación de la secuencia didáctica se profundizará a más detalles esta trayectoria de aprendizaje.

5.3.2 Orientaciones para la implementación de la secuencia didáctica

Esta secuencia didáctica se compone de dos talleres denominados "Explorando los cimientos del cálculo" y "Aproximación histórica del concepto de derivada" respectivamente. Cada taller se componer de 3 actividades orientadas hacia el aprendizaje progresivo de la derivada desde un enfoque histórico-epistemológico. Estas actividades están compuestas de situaciones problemáticas (una o dos) que apuntan hacia el logro de tres indicadores de aprendizaje (cognitivo, procedimental y actitudinal) coherentes en función de lograr las competencias correspondientes a cada taller.

En el primer taller enfrentarán los más temidos obstáculos epistemológicos de los objetos básicos del cálculo diferencial, tales como, el concepto de función, razón de cambio y noción de recta tangente. Todos los conceptos giran en torno a los núcleos conceptuales cambio, variación, aproximación y tendencia (Fiallo y Parada, 2018), están acompañados de un personaje histórico y de applets en Geogebra.

En el segundo taller abordaran dos de los principales problemas que dieron surgimiento al cálculo diferencial: Hallar la pendiente de la recta tangente y la velocidad instantánea. El taller inicia con la noción del límite desde la paradoja de Aquiles y la Tortuga, luego se introduce el concepto de infinitesimal desde el método de Fermat para hallar máximos y mínimos. Finalmente, desde un acercamiento de Newton y Leibniz se introduce la derivada como la mejor aproximación a la velocidad instantánea.

Por otro lado, en la metodología se había explicado los elementos que componen la estructura de cada actividad (competencias, indicadores, saberes previos e introducción histórica, situación problemática histórica, exploración con facilidades de applet en Geogebra, preguntas orientadoras y discusión de resultados). La estructura metodológica se puede dividir en tres fases complementarias para la puesta en práctica de cada actividad, estas están basada en las fases de Fiallo y Parada (2018) y García y Dolores (2016):

1. **Fase de exploración**: Esta etapa inicia con la presentación de un personaje histórico para despertar la curiosidad, seguidamente se activan los saberes previos para preparar a los alumnos. Luego, se enfrentan a la situación problemática con sus propias capacidades, este momento finaliza después de una discusión de posibles soluciones. García y Dolores (2016) explican que "esta fase tiene el objetivo de preparar a los estudiantes en el trabajo con el fenómeno del cambio para más tarde poder relacionar estas ideas con las propias de la derivada" (p. 55).
2. **Fase de orientación dirigida:** De manera individual o en pequeños grupos mediante preguntas orientadoras, actividades vivenciales (caminar sobre una cuerda, lanzar una pelota, etc.) y el uso de Geogebra guiaran a los estudiantes en la resolución de la situación problemática y en la construcción de conocimiento matemático. Sí se presentan conflictos cognitivos, estos deberán abordarse en los espacios de discusión al finalizar las tareas.
3. **Fase de socialización y formalización:** Se promueven discusiones sobre los resultados para consolidar y resignificar el aprendizaje. El docente guía la resolución de la situación problemática, facilita el debate y la reflexión, apuntando a la construcción colectiva del conocimiento (Fiallo y Parada, 2018).

Todas las actividades cierran con una autoevaluación que permitan al estudiante reflexionar sobre sus propias actitudes durante el desarrollo de la actividad matemática. Las preguntas que orientan la autoevaluación son: ¿Qué aprendí de esta actividad? ¿Qué dudas y dificultades aún persisten? ¿Qué voy a hacer para fortalecer mi comprensión y participación? Salve aclarar que el docente debe implementar un examen diagnóstico con anticipación, que le permitan trazar la ruta de aprendizaje más adecuada para sus estudiantes.

Con el fin de optimizar la experiencia del lector, se sugiere revisar simultáneamente las orientaciones expuestas para el profesor y consultar el taller correspondiente. Se pone a disposición los documentos en formato PDF, ubicados en el siguiente enlace: https://drive.google.com/drive/folders/1RRfPHYFVAzpEJ5QVZcXb9prPkBiKXO8n?usp=sharing.

5.3.2.1 Primer Taller: Explorando Los Cimientos Del Cálculo

El primer taller, llamado *Explorando los cimientos del cálculo* introduce a los estudiantes, en los fundamentos conceptuales del cálculo diferencial (concepto de función, noción de límite y números reales), desde un enfoque histórico-epistemológico. Los estudiantes confrontarán obstáculos cognitivos y fortalecerán sus reforzarán sus conocimientos previos, transitando de forma continua desde el álgebra escolar hasta el pensamiento abstracto del cálculo (Artigue, 1995; Neira, 2012). En la **Figura 40**, se presentan las competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales del primer taller.

Figura 40

Competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales del primer taller

Cognitivas	*Procedimentales*	*Actitudinales*
Comprende y argumenta los fundamentos conceptuales y teóricos de los objetos básicos del Cálculo (concepto de función, noción de límite y números reales) en contextos matemáticos y no matemáticos.	Determina razones de cambio, establece su relación con la pendiente de una recta y utiliza técnicas de aproximación para hallar la velocidad en un instante y la pendiente de una recta tangente.	Participa activamente en discusiones grupales, escuchando y aportando ideas en la construcción colectiva del conocimiento, manteniendo una actitud dispuesta a cuestionar y resignificar sus propios conceptos.

El taller se estructura en tres actividades: el concepto de función (Descartes), la razón de cambio (Galileo) y una aproximación a la recta tangente a una curva (Euclides).

El concepto de función

La primera actividad denominada *El concepto de función* tiene por objetivo comprender el concepto de función como la generalización de la interdependencia entre dos magnitudes variables, donde una variable depende de otra, $y = f(x)$, como sugiere Fiallo y Parada (2018), a través de los núcleos conceptuales (cambio, variación, aproximación, tendencia) y las múltiples representaciones. En función de lograr las competencias descritas con anterioridad. En la **Figura 41** se reportan los estudiantes indicadores de aprendizaje que se esperan lograr con esta actividad.

Figura 41

Indicadores de logro y presaberes de la actividad del concepto de función

Indicador de logro:	**Sí**	**No**
Comprende la función como la generalización de la interdependencia entre magnitudes variables al identificar cómo una variable se relaciona con otra.		
Identifica y construye funciones básicas desde diferentes representaciones.		
Comprende que su futuro depende de sus acciones presentes.		

Saberes Previos

1. ¿Quién fue René Descartes? ¿Cuáles fueron sus mayores aportes a la matemática?

Biografía de Descartes:
https://youtu.be/Ul2XKi_fVLU?si=5yM1HwOf7X60pLLC

2. La gráfica de la expresión $x^2 + y^2 = 4$ es cortada por la recta vertical $x = -1$ (ver figura 1) en dos puntos distintos. ¿Esta gráfica representa una función?

3. Representa en su forma gráfica y algebraica la función que corresponde a la siguiente tabla de valores:

x	…	-2	-1	0	0.5	1	2	10	…
y	…	4	1	0	0.25	1	4	100	…

Soy René Descartes (1596–1650) un filósofo, matemático y científico francés. Serví como militar y mi gran aporte fue la geometría analítica

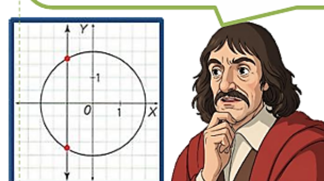


Figura 1

La actividad se recrea con el matemático Rene Descartes (1596 - 1650) y su papel en la creación de la geometría analítica. Se inicia con una breve contextualización sobre quién fue Descartes, un video corto de su biografía y dos preguntas para activar los conocimientos previos, donde la primera busca que identifiquen variables, y observen que al tratar de "despejar" o establecer la dependencia de $y = f(x)$, a un único valor de x le corresponde un único valor de y en cierto dominio y rango de $f(x)$. El docente debe utilizar ejemplos contextualizados para mostrar las relaciones, por ejemplo, si esta expresión representase la posición en función del tiempo, ¿tendría sentido que una persona esté en dos partes al mismo tiempo? En el segundo (2) deben encontrar un modelo matemático que relacione las variables. Sin embargo como el objetivo no es quedarse con idea de la función como una relación entre conjuntos o una máquina, sino como una relación funcional, se propone en la **Figura 42** la situación problemática "La trayectoria de un proyectil":

Figura 42

Situación problemática sobre la trayectoria de un proyectil

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ______________________________________ **Grado** ___________ **Fecha** ______________

Situación problemática 1.1

La Trayectoria de un Proyectil

Uno de los grandes retos de mi época era predecir la trayectoria de un proyectil de cañón. A continuación se muestran dos tipos de registros del mismo proyectil que se dispara desde una muralla de 25mt. Gráfica y determina la "ecuación" que modela la trayectoria del proyectil

A: Movimiento Horizontal	
Tiempo (t)	Distancia horizontal (x)
0	0
1	30
2	60
3	90
4	120
5	150

B: Movimiento Vertical	
Tiempo (t)	Altura (y)
0	0
1	25
2	40
3	45
4	40
5	25

Trayectoria (Distancia recorrida vs. Altura)	

Link de actividad en Geogebra: https://www.geogebra.org/m/sczfkrdh

1. **Identificar Variables :**
   a) ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente en cada tabla?
2. **Construir gráficas**
   b) Gráfica un plano cartesiano con el tiempo en el eje horizontal y la distancia x en el eje vertical. Ubica los puntos de la tabla A. ¿Qué tipo de gráfica obtienes?
   c) Dibuja un plano cartesiano con el tiempo en el eje horizontal y la altura y en el eje vertical. Ubica los puntos de la tabla B.
3. **Encontrar relación funcional**
   d) Encuentra la expresión algebraica que relaciona la distancia horizontal x en función del tiempo t. Es decir, de la forma $x(t) =$
   e) Encuentra la expresión algebraica que relaciona la altura x en función del tiempo t. Es decir, de la forma $y(t) =$
   f) Completa la tabla C, gráfica en un plano cartesiano la trayectoria del proyectil y encuentra la ecuación algebraica
4. **Análisis**
   g) ¿En qué segundo impacta contra el suelo?
   h) ¿En qué segundo alcanza el proyectil su altura máxima? ¿Cuál es esa altura?
5. **Conclusión**
   i) ¿Qué es una función en matemáticas?
6. **Autoevaluación:** ¿Qué aprendí de esta actividad? ¿Qué dudas y dificultades aún persisten? ¿Qué voy a hacer para fortalecer mi comprensión y participación?
   Discute tus respuestas con tus compañeros y profesor
   Escribe las conclusiones en tu hoja de trabajo

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

Esta actividad se surge con apoyo de Gemini, un modelo de inteligencia de artificial de Google. Continuando, al plantearle esta problemática a los estudiantes en su exploración inicial consultaran por el significado del "termino trayectoria", identificaran las variables tiempo, distancia horizontal y distancia vertical, al notar que en los mismos tiempos se puede completar la tabla de la trayectoria, seguidamente podrán realizar su gráfico. Lo interesante, es que al darse cuenta de su forma parabólica trataran de encontrar los valores de a, b y c de f(x)=$ax^2 + bx + c$, y bastara con que reemplacen con algunos valores para determinarlos. ´Sin embargo, es posible que un buen número de estudiantes no encuentren estas relaciones.

En la orientación guiada, las preguntas orientadoras son muy claras, encaminadas hacia el repaso de funciones básicas como la lineal y la cuadrática. El applet https://www.geogebra.org/m/sczfkrdh es un apoyo visual de la traza del proyectil. Posteriormente, elaboran representaciones numéricas, algebraicas y gráficas, ahí el docente debe observar y acompañar la construcción de gráficas, ayudando a los estudiantes a reconocer patrones de cambio y la correspondencia unívoca entre variables. Finalmente, en la discusión se formaliza el concepto de función como la generalización de la interdependencia entre magnitudes variables. Y se cierra con la autoevaluación.

El concepto de razón de cambio

En la siguiente actividad llamado *El concepto de razón de cambio* se encuentra Galileo (1564 - 1642) que se presenta con un video corto de sus más grandes descubrimientos y experimentos. El objetivo de esta actividad es comprender la razón de cambio o noción de variación como la medida cuánto cambia variable en función de otra (Caballero, 2012 y Carlson et al., 2002/2003), y relacionarla con la velocidad promedio y la pendiente de una recta secante, esto en miras de reconocer la variación de la función que resulta de las actividades experimentales de movimiento rectilíneo. En la **Figura 43**, se muestran los indicadores de logro:

Figura 43

Indicadores de logro de la actividad del concepto de razón de cambio

Indicador de logro:	Si	No
Interpreta la razón de cambio como la medida de cuanto varia una magnitud con respecto a otra en contextos físicos.		
Determina razones de cambio y pendientes de rectas secantes en funciones básicas en el contexto cinemático.		
Participa activamente en discusiones y manifiesta una actitud abierta al cambio al reconsiderar sus propias ideas y valorar los aportes de los demás.		

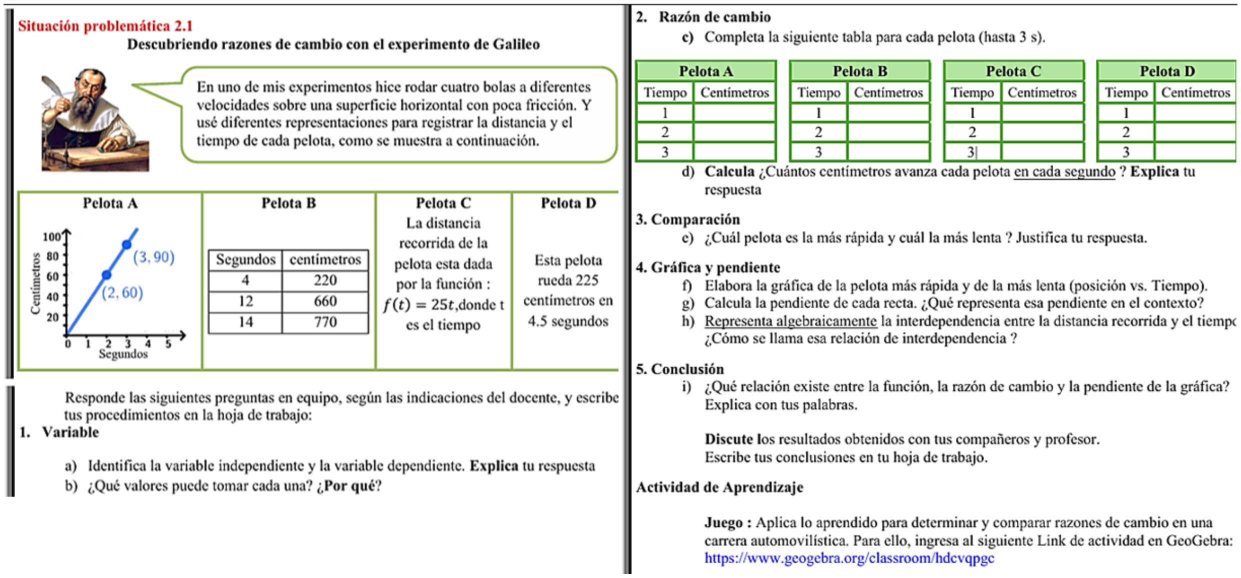
En la activación de *saberes previos*, se busca que identifiquen la dependecia de la distancia recorrida del tiempo, y ademas comprendan inicialmente que la comparación entre magnitudes representa una razón, y analizar como cambia una con respecto a la otra, es una razón de cambio. Se pueden usar más ejemplo entre variables: velocidad (cm/s), aceleración (cm/s^2), cm^3/s, población/año, entre otros.

La primera situacion problemática de esta actividad denominada "Descubrienso razones de cambio con el experimento de galileo", presenta la distancia recorrida por cuatro pelotas en diferentes representaciones (graficas, tabular, algebraica y lenguaje natural), se recomienda ver la **Figura 44**. Desde su implementación, se encuentra que los estudiantes hallan el cociente de la distancia entre el tiempo para calcular la rapidez y compararlas. Sin embargo, no le es fácil reconocer que la pendiente de la expresión algebraica corresponde a la velocidad.

En orientación guiada de las preguntas del taller busca la construcción de la noción de variación. Para ello, Caballero (2018) citado en Arciniegas (2022) sugiere cinco interrogantes específicos ¿qué cambia?, ¿respecto de qué cambia?, ¿cómo cambia?, ¿cuánto cambia?, y ¿por qué cambia de esa manera?, de esta manera se construye la noción de derivada.

Figura 44

Situación problemática sobre el lanzamiento de pelotas sobre un plano



Situación problemática 2.1

Descubriendo razones de cambio con el experimento de Galileo

En uno de mis experimentos hice rodar cuatro bolas a diferentes velocidades sobre una superficie horizontal con poca fricción. Y usé diferentes representaciones para registrar la distancia y el tiempo de cada pelota, como se muestra a continuación.

Pelota A

Pelota B

Segundos	centímetros
4	220
12	660
14	770

Pelota C
La distancia recorrida de la pelota esta dada por la función : $f(t) = 25t$,donde t es el tiempo

Pelota D
Esta pelota rueda 225 centímetros en 4.5 segundos

Responde las siguientes preguntas en equipo, según las indicaciones del docente, y escribe tus procedimientos en la hoja de trabajo:

1. **Variable**
   a) Identifica la variable independiente y la variable dependiente. **Explica** tu respuesta
   b) ¿Qué valores puede tomar cada una? ¿**Por qué**?

2. **Razón de cambio**
   c) Completa la siguiente tabla para cada pelota (hasta 3 s).

Pelota A		Pelota B		Pelota C		Pelota D	
Tiempo	Centímetros	Tiempo	Centímetros	Tiempo	Centímetros	Tiempo	Centímetros
1		1		1		1	
2		2		2		2	
3		3		3		3	

   d) **Calcula** ¿Cuántos centímetros avanza cada pelota en cada segundo ? **Explica** tu respuesta

3. Comparación
   e) ¿Cuál pelota es la más rápida y cuál la más lenta ? Justifica tu respuesta.

4. Gráfica y pendiente
   f) Elabora la gráfica de la pelota más rápida y de la más lenta (posición vs. Tiempo).
   g) Calcula la pendiente de cada recta. ¿Qué representa esa pendiente en el contexto?
   h) Representa algebraicamente la interdependencia entre la distancia recorrida y el tiempo ¿Cómo se llama esa relación de interdependencia ?

5. Conclusión
   i) ¿Qué relación existe entre la función, la razón de cambio y la pendiente de la gráfica? Explica con tus palabras.

   Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y profesor.
   Escribe tus conclusiones en tu hoja de trabajo.

Actividad de Aprendizaje

Juego : Aplica lo aprendido para determinar y comparar razones de cambio en una carrera automovilística. Para ello, ingresa al siguiente Link de actividad en GeoGebra: https://www.geogebra.org/classroom/hdcvqpgc

Es importante que desde la representación de la distancia recorrida $f(x) = mx + b$ se visualice que la pendiente de la función lineal representa una razón de cambio entre la distancia y el tiempo, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{Distancia}{Tiempo} = V$ que es precisamente la velocidad.

Una segunda situacion problemática denonominada “siguiendo las huellas de galileo en Pisa: un analisis grafico del movimiento” muestra la gráfica de posición vs tiempo (ver **Figura 45**). Esta actividad consiste en calcular las velocidades promedios en diferentes intervalos. Es posible que no interpreten adecuadamente la gráfica de posición versus tiempo pero como se había trabajado la idea de trayectoria y ademas acompañado de de un applet https://www.geogebra.org/m/qe9qung9, permitira enfrentar tal conflicto cognitivo. Tambien funciona, hacerlos caminar en línea recta y analicen la posición.

Figura 45

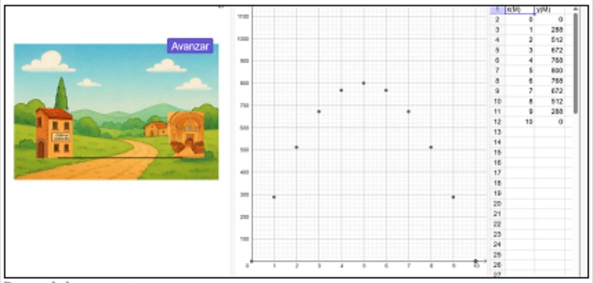
Rediseño de la situación problemática del análisis gráfico del movimiento

Situación problemática 2.1

Siguiendo las huellas de Galileo en Pisa: Un análisis gráfico del movimiento

Recuerdo que a diario, caminaba desde mi casa hacia el Aula Magna de Historia con el propósito de impartir lecciones a mis discipulos. Durante el recorrido, registré mis posiciones en función del tiempo, y comencé a reflexionar sobre cómo calcular "qué tan rápido" caminaba en distintos intervalos.

Ingresa al link de Geogebra: https://www.geogebra.org/m/qe9qung9



Responde las preguntas:

1. Variable

a) Identifica la variable independiente y la variable dependiente. Explica tu respuesta
b) ¿Qué valores puede tomar cada una? ¿Por qué?
c) ¿Qué relación hay entre la posición y el tiempo? Explica

2. Razón de cambio

d) Calcula la velocidad promedio de Galileo los intervalos definidos

Velocidad media Intervalos	$\Delta p = p(t_f) - p(t_i)$	$\Delta t = t_f - t_i$	$\frac{\Delta p}{\Delta t} = p(t_f) - p(t_i)$	Signo	Interpretación de $\frac{\Delta p}{\Delta t}$	Tipo de variación
$0 \leq t \leq 2$	$512 - 0 = 512\,m$	$2 - 0 = 2\,min$	$\frac{512}{2} = 256\frac{m}{min}$	Positivo (+)	Avanzó 256mt en cada min en promedio	Crece a razón de $256\frac{m}{min}$ en promedio
$2 \leq t \leq 4$						
$4 \leq t \leq 5$						
$5 \leq t \leq 6$					Retrocedió …	Decrece a razón de …
$6 \leq t \leq 8$						
$8 \leq t \leq 10$						

e) ¿En qué tramo camino más rápido?
f) ¿Qué significa "velocidad promedio" en este contexto?

La tabla del ítem (d) favorece su pensamiento variacional, al calcular e interpretar las velocidames medias en diferentes intervalos. De hecho la pregunta ¿en que intervalo fue más rapido? Debe ser aprovechado para discutir el tipo de variación que presenta según la forma de la curva, así, comprenderan que presentan un comportamiento. Seguidamente deberan completar otra tabla muy similar, pero esta vez, no son intervalos sino puntos, donde deberan obtener sus pendientes. Les causara a algunos cierta impresión que se obtengan los mismo resultados. Esto afianzará la relación estrecha entre velocidad media y pendiente de recta secante. Estamos previendo los sesgos de la educaión tradicional, que enseña esta relación de forma separada.

Estudio de Rectas Tangentes y Secantes

Por ultimo, esta la anhelada actividad denominada *Estudio de rectas tangentes y secantes*, busca una aproximación al cocepto de recta tangente mediante rectas secantes y su relación con la razón de cambio. De este taller, esta actividad es la más aproximada a noción derivada. Los indicadores de logro se muestran en la **Figura 46**:

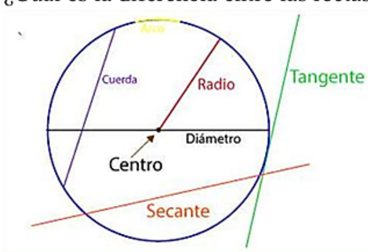
Figura 46

Indicadores de logro de la actividad sobre las aproximaciones a la recta tangente

Indicador de logro:	**Si**	**No**
Identificar la recta tangente a una curva como aquella que pasa por un punto y comparte la misma dirección e inclinación que la curva en ese punto.		
Calcula la pendiente de la recta tangente mediante aproximaciones geométricas y aritméticas de pendientes de secantes y razones de cambio.		
Cuestiona las creencias del pasado sobre los objetos matemáticos, pone a prueba sus conocimientos y reconstruye sus propios conceptos.		

Saberes Previos

1. ¿Quién fue Euclides? ¿Cuál fue su principal obra?
   Biografía de Euclides: https://youtu.be/sM3qGlyylDc?si=hbq5tThPewhFlV0w
2. ¿Cómo Euclides definió una recta tangente a un círculo?
3. ¿Cuál es la diferencia entre las rectas secante y tangente?



Soy Euclides (siglo IV a.c.) conocido como el padre de la geometría por mi majestuosa obra conocida como los "Elementos"

4. Una piedra en el extremo de una cuerda se hace girar, formando un círculo. Si se rompe la cuerda. ¿en qué dirección sale disparada la piedra?

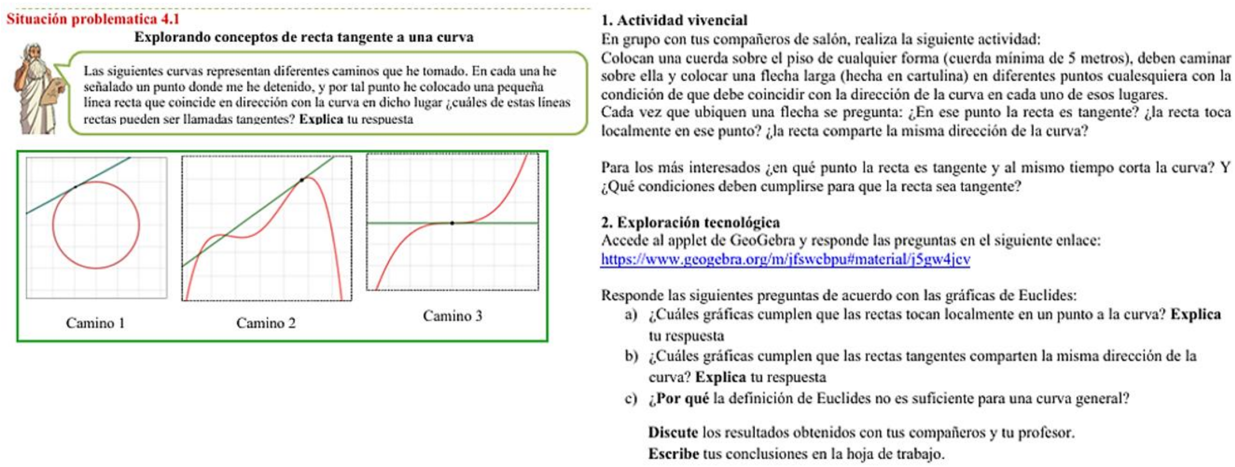
Siguiendo la misma dinámica, se introduce el personaje histórico Euclides (S. IV a. C) con un breve video. Luego, en los saberes previos se desde el circulo, se diferencia la idea común que tienen los estudiantes de recta tangente (toca en un punto y no atraviesa al círculo) y de recta secante (pasa por dos puntos). La idea de la piedra que sale disparada es para notar que el circulo tiene una rapidez, que sale disparada en la dirección tangente.

Está compuesta por dos situaciones problemas: La primera situación problema llamada "Explorando conceptos a recta tangente a una curva" y la segunda "Aproximaciones entre rectas secantes y el cálculo de razones de cambio"

En primera actividad cuyo propósito es comprender la <u>tangente como aquella que pasa por un punto y comparte dirección e inclinación con la curva en un punto</u>, inicialmente se enfrentan al desafío de extender la noción euclidiana a curvas más generales. Con seguridad la mayoría seleccionará la primera curva, pero las demás son rechazadas, o porque al prolongarse corta en otros puntos o porque corta a la curva (ver **Figura 47**).

Figura 47

Rediseño de la situación problemática de la recta tangente


Situación problematica 4.1

Explorando conceptos de recta tangente a una curva

Las siguientes curvas representan diferentes caminos que he tomado. En cada una he señalado un punto donde me he detenido, y por tal punto he colocado una pequeña línea recta que coincide en dirección con la curva en dicho lugar ¿cuáles de estas líneas rectas pueden ser llamadas tangentes? **Explica** tu respuesta

Camino 1 Camino 2 Camino 3

1. Actividad vivencial

En grupo con tus compañeros de salón, realiza la siguiente actividad:

Colocan una cuerda sobre el piso de cualquier forma (cuerda mínima de 5 metros), deben caminar sobre ella y colocar una flecha larga (hecha en cartulina) en diferentes puntos cualesquiera con la condición de que debe coincidir con la dirección de la curva en cada uno de esos lugares.

Cada vez que ubiquen una flecha se pregunta: ¿En ese punto la recta es tangente? ¿la recta toca localmente en ese punto? ¿la recta comparte la misma dirección de la curva?

Para los más interesados ¿en qué punto la recta es tangente y al mismo tiempo corta la curva? Y ¿Qué condiciones deben cumplirse para que la recta sea tangente?

2. Exploración tecnológica

Accede al applet de GeoGebra y responde las preguntas en el siguiente enlace:
https://www.geogebra.org/m/jfswcbpu#material/j5gw4jcv

Responde las siguientes preguntas de acuerdo con las gráficas de Euclides:

a) ¿Cuáles gráficas cumplen que las rectas tocan localmente en un punto a la curva? **Explica** tu respuesta
b) ¿Cuáles gráficas cumplen que las rectas tangentes comparten la misma dirección de la curva? **Explica** tu respuesta
c) ¿**Por qué** la definición de Euclides no es suficiente para una curva general?

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

La experiencia vivencial es esencial, consiste en recorrer una cuerda ubicada sobre el suelo simulando un camino, donde el estudiante debe ubicar en distintos puntos sobre la cuerda, algunas flechas que indiquen su dirección en esos puntos, al mismo tiempo, se le pregunta al grupo: ¿esta recta al prolongarse es tangente? ¿la recta toca localmente a la curva? ¿comparte su dirección? Hasta lograr que crear un conflicto cognitivo. Por ejemplo, después de varios intentos, puede guiar al estudiante a ubicarse sobre un punto de inflexión donde la recta tangente corta a la curva, otro sitio clave es ubicándose en un punto donde la recta al prolongarse corte en más puntos a la curva. Es en esos momentos de discusión donde se contradice la concepción tradicional de tangencia de Euclides. En el desarrollo de la actividad es necesario motivar a los estudiantes a buscar nuevas explicaciones de por qué las tres gráficas son rectas tangentes. Además, el docente debe aprovechar el material digital, como los applets de GeoGebra. En particular esta actividad está acompañada de la siguiente simulación: https://www.geogebra.org/m/jfswcbpu#material/j5gw4jcv, que deberán ser abierto en los momentos más oportunos durante el desarrollo de la actividad.

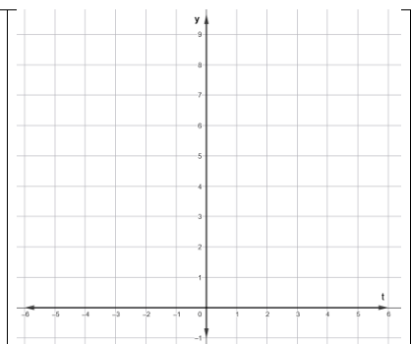
En la segunda situación "Aproximaciones entre rectas secantes y el cálculo de razones de cambio" se busca conectar todas las ideas del taller. El trabajo es de García y Dolores (2016) encontramos que en el diseño de una situación, explica a detalle como desde los registros gráficos se puede aproximar a la derivada, desde considerar la pendiente de la recta secante, hasta aproximarse a la pendiente de la recta tangente en un punto (ver **Figura 48**).

Figura 48

Actividad sobre aproximaciones de rectas secantes a la recta tangente

Indicaciones

1. Gráfica $y = x^2$
2. Trace la recta que une los puntos (2, 4) y (3, 9) en la gráfica y calculen su pendiente.
3. Trace la recta que une los puntos (2, 4) y (2.5, 6.25) en la gráfica y calcula su pendiente
4. Repite el proceso con (2,4) y (2.1, 4.41)
5. Observa a qué valor tienden las pendientes de las secantes, estima la pendiente de la tangente y dibuja la recta tangente en la gráfica usando otro color.



Y en el diseño didáctico de Vrancken y Engler (2014), hallan velocidades medias cada vez más próximas a la velocidad instantánea en un punto, usando una tabla que le permiten hacer aproximaciones por izquierda y por derecha, como se ejemplifica en la **Figura 49**. Así finalizará este taller.

Figura 49

Aproximaciones de la razón de cambio a la pendiente de la recta tangente

2da Forma: Razón de cambio

El procedimiento implica calcular las velocidades promedio en intervalos progresivamente más reducidos a medida que se aproximan al valor 2. Sigue las indicaciones de a continuación:

	Aproximación por izquierda		**Valor aproximado**			**Aproximación por Derecha**		
Intervalos $t_i \leq t \leq t_f$	$1,9 \leq t \leq 2$	$1,99 \leq t \leq 2$	→→→	t=2	←←←	$2 \leq t \leq 2,01$	$2 \leq t \leq 2,1$	$2 \leq t \leq 3$
Distancia recorrida $\Delta p = p(t_f) - p(t_i)$			→→→		←←←			
Tiempo trancurrido $\Delta t = t_f - t_i$			→→→		←←←			
Velocidad media $\frac{\Delta p}{\Delta t}$			→→→		←←←			

Observa la velocidad media $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ a la que se acercan cada vez que se toman valores más cercanos a t=2. ¿Cuál es este valor? ¿Se parece al valor de la pendiente de la tangente?

Conclusiones
¿Explica cuál es la relación estrecha entre la pendiente de la recta tangente y la velocidad instantánea?

Autoevaluación: ¿Qué aprendí de esta actividad? ¿Qué dudas y dificultades aún persisten? ¿Qué voy a hacer para fortalecer mi comprensión y participación

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Recuerde que la autoevaluación y coevolución formativa al final de cada taller es primordial para el auto reconocimiento de las debilidades y fortalezas en miras de mejorar como personas con principios éticos y morales.

5.3.2.2 Segundo taller: Aproximación histórica al concepto de derivada

Este segundo taller tiene como principal objetivo que *el estudiante comprenda la noción de derivada como el límite del cociente incremental* desde sus diferentes representaciones mediante el estudio de episodios históricos que originaron este concepto. En la **Figura 50**, se encuentran las competencias que guían este taller:

Figura 50

Competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales del rediseño del taller 2

Cognitivas	*Procedimentales*	*Actitudinales*
Comprende la noción de derivada como el límite del cociente incremental a través del estudio de episodios históricos que originaron este concepto	Emplea técnicas y métodos del cálculo infinitesimal para resolver situaciones en las que es necesario calcular la pendiente de la recta tangente y/o la velocidad instantánea.	Manifiesta curiosidad por la historia y el aprendizaje de los objetos matemáticos del cálculo, mientras cultiva la persistencia y valora el error como un motor de la evolución matemática

Este segundo taller, has sido complejo de estructurar en favor de un progresivo aprendizaje el cálculo diferencial, se considera pertinente que se parta desde la noción de límite con la idea intuitiva del infinito en acto, sin desconocer que es el resultado del estudio de la tendencia y la aproximación. Se procede con el método de Fermat, no tanto para hallar máximos o mínimos con método mecánico, sino por su potencial para introducir la idea de un incremento infinitesimal, finalmente, con newton y Leibniz desde el cálculo de velocidades con incremento cada vez más pequeño y las aproximaciones de la recta pendiente de la recta secante se culmina con la noción más aproximada de la derivada el límite del cociente incremental.

Noción del concepto de límite

Los objetivos para esta actividad se presentan en **Figura 51**.

Figura 51

Indicadores de logro y saberes previos de la actividad de la noción de límite

Indicador de logro:	Si	No
Diferencia las dos formas de interpretación del infinito, aquellas situaciones de procesos de aproximación infinitos (infinito potencial) de las situaciones límite entendida como la culminación del proceso infinito (infinito actual)		
Utiliza técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos con precisión		
Desarrolla una actitud de paciencia y perseverancia ante problemas paradójicos que no se resuelven de inmediato.		

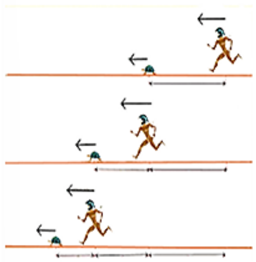
Saberes Previos

1. ¿Quién fue Zenón de Elea? ¿Por qué se hizo famoso?
Biografía de Zenón:
https://youtu.be/0AIaZbO7UW8?si=dzfYhdKhgPhsEqTK
2. Toma una calculadora y divide secuencialmente a 1 entre 2, 3, 4, 5 y 6. ¿Qué ocurre con los cocientes a medida que el divisor se hace mayor?

Soy Zenón (siglo V a.c.) un filósofo y matemático griego, conocido por mis paradojas. Hoy te presento la paradoja de Aquiles y la Tortuga.

Situación problemática 1.1

La carrera más antigua sin resolver: Aquiles y la tortuga



En una carrera, Aquiles le da una ventaja de 1km a una tortuga. Mientras Aquiles corre para alcanzar a la tortuga, cuando llega al punto donde estaba la tortuga, ésta ya ha avanzado la mitad del recorrido anterior, es decir, ½ km más. Cuando Aquiles llega a ese nuevo punto, la tortuga nuevamente habrá avanzado la mitad del recorrido previo (¼ km), y así sucesivamente.

La paradoja plantea que Aquiles nunca podrá alcanzar a la tortuga, ya que siempre habrá una distancia cada vez más pequeña, entre ellos.

Halla la distancia total que recorre Aquiles para alcanzar la tortuga.

Justifica tus respuestas.

Se introduce al personaje histórico Zenón a partir de un video corto, seguidamente se les pide dividir 1 entre 2, 3, 4, 5 y preguntarles qué ocurre con los cocientes a medida que el denominador crece. Seguramente los estudiantes reconocerán que tiende a cero, pero que no es cero. En el mejor de los casos plantean la función $f(x) = 1/x$, y reconocen la asíntota en y=0. Este también es otro conocimiento previo, En la exploración inicial de los estudiantes ante la situación problemática, tienen diversas posturas, quienes consideran que la distancia es infinita, quiénes encuentran ciertas regularidades y afirma que nunca la alcanza pero no pasa de 2 km y quiénes aseguran que la distancia es de 2 km.

Figura 52

Rediseño de la actividad de la noción de límite

Responde las siguientes preguntas en tu hoja de trabajo:
Ingresa a Geogebra: https://www.geogebra.org/m/gbtcdgka

a) Si la distancia entre Aquiles y la tortuga se reduce a la mitad en cada paso (1 km, ½ km, ¼ km, ...) **Expresa** el término general de la sucesión y **Justifica** tu respuesta.

Aquiles	
Avance	**Distancia**
1	
2	
3	
4	
…	
n	

Tortuga	
Avance	**Distancia**
1	
2	
3	
4	
…	
n	

¿A qué valor se aproximan los términos a medida que Aquiles avanza hacia la tortuga?

b) Si sumamos todos los intervalos de distancia (1 + ½ + ¼ + ⅛ + ...) ¿Cuál es la distancia recorrida por Aquiles cuando haya avanzado tres veces? ¿Cuatro veces? ¿cinco veces? ¿A qué valor se aproxima esta suma? **Expresa** en forma general la serie geométrica y **Justifica** tu respuesta

c) Si la tortuga tiene una ventaja inicial y Aquiles se aproxima cada vez más ¿en qué momento exacto Aquiles la alcanza? **Justifica** tu respuesta

d) ¿En la realidad, un corredor alcanza a otro, aunque haya infinitos intervalos en la distancia o el tiempo que dura su recorrido? **Explica** tu respuesta

Conclusión
¿Cuál es la forma adecuada de interpretar el concepto de límite?

Autoevaluación: ¿Qué aprendí de esta actividad? ¿Qué dudas y dificultades aún persisten? ¿Qué voy a hacer para fortalecer mi comprensión y participación?

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Nota. https://www.geogebra.org/m/gbtcdgka

En la orientación dirigida, es importante que se den las diferentes representaciones de la situación. En el applet de forma gráfica, en el taller de forma tabular y desde sus operaciones sucesivas de sumas (ver **Figura *52***). Encontrarán que el enésimo término encuentra que se puede expresar como 1/2^n. Artigue (1995) explica que la frecuencia de respuestas erradas ante esta situación “demuestra la dificultad que hay para percibir la notación 0.9999… como algo diferente a un proceso dinámico que no se detiene jamás, y para ver a cambio la designación de un número” (p. 113). Notarán que la suma converge a 1.99… y posiblemente muchos considerarán que este valor es diferente de 2km, aquí el profesor puede aprovechar para introducir la noción de límite, no como un valor “alcanzado” después de infinitos pasos, sino, como el resultado de analizar el valor al que se aproxima la distancia recorrida por Aquiles cada vez que avanza la mitad del recorrido inmediatamente anterior. Se puede apoyar de una tabla de valores, del gráfico de la sucesión y con analogías contextualizadas de esta misma situación, incluso con la suma de 1/3+1/3+1/3=1 y desde su forma decimal. Esta es una buena estrategia para ilustrar esta tensión clave entre la interpretación matemática del infinito como un proceso iterativo inalcanzable (infinito potencial) y como la culminación de un proceso infinito (infinito en acto) para construir la noción de límite como un estudio de aproximaciones y tendencias (Gonzales et al., 2013).

Los infinitésimos con Fermat

En esta actividad deberán traducir un problema de optimización de geometría plana en un problema algebraico equivalente, para luego, hacer uso del cálculo infinitesimal para determinar el punto máximo de la función. Los indicadores de aprendizaje se encuentran en la **Figura 53**.

Figura 53

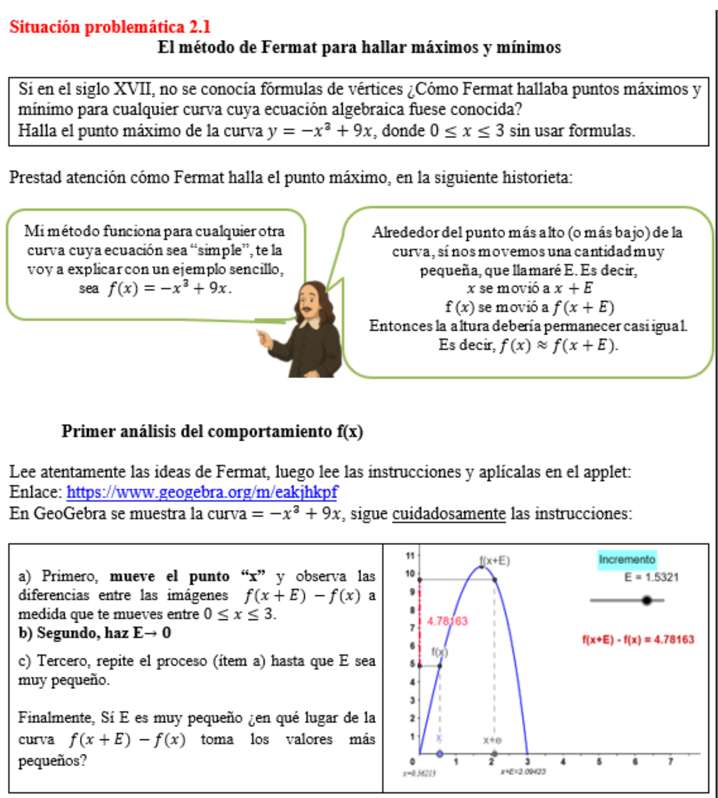
Indicadores de logro de la actividad de los infinitésimos de Fermat

Indicador de logro:	**Si**	**No**
Interpreta los infinitesimales como una cantidad variable que se puede aproximar indefinidamente a cero, pero no ser igual a cero.		
Plantea y ejecuta métodos para determinar puntos máximos o mínimos mediante el estudio de la variación, la tendencia y razones de cambio alrededor de estos puntos.		
Explora procedimientos históricos no convencionales para resolver problemas de optimización con una actitud proactiva ante los posibles desafíos.		

La actividad inicial corresponde al taller 12 del libro de Fiallo y Parada (2018), donde, los estudiantes para hallar el área máxima realizan cálculos numéricos de casos particulares, habrá quienes afirman que los lados son 3 m y 4 m porque solo consideran naturales. Hay quienes dan respuestas aproximadas a 3.5, pero no se atreven a decir exactamente 3.5, porque para ellos el cuadrado no es rectángulo. Y en el mejor de los casos, construirán una expresión algebraica que represente el área en función de la base o la altura del rectángulo y al calcular el vértice darán una respuesta aproximada de 3.5m. El potencial de GeoGebra como mediador facilitará la visualización y comprensión de los objetos matemáticos involucrados, https://www.geogebra.org/m/xdacau3t y con preguntas orientadoras como guiaran a los estudiantes a encontrar la expresión algebraica $f(x) = x(7 - x) = 7x - x^2$, donde el vértice de la parábola corresponde al punto máximo de la misma, y a su vez, a la solución del problema. Previamente, en la activación de los saberes previos, la pregunta ¿cuál es el número real que a continuación de 2? Orienta a considerar cada vez valores con mayor número de decimales próximos al número 2. Hecho que los preparara para los infinitesimales. Seguidamente, se propone un problema de mayor dificultad (ver **Figura 54**).

Figura 54

Rediseño de la actividad del método de Fermat parte 1



Situación problemática 2.1

El método de Fermat para hallar máximos y mínimos

Si en el siglo XVII, no se conocía fórmulas de vértices ¿Cómo Fermat hallaba puntos máximos y mínimo para cualquier curva cuya ecuación algebraica fuese conocida?
Halla el punto máximo de la curva $y = -x^3 + 9x$, donde $0 \leq x \leq 3$ sin usar formulas.

Prestad atención cómo Fermat halla el punto máximo, en la siguiente historieta:

Primer análisis del comportamiento f(x)

Lee atentamente las ideas de Fermat, luego lee las instrucciones y aplícalas en el applet:
Enlace: https://www.geogebra.org/m/eakjhkpf
En GeoGebra se muestra la curva $= -x^3 + 9x$, sigue cuidadosamente las instrucciones:

a) Primero, **mueve el punto "x"** y observa las diferencias entre las imágenes $f(x + E) - f(x)$ a medida que te mueves entre $0 \leq x \leq 3$.
b) Segundo, haz E→ 0

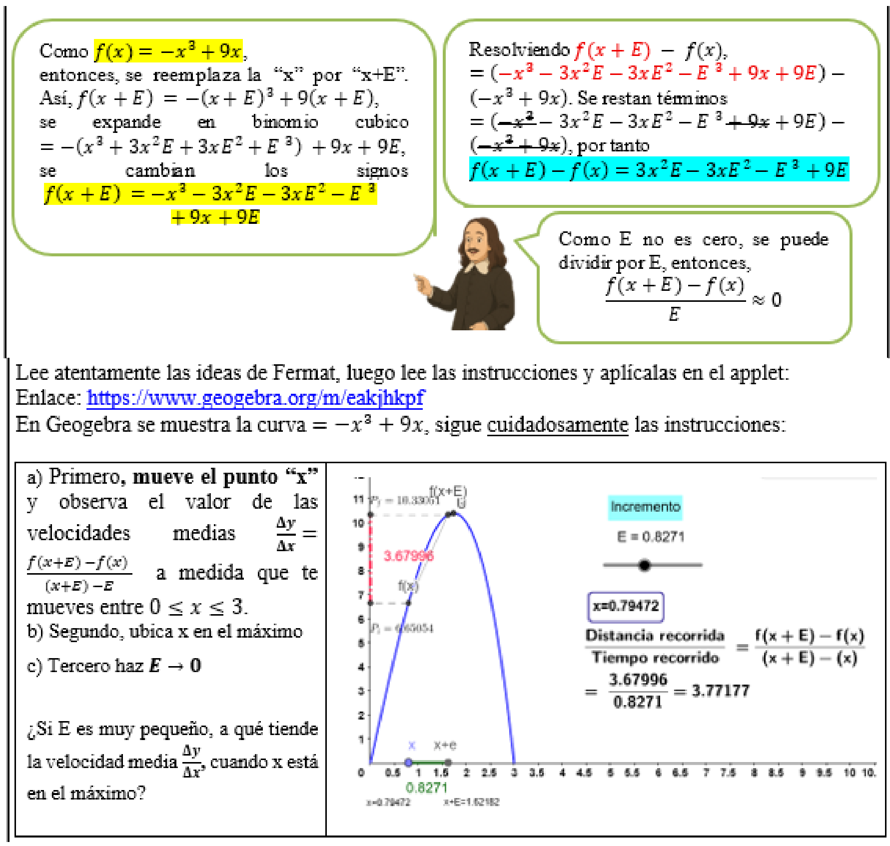
c) Tercero, repite el proceso (ítem a) hasta que E sea muy pequeño.

Finalmente, Sí E es muy pequeño ¿en qué lugar de la curva $f(x + E) - f(x)$ toma los valores más pequeños?

Dado que el punto máximo de $f(x) = -x^3 + 9x$ es un número irracional (decimales infinitos no periódicos). Es en estos casos, el método de Fermat tiene relevancia, mejor aún, apoyado del software de GeoGebra permitirán una mejor aprehensión de las ideas. En la primera parte (ver **Figura 55**), el estudiante al notar que entre más pequeño haga el valor del incremento en cualquier intervalo, la diferencia se hace más pequeña cuando está en el máximo.

Figura 55

Rediseño de la actividad del método de Fermat parte 2 y 3



Nota. https://www.geogebra.org/m/eakjhkpf

Se hacen necesario que practiquen el cálculo de $f(x+E)$, para evitar errores y frustraciones a posteriori. Pero la actividad no se debe enfocar hacia lo algebraico, dado que Newton divide por E como un proceso valido desde la resolución de ecuaciones, en cambio, será más significativo que visualice la expresión $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ como velocidad media del intervalo $x \leq$

$t \leq x + E,$ que coincide con la expresión de Fermat. Esta actividad introducje la noción de *incremento infinitesimal*.

Finalmente cuando Fermat suprime los valores que contienen un infinitesimal, podrá entenderse como el límite del incremento cuando tiende a cero. Además, se puede aprovechar para que observen que en el punto máximo la recta secante se vuelve tangente y es horizontal, por tanto, su pendiente es cero. De esta forma se relaciona nuevamente la razón de cambio con la pendiente de la recta tangente, donde, en el punto máximo tiene un valor de cero. Se finaliza con la discusión de qué es un infinitesimal y qué significa la expresión que usa Fermat para hallar máximos.

Límite del cociente infinitesimal con Newton y Leibniz

De acuerdo Vrancken y Engler (2013):

> Para llegar a lo que actualmente se conoce como derivada, formalizando una definición rigurosa en términos del límite, tuvieron que transcurrir varios siglos de desarrollo de las ideas matemáticas relacionadas con las tangentes, con la variación y con los infinitesimales. (p. 69)

Así que, el buen desarrollo de las actividades descritas con anterioridad prepara el terreno para construir la noción de derivada desde los núcleos conceptuales (cambio, variación, aproximación, tendencia) mediante incrementos infinitesimales. En este sentido, los indicadores de logro se presentan en la **Figura *56***:

Figura 56

Indicadores de logro y saberes previos de la actividad sobre la derivada

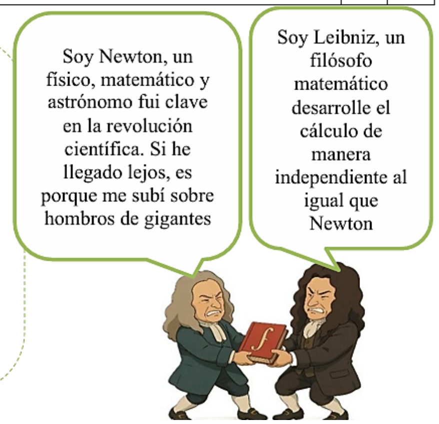
Indicador de logro:	Si	No
Comprende la noción de derivada como el límite del cociente incremental e interpreta su significado como razón de cambio y como pendiente de la recta tangente.		
Determina razones de cambio instantáneas y la pendiente de la recta tangente.		
Muestra curiosidad genuina y compromiso ético por comprender los conocimientos matemáticos.		

Saberes Previos

1. ¿Quién fue Isaac Newton? ¿cuáles fueron sus mayores descubrimientos?
2. ¿Quién fue Gottfried Leibniz? ¿cuáles fueron sus mayores descubrimientos?

El cálculo de Newton y Leibniz: https://youtu.be/FHLsTqxW9uc?si=WwSNMvK7SHSi0mxd

3. ¿Se puede saber a qué velocidad va un ciclista en una foto tomada en un instante de tiempo?
4. Lanza un objeto hacia arriba, ¿Cómo cambia la velocidad en cada instante? ¿es constante? ¿Si o no por qué?



Se considera pertinente, que los estudiantes aborden las mismas ideas que desarrollaron Newton y Leibniz en la construcción del concepto de derivada. Se introduce a los estudiantes con un video donde resume la historia del cálculo y de forma motivadora presenta algunas ideas que ya han abordado en talleres anteriores https://youtu.be/FHLsTqxW9uc?si=WwSNMvK7SHSi0mxd, la última parte del video es la más valiosa. Cabe destacar que el video próximo del canal, presenta de manera intuitiva una aproximación al concepto de derivada que también podría ser favorable para introducir el concepto.

La situación problemática consiste en un problema de lanzamiento vertical (ver **Figura 57**), inicialmente reconocerán que la velocidad no es constante y que está se ve afectada por la gravedad. De hecho, es un modelo muy cercano al real, así que, si se lanza una pelota a 5 mts de altura desde su posición inicial efectivamente durara 2 segundos en regresar a su posición inicial.

Figura 57

Situación problemática del problema del lanzamiento vertical

Situación problemática 3.1

Problema del lanzamiento vertical

Al analizar el lanzamiento vertical de una pelota, observé que la velocidad llega a un punto donde se detiene por un instante y vuelve a bajar. Así que me surgió la pregunta ¿Cómo hallar la velocidad de la pelota en cualquier instante de tiempo? Así que para estudiar este fenómeno realicé un experimento de lanzamiento vertical, donde registré la posición en metros durante un período de 2 segundos y encontré que la función que modela la altura de una pelota es $P(t) = -5x^2 + 10x$. ¿cuánto es la velocidad para el instante $t = 0.5s$?

Primera Parte: Comprensión del Problema del lanzamiento vertical

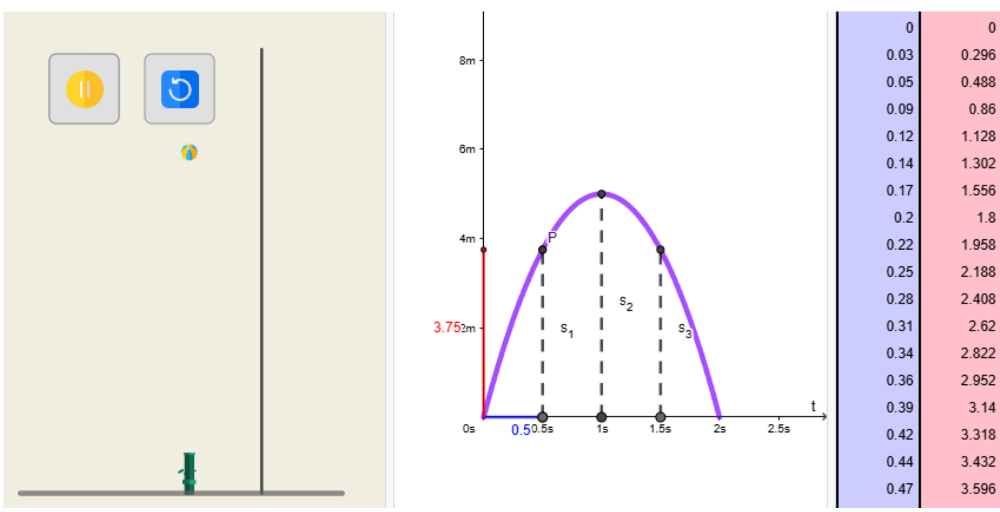
1.Abre el archivo de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/vc2yzjpv y responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las variables relevantes en este problema de lanzamiento vertical? **Explica** tu respuesta.
b) ¿Cómo se relaciona la altura del objeto con el tiempo transcurrido? **Expresa** la altura en función del tiempo. **Explica** tu respuesta
c) ¿A qué altura se encuentra la pelota en los instantes, $t = 0.5s$, $x = 1s$ y $x = 1.5s$? **Justifica** tu respuesta
d) ¿Cuáles intervalos de tiempo la variación de la función fue creciente? ¿la variación fue cero? ¿fue decreciente? **Explica** tu respuesta

En el software Geogebra, https://www.geogebra.org/m/vc2yzjpv, podrán encontrar la misma situación, pero, de manera dinámica e interactiva, como se aprecia en la **Figura *58***.

Figura 58

Applet del problema del lanzamiento vertical parte 1



0	0
0.03	0.296
0.05	0.488
0.09	0.86
0.12	1.128
0.14	1.302
0.17	1.556
0.2	1.8
0.22	1.958
0.25	2.188
0.28	2.408
0.31	2.62
0.34	2.822
0.36	2.952
0.39	3.14
0.42	3.318
0.44	3.432
0.47	3.596

Nota. El archivo de Geogebra es adaptado de Rodríguez (2020).

Después de haber comprendido la situación problemática es relevante que los estudiantes tengan una aproximación a la razón de cambio instantánea a partir de cálculos de velocidades medias cada vez más próximas al valor solicitado en $x = 0.5$. Por ello se proporciona una tabla en la que deben considerar un incremento $\Delta\mathbf{x}$ cada vez más pequeño (ver **Figura 59**).

Figura 59

Actividad sobre la aproximación a la razón de cambio instantánea

Segunda Parte: Aproximación a la razón de cambio instantánea

1. ¿Se puede calcular la velocidad en el instante $t = 0.5s$ con la fórmula de la velocidad media? ¿Y si consideras otro punto muy cerca de 05 se podría aproximar? **Justifica**

2. Halla la velocidad media más aproximada para el instante en $t = 0.5s$. Para ello, toma incrementos cada vez más pequeños. ¡completa la tabla!

T inicial	**Incremento**	**T Final**	**Intervalos** $t_i \le t \le t_f$	**Tiempo transcurrido** $\Delta t = t_f - t_i$	**Distancia recorrida** $\Delta p = p(t_f) - p(t_i)$	**Velocidad media** $\frac{\Delta p}{\Delta t}$
t_i=0.5	$\Delta x = 1$	$t_f = 0.5 + 1 = 1.5$	$0.5 \le t \le 3$			
t_i=0.5	$\Delta x = 0.5$	$t_f = 0.5 + 0.5 = 1$	$0.5 \le t \le 2.5$			
t_i=0.5	$\Delta x = 0.25$	$t_f = 0.5 + 0.25 = 0.75$	$0.5 \le t \le 2.25$			
t_i=0.5	$\Delta x = 0.125$	$t_f = 0.5 +$	$0.5 \le t \le$			
t_i=0.5	$\Delta x =$	$t_{f=}$				
t_i=0.5	$\Delta x =$					
t_i=0.5	…					

a) Si el incremento $\Delta\mathbf{x}$ fuese un incremento infinitamente pequeño. ¿Qué se puede decir de la velocidad en $t = 0.5$? **Explica** tu respuesta.

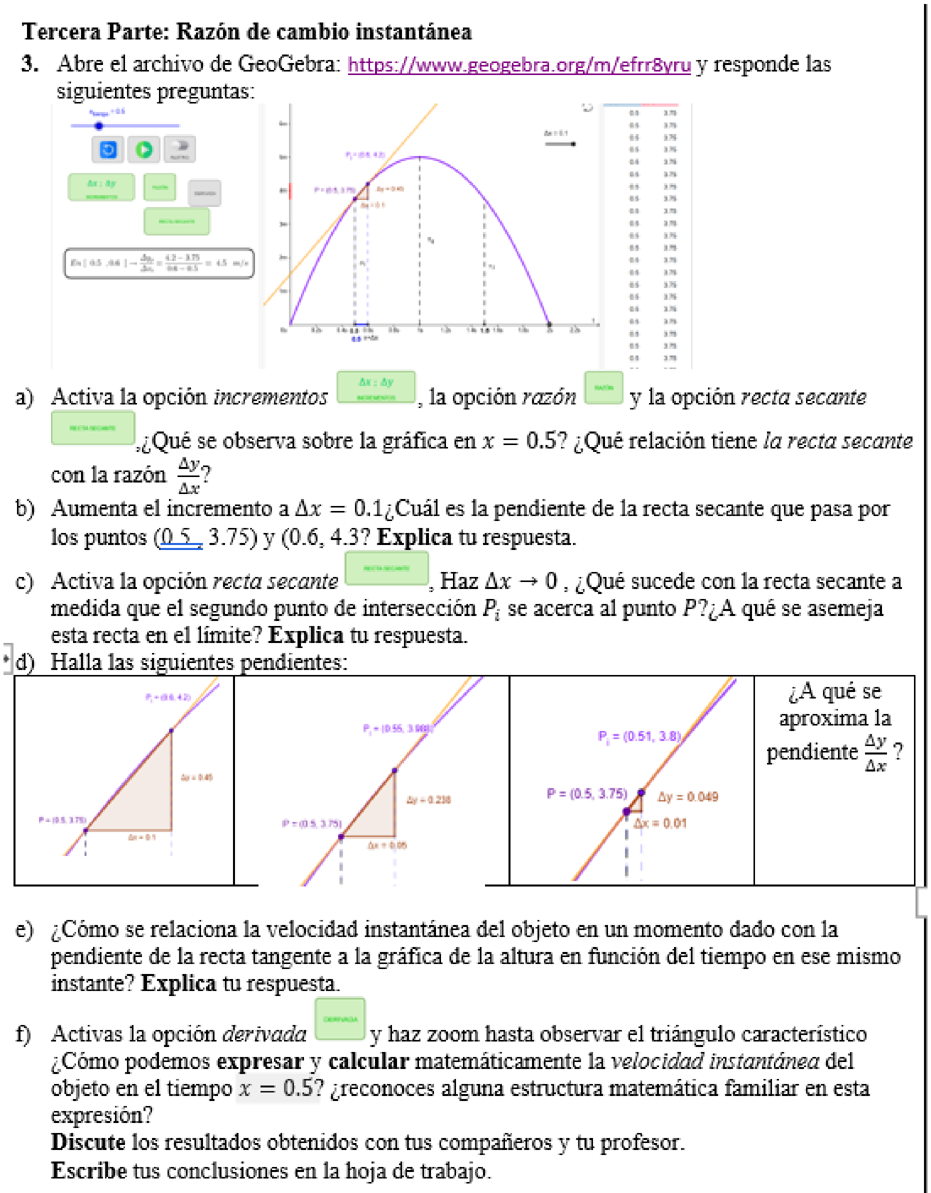
b) En el límite de $\Delta\mathbf{x} \to 0$, ¿cómo se podría escribir la expresión matemática qué halla la velocidad instantánea $\frac{\Delta p}{\Delta t}$?

T inicial	**Incremento**	**T Final**	$t_i \le t \le t_f$	$\Delta t = t_f - t_i$	$\Delta p = p(t_f) - p(t_i)$	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$
t_i=0.5	$\Delta x \to 0$	$t_f = 0.5 + \Delta x$	$0.5 \le t \le 0.5 + \Delta x$			

Observé que las dos preguntas que le siguen guían al estudiante a considerar un incremento infinitesimal y además a expresarla en su forma de límite del cociente incremental. Si bien, con el desarrollo de tablas y su discusión bastará para lograr la competencia matemática de hallar razones de cambio instantáneas en otros contextos a diferencia del matemático. También, se aborda la aproximación del cociente incremental mediante el cálculo de pendientes de rectas secantes mediante puntos cada vez más cercanos, cómo se muestra a en la **Figura 60**:

Figura 60

Applet sobre el estudio de la razón de cambio instantánea



Tercera Parte: Razón de cambio instantánea

3. Abre el archivo de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/efrr8yru y responde las siguientes preguntas:

a) Activa la opción *incrementos* , la opción *razón* y la opción *recta secante* ,¿Qué se observa sobre la gráfica en $x = 0.5$? ¿Qué relación tiene *la recta secante* con la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

b) Aumenta el incremento a $\Delta x = 0.1$¿Cuál es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos (0.5 , 3.75) y (0.6, 4.3? **Explica** tu respuesta.

c) Activa la opción *recta secante* , Haz $\Delta x \to 0$, ¿Qué sucede con la recta secante a medida que el segundo punto de intersección P_i se acerca al punto P?¿A qué se asemeja esta recta en el límite? **Explica** tu respuesta.

d) Halla las siguientes pendientes:

$P_i = (0.6, 4.2)$; $P = (0.5, 3.75)$; $\Delta y = 0.45$; $\Delta x = 0.1$	$P_i = (0.55, 3.988)$; $P = (0.5, 3.75)$; $\Delta y = 0.238$; $\Delta x = 0.05$	$P_i = (0.51, 3.8)$; $P = (0.5, 3.75)$; $\Delta y = 0.049$; $\Delta x = 0.01$	¿A qué se aproxima la pendiente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

e) ¿Cómo se relaciona la velocidad instantánea del objeto en un momento dado con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la altura en función del tiempo en ese mismo instante? **Explica** tu respuesta.

f) Activas la opción *derivada* y haz zoom hasta observar el triángulo característico ¿Cómo podemos **expresar** y **calcular** matemáticamente la *velocidad instantánea* del objeto en el tiempo $x = 0.5$? ¿reconoces alguna estructura matemática familiar en esta expresión?

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.

Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

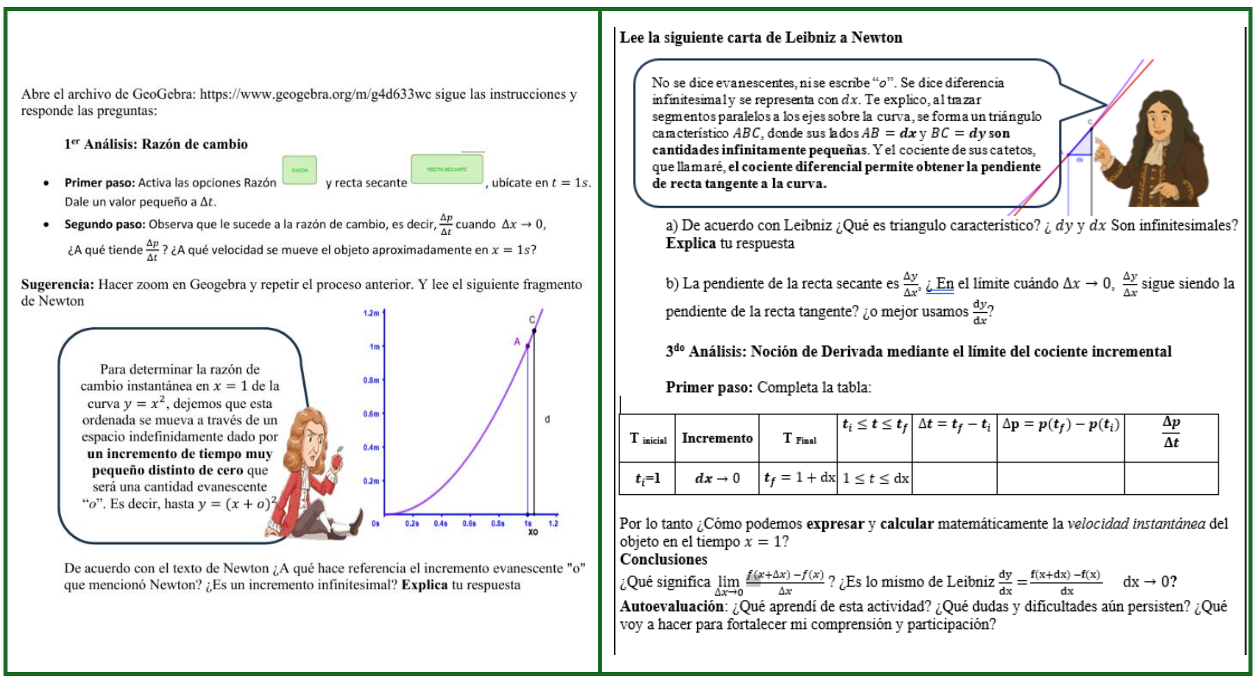
Nota. https://www.geogebra.org/m/efrr8yru

El potencial del software Geogebra facilitará la comprensión de la pendiente de la recta tangente cómo límite de las aproximaciones de las pendientes de las rectas secantes, estas cada vez con incrementos Δx más pequeños. Además, se puede introducir el triángulo característico introducido por Leibniz, a medida que Δx tiende a cero.

Finalmente, como una segunda situación problema se presenta en forma de historieta un ejemplo donde se conjugan la visión cinemática de Newton y la perspectiva geométrica de Leibniz para resolver un problema de velocidad instantánea, Este ejemplo integra un lenguaje matemático con conceptos fidedignos de Newton y Leibniz (ver **Figura 61**). A este respecto, Maza (1994) afirma que "es la forma más fiel de comprender históricamente matemáticas" (p. 26).

Figura 61

Historieta del método de Newton y Leibniz para el límite de cociente incremental



Abre el archivo de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/g4d633wc sigue las instrucciones y responde las preguntas:

1er Análisis: Razón de cambio

- **Primer paso:** Activa las opciones Razón RAZÓN y recta secante RECTA SECANTE, ubícate en $t = 1s$. Dale un valor pequeño a Δt.
- **Segundo paso:** Observa que le sucede a la razón de cambio, es decir, $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ cuando $\Delta x \to 0$, ¿A qué tiende $\frac{\Delta p}{\Delta t}$? ¿A qué velocidad se mueve el objeto aproximadamente en $x = 1s$?

Sugerencia: Hacer zoom en Geogebra y repetir el proceso anterior. Y lee el siguiente fragmento de Newton

Para determinar la razón de cambio instantánea en $x = 1$ de la curva $y = x^2$, dejemos que esta ordenada se mueva a través de un espacio indefinidamente dado por **un incremento de tiempo muy pequeño distinto de cero** que será una cantidad evanescente "o". Es decir, hasta $y = (x + o)^2$

De acuerdo con el texto de Newton ¿A qué hace referencia el incremento evanescente "o" que mencionó Newton? ¿Es un incremento infinitesimal? **Explica** tu respuesta

Lee la siguiente carta de Leibniz a Newton

No se dice evanescentes, ni se escribe "o". Se dice diferencia infinitesimal y se representa con dx. Te explico, al trazar segmentos paralelos a los ejes sobre la curva, se forma un triángulo característico ABC, donde sus lados $AB = \boldsymbol{dx}$ y $BC = \boldsymbol{dy}$ **son cantidades infinitamente pequeñas**. Y el cociente de sus catetos, que llamaré, **el cociente diferencial permite obtener la pendiente de recta tangente a la curva.**

a) De acuerdo con Leibniz ¿Qué es triangulo característico? ¿ dy y dx Son infinitesimales? **Explica** tu respuesta

b) La pendiente de la recta secante es $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ¿ En el límite cuándo $\Delta x \to 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sigue siendo la pendiente de la recta tangente? ¿o mejor usamos $\frac{dy}{dx}$?

3do Análisis: Noción de Derivada mediante el límite del cociente incremental

Primer paso: Completa la tabla:

T inicial	**Incremento**	**T** Final	$t_i \leq t \leq t_f$	$\Delta t = t_f - t_i$	$\Delta p = p(t_f) - p(t_i)$	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$
t_i=1	$dx \to 0$	$t_f = 1 + dx$	$1 \leq t \leq dx$			

Por lo tanto ¿Cómo podemos **expresar** y **calcular** matemáticamente la *velocidad instantánea* del objeto en el tiempo $x = 1$?

Conclusiones

¿Qué significa $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$? ¿Es lo mismo de Leibniz $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$ $dx \to 0$?

Autoevaluación: ¿Qué aprendí de esta actividad? ¿Qué dudas y dificultades aún persisten? ¿Qué voy a hacer para fortalecer mi comprensión y participación?

El rol del profesor consiste en fomentar la discusión en favor del aprendizaje de la derivada. La orientación guiada del profesor en este ejemplo es fundamental para la compresión de la "tasa de cambio instantánea". Se les puede pedir a los estudiantes que calculen la velocidad promedio en intervalos cada vez más próximos a $x = 1$, por ejemplo, calcular la velocidad promedio entre $x = 1$ y $x = 1.1$, luego, $x = 1$ y $x = 1.01$, así, sucesivamente. Paulatinamente, mostrar desde el registro tabular y gráfico que los valores que toma la pendiente (que corresponde a la velocidad promedio) en la medida que se van acercando los dos puntos, la velocidad en ese instante es de 2 m/s. Es allí, donde se vislumbra intuitivamente la noción de derivada. Con estas ideas claras, será un poco más fácil asimilar las ideas de Newton y Leibniz. Para afianzar más este concepto se recomienda ver detenidamente el video "La paradoja de la derivada | Capítulo 2, Esencia del cálculo" de Grant Sanderson publicado en su canal de YouTube s3Blue1Brown (29 abr 2017). https://youtu.be/byYkHqabnKM?si=Om-RBqb5MRzBTSRs Se espera que después de observar el video y tomar nota de los ejemplos explicados hasta ahora, el estudiante logre comprender que la noción de derivada resulta del límite del cociente incremental, es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} \; cuando \; dx \to 0$$

Capítulo 6. Conclusiones

Esta investigación se propuso responder: *¿Cómo favorecer el aprendizaje de la derivada desde un acercamiento histórico–epistemológico que potencie didácticamente el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de décimo y undécimo grado?*

A partir de una revisión bibliográfica exhaustiva, se fundamentaron los aspectos teóricos y conceptuales que posibilitaron la definición de una secuencia orientada a diseñar, implementar y valorar una propuesta desde una perspectiva histórica y epistemológica sobre la enseñanza de la derivada como razón de cambio, con el fin de favorecer el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de décimo y undécimo grado.

Como se expuso en los antecedentes y el marco teórico, diversos autores como Guacaneme (2016), Gutiérrez (2019), Maza (1994) y Rey (2022) coinciden en señalar que la historia y la epistemología constituyen pilares fundamentales para la educación, aportando sentido a la construcción progresiva del conocimiento matemático escolar. Y autores como Vega (2019); Vrancken y Engler (2013) y Boyer (1968/1986) dejan de manifiesto que la construcción histórica-epistemológica del concepto derivada es la culminación de muchos procesos matemáticos de avances y limitaciones de construcción colectiva a lo largo de la historia. Asimismo, Artigue (1995) y Neira (2012) condensan los problemas de corte epistemológicos, cognitivos y didácticos de la enseñanza de los objetos claves del cálculo. En sintonía, investigadores como Cantoral (2013, Caballero (2012), Carlson et al. (2002/2003), García y Dolores (2016), Sánchez-Matamoros, et al, (2008) y Vrancken y Engler (2014) aportaron un marco conceptual de la construcción del concepto de derivada desde sus diversos significados, representaciones y formas de enseñar.

En este sentido, se hizo uso del componente histórico–epistemológico de la derivada como modelo teórico para la construcción y evaluación de una secuencia didáctica, orientada hacia el aprendizaje progresivo y secuencial de la derivada. Todo con ánimos de aportar en la formación de ciudadanos matemáticamente competentes, es decir, en la formación integral de las competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales del pensamiento variacional en estudiantes de décimo y undécimo grado, de acuerdo con los fines de las vigentes directrices nacionales (MEN, 1998; MEN, 2006; MEN, 2016).

De esta manera, siguiendo las etapas de la investigación de diseño de Molina et a. (2011), en primer lugar, se sistematizaron los principios teóricos, que corresponden a los acercamientos históricos epistemológicos de la derivada y el planteamiento de las competencias matemáticas asociadas a la derivada. En segundo lugar se definen los elementos de la estructura metodológica para el diseño de la secuencia didáctica, que contó con una prueba diagnóstica, 2 talleres y una prueba final, asimismo se proporcionó una trayectoria hipotética que se esperaba que los estudiantes siguieran. En tercer lugar, se caracterizó la población a implementar, que fueron 23 estudiantes de décimo y undécimo grado entre 15 a 17 años del área metropolitana de Bucaramanga que participaron del semillero matemático Euler, también, se programó un espacio de tres sesiones de clase de 4 horas con 30 min de descanso. Finalmente, se llevó a cabo la puesta en práctica de la secuencia didáctica, se sistematizaron los datos, se analizaron y se concluyeron en un rediseño de la secuencia didáctica. De todo esto se puede concluir que:

- Desde la *formación por competencias*, las actividades favorecieron los procesos matemáticos para el desarrollo de sus conocimientos, habilidades y actitudes en la resolución de las situaciones problemáticas históricas. En la **Figura 62**, se muestra el porcentaje del número de estudiantes que lograron o no los indicadores de aprendizaje correspondientes a las competencias matemáticas:

Figura 62

Resultados generales por competencias

	Taller 1	Taller 2
Cognitivo	Comprende y argumenta los fundamentos conceptuales y teóricos de los objetos básicos del Cálculo (concepto de función, noción de límite y continuidad) en contextos matemáticos y no matemáticos.	Comprende la noción de derivada como el límite del cociente infinitesimal través del estudio de episodios históricos que originaron este concepto
Procedimental	Determina razones de cambio, establece su relación con la pendiente de una recta y utiliza técnicas de aproximación para resolver problemas de cambio y variación.	Determina razones de cambio instantáneas en problemas que involucran la noción de derivada como razón de cambio.
Actitudinal	Participa activamente en discusiones grupales, escuchando y aportando ideas y juzga la pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto	Analiza críticamente los aportes históricos en la construcción del concepto de derivada y relaciona el concepto con aplicaciones de la realidad.

Actividad	Concepto de función y razón de cambio			El concepto de recta tangente a una curva			La noción de límite			Los infinitésimos			El límite del cociente infinitesimal		
	Cog.	Proc.	Act.	Cog.	Proc.	Act.	Cog.	Proc.	Act.	Cog.	Proc.	Act.	Cog.	Proc.	Act.
SI	88%	88%	82%	71%	24%	53%	35%	47%	47%	94%	59%	41%	53%	41%	29%
NO	0%	0%	6%	0%	12%	12%	6%	0%	0%	6%	41%	47%	12%	18%	24%
S/E	6%	6%	6%	24%	59%	29%	41%	35%	35%	0%	0%	12%	35%	41%	47%
N/A	6%	6%	6%	6%	6%	6%	18%	18%	18%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Nota. S/E significa Sin Evidencia, N/A significa que no asistió. Resultados de 17 estudiantes.

(I) Conclusiones centrales del análisis del desarrollo de las competencias cognitivas

El 88% comprendió el concepto de función como una relación de interdependencia de magnitudes variables y la razón de cambio como la velocidad, el 71% reconoció la dirección compartida entre tangente y curva, el 35% diferenció la interpretación del infinito potencial y en acto, favoreciendo la comprensión del límite desde la tendencia y la aproximación, el 94% asimiló la idea del infinitesimal como cantidad variable que tiende a cero y 53% comprendió la derivada como la mejor aproximación a la razón de cambio instantánea. Es importante señalar que los porcentajes de “sin evidencia” se deben a que dejaban en blanco, y en otras ocasiones se debió a problemas logísticos durante la toma de los datos.

Las actividades diseñadas (experimentos, análisis gráfico, vivencias y uso de herramientas tecnológicas) facilitaron que la mayoría de los estudiantes comprendieran conceptos fundamentales como función, razón de cambio, tangencia y límite. Se resalta que el componente visual, dinámico e interactivo de los recursos de Geogebra facilitó en mayor medida la compresión del método de Fermat y la derivada como la mejor aproximación a la razón de cambio instantánea, aunque persisten dificultades puntuales en la interpretación geométrica y algebraica de algunos conceptos. Según Guacaneme (2016), el uso de la historia con problemas históricos cumple una función permeadora en la enseñanza de la matemática porque se emplea información acerca de la evolución histórica del concepto como criterio orientador en la estructuración de esta secuencia didáctica.

(II) Conclusiones centrales del análisis del desarrollo de las competencias procedimentales

Desde los resultados de la prueba diagnóstica, se evidenciaron importantes dificultades a nivel procedimental, como en la generalización de procesos iterativos, la interpretación de la recta tangente y la falta de justificaciones con razonamientos analíticos. Durante el desarrollo de los talleres, solo el 24% logra establecer relaciones entre la recta tangente y la razón de cambio, esto a causa de que carecía de preguntas que promovieran procedimientos como los cálculos numéricos, como por ejemplo, de calcular la pendiente de la recta secante para aproximar a la pendiente de la recta tangente. En la aplicación del método de Fermat $\frac{f(x+E)-f(x)}{E} \approx 0$ solamente participaron el 59% durante la clase, por ello, el 41% desde la evaluación final se evidenció que carecieron de argumentos para explicar su funcionalidad. Asimismo, en el cálculo de la velocidad instantánea $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ se evidenciaron dificultad en la aplicación del límite del cociente incremental, confirmando lo señalado por Dubarbie (2024), quien sostiene que las mayores dificultades de aprendizaje sobre la derivada se vinculan con el uso del límite del cociente incremental. A pesar de ello, la incorporación de herramientas tecnológicas como GeoGebra resultó fundamental para comprobar resultados, visualizar conceptos y reducir significativamente las dificultades operativas, como se evidenció en la comprobación de procedimientos

(III) Conclusiones centrales del análisis del desarrollo de las competencias actitudinales

El 82% manifestó apertura a debatir y construir conocimiento de manera colectiva en la actividad grupal de las razones de cambio. Sin embargo, las actividades de la recta tangente y del método de Fermat que exigieron argumentar y juzgar las justificaciones geométricas de otros, muy pocos se reportaron en los audios y las discusiones. Así mismo, muy poco se reportó de los juicios críticos hacia los aportes históricos. Por tanto, ser modificaron estas competencias para el rediseño.

- Desde el *uso de la historia – epistemología en la enseñanza de la matemática como recurso didáctico* podemos afirmar que el potencial didáctico del componente histórico-epistemológico de la secuencia didáctica orientó a los estudiantes a confrontar sus nociones de función, razón de cambio, límite y recta tangente con problemas históricos que dieron origen a los mismos. Como resultado central de todo esto, se evidencio que las actividades promovieron una reconstrucción gradual de significados y la superación de obstáculos epistemológicos a nivel cognitivo, transitando de la función como una regla de correspondencia hacia la generalización de una relación de interdependencia entre magnitudes variables (Fiallo y Parada, 2018), de razón de cambio como una comparación de magnitudes a una medida de cuánto cambia una magnitud variable respecto a otra (Carlson et al., 2002/2003), del rechazo de la interpretación del infinito hacia la noción de límite como mediador entre las interpretaciones de los procesos infinitos (infinito potencial) y la culminación de un proceso infinito (infinito actual), desde el estudio de la tendencia y la aproximación (Gonzales et al., 2013) y la concepción de recta tangente como aquella que toca al círculo en punto pero no la corta sin considerar ideas de cambio ni variación hacia aquella recta que pasa por un punto y comparte la dirección e inclinación de la curva en ese punto. Además, la secuencia favoreció que los estudiantes visualizaran la derivada como la mejor aproximación a la velocidad en un instante, relacionando el límite del cociente infinitesimal con la tangente a la curva. El uso de recursos tecnológicos (GeoGebra) y problemas cinemáticos facilitó la comprensión de la derivada más allá de la manipulación algebraica.

De todos estos resultados, se realizaron los respectivos ajustes a las actividades para fortalecer el vínculo entre teoría y práctica, introducir nuevas situaciones problemáticas que generen mayor interés, y redefinir los indicadores actitudinales para fomentar la curiosidad y el reconocimiento del error como parte del aprendizaje.

6.1 Consideraciones finales

Este trabajo analizó cómo la historia y la epistemología son insumos que enriquecen la enseñanza y el aprendizaje de la derivada en la educación media. Se caracterizó los acercamientos histórico-epistemológicos sobre la derivada, se definió las competencias esperadas según los referentes curriculares nacionales y se identificaron los aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales clave en la construcción del concepto de la derivada. Asimismo, como se escribió en las conclusiones, todo lo anterior permitió en el pilotaje resignificar conceptos como función, razón de cambio, pendiente y límite para comprender la derivada como razón de cambio instantánea y su relación con la pendiente de la tangente; y en su rediseño, ajustar las actividades en favor de un aprendizaje progresivo y significativo.

Un gran aporte de esta investigación se configura en el rediseño de las actividades, no obstante, es fundamental precisar que dicho aporte no radica en las actividades en sí mismas, ya que estas pueden ser modificadas y adaptadas conforme a las necesidades del contexto escolar donde se implementen. El aporte significativo de esta investigación se encuentra en el fundamento teórico que sustenta la construcción de cada actividad. Es decir, este ejercicio de articular los elementos históricos y epistemológicos para que orienten al estudiante en un proceso gradual en la construcción de su propio aprendizaje de la derivada, sirven como directrices para que otros docentes integren estos principios en su práctica pedagógica y eviten lagunas, errores conceptuales o barreras que puedan dificultar el acceso de los estudiantes a nuevos conceptos, como el de la derivada en la educación media.

Como autocrítica a este trabajo de investigación, se reconocen varias dificultades que no se abordaron adecuadamente tanto en el diseño como en el pilotaje de las actividades. Por ejemplo, en la prueba diagnóstica se deben agregar preguntas o problemas que identifiquen con claridad las dificultades en la comprensión de las funciones y los números reales de los estudiantes. En la implementación, se debe disponer más que de tres sesiones de clase de 4 horas, pues el aprendizaje de cada objeto de estudio requiere de la activación y ejercitación de los saberes previos y la comprensión de muchas variables para poder ser asimiladas por los estudiantes antes de afrontar los nuevos y más complejos conceptos. Por otro lado, para la recogida de los datos es más valioso la videograbación, que cualquier foto o audio.

Finalmente, la utilización de "estándares" de competencia como método principal de evaluación del aprendizaje puede no ser óptima, pues, todos tienen la oportunidad de aprender en la medida que sus capacidades se lo permitan, ya sean pocos o grandes sus avances, estos deben ser valorados. En este sentido, el proceso de evaluación debe favorecer el autoconocimiento del estudiante, permitiéndole identificar tanto sus debilidades como fortalezas para continuar su mejora personal. Dado que todos aprendemos de diferentes formas, pues todos somo diferentes y únicos y todos somos autodidactas de nuestro propio aprendizaje.

Si bien, a lo largo de la historia se han reconocido muchos aportes, que fueron grandes avances, así como limitaciones en el desarrollo de nuevos conocimientos. Es fundamental que los docentes que busquen incorporar elementos históricos y epistemológicos en el aula de clase no busquen repetir los mismos errores del pasado. Por el contrario, durante el proceso de aprendizaje, se debe ser consciente que las barreras, errores o lagunas conceptuales, deben identificarse y superarse; de este modo, dichas debilidades pueden transformarse en fortalezas que harán más sólido y efectivo el aprendizaje en la formación de estudiantes competentes en matemáticas.

Finalmente, para quienes deseen replicar este rediseño de esta secuencia didáctica, se recomienda que adopte como referencia la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa desarrollado por Ricardo Cantoral y sus colaboradores. Asimismo, se sugiere incluir actividades que impliquen a los estudiantes aplicar sus conocimientos aprendidos en la resolución de problemas auténticos de su propia cotidianidad. De esta manera, se contribuye en la formación de ciudadanos matemáticamente competentes.

7. Referencias bibliográficas

Arciniegas Rueda, H. L. (2022). *Aula inclusiva de matemáticas: Un estudio de situaciones de variación y cambio* [tesis de maestría]. Universidad Industrial de Santander.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97–140). Grupo Editorial Iberoamericano.

Ávila, J., Ávila, R., & Parra, F. (2013). Desarrollo histórico–epistemológico de la derivada de una función. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 26*, 1223–1230.

Boyé, A. (2007). ¿François Viète, inventor del álgebra? (S. Toledo, Trad.). En Consejería de Educación, Cultura y Deportes de Gobierno de Canarias (Ed.), *Los Orígenes de la Ciencia Moderna Actas Año XI y XII* (pp. 259–276). Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática* (J. Wiley y Sons, Trad.). Alianza Editorial. (Obra original publicada en 1968).

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato* [tesis de maestría]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. Secretaría de Educación Pública.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio (P. Perry & H. Alfonso, Trad.). *EMA, 8*(2), 121–156. (Trabajo original publicado en 2002).

Carlson, M., Madison, B., & West, R. (2015). A study of students' readiness to learn calculus. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(2), 209-233.

D'Amore, B. (2007). El papel de la epistemología en la formación de profesores de matemática de la escuela secundaria. *Cuadernos del Seminario en Educación, 8*, 36. Universidad Nacional de Colombia.

Dubarbie, L. (2024). Las dificultades de aprendizaje en análisis matemático según el profesorado de Ecuador y Colombia: Su origen y estrategias didácticas para su enseñanza. *El cálculo y su enseñanza, 20*(1), 79-102.

El Axioma del Infinito. (2022, 25 de enero). *Los orígenes del cálculo infinitesimal* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=8peKjQdVMOM.

Fiallo, J. E., & Parada, S. E. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación: Curso de precálculo mediado por GeoGebra*. Ediciones UIS.

Fuentealba, C. E., Cárcamo, A. D., Badillo, E. R., & Sánchez-Matamoros, G. M. (2023). Análisis de errores en tareas sobre el concepto de derivada: Una mirada desde la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, y Esquema). *Formación universitaria, 16*(3), 41-50.

García, M., & Dolores, D. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 12*(46).

González, J., Morales, A., & Sigarreta, J. M. (2013). Concepciones sobre el infinito: Un estudio a nivel universitario. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 13*(2), 1-12.

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas*. (tesis doctoral). Universidad Pedagógica Nacional.

Gutiérrez, J. (2019). *La historia y la epistemología en la formación en la formación de un ciudadano matemáticamente competente: Un acercamiento desde el estudio de la trigonometría* [tesis de maestría]. Universidad Industrial de Santander.

Maza, C. (1994). Historia de las matemáticas y su enseñanza: Un análisis. *SUMA. Revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, 17*, 17-26.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*.

Molina, M., Castro, E., Molina, J., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas, 29*(1), 75-88.

Neira, G. (2012). Del álgebra al cálculo: ¿Transición o ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica. En *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático* (pp. 13-42).

Newton, I. (1736). *The method of fluxions and infinite series*. Henry Woodfall. Recuperado de https://archive.org/details/methodoffluxions00newt. (Obra original publicada en 1671).

Nieves, E. M. (2011). Epistemología de la derivada como fundamento del cálculo diferencial. *Voces y Silencios. Revista Latinoamericana de Educación, 2*(número especial), 3–21.

Parada, S. (2018). Caracterización de habilidades del pensamiento variacional. *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa, 3*(1), 10–18.

Rey, J. (2022). *Estudio del razonamiento proporcional en educación primaria: Un acercamiento histórico-epistemológico para favorecer la inclusión* [tesis de pregrado]. Universidad Industrial de Santander.

Rodríguez-Plata, C. (2020). *La comprensión de la derivada como razón de cambio: Habilidades cognitivas vinculadas al estudio covariacional* [tesis de maestría no publicada]. Universidad Industrial de Santander.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., & Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato: La derivada de una función en un punto. En *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497-508).

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Serna, C. (2023). *Diseño de un aula virtual de aprendizaje con el concepto de derivada y sus aplicaciones en situaciones de modelación* [tesis de pregrado]. Universidad Industrial de Santander.

Vega-Agredo, S. (2019). *El desarrollo histórico-epistemológico de la derivada en el paso de lo geométrico a lo analítico* [tesis de maestría]. Universidad del Valle.

Vrancken, S., & Engler, A. (2013). Estudio de la derivada desde la variación y el cambio: Análisis histórico–epistemológico. *UNIÓN – Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 9*(33), 53–70.

Vrancken, S., & Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: Resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema: Boletín de Educación Matemática, 28*(48), 449-468.

Apéndices

Apéndice A. Prueba Diagnóstica de los conceptos básicos del cálculo

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ______________________ Fecha __________

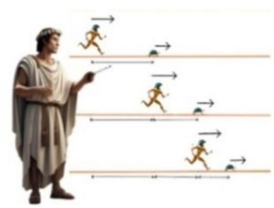
Prueba diagnóstica de los conceptos básicos del cálculo

Esta prueba diagnóstica tiene como objetivo evaluar las habilidades cognitivas y procedimentales de los estudiantes con relación a conceptos claves como función, límite y continuidad. Los resultados permitirán diseñar un plan de refuerzo en atención a sus fortalezas u dificultades alrededor del cálculo diferencial.

Instrucciones: Lea cuidadosamente las preguntas del examen y responda ordenadamente en sus hojas de trabajo. Recuerde escribir de manera clara y legible. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No está permitido el uso de aparatos electrónicos. La prueba se presenta de manera individual. Esta consta de 4 problemas, todas con el mismo valor y la nota máxima es de 50 puntos.

Actividad #1 **La carrera con más de 2000 años sin resolver: Aquiles y la tortuga**

Zenón fue un filósofo y matemático griego del siglo V a.C. que planteó una famosa paradoja:



En una carrera, Aquiles le da una ventaja de 1km a una tortuga. Mientras Aquiles corre para alcanzar a la tortuga, cuando llega al punto donde estaba la tortuga, está ya ha avanzado la mitad del recorrido anterior, es decir, ½ km más. Cuando Aquiles llega a ese nuevo punto, la tortuga nuevamente habrá avanzado la mitad del recorrido previo (¼ km), y así sucesivamente.

La paradoja plantea que Aquiles nunca podrá alcanzar a la tortuga, ya que siempre habrá una distancia cada vez más pequeña, entre ellos.

Halla la distancia total que recorre Aquiles para alcanzar la tortuga. **Justifica tus respuestas**.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

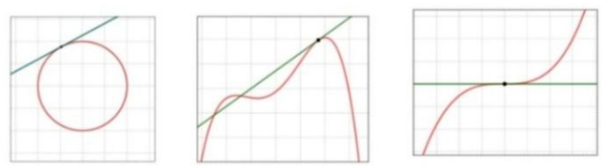
Nombre ______________________ Fecha __________

Actividad #2 **Explorando conceptos de tangencia a una curva**

El gran matemático y geómetra griego, Euclides (siglo IV a. C.) en su libro los Elementos planteó que "una recta es tangente a un círculo, cuando lo toca, pero prolongada no lo corta" (Libro III, definición II).

Sin embargo, su definición NO es suficiente para una curva general.

1. **Señala** las gráficas que representan una recta tangente a una curva. **Justifica**
   Pista: Ten en cuenta la dirección (o comportamiento) de la curva en cada instante



Gráfica 1 Gráfica 2 Gráfica 3

Justificación:

2. ¿Qué condiciones debe cumplirse para que una recta sea tangente a una curva? **Explica** tu respuesta

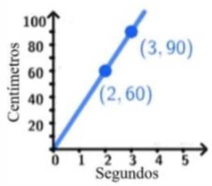
Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ______________________________ Fecha __________

Actividad #3 **Descubriendo las razones de cambio**

El astrónomo e ingeniero Galileo Galilei (1564 - 1642) en uno de sus experimentos hizo rodar cuatro bolas a diferentes velocidades sobre una superficie horizontal con poca fricción. Y usó diferentes representaciones para registrar la distancia y el tiempo de cada pelota, como se muestra a continuación:

<table>
<tr><th>Pelota A</th><th>Pelota B</th><th>Pelota C</th><th>Pelota D</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td><table><tr><th>Segundos</th><th>centímetros</th></tr><tr><td>4</td><td>220</td></tr><tr><td>12</td><td>660</td></tr><tr><td>14</td><td>770</td></tr></table></td>
<td>Esta pelota rueda d centímetros en s segundos según la ecuación de velocidad $V = 25$</td>
<td>Esta pelota rueda 225 centímetros en 4.5 segundos</td>
</tr>
</table>

1. ¿Cuál es la pelota que se mueve más rápido según las representaciones dadas? **Justifica** tu respuesta

2. ¿Cuál es la pelota que se mueve más lento según las representaciones dadas? **Justifica** tu respuesta

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ______________________________ Fecha __________

Actividad #4 **El rectángulo de mayor área**

El francés Pierre de Fermat fue el primero en desarrollar un método algorítmico para hallar máximos y mínimos de curvas (funciones). Ayúdale a resolver el siguiente problema:

El perímetro de un rectángulo es de 14 metros. Encuentra las dimensiones de este cuadrilátero para que su área sea la máxima posible.

1. **Establezca** la relación entre el área y sus lados y **determine** las dimensiones del cuadrilátero para que su área sea óptima. **Justifica** tus procedimientos

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

Apéndice B. Taller 1: Explorando los cimientos del cálculo

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ________________________________ **Grado** __________ **Fecha** ____________

TALLER 1: EXPLORANDO LOS CIMIENTOS DEL CÁLCULO

Jóvenes aspirantes a las maravillas del Cálculo. Ustedes han sido escogidos para resolver los problemas históricos más importantes del Cálculo diferencial, de modo que, conocerán grandes matemáticos como Galileo, Fermat, Newton, Leibniz, Cauchy, entre otros que les ayudarán en esta travesía. En este primer taller enfrentarán los más temidos obstáculos cognitivos y fortalecerán sus habilidades matemáticas. En el segundo taller, aprenderán a utilizar el cálculo infinitesimal para construir la principal estrategia, *la derivada*, para resolver los principales problemas de la época milenaria que dieron origen al Cálculo. Finalmente, en el tercer taller, demostrarán su capacidad para aplicar la noción de derivada como razón de cambio en problemas vinculados a su entorno.

Competencias matemáticas del primer taller

Cognitivas	*Procedimentales*	*Actitudinales*
Comprende y argumenta los fundamentos conceptuales y teóricos de los objetos básicos del Cálculo (concepto de función, noción de límite y continuidad) en contextos matemáticos y no matemáticos.	Determina razones de cambio, establece su relación con la pendiente de una recta y utiliza técnicas de aproximación para resolver problemas de cambio y variación.	Participa activamente en discusiones grupales, escuchando y aportando ideas y juzga la pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto.

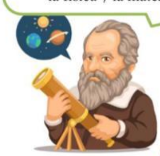
Actividad #1. El concepto de función

Indicador de logro:	**Si**	**No**
Comprende el concepto de función como una relación de interdependencia entre magnitudes variables.		
Determina razones de cambio de funciones básicas en sus distintas representaciones en el contexto cinemático.		
Colabora y comparte sus resultados en equipo, discutiendo su análisis frente a las razones de cambio.		

Saberes Previos

1. ¿Quién fue Galileo Galilei? ¿Cuáles fueron sus mayores descubrimientos?
2. ¿Qué aportes hizo a la Física?
3. ¿De qué magnitud variable depende la distancia recorrida por un objeto que se mueve en una sola dirección durante un periodo determinado?
4. ¿Cuál es la relación entre la distancia recorrida y el tiempo que se toma una pelota en rodar sobre una superficie plana?

Soy Galileo Galilei (1564 - 1642), el padre del método científico, realicé importantes contribuciones de la astronomía, la física y la matemática.



Biografía de Galileo: https://youtu.be/LrlaDipIwnc?si=89DQmc-6_ReUvvMt

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

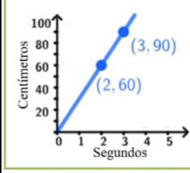
Nombre ________________________________ **Grado** __________ **Fecha** ____________

Situación problemática 1.1

Descubriendo razones de cambio con el experimento de Galileo

En uno de mis experimentos hice rodar cuatro bolas a diferentes velocidades sobre una superficie horizontal con poca fricción. Y usé diferentes representaciones para registrar la distancia y el tiempo de cada pelota, como se muestra a continuación. **Determina** cuál fue la más rápida y cuál fue la más lenta.

Pelota A



Pelota B

Segundos	centímetros
4	220
12	660
14	770

Pelota C

Esta pelota rueda d centímetros en s segundos según la ecuación de velocidad $V = 25$

Pelota D

Esta pelota rueda 225 centímetros en 4.5 segundos

Responde las siguientes preguntas en equipo según las indicaciones del docente, y escribe tus procedimientos en la hoja de trabajo:

a) ¿Qué magnitudes varían al hacer rodar las pelotas? **Explica** tu respuesta
b) ¿Qué valores puede tomar la distancia y el tiempo? ¿**Por qué**?
c) ¿Cuántos centímetros recorre cada pelota al cabo de 1 segundo? ¿Y al final de dos segundos? ¿y al final de 3 segundos? ¿Cuánto avanzará cada pelota en el próximo segundo? ¿**Por qué**?
d) ¿Cuántos centímetros avanza cada pelota en cada segundo? **Explica** tu respuesta
e) ¿Cuál es la pelota más rápida y cuál es la pelota más lenta? ¿**Por qué**?
f) **Establece** la razón entre la posición y el tiempo recorrido de cada pelota ¿Qué nombre recibe?
g) **Expresa** la distancia de cada pelota en función del tiempo. **Explica** tu respuesta
h) **Elabora** una gráfica de la función de la pelota más rápida con respecto al tiempo. **Explica** cómo varían las magnitudes en la gráfica.
i) **Elabora** una gráfica de la posición de la pelota más lenta con respecto al tiempo. **Explica** cómo varían las magnitudes en la gráfica
j) ¿Qué representa la pendiente de la recta? **Justifica** tu respuesta

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo

Practica lo aprendido en GeoGebra: https://www.geogebra.org/classroom/hdcvqpgc

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

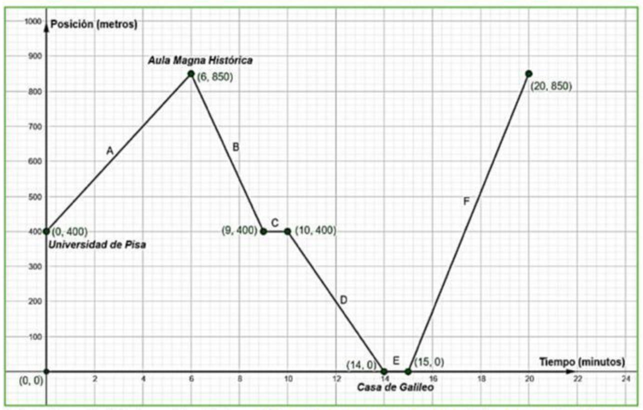
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ______________________ **Grado** ________ **Fecha** __________

Situación problemática 1.2

Siguiendo las huellas de Galileo en Pisa: Un análisis gráfico del movimiento

Recuerdo que en una ocasión, hallándome en la Universidad de Pisa, encaminé mis rápidos pasos hacia el Aula Magna de Historia con el propósito de tomar examen a mis discípulos. Mas, al percatarme de que había olvidado las pruebas en casa, no dudé en emprender a correr de regreso por el mismo camino. Os muestro el siguiente gráfico de describe mi recorrido. **Determina** si llegue o no con las pruebas al Aula.



Link de actividad en GeoGebra: https://www.geogebra.org/classroom/zrc8xuxm

Responde las preguntas:

a) **Inventa** una breve historia del recorrido de Galileo, usa términos relacionados con el movimiento.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ______________________ **Grado** ________ **Fecha** __________

Actividad #2. El concepto de tangente a una curva

Indicador de logro:	Si	No
Reconoce la recta tangente a una curva, como aquella que pasa por un punto y comparte la misma dirección de la curva en ese punto.		
Establece relaciones entre las rectas tangentes y el comportamiento de la función		
Juzga la pertinencia de las diferentes justificaciones geométricas de sus compañeros		

Saberes Previos

1. ¿Quién fue Euclides? ¿Cuál fue su principal obra?
2. ¿Cuáles son los 5 postulados de los Elementos"
3. ¿Cómo Euclides definió una recta tangente a un círculo?
4. Una piedra en el extremo de una cuerda se hace girar, formando un círculo. Si se rompe la cuerda. ¿en qué dirección sale disparada la piedra?

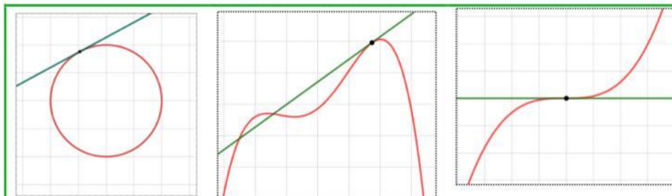
Soy Euclides (siglo IV a.C) conocido como el padre de la geometría por mi majestuosa obra conocida como los "Elementos"

Biografía de Euclides: https://youtu.be/sM3qGIyylDc?si=hbq5tThPewhFIV0w

Situación problematica 2.1

Explorando conceptos de tangencia a una curva

Las siguientes curvas representan diferentes caminos que he tomado. En cada una he señalado un punto donde me he detenido, y por tal punto he colocado una pequeña línea recta que coincide en dirección con la curva en dicho lugar ¿cuáles de estas líneas rectas pueden ser llamadas tangentes? **Explica** tu respuesta



Camino 1 Camino 2 Camino 3

Accede al applet de GeoGebra y responde las preguntas en el siguiente enlace:
https://www.geogebra.org/classroom/ubvgj5qz

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.

Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ______________________________ Grado __________ Fecha ____________

b) ¿De qué magnitud o magnitudes variables depende la posición de Galileo? ¿**Por qué**?

c) ¿Cuál es la distancia total recorrida por Galileo? ¿**Por qué**?

d) ¿Cuánto tiempo duró todo el trayecto? ¿**Por qué**?

e) ¿Qué relación hay entre la distancia y el tiempo? ¿**Por qué**?

f) ¿A qué velocidad se movía Galileo durante los primeros 6 minutos? ¿entre los instantes 6 y 9 min? ¿entre 9 y 10 min? ¿entre 10 y 14 min? ¿entre 14 y 15? ¿y entre 15 y 20 min? **Justifica** tu respuesta

g) Completa la tabla:

Razón de cambio / Intervalos	$\Delta p = p(t_2) - p(t_1)$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\frac{\Delta p}{\Delta t} = p(t_2) - p(t_1)$	Signo	Interpretación de $\frac{\Delta p}{\Delta t}$	Tipo de variación
$0 \leq t \leq 6$	$850 - 400 = 450\,m$	$6 - 0 = 6\,min$	$\frac{450}{6} = 75\,\frac{m}{min}$	Positivo (+)	Avanzó 75mt en un min.	Crece a razón de 75 $\frac{m}{min}$
$6 \leq t \leq 9$						
$9 \leq t \leq 10$					Se quedo quieto	Variación cero
$10 \leq t \leq 14$					Retrocedió …	Decrece a razón de …
$14 \leq t \leq 15$						
$15 \leq t \leq 20$						

h) ¿En cuál trayecto Galileo fue más rápido y en cuál fue más lento? ¿**Por qué**?

i) ¿Consideras qué esta representación gráfica de la posición de Galileo es coherente en un contexto real? **Bosqueja** cómo podría ser la gráfica en la vida real y **explica** cómo hallar su velocidad media en cierto intervalo.

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en tu hoja de trabajo.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ______________________________ Grado __________ Fecha ____________

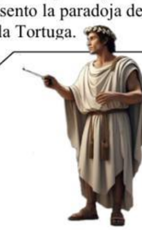
Actividad #3. Técnicas de aproximación

Indicador de logro:	Si	No
Diferencia las dos formas de interpretación del infinito, aquellas situaciones de procesos de aproximación infinitos (infinito potencial) de las situaciones límite entendida como la culminación del proceso infinito (infinito actual)		
Utiliza técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos con precisión		
Evalúa críticamente el margen de error en sus aproximaciones		

Saberes Previos

5. ¿Quién fue Zenón de Elea? ¿Por qué se hizo famoso?
6. Mencione algunas de sus paradojas.
7. De acuerdo con la paradoja de Aquiles y la tortuga ¿puede Aquiles alcanzar a la tortuga?
8. Toma una calculadora y divide secuencialmente a 1 entre 2, 3, 4, 5 y 6. ¿Qué ocurre con los cocientes a medida que el divisor se hace mayor?

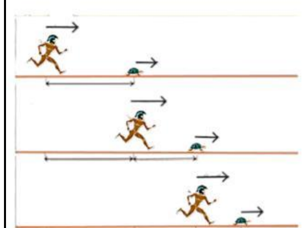
Soy Zenón (siglo v a.C) un filosofó y matemático griego, conocido por mis paradojas. Hoy te presento la paradoja de Aquiles y la Tortuga.



Biografía de Zenón:
https://youtu.be/0AIaZbO7UW8?si=dzfYhdKhgPhsEqTK

Situación problemática 3.1

La carrera con más de 2000 años sin resolver: Aquiles y la tortuga



En una carrera, Aquiles le da una ventaja de 1km a una tortuga. Mientras Aquiles corre para alcanzar a la tortuga, cuando llega al punto donde estaba la tortuga, está ya ha avanzado la mitad del recorrido anterior, es decir, ½ km más. Cuando Aquiles llega a ese nuevo punto, la tortuga nuevamente habrá avanzado la mitad del recorrido previo (¼ km), y así sucesivamente.

La paradoja plantea que Aquiles nunca podrá alcanzar a la tortuga, ya que siempre habrá una distancia cada vez más pequeña, entre ellos.

Halla la distancia total que recorre Aquiles para alcanzar la tortuga. **Justifica tus respuestas**.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ___________________________________ **Grado** ___________ **Fecha** _____________

Responde las siguientes preguntas en tu hoja de trabajo:

a) ¿**Por qué** es una "paradoja"?

b) ¿**Por qué** parece que Aquiles nunca alcanza a la tortuga, a pesar de ser más rápido?

c) Si la distancia entre Aquiles y la tortuga se reduce a la mitad en cada paso (1 km, $\frac{1}{2}$ km, $\frac{1}{4}$ km, ...) ¿Cuánto mide la distancia entre Aquiles y la tortuga cuando haya avanzado tres veces? ¿Cuatro veces? ¿cinco veces? ¿A qué valor se aproxima los términos a medida que Aquiles avanza hacia la tortuga? **Expresa** el termino general de la sucesión y **Justifica** tu respuesta

d) Si sumamos todos los intervalos de distancia ($1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$) ¿Cuál es la distancia recorrida por Aquiles cuando haya avanzado tres veces? ¿Cuatro veces? ¿cinco veces? ¿A qué valor se aproxima esta suma? **Expresa** en forma general la serie geométrica y **Justifica** tu respuesta

e) Si la tortuga tiene una ventaja inicial y Aquiles se aproxima cada vez más ¿en qué momento exacto Aquiles la alcanza? **Justifica** tu respuesta

f) ¿La distancia recorrida por Aquiles es una variable continua o discreta? **Explica** tu respuesta

g) ¿El problema está en dividir la distancia recorrida en infinitos pasos o en ignorar el tiempo total? **Explica** tu respuesta

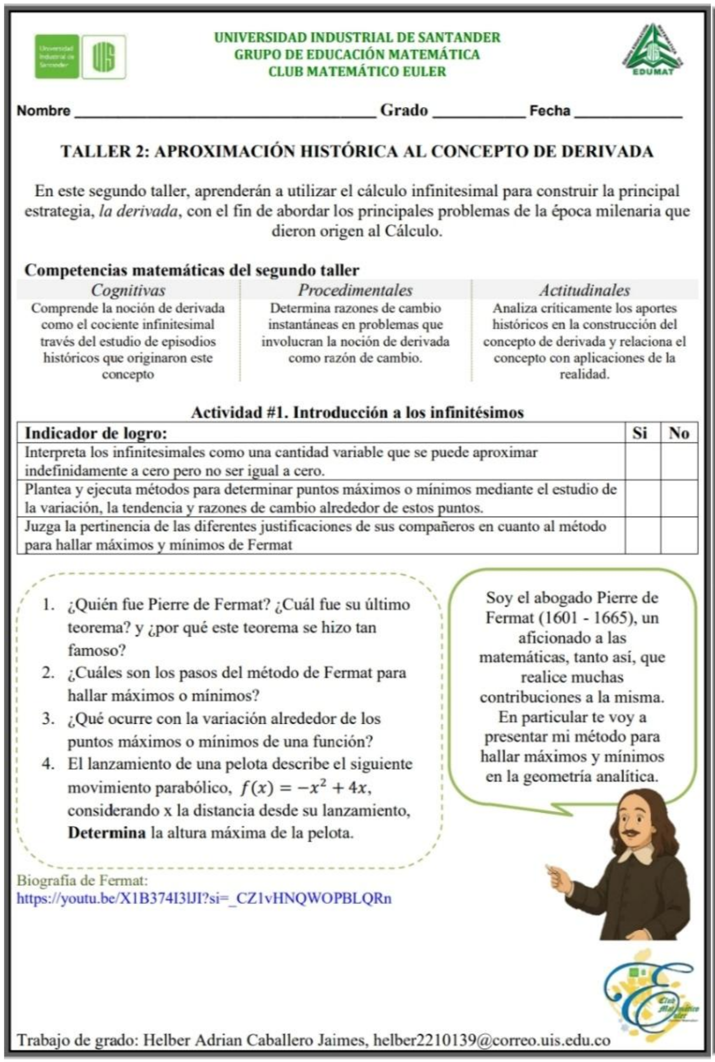
h) ¿En la realidad, un corredor alcanza a otro aunque haya infinitos intervalos en la distancia o el tiempo que dura su recorrido? **Explica** tu respuesta

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.

Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

Apéndice C. Taller 2: Aproximación Histórica al concepto de derivada



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ______________________________ Grado _________ Fecha ___________

TALLER 2: APROXIMACIÓN HISTÓRICA AL CONCEPTO DE DERIVADA

En este segundo taller, aprenderán a utilizar el cálculo infinitesimal para construir la principal estrategia, *la derivada*, con el fin de abordar los principales problemas de la época milenaria que dieron origen al Cálculo.

Competencias matemáticas del segundo taller

Cognitivas	*Procedimentales*	*Actitudinales*
Comprende la noción de derivada como el cociente infinitesimal través del estudio de episodios históricos que originaron este concepto	Determina razones de cambio instantáneas en problemas que involucran la noción de derivada como razón de cambio.	Analiza críticamente los aportes históricos en la construcción del concepto de derivada y relaciona el concepto con aplicaciones de la realidad.

Actividad #1. Introducción a los infinitésimos

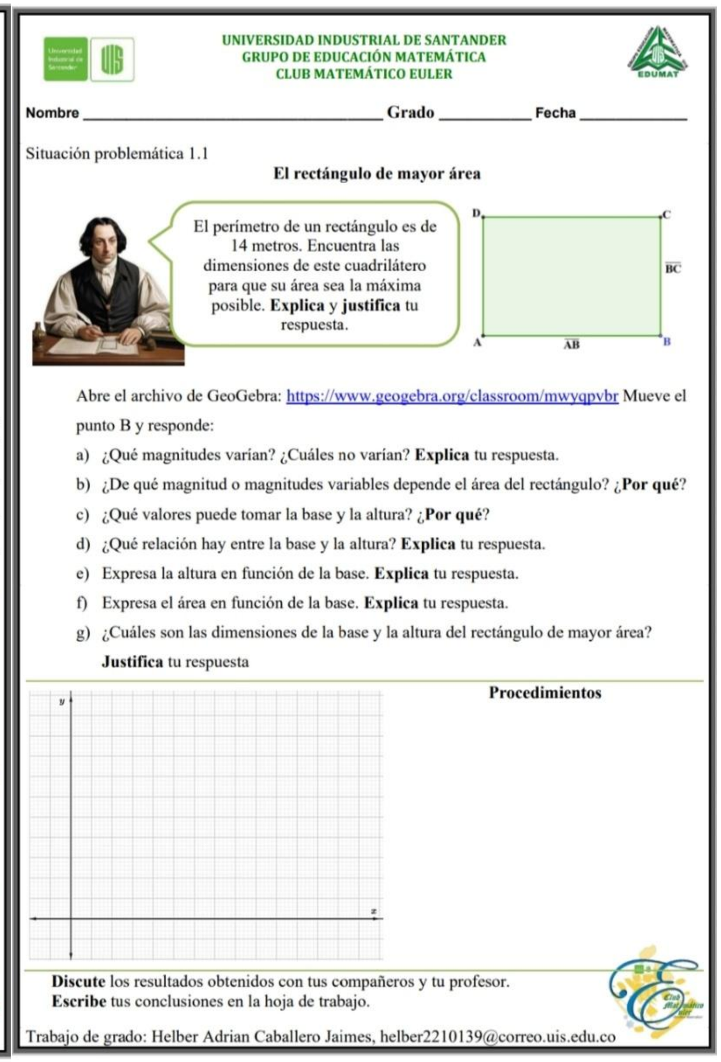
Indicador de logro:	**Si**	**No**
Interpreta los infinitesimales como una cantidad variable que se puede aproximar indefinidamente a cero pero no ser igual a cero.		
Plantea y ejecuta métodos para determinar puntos máximos o mínimos mediante el estudio de la variación, la tendencia y razones de cambio alrededor de estos puntos.		
Juzga la pertinencia de las diferentes justificaciones de sus compañeros en cuanto al método para hallar máximos y mínimos de Fermat		

1. ¿Quién fue Pierre de Fermat? ¿Cuál fue su último teorema? y ¿por qué este teorema se hizo tan famoso?
2. ¿Cuáles son los pasos del método de Fermat para hallar máximos o mínimos?
3. ¿Qué ocurre con la variación alrededor de los puntos máximos o mínimos de una función?
4. El lanzamiento de una pelota describe el siguiente movimiento parabólico, $f(x) = -x^2 + 4x$, considerando x la distancia desde su lanzamiento, **Determina** la altura máxima de la pelota.

Soy el abogado Pierre de Fermat (1601 - 1665), un aficionado a las matemáticas, tanto así, que realice muchas contribuciones a la misma. En particular te voy a presentar mi método para hallar máximos y mínimos en la geometría analítica.

Biografía de Fermat:
https://youtu.be/X1B374I3lJI?si=_CZ1vHNQWOPBLQRn

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ______________________________ Grado _________ Fecha ___________

Situación problemática 1.1

El rectángulo de mayor área

El perímetro de un rectángulo es de 14 metros. Encuentra las dimensiones de este cuadrilátero para que su área sea la máxima posible. **Explica** y **justifica** tu respuesta.

Abre el archivo de GeoGebra: https://www.geogebra.org/classroom/mwyqpvbr Mueve el punto B y responde:

a) ¿Qué magnitudes varían? ¿Cuáles no varían? **Explica** tu respuesta.
b) ¿De qué magnitud o magnitudes variables depende el área del rectángulo? ¿**Por qué**?
c) ¿Qué valores puede tomar la base y la altura? ¿**Por qué**?
d) ¿Qué relación hay entre la base y la altura? **Explica** tu respuesta.
e) Expresa la altura en función de la base. **Explica** tu respuesta.
f) Expresa el área en función de la base. **Explica** tu respuesta.
g) ¿Cuáles son las dimensiones de la base y la altura del rectángulo de mayor área? **Justifica** tu respuesta

Procedimientos

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ______________________________ **Grado** __________ **Fecha** ____________

El método de Fermat para hallar máximos y mínimos

Analiza cómo Fermat halla las dimensiones de la base y la altura del rectángulo de mayor área

Vuestro objetivo es hallar longitudes de la base y la altura del rectángulo de mayor área.
El primer paso es plantear la expresión algebraica que relacione las variables, es decir, el área en función de uno de sus lados

$$A(x) = Base * Altura$$
$$A(x) = x * (7 - x)$$
$$A(x) = -x^2 + 7x$$

El lugar geométrico de esta ecuación es una curva, donde la dirección del movimiento crece, se detiene por un instante, seguidamente decrece. Es decir, que tiene un **máximo**.

Segundo paso, identificar la incógnita del problema, para este caso la llamaremos x, donde la cantidad "*y=A(x)*" alcanza un máximo.

Imaginad, que sí nos movemos una cantidad infinitesimalmente pequeña desde el máximo, un incremento tan diminuto que llamaremos E, en la variable x, es decir, $x + E$. Pues, la variable y experimentará también un cambio muy pequeño. De modo que:

$$A(x + E) \approx A(x)$$

Es claro que **cuando E se aproxima a cero**, la distancia entre $A(x)$ y $A(x + E)$ será cada vez menor.

Tercer paso, evaluad el valor de la función en el punto $x + E$.

$$A(x + E) = -(x + E)^2 + 7(x + E)$$
$$A(x + E) = -(x^2 + 2xE + E^2) + 7x + 7E$$
$$A(x + E) = -x^2 - 2xE - E^2 + 7x + 7E$$

Haciendo aproximaciones, $A(x + E) \approx A(x)$ entonces $-x^2 - 2xE - E^2 + 7x + 7E \approx -x^2 + 7x$

Cuarto paso, se realiza la **diferencia** entre el valor de la función en el punto desplazado y del punto original.

$$A(x + E) - A(x) \approx 0$$
$$(-x^2 - 2xE - E^2 + 7x + 7E) - (-x^2 + 7x) \approx 0$$
$$-2xE - E^2 + 7E \approx 0$$

Quinto paso, se divide por E

$$\frac{-2xE - E^2 + 7E}{E} \approx 0$$
$$-2x - E + 7 \approx 0$$

Desde luego, cuando $E = 0$, se tendrá que $A(x + E)$ alcanza el máximo. Por tanto, el sexto paso es igualar E=0, entonces se suprimen los términos que contengan E,

$$-2x + 7 = 0$$

Despejando, se obtiene que $x = 7/2 = 3.5$, la cual es la base del rectángulo. Luego, como $x = 3.5$ y $atura = 7 - x$, entonces la altura también mide 3.5. Estas son las dimensiones del rectángulo con área máxima.

Responde las siguientes preguntas:

a) Escribe los pasos del método de Fermat para hallar máximos o mínimos. **Explica** tu respuesta
b) ¿A qué valor se aproxima $A(x + E)$ cuando $x + E$ se aproxima a 3.5? **Justifica** tu respuesta
c) ¿Qué es un infinitesimal, de acuerdo con las ideas de Fermat? ¿la diferencia entre el valor de $x + E$ y x es el mismo infinitesimal?
d) ¿A que tiende la diferencia infinitesimal cuando se aproxima a la base del rectángulo con mayor área? Y ¿Qué ocurre con sus imágenes? **Justifica** tus respuestas

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad de aprendizaje

1. **Aplica** el método de Fermat para **determinar** la altura máxima del lanzamiento de una pelota que describe el movimiento $f(x) = -x^2 + 4x$, considerando x la distancia desde su lanzamiento.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ______________________________ **Grado** __________ **Fecha** ____________

El método de Fermat para hallar máximos y mínimos

Prestad atención cómo Fermat halla las dimensiones de la base y la altura del rectángulo de mayor área en la siguiente historieta:
Abre el archivo GeoGebra: https://www.geogebra.org/classroom/axpb4bzk

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Actividad de aprendizaje

1. **Aplica** el método de Fermat para **determinar** la altura máxima del lanzamiento de una pelota que describe el movimiento $f(x) = -x^2 + 4x$, considerando x la distancia desde su lanzamiento.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ______________________ **Grado** ________ **Fecha** ________

Actividad #2. Bases del concepto de la derivada: El límite del cociente infinitesimal

Indicador de logro:	**Si**	**No**
Interpreta la noción de derivada como razón de cambio instantánea y establece su relación con la recta tangente a una curva		
Identifica y contrasta los principales aportes de Newton y Leibniz en la construcción del concepto de derivada		

Saberes Previos

1. ¿Quién fue Isaac Newton? ¿cuáles fueron sus mayores descubrimientos?
2. ¿Quién fue Gottfried Leibniz? ¿cuáles fueron sus mayores descubrimientos?
3. ¿Cómo fue el desarrollo histórico del cálculo desde los griegos hasta Newton y Leibniz?
4. Si un cuerpo se deja caer desde cierta altura, ¿Cómo cambia la rapidez de cambio en cada instante? ¿es constante?

Soy Newton, un físico, matemático y astrónomo fui clave en la revolución científica. Si he llegado lejos, es porque me subí sobre hombros de gigantes

Soy Leibniz, un filósofo matemático que desarrollo el cálculo de manera independiente al igual que Newton

El cálculo de Newton y Leibniz
https://youtu.be/FHLsTqxW9uc?si=WwSNMvK7SHSi0mxd

Situación problematica 2.1

Explorando el cociente infinitesimal

Antes de abordar el problema, observa el ejemplo de Newton y Leibniz para calcular la velocidad de una manzana a los 2 segundos después de ser lanzada sobre una colina. La curva $y = x^2$ muestra la posición en metros de la manzana durante un tiempo específico en segundos

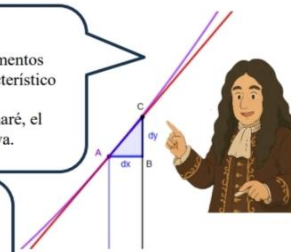
Para determinar la razón de cambio instantánea en $x = 1$ de la curva $y = x^2$, dejemos que esta ordenada se mueva a través de un espacio indefinidamente dado por un incremento de tiempo muy pequeño distinto de cero que será una cantidad evanescente "o". Es decir, hasta $y = (x + o)^2$

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ______________________ **Grado** ________ **Fecha** ________

No se dice evanescentes, ni se escribe "o". Se dice diferencia infinitesimal y se representa con dx. Te explico, al trazar segmentos paralelos a los ejes sobre la curva, se forma un triángulo característico ABC, donde sus lados $AB = dx$ y $BC = dy$ son cantidades infinitamente pequeñas. Y el cociente de sus catetos, que llamaré, el cociente diferencial permite obtener la recta tangente a la curva.



Precisamente, el cociente de las variaciones de y entre las variaciones de x, que yo les digo fluxión, son aquellas ultimas razones de incrementos evanescentes que determinan la razón de cambio instantánea y toca a la curva en un punto.

Procedimiento de Newton

Como $y = f(x) = x^2$, considerando un incremento o, se tiene $f(x + o) = (x + o)^2 = x^2 + 2xo + o^2$.
Luego, la razón de cambio instantánea en $x = 1$ corresponde a
$\frac{Variación\ y}{variación\ x} = \frac{f(1+o)-f(1)}{(1+o)-(1)} = \frac{(1^2+2(1)o+o^2)-1^2}{o} = \frac{2o+o^2}{o} = 2 + o$
Despreciando los incrementos evanescentes, se tiene que la razón de cambio instantánea corresponde a 2 m/s

Procedimiento de Leibniz

Como $y = f(x) = x^2$ y dx es una cantidad infinitesimal, entonces $f(x + dx) = x^2 + 2xdx + dx^2$. Luego, para obtener la pendiente de la tangente a la curva en $x = 1$ basta hallar el cociente entre los catetos del triángulo característico: $\frac{dy}{dx} = \frac{f(1+dx)-f(1)}{(1+dx)-(1)} = \frac{(1^2+2(1)dx+dx^2)-1^2}{dx} = \frac{2dx+dx^2}{dx} = 2 + dx$, como dx es una cantidad infinitesimal, entonces el cociente de diferenciales corresponde a 2 m/s

Abre el archivo de GeoGebra: https://www.geogebra.org/classroom/sruu97yd

Responde las siguientes preguntas y **explica** cada respuesta:

a) ¿A qué hace referencia el incremento evanescente que mencionó Newton?
b) ¿Qué es realmente el cociente diferencial u una fluxión?
c) ¿Cuáles son las dos formas de interpretar el cociente diferencial gráfica y físicamente?
d) ¿Cuál o cuáles son las principales diferencias entre $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y $\frac{dy}{dx}$?
e) ¿Cuáles son los principales aportes de Newton y Leibniz al cálculo? ¿en qué se diferencian? ¿por qué fueron tan importantes en la historia de las matemáticas?

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ________________________ **Grado** __________ **Fecha** ____________

Situación problematica 2.2
Problema del lanzamiento vertical

Al analizar el lanzamiento vertical de una pelota, se observa que la velocidad de cambio no es constante en cada instante. Para estudiar este fenómeno, se realizó un experimento donde se midió la posición en metros durante un periodo de 2 segundos dada por $P(x) = -5x^2 + 10x$. **Determina** la velocidad instantánea para $x = 0.5s, x = 1s$ y $x = 1.5s$

1. Abre el archivo de GeoGebra: https://www.geogebra.org/classroom/xgyudumj y responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las variables relevantes en este problema de lanzamiento vertical? **Explica** tu respuesta.

b) ¿Cómo se relaciona la altura del objeto con el tiempo transcurrido? **Expresa** la altura en función del tiempo. **Explica** tu respuesta

c) ¿A qué altura se encuentra la pelota en los instantes, $x = 0.5s$, $x = 1s$ y $x = 1.5s$? **Justifica** tu respuesta

d) ¿Cuáles intervalos de tiempo la variación de la función fue creciente? ¿la variación fue cero? ¿fue decreciente? **Explica** tu respuesta

2. Abre el archivo de GeoGebra: https://www.geogebra.org/classroom/wqhgxzza y responde las siguientes preguntas:

a) Activa la opción *incrementos* y la opción *razón* , ¿Qué se observa sobre la gráfica en $x = 0.5$? ¿Qué relación tiene *velocidad promedio* con $\frac{\Delta y}{\Delta x}$? ¿Cuál es la velocidad promedio del objeto durante el intervalo de tiempo $[0.5\ ,0.6]$? ¿Es la velocidad real del objeto en cada instante dentro de ese intervalo? **Explica** tu respuesta.

b) Activa la opción *recta secante* , ¿Qué sucede con la recta secante a medida que el segundo punto de intersección P_i se acerca al punto P?¿A qué se asemeja esta recta en el límite? **Explica** tu respuesta.

c) ¿Cómo se relaciona la velocidad instantánea del objeto en un momento dado con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la altura en función del tiempo en ese mismo instante? **Explica** tu respuesta.

d) Activas la opción *derivada* y haz zoom hasta observar el triángulo característico ¿Cómo podemos **expresar** y **calcular** matemáticamente la *velocidad instantánea* del objeto en el tiempo $x = 0.5$? ¿reconoces alguna estructura matemática familiar en esta expresión? *Sugerencia:* Aplica el método de Newton y Leibniz para determinar la razón de cambio instantánea. **Justifica** tus procedimientos

e) ¿En qué otros contextos de la física o la vida cotidiana podríamos aplicar el concepto de derivada como razón de cambio? **Menciona** algunos ejemplos.

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

Apéndice D. Prueba Final de conceptos fundamentales del cálculo diferencial

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ______________________________ Fecha __________

Evaluación final de conceptos fundamentales del cálculo diferencial

Este examen final tiene como objetivo evaluar las competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales alcanzadas por los estudiantes durante el curso. En particular, la capacidad para utilizar e interpretar la noción de derivada como razón de cambio para resolver problemas relacionados con la variación.

Instrucciones: Lea cuidadosamente las preguntas del examen y responda ordenadamente en sus hojas de trabajo. Recuerde escribir de manera clara y legible. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No está permitido el uso de aparatos electrónicos. La prueba se presenta de manera individual. Esta consta de 3 problemas. La nota máxima es de 50 puntos.

1. **(20 pts.)** Escribe Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. **Explica tu respuesta**

	Proposición	V o F	Justificación
1	La única condición para que una recta sea tangente a una curva es que localmente toque a la curva en un punto.		
2	La velocidad es la razón de cambio de la posición respecto al tiempo.		
3	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$		
4	Alrededor de un punto máximo de una curva la expresión $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ tiende a cero cuando $E \to 0$		
5	La derivada es la mejor aproximación de la tasa de cambio alrededor de un punto		

Sugerencia: Utiliza múltiples representaciones (gráfica, tabla de valores, algebra, entre otros)

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ______________________________ Fecha __________

2. **(15 pts.)** La posición (en metros) de un automóvil en función del tiempo (en segundos) está dada por $f(x)=x^2$.

   a) **Demuestra** por qué la derivada de en $x=3$ es igual a 6.
   b) **Explica** qué representa este valor en el contexto del problema.
   c) **Grafica** la función $f\ (x)=x^2$ y dibuja la recta tangente en $x=3$.
   d) **Interpreta,** ¿Por qué la pendiente de esta recta coincide con la velocidad del automóvil en ese instante?

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CLUB MATEMÁTICO EULER

Nombre ____ Fecha ____________

3. **(15 pts.)** A finales de la edad moderna, se estableció la noción más aproximada del concepto de la derivada, como el resultado de la culminación de muchos procesos de razonamiento llevados a cabo a lo largo de la historia.

   Describa brevemente cómo las contribuciones de Zenón, de Euclides, Galileo, Fermat, Newton, Leibniz y Cauchy fueron fundamentales para la construcción del Cálculo diferencial y **explique** ¿Cómo estos aportes limitaron o facilitaron el desarrollo de su propio aprendizaje? **Justifique** su respuesta.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

Apéndice E. Rediseño del Taller 1: Explorando los cimientos del cálculo

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ______________________ **Grado** ________ **Fecha** __________

TALLER 1: EXPLORANDO LOS CIMIENTOS DEL CÁLCULO

Jóvenes aspirantes a las maravillas del cálculo. Ustedes han sido escogidos para resolver los problemas históricos más importantes del cálculo diferencial, de modo que, conocerán grandes matemáticos como Galileo, Fermat, Newton, Leibniz, Cauchy, entre otros que les ayudarán en esta travesía. En este primer taller enfrentarán los más temidos obstáculos cognitivos y fortalecerán sus habilidades matemáticas. En el segundo taller, aprenderán a utilizar el cálculo infinitesimal para construir la principal estrategia, *la derivada*, para resolver los principales problemas de la época milenaria que dieron origen al cálculo.

Competencias matemáticas del primer taller

Cognitivas	*Procedimentales*	*Actitudinales*
Comprende y argumenta los fundamentos conceptuales y teóricos de los objetos básicos del Cálculo (concepto de función, noción de límite y números reales) en contextos matemáticos y no matemáticos.	Determina razones de cambio, establece su relación con la pendiente de una recta y utiliza técnicas de aproximación para resolver problemas de cambio y variación.	Participa activamente en discusiones grupales, escuchando y aportando ideas, y juzga la pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto.

Actividad #1. El concepto de función

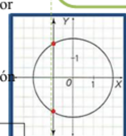
Indicador de logro:	**Sí**	**No**
Comprende la función como la generalización de la relación de interdependencia entre magnitudes variables al identificar cómo una variable se relaciona con otra		
Identifica y construye funciones básicas desde diferentes representaciones.		
Participa activamente discutiendo en clase sobre el análisis realizado frente al estudio de las funciones básicas del cálculo		

Saberes Previos

1. ¿Quién fue René Descartes ? ¿Cuáles fueron sus mayores aportes a la matemática ?

Biografía de Descartes: https://youtu.be/Ul2XKi_fVLU?si=5yM1HwOf7X60pLLC

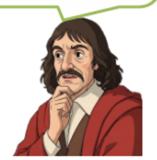
2. La gráfica de la expresión $x^2 + y^2 = 4$ es cortada por la recta vertical $x = -1$ (Ver figura) en dos puntos distintos. ¿Esta gráfica representa una función ?



3. Represента en su forma gráfica y algebraica la función que corresponde a la siguiente tabla de valores :

x	…	-2	-1	0	0.5	1	2	10	…
y	…	4	1	0	0.25	1	4	100	…

Soy René Descartes (1596–1650) un filósofo, matemático y científico francés. Serví como militar y mi gran aporte fue la geometría analítica



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ______________________ **Grado** ________ **Fecha** __________

Situación problemática 1.1

La Trayectoria de un Proyectil

Uno de los grandes retos de mi época era predecir la trayectoria de un proyectil de cañón. A continuación se muestran dos tipos de registros del mismo proyectil que se dispara desde una muralla de 25mt. Gráfica y determina la "ecuación" que modela la trayectoria del proyectil

A: Movimiento Horizontal	
Tiempo (t)	Distancia horizontal (x)
0	0
1	30
2	60
3	90
4	120
5	150

B: Movimiento Vertical	
Tiempo (t)	Altura (y)
0	0
1	25
2	40
3	45
4	40
5	25

Trayectoria (Distancia recorrida vs. Altura)	

Link de actividad en Geogebra: https://www.geogebra.org/m/sczfkrdh

1. **Identificar Variables :**
   a) ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente en cada tabla?
2. **Construir gráficas**
   b) Gráfica un plano cartesiano con el tiempo en el eje horizontal y la distancia x en el eje vertical. Ubica los puntos de la tabla A. ¿Qué tipo de gráfica obtienes?
   c) Dibuja un plano cartesiano con el tiempo en el eje horizontal y la altura y en el eje vertical. Ubica los puntos de la tabla B.
3. **Encontrar relación funcional**
   d) Encuentra la expresión algebraica que relaciona la distancia horizontal x en función del tiempo t. Es decir, de la forma $x(t) =$
   e) Encuentra la expresión algebraica que relaciona la altura x en función del tiempo t. Es decir, de la forma $y(t) =$
   f) Completa la tabla C, gráfica en un plano cartesiano la trayectoria del proyectil y encuentra la ecuación algebraica
4. **Análisis**
   g) ¿En qué segundo impacta contra el suelo?
   h) ¿En qué segundo alcanza el proyectil su altura máxima? ¿Cuál es esa altura?
5. **Conclusión**
   i) ¿Qué es una función en matemáticas?
6. **Autoevaluación:** ¿Qué aprendí de esta actividad? ¿Qué dudas y dificultades aún persisten? ¿Qué voy a hacer para fortalecer mi comprensión y participación?
   Discute tus respuestas con tus compañeros y profesor
   Escribe las conclusiones en tu hoja de trabajo

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ______________________________________ **Grado** ___________ **Fecha** ______________

Actividad #2. El concepto de razón de cambio

Indicador de logro:	**Si**	**No**
Comprende la razón de cambio al identificar y explicar cómo una variable varía en relación con otra, lo que constituye la base para analizar diferentes situaciones matemáticas y físicas		
Determina razones de cambio de funciones básicas en sus distintas representaciones en el contexto cinemático.		
Participa activamente en el trabajo colaborativo, discutiendo el análisis realizado frente a las razones de cambio, enriqueciendo el trabajo colectivo.		

Saberes Previos

1. ¿Quién fue Galileo Galilei? ¿Cuáles fueron sus mayores descubrimientos?

Biografía de Galileo:
https://youtu.be/LrlaDipIwnc?si=89DQmc-6_ReUvvMt

1. ¿Qué aportes hizo a la Física?
2. ¿De qué magnitud variable depende la distancia recorrida por un objeto que se mueve en una sola dirección durante un periodo determinado?
3. ¿Cuál es la relación entre la distancia recorrida y el tiempo que se toma una pelota en rodar sobre una superficie plana?

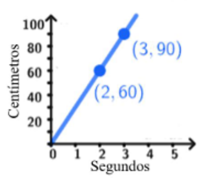
Soy Galileo Galilei (1564 - 1642), el padre del método científico, realicé importantes contribuciones en la astronomía, la física y la matemática.

Situación problemática 2.1

Descubriendo razones de cambio con el experimento de Galileo

En uno de mis experimentos hice rodar cuatro bolas a diferentes velocidades sobre una superficie horizontal con poca fricción. Y usé diferentes representaciones para registrar la distancia y el tiempo de cada pelota, como se muestra a continuación.

Pelota A



Pelota B

Segundos	centímetros
4	220
12	660
14	770

Pelota C

La distancia recorrida de la pelota esta dada por la función : $f(t) = 25t$,donde t es el tiempo

Pelota D

Esta pelota rueda 225 centímetros en 4.5 segundos

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ______________________________________ **Grado** ___________ **Fecha** ______________

Responde las siguientes preguntas en equipo, según las indicaciones del docente, y escribe tus procedimientos en la hoja de trabajo:

1. Variable

a) Identifica la variable independiente y la variable dependiente. **Explica** tu respuesta
b) ¿Qué valores puede tomar cada una? ¿**Por qué**?

2. Razón de cambio

c) Completa la siguiente tabla para cada pelota (hasta 3 s).

Pelota A		Pelota B		Pelota C		Pelota D	
Tiempo	Centímetros	Tiempo	Centímetros	Tiempo	Centímetros	Tiempo	Centímetros
1		1		1		1	
2		2		2		2	
3		3		3		3	

d) **Calcula** ¿Cuántos centímetros avanza cada pelota en cada segundo ? **Explica** tu respuesta

3. Comparación

e) ¿Cuál pelota es la más rápida y cuál la más lenta ? Justifica tu respuesta.

4. Gráfica y pendiente

f) Elabora la gráfica de la pelota más rápida y de la más lenta (posición vs. Tiempo).
g) Calcula la pendiente de cada recta. ¿Qué representa esa pendiente en el contexto?
h) Representa algebraicamente la interdependencia entre la distancia recorrida y el tiempo ¿Cómo se llama esa relación de interdependencia ?

5. Conclusión

i) ¿Qué relación existe entre la función, la razón de cambio y la pendiente de la gráfica? Explica con tus palabras.

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y profesor.
Escribe tus conclusiones en tu hoja de trabajo.

Actividad de Aprendizaje

Juego : Aplica lo aprendido para determinar y comparar razones de cambio en una carrera automovilística. Para ello, ingresa al siguiente Link de actividad en GeoGebra: https://www.geogebra.org/classroom/hdcvqpgc

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

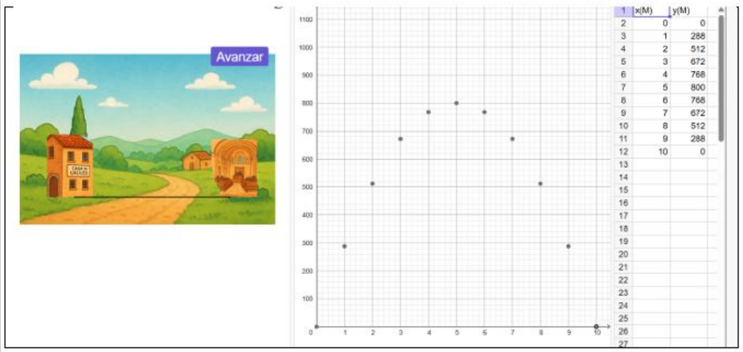
Nombre ____ **Grado** ____________ **Fecha** ______________

Situación problemática 2.1

Siguiendo las huellas de Galileo en Pisa: Un análisis gráfico del movimiento

Recuerdo que a diario, caminaba desde mi casa hacia el Aula Magna de Historia con el propósito de impartir lecciones a mis discípulos. Durante el recorrido, registré mis posiciones en función del tiempo, y comencé a reflexionar sobre cómo calcular "qué tan rápido" caminaba en distintos intervalos.

Ingresa al link de Geogebra: https://www.geogebra.org/m/qe9qung9



Responde las preguntas:

1. Variable

a) Identifica la variable independiente y la variable dependiente. Explica tu respuesta
b) ¿Qué valores puede tomar cada una? ¿Por qué?
c) ¿Qué relación hay entre la posición y el tiempo? Explica

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ____ **Grado** ____________ **Fecha** ______________

2. Razón de cambio

d) Calcula la velocidad promedio de Galileo los intervalos definidos

Velocidad media Intervalos	$\boldsymbol{\Delta p = p(t_f) - p(t_i)}$	$\boldsymbol{\Delta t = t_f - t_i}$	$\boldsymbol{\frac{\Delta p}{\Delta t} = p(t_f) - p(t_i)}$	Signo	Interpretación de $\frac{\Delta p}{\Delta t}$	Tipo de variación
$0 \leq t \leq 2$	$512 - 0 = 512\,m$	$2 - 0 = 2\,min$	$\frac{512}{2} = 256\frac{m}{min}$	Positivo $(+)$	Avanzó 256mt en cada min en promedio	Crece a razón de $256\frac{m}{min}$ en promedio
$2 \leq t \leq 4$						
$4 \leq t \leq 5$						
$5 \leq t \leq 6$					Retrocedió …	Decrece a razón de …
$6 \leq t \leq 8$						
$8 \leq t \leq 10$						

e) ¿En qué tramo camino más rápido?
f) ¿Qué significa "velocidad promedio" en este contexto?

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ____ **Grado** ____________ **Fecha** ______________

3. Gráfica y pendiente

g) Dibuja sobre la gráfica de la posición de Galileo y calcula la pendiente de la recta que pasa por las parejas de puntos:

Velocidad promedio Intervalos	$\boldsymbol{\Delta y = y_2 - y_1}$	$\boldsymbol{\Delta x = t_f - t_i}$	$\boldsymbol{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$	Signo	Interpretación de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Tipo de variación
(0,0) y (2, 512)	$512 - 0 = 512\,m$	$2 - 0 = 2\,min$	$\frac{512}{2} = 256\frac{m}{min}$	Positivo (+)	Avanzó 256mt en cada min en promedio	Crece a razón de $256\frac{m}{min}$ en promedio
(2,512) y (4, 768)						
(4,768) y (5, 800)						
(5,800) y (6, 768)					Retrocedió …	Decrece a razón de …
(6, 768) y (8, 512)						
(8, 512) y (10, 0)						

4. Conclusiones

Explica con tus palabras: ¿qué relación existe entre la función, la razón de cambio y la pendiente de la gráfica

5. Autoevaluación: ¿Qué aprendí de esta actividad? ¿Qué dudas y dificultades aún persisten? ¿Qué voy a hacer para fortalecer mi comprensión y participación

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en tu hoja de trabajo.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

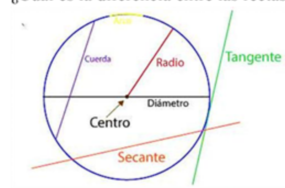
Nombre ____ **Grado** ____________ **Fecha** ______________

Actividad #3. Estudio de Rectas Tangentes y Secantes

Indicador de logro:	**Si**	**No**
Identificar la recta tangente a una curva como aquella que pasa por un punto específico y comparte la misma dirección e inclinación que la curva en ese punto.		
Utiliza aproximaciones geométricas y cálculos aritméticos, combinando el análisis de rectas secantes y el cálculo de razones de cambio para establecer vínculos entre las rectas tangentes y el comportamiento de la función.		
Argumenta con justificaciones geométricas y variacionales sus conjeturas relacionadas al estudio de rectas tangentes y secantes		

Saberes Previos

1. ¿Quién fue Euclides? ¿Cuál fue su principal obra?
   Biografia de Euclides : https://youtu.be/sM3qGIyylDc?si=hbq5tThPewhFIV0w
2. ¿Cómo Euclides definió una recta tangente a un círculo?
3. ¿Cuál es la diferencia entre las rectas secante y tangente ?



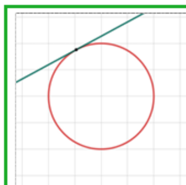
Soy Euclides (siglo IV a.c.) conocido como el padre de la geometría por mi majestuosa obra conocida como los "Elementos"

4. Una piedra en el extremo de una cuerda se hace girar, formando un círculo. Si se rompe la cuerda. ¿en qué dirección sale disparada la piedra?

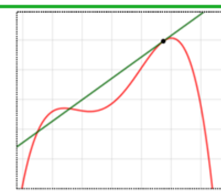
Situación problematica 4.1

Explorando conceptos de recta tangente a una curva

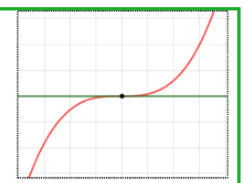
Las siguientes curvas representan diferentes caminos que he tomado. En cada una he señalado un punto donde me he detenido, y por tal punto he colocado una pequeña línea recta que coincide en dirección con la curva en dicho lugar ¿cuáles de estas líneas rectas pueden ser llamadas tangentes? **Explica** tu respuesta



Camino 1



Camino 2



Camino 3

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ____ **Grado** ____________ **Fecha** ______________

1. Actividad vivencial
En grupo con tus compañeros de salón, realiza la siguiente actividad:
Colocan una cuerda sobre el piso de cualquier forma (cuerda mínima de 5 metros), deben caminar sobre ella y colocar una flecha larga (hecha en cartulina) en diferentes puntos cualesquiera con la condición de que debe coincidir con la dirección de la curva en cada uno de esos lugares.
Cada vez que ubiquen una flecha se pregunta: ¿En ese punto la recta es tangente? ¿la recta toca localmente en ese punto? ¿la recta comparte la misma dirección de la curva?

Para los más interesados ¿en qué punto la recta es tangente y al mismo tiempo corta la curva? Y ¿Qué condiciones deben cumplirse para que la recta sea tangente?

2. Exploración tecnológica
Accede al applet de GeoGebra y responde las preguntas en el siguiente enlace:
https://www.geogebra.org/m/jfswcbpu#material/j5gw4jcv

Responde las siguientes preguntas de acuerdo con las gráficas de Euclides:

a) ¿Cuáles gráficas cumplen que las rectas tocan localmente en un punto a la curva? **Explica** tu respuesta
b) ¿Cuáles gráficas cumplen que las rectas tangentes comparten la misma dirección de la curva? **Explica** tu respuesta
c) ¿**Por qué** la definición de Euclides no es suficiente para una curva general?

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ____ **Grado** ____________ **Fecha** ______________

Situación problematica 4.2

Aproximaciones entre rectas secantes y el cálculo de razones de cambio

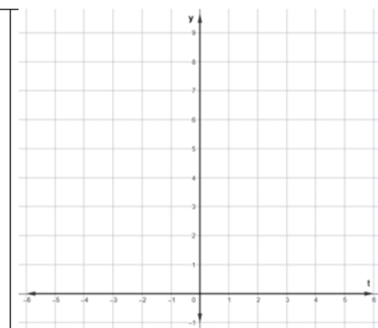
He dibujado la curva $y = x^2$ en el plano cartesiano y deseo trazar la recta tangente en el punto (2,4). Sin embargo, me preguntó: ¿Cómo construir la línea recta qué mejor se aproxima a la curva al punto (2,4)? Para ello, encontré dos formas aparentemente diferentes de resolver este problema, que esconden una relación muy íntima. ¡Descúbrela!

1ra Forma: Geométrica

Consiste en unir el punto (2,4) con otros puntos muy cercanos y se da cuenta que obtiene una recta secante que se aproxima cada vez más a la recta tangente. Sigue las indicaciones que aparecen a continuación:

Indicaciones

1. Gráfica $y = x^2$
2. Trace la recta que une los puntos (2, 4) y (3, 9) en la gráfica y calculen su pendiente.
3. Trace la recta que une los puntos (2, 4) y (2.5, 6.25) en la gráfica y calcula su pendiente
4. Repite el proceso con (2,4) y (2.1, 4.41)
5. Observa a qué valor tienden las pendientes de las secantes, estima la pendiente de la tangente y dibuja la recta tangente en la gráfica usando otro color.



Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ____ **Grado** ____________ **Fecha** ______________

2da Forma: Razón de cambio

El procedimiento implica calcular las velocidades promedio en intervalos progresivamente más reducidos a medida que se aproximan al valor 2. Sigue las indicaciones de a continuación:

	Aproximación por izquierda		Valor aproximado			Aproximación por Derecha		
Intervalos $t_i \leq t \leq t_f$	$1{,}9 \leq t \leq 2$	$1{,}99 \leq t \leq 2$	→→→	t=2	←←←	$2 \leq t \leq 2{,}01$	$2 \leq t \leq 2{,}1$	$2 \leq t \leq 3$
Distancia recorrida $\Delta p = p(t_f) - p(t_i)$			→→→		←←←			
Tiempo trancurrido $\Delta t = t_f - t_i$			→→→		←←←			
Velocidad media $\frac{\Delta p}{\Delta t}$			→→→		←←←			

Observa la velocidad media $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ a la que se acercan cada vez que se toman valores más cercanos a t=2. ¿Cuál es este valor? ¿Se parece al valor de la pendiente de la tangente?

Conclusiones
¿Explica cuál es la relación estrecha entre la pendiente de la recta tangente y la velocidad instantánea?

Autoevaluación: ¿Qué aprendí de esta actividad? ¿Qué dudas y dificultades aún persisten? ¿Qué voy a hacer para fortalecer mi comprensión y participación

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

Apéndice F. Rediseño del Taller 2: Aproximación histórica al concepto de derivada

Nombre ____ **Grado** ____________ **Fecha** ______________

TALLER 2: APROXIMACIÓN HISTÓRICA AL CONCEPTO DE DERIVADA

En este segundo taller, aprenderán a utilizar el cálculo infinitesimal para construir la principal estrategia, *la derivada*, con el fin de abordar los principales problemas de la época milenaria que dieron origen al Cálculo: La pendiente de la recta tangente y la velocidad instantánea.

Competencias matemáticas del segundo taller

Cognitivas	*Procedimentales*	*Actitudinales*
Comprende la noción de derivada como el límite del cociente incremental a través del estudio de episodios históricos que originaron este concepto	Emplea técnicas y métodos derivados del cálculo infinitesimal para resolver situaciones en las que es necesario calcular la pendiente de la recta tangente y/o la velocidad instantánea.	Manifiesta curiosidad por la historia y el método detrás de las soluciones matemáticas de los problemas históricos del cálculo, mientras cultiva la persistencia y valora el error como un motor de la evolución matemática

Actividad #1. La noción de limite

Indicador de logro:	**Si**	**No**
Diferencia las dos formas de interpretación del infinito, aquellas situaciones de procesos de aproximación infinitos (infinito potencial) de las situaciones límite entendida como la culminación del proceso infinito (infinito actual)		
Utiliza técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos con precisión		
Valora el error como un motor de la evolución matemática.		

Saberes Previos

1. ¿Quién fue Zenón de Elea? ¿Por qué se hizo famoso?

Biografía de Zenón:
https://youtu.be/0AIaZbO7UW8?si=dzfYhdKhgPhsEqTK

2. Toma una calculadora y divide secuencialmente a 1 entre 2, 3, 4, 5 y 6. ¿Qué ocurre con los cocientes a medida que el divisor se hace mayor?

Soy Zenón (siglo V a.c.) un filósofo y matemático griego, conocido por mis paradojas. Hoy te presento la paradoja de Aquiles y la Tortuga.

Situación problemática 1.1

La carrera más antigua sin resolver: Aquiles y la tortuga

En una carrera, Aquiles le da una ventaja de 1km a una tortuga. Mientras Aquiles corre para alcanzar a la tortuga, cuando llega al punto donde estaba la tortuga, ésta ya ha avanzado la mitad del recorrido anterior, es decir, ½ km más. Cuando Aquiles llega a ese nuevo punto, la tortuga nuevamente habrá avanzado la mitad del recorrido previo (¼ km), y así sucesivamente. La paradoja plantea que Aquiles nunca podrá alcanzar a la tortuga, ya que siempre habrá una distancia cada vez más pequeña, entre ellos.

Halla la distancia total que recorre Aquiles para alcanzar la tortuga.
Justifica tus respuestas.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ____ **Grado** ____________ **Fecha** ______________

Responde las siguientes preguntas en tu hoja de trabajo:
Ingresa a Geogebra: https://www.geogebra.org/m/gbtcdgka

a) Si la distancia entre Aquiles y la tortuga se reduce a la mitad en cada paso (1 km, ½ km, ¼ km, ...) **Expresa** el término general de la sucesión y **Justifica** tu respuesta.

Aquiles	
Avance	**Distancia**
1	
2	
3	
4	
...	
n	

Tortuga	
Avance	**Distancia**
1	
2	
3	
4	
...	
n	

¿A qué valor se aproximan los términos a medida que Aquiles avanza hacia la tortuga?

b) Si sumamos todos los intervalos de distancia (1 + ½ + ¼ + ⅛ + ...) ¿Cuál es la distancia recorrida por Aquiles cuando haya avanzado tres veces? ¿Cuatro veces? ¿cinco veces? ¿A qué valor se aproxima esta suma? **Expresa** en forma general la serie geométrica y **Justifica** tu respuesta

c) Si la tortuga tiene una ventaja inicial y Aquiles se aproxima cada vez más ¿en qué momento exacto Aquiles la alcanza? **Justifica** tu respuesta

d) ¿En la realidad, un corredor alcanza a otro, aunque haya infinitos intervalos en la distancia o el tiempo que dura su recorrido? **Explica** tu respuesta

Conclusión
¿Cuál es la forma adecuada de interpretar el concepto de límite?

Autoevaluación: ¿Qué aprendí de esta actividad? ¿Qué dudas y dificultades aún persisten? ¿Qué voy a hacer para fortalecer mi comprensión y participación?

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ____ **Grado** ____________ **Fecha** ______________

Actividad #2. El problema de los máximos y mínimos

Indicador de logro:	**Si**	**No**
Interpreta los infinitesimales como una cantidad variable que se puede aproximar indefinidamente a cero, pero no ser igual a cero.		
Plantea y ejecuta métodos para determinar puntos máximos o mínimos mediante el estudio de la variación, la tendencia y razones de cambio alrededor de estos puntos.		
Desarrolla una actitud de paciencia y persistencia ante problemas que no se resuelven de inmediato.		

Saberes Previos

1. ¿Quién fue Pierre de Fermat? ¿Cuál fue su último teorema, que lo hizo tan famoso?
2. Biografía de Fermat: https://youtu.be/X1B374I3lJI?si=_CZ1vHNQWOPBLQRn
3. Se lanza una pelota al aire. ¿Qué ocurre con la variación alrededor de los puntos máximos?
4. El lanzamiento de una pelota describe el siguiente movimiento parabólico, $f(x) = -x^2 + 4x$, considerando x la distancia desde su lanzamiento, **Determina** la altura máxima de la pelota.
5. ¿Cuál es el número real, que sigue del número 2?

Soy el abogado Pierre de Fermat (1601 - 1665), un aficionado a las matemáticas, tanto así, que realicé muchas contribuciones a la misma. En particular te voy a presentar mi método para hallar máximos y mínimos en la geometría analítica.

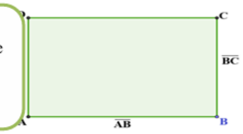
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ____ **Grado** ____________ **Fecha** ______________

Situación problemática 2.1

El rectángulo de mayor área

El perímetro de un rectángulo es de 14 metros. Encuentra las dimensiones de este cuadrilátero, para que su área sea la máxima posible. **Explica** y **justifica** tu respuesta.



Abre el archivo de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/xdacau3t

Ingresa a la actividad correspondiente y mueve el punto B y responde:

1. **Variables**
   a) ¿Qué magnitudes varían? ¿Cuáles no varían? Y ¿De qué magnitud o magnitudes variables depende el área del rectángulo? ¿**Por qué**?
   b) ¿Qué valores puede tomar la base y la altura? ¿**Por qué**?
2. **Función**
   c) ¿Cuál es la relación entre la base y la altura? Explica tu respuesta
   d) Sí la base del rectángulo se llama x, ¿cómo puedes expresar la altura en términos de x usando la relación encontrada?
   e) Expresa algebraicamente el área del rectángulo únicamente en función de la base x. **Justifica**
   A(x)=
3. **Visualización del Máximo**
   f) Completa la tabla:

Tiempo (s)	0	1	2	3	…	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	…	4	5	6	7
Área (m)															

¿Entre qué valores el área cambia de subir a bajar?

   g) Realiza el gráfico en un plano cartesiano
   ¿Qué valor toma la base x para que el área sea máxima? **Justifica**

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ________________________ **Grado** __________ **Fecha** ____________

Situación problemática 2.1

El método de Fermat para hallar máximos y mínimos

Si en el siglo XVII, no se conocía fórmulas de vértices ¿Cómo Fermat hallaba puntos máximos y mínimo para cualquier curva cuya ecuación algebraica fuese conocida?
Halla el punto máximo de la curva $y = -\boldsymbol{x}^3 + 9x$, donde $0 \leq x \leq 3$ sin usar formulas.

Prestad atención cómo Fermat halla el punto máximo, en la siguiente historieta:

Mi método funciona para cualquier otra curva cuya ecuación sea "simple", te la voy a explicar con un ejemplo sencillo, sea $f(x) = -x^3 + 9x$.

Alrededor del punto más alto (o más bajo) de la curva, si nos movemos una cantidad muy pequeña, que llamaré E. Es decir,
x se movió a $x + E$
f (x) se movió a $f(x + E)$
Entonces la altura debería permanecer casi igual.
Es decir, $f(x) \approx f(x + E)$.

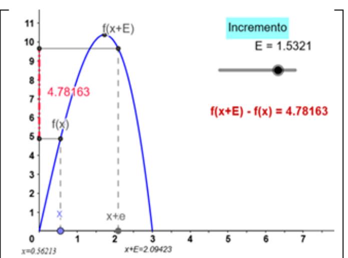
Primer análisis del comportamiento f(x)

Lee atentamente las ideas de Fermat, luego lee las instrucciones y aplícalas en el applet:
Enlace: https://www.geogebra.org/m/eakjhkpf
En GeoGebra se muestra la curva $= -x^3 + 9x$, sigue cuidadosamente las instrucciones:

a) Primero, **mueve el punto "x"** y observa las diferencias entre las imágenes $f(x + E) - f(x)$ a medida que te mueves entre $0 \leq x \leq 3$.
b) Segundo, haz E→ 0

c) Tercero, repite el proceso (ítem a) hasta que E sea muy pequeño.

Finalmente, Sí E es muy pequeño ¿en qué lugar de la curva $f(x + E) - f(x)$ toma los valores más pequeños?



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ________________________ **Grado** __________ **Fecha** ____________

Segundo análisis del comportamiento de la función f(x)

Como $f(x) = -x^3 + 9x$,
entonces, se reemplaza la "x" por "x+E".
Así, $f(x + E) = -(x + E)^3 + 9(x + E)$,
se expande en binomio cubico
$= -(x^3 + 3x^2E + 3xE^2 + E^3) + 9x + 9E$,
se cambian los signos
$f(x + E) = -x^3 - 3x^2E - 3xE^2 - E^3 + 9x + 9E$

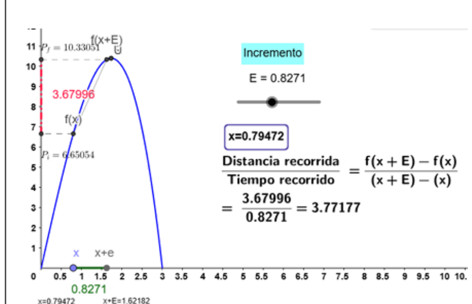
Resolviendo $f(x + E) - f(x)$,
$= (-x^3 - 3x^2E - 3xE^2 - E^3 + 9x + 9E) - (-x^3 + 9x)$. Se restan términos
$= (\cancel{-x^3} - 3x^2E - 3xE^2 - E^3 \cancel{+9x} + 9E) - (\cancel{-x^3 + 9x})$, por tanto
$f(x + E) - f(x) = 3x^2E - 3xE^2 - E^3 + 9E$

Como E no es cero, se puede dividir por E, entonces,
$$\frac{f(x + E) - f(x)}{E} \approx 0$$

Lee atentamente las ideas de Fermat, luego lee las instrucciones y aplícalas en el applet:
Enlace: https://www.geogebra.org/m/eakjhkpf
En Geogebra se muestra la curva $= -x^3 + 9x$, sigue cuidadosamente las instrucciones:

a) Primero, **mueve el punto "x"** y observa el valor de las velocidades medias $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+E) - f(x)}{(x+E) - E}$ a medida que te mueves entre $0 \leq x \leq 3$.
b) Segundo, ubica x en el máximo y observa la velocidad promedio de $x \leq t \leq x + E$
c) Tercero haz $\boldsymbol{E} \to \mathbf{0}$

¿Si E es muy pequeño, a qué tiende la velocidad media $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, cuando x está en el máximo?



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ________________________ **Grado** __________ **Fecha** ____________

Tercer análisis del comportamiento f(x)

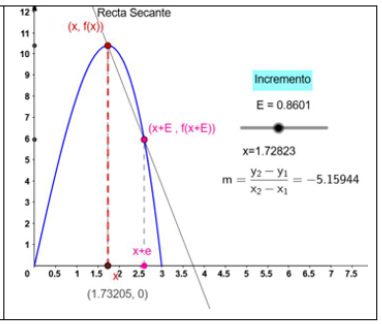
Por lo tanto, $\frac{3x^2E-3xE^2-E^3+9E}{E} \approx 0$, se simplifica E, y queda $= 3x^2 - 3xE - E^2 + 9$. Es decir, $3x^2 - 3xE - E^2 + 9 \approx 0$

Como E es un infinitesimal, tan pequeño, entonces se suprimen todos los términos que contengan E. Es decir, $3x^2 - 3xE - E^2 + 9 \approx 0$, quedaría $3x^2 + 9 = 0$. Resolviendo la ecuación, el punto máximo está en $x = \sqrt{3} \approx 1.73$.

Lee atentamente las ideas de Fermat, luego lee las instrucciones y aplícalas en el applet:
Enlace: https://www.geogebra.org/m/eakjhkpf
En Geogebra se muestra la curva $= -x^3 + 9x$, sigue cuidadosamente las instrucciones:

1. Primero, observa que la recta secante pase por dos puntos $A(x, f(x))$ y $B(x+E, f(x+E))$.
2. Segundo, ubica a x en el máximo,
3. Haz que E→0,

Finalmente, en el límite, cuando E→0, ¿qué ocurre con la pendiente de la recta secante sí x está en el máximo?



Conclusiones

a) ¿Qué es un incremento infinitesimal?
b) ¿Qué significa $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$, donde E es un incremento infinitesimal?
c) ¿Qué significa que $\frac{f(x+E)-f(x)}{E} = 0$, cuando E tiende a cero?

Autoevaluación: ¿Qué aprendí de esta actividad? ¿Qué dudas y dificultades aún persisten? ¿Qué voy a hacer para fortalecer mi comprensión y participación?

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ________________________ **Grado** __________ **Fecha** ____________

Actividad #3.: El límite del cociente incremental

Indicador de logro:	**Si**	**No**
Interpreta la noción de derivada como razón de cambio instantánea y establece su relación con la recta tangente a una curva		
Determina razones de cambio instantáneas en problemas que involucran la derivada		
Es curioso por la historia y el método detrás de las soluciones matemáticas.		

Saberes Previos

1. ¿Quién fue Isaac Newton? ¿cuáles fueron sus mayores descubrimientos?
2. ¿Quién fue Gottfried Leibniz? ¿cuáles fueron sus mayores descubrimientos?

El cálculo de Newton y Leibniz: https://youtu.be/FHLsTqxW9uc?si=WwSNMvK7SHSi0mxd

3. ¿Se puede saber a qué velocidad va un ciclista en una foto tomada en un instante de tiempo?
4. Lanza un objeto hacia arriba, ¿Cómo cambia la velocidad en cada instante? ¿es constante? ¿Si o no por qué?

Soy Newton, un físico, matemático y astrónomo fui clave en la revolución científica. Si he llegado lejos, es porque me subí sobre hombros de gigantes

Soy Leibniz, un filósofo matemático desarrolle el cálculo de manera independiente al igual que Newton

Situación problemática 3.1

Problema del lanzamiento vertical

Al analizar el lanzamiento vertical de una pelota, observé que la velocidad llega a un punto donde se detiene por un instante y vuelve a bajar. Así que me surgió la pregunta ¿Cómo hallar la velocidad de la pelota en cualquier instante de tiempo? Así que para estudiar este fenómeno realicé un experimento de lanzamiento vertical, donde registré la posición en metros durante un periodo de 2 segundos y encontré que la función que modela la altura de una pelota es $P(t) = -5x^2 + 10x$. ¿cuánto es la velocidad para el instante $t = 0.5s$?

Primera Parte: Comprensión del Problema del lanzamiento vertical

1.Abre el archivo de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/vc2yzjpv y responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las variables relevantes en este problema de lanzamiento vertical? **Explica** tu respuesta.
b) ¿Cómo se relaciona la altura del objeto con el tiempo transcurrido? **Expresa** la altura en función del tiempo. **Explica** tu respuesta
c) ¿A qué altura se encuentra la pelota en los instantes, $t = 0.5s$, $x = 1s$ y $x = 1.5s$? **Justifica** tu respuesta
d) ¿Cuáles intervalos de tiempo la variación de la función fue creciente? ¿la variación fue cero? ¿fue decreciente? **Explica** tu respuesta

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ____ **Grado** ____________ **Fecha** ______________

Segunda Parte: Aproximación a la razón de cambio instantánea

1. ¿Se puede calcular la velocidad en el instante $t = 0.5s$ con la fórmula de la velocidad media? ¿Y si consideras otro punto muy cerca de 05 se podría aproximar? **Justifica**

2. Halla la velocidad media más aproximada para el instante en $t = 0.5s$. Para ello, toma incrementos cada vez más pequeños. ¡completa la tabla!

T $_{\text{inicial}}$	Incremento	T $_{\text{Final}}$	Intervalos $t_i \leq t \leq t_f$	Tiempo transcurrido $\Delta t = t_f - t_i$	Distancia recorrida $\Delta p = p(t_f) - p(t_i)$	Velocidad media $\frac{\Delta p}{\Delta t}$
t_i=0.5	$\Delta x = 1$	$t_f = 0.5 + 1 = 1.5$	$0.5 \leq t \leq 3$			
t_i=0.5	$\Delta x = 0.5$	$t_f = 0.5 + 0.5 = 1$	$0.5 \leq t \leq 2.5$			
t_i=0.5	$\Delta x = 0.25$	$t_f = 0.5 + 0.25 = 0.75$	$0.5 \leq t \leq 2.25$			
t_i=0.5	$\Delta x = 0.125$	$t_f = 0.5 +$	$0.5 \leq t \leq$			
t_i=0.5	$\Delta x =$	$t_{f=}$				
t_i=0.5	$\Delta x =$					
t_i=0.5	…					

a) Si el incremento Δx fuese un incremento infinitamente pequeño. ¿Qué se puede decir de la velocidad en $t = 0.5$? **Explica** tu respuesta.
b) En el límite de $\Delta x \to 0$, ¿cómo se podría escribir la expresión matemática qué halla la velocidad instantánea, $\frac{\Delta p}{\Delta t}$?

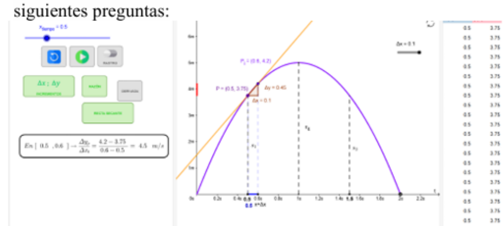
T $_{\text{inicial}}$	Incremento	T $_{\text{Final}}$	$t_i \leq t \leq t_f$	$\Delta t = t_f - t_i$	$\Delta p = p(t_f) - p(t_i)$	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$
t_i=0.5	$\Delta x \to 0$	$t_f = 0.5 + \Delta x$	$0.5 \leq t \leq 0.5 + \Delta x$			

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

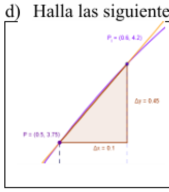
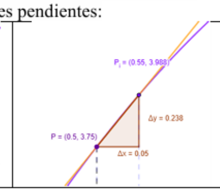
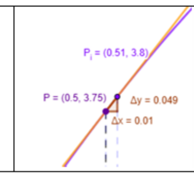
Nombre ____ **Grado** ____________ **Fecha** ______________

Tercera Parte: Aproximación a la pendiente de la recta tangente

3. Abre el archivo de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/efrr8yru y responde las siguientes preguntas:



a) Activa la opción *incrementos*, la opción *razón* y la opción *recta secante*, ¿Qué se observa sobre la gráfica en $x = 0.5$? ¿Qué relación tiene *la recta secante* con la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?
b) Aumenta el incremento a $\Delta x = 0.1$¿Cuál es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos (0.5 , 3.75) y (0.6, 4.3? **Explica** tu respuesta.
c) Activa la opción *recta secante*, Haz $\Delta x \to 0$, ¿Qué sucede con la recta secante a medida que el segundo punto de intersección P_i se acerca al punto P?¿A qué se asemeja esta recta en el límite? **Explica** tu respuesta.
d) Halla las siguientes pendientes:

			¿A qué se aproxima la pendiente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

e) ¿Cómo se relaciona la velocidad instantánea del objeto en un momento dado con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la altura en función del tiempo en ese mismo instante? **Explica** tu respuesta.

f) Activas la opción *derivada* y haz zoom hasta observar el triángulo característico ¿Cómo podemos **expresar** y **calcular** matemáticamente la *velocidad instantánea* del objeto en el tiempo $x = 0.5$? ¿reconoces alguna estructura matemática familiar en esta expresión?
Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

Nombre ________________________________ **Grado** __________ **Fecha** ____________

Situación problemática 3.2

Explorando el cociente infinitesimal

Observa el ejemplo de Newton y Leibniz para calcular la velocidad instantánea en el primer segundo de un objeto en movimiento. La posición (en metros) del objeto esta dado por $P(t) = t^2$, donde t es el tiempo.

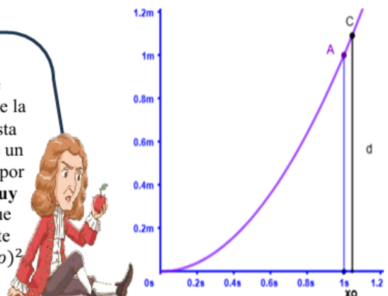
Abre el archivo de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/g4d633wc sigue las instrucciones y responde las preguntas:

1^er^ Análisis: Razón de cambio

- **Primer paso:** Activa las opciones Razón RAZÓN y recta secante RECTA SECANTE, ubícate en $t = 1s$. Dale un valor pequeño a Δt.
- **Segundo paso:** Observa que le sucede a la razón de cambio, es decir, $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ cuando $\Delta x \to 0$, ¿A qué tiende $\frac{\Delta p}{\Delta t}$? ¿A qué velocidad se mueve el objeto aproximadamente en $x = 1s$?

Sugerencia: Hacer zoom en Geogebra y repetir el proceso anterior. Y lee el siguiente fragmento de Newton

Para determinar la razón de cambio instantánea en $x = 1$ de la curva $y = x^2$, dejemos que esta ordenada se mueva a través de un espacio indefinidamente dado por **un incremento de tiempo muy pequeño distinto de cero** que será una cantidad evanescente "o". Es decir, hasta $y = (x + o)^2$



De acuerdo con el texto de Newton ¿A qué hace referencia el incremento evanescente "o" que mencionó Newton? ¿Es un incremento infinitesimal? **Explica** tu respuesta

Discute los resultados obtenidos con tus compañeros y tu profesor.
Escribe tus conclusiones en la hoja de trabajo.

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Enseñanza y Aprendizaje de la derivada desde la historia y la epistemología

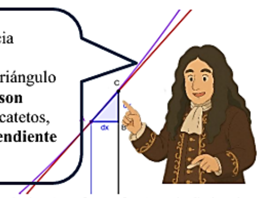
Nombre ________________________________ **Grado** __________ **Fecha** ____________

2^do^ Análisis: Recta tangente

- **Primer Paso:** Activa las opciones Razón RAZÓN y recta secante RECTA SECANTE, ubícate en $t = 1s$.
- **Segundo Paso:** Activa la opción Derivada DERIVADA, ¿Qué sucede con la recta secante cuando $\Delta x \to 0$?¿A qué se asemeja esta recta en el límite? **Explica** tu respuesta.
- **Sexto paso:** Hacer bastante **zoom** en Geogebra en el punto (1,1). ¿Cuándo $\Delta x \to 0$, qué sucede con la pendiente de la recta secante $\frac{\Delta p}{\Delta t}$? ¿A qué tienden?

Lee la siguiente carta de Leibniz a Newton

No se dice evanescentes, ni se escribe "o". Se dice diferencia infinitesimal y se representa con dx. Te explico, al trazar segmentos paralelos a los ejes sobre la curva, se forma un triángulo característico ABC, donde sus lados $AB = dx$ y $BC = dy$ **son cantidades infinitamente pequeñas**. Y el cociente de sus catetos, que llamaré, **el cociente diferencial permite obtener la pendiente de recta tangente a la curva.**



a) De acuerdo con Leibniz ¿Qué es triangulo característico? ¿ dy y dx Son infinitesimales? **Explica** tu respuesta

b) La pendiente de la recta secante es $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ¿ En el límite cuándo $\Delta x \to 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sigue siendo la pendiente de la recta tangente? ¿o mejor usamos $\frac{dy}{dx}$?

3^do^ Análisis: Noción de Derivada mediante el límite del cociente incremental

Primer paso: Completa la tabla:

T inicial	Incremento	T Final	$t_i \le t \le t_f$	$\Delta t = t_f - t_i$	$\Delta p = p(t_f) - p(t_i)$	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$
t_i=1	$dx \to 0$	$t_f = 1 + \mathrm{dx}$	$1 \le t \le \mathrm{dx}$			

Por lo tanto ¿Cómo podemos **expresar** y **calcular** matemáticamente la *velocidad instantánea* del objeto en el tiempo $x = 1$?

Conclusiones

¿Qué significa $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$? ¿Es lo mismo de Leibniz $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{f(x+dx) - f(x)}}{\mathrm{dx}}$ $\mathrm{dx} \to 0$?

Autoevaluación: ¿Qué aprendí de esta actividad? ¿Qué dudas y dificultades aún persisten? ¿Qué voy a hacer para fortalecer mi comprensión y participación?

Trabajo de grado: Helber Adrian Caballero Jaimes, helber2210139@correo.uis.edu.co