

**LA CONJETURA MATEMÁTICA EN LOS ALUMNOS
DE GRADO NOVENO**

RUBÉN ÁNGEL CANCINO

FABIO DURÁN SALAS

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUACARAMANGA
2006**

**LA CONJETURA MATEMÁTICA EN LOS ALUMNOS
DE GRADO NOVENO**

**RUBÉN ÁNGEL CANCINO
FABIO DURÁN SALAS**

**Trabajo de grado para optar el título de
Licenciado en matemáticas**

**Director
GERMAN JAIMES PATIÑO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2006**

AGRADECIMIENTOS

A DIOS, fuente de toda posibilidad.

A mi familia por haberme brindado apoyo, comprensión y amistad.

A mi prima, Olga Lucía Rueda Salas, por ofrecerme su calor de hogar.

Al profesor Germán Jaimes, Director del trabajo, por su colaboración en el desarrollo del mismo.

Al profesor, Gabriel Yáñez Canal, por todo lo que me enseñó durante la carrera.

A Olga Rocío Monsalve, por estar conmigo en todos los momentos de mi vida.

FABIO DURÁN SALAS

AGRADECIMIENTOS

A DIOS, por haberme permitido vivir con salud y permitirme hacer realidad mis sueños.

A mi Madre y Hermano, por apoyarme y darme animo para poder completar mis estudios.

A Bienestar Universitario, por brindarme apoyo en mis dificultades y necesidades.

A los profesores, Germán Jaimes Patiño director del trabajo, por su valiosa orientación, y a los calificadores de este trabajo Gabriel Yáñez Canal y Gilberto Arenas, por brindar excelencia académica.

RUBÉN ÁNGEL CANCINO

DEDICATORIA

*A DIOS...
A MIS PADRES,
EUGENIA SALAS Y PEDRO ALONSO DURÁN
POR HABERME DADO LA POSIBILIDAD DE EXISTIR.*

FABIO DURÁN SALAS

DEDICATORIA

*A DIOS...
A MI MADRE Y HERMANO.*

RUBÉN ÁNGEL CANCINO

“La argumentación es a la conjetura como la demostración es al teorema”

Nicolás Balacheff

CONTENIDO

Pág

INTRODUCCION

MARCO TEÓRICO.....4

OBJETIVOS.....6

CAPÍTULO I: Proposiciones y Lógica

1. Introducción.....7

1.1 Proposiciones: ¿Qué es una proposición?.....8

1.1.1 Simbolización de las proposiciones.....8

1.1.2 Valores de verdad.....9

1.2 Cuantificadores.....10

1.2.1 Cuantificador universal.....11

1.2.2 Cuantificador existencial.....12

1.3 Lógica.....13

1.3.1 conectivos lógicos.....13

1.3.2 Conjuncion.....13

1.3.3 Disyunción.....14

1.3.4 Implicación.....15

1.3.5 Doble implicación.....16

1.4 Tautologías.....17

1.5 Falacias.....18

CAPÍTULO II: Inferencia lógica y la Deducción

2.	Introducción.....	19
2.1	Métodos de inferencia lógica.....	19
2.1.1	Modus Ponendo Ponens.....	20
2.1.2	Modus Tollendo Tollens.....	22
2.1.3	Modus Tollendo Ponens.....	23
2.2	La Deducción.....	25

CAPÍTULO III: LA CONJETURA

3.	Introducción.....	28
3.1	La Importancia de la Conjetura en la Educación.....	28
3.1.1	La Verificación.....	30
3.1.4	La Argumentación y La Conjetura.....	33
3.2	Algunas Conjeturas.....	34
3.2.1	Conjetura de Goldbach.....	35
3.2.2	Conjetura de los Números Primos Gemelos.....	35
3.2.3	El Último Teorema de Fermat.....	36

CAPÍTULO IV: APLICACIÓN DE LOS TEST

4.	Introducción.....	38
4.1	Aplicación del test:	
	La diagonalización del polígono regular.....	39
4.1.1	La verificación.....	39

4.1.2	La exploración.....	53
4.1.3	La conjetura.....	65
4.2	Aplicación del test:	
	La suma de los “n” primeros números impares.....	72
4.2.1	La verificación.....	72
4.2.2	La exploración.....	75
4.2.3	La conjetura.....	77
CAPÍTULO V: ANÁLISIS GRÁFICO DE LOS RESULTADOS		
5.	Introducción.....	79
5.1	Análisis gráfico del test:	
	La diagonalización del polígono regular.....	79
5.1.1	Análisis De La Verificación.....	80
5.1.2	Análisis De La Exploración.....	82
5.1.3	Análisis De La Conjetura.....	85
5.2	Análisis gráfico del test:	
	La suma de los “n” primeros números impares.....	88
5.2.1	La Verificación.....	88
5.2.2	La Exploración.....	90
5.2.3	La Conjetura.....	90
CAPÍTULO VI:	CONCLUSIONES.....	93
CAPÍTULO VII:	RECOMENDACIONES.....	95
BIBLIOGRAFÍA.....		96
ANEXOS		

TÍTULO: LA CONJETURA MATEMÁTICA EN LOS ALUMNOS DE GRADO NOVENO*.

AUTORES:** RUBÉN ÁNGEL CANCINO

FABIO DURÁN SALAS

PALABRAS CLAVES:

Verificación
Observación
Exploración
Conjetura
Raciocinio

RESUMEN:

El tema de este trabajo está dedicado a la conjetura de una ecuación o de un juicio construido por los mismos estudiantes. Éste proceso de conjeturar fue desarrollado con alumnos de grado noveno por medio de dos test. La diagonalización de cualquier polígono regular y la suma de los “n” primeros números impares. Las dos actividades propuestas en los test, nos sirvieron para realizar nuestro análisis del raciocinio y de deducción de la ecuación, o de los juicios en cada una de las actividades mencionadas, usando como intermediario el siguiente proceso lógico; primero, la exploración; segundo, la conjetura y tercero, la verificación.

La metodología utilizada en el trabajo pertenece al tipo de investigación de campo con los cimientos ofrecidos en diversas fuentes de información sobre el tema.

* Trabajo de grado

** Facultad de ciencias. Licenciatura en Matemáticas. Germán Jaimes Patiño

TITLE: THE MATHEMATICAL CONJECTURE IN THE STUDENTS OF GRADE NINTH*.

AUTHORS:** RUBÉN ÁNGEL CANCINO
FABIO DURÁN SALAS

KEY WORDS:

Verification
Observation
Exploration
Conjecture
Reason

SUMMARY:

The topic of this work is dedicated to the conjecture of an equation or of a judgment built by the same students. This process of surmising it was developed with grade students ninth by means of two test, the diagonalizacion of any regular polygon and the sum of the "n" first odd, the two activities that were good us to carry out our analyses of the reason and deduction of the equation, or the judgment of each one of the mentioned activities, using as intermediary the following logical process; first, the exploration; second, the conjecture and third, the verification.

The methodology used in the work belongs to the type of field investigation with the foundations offered in diverse sources of information on the topic.

* The Grade Work

** Faculty of sciences. Licentiate in Matemathics. Germán Jaimes Patiño

INTRODUCCIÓN

Las primeras demostraciones matemáticas se la han atribuido a los griegos alrededor del siglo V (A.C.). La caracterización más importante de la matemática es la *demostración*, y esta es la gran diferencia con las demás ciencias. Pero, la demostración no aparece como un punto de inflexión en la historia de las matemáticas, sino por el contrario, es el gran resultado de un estudio de casos, donde se desarrolla el ***razonamiento inductivo*** conducido por la ***lógica y sus reglas***, así se inicia el proceso de la generalización de resultados.

En los libros de matemáticas de la educación media, se enseña a “demostrar” a partir de décimo grado. Y una de las preguntas a analizar sería ¿cómo se enseña?. El método de enseñanza de la demostración, consiste en que el alumno copie del tablero un ejemplo que ha desarrollado el profesor, y luego lo trate de imitar. Por tal motivo, la demostración tiende a desaparecer de los currículos escolares. Esto nos muestra que, se ha perdido la esencia de lo que es la construcción de una demostración.

En este trabajo, nos enfocamos en la construcción de la conjetura como un primer paso, para luego llegar a la construcción de la demostración, esto como un posible proyecto a futuro.

La construcción de la conjetura la proponemos para grado noveno, un año antes de que se le empiece a enseñar la demostración pero, esto no quiere decir que no se pueda aplicar a grados anteriores. De aquí nace el siguiente interrogante: ***¿Cómo conjetura un alumno de noveno grado?***

La respuesta a esta pregunta la pretendemos resolver con dos test, uno de tipo geométrico y otro de tipo numérico; basados en dos hechos muy conocidos en el bachillerato, estos son: la diagonalización de los polígonos regulares y la suma de los “n” primeros números impares. La aplicación de estos test busca que el estudiante mediante una serie de preguntas y mediante la construcción de gráficas elabore la conjetura de una ecuación.

Las preguntas y la construcción de gráficas están divididas en tres fases: la primera es la exploración, aquí se aplican acciones como la observación y la manipulación de objetos; la segunda es la conjetura, aquí se construye la ecuación a partir de raciocinios y deducciones; la verificación, aquí se recopilan y se construyen datos; además, el estudiante mediante unos ejemplos verifica que la ecuación si funcione.

Para que este trabajo cumpla con su misión, proponemos cinco capítulos para lograr que un alumno de grado noveno llegue a conjeturar la ecuación a un problema planteado. Los capítulos están divididos en tres partes; la primera, son el capítulo I (*Proposiciones y Lógica*) y el capítulo II (*Inferencia Lógica y La*

Dedución), donde se expresa un fundamento lógico que se le debe enseñar al alumno para que deduzca y concluya proposiciones válidas, mediante las reglas de la inferencia; la segunda, es la *aplicación de los dos test* en los Colegios San Patricio y Las Américas, que nos muestran los resultados más importantes de la deducción de un alumno, tanto los que acertaron como los que no acertaron; la tercera, consiste en un *análisis gráfico* de los resultados obtenidos en los dos test.

MARCO TEÓRICO

Si la prueba es concebida como algo excesivamente riguroso, que es sólo el producto pulcro y absoluto que aparece en los libros de matemática, es muy fácil que se elimine de los currículos escolares. (Larios, 2002:46). Todo lo contrario sería si tomáramos al *constructivismo* como el proceso de adquisición del conocimiento bajo una alternativa dinámica como lo es la *resolución de problemas*.

La resolución de problemas permite que el alumno realice un proceso de observación, análisis, argumentación y en especial elaboración de raciocinios y elaboración de conjeturas. (Larios:51).

Para Balacheff (2000), el debate es usado como un proceso de validación del argumento y es necesario para realizar una conjetura pues, de esta forma se garantiza o se desconoce la veracidad del argumento. El trabajo por parejas hace que el raciocinio sea hipotético-deductivo; además, se busca la solución común del problema planteado, esto ejercitando el lenguaje de reconocimiento común de decisión, en especial considera dos aspectos: primero el saber “hacer” para llegar “hacer que otros hagan” así logran la construcción de conocimientos.

Conjuntamente, propone que para conseguir un buen proceso de argumentación se debe iniciar con la observación y el análisis de una *afirmación general* y que

luego debe ser desarrollada por tres esquemas de acción para lograr la conjetura;
estos esquemas son: la exploración, la conjetura y la verificación.

1. PROPOSICIONES Y LÓGICA

Las proposiciones son el inicio de cualquier proceso lógico pues, de ellas podemos deducir o inferir otras proposiciones de acuerdo a su veracidad o falsedad; además la lógica nos permite unir y realizar combinaciones entre proposiciones. Ésta unión o combinación se puede realizar por medio de los conectivos lógicos.

Los conectivos lógicos “y”, “o”, “si...entonces...”, “...si y solo si..”; son los que le asignan el valor de verdad a las proposiciones compuestas.

Poder determinar el valor de verdad de una proposición es una de las más bellas tareas que tiene la lógica. Partir de una hipótesis verdadera y luego deducir o inducir una consecuencia a través de la construcción de juicios lógicos verdaderos, es lo que nos permite realizar acciones netamente humanas como: corregir errores, pronosticar algún evento, crear ideas, etc; en pocas palabras, ser capaces de concluir razonablemente.

1.1 PROPOSICIONES: ¿QUÉ ES UNA PROPOSICIÓN?

Tomemos la definición dada por Uribe (1986:8):

“Es una expresión de la que puede decirse que es verdadera o falsa, pero no las dos cosas a la vez.”

Veamos entonces, algunos ejemplos proposiciones.

Ejemplos:

El león es un carnívoro. Éste es un enunciado lógicamente verdadero, por tal motivo podemos decir que es una proposición.

El 3 es un número par. Éste es un enunciado lógicamente falso, por tal motivo podemos decir que es una proposición.

Hay que mencionar la existencia de expresiones verbales que no tienen valor de verdad definido, por tal motivo podemos decir que **NO** son proposiciones.

Ejemplos:

¿Qué hora es? Esta expresión no tiene un valor de verdad definido, luego no es una proposición.

¿Cuál es tu nombre? Al igual que la anterior expresión no tiene un valor de verdad definido, luego no es una proposición.

1.1.1 Simbolización de las proposiciones.

A las proposiciones les podemos asignar una letra (minúscula) como p , q , r ..., esto se hace para simplificar el proceso del cálculo de los valores de verdad cuando existen más de dos proposiciones.

Ejemplos:

p : *El león es un carnívoro*

q : *El 3 es un número par.*

r : *Bucaramanga es la capital del departamento de Santander.*

1.1.2 Valores de verdad.

Acciones como la verificación y la experiencia, son dos factores que nos sirven para determinar cual es el valor de verdad que debe tener una proposición.

Ejemplo:

p : *El león es un carnívoro.*

La *experiencia* dada por la convivencia entre leones y humanos, nos dice que es *verdad* que el león si es carnívoro; por esto podemos deducir que la proposición es verdadera.

r : *Bucaramanga es la capital del departamento de Santander.*

El valor de verdad asignado a esta proposición es *verdadero* pues, sólo falta con *verificar* en un mapa de la Republica de Colombia que el supuesto es cierto.

Los valores de verdad que le sean asignados a las proposiciones, gramaticales o simbólicas, se les escribirá **v** o **f** dentro de un paréntesis según sea el caso.

Ejemplos:

p: El león es un carnívoro (v)

r: Bucaramanga es la capital del departamento de Santander. (v)

1.2 CUANTIFICADORES

Hasta el momento hemos diferenciado entre una proposición y una simple expresión gramatical; además, se les han asignado valores de verdad a estas proposiciones pero, no hemos estudiado ciertas *expresiones matemáticas* a las cuales no se les puede asignar un valor de verdad de forma directa, como hasta ahora se ha hecho, sino que dependen de unas expresiones externas llamadas cuantificadores.

Ejemplo:

$x+2>3$. *Es una expresión algebraica que no tiene valor de verdad.*

Si a esta expresión la relacionamos con alguna de las dos clases de cuantificadores ya sean los **universales** o los **existenciales**, podemos convertir esta expresión que carece de valor de verdad en una proposición.

Pero hay que tener en cuenta que los cuantificadores a su vez también dependen de un *conjunto de referencia*. El conjunto de referencia contiene los elementos que hacen posible que una expresión matemática guiada por un cuantificador pueda obtener un valor de verdad.

1.2.1 Cuantificador Universal.

Los cuantificadores universales son los que nos muestran una forma de expresar la misma *cantidad para todos o el mismo valor de verdad para todos*. (Uribe:27)

El símbolo empleado para un cuantificador universal es una “A” al revés (\forall) y se lee “para todo”, que relacionado con una expresión matemática nos queda así:

$$(\forall x)(x+2>3).$$

Aun así la expresión carece de un sentido lógico, esto es por que todavía no se a determinado el conjunto de referencia. El cuantificador hará que la variable “x” tome los elementos del conjunto de referencia y nos permita poder definir si es verdadera o falsa la proposición.

Sea Φ el conjunto de referencia que contiene los siguientes elementos:

$$\Phi = \{2,3,4\}$$

Ahora verifiquemos la expresión: $(\forall x)(x+2>3)$.

Si para todo elemento de Φ se cumple que $x+2>3$ decimos que la expresión es verdadera de lo contrario es falsa; reemplacemos uno a uno los elementos del conjunto de referencia.

Si $x=2$, se tiene que: $2+2>3$ la proposición es verdadera (v)

Si $x=3$, se tiene que: $3+2>3$ la proposición es verdadera (v)

Si $x=4$, se tiene que: $4+2>3$ la proposición es verdadera (v).

Se ha verificado que todo elemento del conjunto Φ le da un valor de verdad a la expresión matemática.

La expresión que carecía de valor de verdad y que luego fue relacionada con un cuantificador se ha transformado en una proposición que tiene solo valores verdaderos.

El cuantificador universal tiene dos formas de ser leído, estas son:

“Para todo x ”

“Para cada x ”

1.2.2 Cuantificador existencial.

Al igual que en el cuantificador universal, el cuantificador existencial nos ofrece la posibilidad de transformar una expresión sin sentido lógico en una proposición; también necesita de un conjunto de referencia para asignar un valor de verdad a la proposición.

El símbolo del cuantificador existencial es la letra “E” pero en sentido contrario (\exists) y se lee “existe un”. Si lo relacionamos con una expresión matemática nos queda así: $(\exists x)(x+2>3)$.

Tomemos ahora un conjunto de referencia denominado Ψ . El conjunto Ψ contiene los siguientes elementos: $\Psi = \{0,1,2\}$

Verifiquemos la expresión con cada uno de los elementos del conjunto Ψ .

Si $x=0$, se tiene que: $0+2>3$ la proposición es verdadera (f)

Si $x=1$, se tiene que: $1+2>3$ la proposición es verdadera (f)

Si $x=2$, se tiene que: $2+2>3$ la proposición es verdadera (v)

La proposición $(\exists x)(x+2>3)$ es verdadera pues, al menos en una de sus verificaciones su valor de verdad es cierta.

El cuantificador existencial tiene dos formas de ser leído, estas son:

“Existe un”

“Existe al menos un”

1.3 LÓGICA

La lógica es una materia que tiene una gran influencia en las ciencias empíricas. Su aplicación en las matemáticas es fundamental, por la gran capacidad que tiene para deducir juicios a partir de proposiciones.

Si se tienen un conjunto de proposiciones simples y las relacionamos con los conectivos lógicos: y, o, entonces, si y solo si; tenemos como resultado nuevas proposiciones de tipo compuestas.

1.3.1 Conjunción.

Se tienen dos proposiciones simples con sus respectivos valores de verdad, si los enlazamos mediante el conectivo lógico “y” con símbolo lógico “ \wedge ”; obtenemos una proposición compuesta con cuatro posibilidades de obtener un valor de verdad.

La conjunción simbólicamente se representa en la tabla nº 1:

P	Q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla nº 1. Tabla de verdad de la conjunción

Sólo es verdadera si las dos proposiciones simples son verdaderas.

La conjunción gramaticalmente se representa así:

p: El león es un carnívoro **(v)**

q: El 3 es un numero par **(f)**

El león es un carnívoro **y** El 3 es un número par
(v) **\wedge** **(f)**
(f)

Luego la nueva proposición compuesta tiene como valor de verdad **(f)**.

1.3.2 Disyunción.

La disyunción se representa por el conectivo lógico “o” y se simboliza así: **(v)**.

Del conectivo lógico “v” se obtiene la siguiente tabla de valores de verdad.

La disyunción simbólicamente se representa en la tabla nº 2:

P	Q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla nº 2. Tabla de verdad de la disyunción

Sólo es falso cuando las dos proposiciones son falsas.

La disyunción gramaticalmente se representa así:

p: El sol es un planeta

q: La ballena es un mamífero.

El sol es un planeta **o** La ballena es un mamífero
(f) **v** **(v)**
(v)

Luego el valor de verdad de la proposición compuesta es **(v)**.

1.3.3 La Implicación.

Los razonamientos están determinados por la *implicación* de sus juicios; de aquí la importancia que tiene este conectivo lógico. El símbolo que le corresponde a la implicación es “ \Rightarrow ”.

La implicación parte de una hipótesis “p” y se concluye una tesis “q” y se lee: *si p entonces q.*

La implicación simbólicamente se representa en la tabla nº 3:

P	Q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla nº 3. Tabla de verdad de la implicación

Sólo es falso cuando la hipótesis es verdadera y su tesis es falsa.

La implicación gramaticalmente se representa así:

p: La luna es una estrella.

q: La rana es un anfibio.

Si La luna es una estrella **entonces**, La rana es un anfibio

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{(f)} & \Rightarrow & \mathbf{(V)} \\ & & \mathbf{(v)} \end{array}$$

Se puede deducir que la proposición compuesta tiene un valor de verdad **(v)**.

1.3.4 Doble Implicación.

El símbolo que tiene éste conector lógico es “ \Leftrightarrow ” y se lee: *p si y solo si q*.

La doble implicación tiene una equivalencia con la conjunción de dos implicaciones, observemos dicha equivalencia:

$$\mathbf{p \Leftrightarrow q \equiv p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p}$$

La doble implicación se representa simbólicamente en la tabla nº 4 :

Ejemplo: $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

p	Q	p v q	\Leftrightarrow	q v p
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Tabla nº 5. Ejemplo uno de una tautología.

La siguiente tabla es una tautología pues, el resultado de componer $p \vee q$ si y solo si $q \vee p$ siempre será verdadera sin tener en cuenta el valor de verdad de las proposiciones compuestas p y q .

Otro ejemplo de tautología¹: $p \vee \sim p$

P	$\sim p$	p v $\sim p$
V	F	V
V	F	V
F	V	V
F	V	V

Tabla nº 6. Ejemplo dos de una tautología.

El resultado de la proposición " $p \vee \sim p$ " siempre será verdadera

¹ El símbolo \sim significa la negación de la proposición a la que acompaña. Si una proposición es verdadera la convierte en falsa y viceversa, si la proposición es falsa se transforma en verdadera

1.5 FALACIAS O CONTRADICCIÓN

Una falacia es una proposición compuesta que sólo tiene como resultado valores falsos en su tabla de verdad, sin importar que valor de verdad tenga cada proposición simple.

Ejemplo: $p \wedge \sim p$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
V	F	F
F	V	F
F	V	F

Tabla nº 7. Ejemplo de una falacia.

El resultado de la proposición $p \wedge \sim p$ siempre será falsa.

2. INFERENCIA LÓGICA Y LA DEDUCCIÓN

Las proposiciones y sus conectivos lógicos son parte fundamental de la lógica formal. La lógica formal se inicia con el estudio de las proposiciones o **premisas** y usa la **inferencia lógica** para llegar a la **deducción de conclusiones**. De este proceso sabemos que la **conclusión** es el resultado de consecuencias lógicas de una serie de premisas que siguen las reglas de la inferencia lógica.

Las reglas que nos permiten inferir lógicamente una conclusión, y para nuestro caso llegar a realizar una **conjetura** son:

- Modus Ponendo Ponens.
- Modus Tollendo Tollens.
- Modus Tollendo Ponens.

En este capítulo, mostraremos las dos formas de usar las reglas de la inferencia lógica para llegar a la conclusión, estas son: de modo simbólico y de modo gramatical.

Hay que mencionar que este capítulo fue tomado básicamente del libro *Introducción a la lógica matemática* por Patrick Suppes.

2.1 MODUS PONENDO PONENS

El Modus Ponendo Ponens tienen sus raíces en el latín, y significa lo siguiente:

Modus: Método, **Ponendo:** Antecedente, **Ponens:** consecuente dándole sentido gramatical a estos términos se obtiene:

“El método que afirma el consecuente, afirmando el antecedente”
Suppes(1983:45).

Un poco complicado para poder entenderlo pero, realmente es una simple verificación de premisas de donde se infiere una conclusión, veamos algunos ejemplos:

premisa 1: $p \Rightarrow q$ si p entonces q
premisa 2: p si p
conclusión: $\therefore q$ por lo tanto q

Forma simbólica

premisa 1: Si Rocio está estudiando, entonces ella está en el colegio
premisa 2: Si ella está estudiando
conclusión: \therefore Rocio está en el colegio

Forma gramatical

Otra forma de usar el Modus Ponendo Ponens es el siguiente:

premisa 1: $\neg p \Rightarrow \neg q$ si no p entonces no q
premisa 2: $\neg p$ si no p
conclusión: $\therefore \neg q$ por lo tanto no q

Forma simbólica

Premisa 1: Si no es otoño, entonces las hojas de los árboles no se caerán

Premisa 2: Si no es otoño

Conclusión: las hojas de los árboles no se caerán.

Forma gramatical

Más formas de usar el Modus Ponendo Ponens: Suppes(1983:46).

Forma 3:

premisa 1: p si p
premisa 2: $p \Rightarrow \neg q$ si p entonces no q
conclusión: $\therefore \neg q$ por lo tanto no q

Forma 4:

premisa 1: $p \wedge q \Rightarrow r$ si p y q , entonces r
premisa 2: $p \wedge q$ si p y q
conclusión: $\therefore r$ por lo tanto r

Forma 5:

premisa 1: $\neg p \Rightarrow q$ si p , entonces q
premisa 2: $\neg p$ si no p
conclusión: $\therefore q$ por lo tanto q

Forma 6:

premisa 1: $p \Rightarrow q \wedge r$ si p , entonces q y r
premisa 2: p si p
conclusión: $\therefore q \wedge r$ por lo tanto q y r

2.2 MODUS TOLLENDO TOLLENS

Esta regla también se aplica a las proposiciones condicionales pero, negando el consecuente podemos negar el antecedente. El Modus Tollendo Tollens viene del latín y quiere decir: **Modus**: Método, **Tollendo**: negar el consecuente, **Tollens**: negar el antecedente. Suppes (1983:55)

El método parte de una verificación de la implicación lógica $p \Rightarrow q$; esto significa, si se verifica p , entonces se verifica q ; y si negamos la verificación de q obtenemos como conclusión la negación de p .

El método nos muestra lo siguiente:

Ejemplo 1:

premisa 1: $p \Rightarrow q$ si p , entonces q
premisa 2: $\neg q$ si no q
conclusión: $\therefore \neg p$ por lo tanto no p

Forma simbólica

premisa 1: Si es un ser razonable, entonces es humano
premisa 2: Si no es humano
conclusión: \therefore no es un ser razonable

Forma gramatical

Ejemplo 2:

premisa 1: Si es de noche, entonces hay luna
premisa 2: Si no hay luna
conclusión: \therefore no es de noche

Forma gramatical

Ahora veamos, otras formas del Modus Tollendo Tollens:

Forma 1:

premisa 1: $p \wedge q \Rightarrow r$ *si p y q, entonces r*
premisa 2: $\neg r$ *si no r*
conclusión: $\therefore \neg(p \wedge q)$ *por lo tanto no p y q*

Forma 2:

premisa 1: $p \Rightarrow \neg q$ *si p, entonces no q*
premisa 2: $\neg(\neg q)$ *si no (no q)*
conclusión : $\therefore \neg p$ *por lo tanto no p*

2.3 MODUS TOLLENDO PONENS

El Modus Tollendo Ponens comparte con el Modus Ponendo Ponens y con Modus Tollendo Tollens sus raíces en el latín.

El nuevo método de inferencia quiere decir: **Modus:** Método, **Tollendo:** negando alguna proposición de la disyunción, **Ponens:** afirma la otra proposición de la disyunción. Suppes (1983:66).

En los dos métodos anteriores partíamos de una implicación como premisa 1 pero, a diferencia de éstos dos métodos la premisa 1 será una disyunción. El método nos ofrece la posibilidad de escoger cual proposición (de la disyunción) quiero negar para llegar a la conclusión de la otra proposición; seguidamente mostraremos las posibles formas de usar el Modus Tollendo Ponens.

Forma 1:

premisa 1: $p \vee q$ $p \circ q$
premisa 2: $\neg p$ si no p
conclusión: $\therefore q$ por lo tanto q

Forma simbólica

premisa 1: El niño escribe, o, el niño lee
premisa 2: El niño no escribe
conclusión: \therefore El niño lee

Forma gramatical

Forma 2:

premisa 1: $p \vee q$ $p \circ q$
premisa 2: $\neg q$ si no q
conclusión: $\therefore p$ por lo tanto p

Forma simbólica

premisa 1: El niño escribe o, el niño lee
premisa 2: El niño no lee
conclusión: \therefore El niño escribe

Forma gramatical

Otras formas simbólicas del Modus Tollendo Ponens: Suppes (1983:67,68)

Forma 3:

premisa 1: $(p \wedge q) \vee r$ *(p, y, q), o, r*
premisa 2: $\neg r$ *si no r*
conclusión: $\therefore (p \wedge q)$ *por lo tanto p, y, q*

Forma 4:

premisa 1: $\neg p \vee q$ *no p, o, q*
premisa 2: $\neg q$ *si no q*
conclusión: $\therefore \neg p$ *por lo tanto no p*

Forma 5:

premisa 1: $\neg p \vee \neg q$ *no p, o, no q*
premisa 2: $\neg(\neg p)$ *si no (no p)*
conclusión: $\therefore \neg q$ *por lo tanto no q*

Forma 6:

premisa 1: $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ *(p y q), o, (r y s)*
premisa 2: $\neg(p \wedge q)$ *si no (p y q)*
conclusión: $\therefore (r \wedge s)$ *por lo tanto r y s*

2.4 LA DEDUCCION

Las reglas de la inferencia nos permiten, como ya vimos, pasar lógicamente de una premisa a otra premisa, o de una afirmación a otra afirmación. La acción de poder pasar de una afirmación a otra afirmación, hace que los pasos sucesivos de un proceso lógico nos puedan llevar a una deducción.

La deducción (lógica) está determinada por razonamientos válidos que son dados por premisas y que además nos ofrece la posibilidad de llegar acertadamente a una buena conclusión.

En la página 71 del libro Suppes define la deducción como un juego, donde las reglas del juego son las reglas de la inferencia. En este juego se pueden hacer cualquier clase de movimiento que sea permitido por alguna regla de inferencia lógica, teniendo como objetivo principal el poder alcanzar una conclusión establecida. En resumen, se empieza con un conjunto de premisas simples que luego se transforman en premisas compuestas con los conectivos lógicos, y el objetivo es pasar de premisa a premisa llegando a una conclusión particular.

Ejemplo:

Si la ballena es un mamífero entonces toma oxígeno del aire. Si toma su oxígeno del aire, entonces no necesita de branquias. La ballena es un mamífero y vive en el océano. Por tanto, no necesita branquias.

La deducción es que “la ballena no necesita branquias”.

En este ejemplo, podemos observar que se pasa de una premisa a otra, teniendo como método las reglas de la inferencia, de esta forma llega a una deducción particular.

Las **proposiciones** del anterior razonamiento son:

p = La ballena es una mamífero.

q = Toma su oxígeno del aire.

r = Necesita de branquias.

s = Habita en el océano.

Las **premisas** son:

<i>premisa 1:</i>	$p \Rightarrow q$	<i>p entonces, q</i>
<i>premisa 2:</i>	$q \Rightarrow \neg r$	<i>q entonces, no r</i>
<i>premisa 3:</i>	$p \wedge s$	<i>p y s</i>
<i>conclusión:</i>	$\therefore \neg r$	<i>por lo tanto no r</i>

La **deducción** de las premisas se expresa así:

<i>paso 1:</i>	$p \Rightarrow q$	<i>premisa 1</i>
<i>paso 2:</i>	$q \Rightarrow \neg r$	<i>premisa 2</i>
<i>paso 3:</i>	$p \wedge s$	<i>premisa 3</i>
<i>paso 4:</i>	p	<i>simplificación de 3</i>
<i>paso 5:</i>	q	<i>poniendo pones entre paso 1 y paso 4</i>
<i>conclusión:</i>	$\therefore \neg r$	<i>poniendo pones entre paso 2 y paso 5</i>

Forma simbólica

Paso 1: La ballena es un mamífero entonces, toma su oxígeno del aire.

Paso 2: Si toma su oxígeno del aire entonces, no necesita de branquias.

Paso 3: La ballena es un mamífero y habita en el océano.

Paso 4: La ballena es un mamífero.

Paso 5: Toma su oxígeno del aire.

Conclusión: La ballena no necesita de branquias.

Por lo anterior decimos que el **razonamiento es válido**, a este tipo de deducciones también se la denominan *deducciones formales*.

3. LA CONJETURA

Los hechos que son basados en la experimentación y en la verificación dan origen a premisas que posteriormente son usadas por los raciocinios para darles un sentido lógico esto es, un valor de verdad. Ya obtenido el valor de verdad de las premisas el siguiente paso será hacer uso de las reglas de la inferencia para tener como resultado una deducción.

Cuando se afirma que se ha deducido un hecho, es por qué de éste, se puede concluir que es cierto o es falso.

Justamente, la conjetura matemática es un hecho o afirmación que se supone cierta en todos sus casos, pero que hasta el momento de su formulación carece de demostración.

De aquí, podemos afirmar que la *conjetura* es la génesis de la *demostración*.

3.1 LA IMPORTANCIA DE LA CONJETURA

En la educación media, la enseñanza de la demostración matemática ha venido desapareciendo por la complejidad lógico-deductiva que ésta tiene en todas sus dimensiones.

La falta de didáctica en la matemática, hace que le estudiante no desarrolle ni cree por sí mismo el concepto, sino que se trate de retomar un enunciado o hecho que se supone es cierto para luego intentar llegar a la demostración del enunciado, esto hace que el proceso lógico (inductivo-deductivo) sea cada vez más complicado.

Tomemos algunas palabras de Larios (2002:50), donde expone cómo se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración hoy en nuestras aulas:

“Es común que cuando se pretende que los alumnos hagan demostraciones en las clases de Matemática se proporcionen afirmaciones y luego se les pida, tras algunos ejemplos, que construyan una demostración más o menos deductiva. En este proceso no se solicita que los alumnos construyan conjeturas o elaboren el enunciado que está siendo tomado en cuenta, sino únicamente que reconstruyan el proceso que previamente, alguien ha realizado”

Para Balacheff (2000:4), el cómo se enseña la demostración hoy día, no deja de ser un simple proceso repetitivo que conlleva a la imitación del proceso demostrativo:

“¿Cómo se enseña la demostración?” Generalmente se hacen demostraciones delante de los estudiantes y luego se les pide hacer lo mismo. (...) Así, la imitación es el medio más difundido de enseñanza.”

Para evitar esto, el proceso de demostrar debe pasar primero por la construcción del conocimiento por medio de ejercicios prácticos que lleve al estudiante a inferir, argumentar y luego a deducir afirmaciones.

Larios (2002:50), explica la relación que existe entre la argumentación, la conjetura y la prueba:

“Tales argumentos están relacionados íntimamente con las experiencias previas al momento de hacer la afirmación, además de que ésta, hasta antes de proporcionar argumentos deductivos es una conjetura...es importante recalcar que no se puede probar conscientemente algo si antes no fue conjeturado”.

Para que los alumnos tengan éxito con la argumentación y luego con la conjetura, se debe tener en cuenta que, antes de empezar a argumentar hay una serie de acciones intelectuales tales como: la observación, la verificación, el

análisis y la exploración, esto da paso a la argumentación y finaliza con la elaboración de la conjetura.

En nuestro sistema educativo la demostración se enseña a partir de décimo grado, con muy malos resultados académicos. Para mejorar esto nosotros proponemos que en la enseñanza media (de 6º a 9º) se enseñe el proceso de *conjetura* así, cuando un estudiante llegue a la media vocacional (10º y 11º) el siguiente proceso matemático será la *prueba o la demostración*, de esta forma el proceso de la enseñanza y aprendizaje será más didáctico y fructífero académicamente.

3.1.1 La Verificación.

Para empezar definamos *¿qué es la verificación?* la verificación es un argumento que establece la verdad de una afirmación por medio de una lista de posibles casos.

Ejemplo:

¿Cuál debe ser el valor de la x ?

$$x^2 = 4$$

$$\text{si } x = 0 \Rightarrow (0)^2 = 0 * 0 \neq 4$$

$$\text{si } x = -1 \Rightarrow (-1)^2 = -1 * -1 \neq 4$$

$$\text{si } x = 1 \Rightarrow (1)^2 = 1 * 1 \neq 4$$

$$\text{si } x = -2 \Rightarrow (-2)^2 = 4$$

$$\text{si } x = 2 \Rightarrow (2)^2 = 4$$

$$\text{si } x = 3 \Rightarrow (3)^2 = 3 * 3 \neq 4$$

$$\text{si } x = -3 \Rightarrow (-3)^2 = -3 * -3 \neq 4$$

Se verificó que todos los posibles casos en donde la afirmación es verdadera son 2 y -2, por qué:

$$\text{si } x = 2 \Rightarrow (2)^2 = 4$$

$$\text{si } x = -2 \Rightarrow (-2)^2 = 4$$

Balacheff (2000), a la *verificación matemática* le asigna el nombre de “*procesos de validación*” pues, la verificación no solo debe determinar si el enunciado es verdadero o falso sino, que también debe ir acompañado por un raciocinio que asegure dicha validez; volvamos al ejemplo anterior:

¿Cuál debe ser el valor de la x?

$$x^2 = 4$$

$$\text{si } x = 1 \Rightarrow (1)^2 = 1 * 1 = 1 \neq 4$$

“La afirmación es **falsa** pues al reemplazar la x por 1 y luego elevarla al cuadrado se obtiene como resultado 1, y 1 es diferente de 4”

$$\text{si } x = -3 \Rightarrow (-3)^2 = -3 * -3 = 9 \neq 4$$

“La afirmación es **falsa** pues al reemplazar la x por -3 y luego elevarla al cuadrado se obtiene como resultado 9, y 9 es diferente de 4”

$$\text{si } x = -2 \Rightarrow (-2)^2 = -2 * -2 = 4$$

$$\text{si } x = 2 \Rightarrow (2)^2 = 2 * 2 = 4$$

“Para los dos casos es **verdadera** pues, al elevar al cuadrado los dos números se obtiene como resultado 4”.

De aquí podemos decir que estos dos son los únicos casos en que el enunciado será cierto pues, si quisiéramos seguir reemplazando en la “x” los valores sobrepasaran al resultado.

La verificación no sólo nos sirve para comprobar y justificar un resultado, sino que también es una herramienta para demostrar un teorema.

Tomemos como ejemplo el “**Teorema De Los Cuatro Colores**”:

*El **Teorema De Los Cuatro Colores** establece que cualquier mapa geográfico puede ser coloreado con cuatro colores diferentes, de forma que no queden regiones adyacentes² con el mismo color.*

Es fácil verificar que no es posible colorear cualquier mapa en estas condiciones con sólo tres colores, y es laborioso pero no complejo demostrar la propiedad con cinco colores. Su demostración fue la primera verificación de un gran teorema matemático por un computador. Los matemáticos han sido ambivalentes con respecto a esa verificación.

Hemos visto lo fundamental que es la verificación para la construcción de raciocinios, eso hace que sea una pieza fundamental en el proceso conjeturar, por que la verificación de una consecuencia fortalece una conjetura.

² Dos regiones se dicen *adyacentes* si comparten un segmento de borde en común, no solamente en un punto.

3.1.2 La Argumentación y La Conjetura.

El objetivo primordial de la argumentación es darle la validez al enunciado. Pero, la argumentación debe tener como sustento la verificación de los hechos para que éste tenga la suficiente capacidad de transformarse en conjetura mediante la deducción.

La conjetura debe partir de observaciones, reflexiones, verificaciones, exploraciones con el fin de encontrar argumentaciones que le den la validez a la conjetura.

Larios (2002:51), expone dos clases de conjeturas:

1. *A priori*. Este momento se refiere cuando la conjetura no se presenta al alumno como una afirmación por parte del docente, sino que se dan las situaciones y las actividades, en el contexto adecuado, a fin de que el alumno produzca la conjetura y, posteriormente, proponga argumentos.
2. *A posteriori*. A diferencia del anterior, en este momento la conjetura es un "juego" una pretensión para el docente. Se presenta ante el alumno reconstruye una demostración que, por lo general, ya se sabe de antemano que existe. Se pretende que al alumno "suponga" que tiene una conjetura y sólo verificará que realmente es una verdad.

La conjetura a priori, deja abierta la posibilidad de abordar los problemas de manera diferente, así la diversidad de razonamientos proporcionan distintas posibilidades de llegar a la construcción de la conjetura.

3.2 Algunas Conjeturas

A continuación se mostraran algunas conjeturas que fueron formuladas hace bastante tiempo y que hasta ahora no han sido demostradas.

3.2.1 La Conjetura De Goldbach

La conjetura de Goldbach (<http://es.wikipedia.org>) es uno de los problemas abiertos más antiguos en matemáticas. Su enunciado es el siguiente:

“Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos”.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}4 &= 2 + 2 \\6 &= 3 + 3 \\8 &= 3 + 5 \\10 &= 3 + 7 = 5 + 5 \\12 &= 5 + 7 \\14 &= 3 + 11 = 7 + 7\end{aligned}$$

Esta conjetura ha sido investigada por muchos teóricos de números y ha sido comprobada por computadores para todos los números pares menores que 2×10^{16} . La mayor parte de los matemáticos cree que la conjetura es cierta, y se basan mayormente en las consideraciones estadísticas sobre la distribución probabilística de los números primos en el conjunto de los números naturales: cuanto mayor sea el número entero par, se hace más "probable" que pueda ser escrito como suma de dos números primos.

3.2.2 La Conjetura De Los Primos Gemelos

“Dos números primos que difieren en dos unidades se llaman primos gemelos.”

Los primeros números primos gemelos son (<http://es.wikipedia.org>):

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43)...

Todos los números primos, excepto el 2, son impares. Los únicos dos números primos consecutivos son el 2 y el 3. Surge la cuestión de encontrar dos números primos que sean impares consecutivos, es decir que se hallen a una distancia de

2. A éstos se los llama **números primos gemelos**. El primero en llamarlos así fue Paul Stackel.

(Se desconoce si el número de primos gemelos es infinito).

3.2.3 El Último Teorema De Fermat.

Este teorema afirma que:

Si n es un entero mayor o igual que 3, entonces no existen números enteros x , y y z (excepto la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) tales que cumplan la igualdad:

$$z^n = x^n + y^n$$

Pierre de Fermat escribió en el margen de su copia del libro *Aritmética* de Diofanto, en el problema que trata sobre la división de un cuadrado como suma de dos cuadrados ($z^2 = x^2 + y^2$):

“Es imposible dividir un cubo en suma de dos cubos, o un bicuadrado en suma de dos bicuadrados, o en general, cualquier potencia superior a dos en dos potencias del mismo grado; he descubierto una demostración maravillosa de esta afirmación. Pero este margen es demasiado angosto para contenerla.”

(<http://es.wikipedia.org>)

El primer matemático que consiguió avanzar sobre este teorema fue Leonhard Euler que demostró el caso $n = 3$.

En el año 1995 el matemático Andrew Wiles, demostró el Teorema de Taniyama-Shimura, anteriormente una conjetura, que conecta las ecuaciones modulares y las elípticas. De este trabajo, se desprende la demostración del Último Teorema de Fermat. Aunque el artículo original de Wiles contenía un error, pudo ser corregido en colaboración con el matemático Richard Taylor y la demostración fue posteriormente aceptada.

4. APLICACIÓN DE LOS TEST

La aplicación de los test busca que los alumnos creen razonamientos a partir de preguntas e instrucciones, que lo enfocan a construir la conjetura de una ecuación o la de un juicio válido, según sea el test aplicado.

Los test fueron aplicados a 140 alumnos, de grado noveno de dos instituciones, el Colegio San patricio (Floridablanca) y el Colegio de la Américas (Bucaramanga).

El primer test aplicado fue la *“diagonalización de cualquier polígono regular”*; este test contiene 14 preguntas, 5 gráficos (cuatro dados y una para construcción) y una tabla que busca recolectar y crear nueva información. A esta tabla la denominamos Base de datos.

El segundo test aplicado fue *“la suma de los n primeros números impares”*; este test contiene 14 enunciados divididos entre preguntas e instrucciones; además, contiene dos gráficos y una tabla de recolección y creación de datos, también denominada Base de datos.

Los dos test están divididos en cuatro secciones: exploración, conjetura y verificación

La conjetura de la ecuación deberá ser deducida por los razonamientos empleados para responder las preguntas usando implícitamente las reglas de la inferencia lógica.

4.1 La aplicación del test: La diagonalización del polígono regular³.

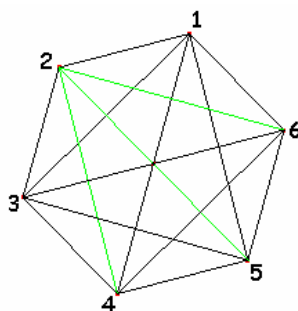
¿Cómo calcular el número de diagonales de un polígono de n lados?. Esta pregunta se tratará de resolver por medio de actividades expuestas en el test que desarrollan el razonamiento particular para llegar al razonamiento general, en síntesis, pasar de lo inductivo a lo deductivo. En cada una de las secciones del test (la exploración, conjetura y la verificación), se estudiarán los resultados de forma general y profunda para así obtener un buen análisis de cada razonamiento en cada punto.

4.1.1 La Verificación.

La primera fase del test es la verificación. A continuación veremos el primer paso de la verificación.

El siguiente polígono regular está formado por 6 puntos y tiene 9 diagonales.

Verifícalo tú mismo.



³ Ver anexo 1

En un 97.32% los estudiantes verificaron el polígono de manera acertada; dibujando con distintos colores el número de diagonales que salían de cada punto, dándose cuenta que en ciertos puntos del polígono las diagonales se repiten⁴.

La respuesta más repetida es: *(ver figura 1)*

“verdadero por que al sumar las diagonales dan 9 y tiene los 6 puntos”.

VERIFICACIÓN

El siguiente polígono regular está formado por 6 puntos y tiene 9 diagonales.
Verifícalo tú mismo.

Verdadero porque al sumar las diagonales dan 9 y tiene los 6 puntos

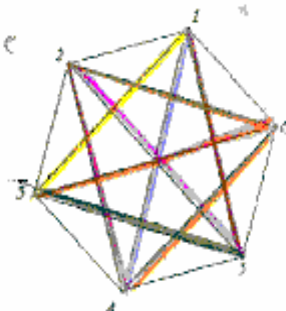


Figura 1. Ejemplo 1 del primer punto de la verificación.

El 2.68% restante cuenta las diagonales que salen de cada punto sin un argumento. *(Ver figura 2)*

VERIFICACIÓN

El siguiente polígono regular está formado por 6 puntos y tiene 9 diagonales.
Verifícalo tú mismo.

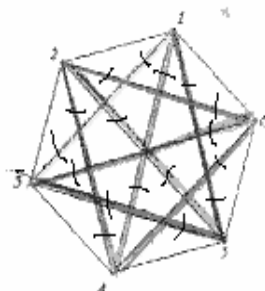
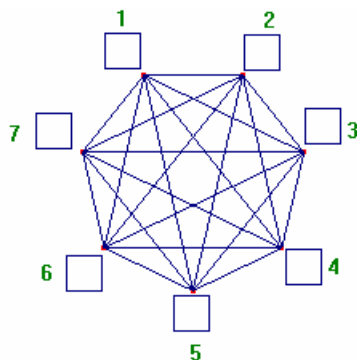


Figura 2. Ejemplo 2 del primer punto de la verificación.

⁴ Ver en el anexo 2 en ejemplo de un test desarrollado correctamente.

Veamos el segundo paso de la verificación:

¿Cuántas diagonales tendrá el siguiente polígono regular?



¿Cuántos puntos tiene?

¿Cuántas diagonales **salen** de cada punto? Escribe como lo sabes.

¿Cuántas diagonales tiene el polígono?

¿Cómo lo calcularon?

En este paso, la numeración de los puntos están en sentido contrario al polígono anterior. Los alumnos dentro de cada cuadro deben escribir el número de diagonales que salen de cada punto.

El 96.52% desarrollaron satisfactoriamente la actividad. Se obtuvieron dos respuestas; la primera obtuvo el 53.6% y la segunda obtuvo el 42.92%.

La primera: Del primer punto contaron 4 diagonales, del segundo punto contaron 4 diagonales, el tercero contaron 3, del cuarto contaron 2 del quinto contaron 1, del sexto y séptimo concluyeron que no habían diagonales salientes pues, en estos puntos las diagonales sólo entraban, en otras palabras se repetían; luego sumaron las diagonales de cada punto y así obtenían el resultado. (Ver figura 3)

¿Cuántas diagonales tendrá el siguiente polígono regular?

Hay 14 porque en el primero habian 4, en el segundo habian 4, en el tercero habian 3, en el cuarto habian 2, y el quinto habia 1 y el sexto y septimo no habian porque ya estaban contadas

Figura 3. Ejemplo 1 del segundo punto de la verificación.

¿cuántos puntos tiene?

Tiene 7 puntos

¿cuántas diagonales salen de cada punto? Escribe como lo sabes.

En e	7 punto salen 4 diagonales	4 punto salen 2 diagonales
")	2 punto salen 4 "	5 punto salen 1 diagonal
")	3 punto salen 3 "	6 punto no sale ninguna diagonal

¿cuántas diagonales tiene el polígono?
Tiene 14 diagonales

¿cómo lo calcularon?

Comenzamos sumando diagonales por diagonal y nos dio 14 diagonales

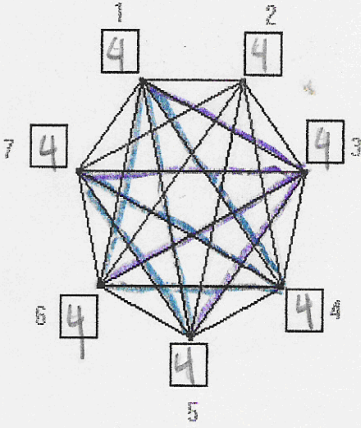
Razonamiento de la figura 3

La segunda: de cada punto contaron 4 diagonales y lo multiplicaron por el número de puntos "7" y observaron que como se repetían dividieron el resultado de la multiplicación en dos.

Los estudiantes escribieron:

"tiene 28 diagonales porque cada punto salen 4 pero como hay algunas que se repiten entonces al total de las diagonales es 14". (Ver figura 4)

¿Cuántas diagonales tendrá el siguiente polígono regular? 28 diagonales



¿cuántos puntos tiene?
Tiene 7 puntos

¿cuántas diagonales salen de cada punto? Escribe como lo sabes.
Salen 4 diagonales por q' al mirar cada punto observamos q' salen 4 líneas.

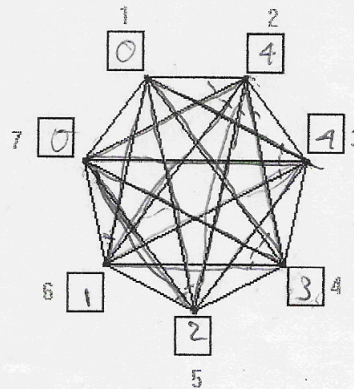
¿cuántas diagonales tiene el polígono?
tiene 28 diagonales por q' de cada punto salen 4 para como hay algunos q' se repiten entonces el total de las diagonales

¿cómo lo calcularon? es 14
contando el número de diagonales q' salen de cada punto.

Figura 4. Ejemplo 2 del segundo punto de la verificación.

También se obtuvieron comentarios muy interesantes, como por ejemplo: “por aparte opino que como son 14 diagonales dividido en 7 lados es igual a 2 diagonales por punto”. (Ver figura 5).

¿Cuántas diagonales tendrá el siguiente polígono regular?



Hay 14 diagonales
La solución es por descarte de diagonales.

¿cuántos puntos tiene?

7

¿cuántas diagonales salen de cada punto? Escribe como lo sabes.

Contamos cuantas líneas salen de cada punto sin repetirlos y llegamos a la conclusión de que en un punto hay 4 líneas, en otro punto otros ~~4~~, en otro punto salen 3, en otro salen 2 y en otros

¿cuántas diagonales tiene el polígono? 2 ninguno.

El polígono tiene 14 diagonales

¿cómo lo calcularon?

contamos las líneas y luego las dividimos en la cantidad de puntos que habría en el polígono, simple si utilizamos la fórmula

Figura 5. Ejemplo 3 del segundo punto de la verificación.

Otro grupo aplicó el concepto de diagonal, dando específicamente punto a punto con cual formaba diagonal. (Ver figura 6).

¿Cuántas diagonales tendrá el siguiente polígono regular?

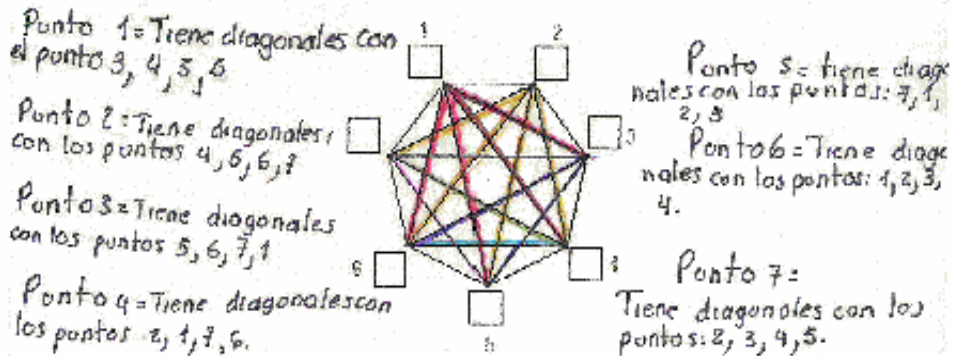


Figura 6. Ejemplo 4 del segundo punto de la verificación.

Estos alumnos reconocen que de cada punto salen 4 diagonales pero, concluyen que por cada punto del polígono sólo tiene una diagonal.

¿Cuántos puntos tiene?

El polígono regular tiene 7 puntos

¿Cuántas diagonales salen de cada punto? Escribe como lo sabes.

De cada punto salen 4 diagonales. Cogimos un color para las diagonales de cada punto y miramos que esos puntos no fueran coincidentes.

¿Cuántas diagonales tiene el polígono? Consecutivos.

El polígono tiene 7 diagonales una por cada punto del polígono regular.

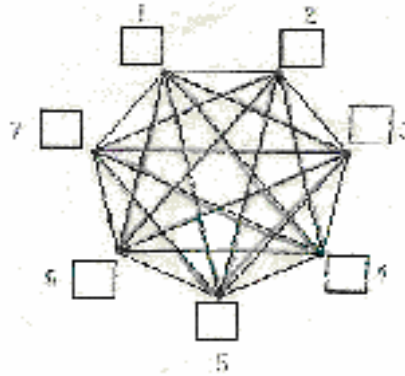
¿cómo lo calcularon?

MIRANDO CUANTOS PUNTOS TENIA EL POLIGONO.

Razonamiento de la figura 6.

En otro test **no** explicaron “en palabras” cómo encontraron el resultado pero, sí lo explicaron en forma numérica, obteniéndose así una muy buena aproximación de llegar a conjeturar la ecuación. (Ver figura 7).

¿Cuántas diagonales tendrá el siguiente polígono regular? 74



¿cuántos puntos tiene? 7

¿cuántas diagonales salen de cada punto? Escribe como lo sabes.

4

¿cuántas diagonales tiene el polígono?

74

¿cómo lo calcularon?

$$4 \cdot 7 = 28 \quad \frac{28 \cdot 7}{2} = 74$$

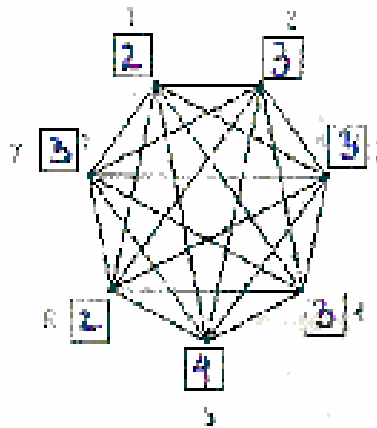
Figura 7. Ejemplo 5 del segundo punto de la verificación.

El 3.48% restante no lograron alcanzar el objetivo⁵. Aunque, implementaron los dos métodos, el de sumar diagonales y multiplicar las diagonales, **no** lo hicieron de forma ordenada; por eso, cometieron errores al contar las diagonales salientes de cada punto y al **no** reconocer las diagonales que se repetían. (Ver figuras 8, 9).

⁵ Ver en anexo 3 el ejemplo de un test resuelto incorrectamente.

Caso 1: La suma de las diagonales

¿Cuántas diagonales tendrá el siguiente polígono regular?



hay 10 diagonales.

¿cuántos puntos tiene?

hay 7 puntos.

¿cuántas diagonales salen de cada punto? Escribe como la sabes.

Algunos 3, otros 2, otro 4. los se por que busque las diagonales

¿cuántas diagonales tiene el polígono?

hay 20

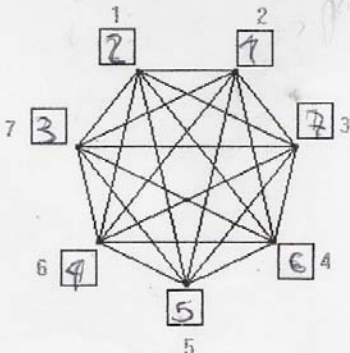
¿cómo lo calcularon?

Sumando las diagonales que encontramos.

Figura 8. Ejemplo 1 del segundo punto de la verificación contestado erróneamente.

Caso 2: La multiplicación de las diagonales

¿Cuántas diagonales tendrá el siguiente polígono regular?



¿cuántos puntos tiene?
tiene 7 puntos

¿cuántas diagonales salen de cada punto? Escribe como lo sabes.
Salen 4 diagonales de cada punto

¿cuántas diagonales tiene el polígono?
28 Diagonales tiene el polígono

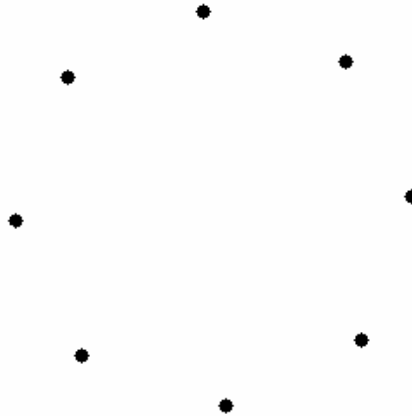
¿cómo lo calcularon?
por que son 7 puntos : y de cada uno salen 4 Diagonales
 $7 \times 4 = 28$

Figura 9. Ejemplo 2 del segundo punto de la verificación contestado erróneamente.

La última parte de la verificación está compuesta por la construcción de un polígono regular de 8 puntos. La información para desarrollar este ejercicio está dividida en 3 instrucciones para elaborar la construcción del polígono y una pregunta para responder.

En este ejercicio se busca que la pareja de estudiantes use “implícitamente” silogismos válidos para que pueda llegar a responder la pregunta planteada.

1. Construye las diagonales del siguiente polígono sin repeticiones.
2. Escribe lo que piensas en cada paso.
3. Al final escribe una afirmación de ***¿cómo calcular las diagonales del polígono formado con 8 puntos?***
4. Utiliza colores para construir las diagonales de cada punto.



Paso 1:

Paso 2:

Paso 3:

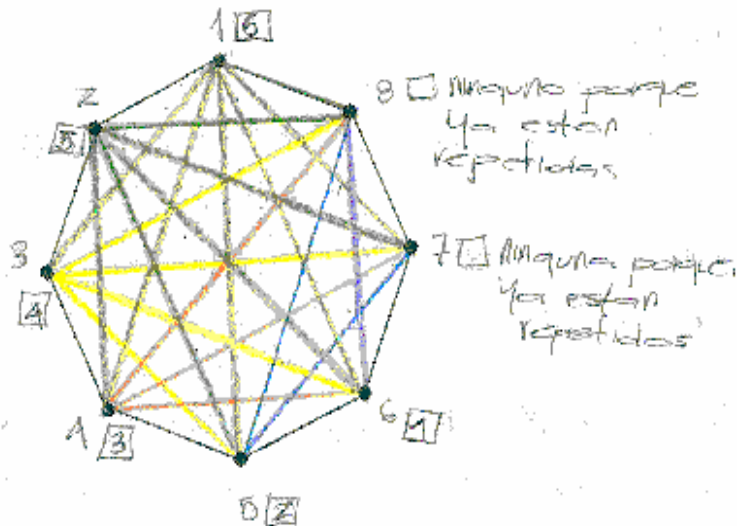
Paso 4:

Paso 5:

¿Cuántas diagonales tiene el polígono?

El 97.8% de los test lograron alcanzar lo esperado. Para esta actividad el uso de colores fue de gran ayuda para que los estudiantes se dieran cuenta de cuántas diagonales salen de cada punto “sin repetirse”. (Ver figura 10).

1. Construye las diagonales del siguiente polígono sin repeticiones.
2. Escribe lo que piensas en cada paso.
3. Al final escribe una afirmación de **¿cómo calcular las diagonales del polígono formado con 8 puntos?** *trabaja el cuento de los puntos para así con ellos poder hallar las 5 diagonales*
4. Utiliza colores para construir las diagonales de cada punto.



paso 1: Marcamos cada punto

paso 2: Encerramos el octágono

paso 3: Empezamos por cada punto a marcar las diagonales

paso 4: Detenemos las diagonales

paso 5: Y final sumamos las diagonales para obtener el resultado

¿Cuántas diagonales tiene el polígono?

sin repetir salieron $\{2\}$ diagonales

y repetidamente salieron $\{2\}$ que es el doble de los de sin repetir

Figura 10. Ejemplo 1 del tercer punto de la verificación.

En esta actividad un pequeño grupo de estudiantes “se atrevieron” a realizar razonamientos de tipo inductivo deductivo como por ejemplo: (ver figura 11).

1. Construye las diagonales del siguiente polígono sin repeticiones.
2. Escribe lo que piensas en cada paso.
3. Al final escribe una afirmación de **cómo calcular las diagonales del polígono formado con 9 puntos?**
4. Utiliza colores para construir las diagonales de cada punto.

3. Se hacen las líneas de un punto al segundo punto va el mismo # de diagonales que el primero. Los otros puntos el # de diagonales disminuye de uno hasta llegar a uno y los últimos que quedan dan cero.

8 = 3 + 5

Para saber cuántas líneas tiene el primer punto de un polígono es restando al # de puntos el 1º punto y los dos consecutivos
Ej = Polígono de 9
 $9 - 2 - 1 = 6$

Para hallar el # de diagonales solo se necesita saber cuántas diagonales tiene el 1º punto.

paso 1: contar los puntos: 9

paso 2: unir los puntos de afuera: para crear el polígono

paso 3: trazar las diagonales: diferentes colores para que sea más fácil contarlas

paso 4: Enumerar los puntos para contar las diagonales y sacar el resultado total

paso 5: contar las diagonales

• En los 2 primeros puntos se hacen todas las líneas en los demás se hacen menos o no se hacen líneas, por que
¿Cuántas diagonales tiene el polígono? puntos que se unieron con las primeras líneas.

Tiene 20

Base de datos

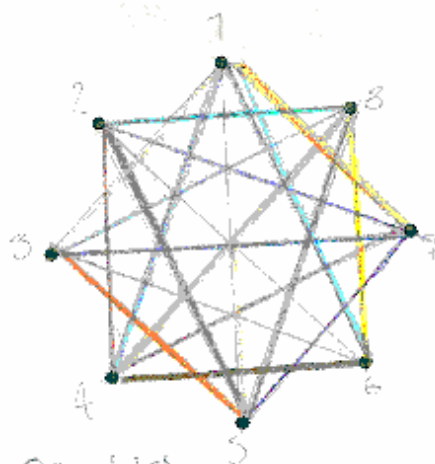
Completar la siguiente tabla

Figura 11. Ejemplo 2 del tercer punto de la verificación.

El 2.2% cometieron errores en el raciocinio. En el siguiente ejemplo los estudiantes **no** usaron los colores para construir las diagonales sino para darle una tonalidad diferente o simplemente porque la actividad lo pedía.

(Ver figura 12).

1. Construye las diagonales del siguiente polígono sin repeticiones.
2. Escribe lo que piensas en cada paso.
3. Al final escribe una afirmación de *cómo calcular las diagonales del polígono formado con 9 puntos?*
4. Utiliza colores para construir las diagonales de cada punto.



paso 1: AYAMOS LOS DIAGONALES

paso 2: ENUMERAMOS LOS PUNTOS

paso 3: UNIMOS LOS PUNTOS

paso 4: CONTAMOS LOS DIAGONALES

paso 5: (LUEGO LAS COBRAMOS)

¿ Cuántas diagonales tiene el polígono?

18

Figura 12. Ejemplo 3 del tercer punto de la verificación.

4.1.2 La exploración:

Es la segunda fase del test. En esta fase se afianzan los raciocinios adquiridos y formados en la primera fase “la verificación”.

La exploración se divide en tres puntos. El primero, es una tabla denominada “Base de Datos”; es una tabla en la que los alumnos recopilan información en la fase de verificación y además construye más información a partir de la ya obtenida. (Ver tabla 8).

Base de datos
Completa la siguiente tabla

<i>N. puntos</i>	<i>N. diagonales</i>	<i>Diferencia entre diagonales</i>
4	2	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
5	5	
6	9	
7	14	
8	<input type="checkbox"/>	
9	<input type="checkbox"/>	
10		

Tabla nº 8. Tabla para recopilar y crear información.

El 97.14% lograron el objetivo de recopilar y construir información pero, sólo el 14.4% de éstos alumnos escribieron como lo lograron.

Una pareja de alumnos dedujeron un raciocinio a partir de la comparación entre las columnas de número de puntos (o de número de lados) y la diferencia entre diagonales. Los estudiantes escribieron:

"a medida de que aumenta un punto la diferencia aumenta en uno y al sumar el número de diagonales con la diferencia, su resultado sería el número siguiente de el número de diagonales." (Ver tabla nº 9).

Base de datos

Completa la siguiente tabla

A MEDIDA DE QUE AUMENTA UN NUMERO PUNTO LA DIFERENCIA AUMENTA EN UNO, Y AL SUMAR EL NUMERO DE DIAGONALES CON LA DIFERENCIA, SU RESULTADO SERIA EL NUMERO SIGUIENTE DE EL NUMERO DE DIAGONALES.	N. puntos	N. diagonales	Diferencia entre diagonales
	4	2	3
	5	5	4
	6	9	5
	7	14	6
	8	20	7
	9	27	8
	10	35	

Tabla nº 9. Ejemplo 1 del primer punto de la exploración.

Otro grupo usó la suma para completar los datos de los cuadrados. El raciocinio fue el siguiente: "lo hicimos así: a 2 le sumamos lo que le faltaba para ser 5, a 5 le sumamos lo que le hacia falta para ser 9 y así sucesivamente". (Ver tabla 10.)

Base de datos

Completa la siguiente tabla

lo isimos asi
A 2 le sumamos le
barros le
que le hacia
falta para
ser 5, a 5
le sumamos
lo que le hacia
falta para ser
7 x asi
sucesivamente

N. puntos	N. diagonales	Diferencia entre diagonales
4	2	3
5	5	4
6	9	5
7	14	6
8	20	7
9	27	8
10	35	

Tabla nº 10. Ejemplo 2 del primer punto de la exploración.

Analizando otra clase de raciocinios, los alumnos usaron la resta como la operación para completar los cuadros.

Los alumnos escribieron lo siguiente: “nosotros llegamos ahí como: restando los puntos y el resultado era la diferencia entre diagonales. 2- luego sumamos los N. diagonales, con la diferencia y hay nos daba los 3 últimos valores que faltaban de N. diagonales”.

Los alumnos hacen dos pasos, primero efectúan la resta entre el número de diagonales del polígono de 4 puntos y el polígono de 5 puntos, luego con el polígono de 5 con el de 6 y así sucesivamente; hasta darse cuenta que la diferencia entre las diagonales es una sucesión que aumenta en uno. Luego suman el número de diagonales con la diferencia entre las diagonales; y así

concluyen que, de esta forma completaron los datos faltantes de la base de datos.

(Ver tabla 11).

Base de datos

Completa la siguiente tabla

N. puntos	N. diagonales	Diferencia entre diagonales
4	2	3
5	5	4
6	9	5
7	14	6
8	20	7
9	27	8
10	35	

nosotros llegamos hay como restando los puntos y el resultado era la diferencia entre diagonales. luego sumamos las diagonales, con la diferencia y nos daba los 3 ultimos valores q faltaban de las diagonales

Tabla nº 11. Ejemplo 3 del primer punto de la exploración.

Si hay un raciocinio al cual debemos resaltar sería el siguiente:

“Rta: nosotras comparamos por medio de la tabla de datos que los polígonos dados si tenían el número de lados que nosotros colocamos” y luego escriben como complementaron la tabla. “para poder completar la tabla al número de diagonales le sumábamos la diferencia de diagonales y nos daba el numero de diagonales del siguiente polígono.”(Ver tabla 12).

Base de datos

Completa la siguiente tabla

pta= nosotras comprobamos por medio de la tabla de datos que los poligonos dados si tenian el numero de lados que nosotras colocamos.

N. puntos	N. diagonales	Diferencia entre diagonales
4	2	3
5	5	4
6	9	5
7	14	6
8	20	7
9	27	8
10	35	

para poder completar la tabla al # de diagonales. se sumabamos la diferencia de diagonales y nos daba el # de diagonales del siguiente poligono.

Tabla nº 12. Ejemplo 4 del primer punto de la exploración.

El razonamiento es muy interesante y se puede catalogar como diferente pues, las alumnas parten de los datos que ellas mismas construyeron en la fase anterior para completar la tabla, este es uno de los objetivos de esta actividad la "Recolección de datos" y por consiguiente crean los datos no con la suma de la diferencia de las diagonales sino haciendo la resta entre las casillas del número de diagonales, este método fue muy valedero pues, lo hicieron de una forma no convencional.

El 2,86% faltante del primer punto les corresponde a los alumnos que **no** pudieron completar la tabla; más aun, no escribieron cómo completaron la tabla. A continuación veremos 3 ejemplos de tablas que **no** alcanzaron con el objetivo. (Ver tablas 13, 14 y 15).

Ejemplo 1:

Base de datos

Completa la siguiente tabla

<i>N. puntos</i>	<i>N. diagonales</i>	<i>Diferencia entre diagonales</i>
4	2	8
5	5	25
6	9	48
7	14	24
8	3	9
9	1	20
10	2	

Tabla nº 13. Ejemplo 1 del primer punto de la exploración contestado erróneamente.

Ejemplo 2:

Base de datos

Completa la siguiente tabla

<i>N. puntos</i>	<i>N. diagonales</i>	<i>Diferencia entre diagonales</i>
4	2	3
5	5	4
6	9	5
7	14	5
8	19	3
9	22	4
10	26	

Tabla nº 14. Ejemplo 2 del primer punto de la exploración contestado erróneamente.

Ejemplo 3:

Base de datos

Completa la siguiente tabla

<i>N. puntos</i>	<i>N. diagonales</i>	<i>Diferencia entre diagonales</i>
4	2	3
5	5	4
6	9	5
7	14	2
8	16	2
9	18	2
10	20	2

Tabla nº 15. Ejemplo 3 del primer punto de la exploración contestado erróneamente.

Hasta ahora, la verificación y la primera parte de la exploración se ha dedicado a proporcionar el número de puntos (o lados) para calcular el número de diagonales.

En la segunda parte de la exploración se proporciona el número de diagonales para que calculen el número de lados.

Construye un polígono que tenga 27 diagonales. ¿cómo lo harías? Escríbelo.

El 97.15% de los test acertó en la solución del punto. El razonamiento más empleado fue: *“mirando la base de datos determinamos que con 9 puntos salen 27 diagonales.”* (Ver figura 13).

Del 97.15% de las respuestas, el 93.38% se rigió por la solución construida en la tabla de base de datos.

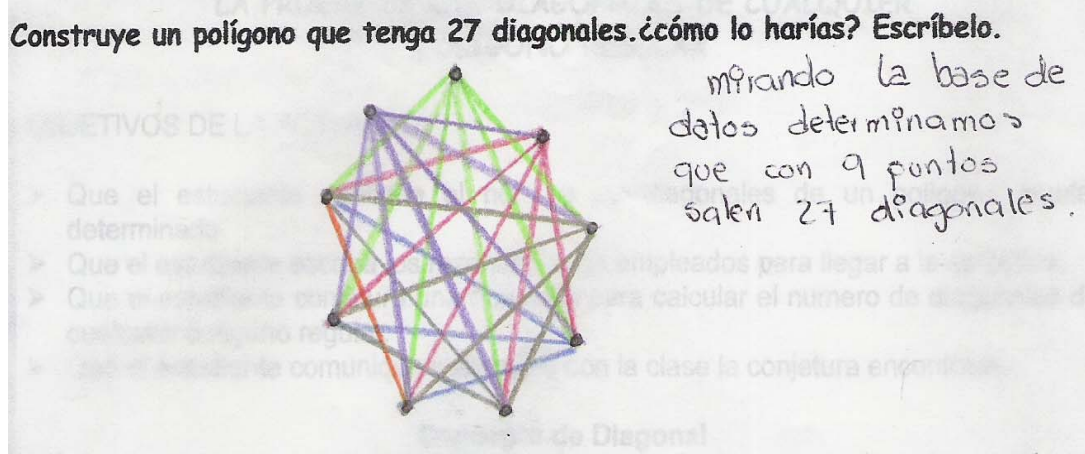


Figura 13. Ejemplo 1 del segundo punto de la exploración.

Una pareja de alumnos realizaron el siguiente raciocinio para llegar a la construcción del polígono: Buscaron dos números que multiplicados diera como resultado 27, estos son: $9 \cdot 3 = 27$. Luego al número 9 le resta el 3 para encontrar las diagonales salientes en el primer punto: $9 - 3 = 6$. Y para terminar, hacen la suma sucesiva de las diagonales: $6 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 + 0 = 27$. (Ver figura 14).

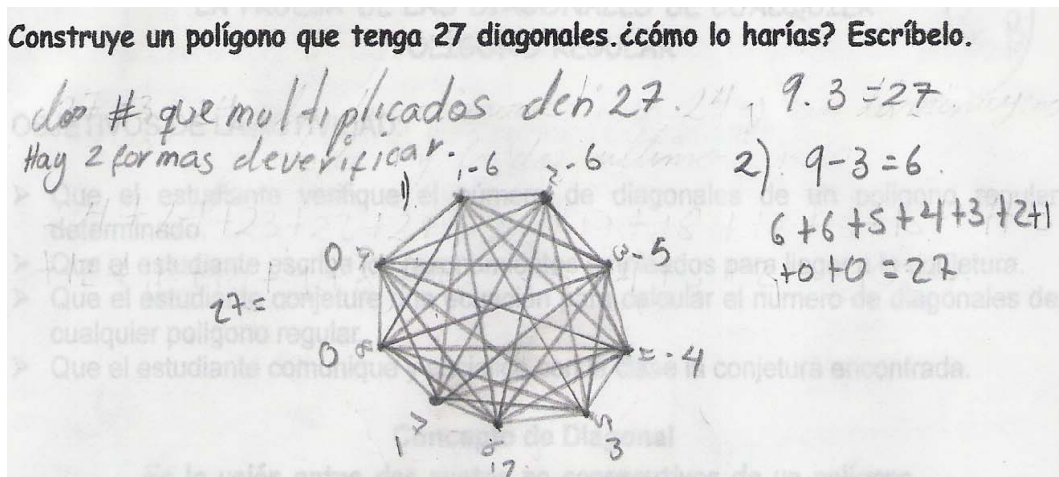


Figura 14. Ejemplo 2 del segundo punto de la exploración

Cada vez que se avanza en los ejercicios del test el raciocinio usado en el punto anterior debe ser empleado para resolver el siguiente punto.

La forma como los alumnos de la figura 14 resolvieron el punto, es una muestra de la capacidad de deducción dada por el sentido lógico. En este ejercicio los alumnos proponen un método para calcular el número de puntos que debe tener el polígono para que tenga 27 diagonales. Mediante la multiplicación y la resta encuentran la forma de conocer el dato del número de puntos del polígono, de aquí podemos decir que ya se empiezan a realizar las primeras conjeturas aunque, no forma generalizada sino en un caso particular.

Otro grupo razona así: “para resolver este empezamos al revés”.

Los alumnos resolvieron el ejercicio así: el dato que le ofrecía el punto era, que con un polígono de **27 diagonales** tenían que averiguar el número de lados del polígono. El razonamiento fue el siguiente: tomaron 27 lo multiplicaron por 2, por qué las diagonales se repiten. Luego de multiplicar $27 \cdot 2 = 54$, dividen a 54 entre 9 para averiguar cuantas diagonales salen de cada punto. (Ver figura 15).

Construye un polígono que tenga 27 diagonales. ¿cómo lo harías? Escríbelo.

27 diagonales
 $\times 2$
 54 / 9 puntos
 6 diagonales por punto

Para resolver este empezamos al revés

Si sabemos que para construir el número de lados de un polígono se multiplican las diagonales que salen de un punto, por el número total de puntos del polígono y se divide el 2

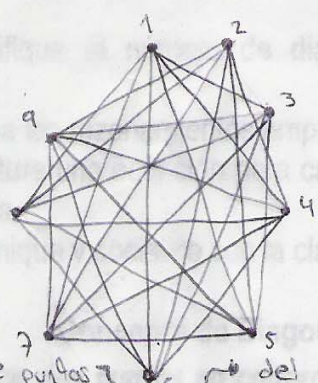


Figura 15. Ejemplo 3 del segundo punto de la exploración

El cálculo de las diagonales depende del método utilizado. Si se suman las diagonales que salen de cada punto o si se multiplica y luego las divide. El siguiente razonamiento nos explica como lo podríamos hacer: “con repeticiones o sin repeticiones”. (Ver figura 16).

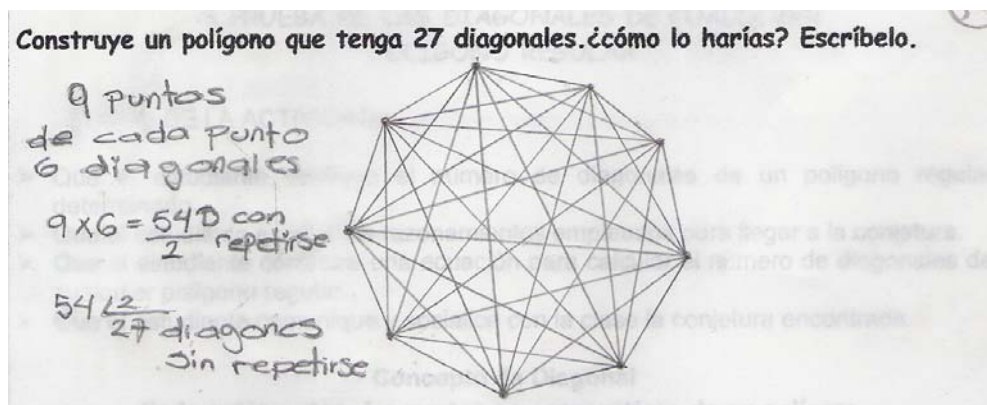


Figura 16. Ejemplo 4 del segundo punto de la exploración

La deducción de este grupo es que si las diagonales se repiten el ejercicio se plantea de diferente forma y además, se usa un calculo diferente a cuando no se repiten las diagonales

La tercera y última parte de la exploración, busca que los estudiantes empiecen a generalizar su método.

Esta es la pregunta de la tercera parte de la exploración.

¿Cuántas diagonales puedes formar con un polígono regular de 16 puntos?

El 60.71% respondió la pregunta acertadamente pero, usando la base de datos.

Como ya vimos la tabla nos ofrece la creación y recopilación de datos hasta de un decágono. Este porcentaje de estudiantes ampliaron la tabla para encontrar el número exacto de las diagonales del polígono de 16 lados.

(Ver figura 17,18)

¿Cuántas diagonales puedes formar con un polígono regular de 16 puntos?
 se pueden formar 104 diagonales
 y lo saque este resultado por ensayo a ser otra
 tabla siguiendo la secuencia de la anterior.

Figura 17. Ejemplo 1 del tercer punto de la exploración

Veamos la ampliación de la tabla:


¿Cuántas diagonales puedes formar con un polígono regular de 16 puntos?

N. puntos	N. diagonales	Entre Puntos
11	44	9
12	54	10
13	65	11
14	77	12
15	90	13
16	104	14

Figura 18. Ampliación del ejemplo 1 del tercer punto de la exploración

Algunos perfeccionaron su método. El dato ofrecido por el ejercicio es, con un polígono de 16 puntos calcule las diagonales; los alumnos saben que para calcular el número de diagonales del primer y segundo punto, se toma el número total de puntos menos 3 y seguidamente se descuenta en uno por cada punto del polígono. (Ver figura 19)

¿Cuántas diagonales puedes formar con un polígono regular de 16 puntos?



$$13 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6$$

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 + 0 =$$

$$104$$

Figura 19. Ejemplo 2 del tercer punto de la exploración

El siguiente 10,75% usa el razonamiento inductivo-deductivo. Los alumnos ya intentan generalizar un método para encontrar el número de puntos o lados. Veamos dos ejemplos en las *figuras 20 y 21*:

Ejemplo 1:

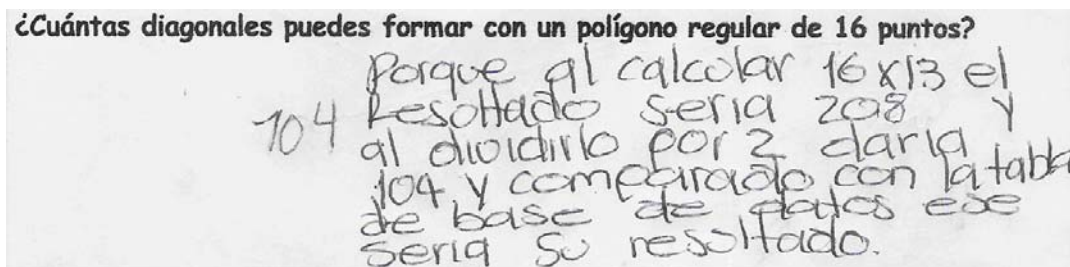


Figura 20. Ejemplo 3 del tercer punto de la exploración

Ejemplo 2:

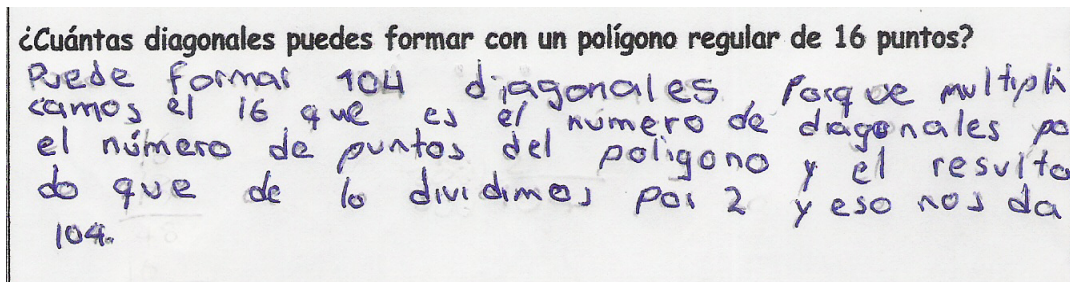


Figura 21. Ejemplo 4 del tercer punto de la exploración.

El 20.34% de los test realizaron una primera conjetura de la ecuación para calcular el número de diagonales para 16 puntos.

Veamos dos ejemplos en las figuras 22 y 23.

Ejemplo 1:

¿Cuántas diagonales puedes formar con un polígono regular de 16 puntos?

$$\frac{16(16-3)}{2} = 104 \text{ Diagonales.}$$

Tomamos el número de puntos y le restamos 3 para obtener el # de diagonales y después multiplicamos el resultado con el # de puntos y lo dividimos en 2

Figura 22. Ejemplo 5 del tercer punto de la exploración.

Ejemplo 2:

¿Cuántas diagonales puedes formar con un polígono regular de 16 puntos?

Formula)

$$\# \text{ puntos} - 3 . \# \text{ puntos} \div 2$$
$$16 - 3 . 16 \div 2$$
$$13 . 16 \div 2$$
$$208 \div 2 = 104$$

Figura 23. Ejemplo 6 del tercer punto de la exploración.

El 8.2% restante no alcanzaron al objetivo de la actividad. Estos alumnos intentaron usar la tabla de datos pero, no realizaron un buen cálculo.

(Ver figura 24).

¿Cuántas diagonales puedes formar con un polígono regular de 16 puntos?

se pueden formar 77 diagonales con un polígono regular de 16 puntos al mirar la tabla de datos llegue a este resultado

Figura 24. Ejemplo 7 del tercer punto de la exploración.

4.1.3 La Conjetura.

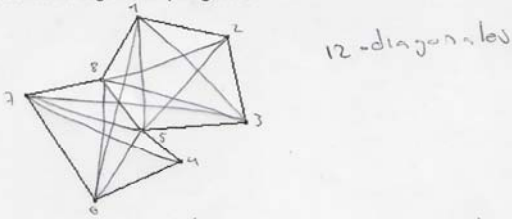
Es la fase final del test. Usando los razonamientos obtenidos en las dos fases anteriores, se espera que los alumnos formalicen con una ecuación para calcular las diagonales de cualquier polígono regular. La fase final está dividida en tres partes. La primera parte, es la conjetura de la ecuación; la segunda parte, calcular las diagonales de un polígono irregular; y la tercera parte, es la verificación de la ecuación que los estudiantes construyeron.

En esta fase se invirtieron los porcentajes de aprobación. El 19.2% construyó la ecuación y la verificó acertadamente. Veamos algunos ejemplos en las figuras 25, 26 y 27.

Teniendo en cuenta lo anterior escribe una ecuación para calcular el número de diagonales para "n" puntos

puntos - 3. # puntos ÷ 2 = # diagonales.
(si el polígono es normal)

¿Le puedes calcular las diagonales al siguiente polígono?



12 diagonales

Justifica tú respuesta:

puntos - 3. # puntos ÷ 2 = # diagonales que estén en los puntos que se encuentran hacia adentro = # diagonales
(Esta ecuación es para si el polígono es deficiente)

Utiliza los resultados anteriores y Prueba la ecuación deduciste para calcular el número de diagonales de un polígono de "n" puntos:

$n = 100$ $100 - 3. 100 \div 2 =$ $97. 100 \div 2 =$ $9700 \div 2 = 4850$	$n = 78$ $78 - 3. 78 \div 2 =$ $75. 78 \div 2 =$ $5850 \div 2 = 2925$	$n = 1000$ $1000 - 3. 1000 \div 2 =$ $997. 1000 \div 2 =$ $997000 \div 2 = 498.500$
---	---	---

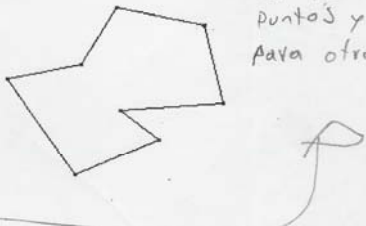
Figura 25. Ejemplo 1 de la tercera fase "la conjetura".

Teniendo en cuenta lo anterior escribe una ecuación para calcular el número de diagonales para "n" puntos

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

hicimos la resta de $n-3$ para saber el número de diagonales, lo multiplicamos por el número de puntos (n) y a esa ecuación la dividimos por 2.

¿Le puedes calcular las diagonales al siguiente polígono?



Si para algunos puntos y hay un no para otros

Justifica tú respuesta:

Utiliza los resultados anteriores y Prueba la ecuación deduciste para calcular el número de diagonales de un polígono de "n" puntos:

1) $\frac{10 \cdot (10-3)}{2} = \frac{10 \cdot 7}{2} = \frac{70}{2} = 35$ Diagonales

2) $\frac{20 \cdot (20-3)}{2} = \frac{20 \cdot 17}{2} = \frac{340}{2} = 170$ Diagonales

3) $\frac{5 \cdot (5-3)}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$ Diagonales

Figura 26. Ejemplo 2 de la tercera fase "la conjetura".

Teniendo en cuenta lo anterior escribe una ecuación para calcular el número de diagonales para "n" puntos

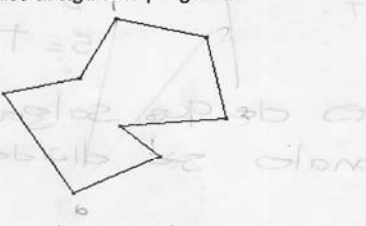
ecuación normal

$n \cdot D = T \div 2 = 9 \cdot 6 = 54 \div 2 = 27$

to dividimos en de porque la mitad de diagonales se repiten

n = número de todos los puntos
D = diagonales que sale de cada punto
T = total de diagonales del polígono

¿Le puedes calcular las diagonales al siguiente polígono?



Justifica tú respuesta:

no se pueden trazar diagonales por que algunas quedarían fuera del plano

Utiliza los resultados anteriores y Prueba la ecuación deduciste para calcular el número de diagonales de un polígono de "n" puntos:

20 = puntos.
 $20 \cdot 17 = 340 \div 2 = 170$ diagonales.
 $9 \cdot 6 = 54 \div 2 = 27$ total diagonales

Figura 27. Ejemplo 3 de la tercera fase "la conjetura".

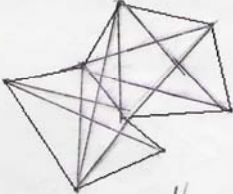
El 7.13% realizó la conjetura de la ecuación pero, no probaron la ecuación. (Ver figuras 28 y 29).

Teniendo en cuenta lo anterior escribe una ecuación para calcular el número de diagonales para "n" puntos

$d = \frac{N \cdot P \cdot X}{2}$ porque al calcular el número de puntos por el número de diagonales por punto y dividido en 2 daría el resultado.

$d =$ diagonales
 $NP =$ Número de puntos
 $X =$ Diagonales x cada punto
 $Z =$ División
 $\cdot =$ Multiplicación

¿Le puedes calcular las diagonales al siguiente polígono? Si hay 11



Justifica tú respuesta: porque por la forma que tiene este polígono no se puede formar sino solo 11.

Utiliza los resultados anteriores y Prueba la ecuación deduciste para calcular el número de diagonales de un polígono de "n" puntos:

Figura 28. Ejemplo 4 de la tercera fase "la conjetura".

Teniendo en cuenta lo anterior escribe una ecuación para calcular el número de diagonales para "n" puntos

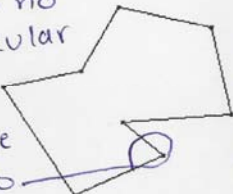
~~Se resta~~ ~~# de~~ ~~son~~ ~~104~~

$$\frac{N - (N - 3)}{2}$$

Se multiplica el número de puntos por la resta.

¿Le puedes calcular las diagonales al siguiente polígono?

A este polígono no se le puede calcular el # de diagonales siguientes pues en el punto siguiente



no se le podía porq' ese va antes y para trazarle la diagonal se saldría del polígono.

Justifica tú respuesta:

Utiliza los resultados anteriores y Prueba la ecuación deduciste para calcular el número de diagonales de un polígono de "n" puntos:

Figura 29. Ejemplo 5 de la tercera fase "la conjetura".

El siguiente 3.3% no construyeron la ecuación pero, si escribieron en razonamiento que generaliza el método que usaron en las fases anteriores. (Ver figuras 30 y 31).

Teniendo en cuenta lo anterior escribe una ecuación para calcular el número de diagonales para "n" puntos

a un polígono con "n" puntas le sumamos la diferencia de las anteriores diagonales y obteniamos como resultado las diagonales del siguiente punto.

¿Le puedes calcular las diagonales al siguiente polígono?

Si se puede y en total son **13**

Azul = 4
Naranja = 4
Morado = 3
Verde = 2

Justifica tú respuesta:
Pues las diagonales que encontramos son uniones de puntos no consecutivos y no se repiten.

Utiliza los resultados anteriores y Prueba la ecuación deduciste para calcular el número de diagonales de un polígono de "n" puntos:

Figura 30. Ejemplo 6 de la tercera fase "la conjetura".

Teniendo en cuenta lo anterior escribe una ecuación para calcular el número de diagonales para "n" puntos

para encontrar la ecuación sin mprar la base de datos se puede concluir que si multiplicamos el número de puntos por el número de diagonales y después lo dividimos por el número de puntos lo obtendremos el resultado

¿Le puedes calcular las diagonales al siguiente polígono?

No

Justifica tú respuesta:
Ya que para ciertos puntos no se puede sacar sus diagonales correspondientes

Utiliza los resultados anteriores y Prueba la ecuación deduciste para calcular el número de diagonales de un polígono de "n" puntos: Debemos hacer el mismo proceso para la ecuación

Figura 31. Ejemplo 7 de la tercera fase "la conjetura".

El 4.21% argumentan que para calcular el número de diagonales de cualquiera polígono es necesario realizar una tabla de base de datos.


(Ver figuras 32 y 33).

Teniendo en cuenta lo anterior escribe una ecuación para calcular el número de diagonales para "n" puntos

hacer una tabla que contenga el número de puntos, n. Diagonales y Dif entre diagonales y seguir la frecuencia hasta el número indicado.

¿Le puedes calcular las diagonales al siguiente polígono?

HAY 20 DIAGONALES



Justifica tú respuesta:

HACIENDO LA FRECUENCIA DE LA TABLA


Utiliza los resultados anteriores y Prueba la ecuación deduciste para calcular el número de diagonales de un polígono de "n" puntos:

Figura 32. Ejemplo 8 de la tercera fase "la conjetura".

Teniendo en cuenta lo anterior escribe una ecuación para calcular el número de diagonales para "n" puntos

*según lo que pudimos observar en el cuadro la diferencia entre los puntos, es el resultado es consecutivo

¿Le puedes calcular las diagonales al siguiente polígono?



Justifica tú respuesta:

Así es si, solo que algunas van a quedar por fuera de él

Utiliza los resultados anteriores y Prueba la ecuación deduciste para calcular el número de diagonales de un polígono de "n" puntos:

$$\left. \begin{array}{l} 4 \rightarrow 2 > 3 \\ 5 \rightarrow 5 > 4 \\ 6 \rightarrow 9 > 4 \\ 7 \rightarrow 14 > 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{podemos observar que los} \\ \text{#s son consecutivos y que la} \\ \text{diferencia entre ellos es 1} \end{array}$$

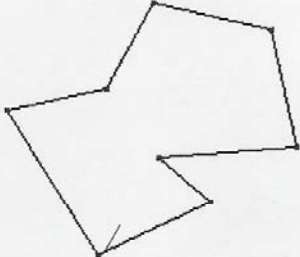
Figura 33. Ejemplo 9 de la tercera fase "la conjetura".

El 66.16% intentan construir la ecuación y tratan de argumentar pero, no concluyen acertadamente. (Ver figuras 34 y 35).

Teniendo en cuenta lo anterior escribe una ecuación para calcular el número de diagonales para "n" puntos

ECUACIÓN: $n = y$ → Puntos → Diagonales.
 JUSTIFICACIÓN: $n =$ Pues depende de el número de puntos podemos decir cuantas diagonales encontraremos.

¿Le puedes calcular las diagonales al siguiente polígono?



Justifica tú respuesta: Pues que de este polígono no podemos calcular en sí todas las diagonales porque se interseccionan y a que esto no puede suceder.

Utiliza los resultados anteriores y Prueba la ecuación deduciste para calcular el número de diagonales de un polígono de "n" puntos:

Puntos - Diagonales.
 $n = y$
 $10 = 35$
 $11 = 44$
 $12 = 54$

JUSTIFICACIÓN: Si decimo que con 10 puntos tenemos 35 diagonales, con 11 puntos 44 diagonales y con 12 puntos 54 diagonales podemos ver que cada vez que agregamos un punto de más en el polígono se aumenta el número en 1 más que la anterior.

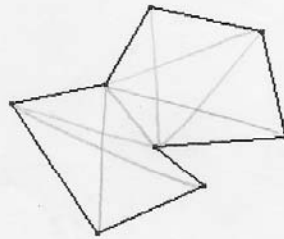
Figura 34. Ejemplo 10 de la tercera fase "la conjetura".

Teniendo en cuenta lo anterior escribe una ecuación para calcular el número de diagonales para "n" puntos

$N = \text{PUNTOS}$
 $X = \text{DIAGONALES}$
 $N \cdot X = \text{NUMERO DE DIAGONAL} = (X)$

EN ESTE PUNTO NOS DICE QUE N ES EL NOMBRE DE LOS PUNTOS Y A QUE COLOCARLE INCOGNITA A LA DIAGONAL QUE ES X. DESPUES MULTIPLICAMOS Y NOS DA EL RESULTADO.

¿Le puedes calcular las diagonales al siguiente polígono?



Justifica tú respuesta:

EL POLIGONO TIENE 8 DIAGONALES Y LOS SAQUE UNIENDO LOS PUNTOS QUE NO ERAN CONSECUTIVOS.

Utiliza los resultados anteriores y Prueba la ecuación deduciste para calcular el número de diagonales de un polígono de "n" puntos:

$8 \cdot 1 = 8 \text{ DIAGONALES}$
 $8 \cdot 18$

$N = 8$
 $X = 0$

Figura 35. Ejemplo 11 de la tercera fase "la conjetura".

La actividad mostró diferentes formas de razonamientos, deducciones y conjeturas. Algunos grupos no alcanzaron la conjetura de la ecuación ni tampoco llegaron a formar un juicio, por que no tuvieron claridad en la construcción de las diagonales del polígono. Por otro lado se encuentra un grupo de alumnos que aunque no conjeturaron una ecuación si llegaron a construir un juicio válido de cómo se puede realizar la diagonalización de un polígono regular. El otro caso a analizar fueron los estudiantes que sí lograron el objetivo trazado en su totalidad,

aunque fueron pocos, nos mostraron que la capacidad de conjetura a este nivel estudiantil es muy bueno y que si se puede motivar el gusto por las matemáticas.

4.2 LA APLICACIÓN DEL TEST: LA SUMA DE LOS “N” PRIMEROS NÚMEROS IMPARES⁶.

La suma de los “n” números impares también es conocido como los números cuadrados. Reciben este nombre por la forma geométrica que toman cada vez que se le suma un número impar; además, por qué el resultado de la suma se puede expresar como un número cuadrado.

Por lo anterior, consideramos que sería una buena actividad académica crear un test para que los alumnos conjeturen una ecuación para calcular el resultado de la suma de cuales quier números impares.

El test se divide en tres pasos; la verificación, la exploración y la conjetura.

El total de los test aplicados fueron 42 resueltos en parejas, el número de alumnos que participaron en la actividad fueron 80.

El 95.2% se resolvieron acertadamente y cumplieron con el objetivo esperado, tan sólo el 4.76% no respondieron satisfactoriamente no respondieron los test.

⁶ Ver anexo 4

4.2.1 La Verificación.

La primera fase del test es la verificación. La verificación está compuesta por una gráfica y por 6 preguntas. Se obtuvo como resultado el 98.3% acertaron y el restante 1.7% no acertó.

La gráfica busca que los alumnos empiecen a elaborar la secuencia de números impares con su respectiva suma. (Ver figura 36).

Completa la figura de las dos siguientes casillas con sus respectivos números.

1 + 3 + 5 + 7 + 9

Sequimos la secuencia de los #s impares y según esta secuencia sumamos los números y los representamos en los puntos.

¿Cuál es el resultado de sumar los dos primeros impares? 4
 un par } $3+1=4$

¿Cuál es el resultado de sumar los tres primeros impares? 9
 un impar } $4+5=9$

¿Cuál es el resultado de sumar los cuatro primeros impares? 16
 un par } $9+7=16$

¿Cuál es el resultado de sumar los cinco primeros impares? 25
 un impar } $16+9=25$

Figura 36. Ejemplo 1 de la primera fase “la verificación”.

Se obtuvieron resultados importantes, pues los alumnos aparte de encontrar la secuencia dedujeron algunas generalidades o conjeturas sobre la suma de los números impares como resultado un número par, que al sumar 3 impares se obtiene como resultado un número impar, y así sucesivamente. Veamos dos ejemplos en las figuras 37 y 38.

Ejemplo 1:

Completa la figura de las dos siguientes casillas con sus respectivos números.

¿Cuál es el resultado de sumar los dos primeros impares? 4
 AL SUMAR 2 IMPARES EL RESULTADO ES UN N° PAR

¿Cuál es el resultado de sumar los tres primeros impares? 9
 AL SUMAR 3 NÚMEROS IMPARES EL RESULTADO DA UN N° IMPAR

¿Cuál es el resultado de sumar los cuatro primeros impares? 16
 AL SUMAR UN NÚMERO IMPAR VECES PARES EL RESULTADO FINAL ES UN NÚMERO PAR

¿Cuál es el resultado de sumar los cinco primeros impares? 25
 AL SUMAR UN N° IMPAR VECES IMPARES EL RESULTADO FINAL ES UN N° IMPAR

A GRÁFICA VA AUMENTANDO EQUILIBRAMENTE TANTO HORIZONTALMENTE COMO VERTICALMENTE PARTIENDO DE UN CENTRO QUE COMIENZA EN UN N° IMPAR

Figura 37. Ejemplo 2 de la primera fase "la verificación".

Ejemplo 2:

Completa la figura de las dos siguientes casillas con sus respectivos números.

¿Cuál es el resultado de sumar los dos primeros impares? 4
 al sumar dos números impares da un par porque ej: 3+3=6 | 5+5=10 Tantas dan un par

¿Cuál es el resultado de sumar los tres primeros impares? 9
 al sumar 3 números impares da un número impar ej: 1+3+5=9 lo que es un número impar

¿Cuál es el resultado de sumar los cuatro primeros impares? 16
 1+3+5+7=16 * al sumar 4 números impares da un par ej: 3+9+27+13=42 número par

¿Cuál es el resultado de sumar los cinco primeros impares? 25
 1+3+5+7+9=25 * al sumar 5 números impares da un número impar ej: 1+1+15+1+3+5=25 número impar

los puse porque según la secuencia de los números impares

Figura 38. Ejemplo 3 de la primera fase "la verificación".

Otro grupo, responde las preguntas a partir de la suma de los puntos de la figura geométrica luego, aplica la definición del área del cuadrado para encontrar así el número cuadrado correspondiente a esa figura. (Ver figura 39).

Completa la figura de las dos siguientes casillas con sus respectivos números.

¿Cuál es el resultado de sumar los dos primeros impares? 4
 * xq' al unir los puntos del 3 con el punto del 1 no dio un cubito de 4 lechitos
 ¿Cuál es el resultado de sumar los tres primeros impares? 9
 * xq' al unir los 5 puntos siguientes con los 3 y el 1 anterior nos dio 9
 ¿Cuál es el resultado de sumar los cuatro primeros impares? 16
 * xq' al unir los 7 puntos siguientes con los 3 y el 1 anterior nos dio 16
 ¿Cuál es el resultado de sumar los cinco primeros impares? 25
 * xq' al unir los 9 puntos siguientes con los 7 el 3 y el 1 nos dio 25

Figura 39. Ejemplo 4 de la primera fase “la verificación”.

La segunda parte de la verificación, consiste en completar una frase, responder una pregunta y expresar la solución en potenciación. (Ver figuras 40 y 41).

Completa la siguiente frase:

Si se sabe que la suma de los cinco primeros números impares es: $25^{No\ Impar}$ ¿cuál será el resultado de sumar los primeros 10 primeros números impares?. Exprésalo en potenciación. Escribe cómo lo obtuviste. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100$

$10^2 = 100$ SUMAMOS LOS 10 NÚMOS IMPARES Y EL RESULTADO FUE IGUAL A CIENTO DESPUÉS DE CAMOS UN NÚMERO QUE ELEVADO A UNA POTENCIA SU RESULTADO FUERA IGUAL A 100, Y CONCLUIAMOS QUE CUANDO MULTIPLICAMOS 10×10 EL RESULTADO ES 100 Y LO CONVERTIMOS EN PRUEBA UNA POTENCIA QUE FUE 10^2

Figura 40. Ejemplo 5 de la primera fase “la verificación”.

completa la siguiente frase:

si se sabe que la suma de los cinco primeros números impares es: 25 es IMPAR, ¿cuál será el resultado de sumar los primeros 10 primeros números impares?. Exprésalo en potenciación. Escribe cómo lo obtuviste.

$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 = 100 = \sqrt{100} = 10 \times 10 = 100$ saque Par 2
10² = 100 busque un numero que multiplicado dos veces Me Deña 100

como hay 10 numeros, esa cantidad la elevamos a la DOS. ej. PRUEBA

Figura 41. Ejemplo 6 de la primera fase “la verificación”.

4.2.2 La Exploración:

La segunda fase del test es la exploración. La exploración consiste en una secuencia de impares, de 3 preguntas y una tabla de datos.

De la exploración se espera que los estudiantes lleguen a la generalización y a la construcción de los datos. Lograron lo esperado el 97.98% y restante 2.02% no lo logró.

Veamos algunos ejemplos en las siguientes figuras 42 y 43.

Ejemplo 1:

¿Cuál debe ser el valor del séptimo impar de los sumandos? EL SÉPTIMO IMPAR ES 13
 ¿SUMA DE LOS 7 PRIMEROS IMPARES ES 49

¿Cuál es el resultado de sumar los ocho primeros números impares?

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$

Si la suma de ciertos números impares es 121. ¿Cuáles serán esos números impares?
 $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21 = 121$

Justifica tú respuesta:
PO' ES EL NO QUE VA SEGUN LA SECUENCIA DE N° IMPARES QUE LLEVAMOS.

BASE DE DATOS
 Completa la tabla y generaliza en la última casilla

SUMAS	RESULTADO	POTENCIACIÓN
1	1	1 ²
1+3	4	2 ²
1+3+5	9	3 ²
1+3+5+7	16	4 ²
1+3+5+7+9+11	36	6 ²
1+3+5+7+...+19	100	10 ²

Figura 42. Ejemplo 1 de la segunda fase “la exploración”.

Ejemplo 2:

¿Cuál debe ser el valor del séptimo impar de los sumandos?
 el 7 número IMPAR es 13 y sumado la secuencia da 49, entonces como es el séptimo se pone 7 a la DOS.
 ¿Cuál es el resultado de sumar los ocho primeros números impares?

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$
 Lo hicimos de la misma forma que el ejercicio de arriba

Si la suma de ciertos números impares es 121. ¿Cuáles serán esos números impares?
 $121 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21$
 $11 \times 11 = 121$ *sumamos los 11 números impares

Justifica tu respuesta:

BASE DE DATOS

Completa la tabla y generaliza en la última casilla

SUMAS	RESULTADO	POTENCIACIÓN
1	1	1^2
1+3	4	2^2
1+3+5	9	3^2
1+3+5+7	16	4^2
1+3+5+7+...+...	25	5^2
1+3+5+7+...+...	36	6^2

Figura 43. Ejemplo 2 de la segunda fase “la exploración”.

4.2.3 La Conjetura:

La tercera fase del test es la conjetura y la verificación de la ecuación. (Ver figuras 44 y 45).

Elabore una ecuación para justificar tu respuesta

$$n^2 = n \cdot n$$

Prueba la ecuación que dedujiste con algunos ejemplos:

- $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$
- $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$
- $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

Figura 44. Ejemplo 1 de la tercera fase “la conjetura”.

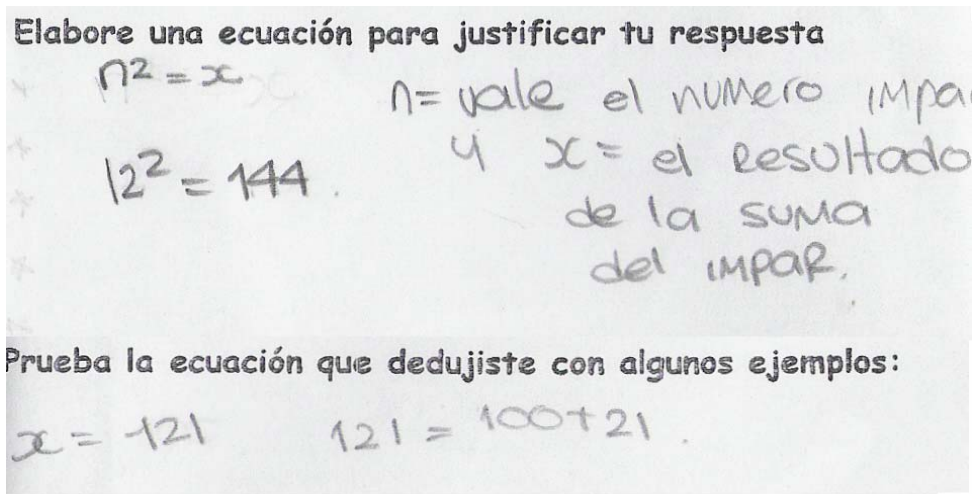


Figura 45. Ejemplo 2 de la tercera fase “la conjetura”.

Observemos el 4.76% de los test que no se resolvieron satisfactoriamente⁷.

Veamos las figuras 46 y 47.

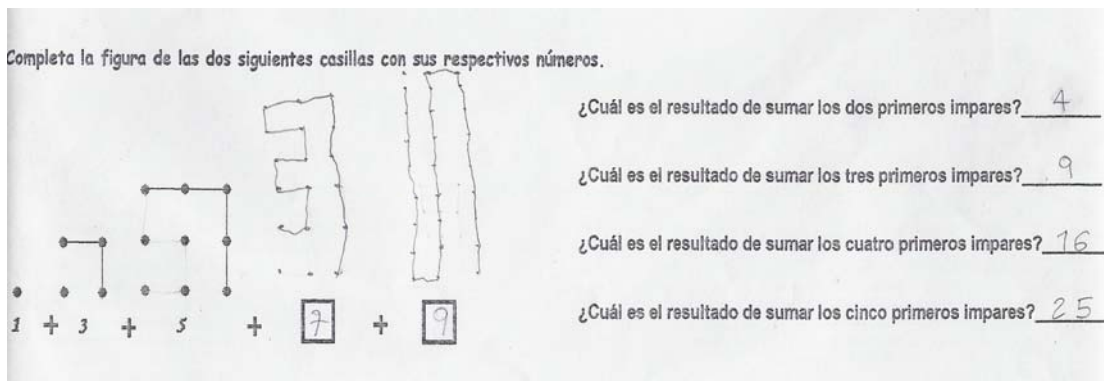


Figura 46. Ejemplo 1 de la tercera fase que contestaron erróneamente.

⁷ Ver en el anexo 6 el ejemplo de un test resuelto de forma incorrecta

Completa la siguiente frase:

Si se sabe que la suma de los cinco primeros números impares es: 25 ¿cuál será el resultado de sumar los primeros 10 primeros números impares?. Exprésalo en potenciación. Escribe cómo lo obtuviste.

100 $10 \times 10 = 100$ lo obtuvimos sumando cinco primeros números impares
 $10^2 = 100$

PRUEBA

¿Cuál debe ser el valor del séptimo impar de los sumandos?

¿Cuál es el resultado de sumar los ocho primeros números impares?

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$$

Si la suma de ciertos números impares es 121. ¿Cuáles serán esos números impares?

$$121 = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21$$

Justifica tú respuesta:

Somamos muchos números impares y así nos dio el resultado

Prueba la ecuación que dedujiste con algunos ejemplos:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

BASE DE DATOS

Completa la tabla y generaliza en la última casilla

SUMAS	RESULTADO	POTENCIACIÓN
1	1	1^2
1+3	4	2^2
1+3+5	9	3^2
1+3+5+7	16	4^2
1+3+5+7+9+11	36	6^2
1+3+5+7+9+11+13	49	7^2
1+3+5+7+9+11+13+15	64	8^2

Elabore una ecuación para justificar tu respuesta

$$40 + 40 + 1 = 81 = 9^2$$

Figura 47. Ejemplo 2 de la tercera fase que contestaron erróneamente

5. ANÁLISIS GRÁFICO DE LOS RESULTADOS

Los gráficos estadísticos nos muestran la información de forma especial, nos la enseña con un sin número de características que nos permite alcanzar la máxima interpretación de los datos obtenidos.

Para nuestro caso, los gráficos estadísticos nos permiten visualizar la efectividad que tuvieron la aplicación de los dos test.

El análisis gráfico, se le aplicará a cada una de las fases del test; además, se hará punto a punto, de esta forma podemos determinar en que parte del test el alumno falla o se afianza en la construcción de la conjetura.

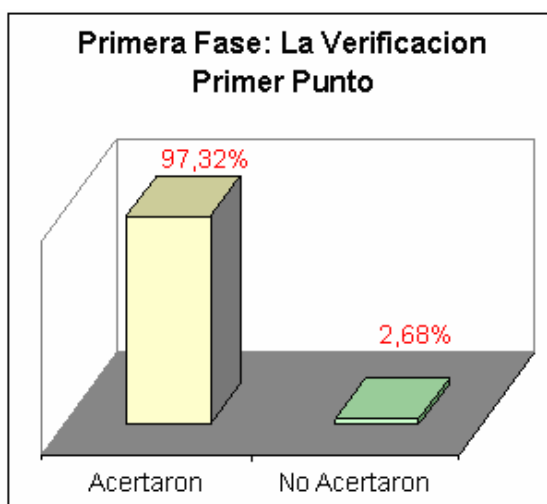
5.1 ANÁLISIS GRÁFICO DEL TEST: LA DIAGONALIZACIÓN DEL POLÍGONO REGULAR.

Comenzaremos por el análisis de la verificación y sus tres puntos, luego continuamos con la exploración y sus tres puntos y por último, con la conjetura y su prueba.

5.1.1 Análisis de la verificación

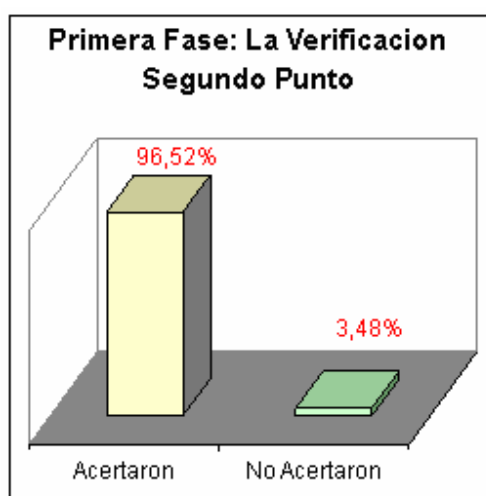
Las principales acciones de esta fase son la observación, manipulación de objetos, la construcción y el raciocinio.

En el *primer punto*, las acciones utilizadas fueron la observación y la manipulación de objetos, acertó el 97.32% de los test y no acertaron el 2.68%. (Ver gráfica 1).



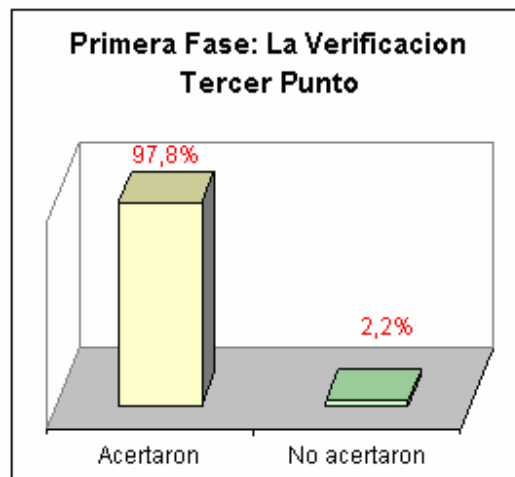
Gráfica 1. La verificación “la observación y la manipulación de objetos”

En el *segundo punto*, las acciones utilizadas fueron la observación y el raciocinio, el acierto fue del 96.52% y no acertó el 3.48%. (Ver gráfica 2).



Gráfica 2. La verificación “la observación y raciocinio”

En el *tercer punto*, las acciones utilizadas fueron la manipulación de objetos y la construcción de las diagonales, contestaron acertadamente el 97.8% y no lo hicieron adecuadamente 2.2%. (Ver gráfica 3).



Gráfica 3. La verificación “manipulación de objetos y construcción”

Usemos el cálculo de la media, para obtener el promedio de los test que contestaron acertadamente y de los test que no lo hicieron.

Porcentaje general de los test que contestaron acertadamente:

$$\frac{\sum_{i=1}^3 x_i}{3} = \frac{97.32 + 96.52 + 97.8}{3} = \frac{291.64}{3} = 97.217\%$$

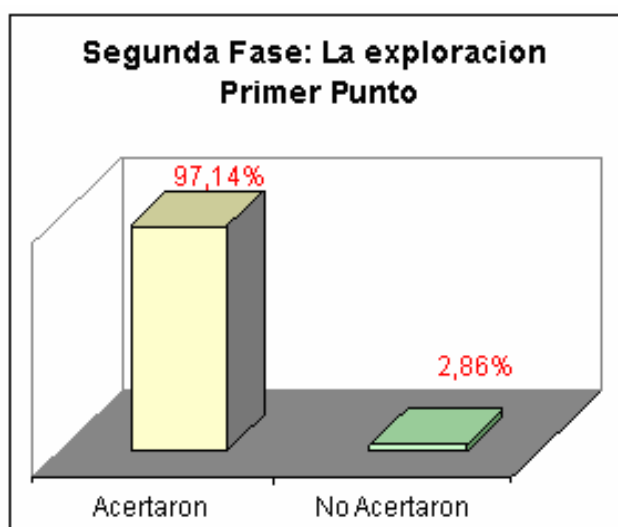
Porcentaje general de los test que no contestaron acertadamente:

$$\frac{\sum_{i=1}^3 x_i}{3} = \frac{2.68 + 3.48 + 2.2}{3} = \frac{8.76}{3} = 2.92\%$$

5.1.2 Análisis De La Exploración

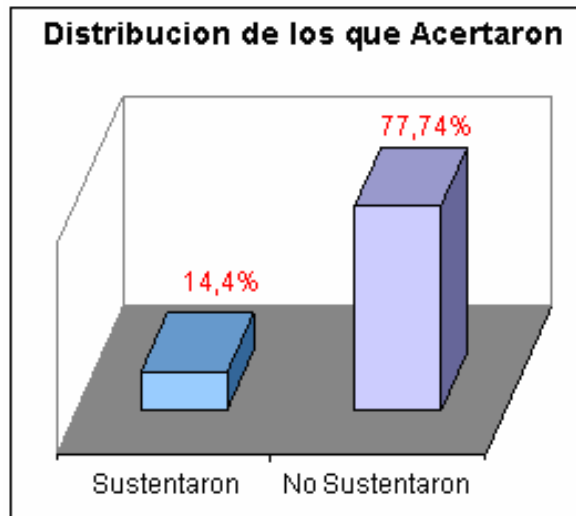
Las principales acciones de esta fase son el razonamiento y la recolección y construcción de datos.

En el *primer punto*, las acciones utilizadas fueron la recolección y la construcción de datos, acertó el 97.14% de los test y no acertaron el 2.86%. (Ver gráfica 4).



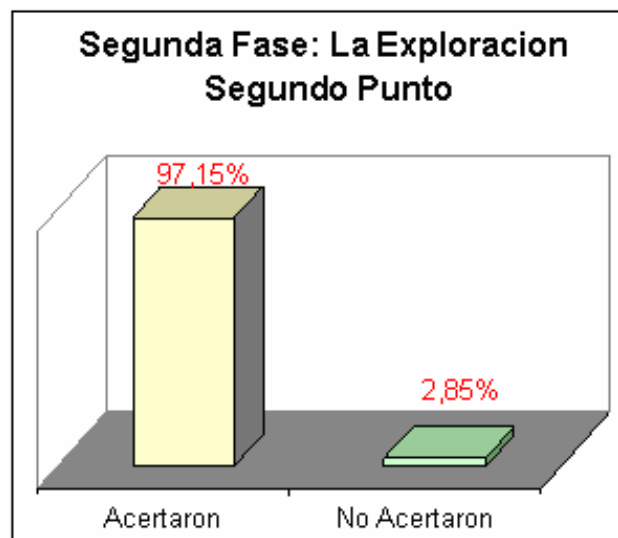
Gráfica 4. La exploración “recolección y construcción de datos”

De los test que *contestaron acertadamente*, no todos sustentaron como habían completado la tabla, para nosotros y para el mismo desarrollo del test, es muy importante que el alumno sustente como lo realiza, pues así se fomenta la construcción y la enmendadura de errores en los raciocinios. Por esto quisimos hacer un análisis paralelo a este punto, para generalizar los resultados obtenidos. (Ver gráfica 4a).



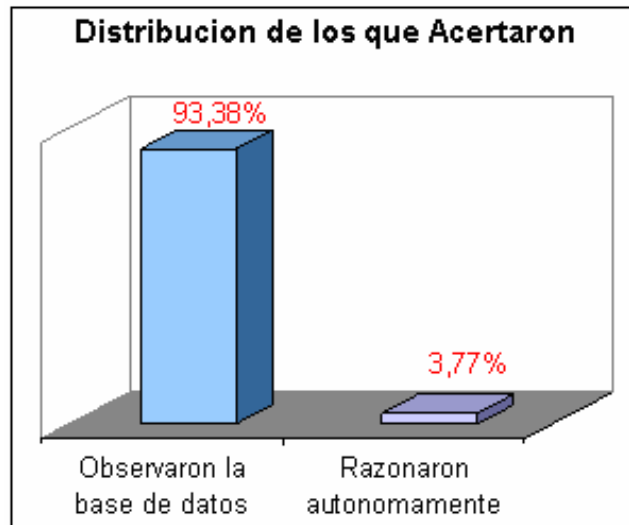
Gráfica 4a. Clasificación de la sustentación.

En el *segundo punto*, las acciones utilizadas fueron el raciocinio y la construcción de las diagonales mediante la manipulación de objetos, contestaron acertadamente 97.15% y no contestaron acertadamente el 2.85%. (Ver gráfica 5).



Gráfica 5. La exploración "raciocinio y manipulación de objetos"

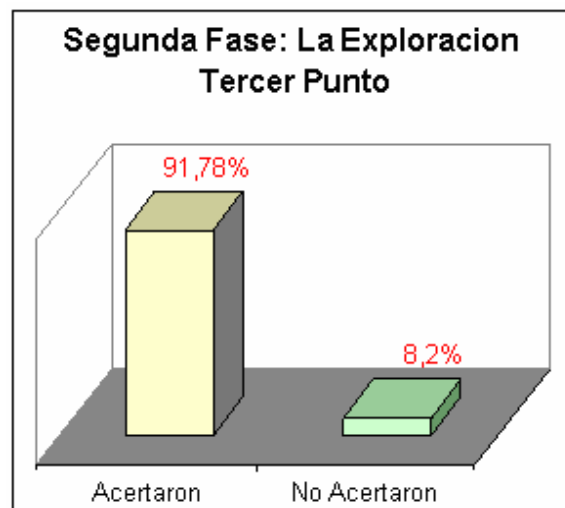
El *segundo punto* tuvo dos respuestas, una sustentada en el manejo de la base de datos y la otra, fue la solución por medio del raciocinio. (Ver gráfica 5a).



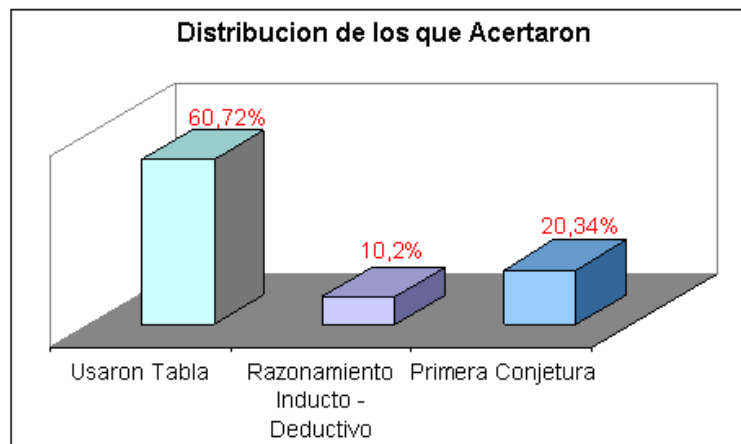
Gráfica 5a. La exploración “raciocinio y manejo de la tabla de datos”

En el *tercer punto*, acertaron el 91.78% y no acertaron el 8.2%. (Ver grafica 6). En este punto, los estudiantes lo respondieron de tres formas diferentes: usando la tabla de datos, usando el razonamiento inductivo deductivo y en un buen porcentaje se obtuvieron las primeras conjeturas de la ecuación.

(Ver gráfica 6a).



Gráfica 6. La exploración “nivel de acertación”



Gráfica 6a. La exploración "las tres respuestas".

Calculemos el promedio de esta fase para determinar la efectividad que el test tuvo con los estudiantes que contestaron acertadamente y de los test que no lo hicieron.

Porcentaje general de los test que contestaron acertadamente:

$$\frac{\sum_{i=1}^3 x_i}{3} = \frac{97.14 + 97.15 + 91.78}{3} = \frac{286.07}{3} = 95.356\%$$

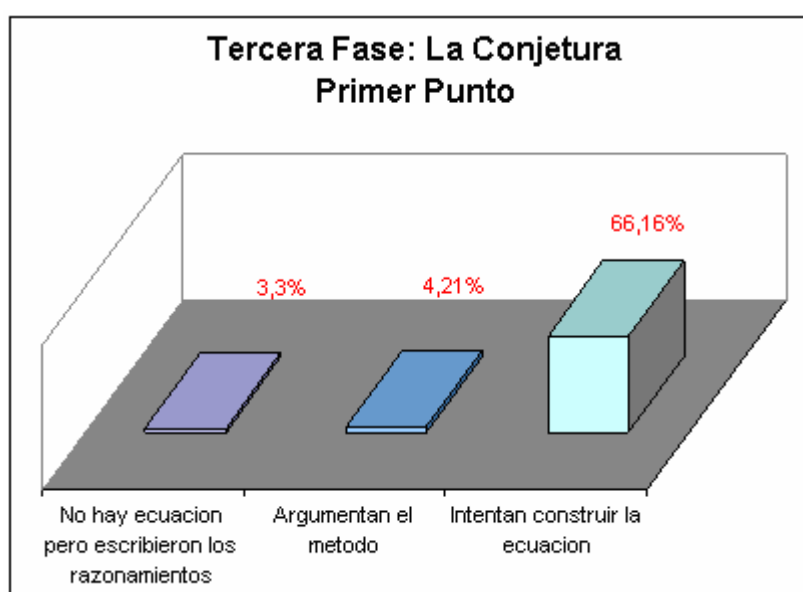
Porcentaje general de los test que no contestaron acertadamente:

$$\frac{\sum_{i=1}^3 x_i}{3} = \frac{2.86 + 2.85 + 8.2}{3} = \frac{13.91}{3} = 4.636\%$$

5.1.3 Análisis De La Conjetura:

La fase crucial del test es la conjetura. Todo el test fue elaborado para que los alumnos lleguen a conjeturar una ecuación para calcular el número de diagonales que tiene cualquier polígono regular.

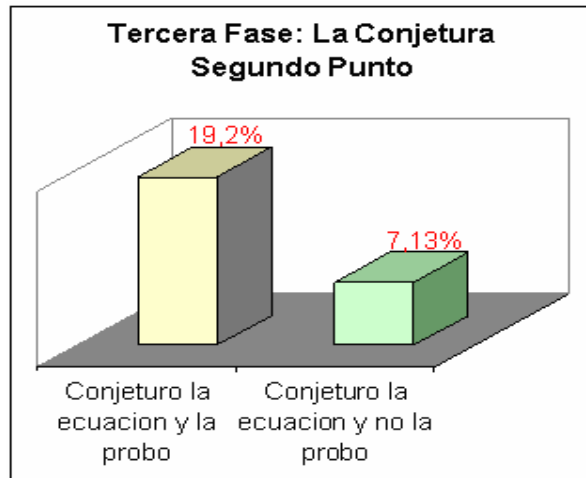
En el *primer punto*, se obtuvieron tres resultados de conjetura: En la primera, no hay ecuación pero escriben cómo lo podrían generalizar; la segunda, persiste la falta de una ecuación pero se argumenta un juicio válido para hallar cualquier resultado; la tercera, intentan construir la ecuación pero, no concluyen acertadamente. (Ver gráfica 7).



Gráfica 7. Diferentes tipos de conjetura

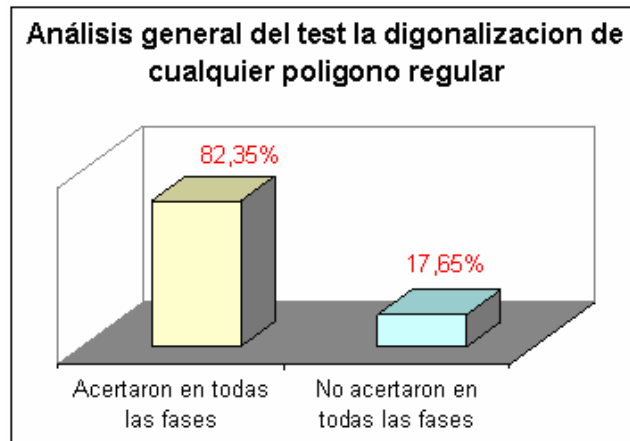
En esta parte los estudiantes que no lograron con el objetivo del test, fueron los que fallaron en la elaboración de la conjetura porque no construyeron la ecuación y no concluyeron acertadamente las dos fases anteriores.

En el *segundo punto* los estudiantes conjeturaron la ecuación pero, algunos no la probaron. Mostraremos la relación que hay entre los que si probaron la ecuación y los que no probaron la ecuación que dedujeron. (Ver gráfica 8).



Gráfica 8. Comparación de las pruebas en la conjetura

Para terminar, haremos un gráfico que contiene el promedio de la efectividad de cada fase. (Ver gráfica 9).



Gráfica 9. Aprobación del test

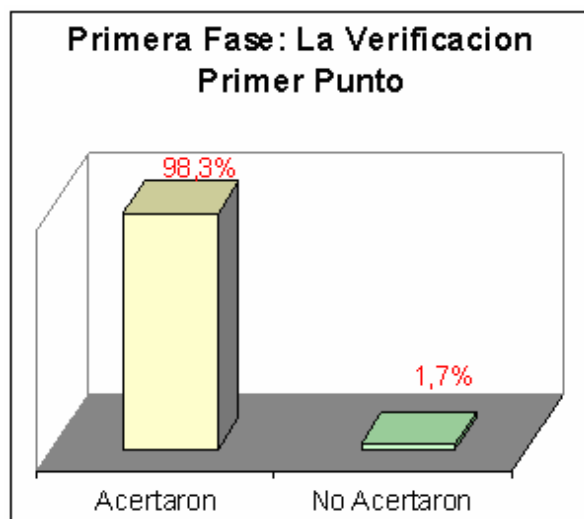
5.2 ANÁLISIS GRÁFICO DEL TEST: LA SUMA DE LOS “N” PRIMEROS NÚMEROS IMPARES.

El análisis gráfico de este test tendrá el mismo desarrollo del anterior test. Se analizará detalladamente, fase por fase y punto por punto.

5.2.1 Análisis de la Verificación:

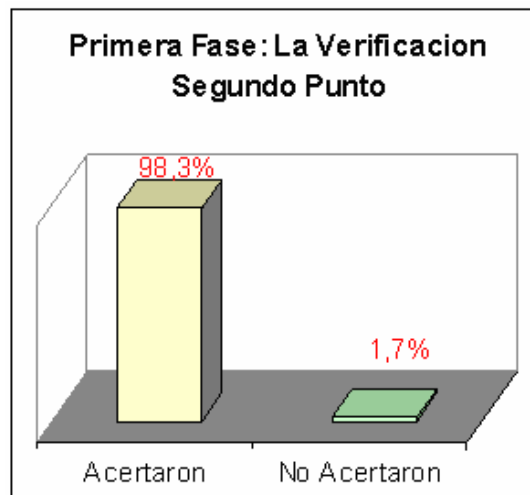
Las principales acciones de esta fase son la observación y la construcción del raciocinio.

En el *primer punto*, las acciones utilizadas fueron la observación y el razonamiento secuencial. El porcentaje de aprobación en este punto fue el 98.3% y de no aprobación el 1.7%. (Ver gráfica 10).



Gráfica 10. La verificación “razonamiento secuencial y observación”

En el *segundo punto*, las acciones utilizadas fueron la comparación y el razonamiento secuencial. El porcentaje de aprobación en este punto fue el 98.3% y de no aprobación el 1.7%. (Ver gráfica 11).



Gráfica 11. La verificación “razonamiento secuencial y comparación”

Calculemos el promedio de la verificación para determinar la efectividad que tuvo el test con los estudiantes que contestaron acertadamente y con los que no lo hicieron.

Porcentaje general de los test que contestaron acertadamente:

$$\frac{\sum_{i=1}^2 x_i}{2} = \frac{98.3 + 98.3}{2} = \frac{196.3}{2} = 98.3\%$$

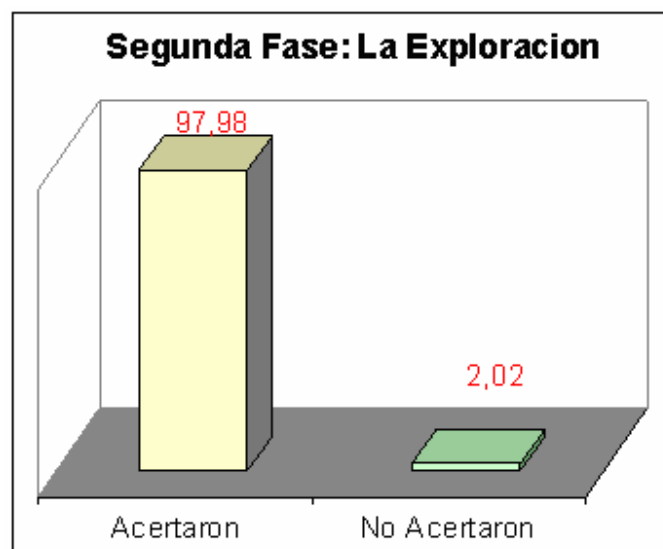
Porcentaje general de los test que no contestaron acertadamente:

$$\frac{\sum_{i=1}^2 x_i}{2} = \frac{1.7 + 1.7}{2} = \frac{3.4}{2} = 1.7\%$$

5.2.2 Análisis de la Exploración:

Las acciones de esta fase son la observación, la construcción del raciocinio, la comparación, la recopilación y construcción de datos.

En el *primer punto y segundo punto*, las acciones fueron aplicadas en el siguiente orden: la observación, el razonamiento secuencial, la comparación, la construcción y la recopilación de datos. El porcentaje de aprobación en este punto fue 97.98% y de no aprobación fue el 2.02%. (Ver gráfica 12).



Gráfica 12. La exploración "puntos uno y dos"

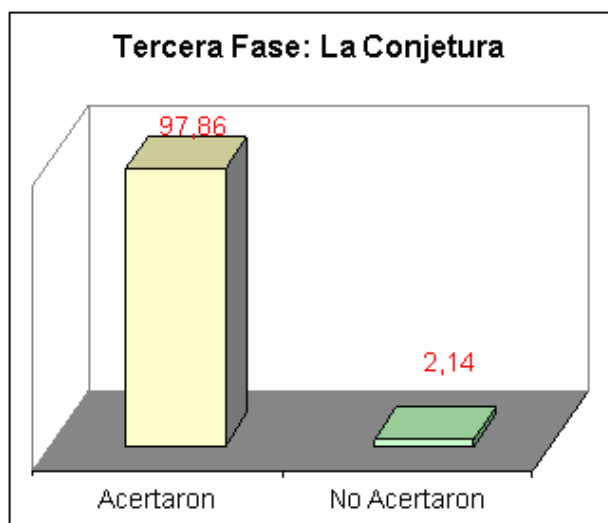
5.2.3 Análisis de la Conjetura

En este test el proceso de conjetura mostró mejores resultados comparándolo con el test anterior.

El proceso de conjetura se desarrolló por medio del razonamiento inductivo-deductivo fundamentado en su gran mayoría por el razonamiento secuencial.

El porcentaje de aprobación fue de 97.86% y el de no aprobación fue de 2.14%. (Ver gráfica 13).

Los resultados mostrados en cada una de los puntos fueron muy acertados. Es importante calcular el promedio de cada una de las fases para así obtener una buena interpretación general del test. (Ver gráfica 14).



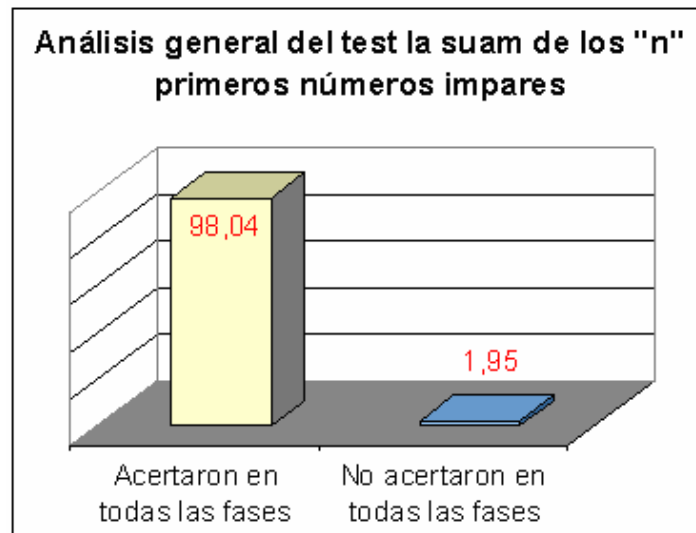
Gráfica 13. La construcción de la conjetura.

Porcentaje general de los test que contestaron acertadamente:

$$\frac{\sum_{i=1}^3 x_i}{3} = \frac{98.3 + 97.98 + 97.86}{3} = \frac{294.14}{3} = 98.4\%$$

Porcentaje general de los test que no contestaron acertadamente:

$$\frac{\sum_{i=1}^3 x_i}{3} = \frac{1.7 + 2.02 + 2.14}{3} = \frac{5.86}{3} = 1.95\%$$



Gráfica 14. Aprobación del test

6. CONCLUSIONES

- ✚ Los resultados en este trabajo nos muestra la importancia que tiene el proceso de conjeturar en los alumnos. Este proceso le permite al alumno tener la posibilidad de razonar, deducir, pensar, observar y concluir, y algo muy importante le ofrece la oportunidad de equivocarse y de enmendar sus propios errores.
- ✚ La conjetura debe ser un proceso guiado por el docente y no conducido, las actividades propuestas deben permitir que el alumno cree sus propias formas de dar solución a los problemas planteados.
- ✚ El desarrollo de los test ofreció muy buenos resultados tanto para los estudiantes como para nosotros, porque se cumplió con el objetivo trazado y los estudiantes construían en cada una de las fases una secuencia de raciocinios lógicos que lo llevaron a deducir una ecuación y un juicio válido.
- ✚ Las actividades en grupo se deben estimular; esto motiva el trabajo y los juicios y las deducciones son más precisas y el aprendizaje es más práctico.
- ✚ La actividad de conjeturar se puede considerar como la primera parte de dos. Se busca en segunda instancia la *construcción de la demostración* de la conjetura que el mismo estudiante ha creado.

7. RECOMENDACIONES

- ✚ Aplicar el constructivismo y el aprendizaje significativo en el salón de clases.
- ✚ Los docentes deben escuchar los razonamientos que los alumnos proponen así no sean válidos, y en lo posible no refutarlos de forma contundente sino ayudar a que ellos mismos los transformen; es decir, que el docente se ponga en el papel de guía en el aprendizaje.
- ✚ Fomentar el trabajo en parejas, pues estas actividades integran a los alumnos y ellos aprenden por medio del debate; además, se capacitan en trabajar en equipo, formando así nuevos líderes.
- ✚ Preparar continuamente actividades que estimulen la creación de conjeturas y que posteriormente comuniquen su resultado al salón de clases.

BIBLIOGRAFÍA

Balacheff, N.(2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una Empresa Docente. Universidad de los Andes.

http://es.wikipedia.org/wiki/Conjetura_de_Goldbach

http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_cuatro_colores

http://es.wikipedia.org/wiki/Números_primos_gemelos

http://es.wikipedia.org/wiki/Último_Teorema_de_Fermat

Larios, V. (2002). *Demostraciones y conjeturas en la escuela de secundaria*.

Revista electrónica de didáctica de las matemáticas. México: Universidad Autónoma de Querétaro.

Suppes, P. (1983). *Introducción a la lógica matemática*. Editorial Reverté, S.A.: Colombia.

Uribe, J. (1986). *Matemáticas básicas y operativas*. Susaeta ediciones y cía.: Colombia.

ANEXOS

ACTIVIDAD

LA PRUEBA DE LAS DIAGONALES DE CUALQUIER POLÍGONO REGULAR

OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD:

- Que el estudiante verifique el número de diagonales de un polígono regular determinado.
- Que el estudiante escriba los razonamientos empleados para llegar a la conjetura.
- Que el estudiante conjeture una ecuación para calcular el número de diagonales de cualquier polígono regular.

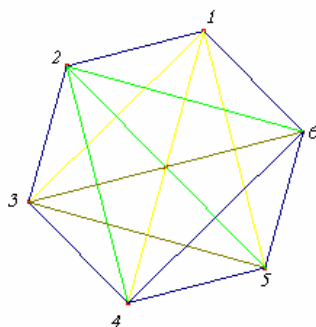
Concepto de Diagonal

Es la unión entre dos puntos no consecutivos de un polígono.

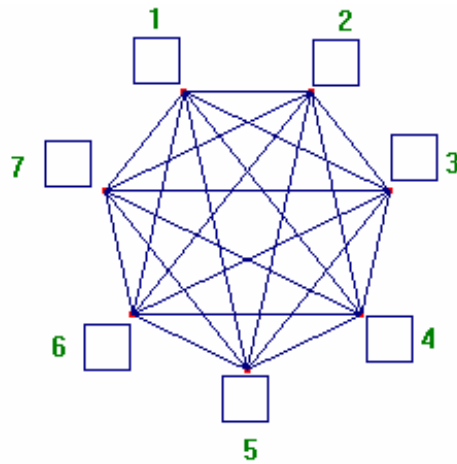
VERIFICACIÓN

El siguiente polígono regular está formado por 6 puntos y tiene 9 diagonales.

Verifícalo tú mismo.



¿Cuántas diagonales tendrá el siguiente polígono regular?



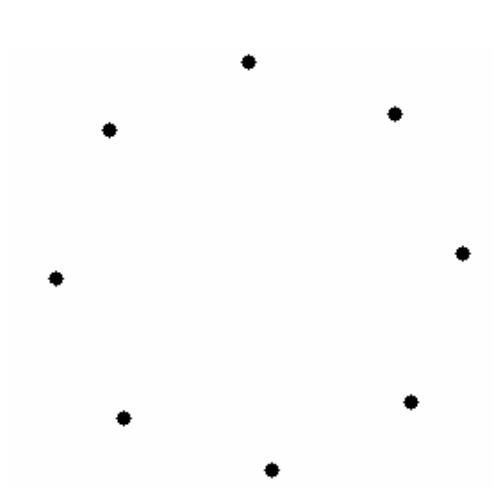
¿Cuántos puntos tiene?

¿Cuántas diagonales **salen** de cada punto? Escribe como lo sabes.

¿Cuántas diagonales tiene el polígono?

¿Cómo lo calcularon?

1. Construye las diagonales del siguiente polígono sin repeticiones.
2. Escribe lo que piensas en cada paso.
3. Al final escribe una afirmación de *¿cómo calcular las diagonales del polígono formado con 8 puntos?*
4. Utiliza colores para construir las diagonales de cada punto.



paso 1:

paso 2 :

paso 3:

paso 4:

paso 5:

¿Cuántas diagonales tiene el polígono?

Base de datos

Completa la siguiente tabla

<i>N. puntos</i>	<i>N. diagonales</i>	<i>Diferencia entre diagonales</i>
4	2	<input type="text"/>
5	5	<input type="text"/>
6	9	<input type="text"/>
7	14	<input type="text"/>
8	<input type="text"/>	<input type="text"/>
9	<input type="text"/>	
10		

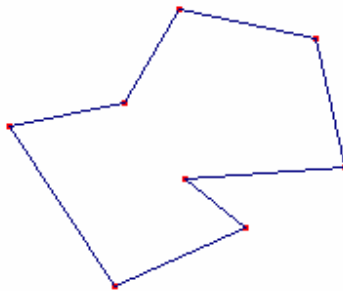
PRUEBA Y COMUNICACIÓN

Construye un polígono que tenga 27 diagonales. ¿cómo lo harías? Escríbelo.

¿Cuántas diagonales puedes formar con un polígono regular de 16 puntos?

Teniendo en cuenta lo anterior escribe una ecuación para calcular el número de diagonales para “n” puntos

¿Le puedes calcular las diagonales al siguiente polígono?



Justifica tú respuesta:

Utiliza los resultados anteriores y Prueba la ecuación dedujiste para calcular el número de diagonales de un polígono de “n” puntos:

ACTIVIDAD

LA PRUEBA DE LA SUMA DE LOS "n" PRIMEROS NÚMEROS IMPARES

OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD:

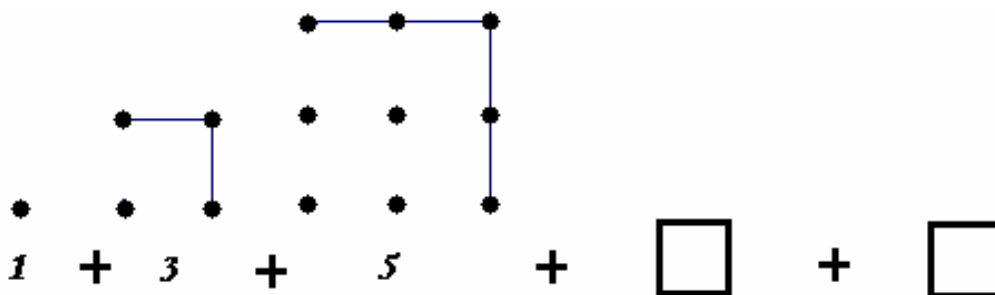
- Que el estudiante verifique la suma de los "n" primeros números impares.
- Que el estudiante escriba los razonamientos empleados para llegar a la conjetura.
- Que el estudiante conjeture una ecuación para calcular la suma de los "n" primeros números impares.

CONCEPTO DE NÚMERO IMPAR

Un número es impar si se puede expresar de la siguiente forma: $2*k+1$ donde $k=0,1,2,\dots$

VERIFICACIÓN

Completa la figura de las dos siguientes casillas con sus respectivos números.



¿cuál es el resultado de sumar los dos primeros impares? _____

¿cuál es el resultado de sumar los tres primeros impares? _____

¿cuál es el resultado de sumar los cuatro primeros impares? _____

¿cuál es el resultado de sumar los cinco primeros impares? _____

Completa la siguiente frase:

Si se sabe que la suma de los cinco primeros números impares es:_____¿cuál será el resultado de sumar los primeros 10 primeros números impares?. Exprésalo en potenciación.

EXPLORACIÓN

¿Cuál debe ser el valor del séptimo impar de los sumandos?

¿Cuál es el resultado de sumar los ocho primeros números impares?

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = \boxed{\quad}$$

Si la suma de ciertos números impares es 121. ¿Cuáles serán esos números impares?

$$121 =$$

Justifica tú respuesta:

BASE DE DATOS

Completa la tabla y generaliza en la última casilla

SUMAS	RESULTADO	POTENCIACIÓN
1	1	1^2
1+3	4	2^2
1+3+5	9	3^2
1+3+5+7	16	4^2
1+3+5+7+___+___		
1+3+5+7+...+_____		

Elabore una ecuación para justificar tu respuesta

Prueba la ecuación que dedujiste con algunos ejemplos