Pensamiento funcional en básica primaria: Generalización y sistemas de representación

Leidy Marcela Angarita Celis

Trabajo de Grado para optar al título de Magíster en Educación Matemática

Directora
Solange Roa Fuentes
Doctora en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

Dedicatoria

A la luz de mi vida, mi mamita, Luz Elena.

Cada logro en mi vida es por ella y para ella. Sin su amor y sin su apoyo incondicional nada de esto sería posible. Gracias por siempre hacerme saber que estás orgullosa de mí, te amo.

Tabla de contenido

Pág.

Lista de Tablas

Lista de Figuras

Pág.

Resumen

Título: Pensamiento funcional en básica primaria: Generalización y sistemas de representación*

Autor: Leidy Marcela Angarita Celis**

Palabras Clave: Pensamiento algebraico, Pensamiento funcional, Generalización, Sistemas de representación.

Descripción:

Esta investigación presenta los resultados obtenidos en un estudio realizado a estudiantes de educación básica primaria de los grados primero, tercero y quinto en una institución de educación pública en Colombia. Este trabajo se ubica dentro del pensamiento algebraico, específicamente en el estudio del pensamiento funcional bajo la perspectiva de la propuesta de cambio curricular *early algebra*. Se caracteriza el pensamiento funcional a partir de las acciones específicas de este tipo de pensamiento (Pineda, 2017), el tipo de generalización que evidencian los estudiantes (Rarford, 2006) y los sistemas de representación que emplean cuando abordan distintas tareas funcionales.

Los elementos teóricos que rigen esta investigación fueron seleccionados minuciosamente con base en el objetivo y pregunta de investigación. Así mismo, se definen tres fases metodológicas: (1) Observación y caracterización de los grupos; (2) Diseño de instrumentos e (3) Implementación en el aula.

El proceso de recolección de datos es guiado por la implementación de tres tareas funcionales en diversos contextos y la aplicación de entrevistas semiestructuradas. El análisis de los resultados permite obtener evidencias de desarrollo del pensamiento funcional en edades tempranas. Estos resultados indican la necesidad de trabajar este tipo de pensamiento desde la educación básica primaria. Además, brinda información sobre la manera que responden los estudiantes en los diferentes grados ante las mismas situaciones lo que permite describir de manera específica cómo se desarrolla el pensamiento funcional a lo largo de la formación básica primaria.

[*] Trabajo de Grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Educación Matemática. Directora: Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa.

Abstract

Title: Functional thinking in primary school: Generalization and representation systems[*]

Author(s): Leidy Marcela Angarita Celis [1]

Key Words: Algebraic thinking, Functional thinking, Generalization, Representation systems.

Description: This research presents the results obtained in a study carried out with elementary school students in the first, third and fifth grades in a public educational institution in Colombia. This work is located within algebraic thinking, specifically in the study of functional thinking under the perspective of the proposal of "curricular change early algebra". Functional thinking is characterized based on the specific actions of this type of thinking (Pineda, 2017), the type of generalization evidenced by students (Rarford, 2006) and the representation systems they employ when approaching different functional tasks.

The theoretical elements that govern this research were thoroughly selected based on the objective and research question. Likewise, three methodological phases were defined: (1) Observation and characterization of the groups; (2) Design of instruments; and (3) Implementation in the classroom.

The data collection process is guided by the implementation of three functional tasks in different contexts and the application of semi-structured interviews. The analysis of the results provides evidence of the development of functional thinking at early ages. These results indicate the need to work on this type of thinking from elementary school. In addition, it provides information on how students in different grades respond to the same situations, which makes it possible to describe in a specific way how functional thinking develops throughout elementary school.

[*] Bachelor Thesis

[1] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Educación Matemática. Directora: Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias con especialidad en Matemática educativa.

Introducción

Numerosos estudios sobre el pensamiento algebraico evidencian la necesidad de potenciar su desarrollo en las aulas de clase desde la educación básica primaria (Butto y Rojano, 2010; Merino et al. , 2013; Brizuela y Blanton, 2014; Cañadas y Fuentes, 2015; Bastías, 2016; Cañadas y Molina, 2016; Pinto et al. , 2021; Torres, 2022; Uicab et al. , 2022) dado que tradicionalmente se inicia su estudio en secundaria.

Contemplar la preparación de los estudiantes para el álgebra desde edades tempranas, puede mal interpretarse como una preparación enfocada en los aspectos formales que la componen. Por el contrario, lo que se busca es fomentar formas de pensar y razonar que nacen a partir del estudio de la aritmética y son fundamentales para el álgebra, así como las conexiones que se pueden establecer entre estas dos áreas. Estos puntos trasladan la atención a fomentar en los estudiantes de primaria el desarrollo de un tipo de razonamiento que les permita un uso significativo de las herramientas algebraicas (Russell et al. , 2011).

Distintos autores coinciden en que la transición de la aritmética al álgebra no se debe realizar de manera abrupta, sino que debe ser un proceso progresivo, que se vaya adquiriendo grado tras grado, sin saltos ni rupturas (Bautista et al. , 2021). Estos argumentos son abordados por Kaput (1998), que da inicio al estudio del desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Las investigaciones que se han ocupado de estudiar el problema de la incorporación del álgebra desde los primeros años escolares lo han denominado la propuesta de cambio curricular “Early algebra”. El principal objetivo de esta corriente es introducir el álgebra desde la educación primaria integrándola con los contenidos usuales en clase de matemáticas que permitan la construcción de un pensamiento algebraico. En este sentido, se estudia el álgebra como una forma de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, sin la necesidad de iniciar otra asignatura o introducir aspectos formales de ella (Vergel, 2014).

Pincheira y Alsina (2021) mencionan que a pesar de la importancia que ha adquirido el estudio del álgebra temprana, en la actualidad no se ha establecido un consenso en la literatura sobre sus características y los conocimientos que la componen. Bajo este argumento, realizan un estudio comparativo a nivel transversal de los currículos de Educación Infantil y Educación Primaria de Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile y, concluyen que en primaria es posible caracterizar el álgebra temprana a partir de: "la comprensión de distintos tipos de relaciones y de patrones, uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas, desarrollar la comprensión del cambio y del uso de variables para determinar una constante o incógnita" (Pincheira y Alsina, 2021, p. 153). El estándar de Álgebra según el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), centra su atención en la relación entre cantidades y las formas de representarlas, además incluyen el estudio de funciones y el análisis del cambio. Respecto al contexto colombiano, el Ministerio de Educación Nacional (1998), establece la introducción del pensamiento variacional en primaria, sin embargo, aún existe una gran ruptura entre lo que se propone teóricamente y lo que se implementa en la práctica (Pineda, 2017).

La investigación que aquí se reporta, se ubica en el área del desarrollo del pensamiento algebraico, en Colombia este tipo de pensamiento se entiende como el pensamiento variacional (MEN, 1998). Específicamente centramos nuestro estudio en un tipo de pensamiento algebraico enfocado en el trabajo con funciones, el cual se denomina pensamiento funcional. En la actualidad, autores como Torres et al. (2022) establecen que en educación primaria se recomienda el estudio del pensamiento funcional como una de las aproximaciones al pensamiento algebraico. Dicho pensamiento se define como "un proceso cognitivo clave, entendido como un componente del pensamiento algebraico, basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 211). Cañadas y Fuentes (2015) mencionan que el pensamiento funcional busca establecer relaciones de dependencia entre dos o más conjuntos de datos que aparecen en el contexto de una situación cercana para el estudiante. De este modo, en este tipo de pensamiento se requiere que el estudiante descubra otras parejas de datos que hacen parte de la situación y generalice una relación a partir de dichos conjuntos de datos.

Dos elementos fundamentales en el pensamiento funcional, y en los cuales centramos la atención en este estudio, son la generalización y los sistemas de representación. Respecto a la generalización, Pinto et al. (2021) establecen que es un aspecto central del pensamiento algebraico y por tanto, del pensamiento funcional. En este contexto, la generalización involucra la identificación y representación de una regla que relaciona dos cantidades a través de una situación con una relación funcional inmersa (Ureña, 2021). En su estudio, Merito et al. (2013) resaltan que los estudiantes de básica primaria tienen los conocimientos y herramientas necesarias para desenvolverse en tareas de generalización, además, tienen la capacidad de expresarla a través del uso de una variedad de sistemas de representación. Por lo tanto, consideramos que el desarrollo de diversas representaciones matemáticas posibilita herramientas a los estudiantes para una comprensión más amplia de las funciones; así mismo, los estudiantes pueden desarrollar la capacidad de comprender la relación entre los distintos tipos de representación (tablas, gráficas y símbolos) para representar relaciones y considerar las ventajas y desventajas de cada una de ellas (NCTM, 2000).

Con base en el panorama expuesto, se presenta una investigación cualitativa en el enfoque funcional del *early algebra*. Principalmente se busca describir el pensamiento funcional de estudiantes de básica primaria, a través de la identificación del tipo de generalización y los sistemas de representación que emplean cuando abordan tareas sobre funciones. En particular, Radford (2006) define la generalización algebraica a partir de tres niveles en lo que incluye aspectos simbólicos y no simbólicos: factual, contextual y simbólico. Consideramos los sistemas de representación (gestual, verbal, pictórico, simbólico, tabular y múltiple) que se reportan en diferentes investigaciones y una lista de acciones específicas del pensamiento funcional (Pineda, 2017). Estos aspectos mencionados funcionan como categorías de análisis al momento de estudiar los datos recolectados en la implementación de tareas funcionales por medio de cuestionarios y entrevistas semiestructuradas con estudiantes de primer, tercer y quinto grado de primaria (6 -11 años).

Se presenta este reporte final de investigación, conformado por 7 capítulos. En el primero se describen los principales antecedentes, por un lado, lo que establece el currículo en matemáticas a nivel nacional e internacional respecto al estudio del álgebra en educación básica primaria y por otro, la visión de diferentes investigadores del campo de la Educación Matemática sobre la introducción del pensamiento algebraico temprano y algunos estudios relacionados con el pensamiento funcional. En los capítulos 2 y 3 se plantea detalladamente el problema de investigación a abordar, la pregunta y el objetivo propuesto en esta investigación respectivamente. El capítulo 4 presenta los aspectos teóricos que componen el marco conceptual de este trabajo, construido con el fin de asumir herramientas que permitan la interpretación y análisis de datos de acuerdo con el objetivo de investigación. La metodología se presenta y explica en el capítulo 5, en esta investigación cualitativa contemplamos tres fases metodológicas que tratan fundamentalmente en conocer y seleccionar los casos de estudio y, el diseño e implementación de los instrumentos de recolección de datos. En el capítulo 6, se establece el análisis a priori y posteriori, y resultados de la fase de implementación en el aula. Finalmente, establecemos las conclusiones de esta investigación a partir de la discusión de los resultados, las implicaciones didácticas identificadas, las limitaciones encontradas en el desarrollo del trabajo y sugerencias para próximas investigaciones.

1. Antecedentes

Para iniciar con los antecedentes de nuestra investigación, presentamos brevemente los documentos curriculares establecidos a nivel nacional e internacional en torno a la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la educación básica primaria. Con el objetivo de situar este estudio, introducimos el pensamiento algebraico y la propuesta curricular *early algebra*. Kaput (1998) establece en este enfoque del álgebra se puede ver el estudio de funciones, relaciones y variaciones conjuntas que involucran la generalización hacia la noción de función, lo cual es una parte fundamental de los aspectos del pensamiento algebraico. Por lo tanto, al finalizar este apartado presentamos diferentes investigaciones sobre el pensamiento funcional que permiten evidenciar cómo este tipo de pensamiento puede ser desarrollado desde los primeros años escolares y ejemplificar cuestiones específicas que se han abordado en dichos estudios.

1.1 Una mirada desde los documentos curriculares

A medida que los estudiantes avanzan en su formación escolar, los contenidos y procesos matemáticos que deben estructurar y usar, requieren de principios y estándares que especifiquen qué es lo que debe valorarse en la enseñanza de las matemáticas. Así mismo, cuáles son los posibles caminos del docente para generar ambientes y contextos idóneos, que posibiliten la realización de actividades que promuevan aprendizajes y destrezas matemáticas, útiles y significativas para los estudiantes. De este modo, queremos mencionar algunos de los elementos planteados en los documentos curriculares a nivel nacional e internacional rescatando su posición acerca del pensamiento algebraico, la introducción del álgebra desde los primeros niveles escolares, y opciones explícitas para hacerlo.

El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), establece un conjunto de diez estándares para las matemáticas escolares que describen los conocimientos y las competencias sobre lo que los estudiantes deben hacer, comprender y realizar en un nivel determinado de escolaridad. El nivel de pensamiento matemático del estudiante se presenta específicamente desde el prekindergarten hasta el nivel 12, generando cuatro grupos a partir de los grados escolares. Entre esta lista tenemos el “Estándar de álgebra” que será el interés en esta investigación, específicamente el “Pensamiento funcional”, considerado como un tipo de pensamiento algebraico que se enfoca en el estudio de la relación entre dos (o más) cantidades variables. Más adelante entraremos en detalle sobre las distintas concepciones de éste y las investigaciones que se han realizado en esta área.

El estándar de álgebra se centra en el estudio de las relaciones entre cantidades -incluyendo las funciones-, las formas de representación de relaciones matemáticas y el análisis del cambio (NCTM, 2000). Por otro lado, se menciona que las relaciones funcionales pueden expresarse usando la notación simbólica, lo que permite expresar concisamente ideas matemáticas complejas y analizar el cambio con eficacia. El álgebra también puede relacionarse con la resolución de problemas, que pueden ser abordados desde diferentes formas de generalidad. El énfasis en este estándar va más allá de la manipulación de símbolos, resolver ecuaciones y expresiones algebraicas, aunque estos procedimientos hacen parte, no se establecen como el eje central. Respecto al estudio del álgebra desde los primeros niveles de escolaridad, se espera que los estudiantes durante su formación construyan bases sólidas que les faciliten la comprensión del álgebra en niveles superiores y con cierta complejidad. Por ejemplo, una experiencia sistemática con patrones puede ayudar a potenciar el desarrollo de la noción de función, concepto clave para el desarrollo de pensamiento funcional.

Dado que, el álgebra es más que la manipulación de símbolos, se establece por el NCTM (2000) tres categorías (estándares) en las que se aborda el estudio del álgebra:

- Comprender patrones, relaciones y funciones.
- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.
- Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.

Vinner y Dreyfus (1989, tomado de NCTM, 2000, p. 40), mencionan que "muchos estudiantes universitarios entienden la noción de función sólo como una regla o fórmula, como dado n, hallar 2^n, para $n = 0, 1, 2$ y 3". Por tanto, se espera que, a partir de pequeñas experiencias desde edades tempranas, se llegue a desarrollar una noción de función que permita la evolución del concepto y una teoría de funciones acorde a cada nivel escolar. Los estándares señalados por el NCTM (2000) muestran que la clasificación y ordenamiento de objetos en los niños posibilitan la construcción de la noción de patrón; un patrón definido como "lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse" (Castro et al. , 2010, p. 57). Desde esta perspectiva, en un nivel inicial los estudiantes están en capacidad de describir de manera verbal la regularidad de patrones sin hacer uso de algún símbolo. En una siguiente fase, ya pueden utilizar variables y expresiones algebraicas como medio para describir y llegar a una ampliación del patrón, por ejemplo, definir los términos de una secuencia. Al finalizar la secundaria, se espera que los estudiantes utilicen notación y símbolos adecuados para describir patrones; por ejemplo, en la relación que se presenta en una secuencia de términos o los valores de una tabla. De esta manera, los estudiantes podrían desarrollar una colección de tipos de funciones y comprender relaciones entre sus diferentes representaciones (NCTM, 2000).

Bajo otra visión, en los documentos curriculares de matemáticas de Colombia: Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de competencias en Matemáticas (2003), estructurados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN a partir de ahora) se propone una estructura curricular para la Educación Matemática que está compuesta de otros elementos. Por un lado, el MEN (1998) propone considerar tres grandes aspectos para organizar el currículo en un todo armonioso: los procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje; los contenidos básicos que hacen referencia al desarrollo del pensamiento matemático y los sistemas propios de las matemáticas; por último, el contexto que hace referencia a los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende.

Figura 1

Dimensiones del cubo: Procesos, conocimientos básicos y contexto

Nota. El cubo representa la estructura de los Lineamientos curriculares de Matemáticas establecidas por el MEN. Tomado de (MEN, 1998, p. 20).

La Figura 1, busca explicar cómo se relacionan los procesos, los conocimientos básicos y el contexto. Como menciona el MEN (1998), “cada cara del cubo se proyecta en su opuesta de tal manera que al observar el cubo desde cualquiera de sus puntas se observan los tres aspectos para significar la presencia de éstos en cualquier momento del acto educativo” (p. 20). Es importante resaltar que, un currículo ideal en matemáticas debe desarrollar simultáneamente todos los pensamientos, a través de los distintos procesos en matemáticas, reconociendo el carácter transistémico de cada uno (MEN, 1998). Por otro lado, el planteamiento de soluciones problemáticas que sean cercanas al estudiante facilita su capacidad de buscar soluciones, correctas o no, que hagan parte de su contexto.

Teniendo en cuenta el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos propuesto en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), tenemos que:

> Respecto al álgebra, se considera que en un primer momento generalizar patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, es por ello que debe involucrar entre otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de la

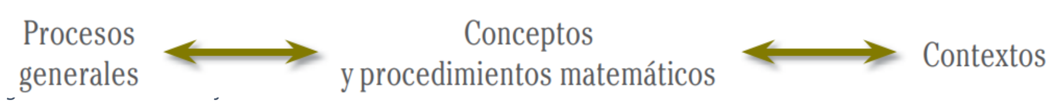
> variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra, y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, todos éstos desarrollos propios del pensamiento variacional. (MEN, 1998, p. 17)

El MEN (1998) propone que, para dar inicio al pensamiento variacional en la educación básica, se debe abandonar la enseñanza de contenidos matemáticos divididos y buscar una vinculación de conceptos y procedimientos que permitan "analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas" (p. 49). Se proponen núcleos conceptuales de la matemática en los que está involucrada la variación, entre estos se establece la función como dependencia y modelos de función. Se señala que la noción de función aparece al establecerse relaciones funcionales, en donde se produce un cambio y puede predecirse llevando un control sobre éste. De este modo, se concluye que "el estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas" (p. 51). Además, con el objetivo de llevar al estudiante a comprender el concepto de variación, se sugiere abordarlo en situaciones problemas en las que estén inmersos los fenómenos de cambio y variación en la vida diaria.

Así mismo, el MEN (2003) instaura una serie de Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas en el que se seleccionan algunos de los niveles de avance en el desarrollo de las competencias, asociadas a los cinco tipos de pensamiento matemático y los sistemas relacionados a cada uno. Comparado con los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, cada estándar de cada columna pone el énfasis en uno o más de los procesos generales de la actividad matemática (formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmo) que cruzan dichos tipos de pensamiento matemático. Por tanto, se organizan en cinco columnas encabezadas con cada pensamiento respectivamente y los sistemas asociados a él. Por otro lado, se establecen cinco conjuntos de grados para dar mayor flexibilidad a la distribución de las actividades dentro del tiempo escolar, se mantiene la siguiente estructura:

Figura 2

Estructura de la formulación de los Estándares básicos de competencias en Matemáticas



Nota. La figura muestra la estructura de los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas establecidas por el MEN. Tomado de (MEN, 2003, p. 77).

Es importante tener en cuenta que, el MEN (2003) al referirse al conjunto de estándares establecidos, menciona que estos deben entenderse "en términos de procesos de desarrollo de competencias que se desarrollan gradual e integradamente, con el fin de ir superando niveles de complejidad creciente en el desarrollo de las competencias matemáticas a lo largo del proceso educativo" (p. 76).

Se reafirma esta noción de pensamiento variacional como eje fundamental para dar estructura y sentido al aprendizaje del pensamiento algebraico. Este se basa en "el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos" (MEN, 2003, p. 66).

También en este documento, encontramos que el producto final de este pensamiento es el aprendizaje de los conceptos y procedimientos sobre las funciones. Se estable que, es necesario que desde la educación básica primaria se lleve al estudiante a tener aprendizajes significativos que lo conduzcan al desarrollo del cálculo diferencial e integral en educación media.

Este pensamiento se inicia, según el MEN (2003), con el estudio de regularidades e identificación de un patrón que se repite periódicamente, sujetas a sucesiones o secuencias en cualquier objeto. Esto, con el propósito de que desarrollen la capacidad de representarlo por medio de un algoritmo o una fórmula. Para sembrar en los estudiantes este pensamiento desde sus primeros niveles de estudio, el MEN (2003) sugiere actividades como: analizar la forma en que varía una secuencia o sucesión de objetos, conjeturar sobre cómo continúa, expresar a partir de distintos sistemas de representación los términos, para finalmente reproducir una fórmula para calcular los siguientes y validar sus suposiciones en busca de la generalización. Por tal razón, se menciona que:

> Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización. Esta es una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado. Estas actividades preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica. (MEN, 2003, p. 22)

A partir del análisis de los documentos mencionados, se resalta la importancia de introducir en los estudiantes el pensamiento algebraico desde los primeros niveles de escolaridad. Vemos como el análisis de patrones es una parte fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico, se destaca que con su estudio se puede ayudar a estructurar el concepto de función. Se establece que con las primeras experiencias sobre el estudio de secuencias de figuras, dibujos u objetos básicos, un estudiante puede tener un acercamiento a lo que es un patrón y expresarlo con una forma de representación tan simple como sus palabras o gestos. Evidentemente se espera que luego estas descripciones puedan llegar a expresarse a través de símbolos matemáticos y finalmente, se estructure una expresión algebraica para describir las relaciones que se identifican en un patrón. Todo esto con el objetivo de que los estudiantes en su último nivel escolar vean a la función como algo más que una regla o fórmula.

1.2 Sobre el álgebra temprana y el pensamiento algebraico

Desde el aspecto curricular es evidente el propósito de desarrollar en los estudiantes la capacidad de razonar algebraicamente, dejando de lado la idea de que sólo es posible en los últimos niveles escolares. El desarrollo del pensamiento algebraico desde la educación básica primaria es una propuesta de cambio curricular que se ha estudiado desde 1998, y con el pasar de los años ha sido impulsada y abordada con gran relevancia por distintos investigadores. Con este enfoque se busca que los estudiantes además de comprender puedan encontrar un significado a las matemáticas que están tratando. En este mismo sentido, Callejo et al. (2016) mencionan que con esta perspectiva "se propone organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas, tratando de que haya una continuidad sin necesidad de introducir nuevos tópicos" (p. 6). Kaput (2000) presenta ejemplos basados en el aula del razonamiento algebraico temprano, haciendo referencia al “Early algebra” y traducimos como “Álgebra temprana”. De este modo, se visualiza ampliamente al álgebra y se establece que abarca la generalización y formalización de patrones y restricciones, la manipulación de formalismos, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el estudio de relaciones funcionales y la modelización.

Por otro lado, Vergel (2015) menciona que la posibilidad de potenciar el desarrollo de pensamiento algebraico en niños de los primeros años de escolaridad es un aspecto que cada vez genera mayor interés para la investigación en Educación Matemática. Uicab et al. (2022) muestran cómo diferentes investigadores proponen que estudiar el desarrollo del pensamiento algebraico desde edades tempranas contribuye a una transición adecuada hacia el estudio formal del álgebra. A partir del contacto con experiencias significativas, desde la formación inicial en aritmética, es posible avanzar en la construcción de esquemas asociados al pensamiento algebraico (Rojas y Vergel, 2013). Así mismo, Butto y Rojano (2010) indican que los tiempos didácticos para el aprendizaje del álgebra son prolongados y que parece oportuno iniciarse en ese pensamiento a edades tempranas. De esta manera, se aprovecharían diferentes fuentes de significado presentes en los contenidos curriculares que se estudian en primaria.

Existe un número significativo de investigaciones que muestran la emergencia de trabajar este tipo de pensamiento desde edades tempranas. Por ejemplo, Radford (2012) muestra la evolución del pensamiento algebraico de un programa de investigación longitudinal en el aula, en donde siguió a estudiantes de 8 años mientras se movían del grado 2 hasta el grado 4. En su investigación, Brizuela y Blanton (2014) muestran resultados que se oponen a aquellos que establecen grandes dificultades en niños de escolaridad primaria al momento de desarrollar un pensamiento algebraico temprano. Por su parte, Vergel (2014, 2015) describe las formas de pensamiento algebraico en estudiantes de 9-10 años y da evidencias sobre su evolución.

Recientemente, Torres et al. (2022) realizaron en España un estudio con estudiantes de básica primaria en el ámbito del pensamiento algebraico y en sus resultados manifiestan que, a pesar de la corta edad de los estudiantes, están en la posibilidad de trabajar tareas de generalización. Por tanto, desde la visión de distintos investigadores existe una aprobación sobre la importancia de desarrollar pensamiento algebraico desde los primeros años de escolarización.

Tomando como referencia a Radford (2006) y Vergel (2015), el pensamiento algebraico es una forma particular de reflexionar matemáticamente. El cual involucra una serie de actividades como "la comprensión de las relaciones funcionales, la generalización de patrones y de las relaciones numéricas, el trabajo con la estructura, el simbolismo y la modelización como medio de expresión y formalización de generalizaciones" (Butto y Delgado, 2012, p. 19).

Por su parte, a partir de un análisis del contenido del álgebra, Kaput (1998) considera que existen dos aspectos centrales en el pensamiento algebraico: "la generalización y la expresión de generalizaciones en sistemas de símbolos convencionales cada vez más sistemáticos. El segundo aspecto central del razonamiento algebraico es la acción guiada sintácticamente sobre símbolos dentro de sistemas organizados de símbolos" (p. 10). Según Kaput (1998) estos aspectos están presentes de alguna forma en las tres ramas del álgebra como se muestra a continuación:

- El álgebra como aritmética generalizada, incluye la generalización de operaciones aritméticas y sus propiedades, el razonamiento sobre relaciones más generales y sus formas. Se basa en la construcción del aspecto sintáctico del álgebra a partir de la estructura de la aritmética, además, implica mirar las expresiones aritméticas en términos de su forma en lugar de su valor cuando se calculan. Por ejemplo, propiedades del cero, la conmutatividad, las relaciones inversas, etc.
- El álgebra como la aplicación de un conjunto de lenguajes de modelado tanto dentro como fuera de las matemáticas. Este modelado como una actividad algebraica parece ser de tres tipos

fundamentales basados en cómo se emplean los dos aspectos centrales del álgebra: haciendo uso de ecuaciones y su solución, generalizando y expresando patrones y regularidades en situaciones o fenómenos. Por último, considerando la generalización de soluciones a situaciones respuesta única o de problemas verbales de aritmética pura que no requirieron maniobras algebraicas para resolver.

- El álgebra como estudio de funciones, relaciones y variaciones conjuntas, que involucra la generalización hacia la idea de función. Este aspecto no tiene límites claros, en el sentido en que las ideas ligadas a la función son muy amplias. Se hace uso de una amplia gama de sistemas de símbolos más allá de los sistemas habituales basados en cadenas de caracteres.

La última aproximación al álgebra escolar es la que asumimos en esta investigación y describimos detalladamente en el apartado del marco conceptual. A continuación, mostramos investigaciones que estudian el pensamiento funcional en la educación básica primaria.

1.3 La investigación sobre el pensamiento funcional

Existen diversos ejemplos de investigaciones que evidencian que los niños de la escuela primaria pueden desarrollar y usar una variedad de herramientas de representación para razonar sobre funciones, pueden describir en palabras y símbolos relaciones recursivas, covariables y de correspondencia entre variables; además, pueden usar lenguaje simbólico para modelar y resolver ecuaciones con cantidades desconocidas. Se ha demostrado que los estudiantes no solo son capaces de realizar un análisis funcional más profundo de lo que se pensaba anteriormente, sino que la génesis de estas ideas aparece en los estudiantes antes de lo esperado (Blanton y Kaput, 2011). A continuación, se presentan brevemente algunos estudios que se han desarrollado con estudiantes de básica primaria respecto al pensamiento funcional destacando sus múltiples aportes.

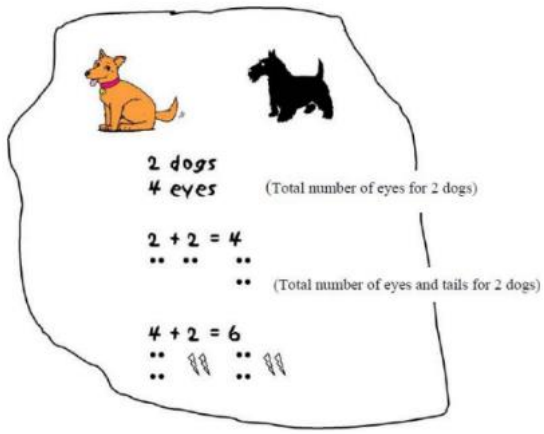
Basados en un estudio experimental, Blanton y Kaput (2004) realizan una investigación con estudiantes desde prekínder hasta quinto de básica primaria. Los autores relatan cómo los estudiantes responden en cada grado a partir de la situación problema que llamaron “ojos y colas” y es presentada de la siguiente manera:

> Supongamos que estabas en un refugio de perros y querías contar todos los ojos de los perros que viste. Si hubiera un perro, ¿cuántos ojos habría? ¿Y si hubiera dos perros? ¿Tres perros? ¿100 perros? ¿Ves una relación entre el número de perros y el número total de ojos? ¿Cómo describirías dicha relación? ¿Cómo sabes que esto funciona? Supongamos que quieres averiguar cuántos ojos y colas habían? ¿Cuántos ojos y colas hay para un perro? ¿Dos perros? ¿Tres perros? ¿100 perros? ¿Cómo describirías la relación entre el número de perros y el número total de ojos y colas? ¿Cómo sabes que esto funciona? (p. 136).

Los estudiantes de prekínder (3 a 5 años) utilizaron fotos de perros para realizar el conteo del número de ojos y colas hasta 4 perros. Sin embargo, las respuestas no muestran indicios de que los estudiantes buscaran determinar un patrón de comportamiento. En kindergarten los datos llegaron a calcularse hasta 10 perros, haciendo un punto para cada ojo y una marca larga para cada cola (Ver Figura 3). Algunos estudiantes identificaron el patrón en la cantidad de ojos como “contar de 2 en 2”, “más y más” y “cada vez que agregamos un perro más, obtenemos dos ojos”.

Figura 3

Representación de estudiantes de kindergarten para 2 perros



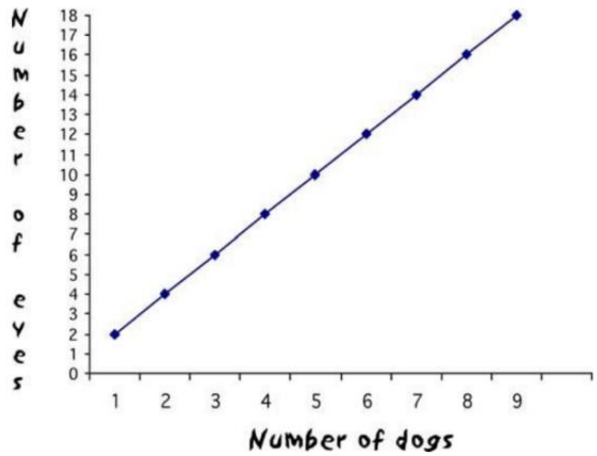
Nota. Adaptado de (Blanton & Kaput, 2004, p. 137)

Los estudiantes de primer grado con ayuda del docente intentaron predecir la cantidad de ojos que tendrían 7 perros y usaron el conteo salteado para encontrar la respuesta. Los estudiantes vieron que el patrón se duplicaría (para el total de ojos) y luego se triplicaría (para el total de ojos y colas). Ya en segundo grado, se lograron más resultados. A partir del registro de datos para 1 y hasta 10 perros, los estudiantes encontraron una relación multiplicativa usando su lenguaje natural: “tienes que duplicar la cantidad de perros para obtener la cantidad de ojos”. Además, lograron predecir que el número total de ojos y colas para 100 perros sería 300.

Respecto al conteo de ojos en el tercer grado llegaron a concluir que “no importa cuántos perros tengas, puedes multiplicarlo por 2” y describieron esta relación como “$n \times 2$” y “$2 \times n$”. Adicionalmente, graficaron sus resultados comparando el número de ojos con perros (ver Figura 4) y comparando el número de ojos y colas con el número de perros. El trabajo de los estudiantes de cuarto y quinto grado fue similar al de tercero, con la única diferencia notable de que los estudiantes de grados posteriores necesitaron menos datos (solo hasta 3 perros) para desarrollar una función.

Figura 4

Representación gráfica de estudiantes de 3° del número total de ojos vs número de perros



Nota. Adaptado de (Blanton y Kaput, 2004, p. 139)

Con esta investigación Blanton y Kaput (2004) muestran cómo los estudiantes de primaria desarrollan y expresan funciones. Indican que son capaces de pensar funcionalmente en grados anteriores a lo que se espera y concluyen que durante la educación primaria las matemáticas deberían incluir el desarrollo del pensamiento funcional.

Posteriormente, Kaput y Blanton (2005) examinan cómo piensan los niños acerca de las relaciones funcionales, sus implicaciones matemáticas para grados posteriores, cómo se puede profundizar en el diseño de materiales didácticos y actividades escolares que amplíen y apoyen el desarrollo del pensamiento funcional en la escuela primaria. Preguntarnos si iniciar desde edades tempranas el estudio del álgebra traerá consecuencias positivas en más común de lo que pensamos. Por ejemplo, Schliemann, Carraher y Brizuela (2012) en un estudio de intervención en el aula durante 3 años con estudiantes entre 8 y 11 años que recibieron lecciones semanales de álgebra temprana, llegaron a concluir que la influencia fue positiva en comparación con un grupo de control. Los estudiantes que hicieron parte del estudio superaron a sus compañeros en todos los grados y se beneficiaron más de la instrucción de álgebra en los grados séptimo y octavo.

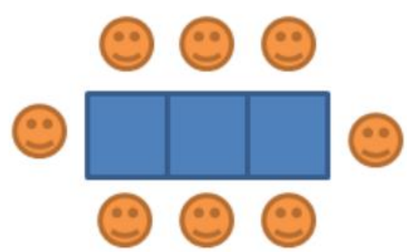
Respecto al pensamiento funcional y el pensamiento algebraico, un tema de estudio que se trabaja con frecuencia son las estrategias y sistemas de representación que utilizan los estudiantes al momento de resolver problemas. En esta línea, Merino et al. (2013) llevan a cabo una investigación con estudiantes de quinto de educación primaria que tiene como objetivo indagar sobre las estrategias y representaciones que utilizan al trabajar una tarea de generalización que involucra la función $f(x) = 2x + 2$. El instrumento utilizado para la recolección de información fue una prueba escrita elaborada por los autores para ser resuelta de forma individual en una hora habitual de clase de matemáticas. A partir de la información mostrada en la Figura 5, los estudiantes debían responder a 10 cuestiones.

Figura 5

Texto e imagen presentados en la tarea funcional

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.

Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.



Nota. Adaptado de (Merino et al. , 2013, p. 28)

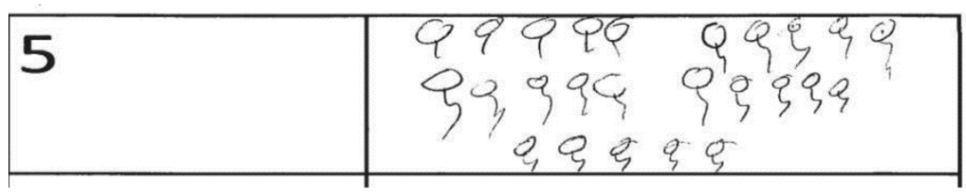
Los resultados muestran una gran variedad de estrategias utilizadas por los alumnos, con relevancia destacada del uso de patrones. Se observó como al utilizar el conteo, los estudiantes recurren a una representación pictórica, dado que se ayudan de un dibujo para dar respuesta a cuestiones que implican cantidades pequeñas en la variable conocida. Respecto al uso de representaciones, se evidenció que la representación más usada fue la verbal acompañada de otras numéricas o pictóricas.

Del mismo modo, Cañadas y Fuentes (2015) realizan un estudio sobre el pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria en España. Los autores describen las estrategias y sistemas de representación que utilizan estudiantes de primer grado de educación primaria en la resolución de un problema que involucra la relación funcional $f(x) = 5x$. Los estudiantes utilizaron varios sistemas de representación simultáneamente en todos los apartados predominando el pictórico con el apoyo de dibujos y otros los combinaron con números en sus respuestas (sistemas de representación pictórico y numérico). Entre la variedad de estrategias empleadas por los estudiantes se incluyen la identificación de diferentes relaciones funcionales. Las autoras recogen la información a través de una prueba individual escrita, que consta de una situación basada en una relación funcional lineal con dos variables y con dominio los números naturales, de la siguiente manera: “La relación se establece entre número de niños y número de globos que deben comprarse para una fiesta de cumpleaños: 5 globos para cada niño.” (p. 213).

A partir de siete preguntas, se buscó que los estudiantes determinaran el tamaño de los números implicados, usaran distintos sistemas de representación y lograran respuestas a preguntas sobre casos particulares consecutivos o no consecutivos. En la figura 6, se muestra la respuesta de un estudiante a la cantidad de globos que se deben comprar si asisten cinco niños a la fiesta de cumpleaños. Los estudiantes usaron la relación 1-5 a partir de una respuesta directa, con dibujos o hicieron grupos. En la figura 6 se muestra la respuesta de un estudiante.

Figura 6

Ejemplo de respuesta de un estudiante al resolver el problema de los globos



Nota. Adaptado de (Cañadas y Fuentes, 2015, p. 217)

Observamos que los globos dibujados se encuentran distribuidos en grupos de cinco y que hay tantos grupos como niños hay. Finalmente, Cañadas y Fuentes (2015) concluyen que es viable la incorporación de tareas relacionadas con este pensamiento en estudiantes de primer curso. Observan que los estudiantes tienen la capacidad de desarrollar estrategias y de identificar patrones de forma general, más de lo que se esperaba teniendo en cuenta los conocimientos previos en este nivel escolar.

Como podemos ver en las investigaciones anteriores, el estudio de las funciones es una ruta fundamental para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en los grados de la educación básica primaria. Sin embargo, siguen existiendo aspectos importantes a indagar sobre la naturaleza de la comprensión de las funciones por parte de los niños pequeños (Blanton et al. , 2015). En particular Blanton et al. (2015) realizaron una investigación de diseño, buscando analizar datos cualitativos y así, caracterizar los niveles de sofisticación en el pensamiento de los niños sobre las relaciones funcionales. A partir del trabajo con niños de primer grado (6 años) lograron identificar que “pueden aprender a pensar de formas bastante sofisticadas y generalizadas sobre las relaciones en los datos de funciones, lo que desafía el enfoque curricular típico en los grados inferiores de primaria” (p. 511). Cañadas et al. (2016) establecen que hay evidencia de que estos estudiantes son capaces de generalizar relaciones covariables; identificar relaciones funcionales cuando dos variables están involucradas; representar estas relaciones en diferentes formas; y, razonar con relaciones funcionales para interpretar situaciones problemáticas.

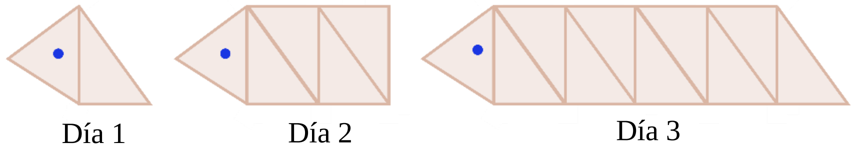
Los resultados de investigación expuestos señalan que los estudiantes tienen la capacidad de desarrollar su pensamiento funcional desde los primeros años de escolaridad y así contribuir a una transición adecuada hacia el estudio formal del álgebra en particular y de las matemáticas en general.

Pineda (2017) en su investigación tuvo entre sus objetivos diseñar tareas que potencien el pensamiento funcional y fomenten su desarrollo. Para esto trabajó distintas tareas sobre pensamiento funcional. Veamos la “tarea de la serpiente”. Las relaciones funcionales propuestas involucran adición, multiplicación y potenciación. La relación funcional en juego para la tarea de la serpiente fue $f(x) = x^2 + 1$ y se presentó de la siguiente forma:

> En el zoológico de reptiles de la Universidad Estatal están estudiando el crecimiento de una serpiente Pitón cada día. Para ayudarlos, debes encontrar el número de partes que tendrá una serpiente en crecimiento cada día. Debes tener en cuenta que cada triángulo equivale a una parte del cuerpo (p. 77).

Figura 7

Dibujo presentado en la tarea de la serpiente



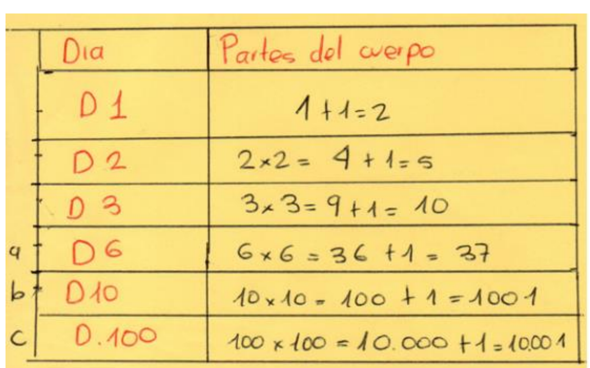
Nota. Tomado de (Pineda, 2018, p. 77)

En el análisis a posteriori se muestra que los estudiantes tienen la capacidad de encontrar la relación funcional, si bien no de manera simbólica, lo hacen verbalmente. Al plantear la pregunta ¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 6?, un estudiante respondió: "multiplicamos el número del día por el mismo número y le sumamos uno" (p. 96). Adicional, el estudiante justifica que funciona porque "por ejemplo, en el día 6 … 6×6 que da 36 más uno que sería la cabeza, 37" (p. 97). A partir de esto, Pineda (2018) concluye que el estudiante al hallar la cantidad de partes del cuerpo de la serpiente está estableciendo una relación que involucra la manera como aumentan las partes de la serpiente día a día, en donde su atención se enfoca en la identificación de cómo se relacionan las variables que intervienen en la tarea.

Otra respuesta que se reporta da evidencia de una de relación funcional de covariación. En la siguiente figura, se presenta la respuesta de un estudiante:

Figura 8

Evidencia de la relación funcional de covariación en la tarea de la serpiente



	Dia	Partes del cuerpo
	D 1	1+1=2
	D 2	2×2= 4+1=5
	D 3	3×3=9+1= 10
a	D 6	6×6=36+1= 37
b	D 10	10×10= 100+1=1001
c	D.100	100×100=10.000+1=10.001

Nota. Tomado de (Pineda, 2018, p. 98)

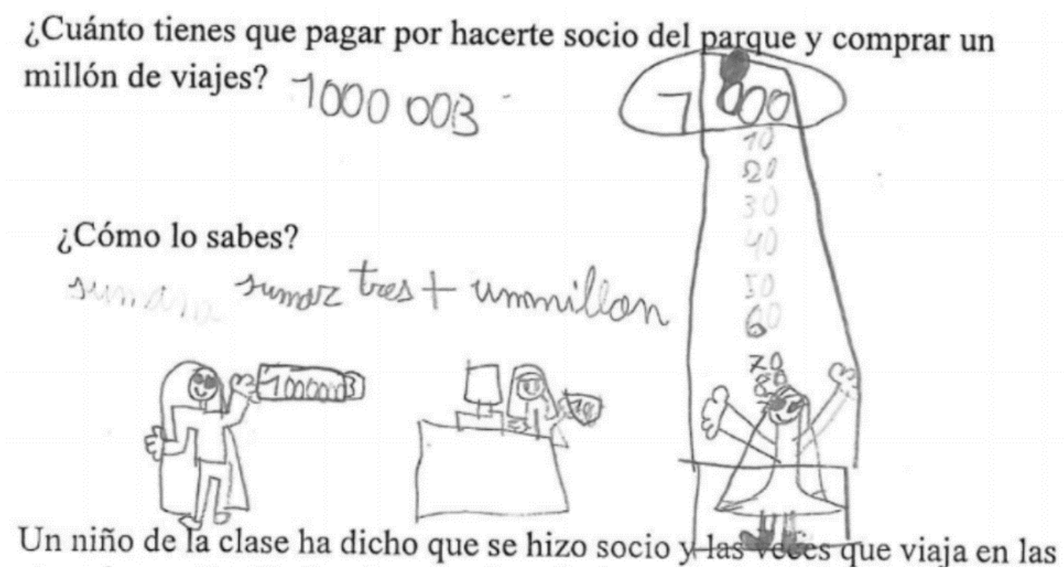
Al decirle al estudiante, que si tuviera que explicar cómo hallar el número de partes para el día 100 ¿cómo lo haría?, respondió "el número de días se eleva a la dos y se suma uno" (p. 97). Los estudiantes comprenden la manera en que se construye la secuencia y la forma en que se relacionan las variables. Logran identificar cómo varían los valores respecto a la variable dependiente e independiente.

Recientemente, Torres et al. (2022) al trabajar con estudiantes de segundo curso de Educación Primaria encontraron evidencias de pensamiento funcional, teniendo en cuenta la forma de expresar las regularidades que encuentran en las situaciones vistas y la forma de representar las generalizaciones que evidencian. La investigación se lleva a cabo a partir del tratamiento de cuatro tareas: parque de atracciones (versión 1 y versión 2), cumpleaños y paradas de tren. Veamos que ocurrió con una de ellas, esta situación implica la relación funcional $f(x) = x + 3$, se presentó de la siguiente forma: "Un nuevo parque de atracciones ha llegado a Granada. Para entrar, te sacas un carnet de socio que vale 3 euros y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje vale 1 euro." (p. 223). Adicionalmente, se hacen preguntas de casos particulares (14, 100 y un millón de viajes) y una pregunta que conduce al caso general con un número indeterminado de viajes.

Se reporta que todos los estudiantes identificaron alguna estructura en el trabajo con casos particulares, sin embargo, no ocurrió lo mismo en el caso general. Un estudiante expresó que son 103 lo que tiene que pagar por hacerse socio del parque y comprar 100 viajes: "junto 100 y 3 más". Mientras que otro escribió que "suma 3 y 100" para obtener la respuesta. En la figura 9, se muestra la respuesta de otro estudiante que hace uso de representaciones pictóricas.

Figura 9

Respuesta de un estudiante a la pregunta sobre un caso particular (1 millón)



Nota. Tomado de (Torres et al. , 2022, p. 227)

La revisión de los trabajos mencionados anteriormente, evidencian el uso de relaciones funcionales en investigaciones con estudiantes de básica primaria y a su vez, se presentan actividades que tienen como objetivo potenciar, identificar, describir o caracterizar el pensamiento funcional desde edades tempranas. Vemos como desde hace varios años se realiza investigación en este campo y además, que hoy en día continúa siendo un tema de interés. Para concluir, recalcamos la posibilidad de desarrollar el pensamiento funcional desde los primeros grados de escolaridad, estas evidencias funcionan como argumento para el desarrollo de esta investigación.

2. Planteamiento del problema

La identificación de cantidades que se relacionan y la explicación de cómo cambian o se mantienen constantes generalmente se han asociado con el pensamiento variacional. Sin embargo, desde hace varias décadas en el contexto de la Didáctica de la Matemática se ha señalado la importancia de iniciar el estudio de estos aspectos desde edades tempranas; dado que usualmente se inician los temas del álgebra en la educación secundaria de una manera abrupta (Bautista et al. , 2021). Kieran y Filloy (1989), en particular, mencionan que cuando los adolescentes inician el estudio del álgebra, mantienen aquello que utilizaban en la aritmética. Por tanto es importante tener en cuenta que el álgebra requiere una nueva forma de pensar en el estudiante, que le permita pasar del análisis de situaciones numéricas concretas a la construcción de proposiciones más generales que impliquen, por ejemplo, la formalización de procedimientos que anteriormente no se habían preocupado.

En este contexto se origina en Estados Unidos la propuesta curricular *early algebra* que hoy en día se ha extendido en diferentes países. Ésta propone la incorporación del estudio del álgebra desde la educación primaria integrándola con los contenidos habituales que se trabajan en clase de matemáticas. Este enfoque del álgebra se inicia con el objetivo de evitar saltos y rupturas entre la enseñanza de la aritmética y el álgebra, promoviendo que en los primeros grados escolares se introduzca el pensamiento algebraico y en grados posteriores se facilite el aprendizaje formal del álgebra.

En este trabajo de investigación nos centramos en el enfoque funcional del *early algebra,* basado en "el estudio de las relaciones entre variables y focaliza su atención en las funciones como contenido matemático" (Fuentes, 2014, p. 4). Específicamente hablamos del pensamiento funcional, considerado como un tipo de pensamiento algebraico. Uno de los intereses de estudiar este tipo de pensamiento se fundamenta en las dificultades que presentan los estudiantes cuando abordan el concepto de función en cálculo. Tal como señalan López y Sosa (2008), a los estudiantes les cuesta enunciar situaciones que involucran una relación funcional entre variables y la regla de correspondencia que relaciona los elementos de dos conjuntos sobre los que se definen una función. Adicionalmente, utilizar diferentes sistemas de representación de la función. Estos autores establecen que un factor didáctico que influye en estas dificultades es que al momento de plantear ejercicios se acude a problemas rutinarios o meramente algorítmicos, en los cuales no se presentan situaciones de variación.

De este modo, nuestro problema de investigación surge a partir de la necesidad de estudiar el pensamiento funcional en edades tempranas (5-11 años), teniendo en cuenta que, aunque hay ciertos elementos que se relacionan con el pensamiento algebraico en el currículo de Matemáticas en Colombia (establecido por el MEN, 1998), no hay mención específica de lo que es el pensamiento funcional durante la educación básica primaria. Se busca evidenciar la capacidad de los estudiantes de desarrollar el pensamiento funcional en estas edades tal como se expone en diferentes investigaciones; por otro lado, una hipótesis que se plantea es si este tipo de pensamiento se refina a través del desarrollo de los diferentes niveles escolares en primaria.

Como menciona Torres (2022), la idea de contemplar el pensamiento algebraico en la educación básica primaria es un tema relativamente reciente y se considera que aún se carece de elementos que beneficien este camino. Por tanto, en esta investigación nos centramos en dos aspectos fundamentales: la generalización y los sistemas de representación. La generalización potencia el conocimiento matemático de los estudiantes ya que su foco son las relaciones y estructuras que subyacen en distintos problemas (Pinto, 2019), específicamente nos enfocamos en el pensamiento funcional de estudiantes de básica primaria para caracterizarlo a partir del tipo de generalización que evidencian (Radford, 2006). Además, nos interesa determinar los sistemas de representación que utilicen los estudiantes al momento de resolver tareas funcionales; que serán descritos ampliamente en el apartado de marco conceptual.

2.1 Pregunta de investigación

¿Qué caracteriza el pensamiento funcional que pueden desarrollar estudiantes de educación básica primaria de una Institución pública en Colombia?

Para dar respuesta a la pregunta, en el siguiente capítulo se plantea el objetivo que guía el desarrollo de esta investigación.

3. Objetivo

3.1 Objetivo general

Describir el pensamiento funcional de estudiantes de básica primaria a través del tipo generalización y los sistemas de representación, que emplean cuando abordan tareas que involucran dos cantidades que varían.

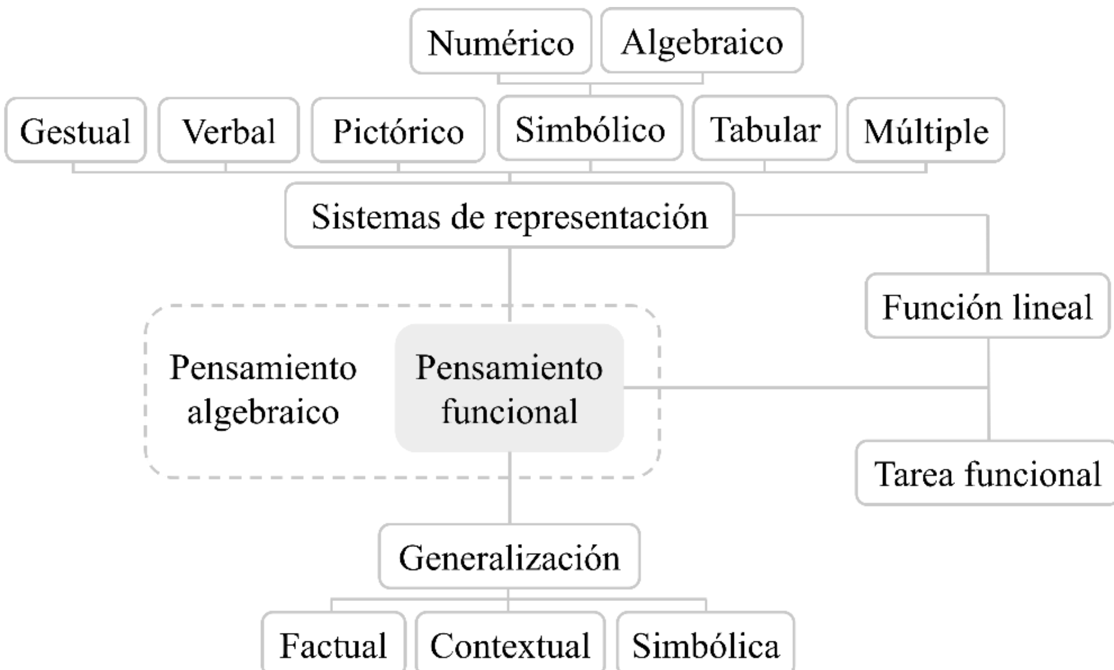
Para responder a la pregunta y cumplir con el objetivo planteado en esta investigación, consideramos los siguientes aspectos conceptuales. A continuación, se presenta el marco conceptual construido para el desarrollo de este trabajo.

4. Marco conceptual

En este capítulo presentamos los aspectos conceptuales que fundamentan esta investigación. Con base en la revisión bibliográfica, estructuramos este apartado presentando el pensamiento funcional de forma general hasta llegar a aquellos elementos que están directamente relacionados con los objetivos de investigación. Iniciamos presentando el pensamiento funcional como un tipo de pensamiento algebraico enmarcado en la propuesta curricular *early algebra;* además, describimos los principales elementos que lo conforman según la perspectiva de distintos autores. Continuamos con los elementos más específicos que contribuyen al cumplimiento de nuestro objetivo de investigación: generalización y sistemas de representación. La figura 10 sintetiza el marco conceptual que usaremos en esta investigación y desarrollamos a lo largo de este capítulo.

Figura 10

Marco Conceptual: el pensamiento funcional



4.1 Pensamiento funcional

El álgebra temprana puede ocurrir en varias formas interrelacionadas en el salón de clase, siendo el pensamiento funcional un hilo a través del cual los docentes pueden construir la generalidad en su currículo (Blanton y Kaput, 2011). Así, el pensamiento funcional es una de las hebras clave del pensamiento algebraico y es considerado como uno de los enfoques para su introducción en educación primaria (Tanışlı, 2011; Cañadas y Fuentes 2015). Consideramos este tipo de pensamiento como "un modo de pensamiento algebraico dentro de la propuesta curricular early algebra" (Cañadas y Molina, 2016, p. 1). El enfoque funcional del pensamiento algebraico propone estudiar el álgebra centrada en "desarrollar experiencias con funciones y familias de funciones a través de encuentros con situaciones del mundo real cuyas relaciones cuantitativas pueden ser descritas por esos modelos" (Heid 1996, cómo cito Kieran 2004, p. 143).

Uicab et al. (2022) indican la existencia de distintos aspectos de interés respecto a lo que concierne a la generalización algebraica a partir de secuencias figurales o numéricas. Por ejemplo, existen investigaciones centradas en el desarrollo del pensamiento funcional, otras enfocadas en las estrategias que utilizan los estudiantes para generalizar, o en las estrategias y formas de pensamiento algebraico, o en las formas del pensamiento algebraico y los recursos semióticos utilizados por los estudiantes cuando resuelven problemas con secuencias. Cuando el enfoque matemático en el pensamiento algebraico son las funciones, estamos haciendo referencia al pensamiento funcional (Cañadas et al. , 2016). Por lo tanto, vemos al pensamiento funcional como una manera de pensar sobre la generalización. Aunque diferentes investigadores se han tomado la tarea de estudiar el pensamiento funcional, ya sea buscando su definición o con el propósito de ver su desarrollo en los estudiantes, es claro que no hay una única forma de establecer qué es el pensamiento funcional.

Bajo la revisión de diversas investigaciones que involucran el pensamiento funcional, se evidencian similitudes en sus consideraciones que nos llevan a pensar en la generalización de relaciones entre cantidades que varían como su eje principal. Además, se observan distintos enfoques que dependen de los objetivos de la investigación. Algunos investigadores han precisado el pensamiento funcional en los términos que describimos a continuación. Por ejemplo, se conceptualiza ampliamente el pensamiento funcional "para incorporar la construcción y generalización de patrones y relaciones usando diversas herramientas lingüísticas y de representación y tratando relaciones o funciones generalizadas que resultan como objetos matemáticos útiles por derecho propio” (Blanton y Kaput, 2011, p. 7). En acuerdo con Cañadas y Molina (2016), consideramos que el pensamiento funcional hace parte del pensamiento algebraico, como un proceso cognitivo clave que se basa en “la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen” (p. 211). De este modo, el pensamiento funcional se considera una meta disciplinar fundamental en la enseñanza de las matemáticas y trata de la acción de “pensar en términos de y acerca de relaciones” (Rico, 2006, p. 56), además, puede ser expresado por medio de distintos sistemas de representación.

Smith (en Blanton y Kaput, 2004) menciona que el pensamiento funcional es una de las líneas clave del pensamiento algebraico, lo clasifica como una particularización del pensamiento representacional que “se enfoca en la relación entre dos (o más) cantidades variables” (p. 143). Se plantea específicamente que el pensamiento funcional se lleva a cabo desde relaciones específicas a la generalización de esa relación entre las instancias y el cual ocurre cuando los niños "inventan o se apropian de sistemas de representación para representar una generalización de una relación entre cantidades variables" (p. 143).

Existen elementos fundamentales para el desarrollo del pensamiento funcional desde los primeros grados. Al respecto Cañadas y Molina (2016) establecen que algunos de estos son: “las cantidades variables, sus relaciones, la recursividad, la correspondencia entre valores de las variables o la utilización de diferentes sistemas de representación en un contexto de resolución de problemas” (p. 212). Además, a través de este pensamiento se promueve en los estudiantes la identificación de patrones y la generalización a través de las relaciones funcionales. Así mismo, Bastías y Moreno (2016) mencionan que “el pensamiento funcional incluye la relación entre cantidades que pueden expresar su relación en palabras, símbolos, tablas o gráficos, y el razonamiento con estas diversas representaciones para analizar el comportamiento de la función" (p. 565). Blanton et al. (2015) establecen que el pensamiento funcional involucra "(a) generalizar relaciones entre cantidades covariantes; (b) representar y justificar estas relaciones de múltiples maneras usando lenguaje natural, notación variable, tablas y gráficos; y (c) razonar con fluidez con estas representaciones generalizadas para comprender y predecir el comportamiento funcional" (p. 512). Teniendo en cuenta los aspectos mencionados anteriormente, se sintetiza y se abarca de manera más amplia la definición de pensamiento funcional de la siguiente manera:

> El pensamiento funcional es un proceso cognitivo, que centra su potencial en las características necesarias para que un estudiante logre enfrentar una situación funcional, evidenciando acciones específicas como: hallar relaciones entre variables, identificar cómo se construye cada variable, analizar las implicaciones de una variable respecto a la otra, recurrir a diferentes representaciones, describir verbalmente la manera en que la función se va construyendo, predecir el comportamiento de la función en casos posteriores, entre otros. (Pineda, 2017, p. 61)

Si nos cuestionamos sobre cuándo los estudiantes al enfrentarse a una situación problema hacen uso de su pensamiento funcional, podemos decir que cuando logran "explicitar la relación entre las variables o entre los conjuntos, con los que está trabajando y con esa relación puede abstraer el razonamiento hacia la generalización de la expresión, encontrando una regla que describa la relación funcional entre esas variables" (Fuentes, 2014, p. 9). Cabe aclarar que al igual que en el enfoque del álgebra temprana que mencionamos anteriormente, nuestra forma de abordar el pensamiento funcional con estudiantes de básica primaria no tiene como objetivo el estudio formal sobre aspectos relativos a la función. Tal como lo mencionan Cañadas y Molina (2016), el objetivo de la incorporación del pensamiento funcional desde los primeros niveles educativos, no se enfoca en la introducción de las funciones tal y como se estudian durante la secundaria, en este caso, se busca sacar provecho del potencial de este contenido matemático tan amplio, como lo son las funciones, y así promover en los estudiantes capacidades que les sean útiles para su razonamiento matemático tanto en primaria como a futuro en los siguientes grados.

4.1.1 La función lineal

Una función es una relación entre dos conjuntos en donde hay una interdependencia entre dos cantidades que varían juntas. Las funciones cumplen la condición de que siempre que se atribuya un valor numérico a una variable, hay una regla según la cual queda determinado un único valor de la otra. En donde consideramos una variable dependiente y una independiente. Además, las funciones se pueden expresar a través de diferentes sistemas de representación, como son el verbal, gráfico, tabular, pictórico o simbólico.

Si bien existen diferentes tipos de funciones, en esta investigación nos centramos en las funciones en las que la razón de cambio a la cual la variable dependiente cambia con respecto a la variable independiente es constante, es decir, la función lineal. Este tipo de funciones son de la forma $f(x) = mx + b$, donde m representa la pendiente de la recta y b es el punto de corte con el eje de las ordenadas. Esto teniendo en cuenta el nivel educativo de los estudiantes de educación básica primaria, en donde hasta el momento conocen las operaciones aritméticas básicas y pueden llegar a trabajar en situaciones que impliquen relaciones aditivas y multiplicativas. Consideramos que son las adecuadas en este nivel escolar y nos permitirán abordar el concepto de función como la variación de dos cantidades en contextos naturales para los estudiantes.

Las funciones las presentamos a partir de tareas contextualizadas para los estudiantes. A continuación, mostramos un ejemplo del tipo de problema que trabajaremos en esta investigación y propuso Torres (2022): “El problema del parque de atracciones $y = 1 + 2x$. A Pulianas llega un parque de atracciones. La primera vez que entras, te sacas un carnet de socio que vale 1 euro y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje en una atracción vale 2 euros” (p. 31).

4.1.2 Tarea funcional

Esta propuesta de investigación pretende conocer el pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria a través de los tipos de generalización y los sistemas de representación que usan cuando resuelven tareas sobre funciones. A lo largo de este documento utilizamos el término “tarea”. Por lo tanto, para el desarrollo de esta investigación surge la necesidad de definir este concepto y evitar que se confunda o tome como sinónimos con el concepto de “actividad”.

Según Radford (2013; 2018) una actividad es un fenómeno o serie de acciones guiadas por un objetivo común, que depende del espacio y del tiempo en el cual los estudiantes y docentees trabajan de manera conjunta para satisfacer alguna necesidad, motivo o deseo. Desde la perspectiva de la teoría de la objetivación una tarea es la encargada de generar actividades, de este modo, la tarea “encierra todo el proceso de investigación, análisis, diseño, construcción, planificación, entre otros procesos, que toma como sustrato el docente” (Pineda, 2017, p. 59).

4.2 Generalización

Durante los primeros grados de escolaridad, la generalización es el aspecto central en el pensamiento algebraico (Pinto et al. , 2021). La generalización está presente en muchos contextos y hace parte de nuestra vida diaria, tomando como ejemplo eventos que ocurren generalmente o casi siempre. En matemáticas este término igualmente requiere que se cumpla esta propiedad para que en un conjunto de elementos se pueda generalizar una regularidad detectada en un caso particular, a todo el conjunto. Mientras que en Educación Matemática hace referencia a un proceso que demanda el reconocer en diferentes patrones, una serie de relaciones variantes e invariantes entre los diferentes términos y un modo conciso para expresarlo. Por otro lado, se refiere a la generalización como una herramienta para la introducción al álgebra escolar (Villa, 2006).

Kaput (1999) define generalizar como:

> … extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos. (p. 58)

Por su parte, Polya (1989) define la generalización como “pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado” (p. 97). La generalización propone el desarrollo de ciertas habilidades que la conforman y por tanto, existen criterios para clasificar la diversidad de razonamientos que hacen parte de ella. De acuerdo con esto, Mason (1999) propone tomar en cuenta en el proceso de la generalización los siguientes aspectos: “a) la visión de la regularidad, la diferencia, la relación (el ver), b) su exposición verbal (decir, expresar) y c) su expresión escrita, de la manera más precisa y sucinta posible (registrar)” (Villa, 2006, p. 142).

Al respecto, Torres (2022) considera que desde un enfoque funcional, generalizar implica “atender, percibir y expresar cómo una cantidad varía con respecto a otra en general, identificando un patrón que sea válido para más casos, a partir de la regularidad observada” (p. 39). Las definiciones coindicen en que “la generalización consiste en el reconocimiento de una regularidad en un conjunto de elementos, la generación e identificación de nuevos casos en los que la generalización aplica y su respectiva expresión” (Ureña, 2021, p. 31).

Radford reconoce a los objetos matemáticos como generales y, además, que la actividad matemática es en esencia simbólica. La generalización que además de ser un proceso, se puede distinguir por los medios utilizados por los estudiantes al momento de reconocer tal generalidad. En donde lo importante no está únicamente en identificar dicha generalidad, si no poder expresarla de distintas formas. En este sentido, se considera que los docentes están en el deber de plantear y desarrollar actividades en clase de matemáticas que potencien los procesos de generalización (Rojas y Vergel, 2013).

Radford (2006) establece tres tipos de generalización: generalización factual, generalización contextual y generalización simbólica. Estas formas de pensamiento algebraico buscan entender el actuar de los estudiantes cuando afrontan tareas en el contexto de la generalización de patrones a partir de los medios semióticos de objetivación que ellos utilizan: gestos, movimiento, ritmicidad, artefactos, actividad perceptual, formas lingüísticas, etc. (Vergel, 2014).

Vergel (2014) muestra un ejemplo evidencia elementos de la generalización factual, bajo una situación un estudiante menciona que siempre debe sumarse tres y al ser cuestionado expresa que: “Porque la secuencia lo dice, porque por ejemplo aquí, 2 y le sumamos 2, esta es la figura 2 entonces se colocan dos círculos más, más dos, me darían 4 y al cuatro le resto 1 y le pongo 3 arriba” (p. 107). En conclusión, en este tipo de generalización se esperarían gestos y palabras a través de un argumento verbal constituido por cálculos numéricos.

Cuando el estudiante logre sustituir los gestos y las palabras por otros medios de expresión como las frases “clave”, hablamos de la generalización contextual. Aquí la indeterminancia se hace explícita y se convierte en objeto del discurso del estudiante. Por ejemplo, el estudiante dice “arriba quito uno” o “dos por la figura más uno”, o “# de la figura + 1 para la fila de arriba y # de la figura + 2 para la de abajo. Sumar los dos para el total” (Radford, 2010). En este nivel nos encontramos con expresiones como “coges el número que está en la tarjeta y lo sumas por el mismo más 1” (Vergel, 2014, p.107).

Finalmente, nos referimos al tercer tipo de pensamiento algebraico como simbólico. En el cual se abandonan las frases “clave” y aparecen los símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, los estudiantes usan expresiones como: $n + (n - 1)$ ó $2n - 1$. (Radford, 2010).

4.3 Sistema de representación

Desde la época de los 80, se detecta según Rico (2009) el uso sistemático de la noción de representación en el campo de la Educación Matemática. En donde el concepto se relaciona como “equivalente a una señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático, también como signo o marca con el que los sujetos piensan las matemáticas” (p. 3). Es importante tener en cuenta, que una representación matemática “no puede entenderse de forma aislada” (Torres, 2022, p. 45) por lo cual, consideramos que para que el estudiante acceda a un conocimiento matemático es necesario que tenga la capacidad de representarlo de diversas formas. Dado que, se considera que un estudiante adquirió un concepto determinado cuando tiene la capacidad de transitar entre las diferentes representaciones de este (Duval, 2017).

En la literatura encontramos diferentes investigaciones que abordan el concepto de representación (Merino et al. 2013; Fuentes, 2014; Cañadas y Fuentes, 2015; Cañadas y Molina, 2016; Ureña, 2021; Torres, 2022) y coinciden en la importancia del uso de las representaciones en el desarrollo del pensamiento algebraico y en particular, en el pensamiento funcional. Resaltando que, desde edades tempranas los estudiantes expresan sus ideas matemáticas a partir de distintos sistemas de representación, desde el más básico y puede ir refinándose con el paso del tiempo.

Podemos definir las representaciones como “todas aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas” (Rico, 2009, p. 3). Sintetizando su idea, Respecto a los sistemas de representación Pinto (2016) expresa que estos permiten la organización de simbología matemática y usar diferentes sistemas de representación atribuye diversos significados a un mismo concepto, lo cual es necesario y permite el complemento entre ellos.

Fuentes (2014) resalta que involucrarse en el pensamiento funcional conlleva al uso de diversos sistemas de representación, en particular, el sistema de representación simbólico que incluye letras y números es fundamental en el estudio de las funciones. Sin embargo, aterrizando en el contexto de educación primaria este no resulta clave. Por el contrario, el sistema de representación verbal es el más cercano y natural para los estudiantes. Como menciona Ureña

(2021), las múltiples representaciones que emplean los estudiantes en el contexto del pensamiento algebraico dependen de su formación y experiencia, la forma de expresarse puede ir desde su lenguaje natural hasta representaciones simbólicas, tabulares y gráficas. No obstante, Goldin y Kaput (1996) distinguen entre los sistemas de representación al momento de aprender y hacer matemáticas, por lo cual, los clasifican en sistemas internos y externos. Las representaciones internas son aquellas "configuraciones mentales de los individuos, como aprendices o solucionadores de problemas" (Goldin y Kaput, 1996, p. 399) y están basadas en "imágenes que creamos en nuestra mente para objetos y procesos matemáticos" (Torres, 2022, p. 45). Por el contrario, el término representación externa se refiere a las "configuraciones observables físicamente incorporadas, como palabras, gráficos, imágenes, ecuaciones o micromundos informáticos" (Goldin y Kaput, 1996, p. 400) y son en principio, accesibles a la observación. También podemos tener en cuenta las representaciones externas como "marcas en el papel, los dibujos, los esquemas de geometría y las ecuaciones" (Torres, 2022, p. 45).

En esta tesis, nos enfocamos en estudiar las representaciones externas. Por tanto, nos referiremos a representaciones como lo hace Torres (2022): "cada vez que mencionemos representación o representaciones, nos referiremos a las representaciones externas, realizadas con lápiz, papel o habladas, las cuales son intencionales en la medida en que su propósito es registrar y transmitir un significado" (p. 45).

Concretamente, las representaciones son fundamentales para el pensamiento funcional ya que sirven para:

> (a) representar ideas matemáticas, formando parte integral de cómo los estudiantes piensan acerca de las funciones; (b) mediar entre los temas y las funciones y relaciones funcionales, ayudando a estructurar y expandir el pensamiento de los

> estudiantes; y (c) constituyen una forma de expresar relaciones entre variables que, si se eligen adecuadamente, pueden unificar ideas posiblemente aisladas. (Pinto et al. , 2021, p. 6)

Torres (2022) menciona que “la generalización y la representación están fuertemente ligadas” (p. 45), ya que en el proceso de generalización los estudiantes acuden al uso de diferentes representaciones para expresar las relaciones identificadas. Teniendo en cuenta que esta investigación se realiza con estudiantes de básica primaria, es importante considerar que las representaciones que empleen dependen de la forma de expresión de cada uno y el nivel de generalización en el que se encuentren, esto a partir de los tipos de generalización establecidos por Radford (2006) y explicados en un apartado anterior.

Como mencionamos anteriormente, a comienzos de los años 80 ya se consideraba la noción de representación. Al respecto Castro et al. (1997) precisan que “uno de los campos cuyo estudio se inicia sobre la base de la noción de representación es el relativo al concepto de función” y en estos estudios se destacan los diferentes tipos de representación para las funciones. Los investigadores pertenecientes al campo del álgebra temprana (*early algebra*) mantienen su postura respecto a los sistema de representación asociados al pensamiento funcional y creen que no se restringe la notación algebraica, por el contrario, estaría incluyéndose junto con el uso del lenguaje natural (oral y escrito), las tablas y los gráficos (Fuentes, 2014).

Algunos estudios sobre el pensamiento funcional que tienen como objetivo indagar y/o describir los tipos de representación que utilizan los estudiantes al resolver problemas relacionados con las funciones, definen las representaciones que se reportan en la literatura sobre el pensamiento algebraico en los primeros cursos, entre estos están: los gestos, las formas verbales, numérica, pictórica, simbólica, tabular y las representaciones múltiples (Merino et al. , 2013; Fuentes, 2014;

Pinto, 2016; Ureña, 2021; Torres, 2022). A continuación, realizamos una descripción de las principales características de las representaciones que consideramos pueden emerger cuando estudiantes de primaria evidencian pensamiento funcional.

4.3.1 Sistema de representación gestual

Radford (2011) menciona que para lograr resolver un problema los estudiantes confían en el uso y la vinculación de varias herramientas, signos y dispositivos lingüísticos entre los cuales considera válido el empleo de gestos. Estos gestos por más idiosincrásicos que sean constituyen los antecedentes del lenguaje, es decir, un protolenguaje. “Los gestos ayudan a los estudiantes a generalizar y expresar la generalización” (Torres, 2022, p. 47). Sin embargo, debemos considerar que esto no garantiza que el estudiante haya logrado establecer la generalidad presentada en un problema. En los niños de primaria podríamos apreciarlos como un indicador de que buscando una forma de expresar lo que piensan. Por ejemplo Radford (2011) en su trabajo con niños de segundo de primaria al resolver un problema de generalización, toman como un apoyo mostrar con sus manos lo que van expresando; al respecto presentan las siguientes evidencias fotográficas:

Figura 11

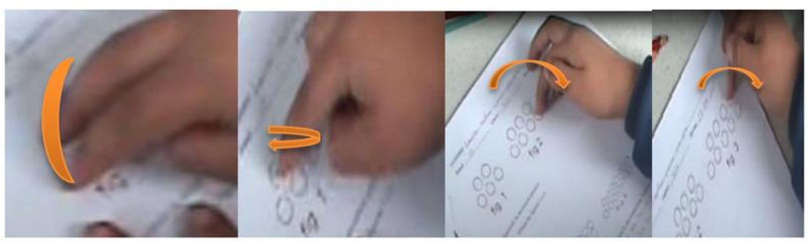
Gestos de estudiantes frente a un problema

Nota. Tomado de (Radford, 2011, p. 314).

En la investigación que realizó Vergel (2015) muestra cómo los estudiantes a partir de señalamiento están expresando lo que piensan, de este modo, la representación gestual juega un papel de apoyo de la representación verbal. En la figura 12, se muestra la secuencia de gestos (señalamientos) que despliega una estudiante acompañada de palabras. Expresa que: “1 más 1 da 2, sumándole 3; 2 más 2 da 4…”

Figura 12

Secuencia de gestos de la estudiante



Nota. Tomado de (Vergel, 2015, p. 201)

De este modo, en nuestra investigación consideramos que el sistema de representación gestual funciona como apoyo al momento del estudiante expresar y justificar verbalmente sus ideas. Pero no es necesariamente evidencia de que el estudiante esté llevando a cabo algún tipo de generalización al trabajar una tarea funcional.

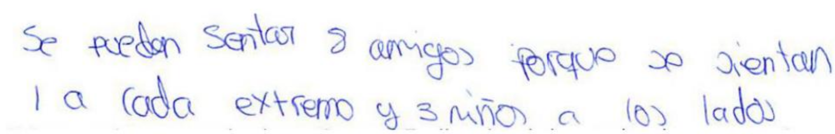
4.3.2 Sistema de representación verbal

La representación verbal es aquella que se lleva a cabo mediante el lenguaje natural, ya sea de manera oral o escrita, para hacer referencia a conceptos y procedimientos matemáticos que se pretenden representar (Merino et al. , 2013; Cañadas y Figueiras, 2011). En el trabajo con estudiantes de los primeros niveles educativos la utilización del sistema de representación verbal resulta ser clave (Cañadas y Fuentes, 2015). Torres (2022) menciona que los enunciados escritos durante sesiones de trabajo y la aplicación de entrevistas inducen a los estudiantes a utilizar este tipo de representación, ya sea de manera escrita u oral.

Hay estudios que concluyen que la representación verbal es la más usada por los estudiantes en sus primeros niveles escolares. Merino et al. (2013) en su indagación sobre los tipos de representación que utilizan estudiantes de quinto de educación primaria, mencionan que la representación verbal es la más usada por los estudiantes y consideran que lo hacen por la "comodidad que supone para los alumnos explicar con sus propias palabras lo que están haciendo, y más en un contexto en el que se les insistió en la importancia de que explicaran/justificaran sus respuestas" (p. 36). Por ejemplo, en la situación del cumpleaños de Sara (Ver Figura 13), se planteó la siguiente pregunta: "¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?" para lo cual un estudiante respondió:

Figura 13

Respuesta de un estudiante en la situación del cumpleaños de Sara



Nota. Tomado de (Merino et al. , 2013, p. 31)

En esta cuestión, todos los estudiantes indicaron únicamente el caso particular y respondieron de manera correcta. Los autores destacan que los estudiantes lograron identificar la estructura de la situación presentada, descubriendo que en cada lado de la mesa se sienta un niño y dos en los entremos de la fila de mesas. Por otro lado, Torres et al. (2022) en las tareas propuestas con las relaciones funcionales $y = x + 3$, $y = 1 + 2x$ que corresponden al "parque de atracciones", presentan resultados de los estudiantes frente a casos particulares: "junto 100 y 3 más", "suma 3 y 100", "siempre tengo que sumar 3 + un número", "21, sumando 20 y 1", "61 porque muchos pueden ser 60 más 1 son 61".

Especialmente en la educación básica primaria la representación verbal juega un papel fundamental al momento de los estudiantes involucrarse en cualquier tipo de pensamiento algebraico. Si bien los estudiantes en este nivel escolar no están necesariamente preparados para utilizar algún tipo de simbología formal propia del álgebra, si están en la capacidad de expresar su forma de pensar a partir de su lenguaje natural, ya sea de manera oral u escrita. Por ende, esperamos que nuestros estudiantes hagan uso esencial de la representación verbal.

4.3.3 Sistema de representación pictórico

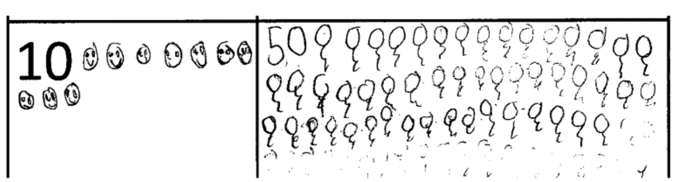
Las representaciones pictóricas son aquellas que hacen uso de dibujos sin alguna notación de carácter simbólico. Este tipo de representación utiliza únicamente recursos visuales, sin ninguna notación que pueda considerarse de carácter simbólico (Cañadas y Figueiras, 2011).

Fuentes (2014) menciona que los dibujos ayudan a que el estudiante organice la información que construye al pensar en el problema al que quiere dar solución. Así mismo, funcionan como un recolector de la información que se presenta en el enunciado. Sin embargo, consideramos que es importante tener en cuenta, que no siempre un dibujo simboliza una representación pictórica. Por ejemplo, los dibujos que el estudiante realiza (Ver Figura 9) no contienen un significado ni expresan algún tipo de apoyo al momento de generar la respuesta a la tarea del “parque de atracciones”. En este caso, los dibujos no cumplen ningún papel respecto a la forma en el que el estudiante pensó, sólo hacen referencia a su imaginación de los protagonistas del problema.

En la educación básica primaria es natural pensar que este tipo de representación es frecuentemente usada por los estudiantes. Por ejemplo, Cañadas y Fuentes (2015) reportan que los estudiantes de primer curso (entre 6 y 7 años) utilizan distintos sistemas de representación, con predominio del pictórico. Frente a la tarea de la “fiesta de cumpleaños”, en donde la relación entre número de niños y número de globos que deben comprarse se representa con la expresión $f(x) = 5x$ (Fuentes, 2014; Cañadas y Fuentes, 2015) los estudiantes hacen uso exhaustivo de dibujos para dar solución a las preguntas. Por ejemplo, en la Figura 14 vemos como a pesar de ser un número considerable de globos, el estudiante los representa mediante dibujos.

Figura 14

Representación pictórica en la tarea "fiesta de cumpleaños"



Nota. Tomado de (Cañadas y Fuentes, 2015, p. 218)

De este modo, vemos como la representación pictórica es clave con este grupo de estudiantes. Igualmente, Fuentes (2014) concluye que el sistema de representación más utilizado por los estudiantes fue el pictórico, dado que "tendieron a dibujar los casos particulares por los que se les preguntaba en cada apartado" (p. 77).

4.3.4 Sistema de representación simbólico

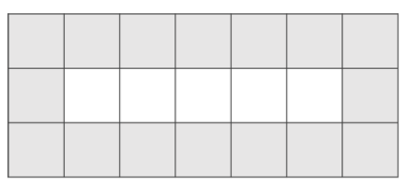
Las representaciones simbólicas son aquellas de carácter alfanumérico (Rico, 2009), es decir, están formadas por letras y números simultáneamente. Distinguimos este tipo de representación de dos formas: numéricas y algebraicas. Fuentes (2014) menciona que en educación primaria los estudiantes aún no están familiarizados con la simbología algebraica, por tanto, el sistema de representación simbólico se restringe usualmente a expresiones numéricas. Sin embargo, tomaremos en cuenta ambos tipos de representaciones simbólicas considerando que los estudiantes en su último grado de educación primaria puedan dar indicio de alguna expresión algebraica. A continuación, mostramos de qué trata específicamente cada una de estas.

Simbólico - Numérico: Las representaciones numéricas se basan en el uso de números y operaciones aritméticas mediante lenguaje matemático, haciendo uno de los símbolos aritméticos ($+$, $-$, $\times$ o $\div$). Pueden ser considerada como ausencia de generalización, por tanto, es importante interpretar la respuesta de los estudiantes teniendo en cuenta la posibilidad de que a partir de casos particulares identifiquen alguna generalidad. Por lo general, los estudiantes utilizan esta representación cuando trabajan en casos que involucran valores numéricos específicos. Sin embargo, la representación numérica no es requisito previo para la manifestación de otro tipo de representaciones (Ureña, 2021).

Para Scheuer, Sinclair, y Rivas (2000) las representaciones numéricas “se construyen empleando un conjunto muy reducido de formas (los numerales 1 a 9) y de principios organizadores, ya que los números son entidades profundamente conceptuales y abstractas, reducibles a unas pocas nociones nucleares que al combinarse se extienden” (p. 32). Al momento de trabaja con estudiantes de básica primaria es natural que utilicen este tipo de representación dado que va acorde a lo que trabajan generalmente en clase de matemáticas. Por ejemplo, Torres et al. (2022), al trabajar con estudiantes de segundo grado de primaria encuentran que este tipo de representación es frecuentemente utilizado al igual que la representación verbal. Por otro lado, Pinto (2019) trabaja con estudiantes de tercer y quinto grado problemas que involucran funciones. Uno de ellos implica la función $y = 2x + 6$ y se presentó a los estudiantes de la siguiente forma: “En un colegio hay diferentes pasillos compuestos de baldosas grises y blancas. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño, siguiendo el patrón que se presenta:”

Figura 15

Patrón presentado en el problema de las baldosas

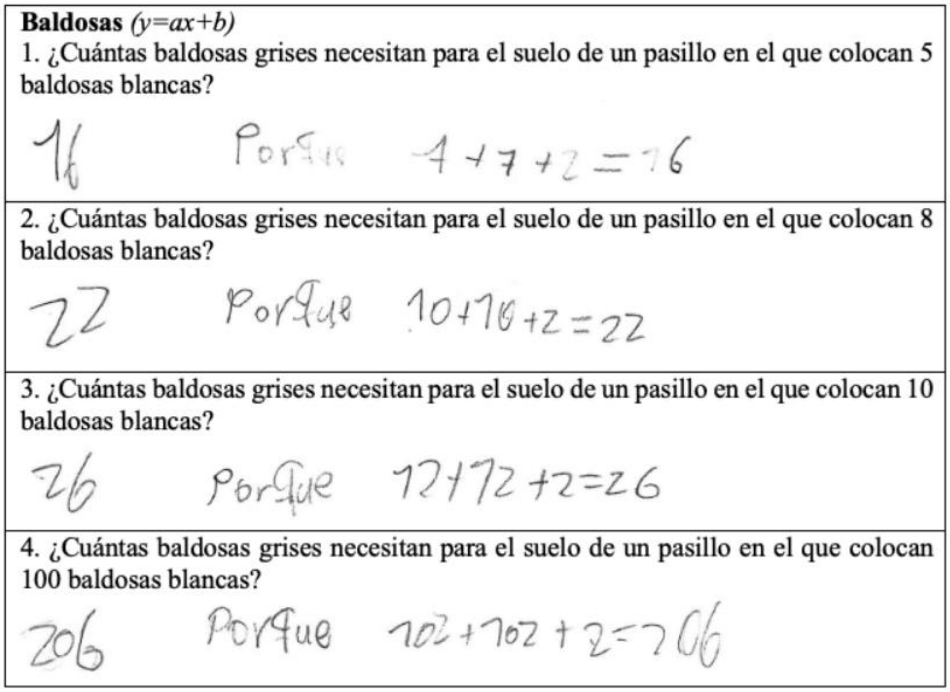


Nota. Tomado de (Pinto, 2019, p. 130)

Pinto (2019), menciona que uno de sus primeros hallazgos tuvo relación con la representación numérica, que fue utilizada por los estudiantes de forma natural al trabajar este problema. Por ejemplo, un estudiante realizó el siguiente proceso en su hoja de trabajo:

Figura 16

Respuesta de un estudiante al trabajar el problema de las baldosas



Baldosas *(y=ax+b)*

1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

16 Porque 7+7+2=16

2. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

22 Porque 10+10+2=22

3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

26 Porque 12+12+2=26

4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

206 Porque 102+102+2=206

Nota. Tomado de (Pinto, 2019, p. 251)

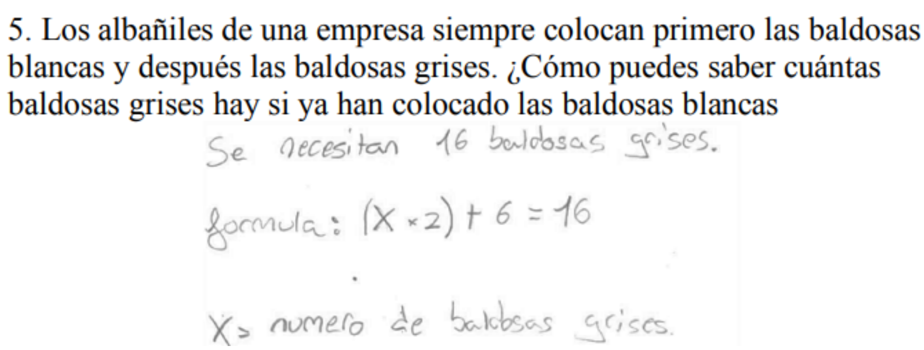
Los procedimientos del estudiante señalados en la Figura 16 muestran que logra relacionar las variables haciendo uso de la representación numérica, centrando su atención en el número de baldosas grises a partir del número de baldosas blancas y así, en todas sus respuestas realizó adiciones. Teniendo en cuenta que las preguntas se dirigen a la exploración de casos particulares, tiene sentido que el estudiante utilice este tipo de representación. Del mismo modo, durante las entrevistas este tipo de representación espontánea fue utilizada frecuentemente por los estudiantes al momento de responder a las preguntas (Pinto, 2019).

Simbólico - Algebraico: Las representaciones algebraicas están caracterizadas por el uso de letras y símbolos algebraicos propios de la ar}itmética y el álgebra, utilizados para expresar enunciados o generalizar alguna operación numérica. Son consideradas las representaciones que generan en los estudiantes mayor grado de abstracción (Merino, 2012). Torres (2022) menciona que las representaciones algebraicas dan la posibilidad de expresar las relaciones funcionales mediante letras y signos aritméticos como: $+, -, \times, :, =$; además, posibilitan el análisis del comportamiento de la función de manera abstracta por la visión cualitativa y cuantitativa que ofrece este tipo de representación.

En la Figura 17 presentamos evidencia del uso de la representación algebraica por un estudiante, al responder a una de las cuestiones que establece Pinto (2019) en el problema de las baldosas.

Figura 17

Representación simbólica de tipo algebraica: problema de las baldosas


5. Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises hay si ya han colocado las baldosas blancas

Se necesitan 16 baldosas grises.

formula: $(X \times 2) + 6 = 16$

X> numero de baldosas grises.

Nota. Tomado de (Pinto, 2019, p. 257)

En la respuesta del estudiante se destaca el uso de la x como una representación algebraica del problema, a través de la fórmula logró expresar la relación entre los dos tipos de baldosas. Se destaca el uso de este tipo de representación teniendo en cuenta que en este caso expresó una relación general cuando se le preguntó por un caso particular (Pinto, 2019).

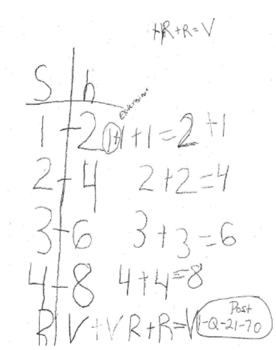
4.3.5 *Sistema de representación tabular*

El sistema de representación tabular comprende el uso y elaboración de tablas para relacionar y organizar información de una relación entre dos cantidades. Torres (2022) menciona que las tablas implican un conjunto de procesos cognitivos en el estudiante como la segmentación de información e identificación de variables y que finalmente, son expresados en filas o columnas. La información organizada por el estudiante se realiza con el fin de identificar los elementos expuestos en el enunciado del problema. Sin embargo, es importante considerar que el proceso de construcción de tablas implica que los estudiantes seleccionen unidades de información y determinen la forma en que los datos procederán a ser organizados.

En su trabajo con niños de primer grado de primaria, Brizuela y Blanton (2014) se enfocan en el desarrollo del pensamiento funcional y el uso de tipos de representaciones, específicamente en la apropiación de tablas para representar cantidades indeterminadas. Mencionan que los estudiantes de esta edad (aproximadamente 5 años) construyen tablas para organizar datos que corresponden a lo que conocemos como variable dependiente e independiente, sin llamarlo de esta forma.

Figura 18

Trabajo escrito del estudiante en la tarea del tren y sus vagones



Nota. Tomado de (Brizuela y Blanton, 2014, p. 44).

En la Figura 18, vemos la tabla que produjo un estudiante de primer grado frente a la tarea en la que un tren recoge dos vagones en cada estación. Durante la entrevista individual se pidió a los estudiantes pensar en cuántos vagones habría recogido el tren después de cualquier número de estaciones. Posterior a explorar casos particulares (para una, dos y tres estaciones), se preguntó si era posible organizar esta información, para lo que la estudiante recurrió a presentar los datos en esta tabla. El estudiante tiene la libertad de escoger las letras que encabezan la tabla y la posición de los números en ella. Para la variable independiente eligió “S” para las paradas (stops) y para la variable dependiente eligió “h” para representar cuántos vagones tiene el tren (how many cars the train has). Esto tiene vital importancia, dado que refleja la comprensión de la estudiante frente a las cantidades que varían en el problema, la dependencia entre ellas y cómo están relacionadas (Brizuela y Blanton, 2014).

4.3.6 Sistema de representación múltiple

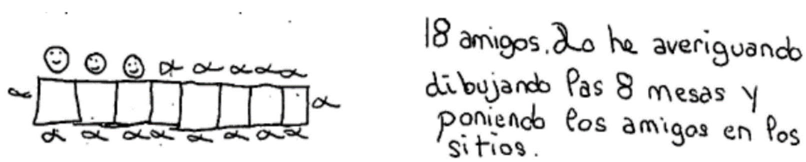
En los apartados anteriores presentamos algunas características y ejemplos de los tipos de representación que hemos considerado en esta investigación, considerándolos por separado. Sin embargo, como menciona Pinto (2019) en el contexto del pensamiento funcional la idea es que los estudiantes utilicen más de un tipo de representación simultáneamente adquiere relevancia, por tanto, a continuación, presentamos el apartado al que llamamos representación múltiple.

Llamaremos representación múltiple a las que resultan de la combinación o unión de dos o más sistemas de representación de los que contemplamos en esta investigación. Consideramos este tipo de representación por la importancia que tiene que un estudiante tenga la capacidad de transitar entre diferentes representaciones de un concepto matemático para tener acceso a este (Duval, 2017).

En su estudio, Merino et al. (2013) describen las representaciones que utiliza un grupo de estudiantes de quinto grado a partir de diferentes tareas funcionales. Una de ellas mostrada anteriormente en la Figura 5, establece la relación funcional $y = 2x + 2$. En la siguiente Figura se presenta la respuesta de un estudiante cuando se le preguntó por la cantidad de persona que se pueden sentar al ubicar 8 mesas. El estudiante hace uso simultáneo de la representación pictórica y verbal.

Figura 19

Representación múltiple en el problema de las mesas

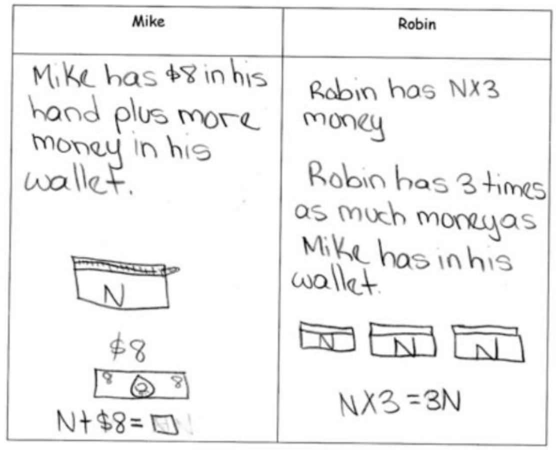


Nota: Tomado de (Merino et al. , 2013, p. 33)

Otro ejemplo de este tipo de representación se presenta en Carraher y Schilemann (2007), en donde a partir de un problema del dinero de dos personas con las relaciones funcionales $y = x + 8$ y $y = 3x$, la respuesta de un estudiante se basa en el uso de tres tipos de representación (verbal, pictórica y simbólica de tipo algebraica) como se evidencia a continuación:

Figura 20

Representación múltiple en el problema del dinero



Nota. Tomado de (Carraher y Schilemann, 2007, p. 114)

De acuerdo con cada apartado anterior, queremos resaltar que ningún sistema de representación es superior a otro, cada uno destaca la diversidad de formas de pensar que pueden expresar los estudiantes. Nuestro interés se basa en describir la forma en que estudiantes de básica primaria usan las representaciones (palabras, símbolos, tablas o gráficos y demás) al momento de generalizar relaciones entre cantidades que varían en una situación sobre funciones. Si bien existe la posibilidad de que no todos los sistemas de representación se evidencien en las respuestas de los estudiantes, creemos que es necesario definir cada uno de los que se reportan a partir de investigaciones previas.

5. Método

En este apartado se describen los aspectos del método que guía esta investigación. En primera instancia, se describe el tipo de investigación y la población de estudio. Se establecen las fases metodológicas que guían el proceso de investigación y, se muestra el proceso y resultado de cada una de ellas. Se destacan entre las técnicas de recolección de datos: la observación moderada, cuestionarios con tareas funcionales y entrevistas semiestructuradas a través de grabaciones de audio y video.

La investigación que se reporta en este documento es de tipo cualitativo. La ruta cualitativa es conveniente en los estudios que tienen como objetivo estudiar y comprender los fenómenos y perspectivas de los demás, a partir del estudio de la realidad en su contexto natural. Este tipo de investigación busca dar sentido, explicar, interpretar, identificar similitudes y diferencias entre los significados que las personas les otorguen a dichos fenómenos a través de la indagación de los hechos (Rodríguez et al. , 1999; Stake, 2010; Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018).

Según Hernández et al. (2014) los estudios cualitativos "pueden desarrollar preguntas e hipótesis antes, durante o después de la recolección y el análisis de los datos" (p. 7). Estas actividades funcionan para determinar cuáles son las preguntas de investigación realmente importantes, e irlas perfeccionando a lo largo de la investigación. En el campo cualitativo no se define una única secuencia en el proceso de investigación, esta varía dependiendo de sus objetivos y desarrollo. Dada la complejidad y flexibilidad de este tipo de estudios no es posible determinar una ruta general (Hernández et al. , 2014).

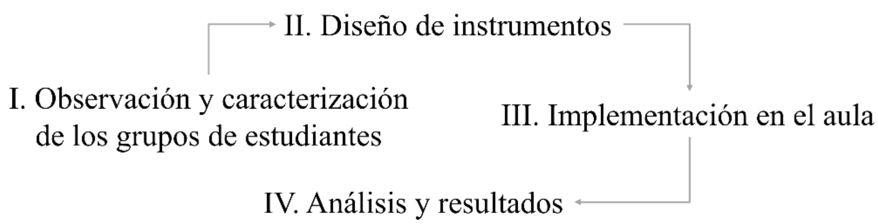
Teniendo en cuenta lo anterior, esta investigación se sitúa en un estudio cualitativo. Dado que la investigación se basa en conocer el pensamiento funcional de un grupo de estudiantes de educación primaria a partir de sus razonamientos y percepciones. Específicamente, se pretende describir el pensamiento funcional de estudiantes de básica primaria a través del tipo de generalización y los sistemas de representación que usan al momento de abordar tareas que involucran dos cantidades que varían.

Los participantes de esta investigación son un aproximado de 90 estudiantes de básica primaria con edades comprendidas entre los 6 y 11 años; específicamente de los grados: primero, tercero y quinto que hacen parte de la Institución Educativa Técnico Dámaso Zapata ubicada en la ciudad de Bucaramanga (Colombia).

En la figura 21 se muestran de manera general las fases que componen el método para el desarrollo de este trabajo: I. Observación y caracterización de los grupos de estudiantes; II. Diseño de instrumentos; III. Implementación en el aula y IV. Análisis y resultados.

Figura 21

Fases metodológicas



A continuación, se describen cada una de estas fases, incluyendo los elementos principales que constituyen el método de esta investigación.

5.1 Fase I. Observación y caracterización de los grupos

Esta fase constituye el acercamiento a la población de estudio con el objetivo de conocer el grupo de estudiantes que participan en la investigación. Se realiza en cada grado una inmersión inicial adentrándonos en el aula, manteniendo una reflexión permanente y generando ambientes de confianza para evitar que nuestra presencia se torne intrusa. Dicha inmersión implica sensibilizarse con el entorno e identificar a los estudiantes que posiblemente aportarán datos y serán guía en la investigación (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018). Respecto al tiempo de observación, en la investigación cualitativa se considera que este es un periodo abierto (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018); por tanto, se decide que a medida que avance esta fase se podrá establecer la cantidad de sesiones a observar.

El objetivo de esta fase de observación y caracterización es identificar cómo se llevan a cabo las clases y cuál es la metodología del docente. Concretamente se busca conocer a los estudiantes: cuáles son sus conocimientos previos, de qué manera captar y mantener su atención, así como, qué dinámicas se llevan a cabo para fomentar la participación en clase. El producto de esta fase es la caracterización de los grupos por tanto está centrada principalmente en los estudiantes, en el contexto del aula y en la actividad matemática que se promueve.

En la investigación cualitativa el observador tiene un papel activo en la indagación y puede asumir diferentes niveles de participación. En nuestro caso, se contempla un nivel de participación moderada en donde el investigador participa en algunas actividades, pero no lo hace en todas (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018).

Las técnicas de recolección utilizadas en esta etapa son bitácoras con registro escrito de lo observado y fotografías que aporten detalles importantes. Nos centramos en aspectos como: la manera en la que el docente lleve las clases, cómo organiza el tiempo de trabajo en clase, la manera como los estudiantes se comportan frente a ella, quiénes participan y muestran un mayor interés y/o comprensión en clase de matemáticas, o en caso contrario, cuáles estudiantes muestran dificultades. Por tanto, adaptamos acorde a nuestro interés el formato de observación de Pineda (2018), el cual se diseñó para que docentes en formación hicieran registro de sus observaciones y reflexiones sobre la actividad que promueve docente en ejercicio durante su clase y la actividad de los alumnos en esta. De este modo, antes de iniciar cada observación, se tiene previsto el enfoque propuesto para hacer este proceso de observación más riguroso y objetivo (Ver Apéndice 1).

5.1.1 Caracterización de los grupos

Los sujetos de estudio de esta investigación son estudiantes de básica primaria de la Institución Educativa Técnico Dámaso Zapata ubicada en la ciudad de Bucaramanga (Santander, Colombia). Esta es una de las instituciones oficiales más grandes de la ciudad, activa desde el año 1941, en la actualidad cuenta con más de 4.000 estudiantes. Teniendo en cuenta los objetivos de nuestra investigación, trabajamos con tres grupos de estudiantes: 1-06, 3-06 y 5-06 de la jornada de la tarde (12:30 pm a 5:30 pm).

En la institución cada docente trabaja a partir del plan de área de la asignatura y el proyecto educativo institucional (PEI). Estos se organizan principalmente a partir de los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) y los procesos matemáticos que establece el MEN (1998). También se tienen en cuenta desempeños cognitivos, procedimentales y actitudinales, y ejes temáticos o referentes conceptuales que van ligados a los estándares de acuerdo con cada grado. Por otro lado, se mencionan las estrategias metodológicas, criterios de evaluación, actividades generales y recursos que pueden utilizar los docentes. A continuación, describimos las características de cada grupo.

5.1.1.1 Grado primero. Comenzamos con el grupo de estudiantes que está iniciando su formación en la básica primaria. En este grupo contamos con 35 estudiantes que están en el rango de edad de 6 a 7 años.

Figura 22

Estudiantes grado primero

Durante la etapa de observación se identificaron fortalezas y debilidades del grupo en general. Son estudiantes que gracias a la motivación de su docente participan en clase independientemente de si tienen certeza de sus conocimientos o no; el ambiente de la clase les permite aprender de sus errores, arriesgarse a pasar al tablero y responder de manera activa a las preguntas de la docente. Sin embargo, hay algunos estudiantes que aún les cuesta el proceso de lectoescritura y esto les condiciona su rendimiento. Las clases siempre inician con el desarrollo de una guía o página del libro, posteriormente con la explicación de la docente se establece cuál será la actividad focal para el desarrollo de la clase. En este momento se hace énfasis en el pensamiento numérico teniendo en cuenta que son estudiantes que están iniciando su proceso de aprendizaje en el mundo de los números naturales. No se evidencia trabajo en resolución de problemas, creemos que esto se realiza de esta forma por la dificultad de los estudiantes para leer textos largos, en general, pocos estudiantes en ese momento saben leer de manera fluida.

Entre las estrategias de la docente, está el uso de recursos manipulativos (Ver figura 22) como regletas de decenas y unidades para la adición de números naturales (hasta el 100); por otro lado, la docente hace uso de conocimientos previos para continuar con el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, los números del 1 al 100, el conteo de tanto en tanto, el uso de los dedos para la adición y sustracción, las unidades y decenas de un número natural.

Figura 23

Docente usando recursos manipulativos

5.1.1.2 Grado tercero. Continuamos con el grupo de tercer grado que cuenta con 36 estudiantes con edades comprendidas entre los 8 y 9 años aproximadamente.

Figura 24

Estudiantes grado tercero

En la etapa de observación conocimos un grupo de estudiantes heterogéneo respecto al rendimiento y su actitud en clase de matemáticas. No todos los estudiantes están interesados por la clase y no participan durante ella, encontramos estudiantes que no han aprendido las tablas de multiplicar. Sin embargo, es una problemática que el docente reconoce y utiliza el apoyo de estudiantes de secundaria como tutores en el desarrollo de las clases, así logra brindar mayor atención a los estudiantes que lo requieren. Adicionalmente, el docente utiliza el trabajo en parejas de manera estratégica para acompañar a los estudiantes que presentan menor rendimiento académico en matemáticas con estudiantes que se destacan en la asignatura. Es importante resaltar la disciplina y orden que se mantiene durante las clases. Aunque no son mayoría, hay varios estudiantes que participan activamente y se ofrecen a pasar al tablero en los momentos que el docente lo solicita. Durante esta etapa los estudiantes están estudiando la multiplicación de 2 y 3 cifras centrándose en el procedimiento aritmético de éstas.

4.1.1.3 Grado quinto. Este es el grupo de estudiantes que cursan su último grado en básica primaria, sus edades están comprendidas entre los 10 y 11 años.

Figura 25

Estudiantes grado quinto

Respecto a los grupos anteriores, estos estudiantes son más disciplinados, ordenados y siguen las indicaciones en clase. La docente instaura reglas que mantienen un ambiente agradable durante el desarrollo de las clases, brinda la oportunidad de participar a los estudiantes repetidamente y los motiva a hacerlo. Al momento de trabajar individualmente, la docente se toma el tiempo de ir puesto por puesto verificando que los estudiantes trabajen y brinda su apoyo de ser necesario. De este modo, nos encontramos con un grupo de estudiantes que atienden y participan de manera ordenada y con ánimo.

Cabe resaltar que particularmente en este grupo se evidencia el desarrollo del proceso de resolución de problemas, dejando de lado el énfasis en la aritmética, esto no se observó en los otros grupos. Consideramos que esto puede ir de la mano los ejes temáticos de los grados, teniendo en cuenta que durante la etapa de observación en grado primero la docente inicia una alfabetización numérica con los estudiantes esperando que aprendan las operaciones de suma y resta con cantidades pequeñas, y en grado tercero el docente se enfoca en que los estudiantes aprendan el algoritmo de la multiplicación, por lo que se abandona el proceso de resolución de problemas que consideramos fundamental al momento de aprender matemáticas.

5.2 Fase II. Diseño de instrumentos

En esta fase se describe el proceso mediante el cual se diseñan tareas funcionales y la forma en la que se dispusieron las entrevistas semiestructuradas.

5.2.1 Diseño de tareas

Para el diseño de las tareas funcionales se consideran los aspectos teóricos del proceso de generalización y de los sistemas de representación, de modo que, cada tarea funcional permita que el estudiante tenga diversas formas de abordarla. Específicamente, nuestro interés es posibilitar el uso de uno o varios sistemas de representación al momento de expresar alguna regularidad en el contexto de la generalización de relaciones funcionales.

Para el diseño de cada tarea funcional se tuvieron en cuenta aspectos mencionados por Radford (2015) como apoyo para docentes en el diseño de actividades, estas son: los conocimientos previos; el diseño de situaciones que resulten interesantes y significativas para los estudiantes; además, las situaciones fueron planteadas con una organización estructurada que permite que los estudiantes evolucionen frente a la complejidad de la tarea.

Seguidamente, describimos dos aspectos clave que guían el diseño de las tareas y las entrevistas semiestructuradas.

5.2.1.1 Ruta de acceso y acciones en el pensamiento funcional. Se considera indispensable identificar caminos en donde los estudiantes desde la básica primaria desarrollen ideas fundamentales para el pensamiento funcional, así como el desarrollo de distintos sistemas de representación; así mismo, acciones que evidencien el desarrollo de dichas ideas.

Para esto tomamos como referente el trabajo Butto y Delgado (2012), Pineda (2017), los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (EBC), los Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas (DBA) y la serie del libro Proyecto Sé Matemáticas (MEN).

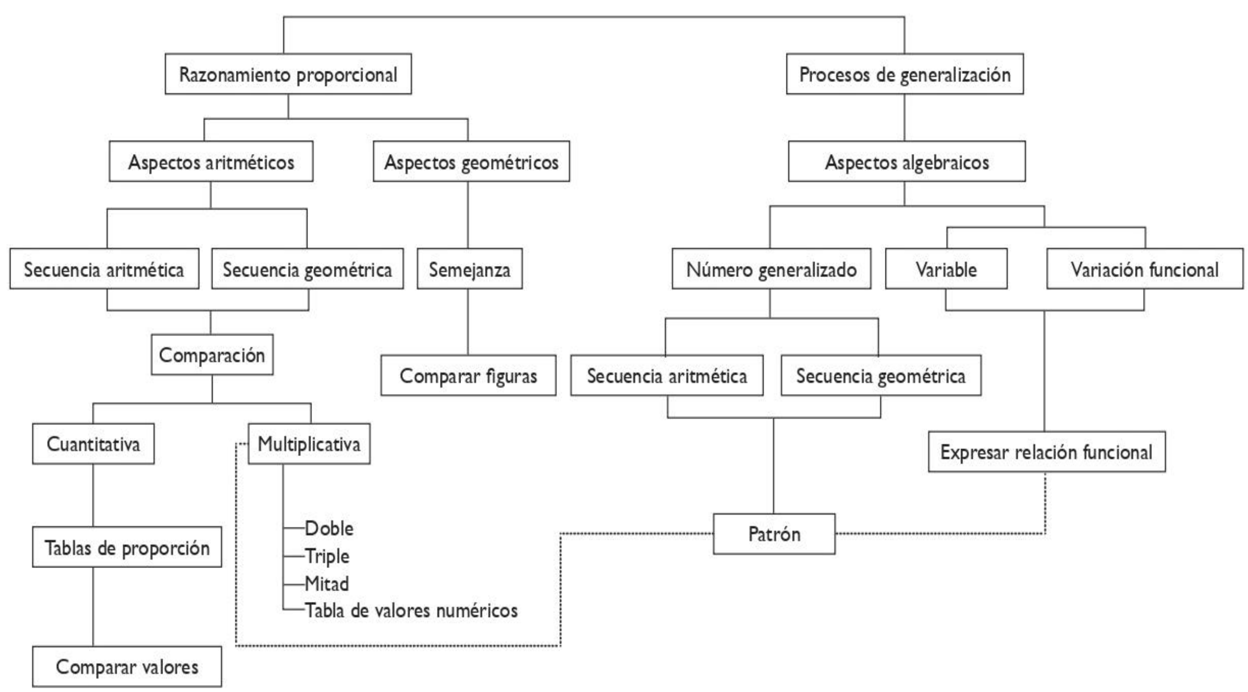
Butto y Delgado (2012) proponen dos rutas conceptuales para acceder al pensamiento algebraico: el razonamiento proporcional y los procesos de generalización. La elección de la primera ruta se fundamenta en la importancia que se da al estudio de la proporcionalidad en el quinto grado. Sin embargo, no es un contenido que se estudie con profundidad en los primeros grados de la educación primaria y por tanto, no se considera acorde con esta investigación.

Por otro lado, el proceso de generalización involucra el razonamiento con patrones, que como hemos mencionado anteriormente, es una actividad que se realiza incluso desde la etapa de Pre-K (NCTM, 2000). Desde esta perspectiva se busca que a partir del estudio de casos particulares los estudiantes puedan detectar similitudes, diferencias, patrones de repetición entre otros aspectos. Además, es posible que necesiten realizar operaciones aritméticas para expresar una generalización de actividades cotidianas en la clase de matemáticas. Así en el aula se deben generar escenarios donde los estudiantes puedan percibir un patrón o una regularidad para que intenten expresarlo de alguna forma (Butto y Delgado, 2012).

Puesto que consideramos al pensamiento funcional como un tipo de pensamiento algebraico, tomamos la segunda ruta de acceso al pensamiento algebraico: los procesos de generalización. Butto y Delgado (2012) establecen que en los procesos de generalización se pueden realizar actividades que permitan la identificación de la variación en un contexto funcional, llevando a los estudiantes a expresar dicha relación por medio de un patrón. Cabe aclarar que desde la perspectiva funcional del álgebra temprana que tomamos en esta investigación, consideramos que, dicha expresión no es necesariamente simbólica, por el contrario, puede presentarse a partir de diferentes representaciones. En la siguiente figura, presentamos la ruta de acceso al pensamiento algebraico establecida por Butto y Delgado (2012).

Figura 26

Ruta de acceso al pensamiento algebraico



Nota. Tomado de (Butto y Delgado, 2012, p. 113)

Siguiendo la ruta de los procesos de generalización, vemos como Butto y Delgado (2012) hacen referencia a aspectos algebraicos que llevan al estudiante al análisis de una cantidad variable en un contexto funcional. Donde el producto final es la expresión de una relación funcional por medio de un patrón, lo cual podemos conectar directamente con las ideas en torno al tipo de generalización y los sistemas de representación de nuestra investigación. Cabe aclarar que en esta investigación hacemos referencia al proceso de generalización desde una concepción dual, como proceso y como producto de dicho proceso.

Igualmente, a partir de lo establecido por el MEN (2006, 2012, 2016) buscamos posibilitar el desarrollo del pensamiento funcional aprovechando los contenidos y procesos matemáticos que se estudian habitualmente. Esto con el objetivo de brindar a los estudiantes la oportunidad de construir formas de pensar alrededor de la noción de función desde los primeros años escolares. Como primera instancia se realizó una revisión de los documentos establecidos por el MEN, los EBC y los DBA, en los grados de interés (Ver Apéndice 2); identificando cuáles estándares y evidencias de aprendizaje están dentro del pensamiento funcional. Así mismo, cómo abordar el pensamiento funcional a través de la transversalidad de distintos tipos de pensamiento matemático. Adicionalmente, realizamos la revisión del texto “Proyecto Sé Matemáticas” del MEN (2012). Esta serie de textos se preparó para instituciones educativas buscando propiciar el desarrollo de competencias y habilidades matemáticas. Esta revisión tuvo como fin enriquecer las ideas relacionadas con el pensamiento funcional identificadas en los documentos curriculares y contar con más argumentos para continuar con la estructuración de una ruta de acceso al pensamiento funcional.

Se identificaron cuatro caminos (Ver Apéndice 3) para el pensamiento funcional con el apoyo de los recursos mencionados anteriormente, estos son:

I. Uso de los números en diferentes contextos para describir, comparar, argumentar y cuantificar situaciones con números desconocidos para dar respuesta a problemas y utilizar diversas representaciones.

II. Recolección, clasificación, organización, interpretación y análisis de datos contenidos en tablas para resolver preguntas de situaciones de su entorno.

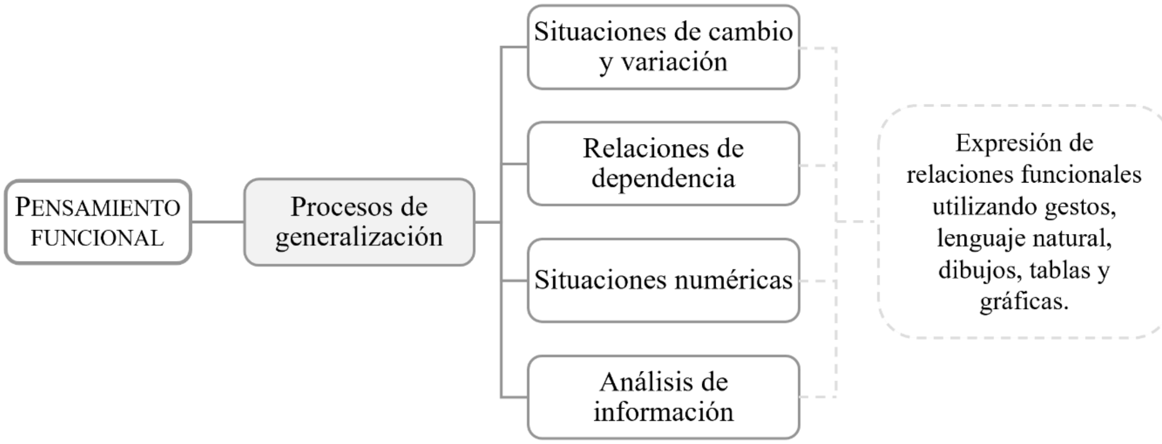
III. Descripción cualitativa de situaciones para identificar, describir, representar e interpretar el cambio y la variación, estableciendo dependencia entre magnitudes y utilizando gestos, lenguaje natural, dibujos y gráficas.

IV. Reconocimiento, descripción, análisis y modelación de regularidades en relaciones de dependencia.

En conclusión, los elementos anteriores se fundamentan en ideas propuestas por el MEN respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sustentados en los procesos matemáticos y en los diferentes tipos de pensamiento, dejando de lado el énfasis únicamente en contenidos. Además, permiten aclarar y amplificar la ruta de acceso al pensamiento funcional por medio del proceso de generalización. De este modo, como resultado final presentamos a continuación, cuatro caminos en la ruta de acceso al pensamiento funcional: los procesos de generalización.

Figura 27

Caminos de acceso al pensamiento funcional en la básica primaria



Por otro lado, haciendo referencia a qué debe hacer el estudiante al momento de trabajar en una tarea funcional, consideramos acciones específicas que dan cuenta del desarrollo de pensamiento funcional. La construcción de dichas acciones se sustenta en los aspectos teóricos presentados en el tercer capítulo, éstos se relacionan con la ruta de acceso al pensamiento funcional de manera que cada camino es transitado por un estudiante a través de una o varias acciones. El constructo "acciones específicas" hace referencia a características necesarias para que un estudiante logre enfrentar una situación funcional (Pineda, 2017). Estas se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 1

Acciones específicas para el pensamiento funcional

Acciones específicas
Hallar relaciones entre las cantidades que varían.
Identificar cómo se construye la relación entre las cantidades que varían.
Analizar las implicaciones de una cantidad que varía respecto a la otra.

Recurrir a diferentes representaciones.
Describir verbalmente la manera en que la relación se va construyendo.
Predecir el comportamiento de la relación funcional en casos posteriores.

Nota. Esta tabla fue construida a partir de la definición de pensamiento funcional expuesta por Pineda (2017).

Por lo tanto, el diseño de las tareas funcionales se realiza a través de uno o más caminos de acceso al pensamiento funcional. Es decir, proponemos situaciones de cambio y variación, y relaciones de dependencia mediante situaciones numéricas y análisis de información. Simultáneamente, se espera que los estudiantes realicen una o varias de las acciones específicas al momento de abordar dichas tareas.

Con base a la ruta de acceso consideramos el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007) para definir las preguntas que acompañan cada tarea funcional. Dicho modelo se presenta a continuación.

5.2.1.2 Modelo de razonamiento inductivo. El modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007) permite descubrir propiedades en fenómenos e identificar regularidades a través de un modo lógico, donde se inicia con el estudio de casos particulares con el objetivo de producir una generalización a partir de ellos.

Consideramos que las preguntas sobre casos particulares (consecutivos y no consecutivos) propician en los estudiantes la identificación o predicción de algún patrón o regularidad inmerso en una tarea funcional. Seguidamente, presentamos el modelo de Razonamiento Inductivo establecido por estos autores que se compone de siete etapas:

a. Observación de casos particulares. Se inicia a partir de la experiencia con casos particulares o ejemplos del problema que se plantea.

b. Organización de casos particulares. Es una etapa indispensable, consideramos que a partir de ella las respuestas de los estudiantes pueden sistematizarse y facilitar la próxima etapa. Por ejemplo, el trabajo con casos particulares cercanos puede en primera instancia ayudar al estudiante a comprender el problema.

c. Búsqueda y predicción de patrones. El estudio con casos particulares conduce a pensar en cómo se comportaría el siguiente caso desconocido. De este modo, los estudiantes tienen la oportunidad de establecer un posible patrón para los datos en los que están trabajando. Sin embargo, aún no logran aplicar este patrón a todos los casos.

d. Formulación de conjeturas. Una afirmación que se basa en hechos empíricos que no han sido validados, es lo que se considera como una conjetura. Basado en casos particulares, el estudiante puede establecer una afirmación sobre todos los casos posibles pero sin estar totalmente seguro de que sea cierto.

e. Validación de conjeturas. Con la formulación de conjeturas existen las dudas de si solo funciona para esos casos específicos o para todos. Durante esta etapa, el estudiante intenta validar sus conjeturas para más casos específicos.

f. Generalización de conjeturas. Basados en conjeturas establecidas a partir de casos particulares y la validación de ellas para casos nuevos, los estudiantes tienen la posibilidad de considerar que es cierta en general.

g. Justificación de conjeturas generales. Para confirmar o no una conjetura generada se lleva a cabo una validación a partir de casos particulares. Sin embargo, no es suficiente para justificar una generalización. Es necesario presentar una explicación de la conjetura para converse a otra persona de la generalización identificada. Podría hablarse de una prueba formal.

Por ende, cuando un estudiante plantee una conjetura podemos evidenciar la manera en lo que expresa, por ejemplo, si lo realiza de manera verbal o escrita; en este caso hacemos referencia al tipo de representación que utiliza. Por otra lado, el tipo de generalización que logre o no establecer podrá ser descrita y categorizada a través de Radford (2006) como se mostró en el apartado del marco conceptual.

5.2.2 Tareas que promueven el pensamiento funcional

A partir de los aspectos mencionados anteriormente se diseñaron tres tareas funcionales en contextos cercanos para los estudiantes. La primera tarea cumple la función de diagnóstico, específicamente se busca enriquecer la caracterización que se realizó en la etapa de observación y contar con argumentos que permitan aterrizar y enriquecer el diseño de las próximas tareas. De esta manera, valoramos el desempeño de los estudiantes y tenemos la posibilidad de determinar si los diseños de las tareas son muy ambiciosos, o por el contrario, es posible aumentar el nivel de dificultad. En los tres grados se presenta el mismo contexto en cada tarea, sin embargo, establecimos algunas modificaciones en el planteamiento de preguntas que buscan aumentar el nivel de dificultad, así como en la implementación, con el fin de atender a las necesidades de los estudiantes. Las tareas reciben el nombre que se presenta en la Figura 28.

Figura 28

Tareas que promueven el pensamiento funcional

Principalmente se realiza una adaptación en la forma de presentar la hoja de trabajo a los estudiantes de grado primero, teniendo en cuenta los aspectos mencionados en la caracterización del grupo. Consideramos el apoyo de recursos manipulativos siguiendo el trabajo de Fuentes (2014), quien estudió el pensamiento funcional en este nivel escolar.

De este modo, los estudiantes del grado primero tienen el enunciado de la tarea en el tablero y no en su hoja de trabajo; esto con el objetivo de realizar la lectura de manera grupal y guiar a los estudiantes en su comprensión. Por otro lado, cada estudiante en su hoja de trabajo cuenta con una tabla en la que se espera dé respuesta a casos particulares cercanos y lejanos de la tarea funcional correspondiente. A continuación, se establece un espacio de “explicación” en su hoja de trabajo en el cual se espera que el estudiante exponga brevemente cómo encuentra los resultados. Además, en el diseño de la prueba diagnóstica para el grado primero, eliminamos la constante que aparece en la tarea funcional buscando un nivel de dificultad inferior (Ver sección 5.2.2.1.1).

Para los estudiantes de tercer y quinto grado presentamos el enunciado de la tarea funcional y las preguntas correspondientes en la hoja de trabajo. En la primera tarea el cuestionario se compone de nueve preguntas. Para la tarea 2, se tomó la decisión de acortar la cantidad de preguntas referentes a casos particulares consecutivos al momento de introducir el uso de la representación tabular. Dicha decisión se toma porque los estudiantes en el desarrollo de la primera tarea no hacen uso de tablas para organizar la información de casos particulares. De este modo, en el inciso 3 se pide el cálculo de personas para los casos particulares de 1 a 10 vagones y su registro en la respectiva tabla.

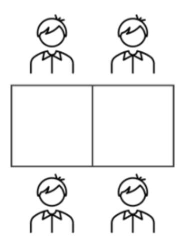
De la misma manera, en el diseño de la última tarea se solicita la organización de la información de los casos particulares, pero en la hoja de trabajo no está la tabla en blanco como en la tarea anterior. Además, añadimos en el inciso seis un espacio para que propongan un caso particular cualquiera y retiramos el inciso que pedía la comprobación de la conjetura dado que en las dos tareas anteriores los estudiantes dejaban de lado este proceso de comprobar.

Dichas decisiones se fundamentan en la caracterización de cada grupo realizada en la fase anterior, en el currículo establecido por el MEN y en investigaciones previas que nos aportan argumentos para la definición de las tareas.

5.2.2.1 Tarea 1: En el restaurante escolar.

5.2.2.1.1 Para el grado primero. En el tablero se presenta el siguiente enunciado:

“En el restaurante escolar del colegio se quiere organizar una gran mesa para que los niños de grado primero compartan su refrigerio. Para que todos tengan un lugar, se juntan mesas cuadradas y se organizan los niños en cada puesto. Las mesas se unen formando una fila. Los niños pueden ubicarse en la mesa como se muestra en la figura”.



Por otro lado, la hoja de trabajo de cada estudiante se compone de una tabla (Ver figura 29).

Figura 29

Hoja de trabajo 1° tarea del restaurante escolar

En el restaurante escolar

NOMBRE: ______________________________

MESAS	NIÑOS
1	
2	
3	
4	
5	
...	
8	

...	
10	
...	
20	
...	
50	
...	
80	
...	
100	

EXPLICACIÓN:

5.2.2.1.2 ***Para los grados tercero y quinto.*** Para los grados tercero y quinto, cada estudiante cuenta con su hoja de trabajo en la que se presenta la tarea con su enunciado y su respectivo cuestionario de manera escrita de la siguiente forma:

"En el restaurante escolar del colegio se quiere organizar una gran mesa para que los niños de quinto grado coman su refrigerio. Para que todos tengan un lugar, se juntan mesas cuadradas y se organizan los niños en cada puesto. Las mesas se unen formando una única fila, cada niño ocupa un lado de una mesa y no pueden ubicarse en las esquinas. Además, en todos los lados de las mesas que no están pegadas a otras debe haber un niño sentado”.

1. Si se unen dos mesas, ¿cuántos niños pueden sentarse a compartir su refrigerio?
2. ¿Cuántos niños pueden sentarse a comer su refrigerio si se juntan 3 mesas?
3. ¿Cuántos niños pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica los razonamientos que te permiten dar respuesta a esta pregunta.
4. Si sabes cuántos niños pueden sentarse al juntar 8 mesas, ¿cómo puedes saber cuántos niños se sentarán al juntar 9 mesas? ¿y 10?
5. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de niños que se pueden sentar a comer su refrigerio iniciando con 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 10 mesas; de tal manera que puedas explicarle a uno de tus compañeros, cuántos niños podrían sentarse a comer su refrigerio.
6. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos niños pueden sentarse a comer su refrigerio en ellas? Explica cómo lo has averiguado.
7. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de niños que pueden sentarse a comer su refrigerio? Explica cómo lo has pensado.
8. Comprueba si lo que pensaste en el punto anterior, funciona para saber cuántos niños se sientan a comer su refrigerio al juntar 1, 2 y 3 mesas.
9. Coloca el nombre de una persona fuera del salón con la que tengas una muy buena relación: _________________________. Escribe cómo le explicarías a esa persona cuántos niños podrían sentarse a comer su refrigerio en una fila formada por cualquier cantidad de mesas.

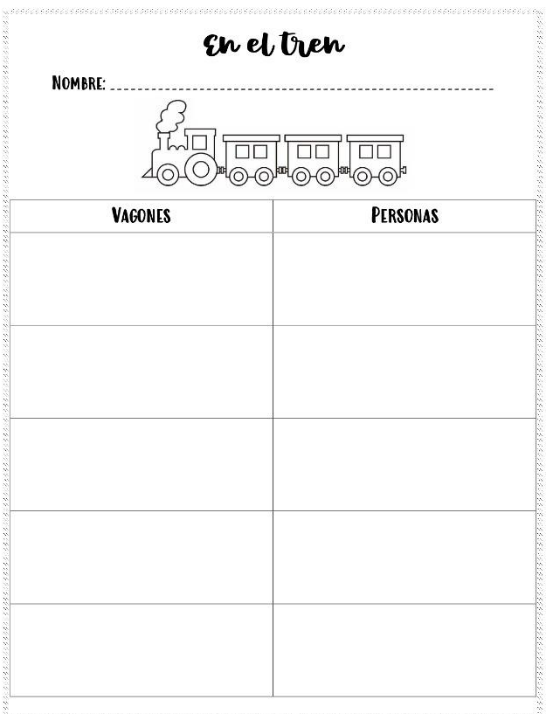
5.2.2.2 Tarea 2. En el tren.

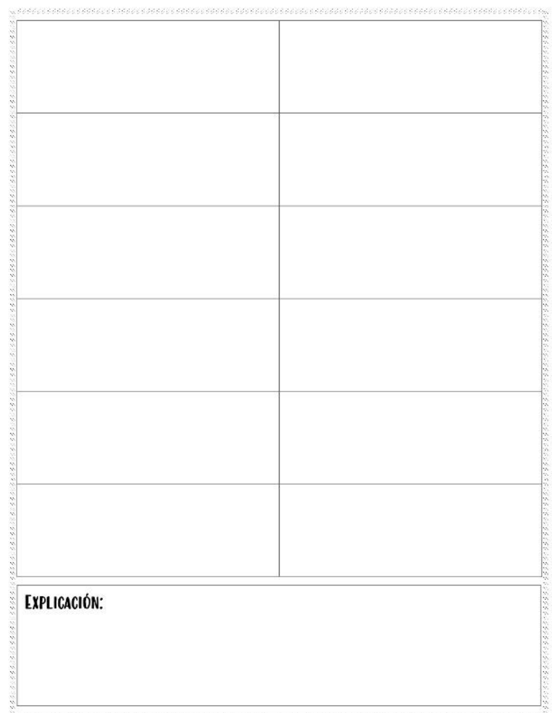
5.2.2.2.1 Para el grado primero. En el tablero se presenta el enunciado: “Juan celebrará su cumpleaños en el centro comercial y junto con sus amigos quieren subir al tren a disfrutar juntos. En cada vagón caben 4 niños y además debe ir siempre el conductor”.

Cada estudiante cuenta con su hoja de trabajo (Ver figura 30).

Figura 30

Hoja de trabajo 1° tarea del tren





5.2.2.2.2 ***Para los grados tercero y quinto.*** En la hoja de trabajo se presenta la tarea del tren:

“Juan celebrará su cumpleaños en el centro comercial y junto con sus amigos quieren subir al tren a disfrutar juntos. En cada vagón caben 4 niños y además debe ir siempre el conductor”.

1. Si hay un vagón, ¿Cuántas personas van en el tren?

2. Si hay dos vagones, ¿Cuántas personas van en el tren?
3. Organiza la información de vagones y personas en la siguiente tabla:

Vagones	Personas
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

4. Con ayuda de la tabla que construiste en el punto anterior, ¿puedes saber cuántas personas van en 11 vagones? ¿Cuántas? ¿Y en 12 vagones?
5. Y si tenemos 30 vagones, ¿Cuántas personas irán en el tren?
6. Si sabes el número de vagones que hay, ¿cómo calculas la cantidad de personas que irán en el tren? Explica cómo lo has pensado.
7. Comprueba si lo que pensaste en el punto anterior, funciona para saber cuántas personas van en 1, 2 y 3 vagones.
8. ¿Cómo sabes cuántas personas van en el tren en cualquier cantidad de vagones?

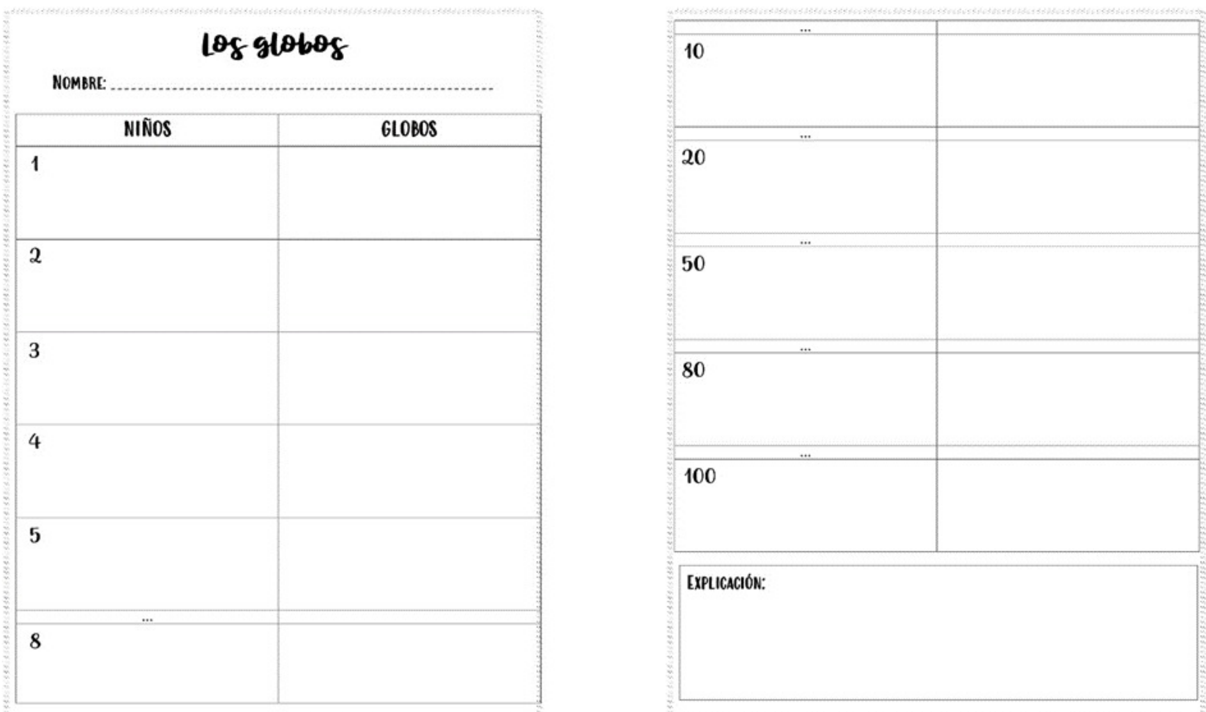
5.2.2.3 Tarea 3: Los globos.

5.2.2.3.1 *Para el grado primero.* El enunciado de esta tarea es el siguiente:

“Para la celebración del día del niño cada estudiante debe traer 3 globos de su color favorito, además, el profe traerá un globo para colocarlo en la puerta y señalar que somos del grado primero”. Del mismo modo, la hoja de trabajo se compone así:

Figura 31

Hoja de trabajo 1° tarea de los globos



Los globos

NOMBRE: ....

NIÑOS	GLOBOS
1	
2	
3	
4	
5	
...	
8	
...	
10	
...	
20	
...	
50	
...	
80	
...	
100	

EXPLICACIÓN:

5.2.2.3.2 Para los grados tercero y quinto. Para esta tarea en particular se tiene una leve modificación en cada grado. En la tarea de los globos se presenta una constante a = número de globos que lleva el docente, en el caso del grado tercero se tienen 3 globos para indicar el grado, así mismo, para el grado quinto se plantean 5 globos. La tarea es:

Para la celebración del día del niño cada estudiante debe traer 3 globos de su color favorito, además, el profe traerá 3 globos para colocarlos en la puerta y señalar que somos del grado tercero.

1. Si un niño trae sus globos, ¿Cuántos globos en total hay en el salón?
2. Si dos niños traen sus globos, ¿Cuántos globos en total hay en el salón?
3. Organiza la información de niños y cantidad de globos si hay 1, 2, 3, 4, 5 y 8 niños.
4. ¿Puedes saber cuántos globos hay en el salón si 11 niños llevan sus globos? ¿Cuántos? ¿y si son 12 niños?
5. Y si son 40 niños, ¿Cuántos globos en total hay en el salón?
6. Dime un número de niños _____. ¿Cuántos globos en total hay en el salón si cada niño lleva sus globos?
7. Si sabes el número de niños que llevan sus globos, ¿Cómo calculas la cantidad total de globos que hay en el salón?
8. ¿Cómo explicarías cómo calcular cuántos globos hay en total en el salón, si conoces la cantidad de niños que llevaron sus globos?

5.2.3 Diseño de las entrevistas semiestructuradas

Para realizar un análisis más profundo y confiable de los datos obtenidos en las producciones escritas, se realizan entrevistas a algunos estudiantes, consideramos el tipo de entrevista semiestructurada para nuestra investigación. Este tipo de entrevistas están basadas en "una guía de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener más información" (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018, p. 449). De este modo, la entrevista brinda la oportunidad de indagar sobre cómo los estudiantes reflexionan sobre una tarea funcional. Por un lado se plantean preguntas fijas que fueron formuladas con un propósito específico y adicional, preguntas que surgen dentro del desarrollo de la entrevista sobre aspectos necesarios para la recolección y análisis de los datos. De igual modo, la estructura de las preguntas está enfocada en llevar al estudiante a la producción de generalizaciones de las relaciones funcionales inmersas en la tarea.

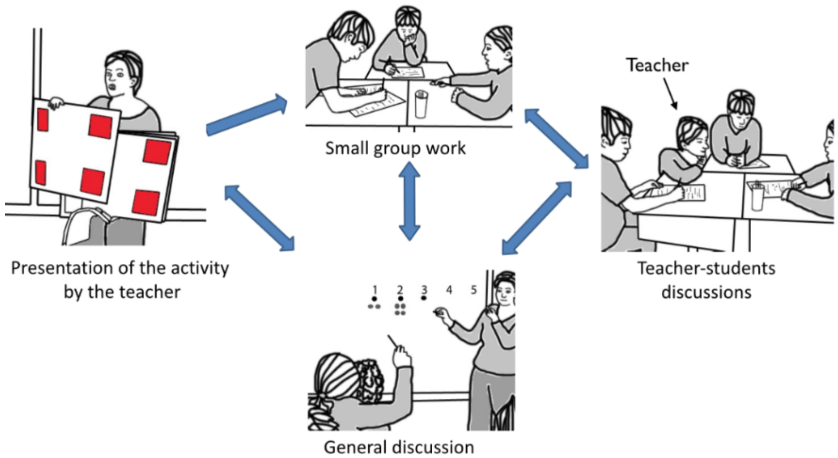
Con esta entrevista se busca complementar los procedimientos realizados por los estudiantes en su hoja de trabajo y en algunos casos, cuestionar el porqué y el cómo de sus razonamientos. Para esto, con sus hojas de trabajo y los recursos manipulativos de cada tarea, se proponen preguntas, como: ¿Qué hiciste? ¿Cómo lo pensaste? ¿Cómo lo explicarías? ¿Por qué lo hiciste así? ¿Podríamos saber la solución para otra cantidad de niños?, entre otras.

5.3 Fase III. Implementación en el aula

Tomamos como referente para la implementación, la actividad de aula como *sistema emergente* (Radford, 2015). A partir de los objetivos de aprendizaje y la actividad en el aula, se busca la actualización específica del conocimiento con la actividad del docente y de los alumnos. El término "emergente" hace referencia a la concepción del aula como un sistema que evoluciona a través de estados, de tal forma, que dicha evolución no puede ser determinada de antemano (Radford, 2015).

Figura 32

La actividad de aula como sistema emergente



Nota. Tomado de (Radford, 2015, p. 10)

Como se observa en la Figura 25, el trabajo en el aula se sigue de la siguiente manera: (a) presentación de la actividad por parte del docente; (b) formación de pequeños grupos de trabajo; (c) discusión entre el docente y los estudiantes basada en preguntas y retroalimentación; (d) en cierto punto el docente puede fomentar junto con el grupo, una discusión general donde los grupos puedan expresar sus ideas y otros grupos puedan desafiarlas, aportar ideas con alguna mejora o generalizar lo que otros grupos produzcan. Es decir, no se validará si se realiza bien o no cada tarea, esta socialización se hace para obtener argumentos sobre las respuestas de los estudiantes.

De este modo, cada sesión se inicia con la presentación de la tarea funcional por parte del docente investigador, se cuenta con el apoyo del tablero y de recursos manipulativos para ambientar el contexto de la tarea. Con la supervisión del docente del curso se forman grupos de trabajo de dos estudiantes y cada pareja empieza a ocuparse en su hoja de trabajo; es importante resaltar que durante esta etapa el docente investigador tiene como objetivo guiar y cuestionar a los estudiantes sobre la compresión de la tarea. Finalmente, se busca que los estudiantes expresen sus ideas de manera oral frente a sus compañeros.

6. Implementación: análisis y resultados

En este capítulo se presenta el análisis a priori y a posteriori de las tareas abordadas en la fase de implementación. Estas tareas se diseñaron con la intención de estudiar y describir el pensamiento funcional en estudiantes de básica primaria a partir de su desempeño en cada una de ellas.

6.1 Análisis a priori

Realizamos un análisis a priori sobre las tres tareas funcionales señalando las posibles formas en que los estudiantes pueden desarrollarlas. Destacamos las acciones específicas del pensamiento funcional que pueden emerger, el tipo de generalización que pueden mostrar los estudiantes (Radford, 2006) y los diferentes sistemas de representación que emergen en la actividad matemática. Se espera que con la lectura en voz alta del enunciado de cada tarea y el apoyo de las figuras que se presentan junto con cada enunciado, los estudiantes tengan el primer acercamiento hacia la comprensión de la situación funcional planteada. A continuación, describimos el análisis grado por grado.

6.1.1 Grado primero

Teniendo en cuenta la edad de los estudiantes y su nivel de lectoescritura, consideramos que los recursos manipulativos son un apoyo significativo para la explicación y exploración de la tarea en casos particulares diferentes.

Iniciamos intencionalmente con una función lineal y no con una función afín, de este modo, analizando el desempeño y los resultados de los estudiantes en esta primera tarea decidiremos si continuamos con esta adaptación o podemos considerar en la siguiente sesión funciones afines como en el grado tercero y quinto.

En la prueba diagnóstica la relación funcional en juego es $f(x) = 2x$ donde x es un número natural distinto a cero; esta relación representa la cantidad de niños que se pueden sentar, en este caso resulta ser el doble de la cantidad de mesas. Teniendo en cuenta el nivel escolar de los estudiantes, esta relación funcional involucra únicamente la adición de números naturales, cuando sumamos dos veces el mismo número. De este modo, esperamos que los estudiantes realicen la adición de un número con el mismo.

En la segunda tarea titulada “el tren”, se espera inicialmente que los estudiantes identifiquen la constante $b = 1$ que corresponde al conductor del tren; además, que determinen que el conteo se inicia con 5 personas cuando hay un solo vagón. Por otro lado, los estudiantes pueden encontrar la relación de ir contando de 4 en 4, o sumando 4 a medida que se añade un vagón y así den respuesta a casos particulares consecutivos. Respecto a casos particulares lejanos consideramos una dificultad mayor respecto a la tarea 1, de este modo, esperamos que los estudiantes den respuesta a números pequeños (suponemos no mayores a 10) al sumar 4 niños por cada vagón y luego añadir la constante 1 por el conductor, estas sumas exhaustivas pueden tomar mucho tiempo y ser confusas para ellos, por tanto, consideramos que los estudiantes pueden realizar el proceso para números pequeños.

Del mismo modo, en la tercera tarea no se espera la respuesta a casos particulares lejanos no consecutivos para cantidades grandes por lo mencionado anteriormente. Sin embargo, se espera que los estudiantes den respuesta a casos particulares consecutivos con el conteo de 3 en 3, y a casos particulares lejanos (pequeños) con la suma exhaustiva de 3 globos con la constante 1.

Respecto a las acciones específicas del pensamiento funcional consideramos que el grupo de estudiantes está en la capacidad de hallar la relaciones entre las cantidades que varían (mesas con niños, vagones con personas y niños con globos) e identificar que la relación se construye si calculamos el doble, el triple o el cuádruple utilizando únicamente la adición de números naturales. Así mismo, esperamos que recurran a representaciones gestuales con sus dedos, verbales (orales) y en su mayoría que sean representaciones pictóricas apoyadas por expresiones verbales.

En este nivel no esperamos que se expresen de manera escrita con frases completas debido al nivel de lectoescritura de los estudiantes, sin embargo, los estudiantes pueden describir verbalmente cómo se construye la relación entre las cantidades. Estos resultados atendiendo a un tipo de generalización factual en donde los estudiantes apenas identifican la relación del doble, el triple o el cuádruple y lo expresan de manera simple y en pocas palabras.

6.1.2 Grado tercero

En grado tercero se espera que las tareas y el encuentro con las relaciones funcionales lleve a los estudiantes a considerar el producto de números naturales y no se queden únicamente en la adición. Sin embargo, tenemos en cuenta que en este nivel escolar los estudiantes si bien ya saben leer correctamente, no están muy relacionados con las tablas de multiplicar y pueden acudir más a la adición. Se espera que los estudiantes puedan comprender el enunciado y las preguntas en torno a la tarea funcional de manera más rápida y simple que con el grado primero. Sin embargo, teniendo en cuenta que durante la etapa de observación el docente no abordó resolución de problemas, no tenemos certeza de la habilidad de los estudiantes para comprender el enunciado.

En general, cada tarea se diseñó siguiendo el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007), por lo que con el orden de cada pregunta del cuestionario lleva al estudiante a la exploración de casos particulares cercanos y lejanos, para que finalmente identifique cómo se está construyendo cada relación.

En la tarea del restaurante escolar, se predice que los estudiantes indaguen en relaciones del doble o el triple de un número, consideren los números pares e impares y que finalmente puedan identificar que la tarea funcional se puede generalizar con el doble más 2. En este caso, con el apoyo de representaciones pictóricas esperamos que los estudiantes identifiquen que así se varíe el número de mesas, siempre estarán dos niños en las esquinas y por tanto, siempre debemos sumar 2 al doble de mesas. Del mismo modo, dicha exploración de casos particulares se espera que lleve a los estudiantes a generalizar las relaciones el doble, el triple y el cuádruple haciendo uso de la adición en casos cercanos. Esto puede permitir que posteriormente los estudiantes sientan la necesidad de hacer uso de la multiplicación para casos en los que hacer la suma sea más complejo. Además, se espera que identifiquen la constante en cada tarea y ésta sea añadida al final de cada conteo. De este modo, los estudiantes pueden estructurar las relaciones funcionales de las tareas 2 y 3, y dar respuesta a cualquier caso particular, así como predecir casos posteriores.

Proponemos que en este nivel, los estudiantes están en la capacidad de hallar la relación e identificar como se está construyendo. De modo que acudan a representaciones no sólo pictóricas, si no gestuales, verbales (de manera oral y escrita) y puedan combinar los dibujos con frases clave que generalicen lo que ocurre en dicha tarea. Consideramos que pueden aparecer generalizaciones factuales más completas que en el nivel anterior, en donde los estudiantes pueden expresar de manera oral y escrita. Sin embargo, no esperamos ningún tipo de representación simbólica.

6.1.3 Grado quinto

A medida que aplicamos la prueba en grados más avanzados, esperamos que las producciones de los estudiantes sean más sofisticadas. En el quinto grado, se espera que los estudiantes hagan énfasis en la multiplicación para la relación del doble, el triple y el cuádruple de un número dejando de lado la adición. En la primera tarea al momento de explorar los casos particulares, se espera que los estudiantes relacionen el número de mesas con el número de niños que se pueden sentar con la relación multiplicativa del doble de, o en su defecto, del triple de. Sin embargo, al momento de verificar dichas conjeturas se espera que identifiquen la constante que se suma en todos los casos, esto con apoyo de tablas o con la representación pictórica; para que finalmente puedan llegar a identificar cómo se construye la relación del doble más dos. De manera similar, se espera que los estudiantes atiendan a las demás tareas.

En este nivel los estudiantes pueden además de establecer la relación entre las cantidades que varían, recurrir a diferentes representaciones: gestuales, pictóricas, verbales (orales y escritas) y además, hacer uso de tablas. Por otro lado, consideramos que los estudiantes pueden explicar de manera verbal con argumentos, palabras o frases clave lo que está ocurriendo en la situación funcional. En la etapa de observación, se evidenció que los estudiantes trabajan con secuencias numéricas, de modo que, con la exploración de los casos particulares cercarnos los estudiantes habrán encontrado una secuencia numérica y estarán en la capacidad de predecir el comportamiento de la relación funcional en casos posteriores. Para los estudiantes de este grado, si bien se espera una generalización factual, también consideramos que es posible que evidencien generalizaciones contextuales a partir de frases clave que describan la regularidad que ocurre en la tarea funcional, sin embargo, no esperamos un tipo de generalización más sofisticada.

6.2 Análisis a posteriori

Para este análisis se tiene en cuenta la producción escrita y verbal de los estudiantes a la luz de los aspectos teóricos que rigen esta investigación. De acuerdo con Bastías (2016):

> El pensamiento funcional incorpora la construcción y generalización de patrones y relaciones usando diversas herramientas lingüísticas y representacionales. Por tanto, se considera que forman parte de esta categoría todas las respuestas o estrategias en las que se aprecia que el alumno identifica una relación entre dos cantidades variables y describen el patrón funcional apropiado que exprese dicha relación. (p. 34)

Para describir el pensamiento funcional de los estudiantes partimos de una adaptación de la definición de pensamiento funcional que presenta Pineda (2017), de este modo, se establecen acciones específicas que los estudiantes pueden llevar a cabo al momento de enfrentarse a una tarea funcional. Tenemos en cuenta los aspectos sobre el pensamiento funcional que rigen esta investigación: el proceso de generalización y los sistemas de representación. Para caracterizar la manera de generalizar de los estudiantes, consideramos la clasificación establecida por Radford (2006) y, en el caso de los sistemas de representación, utilizamos los expuestos en el capítulo del marco conceptual. Así, utilizamos las siguientes categorías presentadas en la siguiente tabla:

Tabla 2

Categorías para el análisis de datos

Categorías	Subcategorías
Acciones específicas del pensamiento funcional	Hallar relaciones entre las cantidades que varían.
	Identificar cómo se construye la relación entre las cantidades que varían.
	Analizar las implicaciones de una cantidad que varía respecto a la otra.
	Recurrir a diferentes representaciones.
	Describir verbalmente la manera en que la relación se va construyendo.
	Predecir el comportamiento de la relación funcional en casos posteriores.
Generalización	Generalización factual
	Generalización contextual
	Generalización simbólica
Sistemas de representación	Sistema de representación gestual
	Sistema de representación verbal
	Sistema de representación pictórico
	Sistema de representación simbólico
	Sistema de representación tabular
	Sistema de representación múltiple

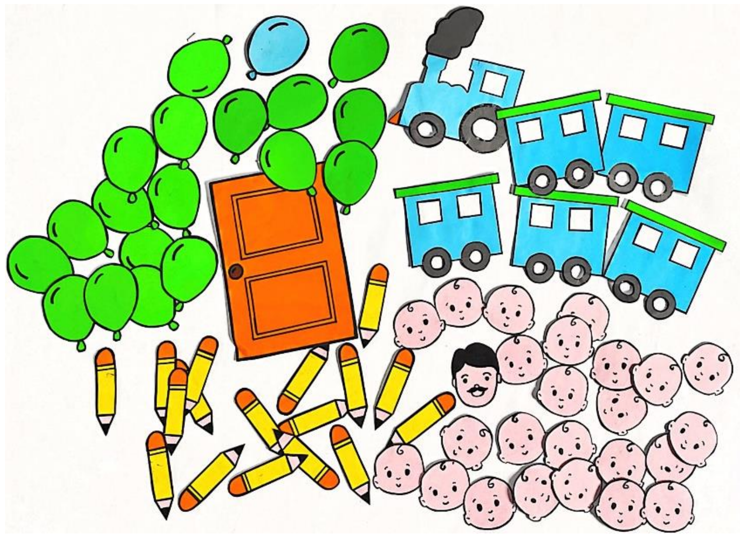
Cada categoría está compuesta de subcategorías, sin embargo, cabe resaltar la relación estrecha entre ellas. Dado que, en cada acción específica del pensamiento funcional el estudiante hace uso de uno o más sistemas de representación y éste a su vez permite analizar el tipo de generalización que reporta el estudiante, es decir, ninguna categoría está aislada de otra y se complementan entre sí.

Se realizaron 4 sesiones de trabajo con cada grupo, se presentaron 3 tareas funcionales a los estudiantes (una por sesión) con diferentes preguntas en torno a ellas y posteriormente, una sesión para la realización de las entrevistas semiestructuradas a algunos estudiantes de cada grupo. Como se mostró en el análisis a priori, dichas tareas y entrevistas involucran relaciones funcionales lineales y afines.

Siguiendo la actividad de aula se inicia cada sesión con la presentación de la tarea funcional correspondiente, esta primera fase incluye la lectura en voz alta de la tarea, explicación en el tablero y el apoyo de los recursos manipulativos (ver Figura 33). Se formaron grupos de dos estudiantes con la supervisión y colaboración del docente del curso. Durante la implementación, que varió entre 50 y 60 minutos, se supervisó el trabajo de los estudiantes y se atendieron sus dudas, de modo que, con cada intervención se buscó principalmente guiar a los estudiantes en la comprensión de cada tarea y cuestionarlos sobre lo que estaban pensando. Finalmente, se realizó una discusión general con la participación de todo el grupo de estudiantes. Los estudiantes registraron sus respuestas, procedimientos e ideas en su respectiva hoja de trabajo. A continuación, destacamos y describimos cómo se llevó a cabo este proceso y cómo respondieron los estudiantes esta fase de implementaciones y entrevistas.

Figura 33

Recursos manipulativos utilizados en las implementaciones y entrevistas



Se presenta un análisis tarea a tarea que evidencia o no, la aparición de pensamiento funcional de estudiantes de básica primaria de acuerdo con las categorías de análisis.

6.2.1 Producciones de los alumnos en el cuestionario

En este apartado se presentan los resultados de los estudiantes al abordar el cuestionario escrito de cada tarea funcional. Se describe su desempeño de acuerdo con las categorías descritas anteriormente: las acciones específicas del pensamiento funcional, el tipo de generalización que se evidencia y uso de sistemas de sistemas de representación. A partir de estos aspectos nos enfocamos en los resultados comunes para la mayoría de los estudiantes y en casos particulares que se destacan.

6.2.1.1 Tarea 1: En el restaurante escolar. Se inicia con la descripción de los resultados de los estudiantes ante la primera tarea titulada "En el restaurante escolar" que se diseñó a manera de diagnóstico.

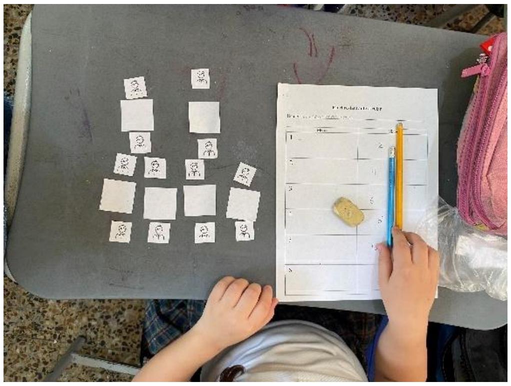
6.2.1.1.1 Grado primero. Los resultados de esta primera tarea funcionaron como guía para el diseño de las tareas posteriores. Se inició con esta tarea en particular que hace referencia a una función lineal de la forma $2x$, en donde la relación entre las cantidades que varían es de proporcionalidad directa y x es un número natural mayor que 0.

En general el grupo de estudiantes tuvo un desempeño favorable, como resultado de un primer análisis clasificamos los resultados en tres grupos: estudiantes que concluyen, estudiantes que responden a casos particulares pero no concluyen y estudiantes con errores aritméticos simples.

Evidenciamos pensamiento funcional en los estudiantes dado que hallan la relación entre el número de mesas y el número de niños, e identifican cómo se construye dicha relación. Dan respuesta correcta a casos particulares cercanos y lejanos a través de diferentes métodos. Cabe resaltar que los estudiantes de este grado están iniciando su formación escolar por lo que buscan diferentes maneras de contar (Ver figura 34). Entre las formas que ellos utilizan para los conteos, encontramos: uso de los recursos manipulativos, uso de los dedos, uso de palitos y dibujos de las mesas con los niños. En este caso, encontramos que el estudiante utiliza recortes de mesas y los niños para representar la situación. De este modo, organiza 2 niños en cada mesa y realiza los respectivos conteos.

Figura 34

Formas de contar en estudiantes de grado primero



Queremos resaltar la forma como el estudiante realiza el conteo, que aparece en la Figura 35. Dibuja mesas cuadradas y por cada mesa cuenta dos (uno arriba y uno abajo) representado cada niño en su puesto con un punto.

Figura 35

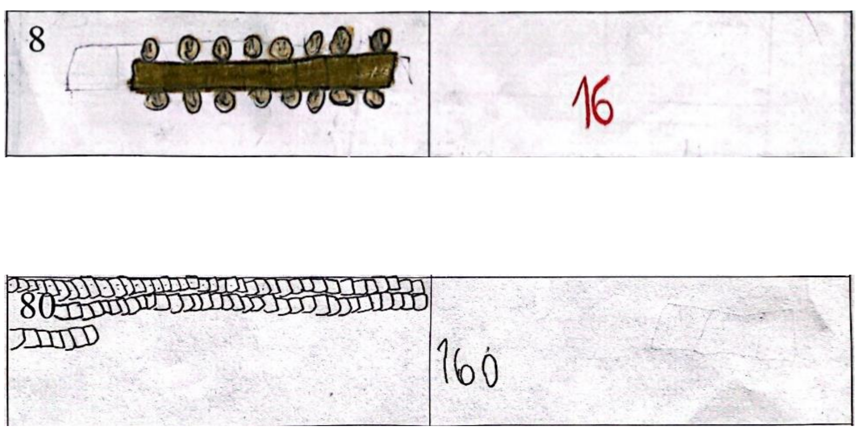
Conteo de niños por cada mesa

Por otro lado, al momento de abordar los casos particulares 20, 50, 80 y 100 los estudiantes identifican la forma de responder y realizan el conteo correctamente colocando el número de niños que corresponde en cada caso particular. Sin embargo, es una cuestión que trabajaremos en la entrevista semiestructurada para profundizar en cómo los estudiantes encuentran y argumentan su respuesta, dado que ya no pueden ir sumando de dos en dos como en los casos particulares consecutivos.

Respecto a los sistemas de representación, los estudiantes en este nivel escolar hacen uso exhaustivo de dibujos. El uso de estos dibujos se utiliza para hacer el respectivo conteo de niños de acuerdo con el número de mesas y posteriormente, es acompañado del número que corresponde. Es decir, los estudiantes también hacen uso de la representación simbólica de tipo numérico. En esta tarea dibujaron las mesas y los niños en casos particulares sin que a algunos le importe que son números "muy grandes" y por ende debían hacer muchos dibujos como podemos ver en la Figura 36.

Figura 36

Representaciones pictóricas en 1°: En el restaurante escolar



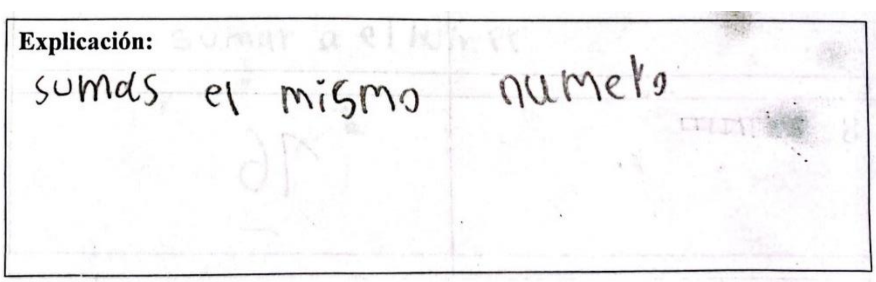
La representación simbólico-numérica es utilizada principalmente en casos particulares de números "grandes", consideramos que esto ocurre debido a la cantidad de dibujos que deberían hacer en casos particulares mayores a 10. Encontramos estudiantes que inician utilizando dibujos para los casos particulares de 1 a 10 mesas, y en los casos más grandes abandonan esta representación y señalan la cantidad de niños utilizando únicamente el número correspondiente; esto como resultado de estructurar la forma de relacionar la cantidad mesas con la cantidad de niños.

Dado el nivel de lectoescritura, la aparición de la representación verbal escrita es escasa. Cada hoja de trabajo tiene al final un espacio de explicación en donde alrededor de un tercio del grupo logra concluir que "sumamos el mismo número". De este modo, señalamos el uso de representaciones múltiples en dónde la representación pictórica es la principal.

Podemos identificar evidencias de un tipo de generalización factual basado en acciones numéricas de conteo uno a uno (o de dos en dos), cuando los estudiantes trabajan con un caso particular solicitado. Sin embargo, siempre acuden a realizar dicho conteo por lo que en este caso no podemos considerar un grado más profundo de generalización. Por otro lado, consideramos, aunque en menor escala, la existencia de generalizaciones contextuales en donde los estudiantes no necesitan el uso de conteo para dar respuesta a casos particulares. Los estudiantes encuentran su método para determinar la cantidad de niños de una manera más rápida sumando el número de mesas con él mismo (Ver figura 37) y así hacen uso primordial de la frase clave "sumas el mismo número".

Figura 37

Frase clave en estudiantes de 1°



Durante el momento de socialización algunos estudiantes pueden encontrar la respuesta a cualquier caso particular y se evidencia una forma de generalizar la relación funcional como en la figura anterior. En este caso, trabajamos con números menores a 100, para ese momento los estudiantes experimentaron en clase hasta el número 200. Por tal razón, se toma la decisión de abordar en las siguientes tareas con funciones afines que se proponen con un mayor nivel de dificultad.

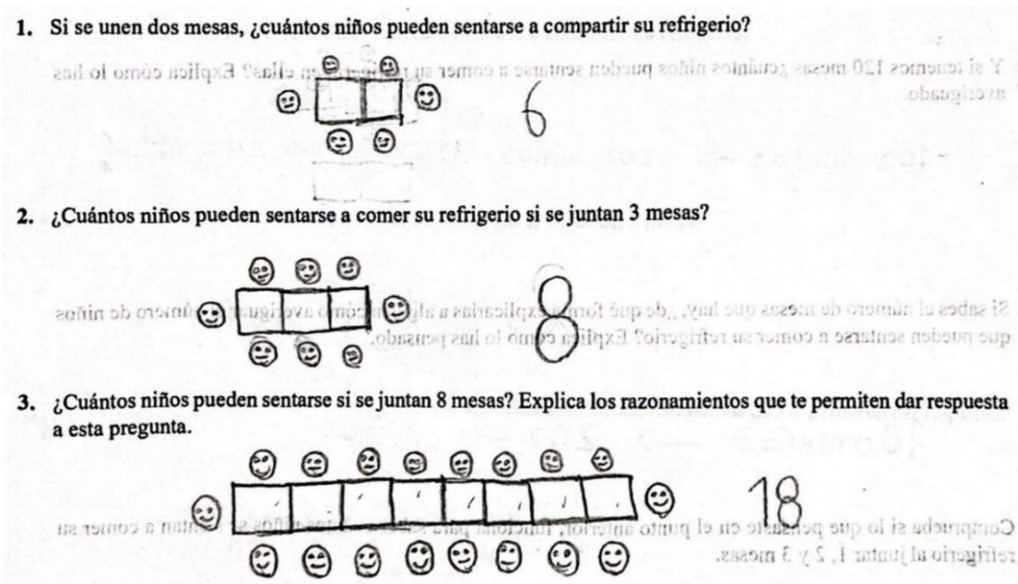
6.2.1.1.2 Grado tercero. A continuación, describimos los resultados de la implementación de la primera tarea funcional en los estudiantes de tercer grado.

Los estudiantes encontraron la relación entre las cantidades que están variando, en este caso, las mesas y los niños. Respecto al trabajo con casos particulares de 2 a 10, los estudiantes logran dar respuesta de manera correcta de maneras distintas: usando dibujos, usando la adición o usando la multiplicación. Encontramos que los estudiantes identifican cómo se construye la relación entre la cantidad de mesas y de niños, y recurren a diferentes representaciones.

Al momento de argumentar las respuestas, alrededor de la mitad de los estudiantes realizan el dibujo de mesas con niños para dar solución (Ver figura 38) y hacer el respectivo conteo de cada caso particular.

Figura 38

Representaciones pictóricas en 3°: En el restaurante escolar



1. Si se unen dos mesas, ¿cuántos niños pueden sentarse a compartir su refrigerio?

6

2. ¿Cuántos niños pueden sentarse a comer su refrigerio si se juntan 3 mesas?

8

3. ¿Cuántos niños pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica los razonamientos que te permiten dar respuesta a esta pregunta.

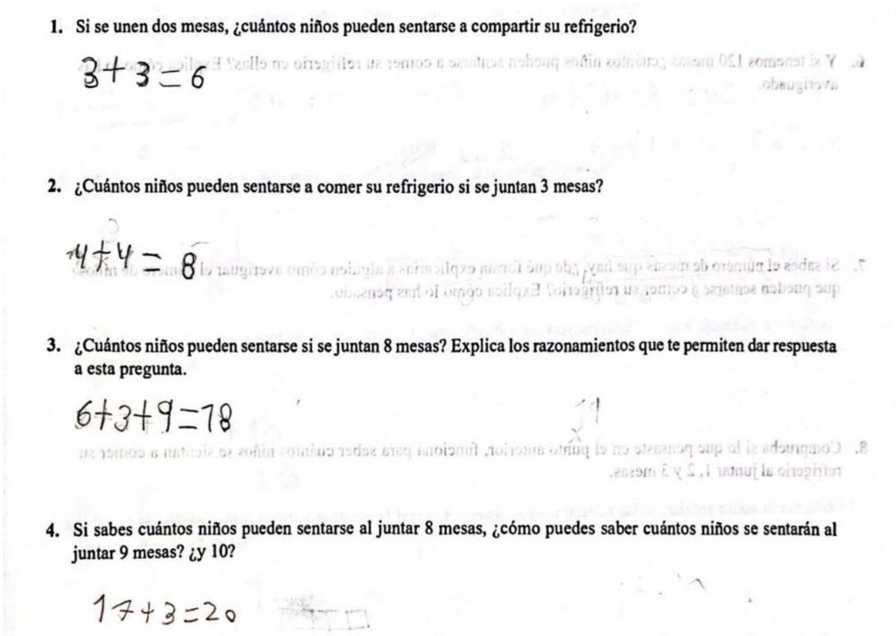
18

Sin embargo, aunque los estudiantes responden a los casos particulares, ninguno de ellos evidencia que encuentre la respuesta a un caso particular utilizando el caso anterior, principal objetivo del numeral 4 de la tarea.

Otra forma de argumentación son las adiciones, que corresponden al uso del sistema de representación simbólico-numérico. Encontramos resultados particulares e inesperados en este caso. Es decir, esperábamos que en esta tarea aparecieran formas como $m + m + 2 = n$, donde m es el número de mesas y n es el número de niños. No obstante, encontramos modelos diferentes como los que aparecen en la figura 39.

Figura 39

Representaciones simbólicas en 3°: En el restaurante escolar



1. Si se unen dos mesas, ¿cuántos niños pueden sentarse a compartir su refrigerio?

3+3=6

2. ¿Cuántos niños pueden sentarse a comer su refrigerio si se juntan 3 mesas?

4+4=8

3. ¿Cuántos niños pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica los razonamientos que te permiten dar respuesta a esta pregunta.

6+3+9=18

4. Si sabes cuántos niños pueden sentarse al juntar 8 mesas, ¿cómo puedes saber cuántos niños se sentarán al juntar 9 mesas? ¿y 10?

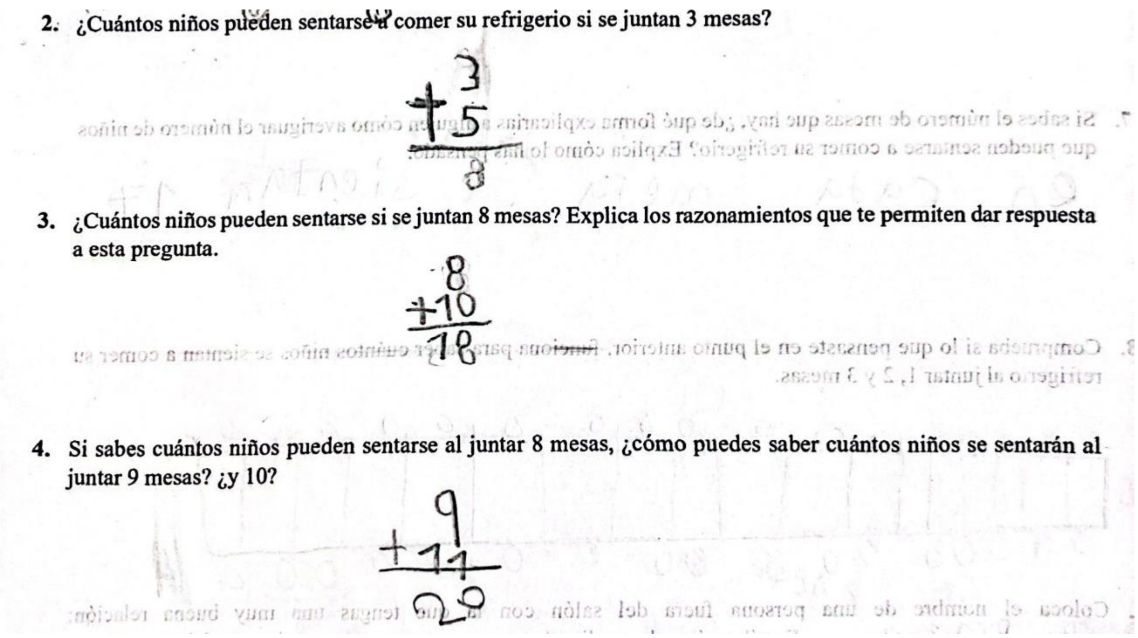
17+3=20

Figura 39. Representaciones simbólicas en 3°: En el restaurante escolar

En estos casos creemos que los estudiantes hacen una suma previa a la que registran en su hoja de trabajo. En la adición $3 + 3 = 6$ para el caso de dos mesas los estudiantes dividen la constante 2 (niños en las esquinas) y lo añaden a la fila superior e inferior respectivamente, luego si realizan la adición. Por otro lado, están los estudiantes de la Figura 40. Estos estudiantes añaden la constante 2 a la segunda fila de niños.

Figura 40

Representaciones simbólicas en 3°: En el restaurante escolar


2. ¿Cuántos niños pueden sentarse a comer su refrigerio si se juntan 3 mesas?

3 + 5 = 8

3. ¿Cuántos niños pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica los razonamientos que te permiten dar respuesta a esta pregunta.

8 + 10 = 18

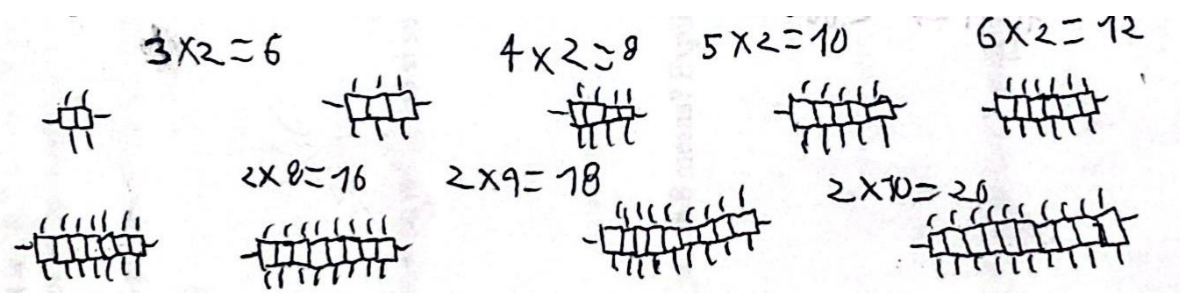
4. Si sabes cuántos niños pueden sentarse al juntar 8 mesas, ¿cómo puedes saber cuántos niños se sentarán al juntar 9 mesas? ¿y 10?

9 + 11 = 20

Por otro lado, encontramos estudiantes que dan respuesta correcta al caso particular pero su manera de argumentar es muy personal. Estos estudiantes en particular hacen uso de multiplicaciones que aparentemente no tienen sentido con los datos que proporcionan la tarea. En la siguiente figura mostramos la respuesta de uno de estos estudiantes.

Figura 41

Uso curioso de la multiplicación de números naturales

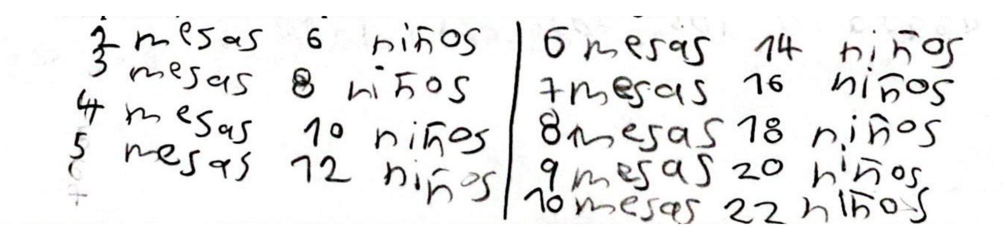


Como se observa, el estudiante encuentra la respuesta correcta a cada caso particular, sin embargo, al momento de buscar un argumento numérico indaga sobre “dos números que multiplicados den como resultado el número de niños”, sin importar si esos números son las cantidades indicadas en el contexto de la tarea. En este caso, el estudiante cree que sus argumentos son correctos dado que también está utilizando una representación pictórica y los dos resultados coinciden entre sí. Otra forma de entender este proceso es que el estudiante sume primero uno a cada fila de niños y el resultado lo multiplique por 2.

En esta primera tarea podemos observar que no existe el uso de tablas para organizar la información. Ninguno de los estudiantes organizó la información sobre el número de mesas y el número de niños utilizando la representación tabular, solo hacen un listado de los resultados que encuentran para cada cantidad de mesas, como se muestra en la figura 39. En general, podemos ver el uso de representaciones pictóricas, representaciones simbólico-numéricas (en adición o multiplicación) y la combinación de estas dos. Se encontró poca evidencia de representaciones verbales en las hojas de trabajo.

Figura 42

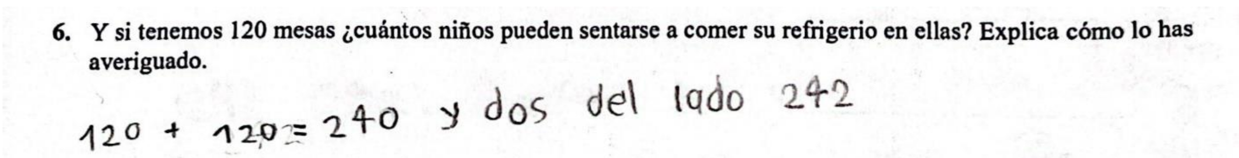
Organización de información en un estudiante de 3°



Luego de organizar esta información, los estudiantes tuvieron las herramientas para identificar la forma en la que se estaba construyendo un patrón. Dado que, dieron solución al caso particular de 120 mesas. El proceso evidenciado por los estudiantes se basó en hacer la suma de 120 con 120 y al final sumar 2 (Ver Figura 43).

Figura 43

Respuesta a un caso particular 3°: En el restaurante escolar



6. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos niños pueden sentarse a comer su refrigerio en ellas? Explica cómo lo has averiguado.

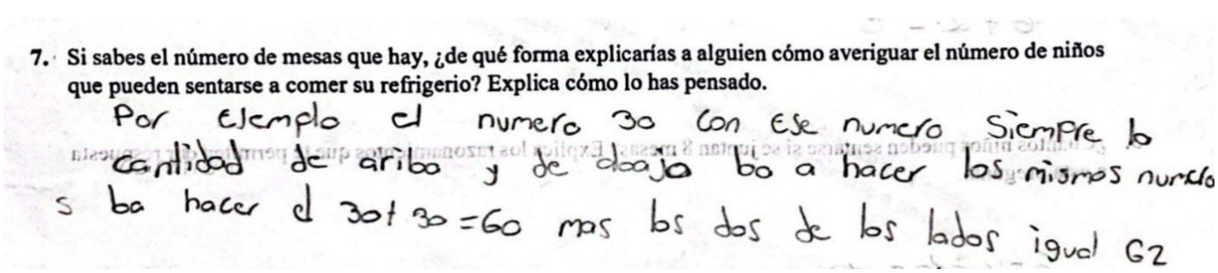
120 + 120 = 240 y dos del lado 242

En esta implementación podemos notar que no es natural para los estudiantes plantear una conjetura, para luego comprobar y finalmente concluir teniendo en cuenta las etapas que plantea Cañadas y Castro (2007).

En el numeral 7, si bien los estudiantes explican la forma de averiguar el número de niños que pueden sentarse a comer su refrigerio conociendo previamente el número de mesas, no ven la necesidad de comprobar si lo que están pensando es correcto o no, para posteriormente concluir con certeza que el proceso que conjeturaban es correcto o no. Encontramos respuestas a partir de la explicación de casos particulares como la siguiente:

Figura 44

Explicación de estudiante de 3°: En el restaurante escolar



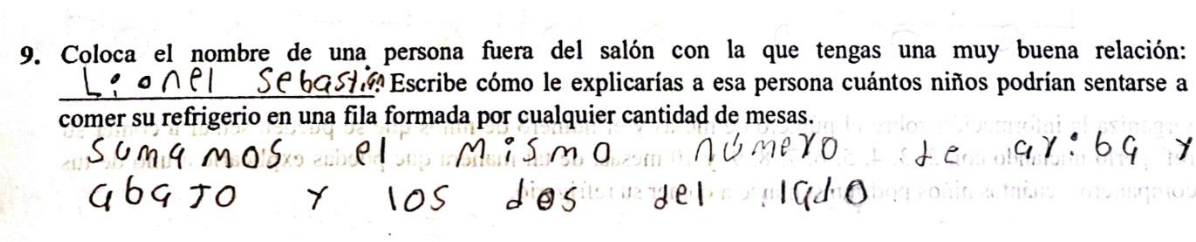
7. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de niños que pueden sentarse a comer su refrigerio? Explica cómo lo has pensado.

Por Ejemplo el numero 30 Con Ese numero Siempre la cantidad de aribo y de abajo bo a hacer los mismos numeros ba hacer el 30+30=60 mas los dos de los lados igual 62

En el punto 8, se les solicitaba a los estudiantes comprobar si la forma que habían establecido para encontrar el número de niños es correcta o no. Los estudiantes dejan en blanco, quizá no entienden el proceso de comprobación o no lo consideran importante. Finalmente, la explicación de los estudiantes en el punto 9, muestra que lograron generalizar la relación entre las mesas y los niños, y dar respuesta a cualquier caso particular a partir de la frase mostrada en la figura 45. Los estudiantes respondieron lo siguiente:

Figura 45

Generalización de 3°: En el restaurante escolar


9. Coloca el nombre de una persona fuera del salón con la que tengas una muy buena relación: Lionel Sebastián Escribe cómo le explicarías a esa persona cuántos niños podrían sentarse a comer su refrigerio en una fila formada por cualquier cantidad de mesas.

Sumamos el mismo número de ariba y abajo y los dos del lado

En general, los estudiantes que logran generalizar lo hacen de la misma forma. Señalan que deben sumar el mismo número de "arriba y abajo" y los dos de los lados. Vemos que esta generalización surge principalmente con el apoyo de la representación pictórica de la situación, pues piensan en la cantidad de niños de la fila superior y de la fila inferior que están en las mesas, y finalmente añaden los dos niños de las esquinas.

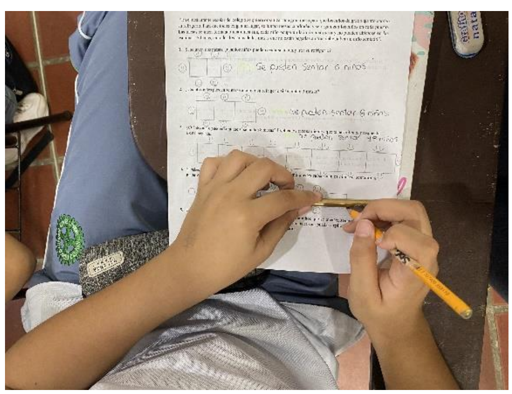
No encontramos generalizaciones haciendo uso de la multiplicación tal como se había planteado en el análisis a priori, a pesar de que al inicio algunos estudiantes estaban muy apegados a sus argumentaciones por medio de la multiplicación. Consideramos que esto funciona como una frase clave que permite encontrar la cantidad de niños a partir del número de mesas. Por lo tanto, concluimos que los estudiantes de grado tercero en esta primera tarea muestran evidencias de generalización contextual.

6.2.1.1.3 Grado quinto. Los resultados del grado quinto se organizan en tres categorías: estudiantes que completan el cuestionario y concluyen, estudiantes que completan el cuestionario pero no concluyen, y estudiantes que presentan errores en el desarrollo de la tarea.

Inicialmente encontramos que todos los estudiantes hacen uso de la representación pictórica para responder a los casos particulares de 2, 3 y 8 mesas respectivamente. Estos dibujos están acompañados del número de niños que corresponde en cada caso o de frases como “se pueden sentar 6 niños” o “se pueden sentar 8 niños”. En este caso, no hacemos referencia a frases clave si no a una forma verbal de responder a un caso particular. Sin embargo, en estos primeros tres numerales del cuestionario no se evidencia el uso de alguna operación aritmética o de un proceso distinto al del conteo de los niños en cada mesa apoyado del respectivo dibujo.

Figura 46

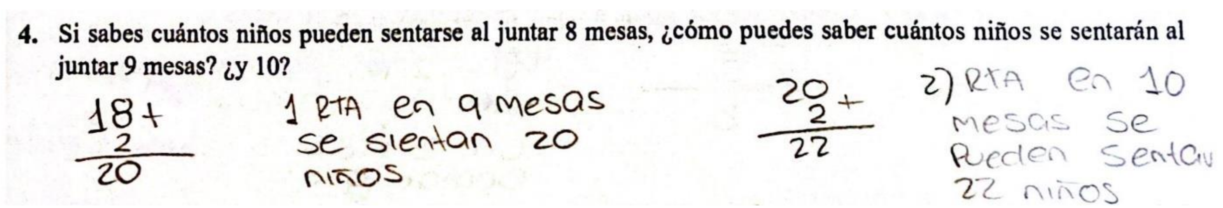
Solución a casos particulares 5°: En el restaurante escolar



Al continuar con los casos particulares 9 y 10, los estudiantes hacen uso de la respuesta del caso particular anterior para dar respuesta a estos. En el caso de 9 mesas, los estudiantes toman el número de mesas para 8 niños y le suman 2. El mismo proceso lo realizan para el caso particular 10 (Ver figura 47). Por lo que se evidencia que los estudiantes comprenden que por cada mesa que se agregue se suman 2 niños más. De este modo, podemos ver que los estudiantes identifican las implicaciones de variar el número de mesas y predicen el comportamiento de la relación funcional en el caso posterior.

Figura 47

Solución a casos particulares consecutivos 5°: En el restaurante escolar


4. Si sabes cuántos niños pueden sentarse al juntar 8 mesas, ¿cómo puedes saber cuántos niños se sentarán al juntar 9 mesas? ¿y 10?

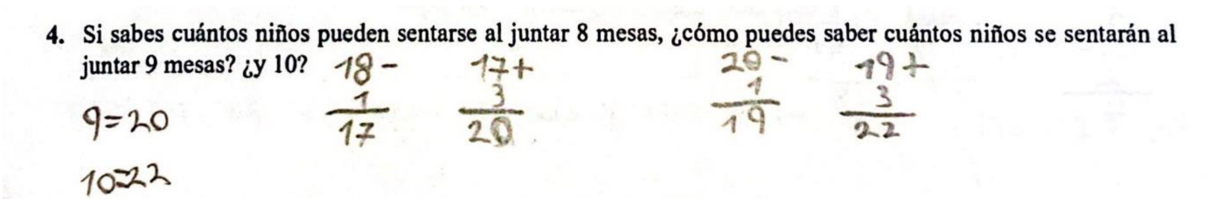
$18 + 2 = 20$ 1 RTA en 9 mesas se sientan 20 niños.

$20 + 2 = 22$ 2) RTA en 10 mesas se pueden sentar 22 niños

Los estudiantes realizan la suma del caso anterior más dos, sin embargo, encontramos la respuesta de un estudiante haciendo uso de la sustracción (Ver figura 48). Para el caso particular 9 el estudiante toma el número de niños cuando hay 8 mesas, resta 1 y luego suma 3. Posteriormente hace lo mismo para el caso particular 10. Si bien finalmente está sumando 2 como sus demás compañeros consideramos que su razonamiento está fuera de lo común y no entendemos la necesidad de realizar primero una sustracción.

Figura 48

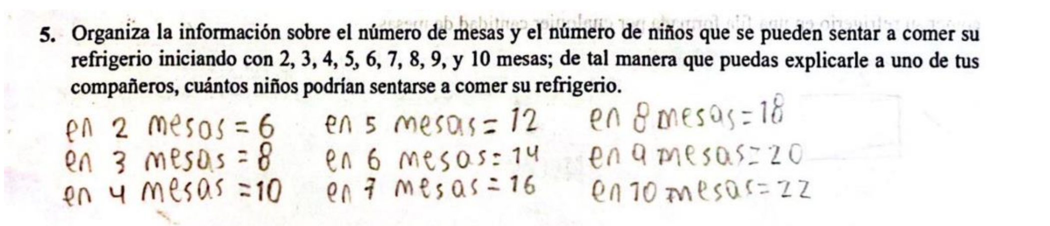
Solución particular a casos particulares consecutivos 5°: En el restaurante escolar



En la organización de información de los casos particulares de 2 hasta 10 mesas, los estudiantes no hacen uso de la representación tabular. Al igual que el grado tercero los estudiantes simplemente hacen un listado de los resultados obtenidos; como podemos ver en la siguiente figura que acuden a ser representaciones verbales acompañadas de numéricas.

Figura 49

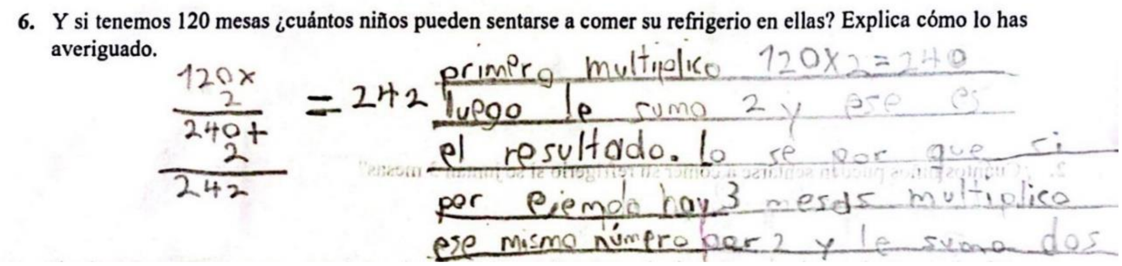
Organización de información de casos consecutivos 5°: En el restaurante escolar



Continuando con el caso particular de 120 mesas, encontramos que los estudiantes responden correctamente identificando cómo se construye la relación entre la cantidad de mesas y niños. Hallamos respuestas haciendo uso de la adición o de la multiplicación como podemos ver en la figura 50. Algo que ha caracterizado a este grupo de estudiantes es la necesidad de acompañar cada proceso aritmético de su respectiva explicación verbal.

Figura 50

Respuesta en caso particular 5°: En el restaurante escolar



6. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos niños pueden sentarse a comer su refrigerio en ellas? Explica cómo lo has averiguado.

120x
2
240+
2
242

= 242 primero multiplico 120x2=240 luego le sumo 2 y ese es el resultado. lo se por que si por ejemplo hay 3 mesas multiplico ese mismo número por 2 y le sumo dos

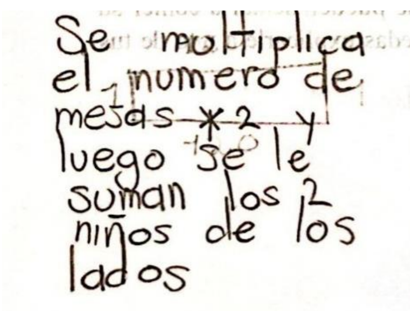
Acorde al punto anterior, las conjeturas de los estudiantes surgen también a partir de la suma o de la multiplicación. Encontramos que los estudiantes que responden al caso particular de 120 mesas haciendo uso de la adición, conjeturan utilizando la adición. Del mismo modo en los casos que los estudiantes utilizan la multiplicación.

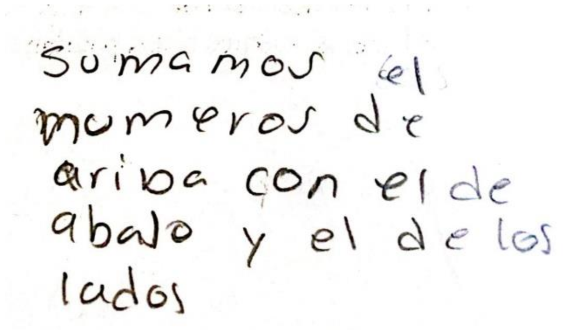
Al igual que el grado tercero, observamos que el hecho de conjeturar no es familiar para los estudiantes. Durante la implementación surgían preguntas como, cuál es la diferencia entre el punto 7 y el punto 9, veíamos en los estudiantes confusión del por qué comprobar o del por qué encontrar de nuevo la cantidad de niños para 1, 2 y 3 mesas si ya lo habían hecho antes.

En conclusión, encontramos la construcción de generalizaciones basadas en la adición o en la multiplicación como se muestra en la figura 51. Por otro lado, señalamos el gran uso de la representación verbal (escrito) en todo el cuestionario. Si bien en este grado los estudiantes también usan representaciones pictóricas y simbólico numéricas, el uso de las frases y párrafos explicativos aparece en sus producciones.

Figura 51

Generalización de 5°: En el restaurante escolar



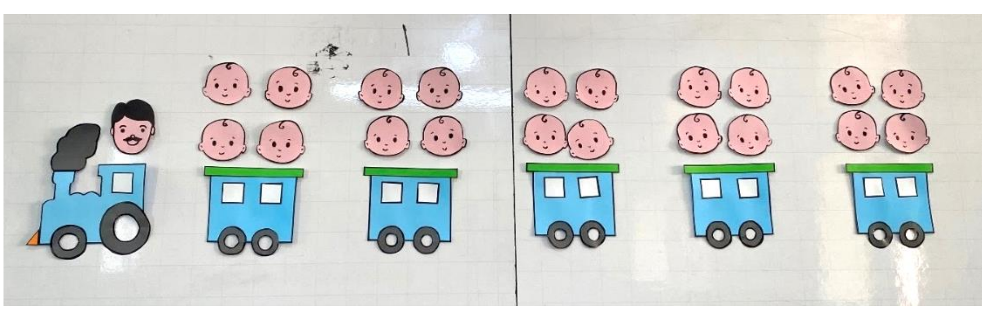


La diferencia fundamental entre el grado tercero y el grado quinto al momento de generalizar es el uso de la multiplicación. Por otro lado, encontramos el uso de la representación verbal al momento de justificar sus procesos. Las expresiones utilizadas por los estudiantes en grado quinto las consideramos “frases clave” que son una característica fundamental de la generalización contextual, en donde los estudiantes encuentran la relación funcional a partir del proceso que describen.

6.2.1.2 Tarea 2: En el tren. Continuamos con la segunda tarea titulada “en el tren”, en esta tarea consideramos oportuno guiar a los estudiantes al momento de abordar cada pregunta del cuestionario e ir interviniendo en su desarrollo cuando se considere necesario. En esta tarea utilizamos los recursos manipulativos hechos en cartulina de colores que representó el tren, el conductor y los niños que montarían en él.

Figura 52

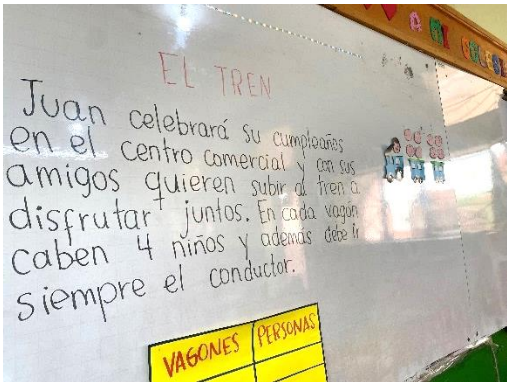
Recursos manipulativos para la tarea 2



6.2.1.2.1 Grado primero. En esta implementación se propone una función afín, dado que, en la primera tarea los estudiantes de grado primero lograron generalizar la relación de la forma $2x$. Con apoyo del material mostrado en la Figura 53 y el enunciado de la tarea se inició con la explicación por parte de la docente investigadora.

Figura 53

Tarea en el tren 1°



Con la lectura en voz alta y la ilustración de la tarea se inició con el análisis de los primeros casos particulares, en donde los estudiantes mostraban entender cómo se estaban relacionando la cantidad de vagones con la cantidad de personas en el tren.

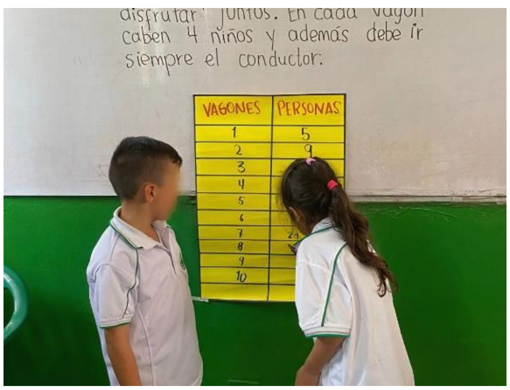
Algunos estudiantes inicialmente se confundieron y añadieron 5 personas por cada vagón, contando más de una vez al conductor. Sin embargo, a partir de la reflexión entre estudiantes y estudiantes y docente se concluye que cada vagón tiene 4 personas más y el conductor está en la locomotora.

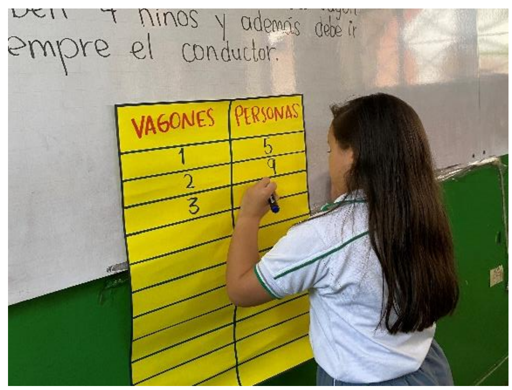
Entre las formas de calcular cuántos niños van en un número dado de vagones tenemos dos: utilizar el número encontrado a partir de un vagón inicial y contar 4 más para incluir el siguiente, es decir, encontraban un caso particular utilizando el caso anterior, esto inicia desde 5 personas para el caso de un vagón. Por otro lado, están los estudiantes que hacen uso de los recursos manipulativos o de dibujos que realizan en sus hojas de trabajo para el conteo una por una de las personas en el tren. Por lo que, la representación pictórica es fundamental para algunos de ellos.

En particular, en esta implementación se presenta en el aula una tabla en papel cartulina para pegar en el tablero (Ver figura 54); los estudiantes la llenan con los datos de los casos particulares. Esto permite motivar en el trabajo de los estudiantes este tipo de sistema de representación.

Figura 54

Uso de la representación tabular en 1°: En el tren

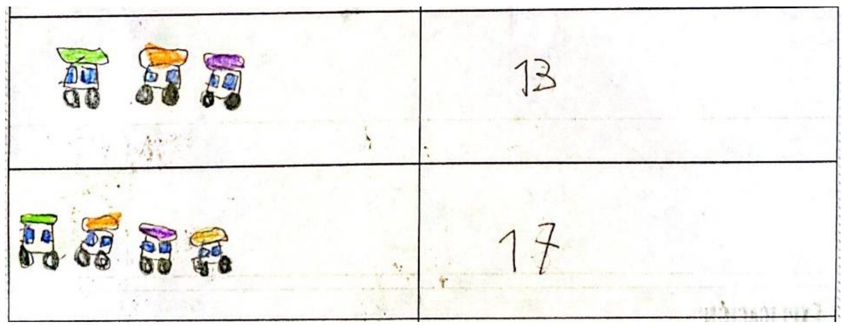




En las hojas de trabajo encontramos dos tipos de sistema de representación, el simbólico-numérico y el pictórico, ambos fueron utilizados en la misma proporción. En el caso de las representaciones pictóricas nos encontramos con dibujos de vagones en la respectiva columna y en la columna de personas el número que corresponde como mostramos en la Figura 55; esto hace referencia a un sistema de representación múltiple. En el otro caso vemos que los estudiantes solo utilizan números para representar las cantidades sin realizar ningún dibujo.

Figura 55

Sistemas de representación en 1°: En el tren



Los estudiantes realizan cálculos numéricos para atender a casos particulares, lo que se podría interpretar como un inicio de una generalización factual. Sin embargo, los estudiantes no responden a casos particulares lejanos. Como mencionamos anteriormente ellos encuentran cada caso particular consecutivo con la adición de cuatro personas del vagón, o realizan el conteo total de personas. Durante la implementación se encontró la cantidad de personas para los casos particulares desde 1 a hasta 10 vagones, y se registraron en la tabla. Luego intentamos encontrar la cantidad de personas que van en 12 vagones con el objetivo de que no fuera un caso particular consecutivo. En general, buscamos que los estudiantes identificaran que sumamos 12 veces el número 4, y este mismo método lo utilizaran para el caso de 15 vagones.

Como se muestra en la figura 56, la estudiante está haciendo la suma de 4 en 4 con el apoyo de sus dedos, finalmente cuenta las 49 personas para el caso de 12 vagones. Sin embargo, en ningún momento los estudiantes identifican una manera común para encontrar casos particulares lejanos. Por lo tanto, para la tarea del tren encontramos que los estudiantes responden de manera correcta únicamente a casos particulares consecutivos, comprenden el hecho de ir contando de 4 en 4 al añadir un vagón. Sin embargo, este método no les resulta útil para encontrar casos lejanos que requieran de un conteo más complejo y nos le permite construir alguna generalización sobre las condiciones de la tarea.

Figura 56

Conteo con los dedos 1°: En el tren

Como podemos ver en la figura 56, durante la socialización se dio una explicación de cómo encontrar la cantidad de personas que van en 12 vagones sumando doce veces el número 4 y al final sumar 1; sin embargo, esta manera de generalizar tampoco fue comprendida por los estudiantes y no se encontró la respuesta para el caso de 15 vagones.

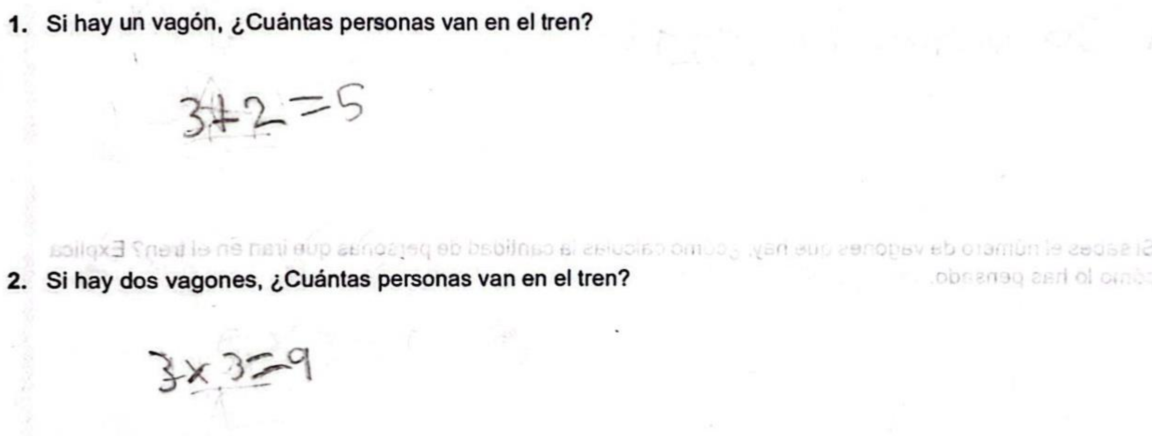
6.2.1.2.2 Grado tercero. En el análisis de resultados de este grupo encontramos diferentes desempeños por parte de los estudiantes.

Hay estudiantes que operan correctamente y responden a casos particulares cercanos y lejanos en dónde muestran entender cómo se está construyendo la relación entre la cantidad de vagones y personas; sin embargo, el sentido de la indeterminancia no está presente en ellos y sólo atienden al trabajo concreto sobre números específicos. Por otro lado, están los estudiantes que como producto del trabajo sobre casos particulares, logran establecer frases clave que les permiten generalizar la relación entre las cantidades que varían.

Al igual que en la tarea anterior, encontramos estudiantes que realizan procedimientos no correctos en el sentido de las cantidades que operan, dado que no están acordes al caso particular que están calculando (Ver figura 57). Sin embargo, son estudiantes que en los siguientes incisos responden correctamente y hacen las operaciones que corresponden con la relación entre la cantidad de vagones y personas en el tren.

Figura 57

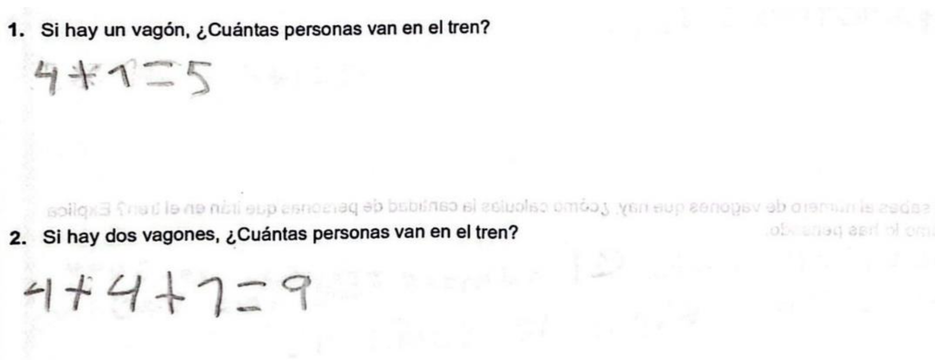
Procesos incoherentes en el cálculo de casos particulares 3°: En el tren



En los tres primeros incisos encontramos que los estudiantes hacen uso primordial del sistema de representación simbólico-numérico para responder a casos particulares de uno y dos vagones respectivamente. Sólo en dos estudiantes hallamos el uso del sistema de representación pictórico. El proceso numérico que realizan los estudiantes para estos casos particulares es la adición, por ejemplo, como vemos en la figura 58 el estudiante hace la suma de 4 niños por cada vagón y al final añade al conductor.

Figura 58

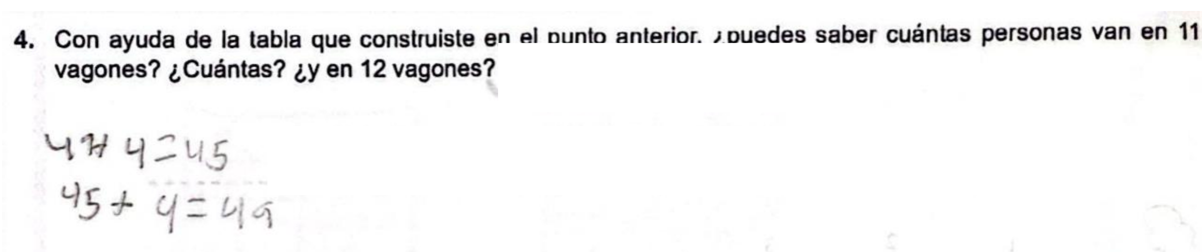
Sistema de representación simbólico-numérico en 3°: En el tren



Como se mencionó en capítulos anteriores, uno de los objetivos en esta tarea es introducir el uso del sistema de representación tabular para organizar información. Además, consideramos que el registro de datos en esta tabla permite que los estudiantes identifiquen que el siguiente caso particular se calcula sumando 4 personas más. En general, vemos que los estudiantes identifican esta relación entre la cantidad de vagones y personas, y responden correctamente a casos particulares consecutivos. Esto les permite que en el siguiente inciso puedan encontrar respuesta a un caso particular rápidamente si conocen en caso particular anterior. En la siguiente figura mostramos el proceso que realizan para encontrar el caso particular de 11 y 12 vagones haciendo uso de la adición.

Figura 59

La adición para el cálculo de casos particulares consecutivos 3°: En el tren

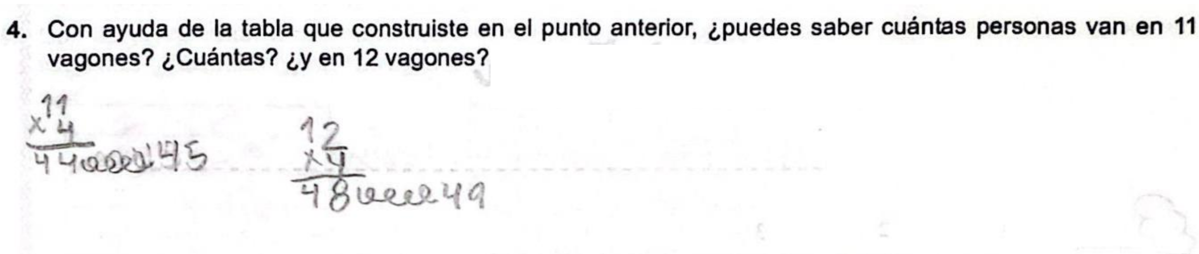

4. Con ayuda de la tabla que construiste en el punto anterior. ¿puedes saber cuántas personas van en 11 vagones? ¿Cuántas? ¿y en 12 vagones?

41+4=45
45+4=49

Por otro lado, encontramos estudiantes que responden a este inciso haciendo uso de la multiplicación (Ver figura 60), en estos casos vemos que los estudiantes hallan la relación entre la cantidad de vagones y personas e identifican una forma de construir dicha relación. Como podemos ver, este estudiante realiza un garabato uniendo el resultado de la multiplicación con el número natural consecutivo. Se evidencia que el estudiante comprende la forma en la que se está construyendo la relación funcional, en donde añadir al conductor es el último paso.

Figura 60

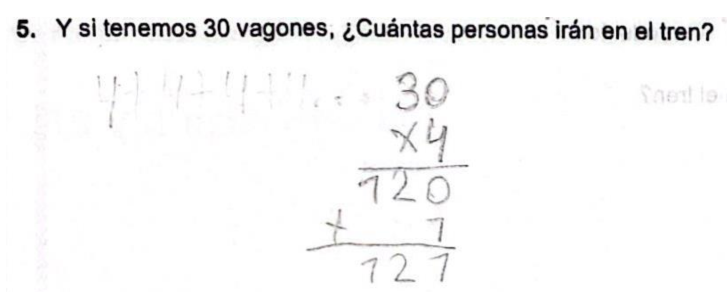
La multiplicación para el cálculo de casos particulares 3°: En el tren



Continuando con el cálculo para casos particulares, en el quinto inciso se pide encontrar la cantidad de personas que irían en el tren cuando hay 30 vagones. En la figura 61, vemos que surge la necesidad de abandonar la adición y hacer uso de la multiplicación. En esta ocasión el estudiante escribe “4 + 4 + 4 + 4…” lo borra, y luego realiza la multiplicación correspondiente. En este apartado vemos que todos los estudiantes realizan una multiplicación, incluso los que habían utilizado adiciones en incisos anteriores. En este caso, los estudiantes encuentran un patrón que les permite dar respuesta a casos particulares lejanos que no son consecutivos.

Figura 61

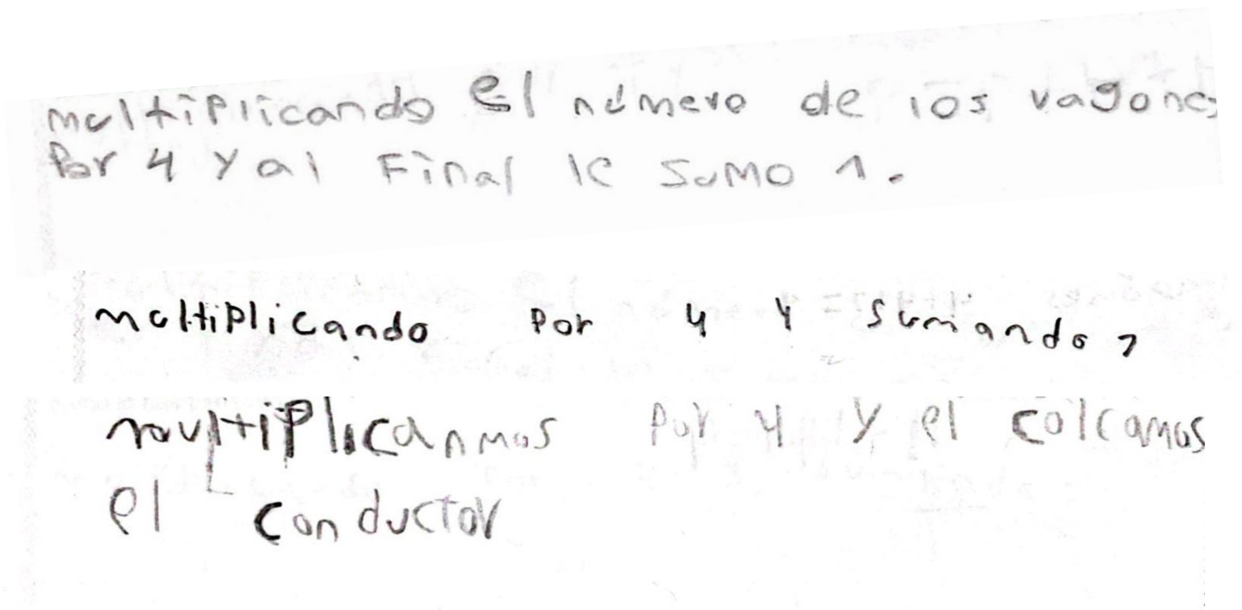
La multiplicación para el cálculo el caso particular 30 en 3°: En el tren



En los siguientes incisos los estudiantes muestran que determinan una forma de encontrar la cantidad de personas en el tren para cualquier cantidad de vagones. Aquí no solo dan respuesta a casos particulares, el sentido de la indeterminancia se hace explícito a través de frases clave para expresar la forma en que se construye la relación, como se muestra en la Figura 62.

Figura 62

Generalización en estudiantes de 3°: En el tren



Como vemos en los ejemplos anteriores, los estudiantes pueden determinar la cantidad de personas que van en el tren para cualquier cantidad de vagones. Ellos a su modo redactan frases clave que dan evidencia de un tipo de generalización contextual en donde expresan la relación funcional de manera verbal.

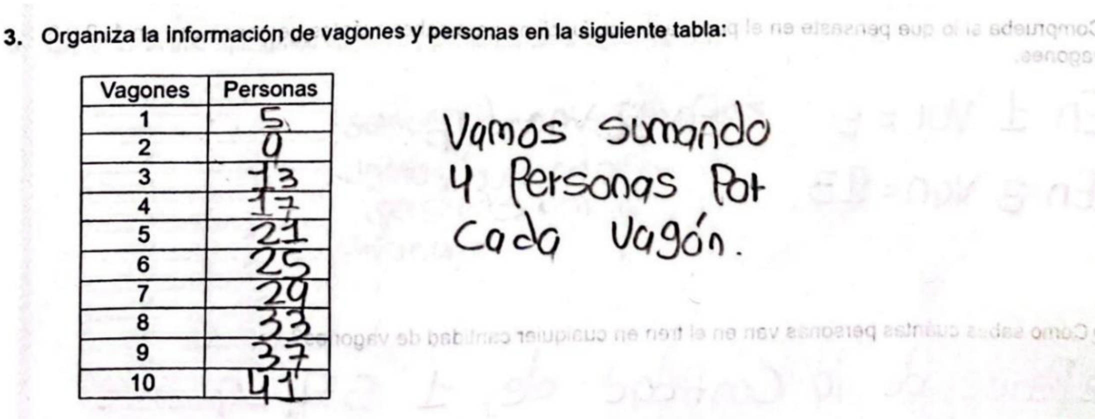
6.2.1.2.3 Grado quinto. En esta tarea encontramos que los estudiantes responden positivamente a los incisos propuestos. Sin embargo, hay estudiantes que responden correctamente en los cálculos para casos particulares consecutivos y no consecutivos pero finalmente no expresan algún tipo de generalización a pesar de identificar la forma en cómo se construye la relación funcional.

Respecto al tipo de representación utilizado por los estudiantes encontramos en su mayoría representaciones simbólicas de tipo numérico; en donde dan respuesta a casos particulares consecutivos haciendo uso de la adición y la multiplicación, acompañadas de representaciones verbales. Pocos estudiantes hacen uso de la representación pictórica y en dado caso, lo utilizan únicamente para los casos particulares de uno y dos vagones.

La representación tabular está propuesta en uno de los incisos, esto teniendo en cuenta que en la tarea anterior no fue utilizada; consideramos que es una herramienta valiosa al momento de organizar información y funciona para identificar alguna regularidad en el conjunto de datos de los casos particulares consecutivos. En este inciso vemos que los estudiantes logran dar respuesta de manera correcta a cada caso y expresan que "vamos sumando 4 personas por cada vagón" como puede verse en la Figura 63. De este modo, se evidencia que los estudiantes identifican cómo se construye la relación entre las cantidades que varían al momento de calcular casos consecutivos y predicen el comportamiento de la relación funcional inmersa.

Figura 63

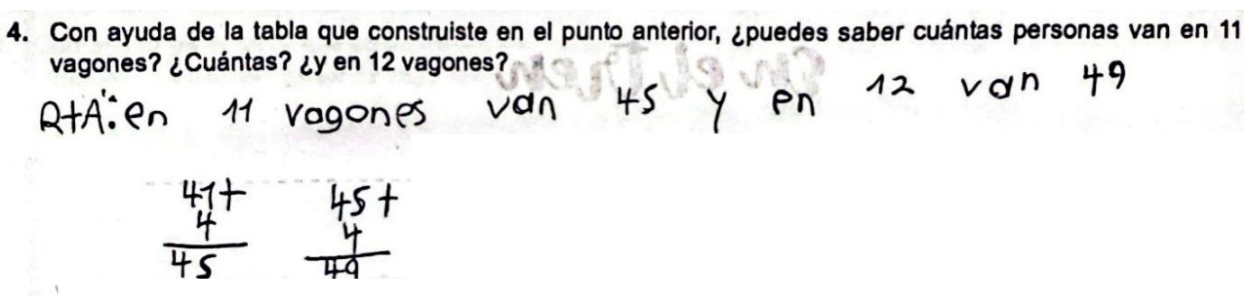
Uso de la representación tabular 5°: En el tren



En el inciso 4, se observa que los estudiantes encuentran una forma rápida de determinar casos particulares posteriores sumando 4 en cada caso particular consecutivo como vemos en la Figura 64. De este modo, logran analizar la relación entre la cantidad de vagones y la cantidad de personas en el tren.

Figura 64

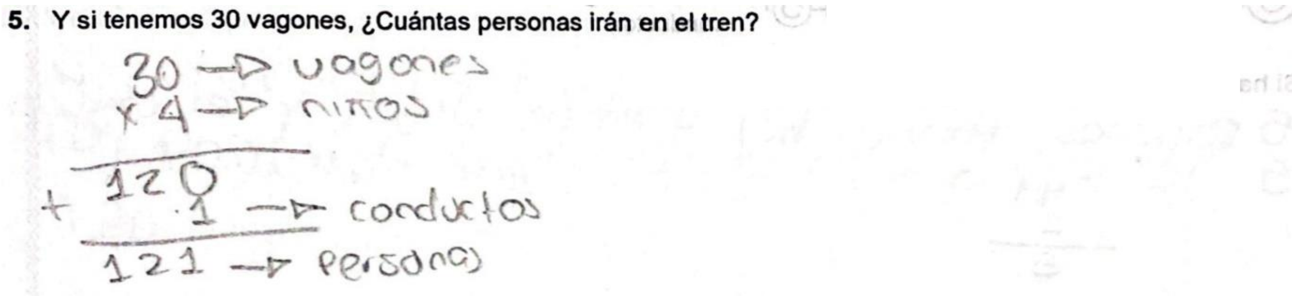
Cálculo de casos particulares consecutivos 5°: En el tren



En este momento los estudiantes están en la búsqueda y predicción de patrones luego de organizar sus datos (Cañadas y Castro, 2007), por lo que logran establecer una manera de encontrar casos particulares no consecutivos. En el caso particular de 30 vagones, realizan la operación de 30 por 4 y al final suman la constante 1 que hace referencia al conductor, incluso señalan cómo se construye la relación entre vagones y personas como podemos ver en la figura 65.

Figura 65

Cálculo en caso particular lejano 5°: En el tren



Durante la discusión general varios estudiantes quisieron participar (Ver figura 66) y exponer sus argumentos. Iniciamos con el caso particular de 30 vagones en dónde una estudiante expresa que "Multiplicamos 30 por 4 y nos da 90 más 1 suma 121" y que debe multiplicar por 4 porque en cada vagón hay 4 niños.

Abrimos la discusión a números más grandes para los casos particulares como 50, 1000 y 2000; en estos casos los estudiantes determinan con facilidad las diferentes respuestas teniendo en cuenta que primero multiplican por 4 y luego suman 1.

Figura 66

Discusión general 5°: En el tren

Al compartir la forma de explicar cómo encontrar la cantidad de personas que irán en el tren si sabes el número de vagones que se tiene, los estudiantes responden que “se multiplican los vagones por 4 que son las personas que van y por último contamos al conductor”.

En la prueba escrita, encontramos dos formas de responder. Algunos estudiantes con la relación funcional identificada en el inciso anterior no logran reflejar el sentido de la indeterminancia y se centran en explicar cómo calcular la cantidad de personas que van en el tren a partir del número de vagones; suponemos que a pesar de conocer la relación entre las variables para ellos no es natural pensar en generalizar estos cálculos y no referirse a casos particulares.

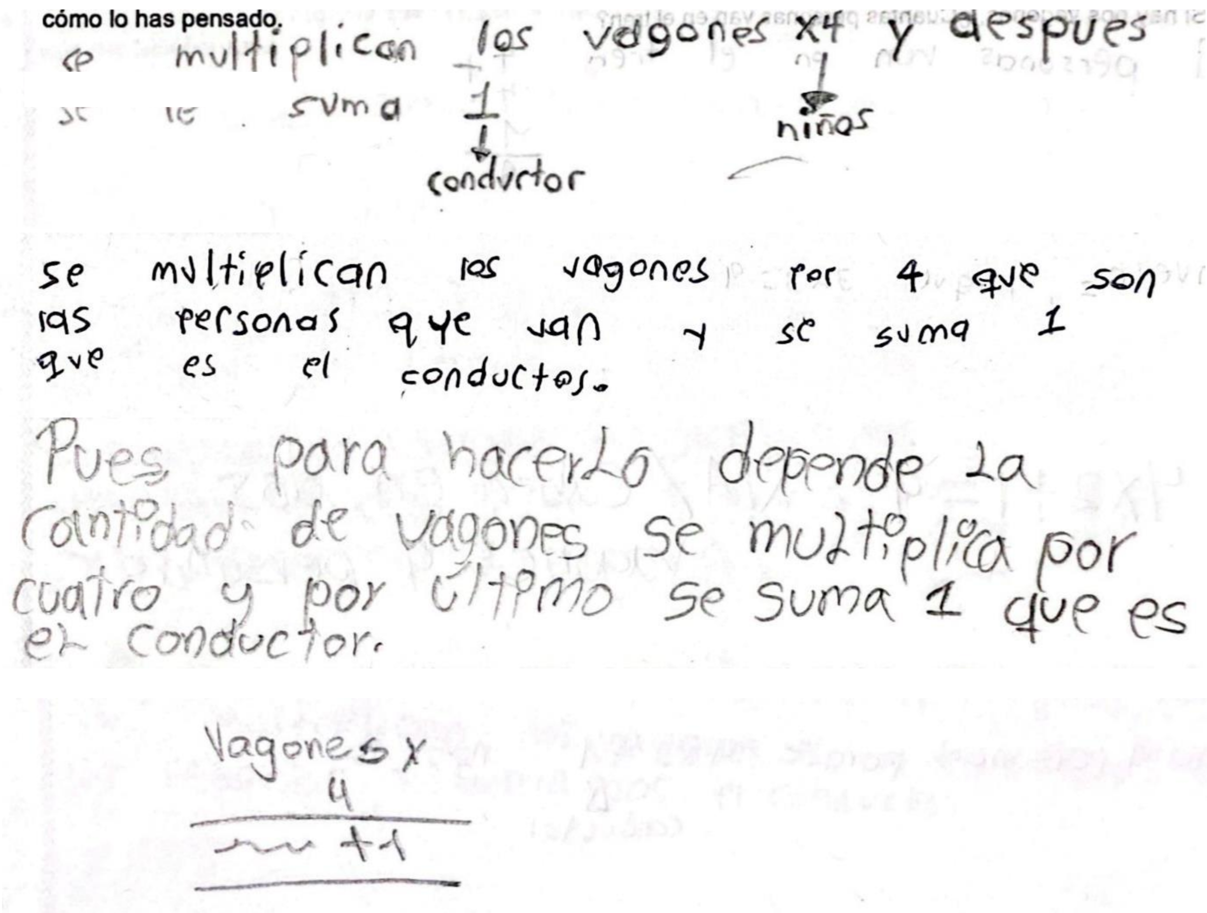
Por otro lado, están los estudiantes que construyeron un manera general para encontrar la cantidad de personas que van en el tren y establecen que “se multiplica los vagones por 4 y se suma uno”, en este caso, encontramos que los estudiantes expresan verbalmente la forma en que la relación entre las cantidades se va construyendo.

Posteriormente, muestran que dicha conjetura funciona para los casos particulares, esto es 1, 2 y 3 vagones y proceden a explicar la forma de determinar cuántas personas van en el tren para cualquier cantidad de vagones. Al momento de discutir esta parte en clase evidenciamos que no es un paso que los estudiantes consideren necesario si no que, hacen caso omiso y confían en que “el método” encontrado siempre funciona para calcular el número de personas en el tren. En este momento preguntamos, qué operación es mejor utilizar, ¿suma o multiplicación? A lo que los estudiantes responden que: “las sumas son muy largas, con 12 vagones son 12 sumas, es más rápido la multiplicación”.

De este modo, encontramos que los estudiantes de este grado logran establecer frases para describir la forma en que se construye la relación entre la cantidad de vagones y personas en el tren para predecir el comportamiento de la relación funcional en casos posteriores. Así hacemos referencia a un tipo de generalización contextual y mostramos algunas respuestas en la siguiente figura.

Figura 67

Generalización en 5°: En el tren



Cabe resaltar la respuesta de la última estudiante en la figura 67, ésta hace referencia a un tipo de generalización simbólica, ella utiliza el garabato  para indicar la cantidad que está variando y luego para el resultado que dependerá de dicha variable. Consideramos en la siguiente etapa incluir a esta estudiante en las entrevistas semiestructuradas pues su forma de expresar la generalización fue única en su grupo.

6.2.1.3 Tarea 3: Los globos. En la tercera tarea titulada "los globos" encontramos mejores resultados en los grados tercero y quinto. Si bien este no fue el propósito, podemos ver cómo influyó positivamente en los estudiantes haber trabajado en las semanas anteriores este tipo de tareas.

En esta tarea en particular, en cada grado la constante b de la función afín varía de acuerdo con el grado que cursan los estudiantes. La relación funcional lineal entre la cantidad de globos y niños es de la forma $3x$, la constante de la función afín $3x + b$ varía con $b = 1, 3\ o\ 5$ teniendo en cuenta el globo que se ubica en la puerta. Por otro lado, utilizamos cartulina para representar la puerta, los globos y los niños durante la explicación del contexto de la tarea.

6.2.1.3.1 Grado primero. En esta implementación con los estudiantes de primer grado consideramos nuevamente una función afín, es este caso de la forma $3x + 1$, a pesar de que en la tarea anterior los estudiantes solo respondieron a casos particulares consecutivos quisimos intentarlo nuevamente.

Con apoyo de los recursos manipulativos, el enunciado de la tarea y la participación de los estudiantes se inició con la explicación de la situación propuesta en la tarea.

Figura 68

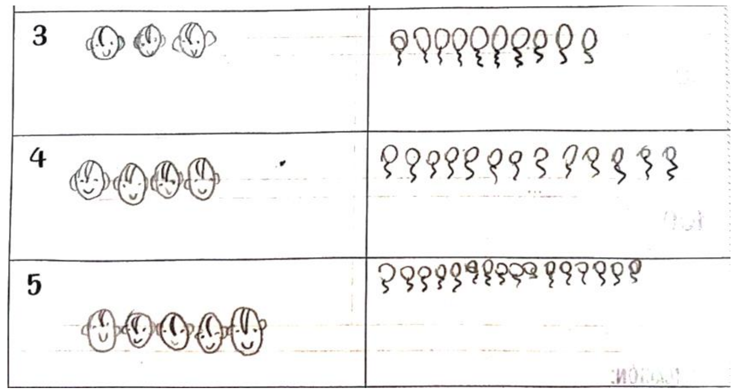
Explicación tarea los globos 1°

Al momento de iniciar con el cálculo de casos particulares consecutivos los estudiantes comprenden cómo hacer los respectivos conteos y utilizan dos maneras distintas para dar respuesta a éstos. Encontramos estudiantes que hacen uso de la representación pictórica como se muestra en la Figura 69. Por otro lado, hay estudiantes que utilizan únicamente el número correspondiente que atiende a un representación simbólico-numérica. Consideramos importante entrevistar en la próxima fase a un estudiante que no realice dibujos para indagar en la forma en cómo construye la relación funcional y cómo logra dar respuesta sin ningún apoyo pictórico.

De este modo, nuevamente encontramos que los sistemas de representación utilizados por los estudiantes son el pictórico y el simbólico-numérico, aunque algunos utilizan ambos simultáneamente; esto hace referencia a un tipo de representación múltiple.

Figura 69

Uso de la representación pictórica en 1°: Los globos



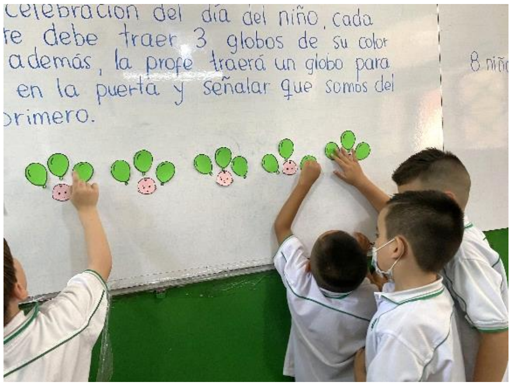
También, para el cálculo de casos consecutivos los estudiantes utilizan el caso particular anterior y cuentan de 3 en 3. Sin embargo, nuevamente nos estancamos en el caso particular para 8 niños y no avanzamos en el cálculo de casos particulares no consecutivos. De este modo, vemos que los estudiantes hallan la relación entre la cantidad de niños y globos de manera recursiva, es decir, determinan la relación funcional usando uno (o más) casos particulares previos.

Respecto a las acciones específicas del pensamiento funcional podemos ver que los estudiantes recurren a diferentes representaciones, predicen el comportamiento de la relación funcional e identifican cómo se construye dicha relación a partir del conteo de 3 en 3 en el caso particular consecutivo. Sin embargo, los estudiantes no están hallando la relación entre la cantidad de niños y globos para casos particulares que no sean consecutivos. Nuevamente vemos que se reducen a realizar acciones numéricas lo cual atendería a un inicio de generalización factual.

Como vemos en la figura 70, los estudiantes acuden a realizar el conteo de los globos uno a uno, pero no encuentran una forma o proceso aritmético general que funcione para dar respuesta a los casos particulares.

Figura 70

Conteo de estudiantes 1°: Los globos



Por lo tanto, en esta tarea funcional los estudiantes responden correctamente a casos particulares consecutivos menores o iguales a 8, en algunos casos comprenden el hecho de ir contando de 3 en 3 al contar un niño más o, por el contrario, deben hacer el conteo uno a uno.

El problema en este caso es que este método utilizado por los estudiantes no es útil para encontrar casos particulares lejanos o más grandes dado que requieren de un proceso aritmético más largo que les resulta difícil. Sin embargo, esto es algo que habíamos considerado en el análisis a priori. En el caso particular de 8 niños, el cual no era consecutivo pues saltamos del 5 al 8, encontramos dificultad para hacer el conteo (Ver Figura 71) de la cantidad de globos a pesar de la discusión y retroalimentación realizada.

Figura 71

Conteo en caso particular de 8 niños 1°: Los globos

6.2.1.3.2 Grado tercero. En esta tarea el análisis de los resultados los agrupamos de la siguiente manera: estudiantes que generalizan la relación funcional $3x + 3$ y estudiantes que atienden a casos particulares lejanos, pero no concluyen. Es importante resaltar que la cantidad de estudiantes que no logran expresar la relación funcional es inferior al 20% del grupo.

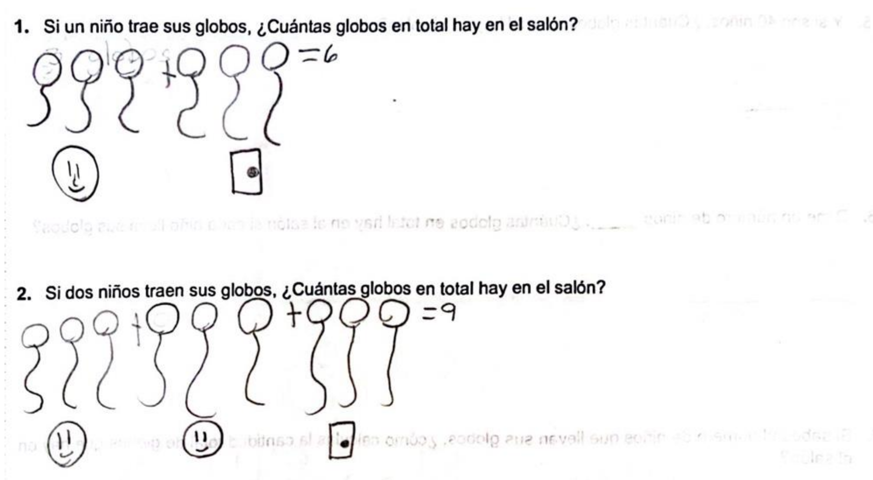
Los estudiantes que no generalizaron la relación funcional responden correctamente al cálculo de casos particulares cercanos y lejanos. Desde el primer inciso observamos que los estudiantes desarrollan un proceso aritmético al multiplicar la cantidad de niños por 3 y luego sumar 3. En estos casos los estudiantes realizan los cálculos para cualquier caso particular establecido. Sin embargo, no dan el paso de lo aritmético a lo general. Los estudiantes no consiguen explicar la forma en que se construye la relación a pesar de encontrar la respuesta para cualquier caso particular establecido. Plantean y resuelven las operaciones correctas, pero no dan evidencias de que han identificado un patrón de construcción.

Por otro lado, están los estudiantes que evidencian las acciones propias del pensamiento funcional. A partir de la exploración de casos particulares logran establecer la relación entre la cantidad de niños y globos, identifican cómo se construye la relación entre las cantidades que varían y describen verbalmente la manera en que la relación se va construyendo.

Respecto al uso de diferentes representaciones señalamos que los estudiantes en menor medida hacen uso de representaciones pictóricas, Ver figura 72, para los casos particulares de 1 y 2 globos. En general, para el cálculo de casos particulares los estudiantes hacen uso de representaciones simbólicas de tipo numérico en dónde expresan la relación aritmética de la cantidad de niños y globos, en este caso, realizan inicialmente la multiplicación de la cantidad de niños por 3 y finalmente suman 3. Es importante resaltar cómo los estudiantes lograron identificar y diferenciar el papel que juega el número 3, primero a este número que corresponde a la cantidad de globos que trae cada niño y que varía de acuerdo con esto, por otro lado, está el 3 que se añade por medio de una suma y representa la constante dentro de la tarea.

Figura 72

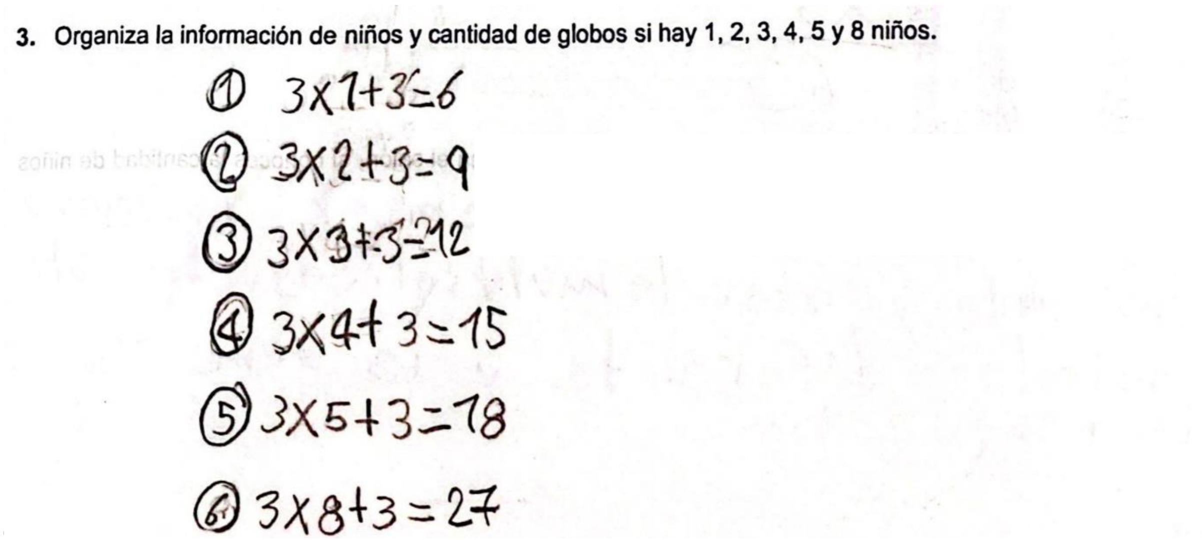
Representación pictórica tarea los globos 3°



En el inciso 3, con el cálculo de los casos particulares de 1, 2, 3, 4, 5 y 8 niños, se evidencia que los estudiantes en este nivel escolar no usan las tablas para el manejo de la información. Los estudiantes en el mejor de los casos realizan un listado como el que se muestra en la Figura 73. Lo cual fue inesperado pues el desarrollo de la tarea 2 establecimos el uso de la tabla como un organizador de información y esperamos ver su uso en el desarrollo de esta tarea.

Figura 73

Organización de casos particulares cercanos 3°: Los globos


3. Organiza la información de niños y cantidad de globos si hay 1, 2, 3, 4, 5 y 8 niños.

1 3x1+3=6
2 3x2+3=9
3 3x3+3=12
4 3x4+3=15
5 3x5+3=18
6 3x8+3=27

Durante la discusión general encontramos estudiantes que exponen el resultado para 11 y 8 niños por medio del algoritmo de la multiplicación. Argumentan sus procesos resaltando que "primero toca multiplicar por 3" y luego "vamos a sumarle los que tiene el docente que serían 3". De este modo, vemos cómo los estudiantes están operando correctamente, identifican la relación entre las cantidades que varían, además el análisis realizado por los otros compañeros coincide con ellos.

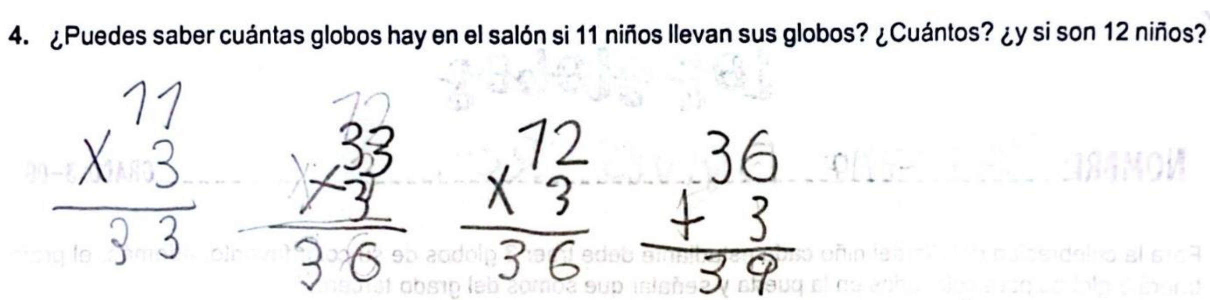
Figura 74

Discusión general en 3°: Los globos

Los estudiantes no registran en sus hojas de trabajo evidencias de que identifiquen la implicación de añadir un niño más a la cantidad de globos en el salón. Es decir, no encuentran la cantidad de globos en un caso consecutivo añadiendo 3 globos más. Los estudiantes dan respuesta a este inciso haciendo la respectiva operación para 11 y 12 niños sin relacionarlas entre sí como se esperaba.

Figura 75

Respuesta a casos particulares consecutivos 3°: Los globos



Una estudiante muestra su proceso para encontrar el número de globos en el caso particular de 40 niños. En este caso, la estudiante es más precisa y expone que "Multiplico por 3 y luego sumo 3". Así encontramos que los estudiantes construyen un método para realizar el cálculo en cualquier caso particular.

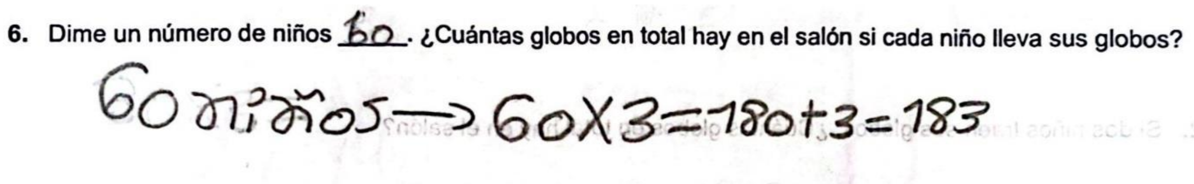
Figura 76

Discusión general en 3°: Los globos

En las hojas de trabajo encontramos el uso exclusivo de la representación simbólico-numérica realizando el proceso que ya identificaron previamente. Multiplican al número 40 por 3 y luego suman 3. Del mismo modo, en el inciso 6, los estudiantes establecen el número de niños que prefieren y realizan la respectiva operación, tal como se muestra en la figura 77.

Figura 77

Respuesta en caso particular 3°: Los globos


6. Dime un número de niños 60. ¿Cuántas globos en total hay en el salón si cada niño lleva sus globos?

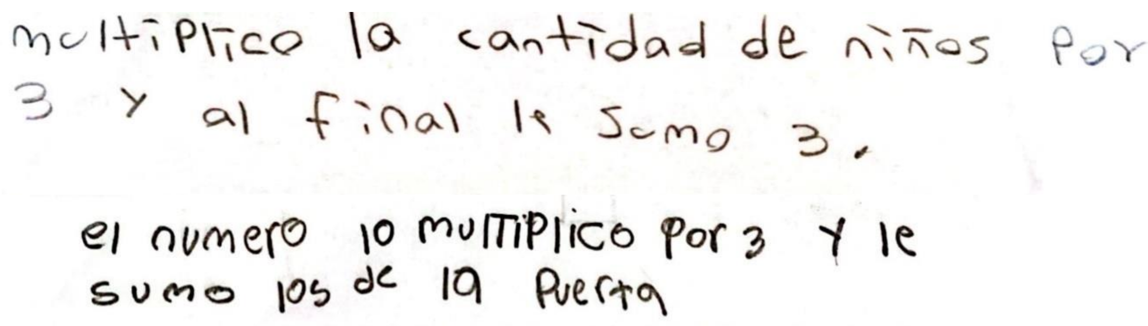
60 niños → 60X3=180+3=183

Con la discusión general se compartieron los resultados de los estudiantes para los casos particulares de 60, 50, 9, 100, 16, 90 y 54 estudiantes, en donde se evidencia que los estudiantes describen verbalmente la manera en que la relación se va construyendo y hallan la relación entre la cantidad de niños y globos. Si bien ya era claro para los estudiantes la multiplicación por 3, resaltamos que recuerdan en cada caso sumar 3 luego de hacer el producto.

Los estudiantes en este nivel a diferencia de los estudiantes del grado primero tienen un nivel de lectoescritura más avanzado pero no encontramos el apoyo de la representación verbal en sus hojas de trabajo. Como hemos mostrado en incisos anteriores para ellos es suficiente dar respuesta por medio de operaciones aritméticas. A pesar de esto, vemos que los estudiantes logran establecer frases cortas, pero clave, en el proceso de generalización de la relación funcional. En este caso los estudiantes de grado tercero lograron un tipo de generalización contextual como indica Radford (2016), la indeterminancia se hace explícita y hace parte del discurso del estudiante. En la siguiente figura vemos dos de las frases clave que construyeron los estudiantes del grado tercero para esta tarea funcional y vemos que finalmente lograron una forma de predecir el comportamiento de la relación funcional en casos posteriores.

Figura 78

Generalización contextual de 3°: Los globos



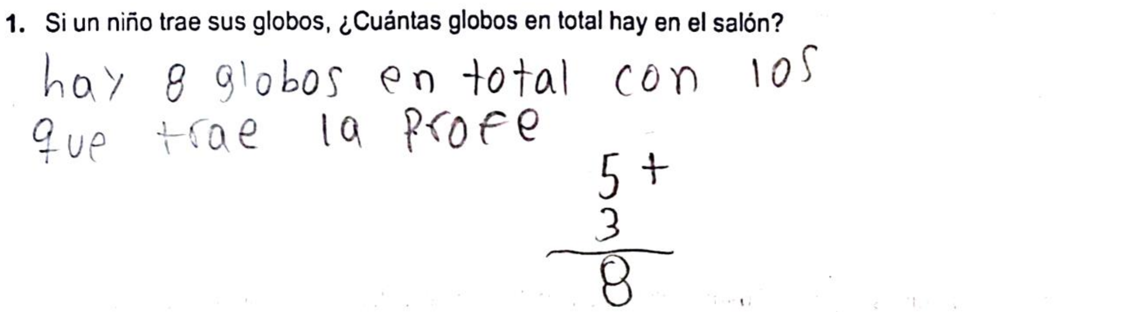
6.2.1.3.3 Grado quinto. En esta última intervención con los estudiantes de quinto grado encontramos un nivel superior en los resultados respecto a las tareas anteriores. Los procedimientos de los estudiantes dan evidencia del proceso de generalización que lograron los estudiantes, en este caso, trabajaron la tarea de los globos a partir de la relación funcional $3x + 5$.

Encontramos únicamente cuatro estudiantes del grupo en los que no se hace explícito el sentido de la indeterminancia, dado que su razonamiento se centra en la manipulación de cantidades que representan las magnitudes involucradas en la tarea. Aunque los cálculos que realizan los estudiantes están correctos, no logran construir de alguna forma la relación entre las cantidades que varían. Estos estudiantes muestran entender cómo responder a cualquier caso particular dado y las conclusiones de los incisos finales las desarrollan con base a operaciones aritméticas como “por ejemplo con el 30 multiplicamos 30 por 3 y sumamos 3”.

Hemos visto que los estudiantes hacen uso de la representación pictórica, simbólica-numérica y verbal, sin embargo, en la implementación de esta tarea vemos que no se utilizó ninguna representación pictórica. Para dar solución a casos particulares de 1 y 2 niños, los estudiantes hacen uso de la adición y frases explicativas como la de la Figura 79. Hacemos referencia al tipo de representación múltiple.

Figura 79

Sistema de representación múltiple en 5°: Los globos


1. Si un niño trae sus globos, ¿Cuántas globos en total hay en el salón?

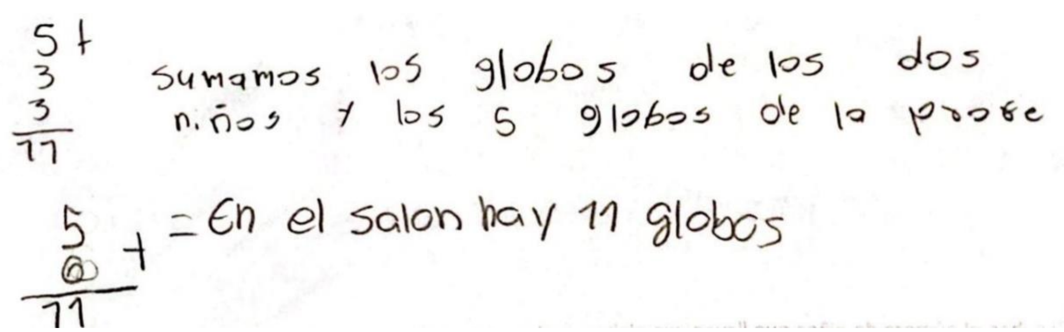
hay 8 globos en total con los que trae la profe

$5 + 3 = 8$

En el inciso 2, encontramos que los estudiantes siempre hacen uso de la adición para dar respuesta a este caso particular de dos niños, sin embargo, encontramos distintas formas de realizar dicha adición como podemos ver en la figura 80.

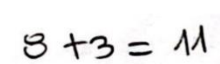
Figura 80

Respuesta al caso particular de dos niños 5°: Los globos


$5 + 3 + 3 = 11$ sumamos los globos de los dos niños y los 5 globos de la profe

$5 + 6 = 11$ = En el salon hay 11 globos

Los estudiantes inician identificando cómo se está construyendo la relación entre la

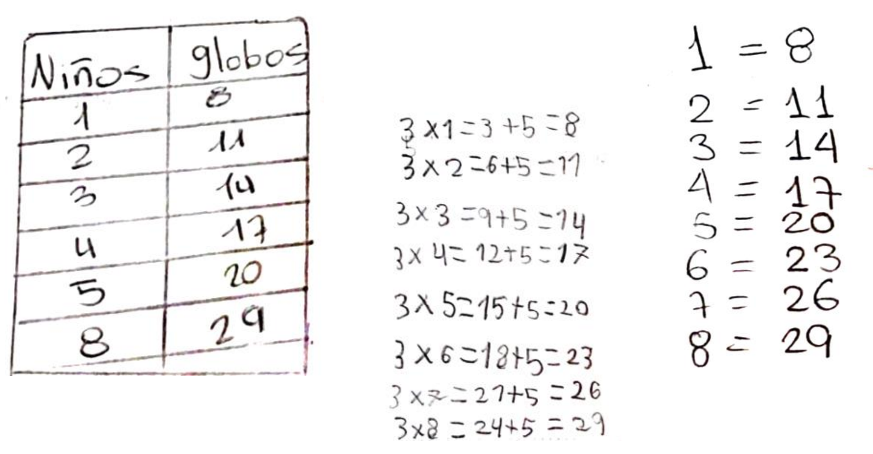

8 +3 = 11

cantidad de niños y globos por medio de la adición. En la tercera respuesta vemos que el estudiante logra predecir el comportamiento de la relación funcional haciendo uso de la respuesta del caso particular anterior.

Respecto al uso de diferentes representaciones, en la tarea anterior tuvimos como objetivo la introducción de la representación tabular. Para esta implementación el inciso número tres da espacio para que el estudiante escoja el tipo de representación que considere pertinente para organizar la información. Encontramos que algunos estudiantes utilizan tablas trazando las líneas de las filas y columnas, mientras que otros no, pero usan una estrategia para organizan la información, tal como puede verse en la Figura 81; si bien no todos hacen uso de esta herramienta notamos un avance respecto a la primera tarea en la cual su uso fue nulo, todos los estudiantes organizan la información construyendo dos filas con los respectivos datos.

Figura 81

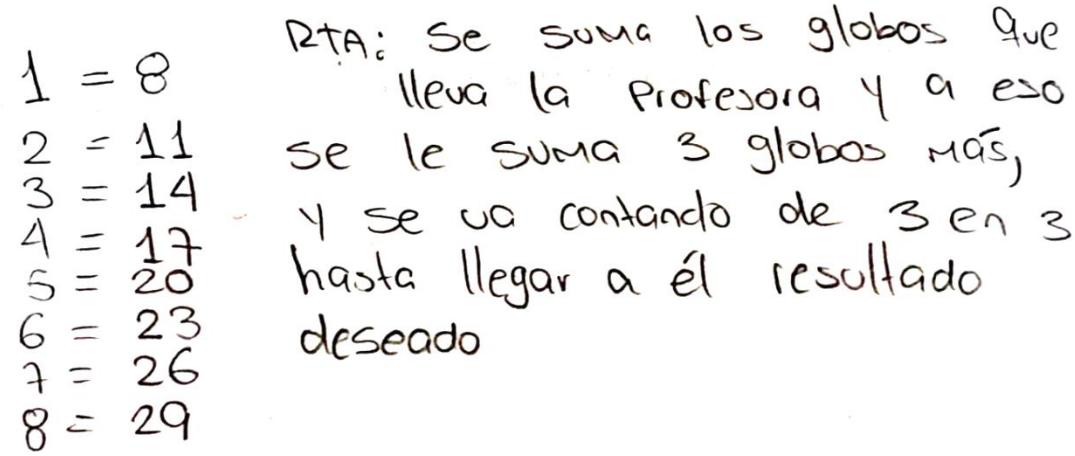
Organización de información en 5°: Los globos



Adicionalmente, los estudiantes acompañan la información de una breve explicación de cómo van dando respuesta a cada caso particular, la representación verbal es una fortaleza en este grupo de estudiantes. De este modo, vemos que los estudiantes identifican cómo se construye la relación entre la cantidad de niños y globos al momento de calcular casos consecutivos, describen verbalmente la manera en que la relación se construye (Ver Figura 82) y predicen el comportamiento de la relación funcional inmersa.

Figura 82

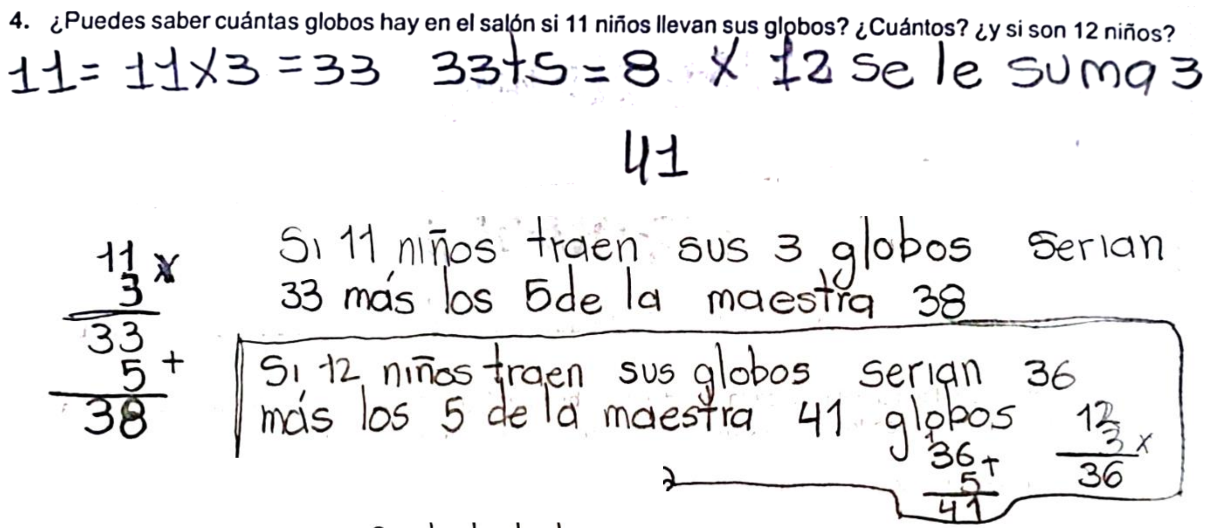
Representación verbal de la relación funcional 5°: Los globos



En los casos particulares de 11 y 12 niños, encontramos que los estudiantes hacen uso de la multiplicación e identifican la constante de 5 globos en cada caso. Por un lado, están los estudiantes que realizan el cálculo con 11 niños por medio del algoritmo de la multiplicación y la adición de la constante 5, además, los que usan el caso particular anterior adicionándole 3 a esa respuesta para el caso particular posterior. En la siguiente Figura 83 mostramos evidencias de esto.

Figura 83

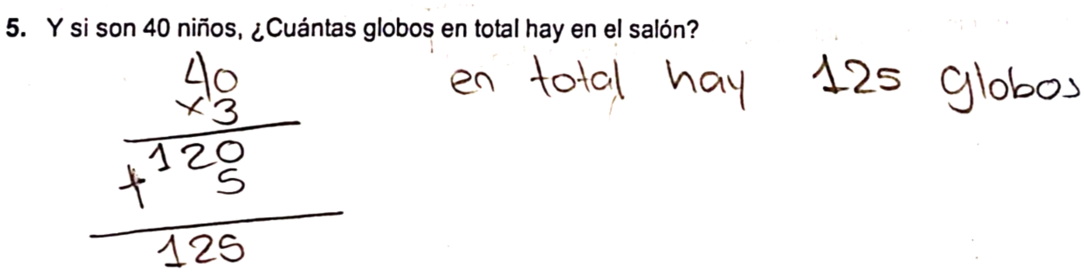
Cálculo de casos particulares consecutivos 5°: Los globos



Los procedimientos mostrados en la Figura 83, evidencian que los estudiantes encuentran un método general para determinar la cantidad de globos a partir del número de niños y establecen la manera como se relacionan. De este modo, el cálculo del inciso posterior para el caso de 30 niños es realizado por ellos sin ningún problema por medio de la relación encontrada, tal como se muestra en la Figura 84.

Figura 84

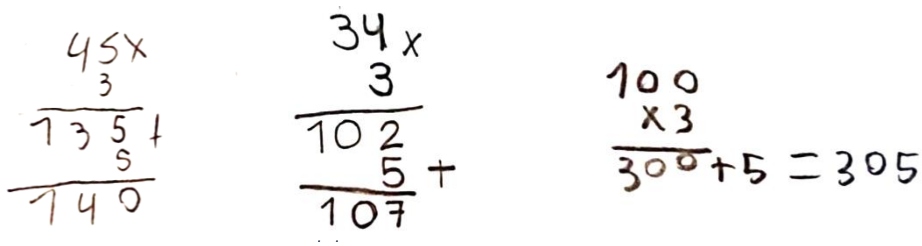
Cálculo en caso particular lejano 5°: Los globos



Así mismo, en el siguiente inciso los estudiantes responden a cualquier caso particular que ellos elijen, lo hacen utilizando el método desarrollado en los incisos anteriores como se muestra en la Figura 85.

Figura 85

Cálculo en caso particular escogido 5°: Los globos

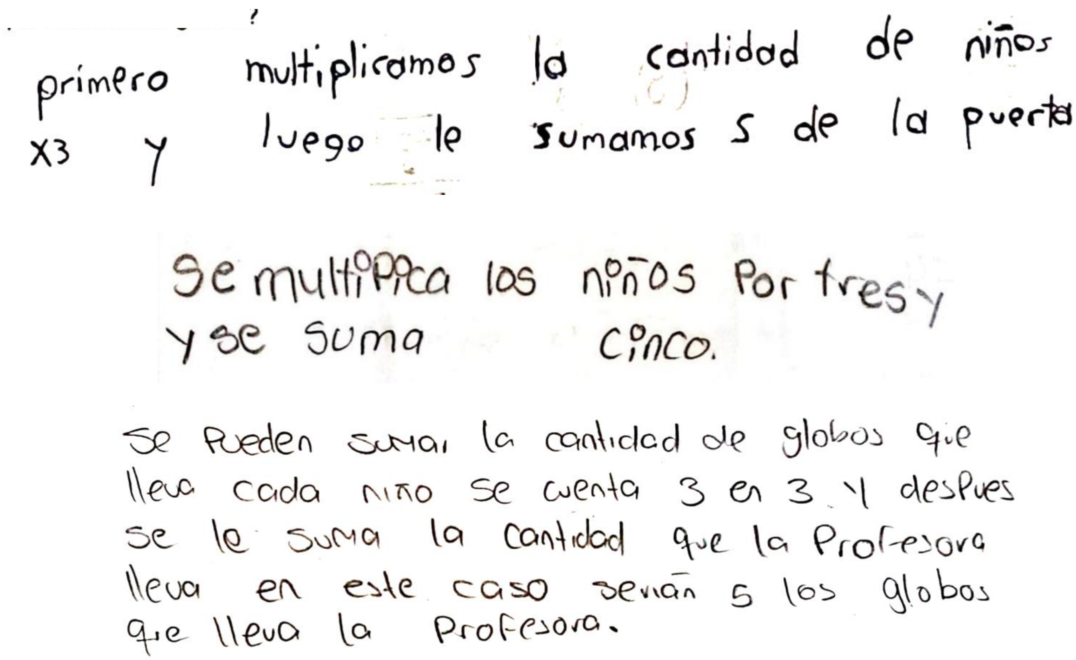


En el proceso de generalización encontramos diversas formas de expresar la relación funcional (Figura 85). Los estudiantes señalan el proceso de multiplicar por 3 la cantidad de niños y luego sumar los 5 globos de la profesora. En la actividad generada en esta tarea, encontramos una evolución en la predicción del patrón y las distintas formas de expresarlo, como mencionamos anteriormente, casi todos los estudiantes generalizaron la relación funcional. Igualmente encontramos que los estudiantes expresan principalmente de forma verbal la relación entre las cantidades.

De este modo, encontramos que los estudiantes de quinto grado formulan frases clave para describir la forma en que se construye la relación entre la cantidad de niños y globos en el salón; esto les permite predecir el comportamiento de la relación funcional en casos posteriores, así hacemos referencia a un tipo de generalización contextual. En la Figura 86, mostramos algunas formas de generalizar la tarea de manera verbal.

Figura 86

Generalización contextual en 5°: Los globos



Al igual que en la tarea anterior, queremos resaltar la respuesta de una estudiante del grupo que evidencia un tipo de generalización simbólica en dónde utiliza el garabato para indicar la cantidad que está variando y luego para el resultado que dependerá de dicha variable. Los resultados de esta estudiante se destacan en su grupo y da evidencia de un pensamiento funcional superior al esperado en su grado.

Figura 87

Generalización simbólica en 5°: Los globos

7. Si sabes el número de niños que llevan sus globos, ¿cómo calculas la cantidad total de globos que hay en el salón?

niños x
3
______
+ 5 =

8. ¿Cómo explicarías cómo calcular cuántos globos hay en total en el salón, si conoces la cantidad de niños que llevaron sus globos?

niños x
globos que llevan los niños
______
+ globos de la profesora =

Adicionalmente, vemos en el inciso como la estudiante va un paso más allá y generaliza la relación funcional para cualquier cantidad de globos que lleve cada niño.

6.2.2 Entrevistas semiestructuradas

En este apartado presentamos los resultados de las entrevistas realizadas a 11 estudiantes que fueron seleccionados a partir del análisis de sus producciones escritas y su desempeño en la implementación de las tareas; se muestran algunos fragmentos que hacen parte fundamental de cada una de ellas. Nos centramos en las evidencias del pensamiento funcional que se manifiestan a partir del análisis a posteriori de sus producciones escritas, teniendo en cuenta las acciones específicas para el pensamiento funcional, como los sistemas de representación y el tipo de generalización que emerge.

En cada entrevista presentamos al estudiante el trabajo que realizó en la prueba escrita, complementando con las explicaciones que se dieron en el momento de la implementación. A continuación, presentamos los resultados que ayudaron a complementar las producciones escritas de los estudiantes.

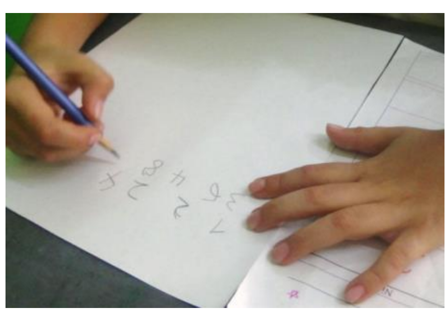
6.2.2.1 ***Tarea 1: En el restaurante escolar.*** A continuación, presentamos los resultados de tres entrevistas basadas en la tarea funcional correspondiente al restaurante escolar.

Entrevista 1: Grado primero. Este estudiante fue seleccionado por su participación acertada durante la implementación y los resultados favorables que tuvo en la prueba escrita respecto al proceso de generalización y los sistemas de representación que utilizó. Los registros en la prueba escrita resaltaron respecto al grupo de estudiantes. El objetivo de entrevistar al Estudiante 1, al cual le asignamos el seudónimo Adrián, es indagar en cómo argumenta sus resultados, teniendo en cuenta que respondió a casos particulares no consecutivos en donde no podía llevar a cabo el conteo de dos en dos.

Adrián inicia utilizando la representación numérica y realiza una correspondencia en parejas de números. En frente del número de mesas coloca el número de niños que se pueden sentar como se muestra en la siguiente figura.

Figura 88

Correspondencia: número de mesas vs número de niños



Es importante resaltar que Adrián respondió correctamente a cada caso particular haciendo uso únicamente de la representación numérica y no muestra en la prueba escrita el uso de dibujos para el conteo, por lo cual se quería indagar en él cómo encuentra el número de niños a partir de las siguientes preguntas:

I: ¿Cómo sabes que en 2 mesas caben 4 niños?

Adrián: Cuando era el 2 había que sumarle otro, otros 2.

I: ¿Y con el 3? ¿Cómo lo averiguamos?

Adrián: Porque cuando hay 3 hay que sumarle otros 3. Cuando hay 4 le sumamos otros 4, sería 8.

I: ¿Por qué sabes que hay que sumarle otros 4? ¿Cómo encontraste el número de niños?

Adrián: Porque cada mesa eran 2 niños, cada vez yo sumaba 2. Por eso en una mesa caben 2, y el otro resultado es 4, y el otro es 6 porque 4 más 2 es 6, y el otro es 8 porque más 2 es 8.

I: ¿En 5 mesas?

Adrián: En 5 mesas cabrían 10.

I: ¿Cómo sabes que es 10?

Adrián: Porque hago lo mismo, lo que hice acá. Porque le sumé 2, 8 más 2 es 10.

I: ¿Por qué sumas 2?

Adrián: Porque cada mesa es dos por eso sumo cada vez dos.

Podemos ver como el estudiante identifica inicialmente que podía ir sumando de dos en dos para responder a casos particulares consecutivos; adicional él logra identificar que por cada mesa sumas dos, en sus palabras menciona que “cada mesa es dos”, lo cual fue un aspecto relevante y muy importante al momento de continuar con la entrevista con casos particulares no consecutivos. Ahora el objetivo es ver si el estudiante logró identificar algún patrón que le permita encontrar el número de niños para cualquier número de mesas.

I: Y si te digo en 8 mesas.

Adrián: En 8 mesas caben 16 personas. Porque 8 más 8 es 16.

I: ¿Y en 10?

Adrián: En 10 mesas hay 20 niños.

I: ¿Y en 20?

Adrián: 20 mesas le sumo otros 20 hay 40 niños.

I: ¿Y si hay 40 mesas?

Adrián: Si hay 40 mesas es 80. Los mismos resultados de acá, cuando era acá 4 acá ahora es 40. (Adrián señala su hoja de trabajo en la columna de niños de 1 a 5 mesas) Mi papá me enseñó eso, antes era 4 ahora es 40, ahora donde era 8 ahora es 80.

I: ¿Y 50 mesas?

Adrián: Son 100.

I: Ahora dime un número y lo investigamos.

Adrián: Con 100. Son 200 niños. Dígame el número que quiera de mesas, dígame un número al azar así sea alto.

I: Con 210.

Adrián: Da 420.

I: ¿Y cualquier número de mesas, cómo sabemos cuántos niños hay?

Adrián: Dígame un numero alto.

I: Con 180.

Adrián: 180 más 180, yo sumé los 80 y como 8 más 8 es 16, y sumé los 100. Y da 360.

I: ¿Cómo le explicarías a alguien el número de niños que caben en las mesas?

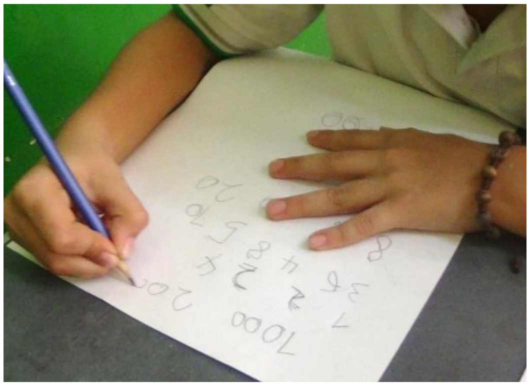
Adrián: No soy tan buen docente pero, yo le diría que sume de 2 en 2, y después de que sea ya 40 que le sume otros 40, y cuando sea 50 sume otros 50, en 100 otros 100, 210 es 420 porque 200 más 200 es 400 y 10 más 10 es 20.

I: ¿Y en 1000 mesas?

Adrián: En 1000 mesas es 2000.

Figura 89

Respuesta a casos particulares no consecutivos



En este momento, observamos que Adrián tiene construida en su mente una manera rápida y eficiente de encontrar el número de niños. Por otro lado, queremos resaltar su habilidad numérica para realizar adiciones, sin embargo, para él no es natural "generalizar" y se centra el responder a casos particulares sin aún expresar de alguna forma que logró generalizar la relación funcional.

Para finalizar y guiar al estudiante en las etapas del modelo de razonamiento inductivo (Cañadas y Castro, 2007), se busca que Adrián logre concluir alguna regularidad a partir del cálculo de los casos particulares como se muestra en el siguiente fragmento.

I: ¿Hay algún truco para encontrar el número de niños?

Adrián: El truco es, cuando vea el número hay que sumarlos. O sea si son 10 mesas toca sumarle otros 10. Si son 1000 mesas sumamos otros 1000 y serían 2000. Por ejemplo, si le aparece 40 usted suma otros 40.

I: ¿Entonces cuál es el truco?

Adrián: Hay que sumarle al número el mismo número.

De este modo, vemos como el estudiante logra un tipo de generalización contextual en donde logra expresar la regularidad a partir de la frase clave “Hay que sumarle al número el mismo número”.

Entrevista 2: Grado tercero. El estudiante, que recibe el seudónimo de Max, fue seleccionado por los procedimientos originales que realizó en la prueba escrita (Ver figura 41). El objetivo de esta entrevista es conocer la manera de razonar del estudiante dado que responde correctamente a casos particulares haciendo uso de la representación pictórica, pero además, añade expresiones numéricas que no están acordes al contexto del problema.

A continuación, mostramos fragmentos que hicieron parte de dicha entrevista. Recordamos el enunciado de la tarea, Max lee el enunciado e iniciar a relatar lo que hizo en cada inciso.

I: ¿Cuántos niños pueden sentarse al unir dos mesas? ¿Cómo encontraste el 6?

Max: Multipliqué 2 por 3.

I: ¿Por qué esa multiplicación? ¿Por qué esa funciona?

Max: (En silencio).

I: ¿Qué hiciste? Yo veo que haces un dibujo, ¿para qué sirve?

Max: Para contar.

I: Qué hiciste primero, ¿el dibujo o la multiplicación?

Max: El dibujo.

I: Con el dibujo cuentas, ¿y luego?

Max: Busco una multiplicación que me de 6.

I: ¿Y para 3 mesas?

Max: Primero hice el dibujo y busqué dos números que multiplicados den 8.

Como se pensó en el análisis a posteriori, el estudiante busca dos números que al multiplicarse den como resultado el número que él obtenía a partir del conteo con el dibujo. Sin embargo, estos números son escogidos pensando en las tablas de multiplicar y no en el contexto de los niños y las mesas. Continuamos con la entrevista esperando que el estudiante logre mejores resultados con otros casos particulares. Retomamos con el caso de 120 mesas, dado que él no lo respondió en la prueba escrita.

I: ¿Y el de 120 mesas? ¿Por qué no lo hiciste?

Max: Muy grande el número.

I: Repasemos los ejercicios anteriores (señalamos el inciso 5). ¿Qué operación hacemos siempre?

Max: Una multiplicación.

I: ¿Qué multiplicamos?

Max: Algo que nos dé 18 (Max señala el caso particular de 8 mesas).

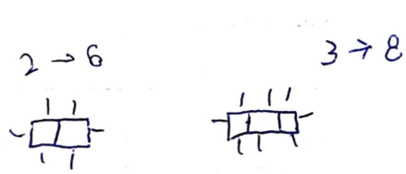
I: Y si es un número grande de mesas que es difícil hacer dibujo, ¿qué operación podemos hacer?

Max: Está difícil.

I: Hagamos un dibujo.

Figura 90

Dibujo hecho por Max en la entrevista



I: ¿Qué le haces al 2 para volverlo 6?

Max: Multiplicamos por 3.

I: Y al 3, ¿Cómo lo volvemos 8?

Max: Hacemos 3 más 5.

A pesar de la insistencia Max no logra avanzar más allá del cálculo para casos particulares consecutivos con el conteo a partir del dibujo. Consideramos que más allá de tener una dificultad para realizar algún tipo de generalización, su obstáculo nace por la relevancia que se da al algoritmo de la multiplicación en este grado escolar en particular, lo que impide que aborde la tarea sin tener en cuenta esta operación, esto lo limita a razonar más allá. En grado tercero los estudiantes trabajan principalmente diferentes tipos de multiplicaciones con números naturales y resolución de problemas con esta operación. En los análisis a priori no visualizamos esta dificultad en los estudiantes, creímos natural para ellos responder a cualquier caso particular por medio de la adición o la multiplicación aunque no pudieran generalizar.

Entrevista 3: Grado quinto. Como mencionamos anteriormente, encontramos resultados positivos en este grupo de estudiantes, en donde, se destacó la argumentación por medio de expresiones verbales. De este modo, el estudiante que fue seleccionado resaltó en su grupo por tener respuestas correctas a casos particulares consecutivos y no-consecutivos lejanos, sin embargo, a pesar de su buen desempeño en la prueba no logró expresar el sentido de la indeterminancia en su conclusión y su forma de generalizar y argumentar se basa en la manipulación numérica.

Iniciamos recordando el contexto de la tarea y revisando lo registrado por el estudiante, que recibe el seudónimo Jan.

I: Cuéntame, como respondiste las primeras preguntas.

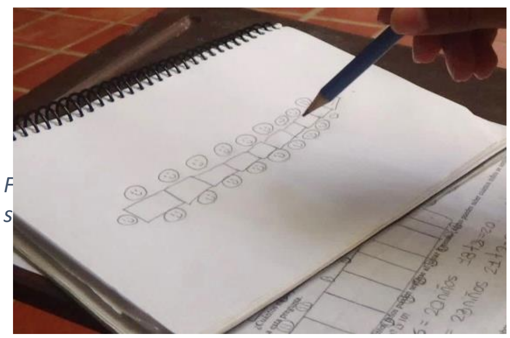
Jan: Uno las dos mesas y en cada puesto ubico los niños y ahí voy contando cuántos niños caben en las mesas y saco el resultado. En el otro, junto 3 mesas y coloco los niños en cada mesa y cuento.

I: En el siguiente punto que ya no hiciste dibujo, ¿cómo hiciste?

Jan: Para 8 mesas hay 18, para 9 junto otra mesa y ahí pongo 3 niños, nos da 21. (Realizamos el siguiente dibujo para que el estudiante se autocorrija).

Figura 91

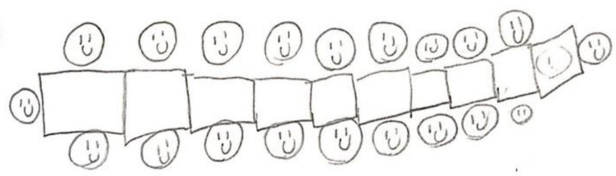
Representación pictórica para solucionar un caso particular



En este momento Jan piensa por qué contó 21 en vez de 20. Borra el +3, y pone +2. Vemos como tuvo un error numérico al momento de determinar un caso particular posterior al que había encontrado. Para el caso de 9 y 10 mesas, sumó 3 niños respectivamente. Sin embargo, con ayuda del dibujo el cae en cuenta de su error mencionando que debe sumar 2 y no 3 por cada mesa, continuamos con la entrevista realizando el proceso de agregar una mesa con apoyo del dibujo como se ve en la figura 92.

Figura 92

Representación pictórica para identificar la constante



I: Ya supiste en los puntos anteriores agregábamos de 2 en 2. Para 120 mesas ¿Cómo se hacía?

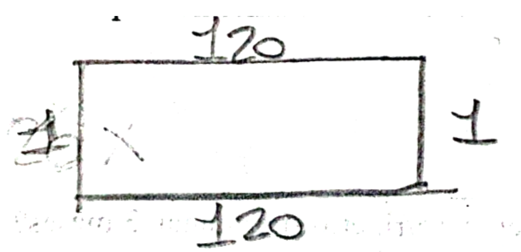
Jan: Para 120. Multipliqué por 2, me daba el resultado 240, le sumé 2 y dio 242.

I: ¿Por qué multiplicaste por 2?

Jan: Como eran 120 mesas eran muchas, multiplico por 2 porque hay 120 arriba y abajo (Max señala el dibujo).

Figura 93

Representación pictórica-numérica de Jhan



En este momento de la entrevista, corroboramos que Jan no ha logrado generalizar la relación funcional aunque sabe responder a casos particulares. Adicionalmente vemos como este dibujo es un apoyo para que él identifique y argumente por qué específicamente debe multiplicar por 2. Sin embargo, no se le ve muy seguro de esto.

I: ¿Cómo lo harías con 200 mesas?

Jan: Es un número alto (guarda silencio un momento). Multiplico por 2 o por 3, como es un numero alto lo multiplicaría por 3. No mejor por 2 y le sumo 2.

I: ¿Y por qué por 2 y no por 3?

Jan: Por lo mismo que aquí (señala la figura 93).

Finalmente, Jan se mantiene seguro de que debe multiplicar por 2 y luego sumar 2. Sin embargo, cuando buscamos que estructure la relación funcional el estudiante acude a ejemplificar con algún caso particular. Vemos que a pesar de tener la capacidad de responder a cualquier cosa particular, el estudiante se enfoca en el algoritmo numérico y no expresa el patrón que si logró encontrar.

6.2.2.2 *Tarea 2: En el tren.* En este apartado mostramos las entrevistas realizadas a partir del análisis de la tarea funcional titulada "En el tren".

Entrevista 4: Grado primero. Teniendo en cuenta que los estudiantes en esta tarea se limitan a resolver casos particulares cercanos, en esta entrevista se tuvo como objetivo indagar en la forma cómo los estudiantes realizan las operaciones o si en algún momento llegan a construir algún algoritmo en su mente, teniendo en cuenta que los estudiantes en este nivel escolar no tienden a expresarse muy bien de manera verbal ni logran escribir una explicación. Entrevistamos a Antonio (seudónimo), él logró responder a los casos particulares de 1 a 10 vagones. Iniciamos manipulando los recursos hechos en cartulina para recordar el contexto de la tarea.

Figura 94

Uso de recursos manipulativos en entrevista

I: Si ponemos 2 vagones, ¿Cuántas personas hay?

Antonio: 9, ando sumando los niños y después el conductor.

I: ¿Y en 3? ¿Cómo lo hiciste?

Antonio: 13, sumo 4 más 4 más 4 y luego el conductor.

I: ¿Cómo encontrabas cada número? Por ejemplo el 17.

Antonio: Al principio no entendía pero después entendí la estrategia de sumar.

I: ¿Cuál era estrategia de sumar?

Antonio: Sumar los niños y después de último sumaba el conductor.

I: ¿En 4 vagones cómo hiciste?

Antonio: Era simple, teníamos que sumar 4, 4, 4, 4 y 1 al final. Entonces daba 17.

I: ¿Por qué sumamos 4 veces el 4?

Antonio: Porque hay 4 vagones. El de 5 sumando con la misma estrategia. Sumando 4 más 4 más 4 más 4 y después le sumé 1 y me quedó 21, puse el número y terminé.

I: Eres muy inteligente, cómo hiciste esos números tan grandes.

Antonio: Fácil.

I: Por ejemplo, el de 6 vagones.

Antonio: La suma de 4 más 4 más 4 más 4 más 4 más 4 y más 1 son 25.

I: ¿Cómo haces esa suma? ¿Usas los deditos?

Antonio: Yo sumo en la mente.

I: ¿Y este? (caso particular de 7 vagones)

Antonio: Igualito pero un poquito más diferente.

I: ¿Por qué?

Antonio: Porque sumé desde 1 y después terminé con los 4 sietes.

I: Con esos números grandes, (Caso particular 10) ¿sumaste cuántas veces?

Antonio: 10 veces.

I: ¿Cómo haces la suma en la mente?

Antonio: Fácil solo ponemos los números en la mente.

I: ¿Cómo?

Antonio: A mí se me ponen.

Las respuestas de Antonio en esta entrevista dan evidencia de cómo estructura una “estrategia” para encontrar la respuesta a cada caso particular. El estudiante construye una manera general para encontrar la respuesta a casos particulares por medio de la adición repetida del número 4. Además, identifica que debe sumar tantos 4 como vagones hay.

Concluimos que este resultado es un comienzo favorable para los estudiantes en este tipo de problemas, a pesar de no encontrar expresiones verbales explícitas de una generalización, el estudiante claramente muestra que sabe cómo se construye esta relación aunque no logre avanzar en sumas más grandes.

Entrevista 5: Grado tercero. La estudiante de esta entrevista se seleccionó por su buen desempeño y participación durante la implementación de esta tarea. En esta ocasión queremos indagar en la manera como la estudiante construye esta relación funcional. Esta estudiante que recibe el seudónimo de Paula llega a la construcción de una frase clave para la relación dada en la tarea del tren.

Inicialmente leemos el enunciado de la tarea, recordamos el contexto de la situación y Paula explica cómo respondió a cada inciso.

Figura 95

Entrevista de Paula

I:	Cuéntame, ¿Cómo hiciste el primer punto?
Paula:	Van 5 porque en el vagón hay 4 niños y el conductor. Hice 4 más 1.
I:	¿Y en 2 vagones?
Paula:	Van 9. Hice 4 más 4 más 1. Primero hice el dibujo y luego sumé.
I:	¿Cómo llenaste la tabla?
Paula:	Sumé de 4 en 4. 9, 13, 17 y así.
I:	¿Por qué sumamos 4?
Paula:	Porque en cada vagón hay 4 niños.

En este momento, podemos ver cómo Paula logra lo que se esperaba con estos incisos, ella identifica que para cada caso particular consecutivo se debe sumar 4 y argumenta con seguridad el por qué adiciona 4 personas. Además, Paula desde el primer momento tiene en cuenta la adición del conductor que representa la constante 1 en la relación funcional. Con los siguientes fragmentos vemos que además, logra construir un algoritmo que le permite encontrar el número de personas haciendo uso de la multiplicación y la idea de sumar de 4 en 4 se le hace menos eficaz.

I: Con ayuda de la tabla, ¿Cómo encontramos cuántos niños hay en 11 vagones?

Paula: Hice 11 por 4. Porque en 11 vagones hay 4 personas en cada uno y al final sumé el conductor. (Mismo proceso para 12).

I: ¿Y para este número tan grande?

Paula: 30 por 4 y luego sumé 1.

I: Y si sabes el número de vagones, ¿Cómo calculas el número de personas que van en el tren?

Paula: Multiplicando el número por 4 y le sumo el conductor.

I: ¿Siempre se hace así? Por ejemplo, con 1000.

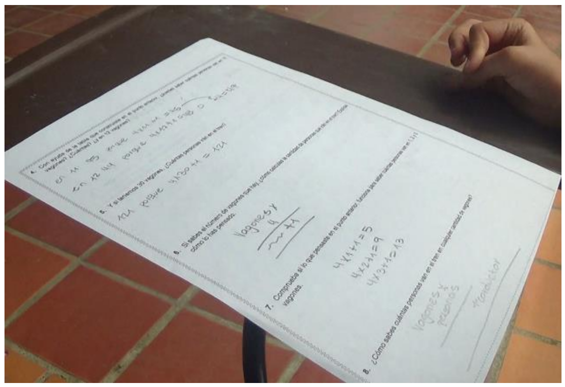
Paula: Si, 1000 por 4 y le sumo el conductor.

Finalizamos la entrevista con los cuestionamientos sobre el caso particular de dos mil y de un millón de vagones, buscando corroborar que la estudiante estaba segura de su conclusión. Ella expresa nuevamente que en cada caso multiplicamos el número de vagones con 4, y al final le sumas 1. Concluimos la ventaja de organizar los datos en una tabla, de modo que facilita en los estudiantes la identificación de una regularidad en el conjunto de números. Por otro lado, resaltamos cómo la estudiante logra identificar que la variable es el número de vagones, que para ella se basa en multiplicar al 4 por la cantidad de vagones que se indiquen y finalmente, la existencia de una constante que se debe tener en cuenta en cada caso.

Entrevista 6: Quinto grado. Como mencionamos en el análisis a posteriori, los estudiantes lograron estructurar frases clave al momento de generalizar. Adicionalmente, encontramos una estudiante (seudónimo Amelia) que expresa de una manera particular la forma de encontrar el número de personas (Ver figura 67), por lo que fue seleccionada para la fase de entrevistas. A continuación, presentamos algunos fragmentos.

Figura 96

Entrevista de Amelia



I: ¿Cómo hiciste el primer punto?

Amelia: Dicen que en el vagón siempre caben 4 personas más el conductor 5.

I: ¿Y el segundo?

Amelia: Pues 4 por 2 porque son 2 vagones más el conductor da 9.

I: ¿Cómo llenaste la tabla?

Amelia: Es casi igual, lo mismo, porque 4 por los vagones más el conductor.

Desde los primeros incisos la estudiante hace uso exclusivo de la multiplicación, adicionalmente al expresar “es casi igual” nos permite analizar en cómo Amelia desde ese momento ya había identificado una regularidad en los datos. Por otro lado, la estudiante también establece que en los casos particulares consecutivos también es correcto realizar el cálculo sumando de 4 en 4.

I: ¿Me puedes explicar lo que hiciste en el inciso 4?

Amelia: Para el 12, le sumo 4 al de 11. Para el de 13 sumo otros 4 al de 12.

Si bien desde el primer inciso la estudiante da indicios de haber identificado la relación funcional, su respuesta final en la prueba escrita fue inesperada.

I: ¿Cómo hiciste el punto 6? ¿Qué es eso que haces acá?

Amelia: Se multiplican los vagones por 4 porque caben 4 personas más el conductor.

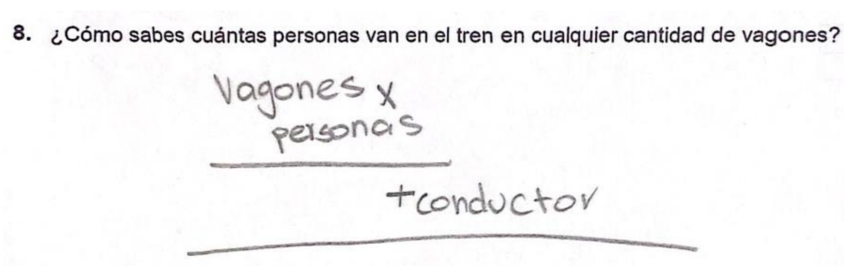
I: Ese cosito que haces acá, ¿Qué es?

Amelia: Ese es el resultado más el conductor.

Amelia muestra una forma de generalizar más rigurosa que la de sus demás compañeros. La estudiante comprende el por qué multiplicar por cuatro y además, que el resultado de esa multiplicación es desconocido y depende de la cantidad de vagones. Es un ejemplo claro del sentido de la indeterminancia y de un tipo de generalización que va más allá el uso de frases clave.. Además, la estudiante expresa de otra forma su conclusión.

Figura 97

Generalización de Amelia en la prueba escrita


8. ¿Cómo sabes cuántas personas van en el tren en cualquier cantidad de vagones?

Vagones x personas

+conductor

I: ¿Qué significa lo que escribes ahí?

Amelia: Se multiplican los vagones por el total de las personas que caben en un vagón más el conductor.

I: ¿Y en este espacio?

Amelia: Esa es la respuesta.

I: ¿Por qué haces ese cosito? ¿Qué significa para ti ese garabato?

Amelia: Es como el resultado de los vagones por el número de personas que caben. Es el resultado porque aquí no nos están pidiendo cuántos vagones, entonces es como si fuera el resultado.

A partir de lo escrito en la hoja de trabajo y la explicación verbal de Amelia, vemos que no solo generaliza la situación cuando en un vagón van 4 personas, sino que además, logra establecer una relación funcional para cualquier capacidad del vagón. Vemos que el espacio que deja en el algoritmo es para ella lo indeterminado, la variable que depende de la multiplicación y por tanto es un valor desconocido como el "resultado". En este caso utilizó el "+conductor" en vez de sumar 1 pero del mismo modo hace referencia a la constante del problema.

6.2.2.3 *Tarea 3: Los globos.* A continuación, mostraremos los resultados de las entrevistas correspondientes a la tarea funcional llamada "Los globos".

Entrevista 7: Grado primero. La estudiante a la que nombramos Alisson fue seleccionada por responder correctamente a los casos particulares de 1, 2, 3, 4, 5 y 8 niños haciendo uso únicamente de la representación pictórica de globos. Para empezar la entrevista recordamos la tarea e iniciamos haciendo el conteo de los globos para el caso particular de un niño y vamos retomando cada caso. En particular, con esta entrevista queríamos escuchar la justificación del por qué esa cantidad de globos.

Figura 98

Entrevista de Alisson

I: Tu hiciste dibujos, cuéntame ¿para que servían? ¿cómo contaste para 2 niños?

Alisson: Porque yo dije un niño y otro niño traen 3 globos los puse ahí y el de la puerta.

I: ¿Y el de 3? ¿Qué significan los dibujos?

Alisson: Son el resultado.

I: ¿Por qué haces esos dibujos?

Alisson: Son los globos de los niños.

A medida que transcurría la entrevista observamos que los dibujos funcionan como una herramienta, para realizar posteriormente, el conteo uno a uno de cada globo dibujado. En Alisson evidenciamos que no identifica el conteo de 3 en 3 para casos particulares consecutivos, pero si relaciona de alguna forma la cantidad de veces que se suma el número 3 en cada caso, ella dibuja 3 globos por cada niño. De este modo, concluimos que la estudiante puede responder a casos particulares dibujando la cantidad de globos (de a tres en tres por cada niño) y contando uno a uno al final. No está encontrando la relación funcional, pero si tiene en cuenta que por cada niño debe dibujar 3 globos, sin embargo, para casos particulares más grandes su método no sería efectivo.

Por otro lado, teniendo en cuenta los resultados de Alisson, seleccionamos otro estudiante del grupo para ser entrevistado.

Entrevista 8: Grado primero. Este estudiante es seleccionado por responder correctamente a casos particulares haciendo uso inicialmente de la representación pictórica para 1 y 2 niños, y luego utilizando únicamente la representación simbólico – numérica. Retomamos la tarea con la hoja de trabajo del estudiando, que llamamos Adrián, e iniciamos con sus justificaciones del proceso que realizó en cada caso consecutivo.

I: ¿Cuándo hay dos niños?

Adrián: Cada niño equivale a 3 globos entonces serían 6 y con este (señala la puerta) 7.

I: En el caso 1 y 2, hiciste dibujos, en los demás no. Entonces, ¿Cómo lo encontraste?

Adrián: Yo no hice dibujos porque es más difícil y largo dibujando, entonces acá como eran 7 yo le sumé otros 3.

I: ¿Por qué sumamos 3?

Adrián: Porque cada niño vale 3. 3 niños equivalen a 10 globos.

I: ¿Y para 4 niños?

Adrián: Mire si cada niño vale 3 globos, cuánto es 4 veces contar 3. O sea 13 por el de la puerta.

Particularmente Adrián considera que realizar dibujos es un proceso más largo y por ende menos efectivo, por lo que prefiere hacer los conteos sin el apoyo de la representación pictórica. El estudiante identifica desde el inicio la equivalencia de un niño con tres globos, en donde expresa repetitivamente de manera verbal que “un niño equivale a 3 globos”, adicional a esto vemos la capacidad que tiene el estudiante para contar de tres en tres correctamente; siempre tiene en cuenta que al final debe sumar un globo más que corresponde al globo de la puerta. Al continuar con el desarrollo de la entrevista queríamos ver si el estudiante respondía a casos particulares mayores a 8 y si de alguna forma había construido la relación funcional, pues en su hoja de trabajó no realizó cálculos para números mayores a 8.

I: ¿El de 8? ¿Por qué te dio 25?

Adrián: Hay que sumarle 3 más 3 más 3. Yo vi que el 5 se saltó al 8, entonces le sumé 3 veces 3.

I: Y por ejemplo, 10 niños ¿Cuántos globos?

Adrián: Acá sería 31 porque mira, yo acá hice lo mismo que hice en el 5, le sumé pues 6.

I: ¿Por qué sumas 6?

Adrián: Porque 3 más 3 es 6, y le faltaba 2 para 10 (señalando al número 8). Y también a este le sume 6 (señalando 25) y como 5 más 6 es 11 entonces por eso puse 31.

Encontramos que el estudiante construyó una forma de encontrar el resultado de un caso particular a partir de otro. Adrián encuentra que, si de 5 a 3 hay 3 unidades, debe sumar 3 veces 3 unidades. Lo mismo realiza para ir del caso de 8 a 10 niños. Si bien no ha encontrado una forma general para calcular el número de globos, Adrián logra construir un patrón que funciona utilizando un cálculo previo con un caso particular inferior. Por ende, continuamos con casos particulares mayores a 8 durante la entrevista, para verificar si el estudiante puede llegar a generalizar la relación funcional sin utilizar otro caso particular.

I: Y si queremos encontrarlo con un número grande, ¿será que se puede?

Adrián: Voy a intentarlo, ¿Cuál número? Dígame uno.

I: Por ejemplo con 15.

Adrián: Yo le sumaría otros 5 de esos, o sea 5 veces 3 (cuenta con los dedos), hay que sumarle 15 creo. (El estudiante suma 31 sin hacer proceso escrito).

I: ¿Y para 20?

Adrián: Entonces sumo otros 15 a esto (señala el número 46).

Figura 99

Adrián cuenta con los dedos

Entonces vemos que, al momento de preguntarle a Adrián sobre casos particulares que van de 5 en 5 (para 10, 15 y 20 niños) él identifica que debe ir sumando 15 globos en cada caso. Ahora el objetivo de la entrevista se centró en si el estudiante podía calcular la cantidad de globos para número más grandes, teniendo en cuenta que, Adrián está en un nivel escolar en el que apenas inicia la adición de números naturales, para este momento con números alrededor de 200.

I: Hagamos el del caso de 50 niños.

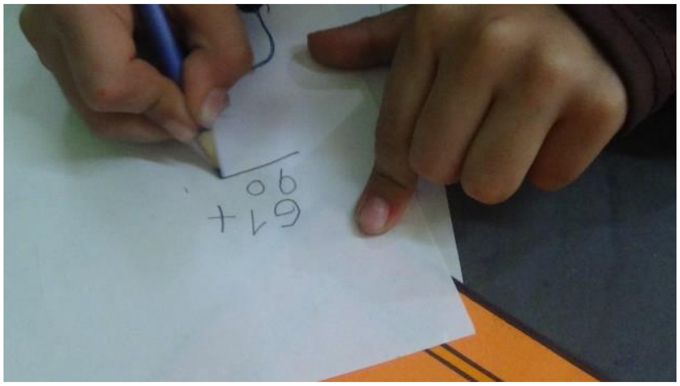
Adrián: Hay que sumarle otros 30, o sea ¿cuánto es 3 por 30?

I: Es 90. Pero ¿por qué 3 por 30? Si hay 50 niños.

Adrián: 3 por 30 le estoy diciendo porque cada globo vale 3 y acá le sumo otros 30 (señala del 20 al 50). Hay que sumarle a esto 90 (señala que al 61 le suma 90).

Figura 100

Adrián suma para encontrar la respuesta a un caso particular



I: Y ahora con 80.

Adrián: 3 por 30 otra vez, otra vez 90. Al 151 le sumamos 90.

I: ¿Qué operación es 3 por 30? ¿ya sabes multiplicar?

Adrián: Eso es de las tablas, 3 por 1 y así. No sé tanto pero mi mamá me lo enseña para que el otro año esté bien. Entonces 151 más 90, hagámoslo. (hace el proceso y expresa que es 241)

I: Y el último, ¿Cómo lo hacemos?

Adrián: Uy si, está medio difícil el 100. Creo que otra vez es 30, ah no es 20. Ahora es 3 por 20, ¿Cuánto es?

I: Es 60.

Adrián: Entonces toca sumarle 60.

I: ¿Qué es 3 por 20? ¿Por qué me lo preguntas?

Adrián: Porque mire hay que sumarle 20 para que sea 100, por eso le digo 3 por 20.

I: Y, ¿por qué 3 por 20?

Adrián: Porque cada niño vale 3 y hay 20 niños más. Sumamos 241 con 60.

Observamos que Adrián construye un patrón, distinto al esperado en el sentido que su método depende de un caso particular anterior. Sin embargo, el estudiante logró identificar cómo se construye la cantidad de globos a partir de la cantidad de niños, analiza las implicaciones que tiene considerar niños respecto a los globos y además, predice el comportamiento de la relación funcional en casos posteriores. Finalmente concluimos que Adrián logra estructurar una generalización factual que se centra en la manipulación de números, pero no logra construir una relación entre la cantidad de niños y globos.

Entrevista 9: Grado tercero. Este estudiante al que llamamos Mathias fue seleccionado por su buen desempeño en la prueba escrita y su participación durante las implementaciones. Mathias se caracteriza por ser un estudiante atento y con excelente disposición para las actividades. Para el desarrollo de la entrevista empezamos leyendo el enunciado de la tarea y manipulamos el material para recordar el contexto de la situación de los globos.

I: Si un niño trae sus globos, ¿Cuántos globos hay en el salón?

Mathias: Seis globos.

I: ¿Qué operación haces?

Mathias: La multiplicación 3 por 1 y sumo 3.

I: ¿Y si dos niños traen sus globos? ¿Qué operación haces?

Mathias: 3 por 2 igual 6 y le sumamos 3 más. Se puede la suma o la multiplicación. Multiplico los de los niños y sumo los del docente.

I: ¿Y para 8 niños? ¿Qué hiciste?

Mathias: Hacemos 3 por 8 que es igual al 24, más 3 los del docente que da 27.

Desde el inicio de la entrevista Mathias muestra el algoritmo que construyó para dar respuesta a cada caso particular. Es importante resaltar que el estudiante relaciona tanto la adición como la multiplicación para la solución y siempre tiene en cuenta al final sumar los globos del docente. Ahora queríamos saber cómo Mathias encuentra la solución a un caso particular consecutivo, el estudiante muestra que además del patrón que identificó puede sumar de 3 en 3 para estos casos particulares.

I: ¿Cómo hiciste el caso de 11 y 12 niños?

Mathias: Estos son los de cada niño por 11 que son los 11 niños, y 3 por 11 es igual a 33, sumamos 3 del docente. Y hacemos la operación suma 33 más 3 es igual a 36.

I: ¿Qué le hacemos a los de 11 para encontrar a los de 12?

Mathias: Le sumamos 3 porque otro niño trae otros 3 globos.

Continuando con el desarrollo de la entrevista, Mathias muestra comprender que el patrón que encontró lo podemos aplicar para cualquier número de globos. En los siguientes fragmentos, resaltamos el uso de la palabra "siempre" como una palabra clave en el proceso de generalización como una parte fundamental del proceso que lleva el estudiante en cada inciso, y que le permite construir su frase clave al momento de generalizar de manera contextual la relación funcional.

I: ¿El de 40 como lo hiciste?

Mathias: 3 que son los globos que traen todos y los 40 niños, hacemos la operación de multiplicación 3 por 40 es igual a 120, más 3 que son los 3 globos del docente, es igual a 123 globos.

I: ¿Qué número escogiste para encontrar el número de globos? Cuéntame.

Mathias: Escogí el 60. Los 3 globos que siempre llevan todos y los 60 niños, hacemos la operación de multiplicación. 3 por 60 es igual a 180 y 3 que son los 3 globos que lleva siempre el docente da 183.

Mathias muestra la identificación del patrón de la tarea funcional desde los primeros incisos, sin embargo, esto no garantizaba que él tuviera en cuenta el sentido de la indeterminancia por lo que continuamos con las preguntas enfocadas en generalizar dicho patrón.

I: ¿Cómo le explicas lo que debes hacer a un compañero? ¿qué proceso? ¿qué operación?

Mathias: Multiplicar y sumar.

I: ¿Qué multiplicas?

Mathias: Los 3 globos, 3 por la cantidad de niños y luego por ejemplo, 3 por 8 es 24 y luego le sumamos los 3 del docente.

I: ¿Así se puede con cualquier número? Por ejemplo 1000 niños.

Mathias: Entonces sería por 3 también y luego ponemos el resultado que es 3000 y le sumamos 3 del docente, entonces 3003.

I: ¿Y con un número más grande? ¿qué hacemos con 2000?

Mathias: Multiplicamos por 3 igual, 3 por 2 es 6 entonces da 6000 y le agregamos los 3 del docente. Le sumamos y da 6003.

I: ¿Y siempre se hará lo mismo? ¿con un millón?

Mathias: Es lo mismo, multiplico por 3 y luego sumo los tres del docente, siempre hago eso y me da.

Finalmente, vemos que Mathias logra generalizar de manera contextual donde su frase clave consiste en “multiplico la cantidad de niños por 3 y al final le sumo 3”. El estudiante halló la relación entre las cantidades que varían e identificó la manera en que se construye la relación funcional, y puede predecir el comportamiento de la relación funcional en casos posteriores a partir de la descripción verbal.

Entrevista 10: Grado quinto. El estudiante al que llamamos Santiago fue seleccionado por su desempeño favorable tanto en la prueba escrita como en los momentos de socialización en cada implementación. Además, es un estudiante que se caracteriza por su buena expresión verbal (escrita y oral). En este caso, queríamos ver el proceso que llevó al estudiante a generalizar la relación funcional. El estudiante fue contándonos poco a poco como realizó cada inciso. En primer instancia vemos que el estudiante identifica que la relación funcional se construye sumando 3 al caso particular anterior y analiza la implicación de que varíe la cantidad de niños.

I: Cuéntame que hiciste en la prueba escrita.

Santiago: Acá si un niño traía sus globos tocaba sumar los globos de la maestra más los que trae el niño, que daría 8. Si dos niños traían sus globos eran los globos de la maestría, los globos del niño más otro, o sea 5 más 3 más 3.

I: ¿Este 8 de dónde sale? (Señalamos la respuesta del estudiante en el inciso 2: “8+3=11”.

Santiago: De sumar 5 más 3. Al caso anterior se le sumó el 3.

Anteriormente mencionamos que uno de los objetivos de la segunda tarea es introducir el uso de la tabla como medio para organizar la información. En el desarrollo de esta tarea, Santiago decidió usar una tabla para organizar la información de la cantidad de globos cuando hay 1, 2. …, 8 niños.

I: ¿Cómo organizaste la información?

Santiago: Hice una tabla entonces si un niño traía los globos pues eran 3, 2 eran 6, 3 eran 9, …, y 8 eran 24, y a ese resultado se le suman los 5 de la maestra.

El estudiante halla la relación entre niños y globos primero multiplicando el número de niños por 3, en la tabla construye la secuencia de 3 en 3, y establece que debe sumar los 5 globos de la maestra. Ahora queremos determinar si el estudiante logra instaurar que, para un caso particular consecutivo puede sumar 3 al caso anterior. Encontramos que, Santiago identifica nuevamente la forma en cómo se está construyendo la relación a medida que varía el número de niños.

I: ¿Cómo hiciste el caso de 11 y 12 niños?

Santiago: Si son 11 tocaría multiplicar se podría, 11 por 3 el resultado más 5 globos de la maestra. Si 11 niños traen sus globos serían 33 más los 5 de la maestra 38.

I: ¿Si sabes el resultado de 11, tú puedes encontrar el de 12 sin hacer la multiplicación?

Santiago: Al 38 se le suma 3.

I: ¿Por qué 3?

Santiago: Porque son los globos que trae el otro niño.

Posteriormente, pasamos a calcular el número de globos para cantidad de niños más grande. En este momento, vemos que el estudiante puede responder correctamente a casos particulares no consecutivos por medio del algoritmo que encuentra. Adicionalmente, establecemos la pregunta que esperamos lleve al estudiante a generalizar la relación funcional.

I: ¿Cómo hiciste el de 40 niños?

Santiago: Tocaría multiplicar 40 que es el número de niños por 3 que son los globos que traen, que daría 120 y 120 tocaría sumar los 5 de la maestra, y en total habría 125 globos en el salón.

I: Y en el siguiente, si sabes el número de niños ¿cómo encuentras el número total de globos que hay en el salón?

Santiago: Se podría multiplicar el número de niños por 3 el número de globos, luego sumar los globos que trae la maestra.

I: ¿Cómo te diste cuenta de que debías multiplicar por 3?

Santiago: Porque es el número de globos que trae cada niño.

I: ¿Siempre le sumabas cinco?

Santiago: Si porque son los globos que trae la maestra, si es que se multiplica solo el número de niños por 3. Si antes de hacer la multiplicación se le pone el número de globos de la maestra, no se le sumaría.

Vemos que Santiago identifica y establece que la multiplicación se hacer por 3 porque es la cantidad de globos que trae cada niño, además, enfatiza que ya sea al inicio o al final del proceso, se deben sumar los 5 globos de la maestra. Esto le permite predecir el comportamiento de la relación funcional en cualquier caso. Santiago describe de manera verbal la forma en que se construye la relación entre niños y globos.

7. Conclusiones

En este capítulo se presentan y discuten los principales resultados obtenidos en esta investigación. Iniciamos con un análisis general a partir del objetivo de la investigación teniendo en cuenta los aspectos fundamentales del marco conceptual y la pregunta que rige su desarrollo. Con base en esto, presentamos algunas reflexiones y recomendaciones de las implicaciones didácticas identificadas como producto de esta investigación y que son un gran aporte al desarrollo del pensamiento funcional en las aulas de clase de la educación básica primaria. Finalmente, expresamos algunas limitaciones que surgieron a lo largo de la investigación, además, planteamos futuras preguntas que pueden contribuir en el desarrollo de la temática planteada.

7.1 Resultados y discusión

Con el fin de dar cuenta sobre el objetivo de investigación, “Describir el pensamiento funcional de estudiantes de básica primaria a través del tipo generalización y los sistemas de representación, que emplean cuando abordan tareas que involucran dos cantidades que varían”, a continuación, se describe el pensamiento funcional evidenciado durante la investigación en estudiantes de los grados primero, tercero y quinto de básica primaria, de acuerdo a las categorías de análisis señaladas que giran en torno a: las acciones específicas del pensamiento funcional (Ver Tabla 1), el tipo de generalización que expresan (Radford, 2006) y el uso de los diferentes sistemas de representación.

7.1.1 En grado primero

En los estudiantes de primer grado se encuentran diversos métodos para abordar las tareas funcionales. Sus técnicas para contar son diversas puesto que utilizan material concreto, sus dedos, dibujan palitos o representan gráficamente los elementos propios de cada tarea (mesas, niños, globos, lápices).

En este nivel los estudiantes usan la representación pictórica que en algunos casos está acompañada de un número. Observamos que este tipo de representación funciona como un apoyo para que los estudiantes realicen el conteo de las personas (u objetos) y puedan establecer el número que corresponde en cada caso. Sin embargo, los estudiantes que se limitan al uso de este sistema dan evidencia de no identificar alguna forma de realizar los cálculos de manera más ágil y necesitan hacer el conteo de los objetos representados en los dibujos para dar respuesta a cada caso particular. También hacen uso de la representación simbólica de tipo numérico, esto es común cuando los estudiantes abordan casos particulares “grandes” (mayores o iguales a 5), dada la cantidad de dibujos que deberían hacer y a su vez, porque ya han identificado alguna forma de realizar los cálculos sin la necesidad de hacer el conteo de los dibujos. Por otro lado, observamos que los estudiantes que hacen únicamente uso de números son los que logran establecer un método aritmético para ejecutar los cálculos de cada caso particular. Al momento de realizar las entrevistas los estudiantes logran expresar de manera fluida sus argumentos y la forma en que fueron abordando cada tarea.

Se encuentra evidencia de un tipo de generalización factual que está basada en la manipulación numérica de los elementos u objetos que componen cada tarea funcional. Esto les permite a los estudiantes determinar la relación entre dos cantidades que varían e identificar cómo se construye la relación 1 a 2. Particularmente, en la tarea del restaurante escolar encontramos estudiantes que establecen la frase clave “sumo el mismo número” y no se limitan únicamente al conteo de los niños en las mesas. Los estudiantes lograron generalizar de manera contextual esta tarea funcional, aunque en las tareas (2 y 3) que involucran relaciones funcionales afines sólo atienden a casos particulares.

En la tarea del tren y la tarea de los globos los estudiantes no demuestran el sentido de la indeterminancia. En estas tareas los estudiantes se caracterizan por responder a casos particulares consecutivos realizando el conteo de 4 en 4 o, de 3 en 3 respectivamente. Los estudiantes identifican que a medida que se agrega un vagón se deben adicionar 4 personas, y cuando un niño más trae sus globos deben adicionarse 3. Es decir, utilizan el caso anterior para encontrar la respuesta para el siguiente. Además, el análisis de los datos permite evidenciar que los estudiantes que emplean el sistema de representación pictórico se centran en contar los elementos gráficos que conforman esta representación pictórica sin llegar a otra conclusión.

Observamos que el estancamiento en el cálculo de otros casos particulares se basa en que los estudiantes en este nivel no poseen un manejo ágil de la adición de números naturales y por tanto comenten errores al momento de contar. Además, el uso de dibujos en la representación pictórica es agotador a medida que se proponen casos particulares más grandes, de modo que, estos métodos se invalidan cuando avanzamos en casos particulares más grandes o cuando no son consecutivos y por tanto, el estudiante se ve obligado a generar otro tipo de representación con el que pueda analizar la relación entre las variables identificadas en la tareas. Al momento de saltar del caso particular de 5 a 8, los estudiantes realizan el cálculo para los casos de 6 y 7 con el conteo correspondiente. Sin embargo, como vimos en el capítulo anterior, Adrián logró establecer una forma más rápida de realizar los cálculos para casos particulares no consecutivos identificando que de 5 a 8 hay 3 unidades, por lo tanto, debo sumar 3 por 4 personas que lleva cada vagón (o 3 globos que trae cada niño). A pesar del razonamiento de Adrián no podemos establecer este método como una característica general del grupo ya que sus razonamientos fueron únicos en el grupo.

Vemos evidencias de pensamiento funcional específicamente en que los estudiantes recurren a diferentes representaciones, predicen el comportamiento de la relación funcional e identifican cómo se construye la relación a partir de conteos en casos particulares consecutivos. Aunque los estudiantes no encuentran la relación entre las cantidades que varían para casos particulares que no sean consecutivos. Observamos que, en estos casos los estudiantes están limitados a realizar acciones numéricas.

7.1.2 En grado tercero

Los estudiantes de grado tercero dan respuesta a casos particulares pequeños (menores a 10) de diversas formas: usando dibujos, usando la adición o usando la multiplicación. En el uso de los sistemas de representación encontramos el pictórico, el simbólico-numérico y la combinación de estos dos. La argumentación de los estudiantes se basa en construir representaciones pictóricas que corresponden al contexto de la tarea funcional y hacer el conteo en cada caso, los dibujos que realizan son más simples y prácticos, por ejemplo, no suelen ser detallistas en los dibujos de los niños trazando sus ojos y boca en sus caras como lo hacen los estudiantes de primer grado (Ver Figura 41); o en establecer una relación numérica con las cantidades que están variando. Se evidencia poca argumentación verbal que generalmente se reduce a la aplicación de procesos aritméticos.

Respecto al uso de tablas en la primera tarea encontramos que ningún estudiante utilizó la representación tabular para la organización de los datos. Por tal razón, en la siguiente tarea incluimos en la hoja de trabajo una tabla en blanco para que los estudiantes organizaran los datos de cada caso particular encontrado. Observamos que esta herramienta tuvo consecuencias favorables para los estudiantes pues permitió que identificaran la relación entre los vagones y personas; esta relación se describe como: “podría encontrarse sumando de 4 en 4” para casos particulares consecutivos, lo que evidencia una evolución en su pensamiento funcional. Sin embargo, en la siguiente tarea los estudiantes no utilizaron el sistema tabular para la organización de los cálculos de cada caso particular, esto les obstaculiza de nuevo determinar que para cada caso particular consecutivo basta con la adición de 3 globos más. Por lo tanto, concluimos que el uso del sistema de representación tabular no se evidencia en el grado tercero aunque es una herramienta valiosa en este tipo de tareas.

A partir del uso de sistemas de representación en las tres tareas funcionales, vemos que, los estudiantes utilizan la representación pictórica en la tarea del restaurante escolar pero, la abandonan en la tarea del tren y la tarea de los globos. Concluimos que esto se basa en la forma en que se va construyendo la relación, dado que, a medida que agregamos mesas es necesario para los estudiantes, visualizar que los lados paralelos de las mesas se juntan y ahí no se pueden sentar más niños y por tanto, la constante en la relación es 2. Por otro lado, en el caso de los vagones y los globos la relación de 1 a 4, y 1 a 3 se identifica más fácil y aquí la representación pictórica no cobra tanto valor.

Respecto al uso de la representación simbólico-numérica vemos que varía entre la adición y la multiplicación. En la tarea del restaurante escolar los estudiantes utilizan primordialmente la adición del número correspondiente con el mismo y no su producto con el número 2. Por el contrario, en la tarea del tren y los globos, los estudiantes ven la necesidad de abandonar la adición y utilizan la multiplicación. Si bien encuentran los primeros casos particulares sumando, a medida que avanzan notan que la cantidad de adiciones aumenta y en ese caso es más acertado utilizar la multiplicación. De este modo, vemos dos formas de razonar al momento de analizar y construir la manera en que se relacionan las cantidades que varían.

En este grupo en específico, identificamos un obstáculo al momento de argumentar los procesos en los cálculos de casos particulares. Algunos estudiantes realizan inicialmente la representación pictórica de la tarea, realizan el conteo y buscan una forma aritmética de responder al inciso; buscan dos números que multiplicados den el número que encontraron con el conteo previo pero no corresponden al contexto de la tarea (Ver Entrevista 3), lo cual permite evidenciar que el énfasis que se le da a la multiplicación en este grado lleva a los estudiantes a una mecanización del algoritmo sin darle sentido en el contexto de un problema.

De acuerdo con Espinoza, Avila y Mendoza (2010), en clase de matemáticas se necesitan espacios en donde se formulen situaciones problemas para que los estudiantes exploren, argumenten y construyan sus propias conjeturas, y así mismo, puedan cuestionarlas al momento de socializar, considerando que, conjeturar y argumentar son parte fundamental en las matemáticas. Sin embargo, con las implementaciones observamos que el proceso de conjeturar, comprobar y finalmente concluir no es familiar para los estudiantes. Para ellos no es necesaria la comprobación y por ende, se generaron dudas acerca de por qué se pide comprobar que la relación funcional construida en cada tarea funciona o no. Consideramos que esto se puede ver reflejado como un obstáculo en situaciones donde los estudiantes estudien la demostración.

En general, los estudiantes de tercer grado hallan relaciones e identifican cómo se construyen dichas relaciones entre las cantidades que varían en cada tarea. Recurren principalmente al sistema de representación numérico al establecer relaciones por medio de la adición y la multiplicación. Los estudiantes en este grado, no se caracterizan por describir de manera verbal los procesos que van realizando; pero al expresar la generalidad en cada tarea, logran describir la relación a través de frases clave lo que les permite predecir el comportamiento de la relación en casos posteriores. Encontramos estudiantes que realizan acciones propias del pensamiento funcional y muestran procesos correctos al momento de acudir a casos particulares cercanos y lejanos pero, sólo atienden a la manipulación de estos números y no evidencian el sentido de la indeterminancia. Por tanto no es natural para estos estudiantes expresar de alguna forma, cómo se comportan las variables que de definen en cada tarea.

Aunque los estudiantes en este nivel son muy concisos con sus respuestas, muestran en su gran mayoría un tipo de generalización contextual con frases clave que suelen ser breves pero logran abstraer todo el sentido de cada relación funcional definida en las tareas.

7.1.3 En grado quinto

En el grado quinto encontramos que los estudiantes hacen un uso bastante reducido de la representación pictórica y la utilizan únicamente para casos particulares pequeños o simplemente no la usan. Los dibujos que realizan están acompañados del número correspondiente o una frase explicativa de lo que se representa allí.

Este grupo de estudiantes tampoco hizo uso de la representación tabular para organizar la información de los casos particulares en la tarea del restaurante escolar, igualmente incluimos una tabla en blanco en la tarea del tren. Esto nos dio resultados favorables dado que en la última tarea algunos estudiantes escogieron la representación tabular como un organizador de información.

Los estudiantes en este nivel escolar se caracterizan por utilizar el sistema de representación simbólico-numérico acompañado del sistema de representación verbal. El algoritmo que identifican para dar respuesta a los casos particulares varía entre la adición y la multiplicación, pero esta última es la más utilizada. Incluso los estudiantes expresan que es más rápido hacer una multiplicación porque a medida que el caso particular es mayor deben realizar más sumas. Además, ven la necesidad de explicar verbalmente los procesos que van realizando en cada inciso, ya sea con frases cortas o inclusos párrafos escritos más completos.

Los estudiantes reconocen la implicación de calcular un caso particular consecutivo e identifican que deben sumar una cantidad específica a medida que avanzan en cada uno, esto les permite predecir el comportamiento de la relación funcional en el caso posterior. Igualmente, encontramos que los estudiantes no acostumbran a realizar conjeturas y luego corroborarlas. Algunos estudiantes mencionaban estar confundidos en qué debían hacer en estos incisos dado que para ellos significaban lo mismo y no consideraban necesario corroborar el método que encontraban para encontrar la respuesta a cada caso particular en cada tarea funcional.

Aunque la mayoría de los estudiantes concluyen una frase clave para generalizar cada relación funcional, también encontramos un grupo reducido de estudiantes que logran encontrar la respuesta a cualquier caso particular pero no consiguen establecer una manera general y se enfocan en la manipulación numérica de los elementos de la tarea funcional llegando a un tipo de generalización factual.

Resaltamos la posibilidad de encontrar generalizaciones de tipo simbólico como el caso de Amelia, estudiado en el capítulo anterior. Esta estudiante establece su propio símbolo para representar la cantidad que está variando la tarea funcional correspondiente. Si bien, Radford (2016) establece que en la generalización simbólica aparecen los símbolos alfanuméricos propios del álgebra, consideramos que el garabato hecho por Amelia (Ver Figura 67) hace referencia a una manera de representar lo que es un símbolo.

De este modo, los estudiantes de grado quinto encuentran la relación entre las cantidades que varían en cada tarea y logran identificar la manera en la que se construye la relación principalmente por medio de frases clave que les permite encontrar respuesta a cualquier caso particular. Vemos que analizan las implicaciones de que una de las cantidades que varían respecto a la otra y principalmente los estudiantes se caracterizan por describir la manera en que las relaciones funcionales se construyen y por tanto, predicen el comportamiento en casos particulares posteriores.

7.1.4 Discusión general

A partir de la descripción del pensamiento funcional de estudiantes de primer, tercer y quinto grado de básica primaria, presentamos una síntesis general del pensamiento funcional a lo largo de estos grados escolares; esto como evidencia de la potencialidad de desarrollar pensamiento funcional desde edades tempranas.

Respecto a las acciones específicas del pensamiento funcional los estudiantes de básica primaria tienen la capacidad de determinar relaciones entre dos cantidades que varían en una situación, identifican las cantidades que cambian y analizan cómo se relacionan a partir la exploración de casos particulares. Estas acciones se ven reflejadas con la recurrencia de diferentes sistemas de representación en el pensamiento funcional.

Analizar qué conlleva la variación de una cantidad respecto a la otra, por ejemplo, la implicación que tiene la cantidad de globos en el salón cuando varía el número de niños, no es una acción que corresponde al grado primero, dado que en este nivel los estudiantes se enfocan en realizar los conteos correspondientes. Los estudiantes en tercer grado empiezan a ser un poco más analíticos y se enmarcan de alguna forma en el modelo de razonamiento inductivo (Cañadas y Castro, 2007) con la búsqueda y predicción de patrones, sin embargo, suelen enfocarse más en establecer operaciones aritméticas que les permitan responder a los cuestionamientos de la tarea. Por otro lado, una característica principal de los estudiantes de quinto grado es la manera de analizar lo que encuentran con cada cálculo, y esto les permite expresar de manera más rápida y completa la manera en que se están construyendo las relaciones funcionales y las implicaciones que tiene variar alguna de las cantidades del problema.

Como vimos en los apartados anteriores, el uso de los sistemas de representación se va refinando grado tras grado. Entendemos que para los estudiantes de primer grado es natural el apoyo de la representación pictórica para contar, así como el uso de sus dedos o palitos, y en pocos casos los estudiantes tienen la agilidad de realizar conteos mentalmente. Vemos una evolución en el uso de la representación pictórica; los estudiantes de grado primero se toman el tiempo de realizar dibujos que sean visualmente bonitos para ellos y en algunos casos también los colorean, por ejemplo, al dibujar a los niños son detallistas y trazan sus ojos, nariz, boca, cabello y demás.

Sin embargo, la acción de dibujar se va abandonando a medida que los estudiantes avanzan en su educación primaria. Por su lado, los estudiantes de grado tercero tienen arraigado el uso de la representación simbólico-numérica en donde sus argumentaciones se basan en la realización de operaciones aritméticas como la adición y la multiplicación y suelen representar pictóricamente los elementos de la tarea de una forma más simple. El uso de la representación verbal (escrita) va aumentando y formalizándose a medida que los estudiantes crecen. En las producciones escritas de los estudiantes de grado quinto vemos una gran ventaja al momento de argumentar los procesos que realizan, es una característica principal de este grupo de estudiantes describir de manera verbal la manera en la que se están construyendo las relaciones funcionales, en donde también lo expresan por medio del respectivo algoritmo y abandonan el uso de la representación pictórica.

Concluimos que para los estudiantes de grado primero, considerar el proceso de generalización es un poco ambicioso pero resaltamos la importancia de introducir a los estudiantes en el desarrollo de este tipo de tareas para ir posibilitando grado tras grado la oportunidad de utilizar los números en situaciones cotidianas que les permita resolver problemas e iniciar a pensar en cantidades indeterminadas.

Finalmente, resaltamos que el grado en el que se encuentra un estudiante no implica directamente en el desarrollo de su pensamiento funcional. El hecho de ser de un grado superior no involucra que el estudiante realice más acciones propias del pensamiento funcional y consiga un tipo de generalización más avanzado. Los resultados de algunos estudiantes de tercer y quinto grado nos permiten observar un estancamiento en el desarrollo de este pensamiento, pues encontramos estudiantes del grado superior que aunque logran responder a cualquier caso particular no consiguen ver de manera general el patrón que ya construyeron.

Como aporte a esta línea de investigación dejamos evidencia de la capacidad que tienen los estudiantes desde edades tempranas para enfrentarse a este tipo de tareas y que iniciar el desarrollo de pensamiento algebraico desde la perspectiva del pensamiento funcional puede generar consecuencias positivas para los estudiantes a largo plazo.

7.2 Implicaciones didácticas

Aunque en Colombia el pensamiento funcional no está establecido de manera específica en los documentos curriculares, vemos que, este tipo de pensamiento se enmarca como una rama fundamental de lo que el MEN define como pensamiento variacional. . Los resultados de esta investigación permiten evidenciar que este tipo de pensamiento está presente desde que los estudiantes inician su recorrido en el mundo de las matemáticas, si bien se mostraron diferencias entre cada grado, cada uno muestra el potencial de trabajar este tipo de tareas en el aula de clase.

En consecuencia con el proceso de construcción de las tareas funcionales que inició desde la ruta de acceso y las acciones específicas del pensamiento funcional, consideramos de vital importancia trabajar con los estudiantes el proceso de generalización a partir de los caminos que establecimos. El uso de los números en contextos cercanos y cotidianos para ellos posibilitó que describieran y cuantificaran situaciones para resolver problemas y a su vez, se expresaran por medio de diferentes sistemas de representación. Los cálculos correspondientes a casos particulares permiten que los estudiantes identifiquen las cantidades que varían en un problema y la forma en que se está construyendo dicha relación a partir del análisis de información. Dejar de lado el enfoque aritmético e involucrar a los estudiantes en situaciones que les permitan cualificar las cantidades que varían en un problema y analizar las implicaciones que tiene esta variación, los encamina a buscar alguna forma de establecer la dependencia entre estas cantidades y a buscar diferentes formas para expresar lo que piensan. Permitir que los estudiantes expresen sus resultados dentro de diferentes sistemas evidencia la diversidad del aula de clase.

Por otro lado, resaltamos que la edad de los estudiantes no es un impedimento para implementar este tipo de tareas. En el grado primero, el uso de la tabla permitió el desarrollo de la tarea funcional sin la necesidad de que los estudiantes estuvieran respondiendo a una serie de preguntas en su hoja de trabajo. Esta recursividad al momento de presentar cada tarea posibilitó los hallazgos de esta investigación en este primer grado.

Además, estas actividades funcionan independientemente de la edad del estudiante y sirven como una herramienta para trabajar la resolución de problemas desde una perspectiva diferente a la que los estudiantes están acostumbrados y que podemos pensar que tienen un nivel de dificultad muy alto para su edad.

Los resultados de esta investigación aportan a la línea de investigación del álgebra temprana y nos alientan a desarrollar desde los primeros grados de la básica primaria este tipo de pensamiento que al pasar de los años generarán herramientas clave para que los estudiantes se desempeñen de manera positiva en el desarrollo de ideas propias del cálculo y el álgebra.

7.3 Limitaciones de la investigación

La principal limitación de esta investigación es el tiempo y la disponibilidad de espacios para realizar este tipo de tareas. Como hemos mencionado, no se establece en el currículo colombiano este tipo de pensamiento por lo que los docentes que hicieron parte de esta investigación no tienen establecido en su plan de área un espacio para trabajar actividades que potencien el pensamiento funcional de sus estudiantes. La implementación de las tareas funcionales contaba con un tiempo establecido y limitado teniendo en cuenta que se trataba de clases que estaban destinadas a trabajar otras temáticas y actividades.

Por otro lado, resaltamos el reto de trabajar con estudiantes de grado primero. Esto teniendo en cuenta la dificultad para mantener el orden en un aula de más de 30 estudiantes y lograr mantenerlos concentrados y atentos al desarrollo de cada tarea. Además, el nivel de lectoescritura no permite que los estudiantes sean ágiles para dar explicaciones de manera escrita por lo que en el análisis de las pruebas escritas limita la recolección de datos que permitan observar la forma en están pensando.

7.4 Para futuras investigaciones

Este trabajo abre muchas posibilidades al inicio de nuevas investigaciones. Por un lado, resaltamos que las producciones escritas de los estudiantes de grado primero son un factor que imposibilita una descripción más refinada del pensamiento funcional que este grupo de estudiantes desarrolla. Por tanto, podría llevarse a cabo un estudio con los estudiantes de este nivel escolar en donde las entrevistas semiestructuras sean el instrumento principal de recolección de datos y se generen espacios de pequeñas discusiones entre estudiantes en los que se evidencien acciones específicas del pensamiento funcional. De este modo, los estudiantes tengan un espacio determinado para expresarse de manera oral.

En este trabajo hemos abarcado los grados primero, tercero y quinto, en donde quedan pendientes algunos grados de básica primaria en los cuales podrían aplicarse las mismas tareas sobre funciones para estudiar su pensamiento funcional. Además, podría ampliarse la investigación a básica secundaria. Sería interesante considerar si los estudiantes en este nivel escolar se reducen a generalizaciones meramente simbólicas y dejan de lado las expresiones verbales o pictóricas. Así mismo, determinar si a medida que los estudiantes avanzan en su escolaridad realizan más acciones específicas del pensamiento funcional. Siguiendo esta línea de investigación podrían establecerse unidades didácticas compuestas de este tipo de tareas para fortalecer en los estudiantes los diferentes procesos matemáticos y dejar de lado el enfoque por contenidos.

Referencias bibliográficas

Bastías, K. (2016). Análisis de evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de 5° curso primaria. (Tesis de maestría). Universidad de Granada, España.

Bastías, K. y Moreno, A. (2016). Análisis de evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de 5º curso primaria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XX (p. 565). Málaga: SEIEM.

Bautista, J., Bustamante, M., y Amaya, T. (2021). Desarrollo de razonamiento algebraico elemental a través de patrones y secuencias numéricas y geométricas. *Educación matemática*, *33(1),* 125-152.

Blanton, M. L., & Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-Year-Olds thinking about generalizing funcional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46(5),* 511-558.

Blanton, M. L. & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psicology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M. L., & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36(5),* 412-446.

Blanton, M. L. & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En Cai, J., & Knuth, E. (Eds.) (2011), *Early algebraization: Advances in Mathematics Education* (pp. 43-70). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología, (14),* 37-57.

Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación matemática, 22(3),* 55-86.

Butto, C. y Delgado, J. (2012). Rutas hacia el algebra: actividades en Excel y Logo. México: UPN-Conacyt.

Cañadas, M. C. & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1(2),* 67-78.

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje, 34(4),* 409-425.

Cañadas, M. y Fuentes, S. (2015). *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio.* En Fernández, Ceneida; Molina, Marta; Planas, Núria (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 211-220). Alicante, España: Universidad de Alicante.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87-103.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Callejo, M.J., García-Reche, A., y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10,* 5 – 25.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669–705). Charlotte, NC: Information Age.

Castro, E., Rico, L. y Romero I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 15(3),* 361-371.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54,* 55-67.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Cham: Springer International Publishing.

Espinosa, A. J., Ávila, N. Y. S., y Mendoza, S. M. G. (2010). La comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber*, *1*(2), 173-202.

Fernández, H. S., & Baptista, R. (2014). *Metodología de la investigación. México. McGraw-Hill Interamericana*.

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria: un estudio exploratorio.* (Tesis de Maestría), Universidad de Granada, Granada, España.

Goldin G. A., & Kaput, J. J. (1996). A JOINT PERSPECTIVE ON THE IDEA OF REPRESENTATION IN LEARNING AND DOING MATHEMATICS. En Steffe, L. P., Nesher, P., Cobb, P., Goldin, G. A., & Greer, B. (1996), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). Metodología de la investigación McGraw-Hill.

Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta***.** Editorial Mc Graw Hill Education.

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133- 155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kieran. C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8(1),* 139-151.

Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 7(3),* 229-240.

Lopéz J. y Sosa L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame, México. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 21, 308-318.

Merino, E. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de Educación Primaria en una tarea de generalización.* (Trabajo fin de Máster inédito). Universidad de Granada, Granada, España.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2(1),* 24-40.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares del área de Matemáticas*. Bogotá: MEN. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-89869.html

Ministerio de Educación Nacional (2003). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: MEN. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-116042.html

Ministerio de Educación Nacional (2012). *Proyecto Sé Matemáticas. http://ptameta2015.blogspot.com/p/cartillas.html*

NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Reston, VA: NCTM.

Pincheira H., N. y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación matemática , 33 (1),* 153-180.

Pineda, M. (2017). *Desarrollo de Pensamiento Funcional: Una Experiencia en un Programa de Enriquecimiento Extracurricular*. (Tesis de maestría), Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Pineda, S. (2018). *Formación inicial de docentees de matemáticas alrededor de la atención a la diversidad.* (Tesis de maestría), Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Pinto, E. (2016). *Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero de primaria.* (Tesis de maestría), Universidad de Granada, Granada, España.

Pinto, E. (2019). *Generalización de estudiantes de 3º a 6° de Educación Primaria en un contexto funcional del álgebra escolar* . (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada, España.

Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to Early algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-20.

Polya, G. (1989). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Trillas.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. *PME-NA, (1)*, 2-21.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12(1),* 1-19.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. En Cai, J., & Knuth, E. (Eds.) (2011), *Early algebraization: Advances in Mathematics Education* (pp. 303-322). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Radford, L. (2012). On the Development of Early Algebraic Thinking. *PNA*, *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *6(4)*, 117-133.

Radford, L. (2013). Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. In A. Ramirez y Y. Morales (Eds). *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe.* Santo Domingo, República Dominicana, November 6-8, 2013. Plenary Lecture.

Radford, L. (2015). Methodological Aspects of the Theory of Objectification, *8(18),* 547-567.

Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA, 12(2),* 61-80.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1(2),* 47-66.

Rico, L.(2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4(1),* 1-14.

Rodríguez, G. Gil-Florez, J. García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Aljibe, España.

Rojas, P. y Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. *Revista Científica, Edición especial*, 688-694.

Russell S. J., Schifter D., & Bastable V. (2011). Developing Algebraic Thinking in the Context of Arithmetic. En Cai, J., & Knuth, E. (Eds.) (2011), *Early algebraization: Advances in Mathematics Education* (pp. 43-70). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Scheuer, N., Sinclair, A., de Rivas, S. M. y Christinat, C. T. (2000). Cuando ciento setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales. *Infancia y Aprendizaje, 23(90),* 31-50.

Schliemann, A. Carraher, D. y Brizuela, B. (2012). Algebra in elementary school. Enseignement de l'algébre élémentaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques, volume especial,* 107-122.

Stake, R. E. (2010). Investigación con estudio de casos. (5a Ed.). Barcelona: Labor.

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 30(3),* 206-223.

Torres, M. (2022). Generalización, estructuras y representaciones de estudiantes de segundo de educación primaria desde un enfoque funcional del early algebra. (Tesis doctoral), Universidad de Granada, Granada, España.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Pensamiento funcional de estudiantes de 2º de primaria: estructuras y representaciones. *PNA*, *16(3),* 215-236.

Uicab, R., Rojano, T., y García, M. (2022). Expresiones de generalización en escolares de 10 a 12 años durante la resolución de secuencias figurales-numéricas y numéricas. *Educación matemática*, *34(1),* 42-69.

Ureña (2021). *Representaciones de generalización y estrategias empleadas en la resolución de tareas que involucran relaciones funcionales. Una investigación con estudiantes de primaria y secundaria.* (Tesis doctoral), Universidad de Granada, Granada, España.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)* (Tesis doctoral). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, *9(3),* 193-215.

Villa, J. (2006). El proceso de generalización matemática: Algunas reflexiones en torno a su validación. *TecnoLógicas, (16),* 139-151.