EL INFINITO: CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES QUE TRANSITAN DEL COLEGIO A LA UNIVERSIDAD

MAYRELY VERA PÉREZ
LUZ DARY PINILLA CANO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2011

EL INFINITO: CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES QUE TRANSITAN DEL COLEGIO A LA UNIVERSIDAD

MAYRELY VERA PÉREZ

LUZ DARY PINILLA CANO

Trabajo de grado presentado para optar
al título de Licenciadas en Matemáticas

Directora

SOLANGE ROA FUENTES

M. en C.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2011

A mi madre, por ser el motor de mi vida
Y conducir mi camino.

Mayrely

A mi hermana Ángela, por ser mi apoyo constante y por su incondicionalidad en todos los momentos de mi vida.

Luz Dary

AGRADECIMIENTOS

A Dios por todas las bendiciones recibidas de su parte, especialmente por darme el regalo más grande del mundo: Mi madre.

A ella por su incondicionalidad y por sus esfuerzos para hacer de mi una mejor persona cada día.

A mis abuelos María y Antonio por acompañarme en el camino de la vida.

A mis tías Ersilia, Irma y Flor, a sus hijos y esposos, por brindarme su apoyo incondicional.

A Jenny y Andrés, por hacer de los momentos difíciles más llevaderos.

A Luz Dary por ser mi amiga en esta etapa de mi vida.

A los profesores de la universidad Industrial de Santander por su disposición y ayuda, especialmente a la Profesora Dora Solange Roa, quien contribuyó en mi crecimiento profesional.

Mayrely

A Dios por darme la fortaleza y la oportunidad para cumplir este sueño.

A mis padres Irlena y Rafael por brindarme su apoyo constante en cada instante de mi vida.

A mis hermanas, especialmente Ángela por ser la persona que me acompañó en esta etapa y contribuyó para alcanzar esta meta.

A los profesores de la Universidad Industrial de Santander por brindarme las herramientas necesarias para ser una profesional integra, en especial a la profesora Solange Roa por dirigir este trabajo con su mejor disposición.

Luz Dary

Tabla de Contenido

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

TITULO:

EL INFINITO: CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES QUE TRANSITAN DEL COLEGIO A LA UNIVERSIDAD *

AUTORAS: VERA PÉREZ, Mayrely y PINILLA CANO, Luz Dary. **

PALABRAS CLAVES:

1. Infinito 2. Idea intuitiva 3. Modelos Tácitos

Aunque el infinito no es un concepto que aparece como un contenido específico del currículo de matemáticas, sobre él se desarrollan diferentes concepciones en escenarios no escolares que de una u otra manera afectan la construcción de conceptos matemáticos relacionados con el infinito matemático.

Para desarrollar el trabajo principalmente nos enfocamos en resolver el interrogante: **¿Cuáles son las concepciones que sobre el infinito tienen los estudiantes al ingresar a la universidad y cómo estás evolucionan al desarrollar un curso de cálculo I y cálculo II?** de este surgen otros cuestionamientos, que al ser abordados facilitan la construcción de las ideas principales: ¿qué ideas intuitivas desarrollan estos estudiantes sobre el infinito en escenarios no escolares?, ¿Cómo estas ideas permean su construcción del concepto en situaciones matemáticas? Y ¿Cómo el análisis de conceptos como límite genera la evolución de las concepciones de los estudiantes sobre el infinito? Para hallar los resultados diseñamos y aplicamos una prueba diagnóstica y una serie de entrevistas enfocadas en la solución de la pregunta principal.

En los resultados se encontró que la construcción del infinito, desde una perspectiva intuitiva difiere mucho de la construcción matemática, dado que en la primera prevalecen concepciones como el ser algo incontable, sin fin o simplemente algo muy grande. Mientras que en la segunda entran en juego otros conceptos matemáticos como cardinalidad, cantidad, equivalencia, entre otras que sugieren al estudiante abrir su mente y crear ideas que vistas en la realidad no son aceptables, pero matemáticamente tienen mucha validez.

* Proyecto de Grado.

** Facultad de Ciencias- Escuela de Matemáticas - Licenciatura en Matemáticas.
Directora: ROA FUENTES, Dora Solange.

SUMMARY

TITLE:

THE INFINITE: CONCEPTIONS OF STUDENTS TRAFFIC SCHOOL TO COLLEGE*†

AUTHORS: VERA PÉREZ, Mayrely y PINILLA CANO, Luz Dary. **

KEY WORDS:

1. Infinity 2. Intuitive Idea 3. Tacit models

Although the infinite isn't a concept that appears as a specific content to the mathematics curriculum about that develops different conceptions on scenes non-schoolers that to many ways, they affect the construction to mathematics concepts relationed with the mathematician infinite.

In developing the paper mainly we focus on solving the question: **What are the conceptions about have infinite students entering to college and how do you evolve to develop a calculus class I and calculus class II?** This raises other questions, which when approached facilitate the construction of ideas main:
What intuitive ideas develop these students about infinite non-school settings? How do these ideas permeate his construction the concepts in math? and How does the analysis of concepts such as limit generates the evolution of conceptions of students about the infinite? To find the design and results apply a diagnostic test and series of interviews focused on resolving the main question.

In the results found that the construction to the infinite, to a intuitive perspective is very different to the mathematic construction, because in the first perspective prevailing conceptions as the being something uncountable, without end or simplely something very big. While in the latter come into play other mathematical concepts such as cardinality, number, equivalence, among others, that suggest the student open their minds and create ideas that views of reality are not acceptable, but mathematically have much validity.

*Graduation Project

** Faculty of Sciences – Mathematics School- Mathematics Licensure.

Director: ROA FUENTES, Dora Solange.

INTRODUCCIÓN

La matemática que a diario se presenta en las aulas de clase tiene dentro de su construcción ideas asociadas a términos, conceptos, procesos y operaciones que generalmente los docentes esperan que los alumnos comprendan y manejen con cierta propiedad. Pero, ¿qué sucede cuando el concepto matemático que se quiere desarrollar ha sido construido de alguna manera por los estudiantes en su cotidianidad? Es decir, ¿de qué manera las ideas que se construyen en escenarios no escolares como la casa, la calle, el barrio pueden determinar la construcción matemática de un concepto?

Estas preguntas enfocan el objetivo de nuestro trabajo, puesto buscamos mostrar que evidentemente el infinito clasifica dentro de ese tipo de conceptos, cuya construcción no sólo depende de memorizar ciertas propiedades, sino que tiene en cuenta puntos de vista personales y concepciones que pueden diferir respecto a cada individuo. Además es uno de los conceptos más complejos para enseñar y aprender, ya que alrededor de él se forman un sin número de confusiones que son el resultado de unir las ideas intuitivas que los individuos manejan en cuanto a éste, con ideas matemáticas más formales y estructuradas que requieren un razonamiento más complejo y abstracto para ser entendidas.

Al hablar en un curso de geometría de la base de un triángulo, la mayoría de los estudiantes pueden representar en su mente un triángulo y determinar una de sus bases. Sin embargo, al hablar de “infinito” en la clase de matemáticas parece que los individuos anteponemos las experiencias previas sobre este concepto que son de naturaleza puramente potencial.

Por lo mencionado, consideramos que identificar esta serie de hechos en la clase de matemática de alumnos de undécimo grado y el curso de cálculo II en la universidad, resulta interesante ya que buscamos detectar el avance o estancamiento de las concepciones que sobre este concepto se presenta en esta etapa de transición del colegio a la universidad, en donde en el primero los individuos aún poseen un pensamiento matemático elemental (PME) y en el segundo se espera se inicie el desarrollo de un pensamiento matemático avanzado (PMA) (Garbín, 2005).

Por lo tanto se tiene en cuenta como referente que la construcción del infinito desde una perspectiva intuitiva difiere mucho de la construcción matemática, dado que en la primera prevalecen concepciones como el ser algo incontable, sin fin o simplemente algo muy grande; mientras que en la segunda entran en juego otros conceptos matemáticos como cardinalidad, cantidad, equivalencia, que sugieren al estudiante abrir su mente y crear ideas que vistas en la realidad no son aceptables, pero matemáticamente tienen mucha validez.

Para ilustrar con un ejemplo lo anteriormente descrito, cuando consideran que tienen la misma cantidad de elementos, bajo el argumento que los dos conjuntos son incontables o su cantidad de elementos es infinita. Contrario a lo que sucede cuando se hace un análisis matemático a la situación, en este caso la respuesta se puede sustentar planteando una relación de equivalencia entre los elementos de los conjuntos.

Tomando todas las ideas expuestas anteriormente surge la pregunta base de nuestro trabajo: **¿Cuáles son las concepciones que sobre el infinito tienen los estudiantes al ingresar a la universidad y cómo estás evolucionan al desarrollar un curso de cálculo I y cálculo II?** Sobre la cual se pretende enfatizar la teoría y aportes que existen alrededor del tema, como lo son la teoría de los modelos tácitos de Fischbein (2001), aportes de autores como Garbín (2005), Núñez (1997), Montoro y Scheuer (2006), Lestón (2007), entre otros de los que se hará mención más profundamente en los antecedentes presentados a continuación.

Por último, el objetivo de este trabajo es determinar cuáles son las concepciones que sobre el infinito han desarrollo estudiantes que se encuentran cursando el último año del bachillerato y determinar la manera como éstas evolucionan después de tratar la temática básica de un curso de cálculo I.

1. ANTECEDENTES

Para presentar nuestro trabajo empezaremos analizando algunos de los trabajos que se han desarrollado anteriormente acerca de las concepciones y la trascendencia que los estudiantes le otorgan al concepto de infinito a lo largo de su vida escolar. Estos proporcionan las ideas fundamentales sobre las cuales buscamos estructurar nuestro proyecto, que será desarrollado con estudiantes de último año de secundaria y estudiantes que han llevado un curso de cálculo I y están finalizando su curso de cálculo II.

El medio en el que una persona se desenvuelve influye en la concepción que esta le pueda otorgar al infinito, generalmente la descripción que la mayoría de los individuos hacen sobre este concepto se relaciona con algo que no tiene fin, lo que es incontable, o demasiado grande. Esto nos lleva a preguntarnos si tener una formación académica más avanzada, transforma las concepciones que traemos de contextos no escolares a concepciones que se construyen de una manera más estructurada y especializada. Cambiando las ya existentes por otras nuevas o generando la evolución de las estructuras básicas de tal manera que no sean un obstáculo para la construcción del concepto en un nivel más complejo.

Algunos de los estudios más importantes sobre la manera como las ideas intuitivas permean la construcción de los conceptos matemáticos están relacionados con el desarrollo de ideas tácitas formuladas por Fischbein (2001). Principalmente su teoría sobre los modelos mentales Fischbein (1978), nos permite tener una explicación de los conflictos que se provocan cuando existe una idea que emerge inicialmente en el entorno sociocultural del individuo, fuera de la clase de matemática, y que está asociada a un concepto matemático que necesariamente modifica su naturaleza inicial.

El trabajo realizado por Lestón (2007), es un buen punto de partida sobre esta discusión ya que su principal objetivo fue detectar la forma en que las ideas intuitivas respecto al infinito surgen y cómo se comportan como parte del modelo mental que el estudiante forma para el infinito, afectando la construcción del infinito matemático. Su investigación se centra en la aproximación socio-epistemológica, es decir, en la construcción social del conocimiento. Para alcanzar el objetivo propuesto Lestón trabajó tres etapas, la primera fue el estudio de investigaciones previas, la segunda el devenir histórico del concepto de infinito y la tercera y quizás más importante la experimentación con estudiantes de la escuela media.

Para guiar su trabajo de investigación Lestón (2007), se planteo las siguientes preguntas:

¿Cuál es la primera impresión que un niño tiene en referencia al infinito?
¿El infinito se comprende en una primera estancia de su construcción como un resultado (o cantidad o número), un lugar o una cualidad?
¿Qué tipo de objetos (reales o no) tienen la cualidad de ser infinitos para los niños?
¿Cuál es la actividad o actividades que generan la necesidad del infinito para un niño?
¿Cómo aparecen esas ideas intuitivas en la escuela?
¿Qué conceptos matemáticos las revelan?
¿Cómo se presenta el infinito en la escuela media?
¿Cuáles son los posibles conflictos que pueden surgir si se ignoran las ideas intuitivas de los alumnos en referencia a este concepto?

Para dar respuesta a estas cuestiones se consideraron dos grupos de respuestas, el primero proviene de un ambiente fuera de la escuela, en la cotidianidad de los estudiantes y el otro parte de las respuestas que se forman en el aula y son guiadas por el currículo, el docente y los textos.

Del análisis de los resultados Lestón (2007) concluye que “hay un divorcio evidente entre lo que se cree (desde la intuición) y lo que se sabe (desde la matemática) y es ese divorcio el que dificulta la construcción matemática del infinito” (Lestón, 2007, p.114).

Por otro lado, los estudiantes en los resultados, mostraron que para ellos es más sencillo comprender el infinito a partir de sus ideas intuitivas que considerar métodos matemáticos que complican la situación; ya que al parecer el infinito surge desde la contemplación de lo que rodea al ser humano. De donde Lestón deduce que la cuestión está en indagar “¿Por qué alguien cambiaría un modelo que no tiene problemas (el modelo intuitivo) por un modelo que se muestra contradictorio, conflictivo y que “no convence” (el modelo matemático)?” (Lestón, 2007, p.115).

Si se aborda este hecho se podría llegar a una compatibilidad entre lo que el alumno sabe desde su realidad y lo que necesita saber desde la matemática, generando la construcción del concepto de infinito de una manera más útil y significativa.

De las respuestas generadas a los cuestionarios planteados a los alumnos Lestón (2007), concluye que las ideas que sobre el infinito han desarrollado estos estudiantes se relacionan con: “aquello de lo cual no se puede asegurar donde termina ni donde comienza”, “lo que no se puede medir ni contar”; aún cuando se sepa que el final existe. Estos resultados según la autora muestran que cuando los estudiantes aceptan conceptos nuevos sus presaberes prevalecen y crean conflictos a la hora de construir de manera apropiada un nuevo concepto.

Finalmente, las conclusiones generales del trabajo resaltan que conocer algo desde nuestras experiencias de vida no significa que tengamos un conocimiento científico, lo que realmente vale, es tomar las ideas intuitivas e integrarlas con conceptos más estructurados para así llegar a construir un nuevo concepto que responda a lo que científicamente ha sido establecido.

Sin embargo, pensar que las ideas intuitivas que formamos en el entorno social y cultural en el que nos desenvolvemos sean del todo nocivas puede ser muy radical, es decir, no hay que anularlas del todo. Consideramos que a lo mejor como lo plantea Lestón (2007), hay que identificar qué ideas intuitivas asociadas al infinito vistas en escenarios no escolares, pueden influir en la posterior construcción del infinito matemático en la escuela, para con base en ellas, determinar caminos didácticos en la comprensión exitosa de conceptos que involucren el infinito como una totalidad.

Por otra parte, podríamos esperar que el trabajo matemático sobre conceptos que se relacionan con el infinito genere la evolución de las concepciones que sobre este concepto puede tener un individuo. En este sentido Montoro y Scheuer (2004), realizan un trabajo con estudiantes de primeros semestres y de semestres avanzados de diferentes programas profesionales, donde la formación matemática cambia dependiendo del programa.
Este trabajo a grandes rasgos propone que la comprensión del infinito tiene un progreso desde la no aceptación de las colecciones infinitas a la identificación del infinito; posteriormente a la aceptación de las colecciones infinitas y finalmente a la distinción entre infinito y todo.

Por ejemplo, se pueden considerar ideas como que el conjunto de los naturales cuadrados es un subconjunto, una parte del conjunto de los números naturales, lo que significaría que un conjunto y un subconjunto propio pueden ser equivalentes, es decir, el todo y una de sus partes pueden ser equivalentes; esto como lo menciona Fischbein (1998) es una idea contra intuitiva que no responde a la naturaleza de nuestros esquemas mentales, ya que estos son netamente finitos.

Las concepciones que los estudiantes construyen respecto al infinito son objetos de conocimiento que se pueden tomar como punto de partida en la enseñanza, ya que se sostiene, que el aprendizaje significativo requiere partir de ellas e interactuar con estas a fin de enriquecerlas o modificarlas. Criterio que sustenta nuestra idea de no anular los pre saberes que se forman en ambientes no escolares, sino más bien determinar su reconstrucción.

Montoro y Scheuer (2004), se centran en las colecciones finitas en un contexto de conteo, considerando que para concebir una colección de infinitos elementos presentes simultáneamente, se requiere poner en juego procesos mentales de un alto nivel de abstracción. Además la noción de infinito es en la actualidad una estructura formal, resultado de un proceso de evolución histórica. Montoro y Scheuer (2004) destacan:

> En las últimas décadas, las investigaciones en educación matemática evidencian que en los últimos años de educación secundaria e incluso en la universidad los estudiantes presentan dificultades de conceptualización al enfrentarse con situaciones que implican el infinito. (Artigue, 1995; Fischbein et al. 1979; Monaghan, 2001; Moreno-Armella y Waldegg, 1991; Sierpinska, 1985; Waldegg, 1993; Montoro y de Torres Curth, 1999, entre otros. Tomado de Montoro y Schuer, 2004, p.4)

Como objetivos fundamentales de esta investigación se tienen: estudiar las ideas de alumnos universitarios sobre nociones sencillas del infinito actual e identificar las relaciones presentes entre estas ideas, analizando la influencia de las carreras que cursan los estudiantes, su nivel y edad.

La metodología empleada tuvo como base la elaboración de una serie de preguntas focalizadas de opción múltiple, para ser contestadas de forma individual y por escrito.

Como nota importante, este trabajo recopila de forma breve una serie de respuestas generadas por estudiantes universitarios clasificados según algunos criterios; respuestas que permiten llegar a la siguiente conclusión: “El infinito matemático está muy lejos de constituir un objeto de conocimiento que las personas generan fácilmente a partir de su interacción con el ambiente físico-cultural” (Montoro y Scheuer, 2004, p.12).

En cuanto a esto se puede deducir que el modo en que los estudiantes universitarios resuelvan un conjunto de tareas que involucran el infinito, indica que el infinito se debe convertir en una entidad acerca de la cual es posible pensar y operar. Siendo necesaria la intervención de complejos procesos de representación, los cuales a su vez requieren la participación en contextos educativos que propicien un alto grado de reflexión matemática.

Pensar en realizar un trabajo con jóvenes de undécimo grado de secundaria inmediatamente nos lleva a preguntarnos en qué etapa de pensamiento se encuentra ubicada la población, teniendo como primer referente para resolver este cuestionamiento que la edad promedio de dichos jóvenes oscila entre los 16 y 18 años; a cerca de estos planteamientos existe literatura que trata de explicar y contextualizar el tema. Por ejemplo, Garbín (2005) hace un análisis sobre cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años respecto al infinito, edad que coincide perfectamente con la de los alumnos con quienes pensamos trabajar. Además discute la influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos que son creados por los individuos a lo largo de su vida.

Si se hace una comparación entre los estudios realizados a cerca de las concepciones del infinito en el pensamiento de los estudiantes, aunque los trabajos expuestos tomen diferentes enfoques, la idea de los modelos mentales planteada por Fischbein (1989) sirve para dar muchas respuestas, enfocando los objetivos del presente trabajo. Ya que como él plantea la significación de un concepto por parte de un individuo se da a través de un proceso de integración, donde un modelo mental sustituye al modelo científico que por su abstracción le resulta inaccesible.

Consideramos que la construcción del infinito actual no consiste en reemplazar un modelo por otro, sino con base en modelos existentes determinar mecanismos de abstracción que permitan la construcción del nuevo concepto. Por tanto, en este trabajo nos interesa determinar los modelos que los estudiantes van generando durante su vida escolar y que en definitiva son la base de construcción, para determinar en un futuro qué mecanismos deben generarse en los individuos para promover de manera exitosa la construcción del infinito actual.

Según Garbín (2005), los jóvenes entre los 16 y los 20 años se encuentran en una etapa de transición del pensamiento matemático elemental (PME) al pensamiento matemático avanzado (PMA), entendiendo como etapa elemental aquella que tiene lugar hasta secundaria y avanzada aquella que está relacionada con la enseñanza de la matemática en la universidad. Entre estas dos etapas esta la llamada etapa de transición (paso de la elemental a la avanzada) y puede darse de manera diferente, en tiempos diferentes y tener distintas duraciones, pues sobre ella influyen factores externos como el país, y el área matemática que se esté enseñando, al igual que las expectativas que los jóvenes tengan cuando se gradúen de la educación media.

En sí, considerar la etapa de enseñanza y aprendizaje propone que personas como nosotras que quieran continuar con trabajos de este tipo identifiquen la etapa cognitiva en que se encuentra la población. Para de esta manera llegar a resultados y conclusiones más acordes, que permitan generar alternativas aplicables a la clase de matemáticas y que interfieran para la aceptación del concepto de infinito.

> A modo de ejemplo, si estamos trabajando en una etapa en donde prevalecen los esquemas finitos y concretos no tenemos que perder de vista que el estudiante deberá “abandonar” en algún momento sus esquemas finitos para entrar en el mundo de la infinitud, que cognitivamente hablando está lleno de contradicciones: los nuevos conceptos e ideas matemáticas entran en contradicción con los esquemas finitos previos (Garbín, 2005, p.172).

Siendo consecuentes tiene más coherencia pensar que si bien, en una etapa avanzada el alumno logra convivir con el concepto de infinito, siempre va a recurrir a modelos mentales finitos que tiene inmersos en su mente y para él facilitan el entendimiento del concepto aún cuando cometa errores.

> Tall y Vinner (1981) describieron el esquema conceptual que tiene un alumno de un concepto matemático como toda la estructura cognitiva asociada al concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a la noción matemática. También explican que el esquema conceptual no necesariamente es coherente en todo momento y que los alumnos pueden evocar imágenes contradictorias en momentos diferentes (Tall y Vinner, 1981. Tomado de Garbín, 2005, p.173.)

A pesar de esto el estudiante puede percibir un infinito actual o potencial, y en el momento que se le proponga una situación sus respuestas van a ser finitistas, es decir, no se tiene conciencia de los errores de los que se ha venido hablando, ni de las incoherencias que puedan surgir.

Finalmente Garbín (2005), en su trabajo insiste en la importancia de no fortalecer aquellas ideas cerradas que no permiten trascender de un pensamiento finito a uno infinito, sino fortalecer aquellas percepciones que los alumnos tienen, de tal manera que logren abrir su mente y ver más allá de lo que su entorno les ofrece.

Las contradicciones y percepciones que surgen cuando se habla de infinito, y de las que se ha hecho mención a lo largo de los antecedentes, considerando especialmente el infinito actual; se fundamentan, por ejemplo, en trabajos realizados donde las respuestas de los estudiantes en diferentes situaciones relacionadas todas con la paradoja de Zenón son contradictorias y de alguna manera están determinadas por el contexto donde el concepto emerge.

Un caso específico de esta situación es presentado por Núñez (1997), quien investigó algunas paradojas, considerando que la idea de iteración es un interesante punto de partida para estudiar los procesos cognitivos subyacentes a la noción de infinito. En este estudio se pretendió, aportar al entendimiento de los procesos cognitivos involucrados en el desarrollo de la idea de infinito en lo pequeño (Núñez, 1997, pp. 21).
Dichos procesos se reflejan cuando se consideran las contradicciones que pueden surgir en los estudiantes frente situaciones como la paradoja de Zenón. En donde se pretende cubrir una distancia finita con un número infinito de pasos; hecho que para muchos estudiantes, aún con conocimientos avanzados de matemática, no son del todo convincentes.

Por otra parte, en el transcurso de nuestro trabajo, la mayoría de los fundamentos teóricos, coinciden con la idea que el infinito actual, visto como un proceso completo, causa más contradicciones frente al tema. Al parecer el infinito potencial, visto como un proceso en constante construcción no presenta mayores problemas para ser entendido. Sin embargo, es importante tener en cuenta que en situaciones como la paradoja de Zenón, la regla del problema, sugiere que los dos sentidos del infinito (actual-potencial) que se han considerado hasta el momento, sean empleados simultáneamente en un mismo proceso.

Frente al hecho anterior, Núñez (1997), describe dicho proceso, como una situación en donde dos atributos deben ser iterados simultáneamente, es decir, el número de pasos que se realizan para llegar de un punto al otro y la distancia que cada uno de estos pasos cubre. “Es posible observar que el tipo de iteración es diferente para cada atributo, porque el número de pasos aumenta mientras que la distancia cubierta por estos pasos disminuye” (Núñez, 1997, pp.22).

En esta serie de ideas, se podría denominar a los dos tipos de iteraciones, divergente y convergente, considerando que la naturaleza del contenido iterado hace referencia por un lado a la cardinalidad (número de pasos) y por otro al espacio (distancia cubierta).

Aspectos como los mencionados anteriormente son los que hacen más compleja la comprensión de situaciones que presentan procesos de subdivisión, teniendo en cuenta especialmente la construcción del infinito en lo pequeño. Por ejemplo a continuación se presenta una respuesta encontrada en Núñez (1997), en donde se reflejan los conflictos cognitivos que aparecen en los razonamientos de los estudiantes, cuando se trata de hallar alguna relación entre el infinito en lo grande y en lo pequeño:

> ***Profesor:*** *Si ese es el infinito más grande como dices, cuando mencionas el infinito más pequeño, ¿Es eso lo mismo pero en sentido contrario?*
> ***Estudiante:*** *Sí, pero hay una sola diferencia. Que en un momento dado eso se vuelve tanto más pequeño que ni siquiera se puede saber dónde está.*
> ***Profesor:*** *Entonces ¿Cuál es la diferencia entre el infinito más grande y el infinito más pequeño?*
> ***Estudiante:*** *Que en un momento dado cuando estamos en el infinitamente pequeño eso (el proceso) se detiene, mientras que en el infinitamente grande puede continuar hasta… el infinito”*

Finalmente del trabajo de Núñez (1997) y teniendo como base los resultados mostrados en él, se puede sugerir que las consecuencias que trae consigo un proceso de subdivisión, aparecen de forma intuitiva en edades entre los 10 y los 12 años y permanecen más tarde susceptibles de ser influenciadas por factores contextuales. De la misma manera, los resultados prueban la suposición a cerca que el infinito en lo pequeño, es evidentemente mucho más controvertido que el infinito en lo grande.

Para concluir nuestros antecedentes tendremos en cuenta el común denominador de los trabajos ya expuestos: siendo este la conexión que debe existir entre las ideas intuitivas y las ideas matemáticas que se forman en la escuela. Puesto que al lograr dicha conexión a lo mejor se termine con los obstáculos que impiden la aceptación del infinito. También pensamos que la formación docente es vital en este proceso de aceptación del infinito, ya que si el docente conoce y maneja el tema va a ser más fácil crear alternativas que le permitan enseñar el concepto y obtener resultados significativos.

De igual manera proponemos que los obstáculos de los cuales ya se ha hecho mención sean incorporados como temáticas en la práctica profesional del profesor de matemáticas, para propiciar aprendizajes con sentido en sus alumnos. Por tal razón, insistimos que el camino para que los docentes logren cumplir todas las expectativas que se generan alrededor del aprendizaje del infinito, es abordar el tema tanto desde el contenido matemático, que de hecho no es fácil, como desde las posibles explicaciones, significaciones y comprensiones que los alumnos puedan tener en un momento determinado.

Reflexionando de esta manera, las conclusiones que se puedan obtener de la vivencia en el aula de clase con los alumnos pueden ser utilizadas por el profesor para construir situaciones que cuestionen los conocimientos adquiridos alrededor del tema y les posibilite a los estudiantes la ruptura con lo viejo y la apropiación de lo nuevo como un hecho consiente.

Para fundamentar estas conjeturas se hará mención de los fundamentos teóricos que han sido útiles para abordar el tema.

2. MARCO TEÓRICO

El infinito ha sido un concepto que ha causado gran controversia desde mucho tiempo atrás y en la actualidad lo sigue haciendo. Pues aunque han pasado siglos desde su primera aparición, existen ideas alrededor de él que aún no son del todo claras para la humanidad. La literatura muestra que grandes matemáticos de la antigüedad no pudieron evadir las contradicciones y conflictos que se generan alrededor del tema. Especialmente después de que Cantor diera a conocer su teoría formal del infinito como un todo, como un objeto matemático; generando controversia entre los pensadores de la época e iniciando uno de los desarrollos más grandes de la matemática como lo es la teoría de conjuntos. (Breuer, 1970, p.134-135)

Adicional a esto se encuentra la manera de construir dicho concepto en la clase de matemáticas, ya que como se plantea en varios libros y textos relacionados con él, este proceso involucra evidentemente las ideas intuitivas de los individuos , las cuales van a influenciar el desarrollo mental de conceptos más formales que involucren la idea del infinito. Especialmente si se trata de verlo como un todo o un objeto y no algo que se encuentra en constante construcción, ya que la segunda concepción es la más común y fácil de asimilar.

Según Fischbein (1987) una intuición o idea intuitiva puede entenderse como una concepción cerrada, por lo general prematuramente, en la cual la falta de información se oculta de manera tal que la persona la entiende como coherente, completa e inmediata (Lestón, 2007, p.19). Es cuando se ingresa a la escuela y el docente empieza a tratar de introducir el tema en la clase que los conflictos surgen, pues se da el enfrentamiento entre lo que el alumno piensa y ve en su entorno y lo que el docente pretende que se imagine.

Otro aspecto ligado a estos conflictos, es la significación que tanto los alumnos como el docente le den al concepto de infinito. Dado que una forma de verlo es aquella común a todos, aquella que se encuentra en los libros y se ha desarrollado a lo largo de la historia y otra es la personal, el significado que cada individuo le dé, que evidentemente difiere dependiendo de cada persona y el cual tiene inmersas todas las ideas intuitivas de las que se ha hecho mención.

A cerca de esto Penalva (1996) menciona: "se considera que los conceptos tienen un significado público o social y un significado privado o personal" (Penalva, 1996, p.1). Contextualizándonos con el infinito, se podría pensar que el primero se da cuando el concepto es mostrado de una manera formal, validando la teoría matemática y es expuesto en la clase de matemática; donde los estudiantes pueden estar apoyados de la guía del docente o de algún libro de texto. Por tanto el significado privado se puede ver como aquel en donde cada estudiante se apropia del concepto, concibiéndolo de la manera que resulte más sencilla para él, al igual que asociándolo y representándolo muy seguramente con elementos que están a su alcance y son fáciles de asimilar en su contexto.

Estas ideas propias de cada individuo, están asociadas a los modelos mentales que se forman para dar solución o para comprender planteamientos que son complejos como lo es lo relacionado con el infinito. Frente a lo cual, generalmente se recurre a utilizar un modelo pictórico que permita representar en el mundo de la finitud aquellas cosas que en el infinito no son evidentes. Por ejemplo, matemáticamente se sabe que un punto es un término indefinido, sin embargo pictóricamente le atribuimos un lugar en el espacio al representarlo gráficamente como un objeto físico.

Siguiendo con esta serie de ideas y sin desviarnos de los aportes de Fischbein, se considera de acuerdo a lo que él plantea que las ideas intuitivas (de las que se hablará constantemente en este trabajo), aparecen a lo largo de este tratamiento (la escuela), provocando conflictos de tipo cognitivo como ya se mencionó.

Para intentar entender el por qué de estas situaciones, se toma como fundamento teórico los modelos tácitos o modelos mentales que Fischbein expone, al igual que trabajos de autores muy relacionados con el tema como lo son Garbín (2005), Núñez (1997), Lestón (2005), Montoro y Scheuer (2004), entre otros.

Para comprender lo que estudiantes de undécimo grado y universitarios (a los cuales se pretende indagar) conciben respecto al infinito, Fischbein (2001), encuentra una explicación y plantea que los modelos gráficos o pictóricos de conjuntos infinitos (segmentos, cuadrados o cubos) tienen efectos en el pensamiento de los estudiantes. Argumentando que nuestra inteligencia tiene dificultades para comprender el infinito actual, ya que nuestra mente está adaptada esencialmente a realidades finitas en tiempo y espacio.

En realidad el aporte de la investigación de este autor tiene que ver con la explicación de cómo los modelos tácitos[‡] reemplazan los conceptos matemáticos, influyendo en el proceso de razonamiento del individuo sin que sea consciente de la forma como estos fueron originados y los efectos que causan sobre su pensamiento.

Es importante aclarar que nuestro interés de trabajar con jóvenes que se encuentran en la etapa de transición del colegio a la universidad nace del hecho que generalmente, “el concepto de infinito aparece en los programas curriculares en los cursos de cálculo cuando los estudiantes deben enfrentarse con los conceptos de límite, asíntotas de funciones racionales, sucesiones infinitas y series e integrales impropias” (Roa, 2008, p.6). Es así, que en el bachillerato este concepto no pasa de ser concebido como algo que no tiene fin que es incontable, a ser un tema matemático más fuerte sobre el que se desarrollan conceptos matemáticos fundamentales.

[‡] Que no se entienden, perciben, oyen o dicen formalmente, sino que se suponen e infieren.

Uno de los ejemplos comunes en los que se identifican este tipo de contradicciones y problemas cognitivos, sobre los que se ha venido hablando, es la no aceptación de la equivalencia del número de puntos que hay en dos segmentos de diferentes longitudes. Esto generalmente sucede, porque resulta difícil para el estudiante entender que aún cuando lo que percibe visualmente es que los segmentos no son iguales en tamaño, su número de puntos es equivalente. Es decir, en términos matemáticos tienen la misma cardinalidad, sin embargo si la figura es presentada de la siguiente manera el alumno acepta (aunque no se convence) la equivalencia.

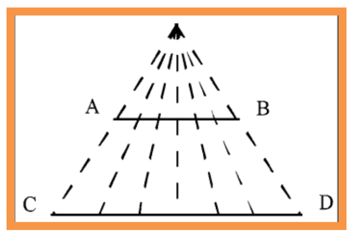


Figura 1. Tomada de Modelos Tácitos e Infinito (Fischbein, 2001).

Contrario a lo anterior, si la figura es presentada de la siguiente manera (ver figura 2.) se crea gran confusión, pues queda el interrogante de lo que sucede con los puntos que no están entre la correspondencia AB y EF, ¿Se puede establecer una relación uno a uno?

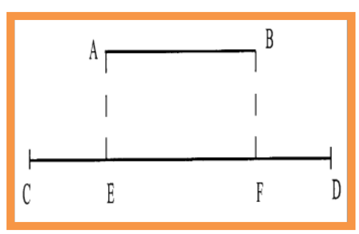


Figura 2. (Tomada de Modelos Tácitos e Infinito. Fischbein (2001))

Si se le presentan los argumentos suficientes, el estudiante a lo mejor acepta que los dos segmentos tienen la misma cantidad de puntos. Sin embargo su percepción visual e intuitiva le manifiesta lo contrario, convirtiendo la situación en poco convincente. Hechos de este estilo son los que crean confusión en la mente de las personas y por lo tanto se convierten en un enemigo para el docente que pretende tratar este tipo de temas en el aula de clase.

El hecho fundamental que nos gustaría destacar es que incluso adolecentes y adultos, siendo consientes de la naturaleza abstracta de los objetos geométricos por ejemplo, siguen pensando en términos de los modelos figurativos y sacan conclusiones que pueden ser legítimas en cuanto a los modelos de figuras. Sin embargo estos modelos pueden conducir a conclusiones erróneas con respecto a la geometría (Fischbein, 1998). Dicho en otras palabras, los modelos pueden inspirar inferencias matemáticas correctas en relación con algunas propiedades o teoremas, pero pueden llevar a conclusiones erróneas con respecto a otras.

Para ilustrar los obstáculos epistemológicos de los que tanto se ha hablado en este trabajo, a continuación se exponen algunas respuestas de estudiantes, las cuales confirman que aún cuando el individuo tenga una amplia formación matemática, sus argumentos no tienen el fundamento suficiente que muestre su seguridad en cuanto a lo que refutan o afirman.

> En estas afirmaciones encontramos ideas sobre el infinito enmarcadas en la posibilidad de continuar reiterando un proceso (finito) tantas veces como se quiera, bien sea desde el punto de vista de la realización física o la realización mental. Para muchos de los entrevistados resulta claro que el proceso se puede continuar realizando "infinitamente", aunque desde el punto de vista de lo "concreto" este sería imposible. Tal es el caso de las respuestas dadas por estudiantes para profesor, a preguntas como la siguiente:

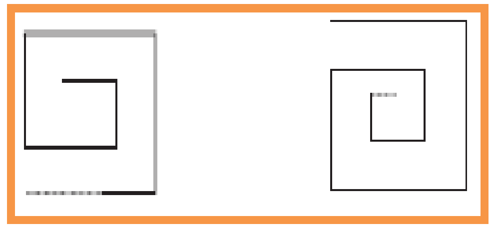


Figura 3. (Inicio de la construccion de una "espiral rectangular" utilizando dos procesos diferentes)

¿Se puede continuar al infinito?

> E2: *Sí, porque si tomamos la figura, podemos seguir el trazo de tal forma que podamos realizar "una especie de espiral cuadrangular" de manera que lo pueda extender tanto como se quiera, nunca llegaría al infinito pero se comporta de esa forma…"*
>
> E3: *Considero que es posible aunque físicamente llegará un momento en el cual parecerá que se detuvo en un punto, si acercamos una lupa nos daremos cuenta que podríamos continuar con el procedimiento tanto como quisiéramos".*

¿Se puede continuar al infinito?

0 1 2 3 4 5…

1 ½ 1/3 ¼ 1/5…

0 ½ 2/3 ¾ 4/5…

> *E4: Sí, porque los considero números naturales y siempre en esta sucesión tienden al infinito…*
>
> *E4: Sí, porque los considero como un número racional y siempre tienden a infinito.* (Bonilla, Romero, Rojas. 2004, p.29)

De este tipo de ejemplos se pueden extraer las rupturas o acomodaciones que los individuos hacen en el momento en que tienen que enfrentar situaciones donde el infinito emerge, quedando como conclusión que la enseñanza impartida en su proceso escolar, influye en la aparición y permanencia de los obstáculos. Siendo por tanto necesaria la construcción de situaciones de aprendizaje en las cuales se recupere para el estudiante el sentido de lo aprendido, logrando así, que éste sea consciente de las diferentes formas de comprender un objeto matemático y de las limitaciones y ventajas de cada una de ellas.

Continuando con esta línea de ideas Dubinsky (1996) plantea que la meta de aprendizaje debe ser: ayudar a los estudiantes a construir las estructuras mentales apropiadas para cada concepto conectándolo con las estructuras previas (Tomado de Roa, 2008, p.13). Particularmente esta meta no es tan fácil de lograr, ya que como se ha hecho mención a lo largo del trabajo, las ideas intuitivas permeen constantemente la construcción de los conceptos matemáticos, en particular de uno tan sofisticado como el infinito. Por tanto, entran en juego aspectos relevantes como las acciones, los procesos, los objetos y esquemas que el individuo ha incorporado en la mente a lo largo de su vida y los cuales están arraigados en él. De acuerdo a esto, aún cuando el concepto matemático se trabaje en la escuela, resulta difícil dejar dichos esquemas a un lado.

Para entender lo anterior se debe empezar a indagar en los modelos que son sustitutos de algunos conceptos originales, que por lo general son demasiado abstractos y complejos y nuestra capacidad de razonamiento no nos permite comprenderlos. De aquí, surge la necesidad de recurrir a concepciones que están a nuestro alcance y se asocian con el concepto; aún cuando las representaciones que se logren no sean del todo correctas y conlleven a errores que amplíen el vacio que actualmente existe en cuanto a la concepción del infinito.

Identificar este tipo de hechos en alumnos que transitan de undécimo grado a la universidad, es fundamentalmente el objetivo de este trabajo. Ya que aún cuando tenemos ideas a priori de los resultados que vamos a encontrar, necesitamos confrontarlas con teorías que se han desarrollado alrededor del tema y con la realidad que se experimenta en el aula de clases.

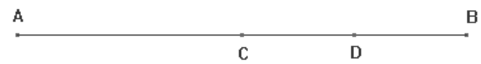
Sin embargo, no debemos apartar la vista del hecho que la mente del ser humano es algo muy complejo y difícil de entender, especialmente cuando tenemos que tratar con conceptos que son muy abstractos o complejos, pues nuestro razonamiento tiende a sustituirlos por ideas alternativas que son más familiares, más accesibles y más fácil de manipular. Es en este momento que los llamados modelos mentales aparecen y son utilizados deliberadamente y conscientemente, aunque a veces no notamos su presencia e impacto.

Según Fischbein (2001) estos son los modelos tácitos que tienen un efecto considerable sobre nuestra forma de pensar, nuestras estrategias y conclusiones, más aún cuando se trata de la resolución de preguntas hechas a estudiantes respecto al infinito, ya que para responder una misma pregunta se pueden dar dos modelos simultáneos.

Un claro ejemplo se da cuando se presenta la versión de la Paradoja de Zenón en dos versiones diferentes. Una donde se plantea como un problema de acortamiento de distancias y la otra cuando los términos que aparecen en la anterior se presentan como una serie. Estas situaciones se reflejan en dos de los puntos de la prueba piloto y son mostradas a continuación:

Situación 1: Acortamiento de distancias.

Un móvil desea viajar del punto A al punto B, y para esto tiene que pasar por el punto C que resulta ser la mitad entre A y B, luego por el punto D que resulta ser la mitad entre C y B, luego por el punto E que es la mitad entre D y B, y así sucesivamente debe ir pasando por la mitad de cada segmento de línea que va quedando al encontrar la mitad. Siguiendo este razonamiento, ¿Es posible que en algún momento la mitad coincida con el punto B?



Situación 2: Términos del acortamiento de las distancias mostrados como serie.

Considera la siguiente suma:

$$Y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \ldots + \cdots$$

¿Cuál crees que es su resultado? Justifica tu respuesta

Los estudiantes no logran ver que los dos problemas muestran el infinito de la misma manera y desarrollan cada ejercicio de forma independiente, llevando a cabo procesos distintos para cada uno. Dichos resultados serán mostrados posteriormente en el análisis a posteriori de la prueba piloto.

Pensar que el concepto de infinito forma parte del sentido común de los estudiantes es quizás el error más grave que cometemos como docentes. Puesto que llegamos a la clase de matemática y empezamos a hablar del tema, de la manera más normal sin tener en cuenta que alrededor de este concepto se desarrollan muchas ideas que requieren de razonamientos complejos, que evidentemente un joven de colegio o universidad, está en la capacidad de llevarlos a cabo, pero no ha sido preparado para ello.

Por otro lado, generalmente en la educación media la capacidad de razonamiento y abstracción en muchas ocasiones, se limita a cumplir con lo establecido en el currículo y no fomenta espacios que le permitan al alumno pensar y expresarse libremente en cuanto a un concepto.

En vista que “en la universidad de hoy en los cursos básicos de Matemática es habitual trabajar con conceptos que involucran la noción de infinito como tema destacable y problemático” (Montoro y Scheuer, 2004, p.4), resulta conveniente identificar las concepciones que acerca del tema tienen los estudiantes de undécimo grado. De esta manera es conveniente determinar qué factores cambian en el proceso de transición del colegio a la universidad, cuáles permanecen y cuáles sirven como base para empezar a construir el infinito desde una perspectiva matemática, que involucre aspectos intuitivos y dé como resultado la apropiación y el entendimiento significativo del concepto.

Como herramienta para lograr estos hechos exponemos el problema de investigación, el cual guiará los resultados, que a su vez permitirán extraer las conclusiones pertinentes.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Con base en los aspectos presentados en los antecedentes de este trabajo, nos interesa determinar cuáles son las concepciones que sobre el infinito han desarrollo estudiantes que se encuentran cursando los últimos años del bachillerato y cuáles son las concepciones que sobre este concepto desarrollan los estudiantes universitarios que han llevado un curso de cálculo I y cálculo II, quienes han abordado conceptos matemáticos relacionados con el concepto de límite.

Como lo hemos planteado el infinito como concepto no aparece como un contenido específico del currículo de matemáticas, pero sobre él se desarrollan diferentes concepciones en escenarios no escolares que de una u otra manera afectan la construcción de conceptos matemáticos relacionados con él. Sin embargo, en el contenido de los cursos de matemáticas del nivel básico en la universidad, principalmente en los cursos de cálculo, se tratan diferentes conceptos relacionados con el infinito como lo son: límites, sucesiones, asíntotas, etc. Donde se asume de alguna manera que los estudiantes tienen cierta experiencia con este concepto.

Por tanto, nos interesa identificar cuáles son sus concepciones sobre el infinito, determinadas por las ideas intuitivas (Fischbein, 1998) que sobre este concepto han desarrollado; para establecer la manera como éstas pueden intervenir en la construcción de conceptos matemáticos. A la vez, buscamos determinar cómo estas concepciones se transforman al analizar principalmente el concepto de límite.

Para estos nos hemos planteado la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las concepciones que sobre el infinito tienen los estudiantes al ingresar a la universidad y cómo estás evolucionan al desarrollar un curso de cálculo I?

Para dar respuesta a este planteamiento vamos a considerar ¿qué ideas intuitivas desarrollan estos estudiantes sobre el infinito en escenarios no escolares?, ¿Cómo estas ideas permean su construcción del concepto en situaciones matemáticas? Y ¿Cómo el análisis de conceptos como límite genera la evolución de las concepciones de los estudiantes sobre el infinito?

Para el análisis de estas preguntas, a continuación presentamos los aspectos más importantes de la metodología que seguiremos durante la realización de este proyecto.

4. DISEÑO Y APLICACIÓN DE INSTRUMENTOS

4.1 Aspectos metodológicos

Este trabajo tiene un enfoque de tipo cualitativo, en donde lo que se busca es aportar resultados de tipo descriptivos, explicativos o predictivos sobre lo que se ha venido hablando en relación a las concepciones intuitivas del infinito y su construcción matemática. Especialmente en aquellos estudiantes que transitan del colegio a la universidad, al igual que aquellos que han visto un curso de cálculo I.

En este sentido, para describir estos hechos acudimos a las manifestaciones y explicaciones que sobre el infinito expusieron algunos estudiantes en los instrumentos diseñados: prueba piloto y entrevistas; que fundamentan de manera empírica nuestro proyecto.

Aplicamos en primer lugar, una prueba piloto que nos permitió identificar aspectos importantes para llevar a cabo la siguiente fase del trabajo. Debido a que consideramos necesario tener en cuenta cómo los estudiantes están concibiendo el infinito en cada nivel de estudio y el lenguaje matemático que están utilizando, para así enfocar nuestros instrumentos metodológicos.

Con base en los resultados encontrados en el primer instrumento, seleccionamos cuatro estudiantes con quienes continuamos el proceso con la aplicación de una entrevista individual y sobre los cuales damos las conclusiones finales.

Tomando como fundamento nuestro marco teórico diseñamos y desarrollamos las preguntas planteadas tanto en la prueba piloto como en las entrevistas. Teniendo en cuenta los aspectos planteados por Fischbein (2001) y los principales resultados de la prueba piloto. El diseño de la entrevista fundamentalmente considera situaciones en un contexto geométrico donde la idea de infinito emerge. Al igual el uso de paradojas que nos permitió confrontar la coherencia de las ideas planteadas por los estudiantes.

Para la aplicación de los instrumentos metodológicos se empezó por diseñarlos, de tal manera que su contenido estuviera al alcance de los conceptos matemáticos usados por los estudiantes y así ellos los entendieran y desarrollaran sin mayor dificultad. Más que evaluarlos lo que se buscó fue detectar los pensamientos e ideas que cada uno maneja respecto al infinito. En su desarrollo, consideramos que lo más conveniente para abordar toda la temática ya expuesta, es dividir la metodología en dos fases; pues esto permite llevar un orden en la recolección de los datos y facilita sustentar las conclusiones que surjan.

A continuación se describen dichas fases:

Fase uno: Diagnóstico de las ideas intuitivas de los estudiantes. En esta fase aplicamos un diagnóstico denominado **"prueba piloto"** a 42 estudiantes de undécimo grado de La Institución Educativa Las Américas y 40 de un curso de cálculo II de la Universidad Industrial de Santander de la ciudad de Bucaramanga. Esta prueba está diseñada con el fin de detectar qué ideas han construido a lo largo de su vida (escolar y no escolar) en cuanto al infinito, cuáles han modificado y cuáles aún prevalecen. Al igual que enfrentarlos con la idea de infinito actual y potencial, analizados de distintas maneras según el planteamiento de cada ejercicio.

Para lo anterior principalmente consideramos la teoría de Núñez (1997), la cual sugiere lo interesante y significativo que resulta considerar cómo emergen las ideas cuando se trabaja la construcción del infinito en lo grande y el infinito en lo pequeño como un proceso simultáneo.

De igual forma en esta fase se escogieron de acuerdo a ciertos criterios, los estudiantes con quienes continuamos el estudio, es decir, en este trabajo no se pretende analizar un gran número de individuos sino centrarnos en aquellos que estén más familiarizados con el infinito matemáticamente hablando.

Fase dos: Desarrollo de Entrevistas. En esta fase se realizaron lo que denominamos entrevistas didácticas, las cuales se hicieron de manera individual a dos estudiantes del curso de undécimo grado y dos del curso de cálculo II. Los cuales fueron seleccionados con base a las respuestas obtenidas en la prueba piloto

Principalmente se buscó que los estudiantes argumentaran sus respuestas de manera verbal, expresando sus razonamientos, para lo cual el entrevistador trato de generar confianza y de no influir en sus justificaciones.

En general la entrevista consistió en mostrar algunos ejercicios que ya se habían trabajado en la prueba piloto, esto permitió confrontar lo que los estudiantes tiempo atrás habían respondido y lo que ahora percibían de la situación.

Además, durante las entrevistas se presentaron algunas paradojas como ejercicio y se mostraron situaciones que reflejaban la teoría de Núñez (1997) a cerca de la construcción del infinito en lo pequeño; sobre las cuales el entrevistador trato de persuadir al estudiante para que expresara todas las concepciones que emergían en su mente a cerca del tema.

Los resultados se vieron al trascribir cada una de las entrevistas logrando identificar qué modelos subyacen en la mente de los alumnos, qué concepciones intuitivas prevalecen y cuáles se han modificado con la aparición de nuevos conceptos matemáticos.

4.2 Diseño y aplicación del diagnóstico

La prueba piloto empleada en la primera fase de la metodología consiste en un diagnóstico dividido en dos partes, una consta de cuatro ítems, en donde el contenido de cada uno tiene inmerso el infinito ya sea potencial o actual, al igual que involucra términos matemáticos de geometría y algebra básicos, con el fin de garantizar que lo mostrado allí no es desconocido para el nivel de estudios en que se encuentran los estudiantes.

Por otro lado algunos ejercicios vienen dados con gráficas que ilustran las situaciones y pueden incidir en las sustentaciones de los estudiantes.

La segunda parte se basa en la paradoja del Hotel de Hilbert en la cual se presentan dos situaciones que conducen a una contradicción e involucran las posibles relaciones que se pueden establecer entre lo infinito y lo finito, dependiendo de las consideraciones de cada uno.

El objetivo de la primera parte es determinar qué concepciones tienen los estudiantes a cerca del infinito, al igual que establecer si hay una noción de infinito actual o prevalece la idea de un infinito en construcción (potencial). En la segunda parte buscamos generar contradicciones en los estudiantes, las cuales deben conducir a la discusión de los puntos de vista de cada uno, generando así que el ejercicio se haga más enriquecedor al entrar en juego distintas formas de ver y analizar el enunciado, llevando finalmente a que cada uno sustente sus razonamientos ampliamente. Ya que aunque la primera parte se desarrolló de manera individual, la segunda se trabajó en parejas.

Para cumplir con los objetivos se llevaron a cabo dos tipos de análisis de la prueba piloto, el primero llamado análisis a priori, en donde se ponen de manifiesto las expectativas que se tienen frente a los resultados esperados, y el segundo análisis a posteriori que arroja las evidencias de estos, al igual que confronta lo esperado con lo obtenido luego de realizar la prueba tanto al grupo de estudiantes de undécimo grado como a los estudiantes del curso de cálculo II.

4.3 Etapa I: Prueba piloto

4.3.1 Análisis a priori

Antes de plantear lo que esperamos que suceda con la prueba piloto según nuestro marco teórico, es conveniente resaltar que el objetivo de esta actividad es detectar las percepciones intuitivas y los argumentos matemáticos que en este momento presentan los estudiantes en cuanto a la temática central de nuestro proyecto: *El Infinito.*

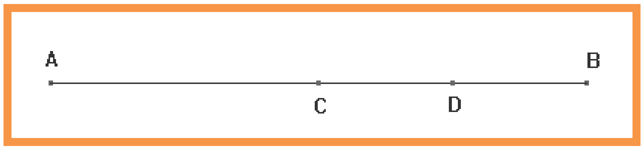
Diseño de la prueba

En el diseño de la prueba se tuvieron en cuenta principalmente los aportes de Núñez (1994) y Fischbein (2001) sobre el infinito; esta teoría enfocó la construcción y sentido del diagnostico aplicado, cuya estructura se presenta a continuación:

Parte I:

1. *Analiza la siguiente situación y responde:*

   a) *Un móvil viaja del punto A al punto B, y para esto tiene que pasar por el punto C, que resulta ser el punto medio entre A y B. Luego debe pasar por el punto D que resulta ser el punto medio entre C y B. Luego por el* *punto E, que es el punto medio entre D y B .Luego por el punto E, que es el punto medio entre D y B; y así sucesivamente debe ir pasando por el punto medio de cada segmento resultante. Siguiendo este proceso, ¿es posible que en algún momento el móvil alcance el punto B? Justifica ampliamente tu respuesta.*



2. *Analiza y resuelve los siguientes enunciados:*

a. *Dada las siguientes figuras, analiza cada pregunta planteada y justifica ampliamente tus respuestas.*

En la figura1, ¿El segmento AB representa el mismo número de puntos que el segmento CD?

En la figura 2, ¿El segmento AB representa el mismo número de puntos que el segmento CD? y ¿El segmento AB representa el mismo número de puntos que el segmento EF?

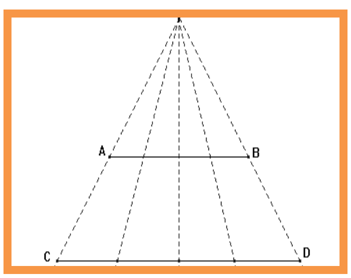


Figura 1.

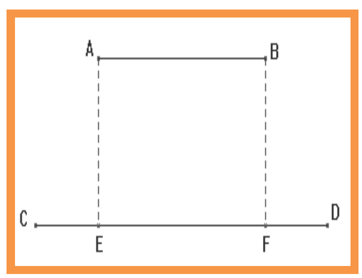


Figura 2.

b. *Compara los siguientes conjuntos y señala cuáles tienen la misma cantidad de elementos y cuáles no; justifica ampliamente tus respuestas:*

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

$$B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, \dots\}$$

$$C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots\}$$

3. *Considera la siguiente suma:*

$$Y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \dots + \cdots$$

¿Cuál crees que es su resultado? Justifica tu respuesta

4. *¿Cuáles cuestiones a lo largo de tu vida se relacionan con el infinito? ¿Por qué?*

Parte II:

Lee atentamente la siguiente situación:

El Hotel de Hilbert

I. *Imaginen un hotel con un número infinito de cuartos, donde todos están ocupados. A dicho hotel viene un nuevo huésped y pide una habitación. "¡Por supuesto!" -exclama el propietario; y traslada la persona que ocupa anteriormente el cuarto N° 1 al cuarto N° 2, el ocupante del cuarto N° 2 al N° 3, el ocupante del cuarto N° 3 al N° 4 y así sucesivamente. El nuevo huésped recibe la habitación N° 1, que queda libre como consecuencia de tales traslados.*

II. *Imaginemos ahora un hotel con un número infinito de cuartos, todos ocupados, y un número infinito de nuevos huéspedes que vienen y piden habitaciones. "Sin duda, caballeros -dice el propietario-; esperen por favor un minuto". El propietario pasa al ocupante del N° 1 al N° 2, el del N° 2 al N° 4, el del N° 3 al N° 6 y así sucesivamente… Ahora todos los cuartos con número impar quedan desocupados y todos los nuevos huéspedes se pueden acomodar fácilmente en ellos.*

Analicen para cada caso las siguientes preguntas:

¿Es posible que el propietario del Hotel acomode a los nuevos huéspedes?

¿Podrían plantear otra forma de acomodar a los nuevos huéspedes?

Escriban todas las ideas o razonamientos que desarrollen sobre esta situación.

Análisis a priori: Undécimo Grado (Institución Educativa las Américas)

Ejercicio 1:

Las paradojas aunque surgieron muchos años atrás hoy día siguen siendo útiles y de gran controversia cuando de lo que se trata es de hablar del infinito; la situación del móvil que viaja de un punto A a un punto B pasando por sus mitades nos remonta a considerar una de las paradojas de Zenón, llamada la paradoja del corredor, que en su esencia plantea la misma situación mostrada en nuestra prueba piloto.

Matemáticamente es correcto afirmar que el móvil si llega al punto B. Para realizar un análisis de esta situación, es decir, para generar elementos matemáticos que permitan afirmar que el móvil si llega al punto, podemos considerar que del punto A al punto B existe una distancia d y supongamos que es 1. Así en nuestro caso el móvil partirá de A pasando por los puntos mostrados a continuación:

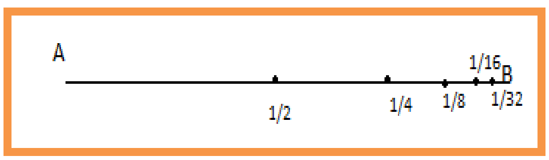


Figura 4. (Acortamiento de distancias de una version de la paradoja de Zenón)

Estas fracciones al ser cada una la mitad de la anterior, subdividen todo el trayecto en un número infinito de partes cada vez más pequeñas. Puesto que cada trayecto representa cierta distancia positiva es posible afirmar que la distancia total que se necesita recorrer es la suma de todas estas cantidades de distancia.

Con base en la literatura analizada, podemos esperara que la mayoría de los estudiantes argumenten que el móvil no va a llegar al punto B. Ya que pensamos que el aumento de los puntos medios los va conducir a una idea de infinito potencial en donde el proceso no es acabado, por lo tanto no se encuentran límites.

Retomemos la idea de Núñez (1997) a cerca de los dos procesos que están involucrados en esta situación, es decir, un proceso de divergencia que se da en cuanto a la cantidad de puntos medios recorridos por el móvil, y un proceso de convergencia presentado cuando la distancia que aparece cada vez se hace más pequeña. Visto desde esta perspectiva, esperamos que las respuestas de los estudiantes muestren contradicciones en sus argumentos, ya que muchos detectarán estos procesos mencionados pero a lo mejor no será claro cómo interactúan en una misma situación.

Por otra parte si consideramos lo que Fischbein (2001) propone sobre este hecho, puede suceder que los estudiantes tengan en cuenta variables como tiempo, espacio y movimiento, y adicional a esto pongan en evidencia su pensamiento finito para resolver estas situaciones. Entrando en conflicto sus ideas, ya que el tiempo y el movimiento no son infinitamente divisibles, es decir, para algunos puede ser más relevante que el móvil como está en movimiento y cuenta con un determinado tiempo para llegar lo haga, que el hecho de la infinitud de los puntos medios.

Ejercicio 2. a:

Para este caso el análisis matemático tiene una gran relación con el infinito actual, cuyo fundamento es la equivalencia de conjuntos. Es decir, en esta situación emerge la relación del todo y una de sus partes; para esto consideramos que si existe un subconjunto propio de M equivalente a M, M es un conjunto transfinito o infinito. Adicional a esto, “el conjunto de puntos de un segmento rectilíneo es un conjunto infinito, lo mismo que el conjunto de los puntos de una semirrecta, ambos conjuntos tienen la misma potencia” (Breuer, 1970).

Considerando estos hechos la respuesta para el punto 2.a de la prueba piloto los estudiantes pueden de manera general afirmar que todos los segmentos representan el mismo número de puntos.

En cuanto a lo que esperamos que los alumnos respondan, pensamos que por el esquema de la figura 1, para la primera pregunta digan sí, que representan el mismo número de puntos. Debido a que creemos que pueden establecer que los segmentos que aparecen punteados señalan una equivalencia entre los segmentos. Sin embargo para la segunda pregunta el esquema está planteado de tal manera que esto no sea tan evidente, es así, que no nos sorprenderá si ellos se fijan en las longitudes de cada uno de los segmentos, considerando que uno es más “grande” que el otro.

Aunque se presume que los estudiantes deben saber que los puntos matemáticos no tienen dimensiones, también sabemos por Fischbein (2001) que en estas situaciones se sigue pensando tácitamente, inconscientemente en términos de pequeñas manchas y psicológicamente no es tan fácil deshacerse de estas imágenes. Si se ve desde este punto de vista, es decir, la comparación de pequeñas manchas, los dos conjuntos no van a ser equivalentes para los estudiantes.

Ejercicio 2.b:

En este apartado según la teoría de conjuntos se está tratando con números cardinales transfinitos y en lo referente a estos, los conjuntos equivalentes (conjuntos de igual potencia) se caracterizan por tener los mismos números cardinales; estos números cardinales transfinitos representan una ampliación de los números naturales (Breuer., 1970).

Evidentemente la respuesta a la pregunta que se plantea en la prueba piloto, se resume en decir que todos los conjuntos tienen la misma cantidad de elementos, pues lo que estamos viendo es que cada uno se puede hacer corresponder biunívocamente con el conjunto de los números naturales; lo cual garantiza que su potencia es la misma.

Además nuevamente estamos tratando con el concepto de infinito actual, que se presume los estudiantes no tienen aún muy elaborado, lo cual es comprensible ya que como se hizo mención en el marco teórico es un tema que las instituciones educativas no están obligadas a tratar.

Suponemos que la representación visual que cada estudiante tenga de los conjuntos puede influir en su respuesta y limitarlos a fijarse solamente en la cantidad de elementos o en el tamaño del conjunto y así sacar conjeturas como que los conjuntos no tienen la misma cantidad de elementos. Sin embargo, en cada uno de los conjuntos colocamos puntos suspensivos con la intención de que esto les haga pensar que el conjunto sigue y por lo tanto se cuestionen acerca de cuál es realmente la cantidad de elementos.

A pesar de esto esperamos que aquellos estudiantes que tomen los puntos suspensivos como la continuación de elementos del conjunto, tengan en cuenta que no es muy recomendable contar cada uno de sus elementos como lo hacemos con conjuntos finitos. Esta idea hace parte de los resultados que Cantor aportó a las matemáticas; pues lo que él fundamentaba es que los conjuntos infinitos debían tener un comportamiento distinto al de los finitos y que su aritmética también era diferente (Fishbein, 2001, p.310).

La forma como están planteados los conjuntos, en B aparece de manera evidente cada elemento de A elevado al cuadrado, presenta de manera específica la biyección entre estos. Lo cual puede conducir a que los estudiantes respondan que los dos conjuntos tienen la misma cardinalidad; caso contrario a lo que ocurre con el conjunto C, ya que este puede ser visto como un subconjunto de A y en este caso entra en juego nuevamente la controversial discusión del todo y una de sus partes. Generando que los estudiantes digan que C es más pequeño que A, es decir, tiene menor cardinalidad.

Ejercicio 3:

A pesar que somos consientes que este ejercicio puede presentar dificultades, ya que como Garbín (2005) lo plantea, todavía se encuentran en un pensamiento matemático elemental. Queremos plantear precisamente este ejercicio ya que dicha serie representa la suma de los términos que aparecen siguiendo el proceso del punto uno de la prueba piloto, considerando que la distancia de A a B es una unidad. Por lo tanto lo que pretendemos es detectar si los estudiantes identifican la relación entre los enunciados o si los analizan como problemas independientes.

Por otro lado, las repuestas que los estudiantes nos proporcionen nos ayudarán a identificar en qué etapa del pensamiento se encuentran y por lo tanto será más sencilla y fundamentada la construcción de actividades posteriores.

Matemáticamente, esta suma representa una serie geométrica, en donde cada uno de sus términos es menor que 1, por lo tanto su resultado se puede hallar a partir de una fórmula sencilla de sus sumas parciales, siendo para este caso el resultado igual a 1.

Una situación muy natural que se puede presentar es que los jóvenes utilicen la calculadora para hallar el resultado y con los términos que están propuestos puedan concluir que este es uno, aún sin tener claro el verdadero proceso que conduce a esta respuesta. De la misma manera puede que algunos ni siquiera se percaten del hecho que cada vez que se agrega un término la suma se acerca más y más a uno.

Ejercicio 4:

Este apartado encierra parte de la teoría que se expuso en el marco teórico acerca de cómo las ideas intuitivas se incorporan en el pensamiento del individuo, persistiendo aún cuando la misma teoría nos muestra otras cosas.

Sencillamente, este es el resultado que pensamos debe ser el más acertado con la teoría expuesta, es decir, no debe diferir lo que ellos respondan con lo que nosotras ya hemos tratado. Ya que además de ser una pregunta abierta que les permitirá expresarse sin ninguna limitación, esperamos ponga en evidencia todos los conflictos que surgen alrededor del tema, muchos de los cuales han sido tratados por Garbín (2005) y Lestón (2007).

Por otro lado pensamos que van a aparecer concepciones comunes entre los estudiantes como "el amor es infinito", "las estrellas son infinitas", "el cielo es infinito", es decir, todos los conceptos que se han formado a lo largo de sus vidas con base a las relaciones con sus padres, amigos y el medio que los rodea en general.

Parte II

Ejercicio 5: Paradoja del Hotel de Hilbert

Una paradoja se puede definir como una idea opuesta a la común opinión y al sentir de las personas. Es decir, esta envuelve contradicciones que se contraponen a la realidad o a una demostración científica. Por tanto esperamos que en la prueba diagnóstica la paradoja planteada, permita la discusión y reflexión de los estudiantes sobre sus ideas.

La paradoja del hotel de Hilbert muestra una situación con conjuntos infinitos y lo evidente es, que no es lógico que a un conjunto se le agreguen más elementos y la cantidad de elementos no varié.

Es así que esperamos que este sea un posible razonamiento por parte de algunos alumnos frente a este planteamiento. Sin embargo para llegar a la respuesta correcta se debe tener en cuenta que matemáticamente podemos calcular y contar más allá del “infinito” y ello con la completa seguridad de que todas las definiciones y operaciones matemáticas son apropiadas (Breuer. 1970).

Para el caso de los estudiantes de undécimo grado esperamos que aunque detecten este tipo de contradicciones a lo mejor sus explicaciones no cuenten con fundamentos tan fuertes teóricamente, lo cual es comprensible teniendo en cuenta que esta puede ser la primera vez que analicen una paradoja, dado que estas actividades no son comunes en los colegios.

Otro aspecto que se puede considerar es que a lo mejor algunos no identifiquen que el texto lleva inmersas características propias del infinito y se enfoquen simplemente en el juego de palabras que el autor utiliza para narrar la situación, generando respuestas de tipo finito que son propias de situaciones que a lo mejor ellos han experimentado en la vida real.

Finalmente algo relevante para identificar es cómo los estudiantes pueden llegar a darle solución a este tipo de contradicciones, es decir, ¿contextualizan la situación con la vida real (lo finito) o se la imaginan y dan respuestas refiriéndose al infinito?; cuestionamientos de este tipo se pretenden responder posteriormente con base en las respuestas que los jóvenes den.

Análisis a priori: Curso Cálculo II
Universidad Industrial de Santander

En vista que se trabajó en un curso de estudiantes de cálculo II esperamos que todos se encuentren en la etapa de pensamiento matemático avanzando (PMA) del que habla Garbín (2005). Trabajar con universitarios desarrolla un interés por estudiar y explorar el infinito en su dualidad potencial-actual, especialmente cuando se introducen conceptos formales del cálculo diferencial e integral y aparecen interconexiones y confusiones entre la imagen formal e informal de los conceptos (Tall, 2001. Tomado de Garbín, 2005, p.62).

De lo anterior se puede deducir que los estudiantes ya han fundamentado sus conocimientos ya que en cálculo I se supone han visto temas nuevos y han reforzado otros aprendidos en el colegio, por lo cual esperamos que sus respuestas no sean elementales sino que profundicen un poco más y las sustenten de una manera más elaborada en comparación con los estudiantes de undécimo grado.

Esto no significa que pretendamos que el concepto de infinito este claro en su totalidad, púes precisamente como ya se ha hecho mención en este trabajo a pesar que ampliemos nuestro pensamiento matemático, los conflictos entre lo real y lo abstracto aparecerán.

Ejercicio 1:

En este problema podemos considerar dos situaciones, la primera es aquella en la cual los estudiantes en su curso de cálculo I han abordado conceptos como límite, por lo cual consideramos que estos estudiantes están en la capacidad de dar una respuesta acorde a su nivel académico. Es decir, concluyan que el móvil sí llega al punto B argumentando sus respuestas con conceptos matemáticos más formales como el límite de una sucesión.

Aunque estas respuestas no sean correctas, esperamos evidencien que los individuos están transitando de un pensamiento matemático elemental a un pensamiento matemático avanzado. Además creemos, traten de construir un modelo mental que en ese momento les permita relacionar lo visual con lo abstracto y puedan detectar y clasificar aquellos datos claves para la solución del enunciado.

En un segundo caso encontramos aquellos muchachos que aún se encuentran en una etapa donde sus conocimientos matemáticos son limitados, hecho que restringe su capacidad de discusión acerca del tema. De esta manera consideramos que no va a ser extraño para nosotras hallar respuestas con argumentos muy parecidos a los encontrados en los estudiantes de undécimo grado.

Ejercicio 2.a:

Para solucionar este punto no sólo entra en juega el hecho que los estudiantes han visto un curso de cálculo I, sino también que algunos han tomado materias como álgebra y geometría. Por lo tanto se espera tengan claro "que un segmento es el conjunto de puntos, incluidos sus extremos y todos aquellos que están entre ellos" (Clemens, O'Dafer, 1989, p.16), y en consecuencia consideramos que la respuesta debe coincidir con la justificación matemática, que se desarrolla en torno a este planteamiento; relacionando los enunciados con la equivalencia entre conjuntos.

Por otro lado Garbín (2005) habla de la influencia de los modelos mentales y los esquemas conceptuales en la solución de un ejercicio por parte de estudiantes entre los 16 y los 20 años. Podemos considerar que en este curso puede suceder que prevalezcan dichos esquemas reduciendo los razonamientos a dar respuestas de tipo finito, basados en su percepción visual e intuitiva de la situación.

Con lo anterior se pretende que cada estudiante para responder se desprenda un poco del modelo mental pictórico que pueda tener en el momento y le dé paso a un pensamiento más abstracto que contribuya a la comprensión un poco más elaborada del infinito actual.

Ejercicio 2.b:

En este punto se pone en consideración un hecho relevante en el grupo de estudiantes de la universidad, dado que vienen de un curso de cálculo I en donde generalmente el primer tema es la teoría sobre los números reales.

Por lo anterior, sin importar si han pasado por un curso de teoría de conjuntos o no, se espera conozcan propiedades básicas que conducen a un pensamiento matemático más avanzado y permiten establecer relaciones entre los conjuntos planteados; de tal manera que si el estudiante tiene una idea aunque sea vaga del infinito actual, la utilice para dar una respuesta argumentada del ejercicio.

Sin embargo, también será posible encontrar pruebas en donde la población le dé más importancia al "tamaño" finito de los conjuntos y no detecte que los puntos suspensivos indican que el conjunto continúa.

Fischbein (2001) argumenta que si se utiliza un criterio de correspondencia uno a uno, los elementos en los tres conjuntos son equivalentes, a pesar que para nuestra inteligencia finita esto es inaceptable. Sin embargo si la equivalencia es clara como sucede con los conjuntos A y B puede que los estudiantes acepten que su número de elementos es igual, pero no se convenzan totalmente.

Ejercicio 3:

En cuanto a esta serie es importante recalcar que se trata de la suma de los términos que aparecen en cada iteración realizada en la versión de la paradoja de Zenón, trabajada en la primer situación de la pruebe piloto. Considerando que el segmento tiene como longitud una unidad. Es así que nos surge la inquietud, si en esta parte de la prueba los estudiantes relacionan las dos situaciones o las ven como independientes.

También esperamos que los estudiantes logren asociar el esquema dado con las nociones que tienen sobre límite, al ser un tema que ya han trabajado con anterioridad en su curso de cálculo I. También puede existir la posibilidad que lo relacione con una sucesión.

De otro lado, la razón por la cual planteamos el ejercicio se deriva del hecho de considerar la idea de Núñez (1994) acerca de cómo los procesos de subdivisión e iteración ofrecen un acercamiento a la forma en que la mente construye la idea de infinito.
Además, “el concepto de suma infinita tiene dos tipos de iteraciones (divergente y convergente) y diferente naturaleza del contenido (cardinalidad y espacio)” (Garbín, 2005, p.62), por lo cual las respuestas encontradas en esta parte a lo mejor reflejen este tipo de situaciones.

Finalmente siendo optimistas y contradiciendo un poco los conflictos mentales entre la realidad y los conceptos matemáticos al igual que los planteamientos de Fischbein (2001), esperamos que algunos estudiantes den indicios que en este momento de su formación académica consideran el infinito actual (en lo pequeño) como parte de la matemática y no lo tratan como algo ajeno a la materia.

Ejercicio 4:
Por el enfoque de nuestro trabajo es imprescindible considerar el tema de la intuición, su rol, características y clasificación mostradas por Fischbein (1998), quien considera el conocimiento intuitivo al igual que el analítico como un camino básico en la actividad matemática.

En este último problema se espera que los estudiantes evoquen las ideas intuitivas que sobre el infinito han formado a lo largo de su vida, al igual que las expresen de manera amplia para que así posteriormente sea más fácil detectar cuales prevalecen aun cuando se ha visto un curso de cálculo I.

Sin embargo también pueden existir casos en los cuales los conceptos matemáticos que se han empezado a formar en la universidad alrededor del tema influyan sobre las respuestas, evidenciando los conflictos mentales que se generan cuando surge la necesidad de confrontar lo visual con lo abstracto.

En cuanto a percepciones como: “el amor es infinito”, “las estrellas son infinitas”, “el cielo es infinito”, es decir, todas aquellas que son comunes en ambientes no escolares, se puede presumir que este tipo de ideas van a disminuir en este grupo, comparadas con undécimo grado, lo cual permitirá constatar que se ha dado un avance del pensamiento matemático elemental (PME) al pensamiento matemático avanzado (PMA).

Parte II

Ejercicio 5: Paradoja del Hotel de Hilbert

A pesar que en este caso vamos a tratar con estudiantes con un nivel más avanzado de preparación académica, es importante tener en cuenta que el infinito como tal es una fuente de dificultades y contradicciones (Fischbein. 2001). Por lo tanto no podemos pretender que ellos dominen el tema y den respuestas matemáticas precisas, a lo mejor sus respuestas van a ser iguales a las de los estudiantes del colegio, sólo que con justificaciones un poco más elaboradas que involucren conceptos matemáticos más avanzados.

En los jóvenes universitarios también podemos esperar que traten de evitar las contradicciones al reemplazar la situación original que se les está planteando por una familiar a ellos o por un problema matemático que se relacione con los elementos que el problema presenta. En ambos casos, lo más natural es que lo lleguen a relacionar con situaciones que representen lo finito.

La intención de este problema es análoga a la que se tenía en el colegio, es decir, de nuevo buscamos identificar hasta qué punto los estudiantes pueden evidenciar las características del infinito y de qué manera dan explicaciones que sustenten sus razonamientos.

Sin embargo, se supone que en un curso de cálculo II se tienen concepciones más elaboradas acerca de lo que es un conjunto, un subconjunto y características de estos, por lo tanto, en este caso la discusión de la relación del todo y una de sus partes debe ser más argumentada y arrojar elementos significativos que permitan comprender el por qué los estudiantes exponen determinados razonamientos.

A diferencia de lo que pensamos ocurrirá en el colegio el juego de palabras utilizado por el autor para exponer la situación no debe ser relevante a la hora de entender el enunciado. Es decir, se presume que ellos deben estar en la capacidad de abstraer aquella información que realmente les aporte aspectos importantes para la solución del problema y no guiarse por la sencillez del texto, sino profundizar en él; en definitiva ir más allá de lo que se ve a simple vista.

4.3.2 Análisis a posteriori.

Este análisis lo realizamos con el fin de confrontar las expectativas que se venían trabajando desde el momento que se elaboró la prueba piloto acerca de las respuestas de los estudiantes. En él queremos mostrar lo acertadas o no que llegamos a estar en cuanto a lo que se esperaba que los estudiantes contestaran y lo que en realidad ellos reflejaron en cada uno de sus razonamientos.

Para dar a conocer los resultados que se obtuvieron luego de aplicar la prueba como ya se mencionó a un grupo de 42 estudiantes de undécimo grado y 40 de cálculo II. Se pretende mostrar el análisis de cada una de las preguntas resaltando las respuestas más sobresalientes que aporten elementos y sustenten la teoría que fundamenta el marco teórico de nuestro trabajo.

Para un mejor manejo de las respuestas de los estudiantes se utilizará la siguiente notación para identificar a cada uno de los participantes en las actividades:

EU1: Estudiante uno Undécimo grado.
EC1: Estudiante uno Cálculo II.

Undécimo Grado:

Matemáticamente la respuesta para este cuestionamiento es que el móvil sí llega al punto B, sin embargo, como se mostrará a continuación se dieron principalmente tres clases de respuestas: una en donde los estudiantes afirman que el móvil sí llega, otra en donde niegan esta posibilidad y una última en donde se pusieron de manifiesto las contradicciones que el tema causa en sus razonamientos.

En general, un poco mas de 25 estudiantes de los 42 del curso coincidieron en ver a A y B como puntos fijos, sin embargo un poco más de la mitad, no se desprendieron de su perspectiva finita de las cosas, es decir, algunos consideraron aspectos como la velocidad del móvil, el tiempo que tardaría en llegar y la distancia que cada vez se iba haciendo más pequeña. Por otro lado, surgieron respuestas basadas simplemente en el planteamiento del enunciado, es decir, no identificaron las características inmersas a cerca del infinito que se encontraban en la prueba.

Para Núñez (1997) la paradoja de Zenón mostrada de esta manera, presenta una situación de subdivisiones, un infinito pequeño, que implica una coordinación simultánea entre el creciente número de pasos y el decreciente resultado parcial que debe ser operado. La siguiente respuesta muestra que el estudiante concibe el proceso de convergencia que se da en este tipo de situaciones, al referirse a lo sucedido con la distancia cubierta cada vez que se hace una iteración.

> "*Sí es posible que pase por todos los puntos y que llegue hasta al punto B, pero para llegar a este punto se demora más tiempo ya que debe pasar por cada sección media de los segmentos resultantes y estos cada vez serían más pequeños haciendo más lento su recorrido (EU1)"*

Esta respuesta, en cuanto a la intuición, al parecer coincide con algunos planteamientos hechos por Fischbein (2001) acerca del tiempo y el espacio, porque son ideas que en nuestra vida diaria se presentan comúnmente; ya que vivimos en constante relación con ellas. Es decir, siempre debemos asignarle determinado tiempo a cada una de nuestras actividades diarias, al igual que el espacio, nos trasladamos de un lado al otro, pero siempre tenemos un lugar de partida y uno de llegada.

Por otro lado matemáticamente esta respuesta refleja un acercamiento al infinito actual por parte del estudiante. Hecho que también se reflejó en un estudio realizado por Garbín (2005), donde algunos estudiantes perciben la situación como actual, entendiéndose este infinito como el que está asociado a la idea de totalidad, de completes y de unidad.

También, hay resultados que en el análisis a priori no se habían tenido en cuenta, dado que considerábamos que en esta etapa de formación, los estudiantes ya están en capacidad de entender un enunciado e identificar los aspectos inmersos que les aportan herramientas para construir una respuesta. Sin embargo, algunos se guiaron simplemente por el planteamiento del problema y lo que se les pedía hacer, generando soluciones en relación con este aspecto.

> "*Si, porque al principio del problema dice que "un móvil viaja del punto A al punto B" o sea que ahí están afirmando que el móvil sí llega al punto B" (EU3)*

Respuestas de esta clase ponen en evidencia la naturaleza conflictiva de las intuiciones del infinito, al igual que la influencia de los lenguajes y contextos en las percepciones de los estudiantes (Garbín, 2005). Generando que se den este tipo de expresiones en donde se evade el concepto de infinito presentándose un análisis limitado y una inadecuada interpretación del enunciado.

Por otro lado, se observa que aún la capacidad para llevar a cabo un razonamiento que implique aspectos matemáticos un poco más elaborados, es limitada, de la misma forma que el concepto de infinito para algunos estudiantes aún no hace parte de sus conocimientos.

En cuanto a quienes contestaron ***no***, el aspecto común fue considerar que existen tantos puntos medios como se quiera de cada segmento resultante, reflejando que la idea de infinito potencial visto como un proceso en construcción es la que predomina en ese momento.
Sobre lo anterior se puede decir que "el infinito potencial es el infinito intuitivo: puedo seguir enumerando días y años indefinidamente sin problemas, esta idea de infinito es la que prevalece desde la intuición: lo infinito es infinito porque existe la posibilidad de seguir indefinidamente" (Lestón. 2007, p.70).

Por lo tanto si se considera la idea anterior no debemos extrañarnos con el hecho que gran parte del curso haya contestado que no, pues de cierta manera los estudiantes están en la capacidad de asumir el infinito potencial, al parecer la dificultad está en asimilar la existencia de un infinito actual.

> "*Yo pienso que nunca va a llegar a B porque según el proceso el móvil siempre va a buscar un punto medio a medida que avanza sobre el segmento, y como un segmento es un pedazo de línea, y una línea está formada por infinidad de puntos, el segmento también estará formado por muchos puntos de A a B, pero sin incluir el punto A ni el B en el proceso (EU2)".*

“Es imposible ya que en este segmento hallaremos puntos infinitos y por lo tanto siempre va a ser la mitad de la mitad y nunca se llegará al punto final (EU4)”.

Otros casos que se presentaron son aquellos en donde los alumnos a pesar de comprender el enunciado y los elementos inmersos en él, parece que no cuentan con conceptos matemáticos que le den validez a sus respuestas; ocasionando que se sientan inseguros y no justifiquen ampliamente sus razonamientos, lo cual genera en muchas ocasiones contradicciones en sus afirmaciones. Relacionadas con la imposibilidad de considerar un número infinito de puntos medios en un segmento finito.

*“*No *es posible ya que A y B son los puntos extremos del segmento y no es una línea infinita sino que tiene un inicio A y un final B y estamos buscando los puntos intermedios entre A y B sin incluirlos (EU5)”*

Como conclusión se puede corroborar que aunque los estudiantes tratan de incluir el concepto de infinito dentro de sus conocimientos matemáticos, la tarea no es fácil y siguen existiendo elementos alrededor del tema que van en contra de la razón. Generando confusión y dándole campo a las ideas intuitivas que prevalecen, aún cuando el docente haya tratado de mostrar el tema desprendiéndolo un poco de la realidad, utilizando más elementos matemáticos que intuitivos.

En este momento se empiezan a hacer evidentes las caracterizaciones que cada estudiante le otorga al concepto de infinito, al igual que la capacidad de razonamiento y argumentación de cada uno.

Por otra parte Tall (2001) y Dreyfus (1990), proponen cómo influyen las imágenes mentales y los esquemas conceptuales en la construcción y entendimiento de conceptos matemáticos como el infinito.

Lo anterior sustenta el planteamiento del segundo punto de nuestra prueba piloto, es decir, al pedirles a los estudiantes que comparen la cantidad de elementos de diferentes conjuntos, se observa que la percepción visual prevalece en la mente.

Al parecer como Fischbein (2001) propone, los estudiantes construyen modelos de acuerdo a la naturaleza finita de sus pensamientos, los cuales les permiten comprender y expresar mejor sus razonamientos.

En cuanto a las respuestas, en general la mayoría de los estudiantes consideraron la figura1 como una proyección y otros tantos percibieron el segmento $\overline{CD}$ como el mismo segmento $\overline{AB}$ pero a una mayor escala.

Inicialmente no consideramos este hecho, es decir, no era nuestra intención que lo vieran así. Sin embargo luego de analizar y fundamentarnos teóricamente sobre este tipo de razonamientos llegamos a la conclusión, que una forma de comprobar la correspondencia de los puntos en los segmentos es precisamente a través de la proyección central a partir del centro de proyección (ver fig. 1).

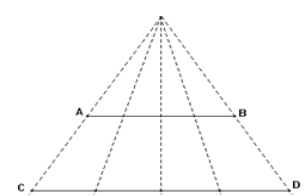


Figura 1.

Figura 1. (Tomada de Modelos Tácitos e Infinito. Fischbein (2001))

En esta situación podemos notar que por ejemplo, en temas complicados de enseñar y aprender como el infinito en nuestro caso, existen herramientas que permiten acercar la idea a los alumnos con conceptos que ellos entienden y por los cuales sienten cierta empatía. Esto fue lo que sucedió justamente con lo referente a las proyecciones; “por lo tanto debemos cuidarnos al no favorecer posturas cerradas y arraigadas que no permitan dar paso a lo infinito a partir de lo finito” (Garbín. 2005, p.173).

En este punto nuestras expectativas luego de analizar todas las respuestas fueron muy acertadas, ya que en primer lugar como lo intuíamos los estudiantes ya habían tratado el tema de proyecciones, lo cual contribuyó para que respecto a la figura 1 contestaran que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tenían el mismo número de puntos.

Sin embargo no fue claro el hecho que consideraran la infinitud de puntos en cada segmento, es decir, su percepción del infinito es muy débil. Dado que a pesar de contar con los conceptos matemáticos necesarios, lo cual ratificamos teniendo en cuenta que en el punto anterior algunos hablaban de la infinitud de puntos en un segmento, en este apartado se limitaron a analizar sólo la situación gráfica, considerando la longitud de los segmentos (uno más grande que otro) y otros asemejaron la figura 1 con un triangulo cuya base era el segmento $\overline{CD}$.

Teniendo en cuenta lo planteado por Fischbein (2001) parece claro que los estudiantes asumieron un modelo gráfico que ellos manejan y del cual pudieron destacar características que guiaron sus respuestas. Es decir, "los modelos pueden inspirar y apoyar correctas inferencias matemáticas en relación con algunas propiedades o teoremas, pero pueden llevar a conclusiones erróneas con respecto a los demás" (Fischbein, 2001, p.6), veamos algunas de las respuestas para continuar con el análisis:

> *"Sí representan el mismo número de puntos, ya que el segmento $\overline{CD}$ es una proyección ampliada del punto AB". Fig. 1.*
>
> *"El segmento $\overline{AB}$ no representa el mismo número de puntos del segmento $\overline{CD}$, ya que el segmento $\overline{AB}$ se encuentra dentro del segmento $\overline{CD}$, es decir $\overline{AB}$ es un segmento de $\overline{CD}$" Fig. 2.*
>
> *"El segmento $\overline{AB}$ representa el mismo número de puntos que el segmento $\overline{EF}$ ya que ambos tienen la misma distancia desde el punto de inicio hasta el punto final" Fig. 2. (EU1).*

En las respuestas de este estudiante, en primer lugar se evidencia que considera una proyección para responder el primer interrogante. Sin embargo su respuesta es corta y no sustenta el infinito como parte del ejercicio.

Además en la figura 2 es claro que su pensamiento no le permiten concebir que un subconjunto y el conjunto en el cual este está contenido tengan la misma cardinalidad. Por último, la tercera afirmación del estudiante refleja que en su mente el modelo que prevalece es el pictórico, al parecer para él los dos segmentos son iguales porque tienen la misma longitud.

Es precisamente en esta etapa en donde se deben identificar este tipo de contradicciones y errores para empezar a inducir al estudiante al proceso de transición del pensamiento matemático elemental (PME) al pensamiento matemático avanzado (PMA). Como Garbín (2005) menciona, en esta edad es donde prevalecen los esquemas finitos y concretos y es en este momento es donde el estudiante debe "abandonar" estos esquemas para entrar en el mundo de la infinitud incluyendo conceptos que aunque ajenos a su contexto son importantes en su formación matemática.

Como lo habíamos mencionado en el análisis a priori la relación del todo y una de sus partes es innegable en este caso. Sin embargo nunca consideramos que los estudiantes relacionaran los esquemas mostrados con figuras geométricas, limitando su análisis a considerar las medidas de las figuras que ellos vieron, negando nuevamente la infinitud de los puntos en la recta; estas son algunas de las respuestas:

> *"No son iguales ya que la figura es un triangulo y en un triangulo la base es mayor que el resto de segmentos horizontales del triangulo, así que no tienen el mismo número de puntos" Fig. 1.*
>
> *"Sí, la figura que se forma es un rectángulo $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tienen que ser iguales, púes un rectángulo está formado por cuatro segmentos, dos cortos y dos iguales, o sea y $\overline{EF}$ son iguales". Fig.2.*

"$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no son iguales, púes $\overline{CD}$ es el segmento sobre el cual se está graficando la figura y $\overline{AB}$ es una paralela a $\overline{CD}$, pero con las medidas o sea la misma cantidad de puntos que $\overline{EF}$". Fig. 2 (EU2).

Con base a estas respuestas se puede entablar la discusión de la equivalencia del todo y una de sus partes, si nos remontamos a la época de Euclides y suponemos que la figura mostrada en la prueba piloto es un triangulo, las respuestas mostradas evidencian que el estudiante concibe la idea que el todo es más grande que una de sus partes.

Sin embargo el concepto ha evolucionado y a lo largo de la historia se ha modificado, es así que en la actualidad se considera el infinito como un concepto matemático que posee ciertas características y propiedades, el cual se origina inicialmente mediante un proceso potencial en construcción, para llegar luego a un infinito actual que está asociado a la idea de totalidad.

Decir que la respuesta del estudiante está errada no es correcto, ya que si el tema no se ha estudiado sus fundamentos teóricos pueden ser limitados. Además este no es un concepto fácil de asimilar, a diferencia del infinito potencial, que se considera es una idea intuitiva, "el infinito actual es una noción contraintuitiva" (Garbín y Azcarate, 2001. Tomado de Garbín, 2005, p.174), y es precisamente eso lo que causa toda la controversia existente alrededor del tema.

En general las respuestas se enfocaron en representar las dos figuras por medio de modelos propios de los estudiantes, relegando su razonamiento a pensar de forma finita, considerando elementos como longitud de figuras geométricas, perspectivas, proyecciones y escalas, por lo cual al parecer le dieron más validez a la percepción visual que a un razonamiento abstracto.

El tercer problema buscaba comparar la cardinalidad de tres conjuntos y una de las principales hipótesis que se tenía era precisamente que los estudiantes se dejaran guiar por la impresión visual y contaran los elementos de cada uno de los conjuntos, hecho que efectivamente se presentó ; veamos una respuesta de este tipo:

> *"El conjunto A tiene 9 elementos… El conjunto B tienen 9 elementos… El conjunto C tiene 8 elementos… El conjunto con menos posibilidades de continuidad es el C pues tiene sólo 8 elementos" (EU6).*

Al parecer la intensión que teníamos cuando colocamos los puntos suspensivos no surgió el efecto esperado en todos los casos, ya que este estudiante no es el único que dio esta respuesta, muchos también coincidieron con ella.

Otro grupo de estudiantes avanzó un poco más en sus razonamientos encontrando las relaciones que se tenían en los tres conjuntos, especialmente entre los conjuntos B y C, contrario a lo que nosotras esperábamos, dado que lo que parecía evidente era la biyección entre A y B. Observemos:

> *"B y C tienen la misma cantidad de elementos; B = los números están simplificados ya que todos están elevados al cuadrado; C = los números ya están al cuadrado. Pero los dos conjuntos tiene la misma cantidad de elementos, sólo que están escritos de diferente forma matemática". (EU2).*

> *"El conjunto B y el conjunto C tienen las mismas cantidades porque el conjunto B es una forma de decir el conjunto C matemáticamente, en cambio el conjunto A no tiene la misma cantidad de elementos que el conjunto B o C, porque A no es una manera de expresar ni B ni C" (EU7).*

Respecto a este tipo de respuestas parece que los estudiantes tratan de establecer la biyección entre los tres conjuntos, sin embargo no justifican explícitamente sus razonamientos con argumentos matemáticos

De otro lado el hecho que un subconjunto de un conjunto infinito tenga tantos elementos como el conjunto del que hace parte no presenta claridad, dando validez este tipo de situaciones a aspectos ya mencionados como que la intuición y lo observado en el infinito generalmente falla.

Lo nuevo en este ejercicio lo aporta un estudiante que al parecer tiene un pensamiento matemático más avanzado, ya que en el transcurso de la aplicación de la prueba piloto ha expuesto de manera más elaborada sus respuestas. Garbín (2005) plantea que los estudiantes no mantienen una concepción del infinito a lo largo de sus respuestas, contrario a esto el estudiante (EU1) de nuestro trabajo muestra que percibe el infinito de manera potencial como un proceso en construcción, por tanto sus respuestas han mantenido esta concepción.

> *"Los conjuntos A, B y C tienen la misma cantidad de elementos en su interior ya que cada conjunto tiene una secuencia que tiende a ir hacia el infinito, A = B = C" (EU1).*

Si confrontamos esto con las teorías de los diferentes autores podemos detectar que respuestas de este tipo no son comunes. Sin embargo, citando a Garbín este estudiante se puede ubicar por la edad y por sus razonamientos en los inicios de una etapa de transición del pensamiento matemático elemental (PME) al pensamiento matemático avanzado (PMA). Dicho pensamiento matemático, si es explorado a tiempo de manera apropiada, puede empezar a convivir con conceptos matemáticos complejos como el infinito en la mente del estudiante, reduciendo así la discrepancia que hay entre el modelo intuitivo y el modelo matemático.

En el problema 3 se plantea la suma de los términos que aparecen al llevar a cabo el proceso respectivo en el problema 1, es decir, se muestra esta serie como la representación de la suma de los segmentos, resultado de divisiones sucesivas de un segmento AB en mitades.

Nuevamente como en la situación 1, nos encontramos frente a un proceso que involucra la subdivisión, hecho que según Núñez (1997), puede llevar a la concepción del infinito en lo pequeño, el cual es mucho más controvertido y esquivo que el infinito en lo grande.

Matemáticamente la serie planteada en el ejercicio 3, es "igual" a 1, sin embargo, esta serie psicológicamente "tiende" a 1, (Fischbein, 2001. Tomado de Garbín, 2005, p.62).

Las respuestas de los estudiantes en su mayoría no nos sorprendieron, ya que en general lo que hicieron fue hallar el resultado finito con los términos que se les mostraban, es decir, escribir que la suma era igual a $\frac{63}{64}$. Esto no tiene relación con lo que realmente nosotras estábamos buscando, debido a que la intención era inducirlos, por un lado a detectar cómo haciendo operaciones se puede considerar el infinito como parte de la respuesta, y por otro, queríamos identificar si en ese momento se consideraba el infinito en lo pequeño.

Cabe resaltar que como es de esperarse, la idea intuitiva de un infinito potencial prevalece, púes es más fácil imaginarse secuencias que no terminan que comprender que el todo y una parte de él sean equivalentes; en la siguiente respuesta el estudiante con su razonamiento muestra precisamente este hecho. Sin embargo no profundiza en lo que realmente le mostraba la situación 1, ya que sólo se fijo en el crecimiento del denominador de las fracciones y no considero el fraccionario en su totalidad:

> "$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64} \rightarrow \frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}\ldots$ *El resultado no es ninguno porque la secuencia nunca termina por lo cual no le podemos dar resultado" (EU8).*

Al parecer en esta respuesta el estudiante niega la posibilidad de sumar, debido a que los términos no se agotan. Por lo tanto, parece que este no concibe la idea que una suma de términos infinitos tenga un resultado finito. Respuestas de este tipo se encontraron también en Garbín (2005), en donde 2 de los estudiantes afirman que el valor de esta suma no se puede determinar por la infinitud con que es presentada.

Otro tipo de respuestas dadas, fueron aquellas en que la idea intuitiva del infinito potencial prevaleció, sin embargo a pesar que este estudiante es de undécimo grado refleja una idea muy fina de lo que matemáticamente se conoce como límite.

> *"El resultado sería un número decimal lo más aproximadamente posible al uno, ya que siguiendo esta secuencia el número que da el resultado va a ser la mitad del resultado anterior, por ejemplo:* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=0.5+0.25+0.125$, *es decir, esta secuencia tiende hacia al infinito y no va a ser posible continuarla, el número sería* $0.9\overline{99}$*" (EU1).*

Como se puede observar el estudiante no manifiesta haber percibido la relación que existe entre esta serie y los términos que aparecían luego de realizar cada iteración en el ejercicio 1 de la prueba piloto. De igual manera su aparente percepción del infinito no se mantiene, ya que al parecer en el primer ejercicio lo concibió como un proceso completo, mientras que en este, aunque al principio da la impresión de verlo nuevamente como un proceso terminado, al final contradice su respuesta y no llega a ninguna conclusión.

En cuanto a esta situación Garbín (2005), plantea que en la mayoría de los casos los estudiantes perciben y muestran en sus respuestas una concepción del infinito que no se mantiene a lo largo de las preguntas, sin embargo, la idea de completes del proceso es aceptada.

En esta experiencia, a partir de las respuestas obtenidas, se presenta la validez de las contradicciones que el concepto de infinito genera en las soluciones de los estudiantes. Aunque ellos tratan de ver el infinito y lo entienden como algo incontable, a la hora de ejemplificarlo con elementos finitos, sus ideas empiezan a enfrentarse unas con otras y en muchas ocasiones los estudiantes prefieren contestar con términos matemáticos conocidos que arriesgarse a contar lo que realmente están pensando.

El problema cuatro fue respondido de la manera esperada en la mayoría de los casos. Fueron muy pocos los estudiantes que no respondieron la pregunta y un sólo caso en donde el estudiante se limitó a decir que el infinito era algo desconocido.

Otros, lo relacionaron con el amor que sienten por sus padres, Dios y las personas que los rodean, la profundidad del mar, los números, la naturaleza, los sentimientos, el universo y otras comparaciones que se hicieron en cuanto al concepto. En el campo matemático también algunos evidenciaron que existen elementos relacionados con el término.

Por ejemplo, las siguientes respuestas aunque la primera es un poco confusa, muestran que es más fácil asegurar que algo sea infinito si se habla en términos matemáticos. Al parecer el concepto parece más adecuado y hay menos temor a equivocarse.

Además las experiencias que los estudiantes han tenido con los conceptos que el profesor ha trabajado acerca del tema influyen en el pensamiento del estudiante a la hora de responder al cuestionamiento planteado.

> *"Todas las cosas de la vida se relacionan con el infinito, ya que las tomo como un segmento en el tiempo y ese segmento tiene infinitos puntos" (EU4).*
>
> *"Para mí sólo dos que son el universo y los números porque a lo largo de mi vida he notado que es imposible saber que tan grande es el universo y es lo mismo con el caso de los números, nunca sabremos cual es el último número" (EU1).*

Consideramos que este tipo de respuestas está muy relacionado con el contexto académico en el que se realizó el diagnóstico. Como se puede ver las ideas de los estudiantes obedecen a ideas potenciales del infinito como "lo que continua por siempre" ya sea por la imposibilidad de percepción por medio de los sentidos o por la posibilidad de encontrar un "siguiente" que permanece en la mente de los estudiantes por el conjunto de los números naturales.

Para finalizar la primera parte de la prueba piloto y considerando que los estudiantes se encuentran en la etapa de transición del PME al PMA, a la cual se hace referencia en el marco teórico, podemos concluir que las ideas intuitivas y el pensamiento finito permean los conocimientos matemáticos que se relacionan con el tema, generando confusión y contradicciones en las respuestas.

Por otro lado, se detectó una idea de infinito que no se mantiene en las respuestas de los estudiantes, ya que en algunas perciben el infinito como un proceso terminado y en otras prevalece la idea de infinito potencial.

Adicional a estos hechos, se detectó que en general los estudiantes de undécimo grado a quienes les aplicamos la prueba piloto, usan pocos argumentos matemáticos y en ningún caso nombran en sus respuestas conceptos como límite, sucesiones o series.

Sin embargo, el panorama no es tan oscuro, dado que por lo menos para la mayoría de los estudiantes desarrollar una actividad en donde el principal tema era el infinito no significó un obstáculo, sino que lo trabajaron en la medida de sus capacidades y sus conocimientos. Por el momento esperamos analizar los resultados del curso de cálculo II para identificar si de una etapa del pensamiento a otra hay cambios significativos.

La segunda parte de la prueba piloto consistió en proponer a los estudiantes la paradoja del hotel de Hilbert con el fin que en parejas discutieran la situación. Es conveniente recordar que esta paradoja muestra una característica de los conjuntos infinitos que se opone a la razón, es decir, para nuestro pensamiento finito no es fácil asimilar que a un conjunto se le agreguen más elementos y la cantidad no varié.

Sobre esta paradoja se encontraron dos tipos de respuestas comunes, aquellas en donde los estudiantes negaron la posibilidad de ubicar nuevos huéspedes. Especialmente en la segunda situación, púes para ellos se hace difícil creer que en un hotel en donde los cuartos están todos ocupados se pueda acomodar más gente; aún cuando son infinitos. Algunas respuestas de este tipo fueron:

“Al nuevo huésped sí, pero un huésped que ya estaba hospedado quedaría sin habitación”

“No se puede plantear otra forma, pues dice que todos los cuartos están ocupados y al tratar de acomodar a un nuevo huésped quedaría una persona que ya estaba hospedada sin habitación” (situación uno, EU9, EU10)

“En la situación dos, no es posible puesto que el hotel está ocupado y para ubicar a los nuevos huéspedes habría que sacar a la misma cantidad de huéspedes para poder acomodar a los otros” (situación dos, EU11, EU12)

“No porque tendría que dejar los antiguos huéspedes sin habitación; poner en las habitaciones dos personas sean nuevos o antiguos” (situación dos, EU7, EU13)

Este tipo de respuesta niega totalmente la existencia de un infinito actual cuya principal característica es precisamente que el todo y una de sus partes son equivalentes. Al parecer la finitud de las cosas prevalece en la mente de los estudiantes, limitándolos a no detectar que aún cuando los cuartos estén ocupados en su totalidad se pueden ubicar más huéspedes ya que en el campo de la infinitud esto es posible.

En otro tipo de respuesta se ubican aquellas en donde los estudiantes consideran especialmente el infinito potencial y sus características, aún cuando a lo mejor no han tratado el tema, es decir, le atribuyen propiedades que matemáticamente son correctas pero lo hacen desde la intuición. Veamos:

“Sí es posible que acomode a los nuevos huéspedes ya que los cuartos son infinitos y nunca se acabaran” (situación uno, EU14, EU15)”

“Sí, sin necesidad de que los antiguos huéspedes tengan que cambiar de cuarto, si no que los que llegan se acomoden en los últimos cuartos que están desocupados” (situación dos, EU5, EU6)”

En vista a las anteriores respuestas cabe destacar que la idea del infinito potencial se mantiene, es decir, para ellos es posible ubicar a los huéspedes dado que los cuartos “nunca se acabarán” aún sin tener en cuenta lo que sucede con la cantidad de personas alojadas y aquellas que vienen en busca de una habitación.

Como ya se ha mencionado “no es lógico que a un conjunto se le agreguen más elementos y la “cantidad” de elementos no varié” (Lestón, 2005, p.70), esta situación es precisamente la que manifiestan algunos estudiantes en sus respuestas, hecho que no se esperaba ocurriera y que se muestra a continuación:

> *“Sí es posible pero se emplea una problemática, que el hotel tendría un infinito+1 de habitantes”; “El infinito, no es tan infinito, pero es infinito”; “Que el número infinito se le es posible agregar otro número infinito” (EU4, EU16).*
>
> *“Puede que sea posible ya que es un hotel con habitaciones infinitas y todas no pueden estar llenas, porque son infinitas y si es necesario aparecerían mas habitaciones para más huéspedes, y así seguir siendo infinitas. Además también esto es una contradicción ya que le están dando un valor al infinito el cual no se conoce, “llenar algo infinito con algo infinito”. (EU1, EU17)*

Al parecer los estudiantes le atribuyen propiedades de los conjuntos finitos a la situación y esto es una manera acertada de analizarla, probablemente ellos identificaron puntos de vista que según la teoría son comunes; lo cual conduce a pensar que la evolución del concepto de infinito sigue congelada en la clase de matemática.

Para finalizar se retoma el cuestionamiento hecho en el análisis a priori acerca de si los estudiantes, ¿contextualizan la situación con la vida real (lo finito) o se la imaginan y dan respuestas refiriéndose al infinito?, claramente las dos situaciones se dan. Como ya se mostró algunos estudiantes evocan la realidad para dar sus respuestas mientras que otros hacen uso de su imaginación y capacidad de abstracción, considerando en particular el infinito potencial como parte de sus explicaciones.

Curso cálculo II:

Antes de empezar a examinar las respuestas de los estudiantes de cálculo II, recordemos que previamente se ha hablado de la transición de un pensamiento matemático elemental (PME) a un pensamiento matemático avanzado (PMA).

Donde “la distinción de una etapa a la otra es la complejidad y la frecuencia del uso de ciertos procesos, como los de representación, traslación, abstracción, deducción, entre otros; al igual que el nivel educativo como los cursos preuniversitarios o universitarios” (Garbín, 2005, p.171).

En vista a lo anterior esperamos que los estudiantes se encuentren en etapas avanzadas de este proceso de transición, pues la formación matemática que hayan tenido hasta el momento resulta ser una variable importante en su comprensión del concepto de infinito, seguida del avance en sus programas profesionales.

En cuanto al primer problema , Núñez (1997) plantea que la paradoja de Zenón, mostrada como un proceso de subdivisión, incorpora simultáneamente diferentes tipos de iteraciones (divergente y convergente) y diferente naturaleza de contenido (cardinalidad y espacio), refiriéndose estos dos componentes al número de pasos y a la distancia cubierta por estos pasos respectivamente.

En este problema se dieron dos tipos de respuestas, aquellos estudiantes que respondieron no (29 de 40), y quienes respondieron si (11 de 40). Sin embargo las respuestas contrario a lo que se esperaba fueron en su mayoría muy puntuales, ya que se limitaron a escribir por ejemplo: *“No, porque B no puede ser punto medio”*. En estos casos no encontramos elementos para analizar, contrario a los resultados encontrados en los estudiantes de colegio en donde los jóvenes trataron de explicar ampliamente sus respuestas.

Se detecta que algunos estudiantes universitarios no conciben aún los procesos infinitos como parte de la vida real, es decir, al igual que en el colegio, continúan considerando conceptos como el movimiento, la distancia y el tiempo, con lo cual reducen los problemas a realidades finitas; obsérvese la siguiente respuesta:

> *“Si pasa por el punto B, puesto que en ningún momento se detiene” (EC1).*

Es un hecho que los pocos estudiantes que contestaron que el móvil llegaba al punto B, redujeron la situación a limitar el problema a factores como tiempo y distancia, evadiendo términos como límite y sucesiones, que podían ser adecuados en la solución. Es decir, sus argumentos obedecen a nociones intuitivas, sin que emerja de manera natural el uso de conceptos matemáticos.

Por otro lado, otros tipos de respuesta reflejaron que al parecer nuestra mente es esencialmente adaptada a la realidad finita en espacio y tiempo. “Nuestra lógica con todas sus leyes, sólo puede manejar constantemente los conceptos que expresan realidades finitas” (Fischbein, 2001, p.1). Por ejemplo en la siguiente respuesta claramente se ve que el estudiante reduce el problema a un modelo mental finito que le facilitó dar sentido a su respuesta:

> *“Sí, matemáticamente se creería que nunca llegaría, porque la división de los segmentos se haría infinita, pero físicamente sí porque es lo real, si tomamos* $\overline{AB} = 10\ km$ *la mitad sería* $5\ km \rightarrow\ 2.5\ km \rightarrow 1.25\ km$ *y finalmente la división se haría llegar hasta cm y casi despreciable” (EC2).*

Este caso es un claro ejemplo de la teoría que Fischbein (2001), plantea acerca que los estudiantes deben recurrir a modelos mentales sencillos, que les faciliten entender situaciones en donde se exige utilizar el pensamiento abstracto. El cual, no está basado en la experiencia directa con la vida real.
En cuanto al proceso de convergencia planteado por Núñez (1997), al parecer el estudiante detecta que la distancia se reduce cada vez más acercándose a algún punto, sin embargo sus razonamientos no son del todo claros.

Además se puede notar que aún cuando las personas son conscientes de las diferencias que hay entre el pensamiento matemático y el pensamiento intuitivo se siguen mezclando estos dos, encontrando contradicciones en sus razonamientos. Esto, como ya se había mencionado se relaciona con lo planteado por Fischbein

(2001), sobre los modelos tácitos que sobre los conceptos matemáticos construimos los individuos para eludir aquello que consideramos muy complejo por su nivel de abstracción.

Si tenemos en cuenta que comúnmente en la clase de matemáticas aunque se menciona no se profundiza en el concepto de infinito, podemos inferir que este puede ser un grupo de estudiantes que como la mayoría en la universidad se acerca a él. Siendo el infinito no formalizado y cuya intuición respecto a este es la que entra en juego, tanto antes como después de haberse introducido conceptos formales del cálculo diferencial e integral.

Este aspecto explica la razón por la cual las respuestas en el curso de cálculo II vienen dadas mediante términos matemáticos más formales. Es decir, los estudiantes universitarios hablan de límite, acercamiento, densidad de números reales, punto extremo, intervalos y otros conceptos, que aunque se tratan al parecer la concepción informal de estos prevalece, pues sus argumentos no son lo suficientemente fuertes para una sustentación matemática clara.

> *"No, ya que la distancia se mide en números reales y estos son un conjunto de densidad infinita" (EC3).*
>
> *"Si seguimos esta secuencia podríamos llegar a pensar que siempre existirá un intervalo o segmento al cual podemos hallar un punto medio y así sucesivamente; esto nos lleva a recordar la densidad de los números y la definición de límite, nos acercamos a B pero nunca llegaremos a B" (EC4).*

La anterior respuesta, refleja que el estudiante realiza un juego de términos que en definitiva se muestran contradictorios y no llevan a una respuesta concreta.

> *"El móvil nunca va a alcanzar el punto B, va a quedar extremadamente cerca pero nunca logrará tocar el punto. Se puede aproximar por un límite" (EC5).*

En este caso, como se esperaba el estudiante considera términos matemáticos más formales como es el caso de límite, donde al parecer él asocia la idea de límite con un proceso de acercamiento que no es terminado.

Como se ha mencionado a lo largo del trabajo las contradicciones son habituales cuando lo que se está tratando de justificar son situaciones que se refieren al infinito. Lo cual se muestra en la siguiente respuesta, ya que el estudiante aunque es consciente del papel que juega el concepto matemático en la solución del ejercicio no puede desligarse de lo que percibe en cuanto a la realidad.

> *"No es posible, porque entre el punto A y el punto B hay infinitos puntos, así que por más que se acerque, realmente nunca va a ser el punto B exactamente, va a llegar a ser muy cercano. Sin embargo, si el automóvil está en constante movimiento o sea de que llega al punto B obvio que llega, pero si analizamos esto por puntos medios matemáticamente diríamos que no, ya que entre estos dos puntos hay infinitos puntos" (EC6).*

En conclusión este problema muestra que aún cuando se cuenta con un fundamento matemático más avanzado, las contradicciones y confusiones que a lo largo de la historia han existido alrededor del infinito potencial y actual permean el pensamiento de los estudiantes, impidiéndoles avanzar en la comprensión de dichos conceptos. Esto se manifiesta en sus razonamientos y formas de explicar las situaciones a las que se enfrentan, lo cual se puede explicar desde la realidad psicológica del ser humano. Además en el desarrollo histórico del concepto los matemáticos que han abordado el tema también han experimentado este tipo de contradicciones.

En el ejercicio 2a, contrario a lo que se esperaba los estudiantes pusieron de manifiesto el poco dominio de conceptos geométricos, pues en general sus respuestas no difirieron significativamente de las respuestas encontradas en los estudiantes de último año de secundaria. Es más, algunos fueron limitados y reflejaron un modelo pictórico más arraigado.

En cuanto al infinito, otros detectaron que hacia parte del problema, sin embargo prevalece la concepción de un infinito en formación que crece y crece sin parar, evitando que se logre considerar la equivalencia entre conjuntos como método para la solución del ejercicio. Se encontraron respuestas como las siguientes:

> *"Cualquier segmento de recta está formado por una sucesión infinita de puntos. Partiendo de esto digo que el segmento $\overline{AB}$ tiene ∞ puntos y el segmento $\overline{CD}$ tiene ∞ puntos; todos tienen el mismo número de puntos" (EC2).*
>
> *"El segmento $\overline{AB}$ está formado por infinito número de puntos, el segmento $\overline{CD}$ también está formado por infinito número de puntos, así que si; en la figura dos el segmento $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ representan el mismo número de puntos, ya que si tomamos la definición de línea como la unión de infinitos puntos los segmentos serian o tendrían el mismo número de puntos" (EC6).*

Para Garbín (2005), los estudiantes entre los 16 y 20 años de edad, en que no se les ha formalizado el infinito cantoriano, a pesar de tener conocimientos de cálculo diferencial e integral, no necesariamente perciben al infinito en algunas situaciones como acabado y los límites alcanzados. Sin embargo en otras situaciones si aceptan la completes del proceso. Esto está muy ligado a la representación de la situación y al foco de atención que los estudiantes mantienen. Siendo a lo mejor ésta la razón por la cual en la prueba piloto se obtuvieron respuestas en donde los estudiantes centraron su atención en las figuras (triángulo, rectángulo) que según ellos veían, dando explicaciones en torno a ello y justificándolas con términos matemáticos que conocían:

> *"Sí aunque el segmento $\overline{AB}$ es más corto que el segmento $\overline{CD}$ como se trata de un triangulo, tocará los mismos puntos" (Fig. 1|)*
>
> *"Sí, el segmento $\overline{AB}$ es igual de largo que el $\overline{EF}$ y como forma parte del rectángulo, tocará todos los puntos que el segmento $\overline{CD}$" (Fig. 2) (EC7)*

Lo que se percibe visualmente sigue siendo determinante en las respuestas de los estudiantes, al igual que el representar las situaciones con sucesos de la vida real, es decir, el modelo mental pictórico que Fischbein (2001) menciona es evidente:

> *"No, visualmente se puede ver que el segmento $\overline{AB}$ es de longitud menor y el segmento $\overline{CD}$ es de longitud mayor, es decir, si $\overline{CD} > \overline{AB}$ significa que el $\overline{CD}$ tiene un conjunto de puntos mayor al conjunto de puntos de $\overline{AB}$" (Fig.1) (EC8).*

> *"No, la longitud de $\overline{AB}$ es menor que la de $\overline{CD}$ si tomamos la línea como una sucesión infinita de puntos. Pero si es una gráfica de perspectiva donde se viera por ejemplo una carretera que se extiende tanto que sólo vemos el final como un punto, de ser así $\overline{AB}$ mediría igual que $\overline{CD}$ aunque, el tamaño de puntos es tan variable que se podría decir que no tiene el mismo número de puntos" (EC2).*

Considerando que la intención de este ejercicio era detectar qué tan familiarizados se encontraban los estudiantes con una idea del infinito actual luego de pasar por un curso de cálculo I y parte de cálculo II, se concluye que aún cuando se manejan conceptos matemáticos nuevos y más elaborados que los trabajados en undécimo grado, los argumentos usados en las respuestas no han tenido un avance significativo que muestre el infinito comprendido de manera más clara en estudiantes universitarios de primer año.

Continuando con este orden de ideas, en el segundo ejercicio buscábamos identificar cómo los estudiantes comprenden una de las principales características del infinito actual, siendo esta que el todo y una de sus partes son equivalentes.

En el problema 2b sorprendentemente al revisar una a una las respuestas, se vio que contrario a lo que pensábamos gran parte del grupo contó los elementos de cada uno de los conjuntos sin considerar el propósito de los puntos suspensivos. Esto comparado con los estudiantes del colegio sucedió en menor cantidad; lo que nos lleva a cuestionarnos si en realidad estos estudiantes han avanzado en esa etapa de transición del PME al PMA.

> *"A, B y C todos tienen diferente cantidad de elementos, el conjunto A tienen 9 elementos, el conjunto B tiene 10 elementos y el conjunto C 8 elementos" (EC9).*
>
> *"Los conjunto A y B tienen los mismos elementos 9 en total, ya que el conjunto B tiene todos los elementos al cuadrado, pero si se resuelve quedan 9 en total y el C tiene 8" (EC10).*

Respuestas como las anteriores ilustran lo mencionado y a la vez recalcan que un primer obstáculo en este tipo de problemas lo encontramos en la "idea" de los números naturales como un conjunto infinito con infinitos elementos, construible a partir de la posibilidad de añadir uno más. Esto resulta útil para construir una idea sobre cardinal, en conjuntos finitos, como el número de elementos de un conjunto que se halla a partir del conteo uno a uno. Sin embargo dicho conocimiento es un obstáculo para la construcción de cardinales infinitos (Rojas, Bonilla, & Romero, 2004, p.33).

Otro tipo de respuesta en la cual los estudiantes coincidieron fue en considerar que los conjuntos tenían infinitos elementos, sin embargo era más evidente que la cardinalidad de B fuera igual a la cardinalidad de C, justificando esto al negar que un subconjunto pueda ser equivalente con el conjunto que lo contiene.

> *"A primera vista todos los conjuntos tienen infinitos elementos, pero si observamos B y C son subconjuntos de A, por lo tanto A contiene a B y contiene a C y sobran elementos, por esto A es más grande que B y C; si miramos B y C vemos que los elementos de C son iguales a los de B, por lo tanto diremos que el tamaño de B es igual al tamaño de C" (EC4)*
>
> *"Creo que todos tienen igual número de elementos (infinito) los puntos suspensivos hacen creer que continua la secuencia y por ende el conjunto se hace imposible de contar. Caso contrario si el conjunto fuera cerrado A = {1,2}" (EC2)*

Las dos respuestas anteriores tienen en común el hecho que los estudiantes evaden la relación de equivalencia entre conjuntos como posible solución a este planteamiento, al igual que mantienen en sus razonamientos una idea de infinito potencial, como un proceso inagotable.

Por otro lado, los dos razonamientos anteriores coinciden con algunos aspectos considerados en el análisis a priori, ya que por un lado los estudiantes identificaron la intención de colocar puntos suspensivos en la formulación del problema. Y por otro, evidenciaron la equivalencia entre B y C y finalmente colocaron en tela de juicio la relación que puede existir entre un subconjunto y el conjunto que lo contiene, cuando se trata de conjuntos con elementos infinitos.

Además aparecieron respuestas en donde los estudiantes le atribuyeron características y propiedades al infinito para poder sustentar sus explicaciones. Veamos:

> *"Los tres tienen la misma cantidad de elementos si decimos que $\infty = \infty$" (EC4)*

Este tipo de respuestas refleja que al parecer se concibe que todos los infinitos son iguales entre ellos; para la mayor parte de los sujetos que hacen esta consideración o consideraciones similares, el infinito es visto como una entidad numérica que no puede ser precisada, es más una forma de decir, que un objeto posible de objetivación matemática (D´Amore, Arrigo y Rojas, 2006).

> *"Todos los conjuntos tienen infinitos elementos, pues siguen un patrón pero el infinito en cuanto a cantidad, si se puede cuantificar el infinito seria mayor cantidad de elementos en A y B que en C, pues en C se saltan por la secuencia algunos elementos" (EC5).*

Sin embargo, como Fischbein menciona las cosas no son tan simples, la justificación de que todos los conjuntos sean equivalentes no radica en el hecho que sigan una sucesión infinita, ya que pueden existir dos conjuntos infinitos a la vez, y sin embargo, no ser equivalentes. Por ejemplo, Fischbein (2001), menciona que el conjunto de los números naturales y el conjunto de puntos en un segmento de recta (o en una línea), aunque son infinitos no son equivalentes lo cual fue demostrado por Cantor.

Esto nos lleva a concluir que intentar resolver el planteamiento de una forma intuitiva empleando términos matemáticos no siempre es útil, ya que no es cierto que el infinito sea igual al infinito en todos los casos.

La siguiente es la respuesta de una estudiante que vale la pena mostrar, pues al parecer identificó la relación uno a uno entre los conjuntos B y C, relacionando los elementos como aparece en la imagen. Hecho que no se presentó ni con sus compañeros de curso, ni con los estudiantes de undécimo grado.

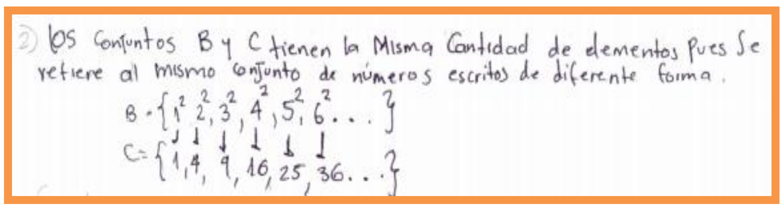


Figura *5: (correspondencia entre los elementos de dos conjuntos, mostrada por un estudiante del curso de cálculo II).*

En cuanto a los demás conjuntos, este mismo estudiante no identificó la relación dada entre los elementos.

En resumen, en el segundo ejercicio sólo queda resaltar la diferencia que existe entre los conceptos aprendidos y enseñados por la matemática formal y aquellas interpretaciones que cada uno de los estudiantes hacen de ellos.

Para la suma planteada como tercer punto de la prueba, se encontraron variedad de soluciones en donde algunas hacían referencia al infinito como solución. Otras en cambio, hablaban de sucesiones y sólo una fue planteada como la suma de números fraccionarios, caso muy similar a las respuestas encontradas en los estudiantes de último año de secundaria.

> *“$\frac{63}{64}$ tomando el máximo común divisor del denominador siendo 64, entonces se procede a hacer la suma de fraccionarios” (EC11).*

> *“Es una sucesión de $\frac{1}{2^{n}}$ con n mayor que 0, como no nos da un límite de hasta dónde va n el resultado sería infinito” (EC7).*
>
> *“Infinito es el resultado ya que los puntos nos indican que se seguirán sumando valores” (EC9).*
>
> *“Parece que la suma tiende a uno ya que se mueve de 0.5 y aumenta gradualmente hasta la mitad idéntico a la definición de limite por lo tanto la suma se aproxima a uno, pero nunca es uno” (EC4)*

Recordemos que esta suma de series infinitas conduce a un número finito, pero existen contradicciones alrededor de ella dado que es incomprensible que algo a lo que se le agrega cierta cantidad constantemente dé como resultado un número finito.

Para Núñez (1997), esta serie es un ejemplo interesante para estudiar los procesos cognitivos subyacentes a la noción de infinito en lo pequeño.

Al igual que en los planteamientos de Fischbein (2001) muy pocos, por no decir ninguno, de los estudiantes propusieron concretamente que la suma es uno; utilizaron términos como tiende, se acerca, se aproxima, pero no aseguraron que este fuera el resultado (Fischbein, Tirosh & Melamed, 1981. Tomado de Fischbein 2001, p.12).

Esto pone de manifiesto que a pesar de conocer elementos matemáticos formales y más avanzados nuestra capacidad humana no está del todo preparada para asumir lo que realmente significa el infinito con todas sus características. Al parecer estas ideas se relacionan con algo que sucederá pero en un tiempo futuro, donde en la construcción de procesos iterativos infinitos lo potencial prevalece.

Dando paso al ejercicio cuatro y finalizando la primer parte de la prueba piloto, es necesario decir que esta pregunta trata específicamente de la ideas del infinito que los estudiantes relacionan con su vida.

Tal y como se esperaba, las ideas acerca que el infinito se relaciona con el amor a los seres queridos, las estrellas, el universo etc., en el curso de cálculo II aunque se dieron, disminuyeron notablemente. Sin embargo lo sorprendente es que casi la mitad del grupo no contesto la pregunta y otros manifestaron no haberla entendido, al parecer hay un temor de ser cuestionados por sus respuestas, pues probablemente existen tabús que consideran que estando en un curso de cálculo II estas ideas deben ser más precisas, lo cual pudo ser un limitante.

Por otro lado quienes contestaron, evitaron utilizar términos matemáticos específicos, algunos estudiantes relacionaron el infinito con la matemática pero de una manera general sin entrar en detalles:

> *"Creo que las que más se relacionan son las matemáticas en general" (EC12)*
>
> *"la cantidad de estrellas en el cielo, lo que estudio… las matemáticas" (EC13)*
>
> *"Lo que tiene que ver con crecimiento de poblaciones" (EC9)*
>
> *"El tiempo que no tiene un límite establecido" (EC7)*
>
> *"Con el infinito y mi vida está relacionado el número de células que pertenecen a mi cuerpo ya que son diminutas, infinitas y cada segundo que pasa se multiplican" (EC3)*

Como se puede ver prevalece la idea de un infinito en crecimiento que no termina, como ha explicado Fischbein, "este concepto potencial de infinito es el que responde a la interpretación intuitiva" (Fischbein 1982. Tomado de Garbín 2005, p.63), negando que los estudiantes conciban el infinito como un todo o una cantidad que tiene ciertas características y propiedades importantes en el estudio de las matemáticas.

Ejercicio 5: Paradoja del hotel de Hilbert

La paradoja del hotel de Hilbert pretende enfrentar al estudiante con la idea del infinito, mostrando una situación en donde las concepciones de dicho concepto en su dualidad actual y potencial juegan un papel importante. Los dos hechos expuestos muestran una contradicción, que tiene inmersos elementos matemáticos, los cuales pueden conducir a una reflexión que arroje resultados significativos para el estudiante, pues es en este momento donde su capacidad de abstracción y argumentación juegan un papel importante.

En este ejercicio la mayoría de las respuestas se inclinaron a afirmar que en las dos situaciones se podían acomodar los huéspedes. Encontrando variedad de explicaciones y contradicciones en los razonamientos expuestos por las parejas de estudiantes:

> *"Esta situación genera una paradoja debido a que la cantidad infinita es incontable, sin rango, sin proporción por lo cual sí es posible que el propietario del hotel acomode a los nuevos huéspedes" (situación uno).*
> *"Como se dijo en la situación anterior la cantidad infinita no tiene proporciones, por lo cual es posible acomodar un grupo infinito de huéspedes en infinitos cuartos" (situación dos)*
> *"se dejan los huéspedes antiguos como están y acomodar los huéspedes nuevos en los cuartos infinitos siguientes" (razonamientos) (EC1, EC8).*

Pareciera que los estudiantes anteriores asumen, el infinito como un objeto sin proporciones, sin medidas, es decir, es visto como una cantidad. Sin embargo no le atribuyen características de un elemento matemático y la idea de interminable se mantiene. Aún cuando las condiciones del problema plantean que el hotel está lleno. Siendo este un obstáculo ligado a la imposibilidad de aceptar como nuevo conocimiento la existencia de otros números transfinitos, y reconocer la existencia de una regla diferente a la de uno más, para construir el siguiente de un numero, es decir, una regla que simultáneamente haga posible construir y ordenar (Bonilla, Romero y Rojas, 2004, p.32).

La siguiente respuesta cuenta con una característica importante que durante el proceso de aplicación de la prueba piloto muy pocos manifestaron claramente, donde hay conciencia de la diferencia que hay entre la teoría y lo que sucede en la vida real:

> *"Teóricamente sería posible para ambos casos, en lenguaje matemático para cada número infinito le asigna otro número infinito pero físicamente en el contexto de lo terrenal no es posible" (situación uno)*
>
> *"De las dos formas es igual, cuadrando de 1 a 1 hasta infinito, de par en par hasta infinito, de impar a impar hasta infinito, o de 5 a 5 hasta infinito viene siendo igual cambiando los afectados huéspedes así que no podemos plantear otra forma porque todas son iguales"(situación dos)*
>
> *"No importa cuántos huéspedes desee hospedar siempre va a ser igual; Si el infinito fuera palpable el hotel nunca tendría ningún inconveniente; nada cambia si los huéspedes y los cuartos son infinitos, solo cambiaria si los cuartos fueran finitos" (razonamientos) (EC2, EC7).*

En esta respuesta se detecta que para los estudiantes es relevante o que los cuartos son infinitos, es decir, prevalece la idea de infinito potencial, la cual en todos los razonamientos hechos por ellos hasta el momento se ha mantenido.

Por otro lado lo que no es del todo claro es la forma en que los estudiantes están viendo el infinito, ¿Cómo un todo?, ¿Cómo elemento matemático que se puede operar?; interrogantes de este tipo esperamos se puedan despejar en la siguiente etapa expuesta en la metodología de este trabajo.

Con este orden de ideas hemos finalizado el análisis a posteriori de la prueba piloto que constituye la primera etapa del trabajo, en donde se recogieron todas las ideas que sobre el infinito desarrollan los estudiantes que se encuentran en la etapa de transición del colegio a la universidad y aquellos que están viendo un curso de cálculo II.

Estas ideas van a ser la guía y herramienta más fuerte a la hora de llevar a cabo las entrevistas con los estudiantes, quienes también han sido seleccionados en la primera etapa del trabajo.

Conclusiones Primera Etapa: Prueba Piloto

A pesar de tener una idea aunque sea vaga del infinito, para los estudiantes es difícil apropiarse y aceptar el concepto con sus características. Especialmente cuando se trata del llamado infinito actual, pues aún en la universidad no es claro que el todo y una de sus partes sean equivalentes o que un subconjunto y el conjunto que lo contienen tengan una relación de equivalencia, es decir, lo visual y los modelos mentales pictóricos prevalecen en la mente de los estudiantes.

Por otro lado, la percepción finita del mundo que nos rodea se sobrepone a la abstracción de elementos que es necesaria cuando hablamos de conjuntos infinitos; para los individuos resulta más sencillo y cómodo representar los ejercicios por medio de situaciones finitas y palpables que hacer conjeturas acerca de algo abstracto como lo es el infinito.

Finalmente, no es del todo cierto que pertenecer a un curso superior o de un nivel más alto garantice que el concepto de infinito sea asimilado exitosamente. Las respuestas evidenciaron que aún cuando se posean conceptos matemáticos más formales la capacidad de razonamiento y sustentación respecto al tema puede ser la misma en un estudiante de undécimo grado y uno del curso de cálculo II. Lo que indica que en algunos casos el avance del PME al PMA no se ha dado y que la mayoría aún esta es la etapa de transición. Se percibe más un uso de términos que una comprensión verdadera de los conceptos que han sido tratados a nivel universitario.

4.4 Etapa II: Entrevistas

Luego de haber aplicado y analizado los resultados de la prueba piloto, se realizaron las entrevistas que proporcionaron los resultados finales del trabajo.
El objetivo principal de estas entrevistas es confrontar algunas respuestas que los estudiantes dieron en la prueba piloto con sus argumentos verbales. Indagando especialmente sobre cuál es la percepción que cada uno de los entrevistados tiene en cuanto al infinito, al igual que las ideas intuitivas que prevalecen en su pensamiento.

4.4.1 Diseño y aplicación de la entrevista

Diseño

Con base en las teorías ya estudiadas a lo largo del trabajo y de las respuestas obtenidas en la primera etapa se diseñó una entrevista en donde se pretende analizar aspectos cualitativos respecto al tema del infinito y a las influencias que las ideas intuitivas tienen sobre este.

Para el diseño de la entrevista se consideraron dos puntos importantes, uno que busca identificar cómo los estudiantes conciben el infinito en lo pequeño planteado por Núñez (1997), ya que esto conduce a afirmar o refutar la hipótesis que se tiene acerca que el infinito potencial es el que prevalece en los razonamientos de los estudiantes. Para lograr este objetivo se cuestiona acerca de una versión de la paradoja de Zenón y se muestran dos figuras, en donde se da esta misma situación de construcción que involucra el infinito.

Así mismo, se busca indagar acerca de la percepción de cardinalidad de conjuntos infinitos, para lo cual se plantean algunos ejercicios que cuestionan sobre el número de elementos de conjuntos y la comparación de los mismos.

Algunos de los ejercicios expuestos que involucran el infinito en lo pequeño propuesto por Núñez (1997), como ya se hizo mención son una versión de la paradoja de Zenón y algunas figuras geométricas, en cuya construcción se pone de manifiesto, el hecho de cómo se percibe el infinito en este tipo de casos.

Aplicación

Las entrevistas fueron aplicadas de manera individual a dos estudiantes de undécimo grado de la Institución Educativa Las Américas y dos estudiantes de un curso de cálculo II de la Universidad Industrial de Santander, escogidos con base a las respuestas que dieron en la prueba piloto. Considerando las percepciones y concepciones que manifestaron a lo largo del proceso en sus razonamientos en cuanto al infinito.

En general, cada entrevista consistió en filmar las respuestas verbales y gráficas (en algunos casos) que los estudiantes manifestaban a cada cuestionamiento que el entrevistador les presentaba al mostrarles los enunciados, uno a uno. Luego se procedió a transcribir cada una de estas para tener la información de manera escrita y así mostrar los resultados.

Se pretendía que los estudiantes se sintieran con la libertad de leer y razonar sin ningún tipo de influencia por parte del entrevistador.

En cuanto al orden de las situaciones se determinó mostrarlas de manera aleatoria para persuadir a los estudiantes de la relación existente entre los planteamientos y evitar respuestas limitadas por similitudes entre los problemas. En el análisis a posteriori se mantendrá el orden utilizado en la entrevista.

4.4.2 Análisis A priori

Considerando que en la prueba piloto se analizaron dos aspectos, uno donde se quería indagar sobre la percepción de la construcción del infinito en lo pequeño, como lo describe Núñez (1997), y otro donde la percepción de cardinalidad y equivalencia de conjuntos infinitos era un punto clave; especialmente teniendo en cuenta cómo se concebía la relación del todo y una de sus partes.

En las entrevistas queremos continuar investigando sobre estas ideas, por lo tanto las distribuimos de tal manera que, por un lado se pudiera identificar cómo emerge el concepto de infinito en lo pequeño; con base a situaciones de subdivisión (paradoja de Zenón) y por otro lado mediante la representación gráfica determinar qué papel juega el infinito en las concepciones de los estudiantes. Por tal razón mostramos dos figuras, en donde su proceso de construcción está diseñado de tal manera que el estudiante manifieste todas las ideas que subyacen en su mente sobre lo que su percepción visual le indica.

En esta serie de ideas, en el análisis a priori vamos a analizar dos hechos: primero la construcción de lo infinito en lo pequeño y segundo la cardinalidad y equivalencia entre conjuntos, junto con la influencia que las ideas intuitivas tienen en estos dos aspectos.

Para lo cual empezamos por considerar en conjunto, la paradoja de Zenón y la construcción de figuras, de las cuales la primera situación se trabajó en la prueba piloto y corresponde al problema 1 y la otra fue agregada considerando un texto del marco teórico. Las situaciones mostradas de forma individual en la entrevista fueron:

1. Paradoja de Zenón:

   Un móvil viaja del punto A al punto B, y para esto tiene que pasar por el punto C, que resulta ser el punto medio entre A y B. Luego debe pasar por el punto D que resulta ser el punto medio entre C y B. Luego por el punto E, que es el punto medio entre D y B. Luego por el punto E, que es el punto medio entre D y B; y así sucesivamente debe ir pasando por el punto medio de cada segmento resultante. Siguiendo este proceso, ¿crees que sea posible que en algún momento el móvil alcance el punto B?

2. Observa las siguientes figuras que Anastacia empezó a construir:

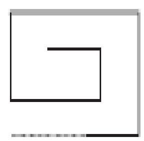


Figura 1.

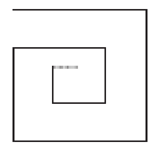


Figura 2.

a. Describe el proceso de construcción.
b. ¿Cuántas veces puedes aplicar dicho proceso?

En cuanto a la paradoja de Zenón nos fundamentamos principalmente en lo que Núñez (1997), plantea acerca de las dos clases de iteraciones que se llevan a cabo en este proceso, a decir, el número de pasos que se tienen que realizar para llegar desde el punto A al punto B (divergente) y la distancia cubierta por estos pasos (convergente).

Por lo percibido en la prueba piloto esperamos que en este punto los estudiantes tanto del colegio como de la universidad tengan en cuenta aspectos como espacio y tiempo, mencionándolos en sus argumentos.

En cuanto a las respuestas creemos que se darán dos tipos: uno donde se afirme que el móvil llega y otro donde se argumente lo contrario. Por otro lado, en los estudiantes del curso de cálculo II prevemos que utilizarán términos como límite, sucesiones, y otros que se asocien al infinito de acuerdo a lo visto hasta el momento en sus cursos universitarios. De esta manera el papel del entrevistador se debe enfocar en indagar profundamente sobre las respuestas de los estudiantes para así poder realizar un análisis más fino de la manera como estos piensan sobre el infinito.

Respecto a la aplicación del segundo punto, Núñez (1997), considera la importancia de estudiar el infinito visto en lo pequeño y en procesos donde el espacio no sea limitado. En base a esto quisimos mostrarles a los estudiantes entrevistados el inicio de la construcción de las figuras (figura1 y figura 2) previamente mostradas, para que ellos miraran el proceso llevado a cabo y determinaran hasta qué punto se puede hacer.

En la primer figura creemos que se va a poner en evidencia la idea intuitiva del infinito en construcción, lo cual fundamentaría la hipótesis de nuestro trabajo, donde se expone que esa idea de infinito potencial es la que prevalece aun cuando se hayan visto conceptos matemáticos más formales, como es el caso de los estudiantes del curso de cálculo II.

De la segunda figura, esperamos emerjan esas ideas contradictorias encontradas cuando se habla del infinito en lo pequeño, ya que en este caso la construcción llega a un punto donde el espacio se va reduciendo más y más, a pesar que se puede prolongar la figura tanto como se quiera. Haciendo este tipo de consideraciones, quedaría como interrogante si los estudiantes logran conciliar el hecho de cubrir una distancia finita con un número infinito de pasos, el cual se pretende aclarar luego de haber aplicado la entrevista. Incluso en esta situación pueden prevalecer, ideas relacionadas con las características de los instrumentos utilizados para realizar la construcción. Por ejemplo, con la precisión de las medidas o el grosor de la punta del lápiz.

Continuando con las siguientes situaciones propuestas en la entrevista, como son: la paradoja del Hotel de Hilbert y la comparación de conjuntos. Se consideró para la primera los problemas mostrados en la prueba piloto a cerca de dicha paradoja y adicional se presentaron las confrontaciones de la misma, las cuales serán mostradas más adelante. En cuanto a la comparación de conjuntos se mostró cada uno de ellos mediante el uso de tarjetas de papel, en donde se escribían los elementos de cada uno.

1. ***El Hotel de Hilbert:***

   Imagina un hotel con un número infinito de cuartos, donde todos están ocupados. A dicho hotel viene un nuevo huésped y pide una habitación. "¡Por supuesto!" -exclama el propietario.

   ¿Cómo podría acomodar el propietario al nuevo huésped?

   Ahora un número infinito de nuevos huéspedes llegan y piden habitaciones. "Sin duda, caballeros -dice el propietario-; esperen por favor un minuto".

   ¿Cómo podría acomodar el propietario a los nuevos huéspedes?

2. Comparación de Conjuntos:

Tarjeta 1: Conjunto A

$$\boxed{A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}}$$

Tarjeta 2: Conjunto B

$$\boxed{B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, \ldots\}}$$

Tarjeta 3: Conjunto C

$$\boxed{C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots\}}$$

Tarjeta 4: Conjunto D

$$\boxed{D = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18, \ldots\}}$$

En este punto esperamos que los estudiantes justifiquen sus respuestas a los planteamientos, de acuerdo a lo que conocen de cardinalidad de conjuntos. Especialmente en el curso de cálculo II, donde por lo observado en la prueba piloto, utilizan términos como densidad de los números reales, funciones y equivalencia de conjuntos.

En este caso será necesario tratar de identificar si realmente los estudiantes conocen y entienden la relación que tiene el infinito con estos términos.

En cuanto a lo detectado acerca del papel que juegan los puntos suspensivos en la representación de los conjuntos, esperamos que en la entrevista se aclare cómo los están percibiendo y por qué en algunos casos no los tuvieron en cuenta. Además prevemos que de acuerdo a como se muestren las tarjetas de los conjuntos, los estudiantes puedan llegar a establecer una equivalencia en aquellos conjuntos, donde esta relación es evidente. Al igual que consideren que algunos de los conjuntos son subconjuntos de los números naturales, y sin embargo, digan que su número de elementos es el mismo.

También esperamos, que los alumnos no sólo digan que los conjuntos cuentan con el mismo número de elementos, basados en la característica común de infinitud, sino que traten de mostrar este hecho por medios más formales. Como Fischbein (2001) plantea, si tenemos que comparar dos conjuntos infinitos, no hay que contar sus elementos, como contamos los objetos de los conjuntos finitos; tenemos que determinar la equivalencia o no de los dos conjuntos por medios oficiales.

Luego de haber mostrado el análisis a priori de esta etapa del trabajo y tomándolo como guía, ahora se mostraran los resultados encontrados, los cuales darán las respuestas a los cuestionamientos que han aparecido en el proceso.

4.4.3 Análisis a posteriori

Este análisis se puede considerar como la etapa que concluye nuestro trabajo, ya que en él se pretende mostrar los resultados encontrados en las entrevistas, los cuales probablemente están predeterminados por los obtenidos en la prueba piloto. Es decir, en él vamos a mostrar si las ideas acerca del infinito que se detectaron al inicio de la investigación, prevalecen o si han tenido un cambio; influenciado por factores como la aparición de nuevos conceptos matemáticos o la forma en que los cuestionamientos son presentados.

Para mostrar los resultados de cada ejercicio, vamos a considerar simultáneamente las respuestas que dieron en las entrevistas los dos estudiantes de undécimo grado y los dos estudiantes del curso de cálculo II.

Lo anterior porque nos interesa detectar cómo se concibe cada situación en cada nivel y si realmente se da un avance en el pensamiento matemático de una etapa a la otra, al igual que comprobar la influencia que las ideas intuitivas tiene en las respuestas.

Resultados de la entrevista:

Al aplicar las entrevistas se comenzó por presentar los ejercicios que involucran aspectos como la cardinalidad y la relación del todo y una de sus partes cuando se habla de conjuntos infinitos. Para proceder, el entrevistador presentó de forma escrita la siguiente situación al estudiante, pidiéndole que la leyera y tratara de resolver la cuestión que se presentaba.

1. Paradoja del Hotel de Hilbert

El Hotel de Hilbert:

Imagina un hotel con un número infinito de cuartos, donde todos están ocupados. A dicho hotel viene un nuevo huésped y pide una habitación. "¡Por supuesto!" -exclama el propietario.

¿Cómo podría acomodar el propietario al nuevo huésped?

En este primer caso los cuatro estudiantes entrevistados de forma individual, coincidieron en decir que se puede acomodar al nuevo huésped, debido a la infinitud de los cuartos. Evidentemente persiste la idea del infinito no terminado, visto como un proceso de constante construcción, prevaleciendo el hecho que se pueda agregar uno más las veces que se quiera.

Otra característica en las respuestas para esta situación, es que los estudiantes aunque aceptan lo que dice el enunciado que los cuartos están todos ocupados, no se convencen que esto sea así. A continuación mostramos las respuestas de un estudiante de undécimo grado y uno del curso de cálculo II, que coinciden en cuanto a lo planteado.

EU1: ahí dice que tiene un número infinito de cuartos, se supone que todos no pueden estar ocupados porque tienen un número infinito de cuartos. No se sabe cuántos exactamente, cuando llega el nuevo huésped tiene que haber habitaciones disponibles (mueve las manos), pues se supone que sí por infinito. Tiene que haber habitaciones disponibles, no todas pueden estar llenas.

EC1: Pero es que nunca van a estar ocupados si son infinitos, como van a estar todos ocupados, es imposible, ¿no?

ENT: ¿es imposible que estén ocupados?

EC1: pues si son infinitos (risas), siempre va a haber uno más, y uno más y uno más.

Este tipo de respuestas explican algunas ideas precedentes, por ejemplo, se verifica que la idea de infinito potencial prevalece en los estudiantes de los dos niveles. Hecho que confirma la influencia que la intuición tiene en el desarrollo de los conceptos, ya que este infinito según Lestón (2007) es considerado como el infinito intuitivo, cuya característica es la posibilidad de continuar un proceso infinitamente.

La segunda parte de la paradoja del hotel de Hilbert se mostró a los entrevistados de la misma manera que el primer caso:

2. El Hotel de Hilbert:

> *Ahora un número infinito de nuevos huéspedes llegan y piden habitaciones. "Sin duda, caballeros -dice el propietario-; esperen por favor un minuto".*
> *¿Cómo podría acomodar el propietario a los nuevos huéspedes?*

Antes de analizar las respuestas de los estudiantes, en cuanto a esta parte de la paradoja, es conveniente recordar que esta situación niega la razón: "no es lógico que a un conjunto se le agreguen más elementos y la "cantidad" de elementos no varié" (Lestón, 2007). Sin embargo, las respuestas para este caso, no variaron significativamente respecto al caso anterior, los estudiantes continuaron considerando el infinito potencial como parte de sus explicaciones.

Algo interesante para recalcar de las respuestas para este ítem, es la de una estudiante de undécimo grado, la cual puso en evidencia lo que Fischbein (2001) menciona, a cerca de la necesidad que tienen los individuos de recurrir a modelos mentales sencillos, que le permitan contextualizar y entender determinada situación que por su estructura puede ser complicada y difícil de comprender.

> *EU2: Entonces seria relativo, si hay un número infinito de habitaciones para un número infinito de huéspedes, los acomodaría… igual, no sé es que no sé cómo explicarlo (mueve las manos) (lee en voz alta) si hay un número infinito de habitaciones para un número infinito de huéspedes, digamos si esta el hotel (empieza a dibujar) y hay infinitas personas (dibuja), pues yo pienso que él debería ir corriendo a cada uno, digamos acomodo al primero y como llegaron infinitos pues ir corriendo el resto …*

En esta respuesta, es claro que el modelo mental que prevalece es el pictórico, ya que la estudiante lo que busca por medio del dibujo, es comprender el enunciado de la paradoja, para de esta manera resolver el cuestionamiento planteado. En cuanto al dibujo se puede notar que los puntos suspensivos, sugieren nuevamente la continuación de un proceso, Veamos:

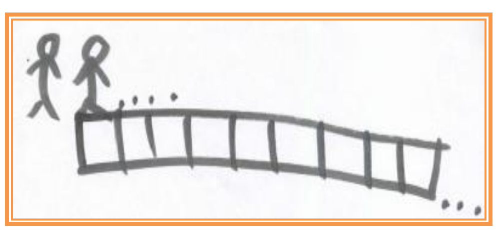


Figura 6. (Representación gráfica de la situación de un estudiante de undécimo grado)

Este razonamiento hace referencia al infinito potencial y muestra cómo esta estudiante supera las condiciones del problema y puede reacomodar a los huéspedes que estaban en el hotel para ubicar a los nuevos.

Continuando con la aplicación de las entrevistas y como una manera de detectar las ideas que surgen frente al tema, se presentaron las confrontaciones para las respectivas situaciones a cerca de la paradoja del Hotel de Hilbert. Con ellas se quiere identificar cómo los estudiantes razonan frente a respuestas que otros individuos dan y de qué manera las relacionan con las suyas. Las respectivas confrontaciones fueron:

Confrontación paradoja del Hotel de Hilbert:

> *A continuación aparece la respuesta dada por Amelia y algunas de sus explicaciones para solucionar el problema:*
>
> *Como el hotel tiene un número infinito de habitaciones si necesito acomodar a un nuevo huésped basta con decir al huésped de la habitación número 1 que pase a la habitación número 2, al de la número 2 que pase a la habitación 3, al de la 3 que pase a la habitación 4 y así sucesivamente… De esta manera el nuevo huésped podrá instalarse en la habitación número 1 que queda libre como consecuencia de los traslados.*
>
> *Ahora si llega un número infinito de huéspedes y el hotel está lleno. Le pediría al huésped de la habitación número 1 que se pasara al número 2, al de la 2 que se pasara a la 4, al de la 4 que se pasara a la 8, al de la 8 que se pasara a la 16 y así sucesivamente… Ahora todos los cuartos con número impar quedan desocupados y los nuevos huéspedes podrán acomodarse en ellos.*

Frente a estas respuestas los cuatro entrevistados coincidieron en decir que estaban de acuerdo con los planteamientos de la primera parte, sin embargo, al parecer la razón para afirmar esto, es la característica del infinito potencial presente en el enunciado del ejercicio.

En esta parte de la entrevista, sólo en un estudiante prevaleció fuertemente la idea intuitiva del infinito que se ha mantenido durante todo el proceso, por ejemplo para la confrontación de la primera parte, esta fue su explicación:

> *EU2: (Lee) Pues yo si estoy de acuerdo, pero también se podría hacer al revés*
>
> *ENT: ¿Cómo?*
>
> *EU2: Digamos, no siempre correr al primero (señala el enunciado) sino ubicar los que están ya y ponerlos al final.*

La posibilidad de ubicar más huéspedes, al parecer se debe a que se trata de un conjunto infinito: siempre, al final se va a encontrar un cuarto más y uno más y así sucesivamente.

Por otro lado, uno de los entrevistados del curso de cálculo II, evidenció lo planteado por Garbín (2005), sobre cómo las respuestas de los estudiantes cambian de sentido dependiendo la contextualización del problema. Por ejemplo en nuestro caso, este estudiante durante la prueba piloto y parte de la entrevista ha mantenido en sus argumentos la idea de infinito potencial, sin embargo en la segunda confrontación, muestra confusión y se limita a la información presentada en el enunciado.

> *EC2: (Lee la confrontación) Bueno yo tengo una pregunta ahí, ¿los cuartos del hotel no estarían llenos?*
>
> *ENT: ¿Qué dice la situación?, ¿usted qué piensa que estaría lleno?*
>
> *EC2: Sí, porque si dice que todas están llenas, por ejemplo la tres estaría llena, ahí solamente se pasaron los números pares de habitación.*
>
> *ENT: ¿Entonces podría acomodarlos?*
>
> *EC2: Según lo que yo leo acá, todos están llenos, quiere decir que la 3, la 5 y la 7 no están desocupadas, no estaría de acuerdo con esta respuesta, seria más practica la de allá (señala la primera respuesta).*

En este tipo de respuestas se manifiestan las contradicciones que surgen cuando los estudiantes tratan de conciliar sus ideas intuitivas con argumentos matemáticos que han desarrollado en sus cursos.
Además, sus respuestas son en general guiadas por la contextualización del problema. Para el caso, como se puede ver el estudiante no concibe que a pesar del hotel estar lleno se puedan ubicar más huéspedes; confirmando esto lo ya mencionado acerca de cómo este tipo de situaciones que se dan con conjuntos infinitos niegan la razón.

Los demás entrevistados aunque estuvieron de acuerdo con las respuestas presentadas, por el entrevistador, en ningún momento, pusieron de manifiesto que percibieran alguna relación entre conjuntos. Es decir, a pesar que en las confrontaciones se mencionaban conjuntos como los números pares e impares y el conjunto de habitaciones ordenadas representaba el conjunto de los números naturales, en ninguno de los dos cursos se identificó esta característica.

Al parecer la equivalencia entre el todo y una de sus partes, característica fundamental de los conjuntos infinitos no hace parte de los fundamentos matemáticos de los estudiantes, especialmente en el curso de cálculo II, donde se esperaba que el tema no fuera ajeno al desarrollo de la materia.

Para cumplir el objetivo de las entrevistas de analizar dos aspectos fundamentales en el tema de infinito, como lo son cardinalidad y construcción del infinito en lo pequeño, analizaremos a continuación las respuestas dadas por los estudiantes al pedirles que compararan ciertos conjuntos que el entrevistador mostró en las tarjetas que se utilizaron como ayuda didáctica, las cuales ya han sido mostradas previamente en el desarrollo del trabajo.

Se inicio con el conjunto A, ya que es el conjunto de los números naturales, los demás se presentaron en el orden mostrado con el fin de hacer evidente la posible correspondencia que existe entre ellos.

Para el primer caso en donde se le pedía al estudiante comparar el número de elementos entre el conjunto A y el conjunto B, la respuesta que se acerca a las expectativas expuestas en el análisis a priori sobre la equivalencia entre conjuntos, es la siguiente dada por la misma estudiante del curso de cálculo II, que en la prueba piloto trató de señalar la correspondencia entre los mismos conjuntos:

> *EC1: Diferente, pero en cuanto el número de elementos el mismo, o ¿no?, si, si porque estos son los números elevados al cuadrado y estos son solos, o sea que acá (señala el conjunto de los números cuadrados) siempre voy a tener un número para elevar al cuadrado y acá (señala el conjunto de los números naturales) siempre voy a tener un número así, yo creo que son igual en el tamaño, sí.*

Esta estudiante aunque no utiliza conceptos matemáticos formales, trata de establecer una relación de correspondencia entre los conjuntos, contrario a lo encontrado en otras respuestas en donde se deducía que el número de elementos era igual, simplemente por la característica común que todos tienen, en cuanto a que el número de elementos es infinito.

En otros casos, especialmente en los estudiantes del colegio, los puntos suspensivos son evadidos, dando respuestas de tipo finito al contar los elementos de cada conjunto. Sin embargo al hacerles ver que estos puntos suspensivos sugieren algo, ellos inmediatamente los relacionan con infinito.

> *ENT: ¿Cuántos elementos tiene el conjunto A?*
>
> *EU2: Nueve, y el B también nueve.*
>
> *ENT: ¿Qué le indican los puntos suspensivos?*
>
> *EU2: ¿Infinito?*

ENT: No, ¿qué le indican, usted como percibe esos puntos suspensivos?

EU2: Que sigue ahí nueve, diez, once, doce, trece, catorce… (Indica con la mano que continúan), infinito.

Nuevamente estamos frente a un caso en donde la concepción que se tiene acerca del infinito es meramente potencial, confirmando que a lo mejor, esta idea no se ha desprendido de la intuición de los individuos. De la misma manera, la correspondencia que se esperaba los estudiantes detectaran entre algunos conjuntos no se dio; ya que para algunos el hecho que un subconjunto de un conjunto tenga la misma cantidad de elementos de este, no es posible.

Sin embargo este tipo de respuestas no deben extrañarnos ya que como lo menciona Fischbein (2001), es claro que el conjunto de los números pares se incluye en el conjunto de los números naturales, y este hecho es relevante para los estudiantes. De ahí la razón por la cual la mayoría de los entrevistados coincidieron en decir que el conjunto de los números pares y otros conjuntos que se presentaban y son subconjuntos del mismo, tienen menor cantidad de elementos, por ejemplo para estos casos, uno de los estudiantes entrevistados dio la siguiente respuesta cuando se le pidió que comparara todas las tarjetas con los conjuntos de números:

EU2: pues podría ser (escribe en la hoja) que todos pertenecen al conjunto A, no sé cómo escribirlo pero la idea es esa, que todos pertenecen a A.

Lo que escribe para sustentar que todos pertenecen a A es esto:

Figura 7. (Representación de un estudiante de undécimo grado de la contenencia de conjuntos)

Al seguir indagando sobre lo que significaba que un conjunto sea subconjunto de otro, y cómo esta característica afecta la respuesta en cuanto al número de elementos de los dos conjuntos, se encontró el siguiente argumento:

ENT: ¿Para usted que es pertenecer?

EU2: Que C, B y D son subconjuntos de A, o sea todos salen de A, todos estos están contenidos en A.

A pesar que este tipo de respuestas pueden ser aceptables, resulta conveniente como lo menciona Garbín (2005) que en algún momento y sobre todo los estudiantes del curso de cálculo, se desprendan un poco de su percepción finita de las cosas para darle paso a un pensamiento abstracto que les permita comprender situaciones que involucran el infinito.

En cuanto al problema de comparar cantidad de elementos en conjuntos, Fischbein (2001) sugiere que el criterio de equivalencia uno a uno, se puede utilizar para llegar a la conclusión que el conjunto de los números naturales y un subconjunto del mismo, por ejemplo, el conjunto de los números pares, tienen la misma cardinalidad.

Por otra parte se dio el caso que según Fischbein (2001) es posible, y es aquel en que los estudiantes a fin de eliminar el sentimiento de la contradicción, declaran simplemente que todos estos conjuntos son infinitos y por lo tanto todos son equivalentes:

EU2: Yo lo veo de esta forma, si los cuento elemento a elemento sin puntos suspensivos tendrían 9 elementos igual número de elementos, pero si tengo en cuenta los puntos suspensivos, no podría decir cuántos elementos tiene cada uno porque son infinitos.

ENT: ¿Por qué?

EU2: Porque la secuencia sigue, porque los dos son infinitos, así sea 1,2,3,4 y puntos suspensivos o 2,4,6 hasta veinte y puntos suspensivos, la secuencia sigue.

ENT: ¿Y si comparamos todos los conjuntos en cuanto a su número de elementos?

EU2: Van a tener igual por los punticos suspensivos.

ENT: ¿Qué le indican?

EU2: Que nunca se va a acabar el conjunto, entonces todos tienen igual cantidad de elementos.

En este momento se termina con el análisis a posteriori de las entrevistas en cuanto al primer criterio, siendo este la cardinalidad en conjuntos de elementos infinitos.

Ahora se continua analizando la construcción del infinito en lo pequeño, especialmente en procesos de subdivisión, para esto en el diseño de las entrevistas se tuvieron en cuenta algunos ejercicios que consideran este tipo de situaciones, los cuales serán analizados con base a las respuestas dadas por los estudiantes.

El primer ejercicio estimado para esta parte de la entrevista, es una versión de la paradoja de Zenón en donde se involucra el infinito, esta paradoja se presento de manera escrita al estudiante, dándole un tiempo para que la leyera, analizara y diera sus argumentos. La situación mostrada fue:

Paradoja de Zenón:

Un móvil viaja del punto A al punto B, y para esto tiene que pasar por el punto C, que resulta ser el punto medio entre A y B. Luego debe pasar por *el punto D que resulta ser el punto medio entre C y B. Luego por el punto E, que es el punto medio entre D y B. Luego por el punto E, que es el punto medio entre D y B; y así sucesivamente debe ir pasando por el punto medio de cada segmento resultante. Siguiendo este proceso, ¿crees que sea posible que en algún momento el móvil alcance el punto B?*

Antes de mostrar y comentar algunas de las respuestas dadas por los estudiantes es conveniente retomar las ideas que Núñez (1994) aporta sobre el tema. Para empezar se considerara el hecho que plantea este autor a cerca que la construcción del infinito en lo pequeño, es mucho mas esquivo y controvertido que el infinito en lo grande.
De esta manera trataremos de verificar o refutar esta premisa, al igual que se buscará identificar si los estudiantes frente a este tipo de situaciones logran conciliar el hecho de cubrir una distancia finita con un número infinito de pasos.

En cuanto a las respuestas de los cuatro estudiantes, en las entrevistas a diferencia de la prueba piloto solo se dieron dos situaciones, una en donde los estudiantes argumentan que el móvil si alcanza el punto B y otra en donde sucede lo contrario, es decir se considera que el móvil no llega al punto.

Algo de interés para resaltar es que los estudiantes del colegio y la universidad coincidieron por pares en sus respuestas, es decir para los alumnos de undécimo grado el móvil sí alcanza el punto B, mientras que para los estudiantes del curso de cálculo II el móvil nunca llegara.

Siguiendo la regla del problema, “dos atributos han de ser iterados simultáneamente, a saber el número de pasos que uno tiene que realizar y la distancia que cada uno de estos cubre" (Núñez, 2004). Se podía esperar que los estudiantes identificaran, aunque no aceptaran, la simultaneidad de los procesos, sin embargo como ya se menciono en el análisis a priori, y como de hecho sucedió se dio el caso en el que los estudiantes continuaron con la idea de infinito potencial como fundamento para sus respuestas:

> *EC1: Se supone que entre dos puntos hay un número infinito de puntos (dibuja), según esto va aumentando a la mita, a la mitad, a la mitad y a la mitad, entonces por más que lo aumente a la mitad y a la mitad y a la mitad y se acerque, siempre va a haber un punto medio entre ese segmento y el punto B. Entonces siempre va a haber mitad y mitad y mitad, no importa que tan chiquito sea, o sea yo pensaría que nunca lo alcanza, pues en cuanto a números, porque físicamente obviamente el (señala) el auto va a llegar del punto A al punto B, pero si lo miramos así, siempre va a haber un punto medio entre las distancias.*

En esta repuesta hay dos hechos importantes, el primero que se esperaba sucediera, es la permanencia del infinito potencial como explicación, es decir, los estudiantes del curso de cálculo II identificaron solo el proceso que según la teoría de (Núñez, 1994) es divergente o aumenta cada vez más. Así, esta puede ser la causa por la cual se llego a la conclusión que el móvil no llega al punto B.

Además, en cuanto a la construcción del infinito en lo pequeño, respuestas como la anterior sugieren que los estudiantes en algunos casos, no se percatan que la disminución en las distancias lleva a un proceso convergente y que a pesar de ser estudiantes de cálculo II, en sus argumentos no se refirieron a conceptos como limites, sucesiones y convergencia entre otros.

La otra respuesta encontrada en las entrevistas fue aquella en donde se acepta el proceso como completo. En particular, los estudiantes de undécimo grado, percibieron de cierta manera la existencia de un infinito actual. Aunque sus argumentos no son tan claros para identificar si realmente están hablando de un proceso completo, los dos procesos claves (divergente y convergente) del ejercicio al parecer fueron vistos por este estudiante:

> *EU1: (Lee) Pues es posible que llegue del punto A al punto B, pero entonces el tiempo que demoraría seria mucho menos de lo que tardaría si lo recorriera directamente, cada vez tiene que pasar por el punto medio entre las dos distancias que van pasando, por decir entre A y B el punto medio es C, entonces ahora tiene que pasar el punto medio entre C y B , y a lo que aparezca otro punto medio tendrá que pasar el punto medio y así sucesivamente tardara más tiempo en llegar a punto B, pero si es posible.*
>
> *ENT: ¿Por qué?, o sea para usted por qué es posible que llegue? De una razón.*
> *EU1: Porque cada vez va acortando más la distancia entre el punto A y el punto B, hasta el punto que llega casi hasta el punto B.*
> *ENT: ¿A pesar de que pase por muchos puntos medios?*
> *EU1: Sí, hasta que alcance al punto B tendrá que pasar muchos puntos.*
> *ENT: O sea que definitivamente para usted si lo alcanza.*
> *EU1: Sí.*
> *ENT: Y la razón es que? (risas)*
> *EU1: Es una distancia determinada, cada vez va a tener un punto medio, entonces esta distancia se va haciendo cada vez más corta, hasta un momento que el punto medio sea lo más cercano posible a B*

Es claro que el estudiante le otorga más importancia al hecho que la distancia cada vez se acorta más a pesar de encontrar más y más puntos medios en cada iteración hecha. Sin embargo, a la hora de tratar el proceso de divergencia y el de convergencia, simultáneamente, se presenta dificultades para sustentar lo que sucede.

Por otro lado, en cuanto el interrogante que se planteo en el análisis a priori para esta parte de la entrevista, para detectar si los estudiantes concebían el hecho de cubrir una distancia finita con un número infinito de pasos. Al parecer en este caso esto no es tan inconcebible, pues como se ve en la respuesta anterior este hecho no es ajeno de los razonamientos de los estudiantes.

Como Núñez (1994) lo plantea, a pesar que en algunos estudiantes emerja cierta intuición de las consecuencias que tienen los procesos de subdivisión, esta intuición puede permanecer susceptible de ser influenciada por factores contextuales.

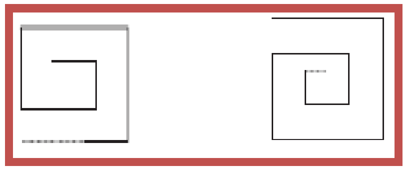
A manera de conclusión frente a este ejercicio de la paradoja de Zenón, se puede deducir que ni la edad ni el proceso de enseñanza influyen significativamente en las respuestas realmente intuitivas, es decir, esto hace parte del desarrollo cognitivo de cada persona. Por lo tanto es normal que frente a una misma situación se encuentren distintas clases de respuestas entre los individuos, unas más valederas que otras, pero que sin embargo muestran como la intuición permea los conocimientos, influenciando sus respuestas.

Hasta este momento lo que se ha logrado es empezar a aclarar las hipótesis a cerca de la construcción del infinito en lo pequeño y en lo grande. Siguiendo con esta línea de estudio, en el siguiente problema se pretende analizar la percepción que tienen los estudiantes frente a dos figuras, cuya construcción, refleja precisamente la construcción del infinito en los dos casos considerados para nuestro análisis.

También en este ejercicio se quiere confirmar si los modelos mentales, especialmente el modelo mental pictórico, están presentes en los estudiantes como herramientas de ayuda, para solucionar los planteamientos requeridos y si estos modelos llevan a deducciones correctas frente al tema del infinito.

Las dos figuras sobre las cuales, se indaga a cerca de hasta dónde llega su proceso de construcción son:

3. *Observa las siguientes figuras que Anastacia empezó a construir:*



a. Describe el proceso de construcción.

b. ¿Cuántas veces puedes aplicar dicho proceso?

En este ejercicio las dos figuras sugieren una construcción que evidencia un infinito potencial. Sin embargo, son mostradas de dos maneras distintas, es decir, la primera no está limitada por el espacio, mientras que en la segunda la construcción del infinito en lo pequeño se hace más evidente, ya que a medida que avanza n su elaboración, el espacio se reduce.

De esta manera estamos nuevamente frente a un caso en donde se dan dos tipos de iteraciones diferentes, llevando a considerar dos procesos en donde uno es convergente y el otro es divergente. La cuestión está en determinar si los estudiantes pueden considerar simultáneamente los dos procesos para una misma situación.

Las respuestas encontradas, a diferencia de los puntos anteriores en la entrevista, reflejan que en esta parte, a pesar de haber algunas similitudes en los razonamientos, cada uno de los estudiantes abordo la situación de manera diferente, acudiendo a modelos mentales fáciles para cada individuo.

Frente a estos hechos Fischbein (2001) propone que el concepto de modelo mental se refiere a las representaciones mentales que sustituyen, en el proceso de razonamiento, las entidades originales; por lo general con el fin de estimular y facilitar la tarea de los problemas.

En el primer caso uno de los estudiantes entrevistados, como se verá en su respuesta, sustituye la idea del ejercicio por un modelo pictórico que conoce. Así, al parecer asoció la construcción de las figuras que se le presentaron con otras que conoce y de las cuales tienen más claro la idea que tiene su construcción:

ENT: ¿Cuántas veces puede hacer esta construcción? (Mostrando, cada figura)
EU2: las que sea (continua el proceso de construcción con el dedo), yo vi un programa y no me acuerdo como se llama, pero es algo así que uno puede hacer lo mismo, es que no me acuerdo como es, es algo que uno puede, digamos hacer un dibujo y hacer infinitas veces el mismo y el mismo, pero.., o sea tengo una flor (empieza a dibujar con el marcador) y seguir haciéndola así (dibuja) hasta…

En esta respuesta se ve que a pesar de asociar el infinito con el proceso que se sigue para construir la figura, no se identifican los dos tipos de iteración que según Núñez (1994) son característicos de esta situación. El estudiante se limita a asociar las figuras que tiene, con una única (la flor), cuya construcción le sugiere que puedo continuar haciendo una misma figura cuantas veces lo desee sin que la forma inicial sea alterada.

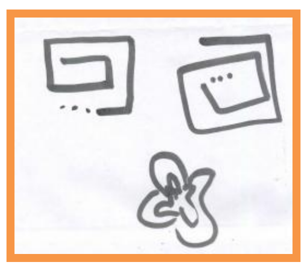


Figura 8. Representacion del proceso de construccion del infinito, hecho por un estudiante de undécimo grado.

El esquema de figuras anteriores, muestra una de las principales características de la teoría cognitiva, desarrollada por Tall y Dreyfus. En ella se resalta un concepto importante, el llamado *"esquema conceptual"* que se entiende como "el conjunto de todas las imágenes mentales del estudiante asociadas al concepto, juntamente con todas las propiedades que le caracterizan" (Tall y Vinner, 1981. Citado por Garbín). El problema en estos casos, resulta ser entonces, encontrar el equilibrio entre la percepción y la formalización del infinito.

El segundo estudiante entrevistado, al igual que el anterior, considero el infinito como parte de su respuesta. Sin embargo vio la figura de una manera distinta, lo que sugiere que el modelo mental que se utiliza, frente a determinada situación, es propio de cada individuo.

Por lo tanto es claro que la intuición en estos casos es un camino básico y necesario para que los estudiantes puedan resolver las cuestiones a cerca del infinito.

También en esta respuesta se evidencia como los conceptos matemáticos formalizados empiezan a generar conflicto cuando los estudiantes pretenden hacerlos parte de sus razonamientos:

> *EU1: pues es como una línea continua pero se dobla en cada parte (señala sobre el dibujo que hizo igual al mostrado por el entrevistador) para ir sobre su camino (hace el "camino" con el marcador) es una línea infinita.*
> *ENT: y ¿hasta dónde puedo continuar?*
> *EU1: hasta el infinito si quiere (señala).*

Aquí se puede ver que el estudiante considera la figura como una line recta que puedo doblar de cierta manera; razonamiento que desde el punto matemático, puede ser valedero. Al parecer lo que él pretendió fue asociar la figura con un objeto que es infinito, en este caso la recta, de esta manera posiblemente para el estudiante es más sencillo entender hasta donde puede llevar, la construcción.

Ahora, en cuanto a la segunda figura, la cual enfatiza mucho más sobre la construcción del infinito en lo pequeño, encontramos estos razonamientos por parte del mismo entrevistado:

> *EU1: (la mira detenidamente y se queda pensando) empieza a dibujarla. Pues como yo la veo también sería otra forma de determinar el infinito, una línea que continua formándose hasta llegar a… al centro,*

> *pero en este caso es más fácil que llegue a un punto final debido a que ya no habrá más espacio para continuar*
> *ENT: si por ejemplo le coloco una lupa*
> *EU1: de todas maneras se va a acabar el espacio porque se va agotando la distancia*
> *ENT: y si estoy trabajando en un computador y le coloco zoom y zoom y zoom y zoom…*
> *EU1: pues ahí sí puede aparecer más espacio pero es imposible, pues es imposible para una persona continuar esa secuencia, como que las personas solo ven hasta determinado punto.*

Por su respuesta, al parecer él tiene una noción del infinito actual, dado que en los últimos ejercicios ha manifestado que ve los procesos de construcción del infinito como completos. Es decir tiene una idea al parecer muy débil que a pesar de estar realizando infinitas iteraciones hay un elemento que cada vez disminuye y sugiere cierta convergencia a un punto.

Otro punto para resaltar es que el estudiante es consciente de la diferencia que existe entre la realidad y el verdadero sentido de la matemática, es decir para él es claro que muchos objetos matemáticos son entes abstractos que causan contradicciones en el pensamiento de las personas.

Según Núñez (1994) en situaciones de este tipo se puede constatar que se está en presencia de infinitos sinfín e infinitos que se detienen, ¡siendo ambos infinitos!, hecho que contradice nuestra noción misma de infinito y que se ve reflejado en las siguientes respuestas:

> *EC1: se supone que es como una espiral, como un caracolito y esto sigue, sigue y esta la empiezan al revés (señala la segunda figura y dibuja) pues se va disminuyendo, pero es como haciendo cuadraditos que nunca terminan, o sea un cuadradito dentro del otro. No, yo no entiendo*
> *ENT: ¿Cuántas veces se repite el proceso?*
> *EC1: uff… (Mueve la mano)*
> *ENT: ¿y esta? (figura 2)*
> *EC1: uff… ah! Puesto así en el papel (empieza a dibujar) esto llega un punto en que chan, chan no voy a poder hacerlo, porque es muy chiquito, pues muchas veces. Esto (señala la figura 1) lo puedo hacer*

hasta que, no sé, las veces que quiera, porque si siempre se va a tener esto aquí así abierto, entonces se puede continuar
ENT: ¿y esta? (señala la figura 2) ¿si le doy una lupa para que siga mirando el proceso?
EC1: hasta el infinito, hacia el menos infinito (risas), este va disminuyendo, entonces menos infinito

En esta primera respuesta que caracteriza las ideas aportadas por Núñez (1994) sobre la situación. El estudiante parece identificar que se está tratando con dos procesos que involucran el infinito, y por lo tanto ninguno de los dos va encontrar fin, es decir a pesar que en la segunda figura el espacio de reduce, en su respuesta muestra que sin importar este hecho ninguno de los procesos va a terminar.

Contrario a lo anterior el siguiente estudiante, a pesar de identificar el papel que juega el infinito en la construcción de las dos figuras, para la segunda, asegura que esta construcción tiene fin. Reflejando que para él es relevante la percepción visual de las figuras, aun cuando por su nivel académico se espera que sea consciente que en el ejercicio están inmersos conceptos matemáticos abstractos, los cuales pueden llevar a comprender mejor las ideas desarrolladas alrededor del infinito:

ENT: ¿siguiendo esta construcción hasta donde puede continuar?
EC2: pues en este caso (señala la figura 1) muchas, hasta que se le acabe el papel a uno.
ENT: ¿y si en el primer caso le doy más papel? ¿Qué pasa si en la segunda figura aplicamos una especie de Zoom o a cercamos una lupa?
EC2: En el primer caso muchas de todas formas, de pronto si hago la figura con muchas hojas a lo mejor en algún momento solo pase una línea por el borde que puede ser un pedacito de la grafica. Pero en si el proceso se puede aplicar las veces que se quiera.
ENT: ¿y para la figura 2?
EC2: si empezamos desde acá (señala la figura dos entregada por el entrevistador) Ya estaríamos muy limitados porque cuando lleguemos por acá ya… terminara por acá (señala centro de la construcción), hasta donde llegue la punta del marcador,
ENT: ¿y si le doy uno más delgadito?

EU2: igual avanzamos un poquito más, pero igual, terminara por ahí. Es más complicado en este caso (risas) porque es más fácil considerar este (señala figura 1). Humanamente este tiene fin (señala figura 2) mientras que este no (señala figura 1).

El razonamiento anterior pone de manifiesto la hipótesis encontrada en Núñez (1994) acerca de cómo la construcción del infinito en lo pequeño resulta más difícil y contradictoria que el infinito en lo grande. Como se reflejo, para este estudiante que durante todo el proceso ha mantenido una idea potencial del infinito, fue mucho más sencillo aceptar el proceso de construcción de la primera figura que el de la segunda. Debido a que esta ultima caracterizaba precisamente la idea de infinito en lo pequeño.

Como conclusión frente a esta última parte, en donde el criterio para el análisis fue la coordinación entre un proceso divergente y uno convergente en determinadas situaciones, en primer lugar se tiene que aun cuando se cuente con conceptos matemáticos más formales la percepción visual prevalece en los estudiantes a la hora de dar sus respuestas.

De igual manera estos ejercicios evidenciaron que no existen diferencias significativas entre las respuestas de los estudiantes de undécimo grado y los del curso de cálculo II. Lo cual conduce a pensar que “ el conocimiento previo del cálculo diferencial o integral es de ayuda, pero no de una manera significativa o determinante, para establecer y reconocer las conexiones oportunas y fundamentales entre los problemas planteados, así como de potenciar la noción de infinito actual” (Garbín, 2005).

Por último en cuanto al cuestionamiento que se planteo acerca de si los estudiantes concebían la idea de cubrir una distancia infinita con un número infinito de pasos, los resultados no arrojan evidencia suficiente para estar seguros totalmente si aceptan el hecho o no, lo que sí se puede asegurar es que la respuesta varía de acuerdo a cómo cada uno contextualice y entienda el ejercicio.

Con el análisis de estos últimos resultados, obtenidos de las entrevistas, se dan por terminadas las dos fases en las que se estructuro el trabajo. A continuación se mostraran las conclusiones más relevantes obtenidas de dichos resultados. De igual manera se tratara de validar la veracidad o no de algunas conjeturas que surgieron a lo largo del proceso de elaboración y ejecución del proyecto.

5. CONCLUSIONES

Siendo consecuentes con lo planteado al inicio del presente trabajo, es necesario recalcar que el infinito clasifica dentro de ese tipo de conceptos cuya construcción no sólo depende de memorizar ciertas propiedades, sino que tiene en cuenta puntos de vista personales y concepciones que pueden diferir respecto a cada persona.

De la experiencia frente al tema, los resultados encontrados confirman que evidentemente este es un concepto complejo para enseñar y aprender, ya que alrededor de él se forman confusiones que son el resultado de unir las ideas intuitivas con ideas matemáticas más formales que requieren un razonamiento más complejo y abstracto para ser entendidas.

Por los resultados es claro que el concepto matemático del infinito no hace parte del sentido común de los estudiantes, por lo tanto es conveniente que los docentes se percaten que el mejor método para proceder no es empezar a hablar del tema, como se hace con otros a los cuales de la manera más normal se les definen y asignan propiedades generalmente claras y evidentes.
En este caso es importante tener en cuenta que alrededor del infinito se desarrollan ideas que requieren de razonamientos complejos, los cuales evidentemente un joven de colegio o universidad, está en la capacidad comprender, pero no han sido preparados para este hecho.

En cuanto a la teoría abordada, a cerca de los modelos mentales a los que se recurre cuando se tratan temas como el infinito. Se puede deducir que dichos modelos prevalecen aún cuando se tengan conocimientos matemáticos más elaborados o se esté en un nivel de estudio más avanzado, según esto, las contradicciones siempre se darán ya que el conflicto entre el pensamiento intuitivo y el pensamiento matemático del infinito se encuentra vigente.

Luego de comparar las respuestas de los dos grupos con los que se desarrollaron las dos etapas del trabajo, se puede concluir que no existen diferencias significativas entre ellas. Es decir, al parecer, el conocimiento de temas de cálculo diferencial e integral puede ser de ayuda; pero no de una manera significativa para crear ideas apropiadas que potencien la comprensión del infinito actual, el cual como se ha visto en el proceso es el que más dificultad causa.

En consecuencia es claro que la mayoría de los estudiantes cuando ingresa a la universidad lleva una idea de infinito que es puramente potencial, y a pesar que en sus cursos universitarios ve temas como límites en donde el infinito juega un papel importante, esta idea se comporta como una barrera que impide la comprensión de la construcción del infinito en lo pequeño. Además la influencia que tiene el infinito en temas como límites sucesiones y series no es un aspecto claro para los estudiantes, pues muy poca veces hacen mención de conocer como se relacionan.

Adicional a lo anterior, se encontró en los resultados que no es del todo cierto que pertenecer a un curso superior o de un nivel más alto garantice que el concepto de infinito sea asimilado exitosamente. Dado que aún cuando se posean conceptos matemáticos más formales la capacidad de razonamiento y sustentación respecto al tema puede ser la misma en un estudiante de undécimo grado y uno del curso de cálculo II.

En cuanto a los planteamientos hechos en el marco teórico respecto al tema, si el criterio de clasificación es la concepción del infinito matemático, los resultados indican que en algunos casos el avance del PME (pensamiento matemático elemental) al PMA (pensamiento matemático avanzado) no se ha dado y que la mayoría aún esta es la etapa de transición.

Finalmente en cuanto al infinito presentado en situaciones que involucran procesos de subdivisión, se logró detectar que para los estudiantes resulta más difícil comprender la construcción del infinito en lo pequeño, más aún cuando lo que se trata de ver es una distancia finita cubierta con un número infinito de pasos. Este hecho aunque es aceptado no los convence lo suficiente, ya que cuando tratan de entenderlo, sus concepciones intuitivas y sus conocimientos matemáticos se juntan creando confusión debido que al parecer para ellos resulta casi imposible conciliar estos dos aspectos en su mente.

6. SUGERENCIAS Y COMENTARIOS FINALES

Como aporte a futuros trabajos que se puedan desarrollar sobre el tema del infinito, se presentan a continuación algunas ideas que pueden guiar dicha labor:

- Las ideas intuitivas adquiridas en ambientes no escolares permean la construcción de conceptos matemáticos avanzados. Por tanto esperamos que los resultados de nuestro trabajo permitan proponer aspectos metodológicos y didácticos que promuevan la construcción de concepciones sobre el infinito para de esta manera facilitar a los estudiantes la construcción de conceptos como el de límite.

- Es importante que con base a resultados encontrados en investigaciones sobre el infinito se generen reflexiones por parte de los maestros, sobre la necesidad de analizar las concepciones que sobre el infinito tienen los estudiantes.

- Puede ser de interés identificar los modelos que los estudiantes van generando durante su vida escolar y que en definitiva son la base de construcción de cierto concepto, para determinar en un futuro qué mecanismos deben generarse en los individuos para promover de manera exitosa la construcción del infinito actual.

- Se propone que los obstáculos de los cuales ya se ha hecho mención sean incorporados como temáticas en la práctica profesional docente, ya que esto puede propiciar aprendizajes con sentido en los alumnos.

- Es importante que en la clase de matemática, sobre todo en los cursos de cálculo, se resalte la estrecha relación que el infinito tiene con temas de cálculo como límites y sucesiones. Esto permitirá que el estudiante se familiarice con el concepto y llegue a interesarse por explorarlo más a fondo.

- Finalmente se insiste que el camino para los docentes lograr cumplir todas las expectativas que se generan alrededor del aprendizaje del infinito, es abordar el tema tanto desde el contenido matemático, que de hecho no es fácil, como desde las posibles explicaciones, significaciones y comprensiones que los alumnos puedan tener en un momento determinado.

7. REFERENCIAS

Arrigo, G. & D´Amore, B. (1999). Lo veo pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. En: *Educación Matemática* (México). **11** (1), pp. 5-24.

Breuer, J. (1970). Iniciación a la Teoría de conjuntos. Madrid. pp. 134-135

Clemens, S. & O´Daffer, P. (1989). Geometría con aplicaciones y Solución de Problemas. E.U.A: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.

D'Amore, B., Arrigo, G., Bonilla, M., Fandiño, M.I., Piatti, A., Rodríguez, J., Rojas, P.J., Romero, J.H., Sbaragli, S. (2006). El "sentido del infinito". *Epsilon*. Sevilla, España. **22** (2), pp. 1-29.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*. **8**(3), pp, 24-41.

Fischbein, E. (1978). *Intuition and Mathematical Education.* Osnabrûcker Schirften Zûr Mathematik, (1). pp, 148-176.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, **3**(2), pp.9-19.

Fischbein, E. (1989). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge. pp, 1-13.

Fischbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10, pp.2-40.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, **23** (48), 309-329.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics. An educational approach. Dordrecht: Reidel.

Garbín, S. (2000). Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Garbín, S. & Azcárate, C. (2001). El infinito actual: Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencias en alumnos de bachillerato. *Suma*, 38, 53-67.

Garbín, S. (2003). Incoherencias y conexiones: El caso del infinito actual con estudiantes universitarios. Primera fase del estudio. En Delgado Rubí, J. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Santiago de Chile. **16**(2), pp.406-414.

Garbín, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, **8** (2), 169-193.

Garbín, S. (2005). Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo. *Revista Enseñanza de las ciencias*, **23** (1), p.p. 61-68.

Lestón, P. (2007). Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares. Tesis de Maestría, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.

Montoro, V. & Scheuer, N. (2004). Pensando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios. *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).*

Montoro, V. & Scheuer, N. (2006). Distintas formas de pensar el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios. En Martínez, G. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México. **19**, pp.156-161.

Navarro, P. (sf). Reflexiones sobre El Concepto de Infinito. Recuperado el día 06 de Julio de 2010 de http:// www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/infinito/index.html

Núñez, E. (1994). Subdivision and small infinities: Zenón, paradoxes and cognition. *Actas del PME*. **18** (3), pp.368-375.

Núñez, R. (1997). Infinito en lo pequeño y desarrollo cognitivo: Paradojas y espacios consensuales. *University of California at Berkely*. **9** (1), p.p.20-32.

Penalva, (1996). Estudio sobre la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito. Tesis Doctoral, Universidad de Valencia.

Roa, S. (2008). El infinito: Un análisis cognitivo de niños talento en matemáticas. Proyecto doctoral. *Cinvestav – IPN*, México.

Rojas, P. Bonilla, M. & Romero, J. (2004). El concepto de infinito y la formación de profesores: algunas consideraciones epistemológicas y didácticas. En P. Rojas

(Ed.), *Memorias Sexto Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Bogotá, pp. 29-34.

Tall D.O. & Vinner S. (1981): *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics. (12). pp, 151-169.

Tirosh, D. (1991). ‘The role of students’ intuition of infinity in teaching the Cantorian theory’, in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking, Kluwer, Dordrecht*, pp.199-214.