

Análisis de la dinámica de la turbulencia en un plasma compresible parcialmente ionizado con
términos de ionización y recombinación

Juan Diego Díaz Martínez

Trabajo de Grado para optar al título de Físico

Director

Fabio Duván Lora Clavijo

Físico, M.Sc., Ph.D.

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2023

Tabla de Contenido

Introducción	13
1. Objetivos	24
2. Turbulencia	25
3. Ecuaciones de la magnetohidrodinámica	39
3.1. Múltiples especies	39
3.2. Modelo de dos fluidos	44
3.3. Ecuaciones conservativas para dos fluidos	46
3.4. Términos de colisiones	47
4. Código MAGNUS	52
5. Resultados	55
5.1. Turbulencia en plasmas totalmente ionizados	55
5.1.1. Vorticidad y densidad de corriente	56
5.1.2. Espectro de energía	60
5.1.3. Amplificación de la energía magnética	62
5.2. Turbulencia en plasmas parcialmente ionizados (Colisiones elásticas)	64
5.2.1. Vorticidad y densidad de corriente	65

EFFECTOS DE LA IONIZACIÓN Y RECOMBINACIÓN EN LA TURBULENCIA	3
5.2.2. Espectro de energía	70
5.2.3. Amplificación de la energía magnética	71
5.3. Turbulencia en plasmas parcialmente ionizados (Colisiones inelásticas)	72
5.3.1. Vorticidad y densidad de corriente	74
5.3.2. Espectro de energía	77
5.3.3. Amplificación de la energía magnética	80
5.4. Aplicación al Viento Solar	82
5.4.1. Caracterización del fluido	85
5.4.2. Espectro de energía	86
5.4.3. Amplificación de la energía magnética	87
6. Conclusiones	90
Referencias Bibliográficas	93
Apéndices	106

Lista de Figuras

- Figura 1. Proceso de cascada de energía donde se observa la escala de inyección de energía, la escala de disipación y el rango inercial. 31
- Figura 2. Decaimiento en el espectro de energía junto con las escalas más relevantes. 33
- Figura 3. Diferencia entre las componentes de la longitud de onda para un fluido puramente hidrodinámico y un plasma. 37
- Figura 4. Gráficas de vorticidad y densidad de corriente. La componente z de la vorticidad ω_z se encuentra en (a) y la componente z de la densidad de corriente J_z en (b). Estos resultados se obtuvieron para el tiempo $t/t_c=0.9475$. 57
- Figura 5. Evolución temporal de un plasmóide a partir de una hoja de corriente. La figura (a) se tomó en un tiempo $t/t_c=0.7310$, la figura (b) en un tiempo $t/t_c=0.8612$, la figura (c) en un tiempo $t/t_c=0.9220$ y la figura (d) en un tiempo $t/t_c=0.9604$. 59
- Figura 6. Resultados de los espectros de energía para un plasma totalmente ionizado. El espectro de energía cinética PS_k se encuentra en (a) y el espectro de energía magnética PS_m en (b). Este resultado se obtuvo para el tiempo $t/t_c = 0.9475$. 61
- Figura 7. Amplificación de la energía magnética del plasma totalmente ionizado. Este resultado se obtuvo en el tiempo $t/t_c = 0.9475$. 63

Figura 8. Gráficas en dos dimensiones de la componente z de la vorticidad ω_z para diferentes valores de ξ . La primera, segunda y tercera columnas corresponden a los resultados con el parámetro $\xi = 0.02$, $\xi = 10$ y $\xi = 100$ en los tiempos $t/t_c=0.9429$, $t/t_c=0.9435$ y $t/t_c=0.9454$ respectivamente. En la primera, segunda y tercera fila se encuentran la vorticidad del fluido cargado, la vorticidad del fluido neutro y la diferencia entre estas dos vorticidades, respectivamente.

67

Figura 9. Gráficas en dos dimensiones de la componente z de la densidad de corriente J_z con diferentes valores del parámetro ξ . Se utilizó el parámetro $\xi = 0.02$, $\xi = 10$ y $\xi = 100$ en las gráficas (a), (b) y (c), para los tiempos $t/t_c=0.9429$, $t/t_c=0.9435$ y $t/t_c=0.9454$, respectivamente.

68

Figura 10. Evolución temporal de un plasmóide a partir de una hoja de corriente para una frecuencia de colisiones $\xi = 100$. La figura (a) se tomó en un tiempo $t/t_c=0.7326$, la figura (b) en un tiempo $t/t_c=0.8644$, la figura (c) en un tiempo $t/t_c=0.9242$ y la figura (d) en un tiempo $t/t_c=0.9665$.

69

Figura 11. Gráficas para el espectro de energía cinética con diferentes valores del parámetro de colisiones ξ . Se utilizaron los parámetros $\xi = 0.02$, $\xi = 10$ y $\xi = 100$ en las gráficas (a), (b) y (c) en los tiempos $t/t_c=0.9429$, $t/t_c=0.9435$ y $t/t_c=0.9454$ respectivamente.

70

Figura 12. Amplificación de la energía magnética en función del tiempo para diferentes valores de la frecuencia de colisiones ξ .

72

Figura 13. Gráficas en dos dimensiones de la componente z de la vorticidad (ω) para diferentes frecuencias de recombinación τ_{rec} . En la primera y segunda columna se utilizaron $\tau_{rec} = 10^{-6}$ y $\tau_{rec} = 10^{-3}$ para los tiempos $t/t_c=0.9551$ y $t/t_c=0.9500$, respectivamente. En la primera fila se tiene el fluido cargado y en la segunda el neutro. 75

Figura 14. Gráficas en dos dimensiones de la componente z de la densidad de corriente (J_z) y las tasas de ionización Γ_{ion} y recombinación Γ_{rec} para diferentes frecuencias de recombinación τ_{rec} . En la primera y segunda columna se utilizaron $\tau_{rec} = 10^{-6}$ y $\tau_{rec} = 10^{-3}$ para los tiempos $t/t_c=0.9551$ y $t/t_c=0.9500$, respectivamente. En la primera fila se tienen las densidades de corriente J_z , en la segunda el Γ_{rec} y en la tercera el Γ_{ion} . 78

Figura 15. Gráficas para el espectro de energía cinética para diferentes parámetros de colisiones τ_{rec} . La figura (a) corresponde a $\tau_{rec} = 10^{-6}$, y la figura (b) a $\tau_{rec} = 10^{-3}$. Los resultados se obtuvieron en los tiempos $t/t_c = 0.9500$ y $t/t_c = 0.9551$, respectivamente. 79

Figura 16. Amplificación de la energía magnética para diferentes valores del parámetro asociado a la frecuencia de colisiones inelásticas τ_{rec} . Este resultado se obtuvo para los tiempos más cercanos a $t/t_c = 0.9475$. 81

Figura 17. Densidad de masa del fluido cargado ρ en (a) y el fluido neutro ρ_n en (b) para el Viento Solar. Este resultado se obtuvo para el tiempo $t = 3.04813[s]$. 85

Figura 18. Componente z de la densidad de corriente J_z en (a), tasa de recombinación Γ_{rec} en (b) y tasa de ionización Γ_{ion} en (c). Este resultado se obtuvo para el tiempo $t = 3.04813[s]$. 86

Figura 19. Gráficas para el espectro de energía cinética para el Viento Solar con los parámetros $\xi = 100$ y $\tau_{rec} = 10^{-3}$. Este resultado se obtuvo para el tiempo $t = 3.04813[s]$. 87

Figura 20. Amplificación del campo magnético normalizado para el Viento Solar, el fluido totalmente ionizado, un fluido con $\xi = 100$ y un fluido con $\tau_{rec} = 10^{-3}$. Tiempo $t/t_c = 0.9576$. 88

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Ecuaciones de conservación	106

Resumen

Título: Análisis de la dinámica de la turbulencia en un plasma compresible parcialmente ionizado con términos de ionización y recombinación *

Autor: Juan Diego Díaz Martínez **

Palabras Clave: Magnetohidrodinámica, Turbulencia, Ionización, Recombinación.

Descripción: La turbulencia en plasmas parcialmente ionizados (PPI) está presente en gran cantidad de escenarios astrofísicos. Algunos de los entornos en los que se han evidenciado son en las ionosferas planetarias, la atmósfera solar, las nubes moleculares, los discos protoplanetarios, los exoplanetas y el medio interestelar. Por lo tanto, se hace necesario el desarrollo de un modelo teórico que permita describir el comportamiento de estos plasmas de forma acertada. Este modelo teórico es conocido como magnetohidrodinámica, sin embargo, en fenómenos como la turbulencia no se ha considerado un modelo completo en el que se incluya la ionización y recombinación. Aún así, los procesos de ionización y recombinación de los átomos tienen diversos efectos relevantes en la dinámica de un plasma compresible turbulento parcialmente ionizado. Es por ello que en este trabajo de grado se presenta un análisis sistemático y completo de la dinámica de un plasma turbulento mediante simulaciones con el código MAGNUS de un modelo magnetohidrodinámico que incluye colisiones inelásticas. Entre las principales variables que se sometieron a análisis se encuentra la vorticidad y densidad de masa de los fluidos, la densidad de corriente, las tasas de ionización y recombinación, el espectro de energía magnética y la amplificación del campo magnético. A partir del estudio realizado se encontraron diferentes resultados que indican de qué forma influye la conversión de especies en el comportamiento del plasma en cuestión. En términos

* Trabajo de grado.

** Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Fabio Duván Lora Clavijo, Ph.D.

generales, se obtuvo que estas colisiones permiten que el campo magnético afecte de forma indirecta el fluido neutro y que la energía magnética se aumente a más del doble de la inicial. Asimismo, entre otros resultados adicionales está la inhibición de la formación de plasmoides y la separación entre el espectro de energía del fluido neutro y el cargado. Adicionalmente, se aplicó el modelo desarrollado para simular la turbulencia en el caso del viento solar. De esta forma, es posible apreciar la utilidad de los resultados para describir completa y detalladamente la dinámica de un plasma turbulento en un entorno astrofísico en particular.

Abstract

Title: Analysis of the dynamics of turbulence in a partially ionized compressible plasma with ionization and recombination terms *

Author: Juan Diego Díaz Martínez **

Keywords: Magnetohydrodynamics, Turbulence, Ionization, Recombination.

Description: Turbulence in partially ionized plasmas (PIP) is present in a large number of astrophysical scenarios.

Some of the environments in which it has been found are planetary ionospheres, solar atmosphere, molecular clouds, protoplanetary discs, exoplanets and interstellar medium. Therefore, it is necessary the development of a theoretical model which allows to describe the behavior of these plasma properly. This theoretical model is known as Magnetohydrodynamics, however, in phenomena as turbulence it has not been considered a complete model with ionization and recombination. Still, ionization and recombination processes in atoms have different relevant effects in the dynamics of a partially ionized compressible turbulent plasma. Thus, in this research project we did a systematic analysis and complete of the dynamics of turbulent plasma through numerical simulations with MAGNUS code of a magnetohydrodynamic model with inelastic collisions. Among the main variables that were analyzed are the vorticity, mass density, current density, ionization and recombination rates, kinetic energy spectrum and magnetic energy amplification. From the study carried out we found results that indicate how species conversion influences the behavior of the plasma. In general terms, we obtained that these collisions allow the magnetic field to indirectly affect the neutral fluid and magnetic energy to be increased to more than double the initial. Likewise, among other additional results it is the inhibition to plasmoid formation

* Bachelor Thesis

** Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Fabio Duván Lora Clavijo, Ph.D.

and separation between energy spectrum of neutral and charged fluid. Moreover, the developed model was applied to simulate turbulence in the case of solar wind. Hence, it is evident the utility of results to describe completely and in detail the dynamics of a turbulent plasma in a particular astrophysical environment.

Introducción

El clima espacial es un campo de la ciencia que se centra en entender los impactos sobre la tecnología y la sociedad consecuentes de la interacción entre el Sol y la Tierra. Esto se da debido a que el sol libera grandes cantidades de energía en forma de radiación, lo cual tiene una gran influencia en el entorno terrestre. Una de las afectaciones más importantes que pueden producir las tormentas espaciales son los daños a satélites, ya que estos proveen tecnología de vital importancia para la vida diaria de las personas (Hands et al., 2018). Particularmente, se puede afectar la cobertura televisiva, las conexiones telefónicas, las transacciones de tarjetas de crédito, las señales de navegación, la información sobre el uso de la tierra, la vigilancia militar, entre otras. Además, pueden perjudicar o incluso causar la muerte en astronautas, interferir o apagar comunicaciones por radio, afectar tripulaciones de aerolíneas o pasajeros y causar fallas importantes de energía al destruir componentes críticos de redes eléctricas, como ocurrió en marzo de 1989 en la región este de Canadá debido a una gran eyección de masa coronal (Moldwin, 2008).

La importancia del estudio del clima espacial radica en que la civilización en la que vivimos es dependiente de la tecnología. De hecho, ésta es cada vez más susceptible a problemas causados por la interacción Sol-Tierra, lo cual se debe a que existe un crecimiento tecnológico continuo con relación a la comunicación inalámbrica, el acceso inmediato a información global o la exploración espacial en nuestro sistema solar (Moldwin, 2008). En síntesis, el clima espacial intenta entender aspectos fundamentales del entorno astrofísico y su impacto en la infraestructura terrestre. Esto con el objetivo de predecir los fenómenos y mitigar así los posibles daños. Sin embargo, para lograrlo

es necesario centrarse en el estudio de la dinámica de fluidos, ya que es en estos mismos en donde se desarrollan los diferentes fenómenos de interés.

Dentro del estudio y modelado de fluidos, es inevitable tener en cuenta la turbulencia, dado que este es un fenómeno ubicuo en la naturaleza. Esta resulta de inestabilidades presentes en fluidos en movimiento, los cuales experimentan fuerzas de fricción bajas (Beresnyak, 2019). La turbulencia se observa en escenarios naturales y artificiales muy distintos, como los plasmas astrofísicos (Beresnyak, 2019; Bruno and Carbone, 2013), plasmas de laboratorio (Tatali et al., 2021), ríos (Guseva et al., 2021) o incluso durante la circulación de la sangre (Antiga and Steinman, 2009). Además, a diferencia de otros efectos no ideales presentes en los fluidos, la presencia de turbulencia en un modelo teórico no depende de un término adicional o variación en las ecuaciones que rigen la dinámica del fluido en cuestión. Es decir, es un efecto intrínseco de la naturaleza del fluido, ya que depende únicamente de sus características y parámetros. Asimismo, es un fenómeno en el que su comportamiento no se puede predecir de forma precisa; sin embargo, es de gran importancia debido a que sus efectos si son cuantificables y predecibles (Beresnyak, 2019). En el marco del clima espacial se estudia la turbulencia presente en plasmas, puesto que estos son los fluidos que se encuentran en la mayoría de regiones astrofísicas.

Además, en un universo compuesto en gran parte por plasmas parcialmente ionizados (PPI), se hace necesario el estudio de las interacciones entre las componentes del plasma y los gases neutros. El modelo de PPI ha sido ampliamente utilizado en la actualidad en diferentes entornos astrofísicos, tales como: la atmósfera solar (Martínez-Sykora et al., 2012; Cheung and Cameron, 2012; Tu and Song, 2013; Shelyag et al., 2016; Khomenko et al., 2018), las nubes moleculares

(Lehmann and Wardle, 2016; Zamora-Aviles and Vázquez-Semadeni, 2011; Jones and Downes, 2012), el medio interestelar (Mouschovias et al., 2011), las ionosferas planetarias (Leake et al., 2014a; Cowley et al., 2004; Benavides and Flierl, 2020), las atmósferas de exoplanetas (Erkaev et al., 2005), los discos protoplanetarios (Gressel et al., 2015), entre otros (Ballester Mortes et al., 2018). La importancia de ajustar los modelos teóricos a este tipo de fluidos recae en que la interacción de las partículas cargadas con las neutras, por medio de las colisiones, da lugar a diversos efectos físicos no ideales. Dichos efectos no están presentes en plasmas totalmente ionizados y pueden llegar a tener una gran influencia en la descripción de la dinámica del plasma.

Entre los efectos encontrados está la resistividad de Cowling (Khomenko et al., 2018), el calentamiento debido a la fricción ion/neutral (Shelyag et al., 2016), la transferencia de calor por colisiones (Tu and Song, 2013), el intercambio de carga (Gilbert et al., 2002), la conversión de especies (Popescu, 2020), entre otros. Considerar estos efectos en los plasmas astrofísicos da lugar a una descripción más detallada, elaborada y cercana a la realidad de los diferentes fenómenos. Algunas de las regiones del sol con mayor relevancia, donde los efectos de los PPI es más significativo, son las espículas, prominencias y capas de la atmósfera solar como la fotosfera y la cromosfera (Ballester Mortes et al., 2018; Carbonell et al., 2010; Tu and Song, 2013). Además, es posible obtener datos resultantes de diversas observaciones en estas regiones (Bruno and Carbone, 2013), por lo cual se considera la atmósfera solar como el laboratorio adecuado para estudiar fluidos parcialmente ionizados. Adicionalmente, se han estudiado los PPI en atmósferas planetarias, como en planetas gigantes gaseosos similares a Júpiter (Benavides and Flierl, 2020) o la ionosfera de la Tierra (Leake et al., 2014a). En particular, el estudio de los PPI en el sol y la ionosfera terres-

tre se debe a su impacto en procesos del clima espacial que afectan de forma significativa la Tierra y la sociedad (Leake et al., 2014a).

Por otro lado, los PPI también han sido estudiados a profundidad en el contexto astrofísico, en donde se han encontrado efectos importantes que no se tenían presentes al considerar el plasma totalmente ionizado. Un ejemplo de esto se da en la eficiencia del amortiguamiento de ondas MHD en plasmas solares, la cual se incrementa al considerar todos los mecanismos de disipación de energía resultantes de la presencia de átomos neutrales en el plasma (Khodachenko et al., 2004). En las prominencias solares, las longitudes de amortiguamiento, para ondas magnetoacústicas rápidas y lentas, se ven afectadas por la ionización parcial, lo que modifica la relación entre longitudes de amortiguamiento y longitudes de onda (Carbonell et al., 2010). Ahora bien, los PPI han sido relevantes en la solución de problemas de actualidad, como la explicación del calentamiento, la dinámica y estructura fina de la fotosfera y cromosfera solar (Khomenko et al., 2018). En particular, respecto al mecanismo de calentamiento, se determinó mediante simulaciones numéricas que los efectos no ideales de la ionización parcial, como el efecto Hall y las colisiones entre especies, tienen un fuerte impacto (Martínez-Sykora et al., 2012; Tu and Song, 2013; Soler et al., 2017). Por ejemplo, se modeló la propagación de ondas no lineales en un tubo de flujo magnético parcialmente ionizado de la cromosfera. Aquí, se encontró un aumento de la temperatura en estructuras magnéticas debido a que las perturbaciones producidas por las ondas magnéticas se pueden disipar de manera efectiva (Shelyag et al., 2016). Por otra parte, la difusión ambipolar proporciona una entrada de energía significativa en la cromosfera, cuyo efecto está asociado con el desacoplamiento entre iones y neutrales (Khomenko and Collados, 2012). Otro efecto importante es el incremento

de la emergencia de flujo magnético a través de la fotosfera y cromosfera hacia la corona solar en las regiones donde se encuentra un PPI, lo que resulta en un campo magnético más difuso (Leake and Arber, 2006). Con relación a la reconexión magnética, en el régimen en el que el acoplamiento entre las especies del plasma no es fuerte, las tasas de reconexión aumentan (Zweibel, 1989). De igual forma, las inestabilidades MHD, como de Kelvin-Helmholtz o Rayleigh-Taylor, que dan lugar a fluidos turbulentos, pueden estar compuestas por PPI. De hecho, sus umbrales y tasas de crecimiento se modifican al considerar los efectos de la ionización parcial (Soler et al., 2012; Díaz et al., 2012). Finalmente, en regiones de temperatura moderada ($1000K - 5000K$) en la atmósfera de planetas gigantes gaseosos, como lo es Júpiter, también se encuentran PPI y es de gran relevancia su consideración (Benavides and Flierl, 2020).

Con el fin de estudiar los fenómenos del clima espacial, desde una teoría más completa y detallada, las componentes del plasma (iones, electrones, neutrales) se pueden modelar como diferentes fluidos que se encuentran en un mismo volumen. Sin embargo, en ciertos casos se combinan las ecuaciones de iones y electrones, para crear el modelo de dos fluidos en el que se resuelven las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD) para partículas cargadas y neutrales. El modelo macroscópico de la MHD permite describir la dinámica de fluidos conductores como plasmas total o parcialmente ionizados (Molokov et al., 2007; Schnack, 2009). Además, este modelo tiene diferentes adaptaciones dependiendo del nivel de aproximación que se desee, pudiéndose llevar incluso hasta un enfoque relativista (Hernandez and Kovtun, 2017). Su característica más importante es que describe los fenómenos de una forma muy acorde con las observaciones (Bruno and Carbone, 2013). Por tales razones, el modelo MHD corresponde a la estructura fundamental de

este trabajo.

Adicionalmente, la relevancia del modelo de dos fluidos recae en que los campos magnéticos afectan la componente ionizada y esta, por medio de colisiones, afecta la neutral. Estas colisiones entre partículas cargadas y neutrales, dan lugar a efectos como la conversión de especies debido a procesos de ionización y recombinación, los cuales hacen parte de los procesos inelásticos más relevantes en fenómenos astrofísicos compuestos por PPI, como en el caso de la atmósfera solar (Khomenko et al., 2014). Por ejemplo, en la cromosfera superior parcialmente ionizada, la recombinación de protones y electrones para formar hidrógeno neutral es un proceso físico de gran importancia que tiene implicaciones en diferentes eventos que ocurren en dicha región, como la reconexión magnética (Smith and Sakai, 2008).

Algunos de los artículos mencionados anteriormente se basan en un modelo MHD en el que las componentes cargadas y neutrales del plasma se toman como un mismo fluido. Esto implica que para tener en cuenta los efectos de las colisiones entre especies, es necesario considerar términos adicionales en las ecuaciones que rigen la dinámica del plasma (Khodachenko et al., 2004). No obstante, el modelo más apropiado para una descripción acertada de los plasmas parcialmente ionizados es uno en el que se tenga en cuenta un fluido neutral y uno cargado por aparte, acoplados mediante un término proporcional a la diferencia de sus velocidades (Benavides and Flierl, 2020). Para establecer una comparativa entre los dos modelos, se realizó un análisis de la dinámica de las ondas MHD en cada aproximación. Por un lado, se observó que para el caso de frecuencias de onda bajas tanto el modelo de un fluido como el de dos fluidos funcionan de forma similar. Sin embargo, cuando la frecuencia de la onda es comparable con la frecuencia de colisiones entre especies, la

dinámica de las ondas MHD cambia de forma significativa y el calentamiento por colisiones es mucho más relevante (Zaqarashvili et al., 2011; Soler et al., 2015).

La turbulencia asociada a plasmas total o parcialmente ionizados recibe el nombre de turbulencia MHD. Estas se diferencian de las turbulencias hidrodinámicas porque no son isótropas, ya que el campo magnético impone una dirección preferencial en el espacio. Adicionalmente, la turbulencia tiene efectos esenciales en la teoría MHD, uno de estos es que permite la violación del teorema de Alfvén, dando así una explicación al fenómeno de reconexión magnética (Beresnyak, 2019). La importancia del estudio de las turbulencias MHD se evidencia en todo el ambiente espacial. En particular, esta juega un papel muy importante en diversos aspectos del comportamiento del plasma y los fenómenos astrofísicos, como la generación de viento solar (Chen et al., 2021; Shoda et al., 2019), la aceleración de partículas a altas energías (Cho and Lazarian, 2006; Zhdankin et al., 2018), el calentamiento del plasma (Usmanov et al., 2011; Vaivads et al., 2016), la propagación de rayos cósmicos (Lazarian et al., 2012; Bell, 2004), entre otros (Bruno and Carbone, 2013). Además, las propiedades de la formación de estrellas está estrechamente relacionada con la dinámica del plasma turbulento en las nubes moleculares (Lehmann and Wardle, 2016). Por otra parte, dado que la heliosfera está permeada por el viento solar, es necesario estudiar el carácter turbulento que adquiere durante su expansión, con el fin de entender la dinámica del plasma que lo compone (Bruno and Carbone, 2013).

El fenómeno de turbulencia ha sido observado en múltiples escenarios del entorno espacial. En plasmas astrofísicos, la primera medición directa se realizó en el viento solar (Coleman Jr, 1968), región en la cual actualmente se encuentran una gran cantidad de observaciones (Goldstein

and Roberts, 1999; Bruno and Carbone, 2013; Horbury et al., 2005). Es por ello que el viento solar es de particular interés para el estudio de las turbulencias MHD, ya que en este se pueden realizar mediciones directas por medio de naves espaciales. Además, su estudio ha tomado relevancia debido a que sus efectos dan explicación a diversos comportamientos de los plasmas astrofísicos. Entre los efectos más significativos producidos por un plasma turbulento, se encuentra la aceleración de partículas. Dicha aceleración de partículas es importante debido a que ocurre en varios fenómenos, como las erupciones solares (Petrosian and Liu, 2004), la propagación de rayos cósmicos (Chandran, 2000; Schlickeiser and Miller, 1998), el viento solar (Chen et al., 2021), entre otros. De la misma forma, la turbulencia MHD está presente en grandes escalas, como en el centro de los cúmulos de galaxias (Vogt and Ensslin, 2006), o en discos de acreción, donde el efecto principal de la turbulencia es el transporte de momento angular (Balbus and Hawley, 1998).

Los efectos de los procesos de ionización y recombinación usualmente se desprecian del modelo de la MHD para plasmas parcialmente ionizados, como es el caso de los trabajos mencionados anteriormente. Sin embargo, se han realizado modelos detallados de ecuaciones derivadas a partir de los momentos de las ecuaciones de Boltzmann (Braginskii, 1965). Estos modelos siguen la aproximación de multi-fluidos y contienen los términos de ionización, recombinación, transferencia de momento e intercambio de calor debido a colisiones en las ecuaciones de continuidad, momento y energía, respectivamente (Meier and Shumlak, 2012; Khomenko et al., 2014).

Por medio de códigos computacionales, que siguen la aproximación de dos fluidos, se demostró que los términos de ionización y recombinación afectan en el fenómeno de reconexión magnética (Smith and Sakai, 2008; Murphy and Lukin, 2015). Esto puede observarse en los lazos

de corriente cromosféricas coalescentes, en los cuales, cuando la frecuencia de colisión y las tasas de ionización y recombinación no dependen de forma autoconsistente de parámetros locales del plasma, se incrementa el flujo magnético reconectado total (Smith and Sakai, 2008). En caso de que estas si sean autoconsistentes y calculadas a partir de parámetros locales del plasma, el proceso de recombinación remueve iones de la región de reconexión, lo que lleva también a una tasa de reconexión rápida (Leake et al., 2012). El modelo de dos fluidos con términos de ionización y recombinación también ha sido utilizado para la simulación de procesos que están relacionados con el calentamiento de la cromosfera, como la colisión de dos lazos de corriente en la cromosfera superior (Sakai et al., 2006).

El modelo MHD de dos fluidos, en el que se consideran términos de ionización, recombinación, transferencia de momento y energía ha otorgado resultados importantes en diversas aplicaciones. Sin embargo, debido a que esta es una teoría en desarrollo y existe una gran cantidad de fenómenos por estudiar, actualmente no se encuentra suficiente información al respecto de ciertos efectos, como es el caso de la turbulencia MHD. En este campo se han realizado simulaciones de alta resolución siguiendo la aproximación de dos fluidos, con el fin de explicar observaciones realizadas en las que se encuentran diferencias entre comportamientos de las especies neutras y cargadas (Meyer et al., 2014). Además, el mismo modelo se ha usado para comparar la propagación a bajas velocidades de choques magnetohidrodinámicos rápidos y lentos en una dimensión (Lehmann and Wardle, 2016). En síntesis, el modelo de dos fluidos describe de forma apropiada la dinámica de las turbulencias MHD. No obstante, un modelo físicamente más relevante es aquel que adicionalmente tiene en cuenta efectos de las colisiones entre especies como ionización y recom-

binación, los cuales pueden tener un impacto considerable en el estudio de los plasmas turbulentos parcialmente ionizados.

Los plasmas turbulentos parcialmente ionizados están presentes en todo el entorno astrofísico. Es por ello que su estudio y modelado toma una gran importancia para la descripción de la dinámica de diferentes fenómenos. No obstante, como se evidenció previamente, en este campo no se encuentran suficientes modelos en los que se consideren todos los efectos de la ionización parcial. En particular, se suelen despreciar términos resultantes de la interacción entre las partículas cargadas y neutras, como la ionización y recombinación. Sin embargo, estos efectos pueden llegar a tener un papel importante en la descripción de la dinámica de dichos plasmas. Es por tal razón que en este trabajo se resolverán las ecuaciones de la MHD no relativista para fluidos turbulentos con dos especies, en las cuales se considerarán términos de recombinación, ionización, transferencia de momento y transferencia de energía. Sin embargo, debido a que el sistema de ecuaciones establecido tiene un alto grado de complejidad y es no lineal, su solución se encontrará por medio de simulaciones numéricas, las cuales se llevarán a cabo con el código MAGNUS (Navarro et al., 2017).

Por lo tanto, se realizará un análisis sistemático de la dinámica de un plasma turbulento compresible parcialmente ionizado en función de los parámetros asociados con las colisiones entre las dos especies (Benavides and Flierl, 2020), con lo cual se analizará el impacto de los términos de ionización y recombinación sobre la dinámica del plasma turbulento. En particular, se estudiarán las variables más significativas para una descripción completa y acertada de la dinámica del plasma, tales como la vorticidad, la densidad de corriente, el espectro de energía cinética y la amplificación

de energía magnética, con las cuales se realizará un análisis cualitativo y cuantitativo.

El trabajo de investigación está organizado de la siguiente forma: En primer lugar, la sección 2 en la que se describe el problema general de la turbulencia y, a partir de fundamentos físicos y matemáticos, se plantea la teoría mediante la cual se realiza su estudio, finalizando con un enfoque alrededor de la turbulencia en un plasma. Posteriormente, en la sección 3 se describe y deduce el modelo teórico de la MHD, mediante el cual se describe la dinámica de un plasma y permite encontrar una solución mediante una simulación numérica. Por lo tanto, en la sección 4 se encuentra la descripción detallada del código utilizado para solucionar el sistema de ecuaciones propuesto, se mencionan los proyectos en los cuales ha sido utilizado de forma satisfactoria. Así, con toda la teoría y herramientas a la mano para dar solución al problema, se presentan todos los resultados encontrados en la sección 5. Para ello, se realizó un amplio estudio en todos los aspectos que fueron relevantes para una descripción de los efectos que tuvo el desarrollo de la teoría planteada en el caso de diversos plasmas turbulentos. Por último, en la sección 6 se encuentran las conclusiones realizadas en torno a los resultados y hallazgos más importantes del proyecto.

1. Objetivos

Objetivo general

Analizar el impacto de la inclusión de términos de ionización y recombinación en la teoría MHD no relativista para plasmas compresibles y turbulentos.

Objetivos específicos

1. Reproducir las ecuaciones del modelo de dos fluidos de la MHD para un plasma compresible parcialmente ionizado.
2. Implementar en el código MAGNUS un módulo numérico que resuelva las ecuaciones de la MHD con términos de ionización y recombinación mediante volúmenes finitos.
3. Construir las condiciones iniciales y de frontera adecuadas para generar un fluido turbulento.
4. Realizar un estudio sistemático de la energía total del sistema en términos de los parámetros de colisión que tienen mayor impacto.
5. Analizar e interpretar los resultados obtenidos.

2. Turbulencia

La palabra turbulencia comúnmente se usa para indicar algo que no es regular. En latín, la palabra *turba* se refiere a algo confuso o que no sigue un orden. De forma que el comportamiento complejo aleatorio de un flujo que no sigue las reglas deterministas de la dinámica clásica es llamado turbulento (Bruno and Carbone, 2013). Una característica que identifica un fluido turbulento es que cuando se observa en dos tiempos distintos el aspecto general no cambia notablemente, sin embargo, el flujo en cada punto del fluido si es totalmente diferente. Para entender el fenómeno de turbulencia de manera precisa suponga un fluido infinito caracterizado por parámetros como la densidad de masa y coeficientes de transporte molecular como la viscosidad ν ; dicho fluido, bajo las condiciones adecuadas, posee movimientos tales que la velocidad en cualquier tiempo y posición dados no es la misma al ser medida varias veces con condiciones aparentemente idénticas. Es decir, en este caso las velocidades toman valores aleatorios que no están determinados por los datos macroscópicos del flujo. A este tipo de movimientos fluctuantes se les conoce como turbulentos (Batchelor, 1953).

El problema de la turbulencia, establecido hace más de un siglo, ha sido ampliamente estudiado por medio de teoría, experimentos y simulaciones durante alrededor de 140 años. Aún así, su avance es lento en comparación con otros campos de la ciencia. En primera instancia, la turbulencia se convirtió en motivo de investigación desde que en 1883 Osborne Reynolds observó que el flujo dentro de un tubo se convertía turbulento siempre que cierto parámetro aumentaba (Reynolds, 1883). Este parámetro adimensional es conocido como el número de Reynolds y depende

del coeficiente de viscosidad ν , la densidad de masa del fluido ρ , la velocidad característica V y la longitud del fluido L

$$Re = \frac{VL\rho}{\nu}, \quad (1)$$

de forma que cuando su valor es menor o igual a 2300 el flujo es regular, pero cuando incrementa más de un límite aproximado de 4000 el flujo se convierte en turbulento (Beresnyak, 2019). Lo que ocurre en este último caso es que el único término no lineal (término advectivo $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$) en la ecuación de Navier-Stokes aumenta de forma considerable y lleva el sistema a un estado caótico.

Posteriormente, se encontró la ecuación de Orr-Sommerfeld mediante la cual se describen los modos bidimensionales lineales de perturbación para dos fluidos viscosos paralelos (Orr, 1907; Sommerfeld, 1908). El papel de la viscosidad empezó a ser relevante desde que se observó que esta hace que las velocidades del flujo sean cero en las paredes que lo limitan, lo cual crea un estrés de Reynolds que causa una inestabilidad por difusión (Prandtl, 1921, 1922). Además, se evidenció que al introducir energía en un sistema turbulento a la escala de la longitud característica del fluido l_0 , dicha energía se transfiere a escalas cada vez más pequeñas, como se analizará posteriormente. Este proceso se da hasta alcanzar una escala en la cual la viscosidad es responsable de disipar la energía (Richardson, 1922). Con respecto a la transición turbulenta, se determinó la ecuación de estabilidad del flujo al derivar la ecuación de Navier-Stokes linealizada y se utilizó la ecuación de Orr-Sommerfeld para obtener las condiciones críticas del límite de estabilidad (Born

and Heisenberg, 1924). Por otra parte, los fundamentos de la teoría estadística de la turbulencia tuvieron su inicio en torno a la turbulencia isotrópica completamente desarrollada (Taylor, 1935; Taylor and Green, 1937; Taylor, 1938; Karman, 1937). Por ejemplo, en la teoría de turbulencia isotrópica se propuso la ecuación Kármán-Howarth, la cual provee un punto de partida para dicha teoría estadística.

En síntesis, un fluido turbulento se caracteriza porque las variables de campo que lo describen se comportan de forma aleatoria en el espacio y tiempo, ya que estas son extremadamente sensibles a pequeñas perturbaciones (Verma, 2004). Sin embargo, los promedios estadísticos no varían de forma abrupta con pequeñas perturbaciones, por lo cual es necesario considerar un tratamiento estadístico en el fenómeno de turbulencia (Beresnyak, 2019). Para llevarlo a cabo se tienen en cuenta tres tipos de promedios: En primer lugar el promedio de ensambles, el cual comprende un gran número de sistemas con condiciones iniciales similares y toma promedios sobre todos ellos, en este caso los resultados individuales obtenidos pueden ser muy diferentes debido a la naturaleza caótica de la ecuación. Los promedios temporales se realizan al medir una cantidad de interés en un punto determinado a lo largo de un periodo para finalmente tomar un promedio, estos son útiles en el caso de flujos estacionarios. Por último, para obtener el promedio espacial se mide la cantidad de interés en varios puntos espaciales para un tiempo fijo, por lo cual es de utilidad en el caso de un sistema homogéneo. Por otra parte, la estacionariedad implica que las propiedades promedio dependen de la diferencia de tiempo y no del tiempo absoluto, mientras que la homogeneidad indica que las propiedades promediadas dependen únicamente de la separación entre los puntos, más no de la posición absoluta. Además, cabe resaltar que los sistemas turbulentos estacio-

narios usualmente se asumen ergódicos, por lo cual su promedio temporal es igual a su promedio de ensambles.

Por otra parte, un avance crucial dentro de la teoría fue dado en 1941 por Kolmogorov, quien realizó tres hipótesis para la turbulencia con números de Reynolds muy altos. La primera hipótesis de similaridad estipula que dos puntos estadísticos tienen una forma universal que depende únicamente de dos parámetros, la viscosidad cinética ν y la tasa media de disipación de energía $\langle \varepsilon \rangle$. En segundo lugar, establece que en todo fluido turbulento con un número de Reynolds suficientemente alto, la estadística del movimiento en la escala l definida dentro del rango $l_0 \gg l \gg l_d$ tiene una forma universal que está determinada únicamente por $\langle \varepsilon \rangle$ independiente de ν , donde l_0 es la longitud característica y l_d la escala de Kolmogorov a la cual se disipa la energía. Finalmente, la tercera hipótesis postula que la disipación de energía en la turbulencia está distribuida logarítmicamente. A partir de estas hipótesis se obtuvo la ley de escala de exponente $-5/3$ para el espectro de energías en el caso de la turbulencia isotrópica homogénea (Kolmogorov, 1941). La importancia de esta teoría radica en que ha concordado con la mayoría de los resultados experimentales a números de Reynolds altos de forma aproximada.

Con el fin de entender cómo surgen dichas hipótesis se debe considerar, primero, que un sistema turbulento completamente desarrollado involucra una gran cantidad de escalas de movimiento, lo cual implica un proceso jerárquico. Alrededor de esta característica del fluido turbulento se formula uno de los problemas más relevantes de la teoría, el cual consiste en entender qué ocurre con la energía introducida en el sistema, cómo se transmite entre escalas y cómo se disipa. Para resolverlo es útil considerar una fuerza que mantenga la turbulencia activa mediante la inyección

constante de energía, ya que la turbulencia por sí sola es un fenómeno muy disipativo. Dicha fuerza realiza un trabajo W sobre el sistema, el cual iguala a la energía disipada debido a la presencia de viscosidad en el fluido, para que así se obtenga un estado estable. Por lo tanto, debido a que se está analizando el caso puramente hidrodinámico, la energía disipada proviene de la energía cinética de las partículas, es decir

$$W = -\frac{\partial E_{kin}}{\partial t}. \quad (2)$$

Ahora bien, esta igualdad involucra dos escalas completamente diferentes. Por un lado, a la izquierda el trabajo realizado es un fenómeno macroscópico dado en una escala comparable al tamaño del sistema, mientras que a la derecha la disipación se da a una escala mucho más pequeña (Tong, 2022).

Con el fin de entender los procesos que tienen lugar en este fenómeno, se da una descripción cualitativa de la turbulencia y la transferencia de energía entorno a la formación de ‘remolinos’. En primer lugar, la energía introducida en la escala macroscópica l_0 permite la formación de remolinos con longitudes características l_0 . Posteriormente, los remolinos formados se convierten en unos más pequeños, dando lugar a nuevas escalas de longitud. Sin embargo, el proceso no se da de una forma regular debido al carácter caótico del fenómeno. Por lo tanto, en estos términos, la turbulencia consiste en remolinos de todos los tamaños posibles que interaccionan entre sí y están limitados por una escala superior l_0 y una escala inferior l_d (Tong, 2022). De tal forma que cada uno de estos pierde energía cuando se divide y decae en remolinos más pequeños. Dicha energía

alimenta los remolinos de la siguiente escala y estos a su vez producen estructuras más pequeñas, dando lugar a lo que se conoce como *cascada de energía* (Richardson, 1922). Además, existe un rango de escalas en el cual es despreciable el efecto de la viscosidad y de la energía introducida al sistema, este es conocido como el *rango inercial* y es un régimen en el cual el proceso de cascada de energía se da sin disipación, ya que la energía que se introduce en una escala es la misma que se transfiere a la siguiente (ver figura 1)). El fenómeno de cascada de energía continúa hasta el punto en el que la disipación viscosa supera la transferencia de energía no lineal que proviene de escalas mayores (Richardson, 1922). Así, el papel de la viscosidad es suprimir las componentes a pequeña escala de la turbulencia, lo cual conlleva a que la distribución espectral de energía llegue a cero mucho antes de alcanzar una escala de longitud comparable con el camino libre medio (distancia entre dos colisiones sucesivas). Esto implica que es posible ignorar la estructura molecular del medio y tratarlo como un fluido continuo. De no ser así el fenómeno de turbulencia sería aún más complejo, debido a que los movimientos en dichas escalas no están regidos por la ecuación de Navier-Stokes (Batchelor, 1953).

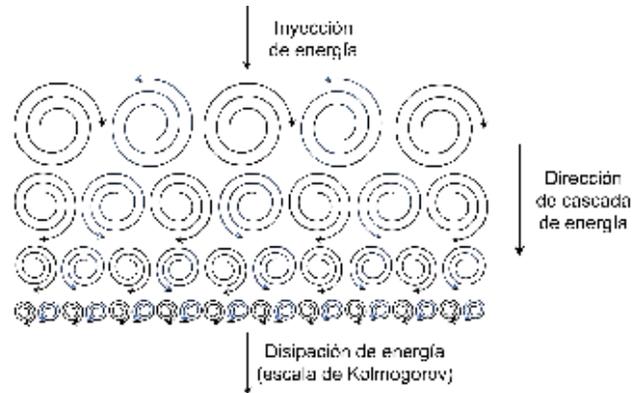


Figura 1

Proceso de cascada de energía donde se observa la escala de inyección de energía, la escala de disipación y el rango inercial.

Para desarrollar la teoría de Kolmogorov es entonces fundamental determinar el espectro de energías $E(k)$, el cual se obtiene a través de una transformada de Fourier unidimensional sobre la energía cinética y se define como la energía cinética por unidad de masa y número de onda. Al considerar un estado estable estadístico resultante del equilibrio entre la energía introducida a una tasa ε y el proceso de cascada de energía mencionado previamente, se define por conveniencia una jerarquía discreta de escalas l_n con los números de onda $k_n = l_n^{-1}$ y la energía cinética E_n asociados a cada escala. Así, se encuentra la velocidad característica n-ésima como $v_n \approx E_n^{1/2}$ (esta se interpreta como una diferencia de velocidad típica a lo largo de una distancia l_n , más no como la velocidad a la cual se mueve la estructura de longitud l_n). A partir de dichas definiciones resulta el tiempo $t_n = l_n/v_n$ que es característico de las estructuras de remolinos en la turbulencia, por lo que se le conoce como tiempo de rotación del remolino o tiempo de cascada. Al analizar la tasa de transferencia de energía ε_n que corresponde a la energía por unidad de masa que cae en cascada

entre las diferentes escalas consecutivas, se deduce que dicha transferencia debe ser del orden de E_n/t_n . Lo que se debe a que t_n corresponde el tiempo característico apropiado para la transferencia de la energía E_n disponible en la escala l_n (Kolmogorov, 1941; Frisch et al., 1978).

De acuerdo con la segunda hipótesis de similaridad de Kolmogorov y el análisis previo, existe un intervalo conocido como rango inercial en el que se desprecia la inyección de energía directa y la viscosidad donde además se conserva la energía. Siendo así, para que se mantenga un estado estacionario, la tasa de transferencia de energía ε_n debe ser constante. Por lo que la razón entre la energía y el tiempo n -ésimos proveen una relación entre la longitud y velocidad características n -ésimas y la tasa de energía introducida (que bajo el mismo análisis debe ser igual a la tasa de disipación)

$$\frac{E_n}{t_n} = \frac{v_n^3}{l_n} = \varepsilon, \quad (3)$$

que se obtiene al utilizar las definiciones mencionadas previamente. Esta relación es la que da paso al resultado original de Kolmogorov

$$v_n = (\varepsilon l_n)^{1/3}, \quad (4)$$

conocido como la ley de Kolmogorov-Obukhov (Kolmogorov, 1941; Obukhov, 1941). Entonces, teniendo en cuenta que $E_n \cong v_n^2$, se eleva al cuadrado la expresión encontrada para la velocidad y por medio de la transformada de Fourier se obtiene

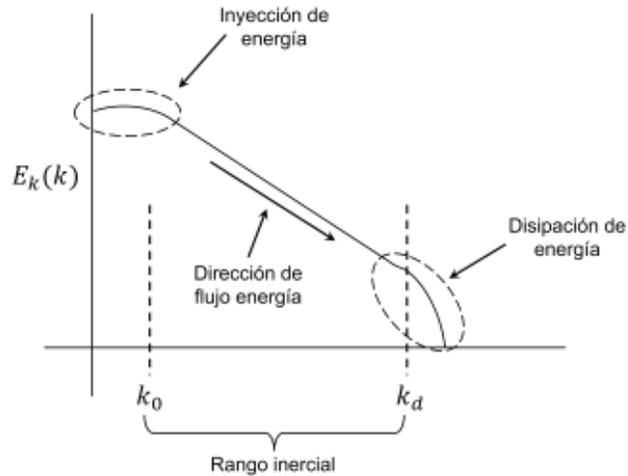


Figura 2

Decaimiento en el espectro de energía, donde se encuentran las escalas más relevantes en el proceso de disipación de energía.

$$E(k) \approx \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (5)$$

que es la conocida ley de potencia $-5/3$, donde k está definida dentro del intervalo $l_0^{-1} < k < l_d^{-1}$ (Frisch et al., 1978). De forma que la gráfica típica junto con las escalas más importantes y el rango inercial se encuentra en la figura 2. Al comprobar esta teoría mediante experimentos y simulaciones se verificó de forma aproximada este espectro de energía. Sin embargo, posteriormente se encontró una pequeña desviación conocida como corrección de intermitencia (Verma, 2004). El problema con el análisis realizado es el hecho de suponer que la escala exterior l_0 , en la cual se inyecta la energía, no afecta el proceso de cascada de energía. Por tal razón, la corrección realizada contiene un término relacionado con dicha escala, siendo entonces

$$E(k) \cong \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} (kl_0)^\eta, \quad (6)$$

donde η es conocido como el exponente de intermitencia.

El fenómeno de intermitencia en estos fluidos se comprende a partir del estudio del movimiento turbulento a grandes números de onda, donde se observa que dichos números de onda se activan de forma muy desigual con respecto a la distribución espacial. Es decir, no se obtiene una aparición regular de escalas de movimiento. Estas variaciones espaciales se describen como fluctuaciones en el espectro a grandes números de onda, las cuales crecen en magnitud conforme estos aumentan su valor (Batchelor and Townsend, 1949). De esta forma, es la intermitencia intrínseca que se encuentra en el rango de equilibrio de dichos números de onda la que da lugar a las fluctuaciones mencionadas (Dou, 2022).

Por otra parte, para obtener la escala de Kolmogorov se debe considerar una tasa de disipación en función de la viscosidad. Para ello, siguiendo un análisis dimensional y considerando la ecuación (3), se llega a la expresión

$$\frac{\nu (\Delta u_d)^2}{l_d^2} \cong \varepsilon, \quad (7)$$

donde Δu_d hace referencia a los diferenciales de velocidad concernientes a los remolinos de escala l_d . Finalmente, al utilizar la relación entre velocidad y longitud dada en (3) junto con la definición del número de Reynolds (1), se obtiene

$$l_d \cong \frac{l_0}{Re^{3/4}}, \quad (8)$$

que es la escala a la cual se disipa la energía del sistema. Nótese que se cumple $l_d \ll l_0$ debido a que para que sea un fluido turbulento se tiene $Re \gg 1$.

De manera análoga al caso hidrodinámico, en el caso en el que el fluido turbulento es un plasma, la turbulencia se determina ahora a partir del número de Reynolds magnético. Este se define como

$$Re_m = \frac{LV}{\bar{\eta}}, \quad (9)$$

donde $\bar{\eta} = c^2/4\pi\sigma$ es la difusividad magnética, c es la velocidad de la luz y σ la conductividad. Además, en el caso en que la velocidad de Alfvén, definida como

$$v_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (10)$$

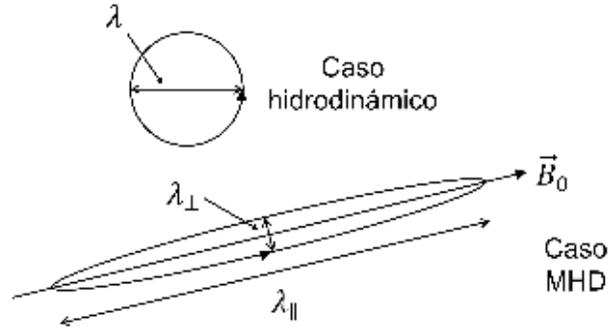
sea la escala de velocidad típica del sistema, el número de Reynolds magnético es llamado número de Lundquist

$$S = \frac{Lv_A}{\bar{\eta}}, \quad (11)$$

el cual da una comparación entre la escala de tiempo de una onda de Alfvén cruzando y la escala de tiempo de la difusión resistiva (Beresnyak, 2019).

La teoría descrita ahora se conoce como *turbulencia magnetohidrodinámica* o *turbulencia MHD*. La turbulencia MHD fue propuesta inicialmente a mediados de los 60 por Kraichnan e Iroshnikov, quienes postularon que las escalas de tiempo para la interacción no lineal es proporcional a B_0^{-1} , por lo que el tiempo de Alfvén domina la dinámica y el espectro de energía $E(k)$ es proporcional a $k^{-3/2}$. Sin embargo, en la década de 1990 las simulaciones numéricas mostraron que el índice espectral es cercano a $5/3$, el cual se conoce como índice de Kolmogorov para un fluido turbulento. Actualmente se entiende que esto resulta debido a que las ondas de Alfvén se dispersan por el campo magnético medio local $B_0(k) \propto k^{-1/3}$. Además, las ondas de Alfvén son los modos básicos de la MHD incompresible, estas viajan de forma paralela y antiparalela al campo magnético con velocidad B_0 . Adicionalmente, un efecto que se observa en la turbulencia MHD se debe a que los términos no lineales presentes en las ecuaciones inducen interacciones entre los diferentes modos de onda, lo que resulta en intercambios de energía entre los modos de velocidad-velocidad, velocidad-magnético y magnético-magnético (Verma, 2004).

A diferencia de la turbulencia puramente hidrodinámica al considerar un plasma se obtienen propiedades diferentes debido a la presencia de un campo magnético. Este campo le otorga una dirección de preferencia en el espacio al fluido, razón por la cual la turbulencia deja de ser isotrópica. Además, se ha observado que los remolinos formados tienden a elongarse en dirección de las líneas de campo (Schnack, 2009) como se observa en la figura 3, lo cual lleva a que el número de onda perpendicular k_{\perp} sea mucho mayor que el número de onda paralelo k_{\parallel} .

**Figura 3**

Diferencia entre las componentes de la longitud de onda para un fluido puramente hidrodinámico y un plasma.

Ahora, a partir de la relación entre las componentes del número de onda

$$\frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \cong (Lk_{\perp})^{1/3}, \quad (12)$$

se determinan los espectros de energía perpendicular y paralelo. Entonces, si se define $v_n = v_A$, la longitud $L = v_A^3/\varepsilon$ es la ‘escala integral’ y el primer espectro se define acorde a la teoría de Kolmogorov

$$E(k_{\perp}) \cong \left(\frac{v_A^3}{L}\right)^{2/3} k_{\perp}^{-5/3}, \quad (13)$$

mientras que al considerar la relación (12) para el espectro paralelo

$$E(k_{\parallel}) \cong \varepsilon^{3/2} v_A^{-5/2} k_{\parallel}^{-5/2}, \quad (14)$$

se encuentra una ley de potencias diferente. Finalmente, según las expresiones obtenidas

se tiene que la anisotropía presentada es mayor a medida que la escala disminuye, es decir para mayores valores de k (Schnack, 2009). Por consiguiente los remolinos tienden a estrecharse más en dirección del campo para pequeñas escalas que para escalas grandes, por lo cual el flujo magnético tiende a formar estructuras de filamentos de corriente delgados en dichas escalas, como se observará en las gráficas de densidad de corriente en los resultados obtenidos en la sección 5 (ver figura 4b).

3. Ecuaciones de la magnetohidrodinámica

3.1 Múltiples especies

La magnetohidrodinámica es un modelo teórico mediante el cual se realiza una descripción precisa de la dinámica e interacción a bajas frecuencias de un fluido eléctricamente conductor con los campos electromagnéticos. Usualmente, es utilizada para describir gases ionizados o parcialmente ionizados, los cuales conocemos como plasmas. Estos son fluidos conductores globalmente neutros que contienen interacciones colectivas. Además, están caracterizados por pocos parámetros como la densidad de masa, la velocidad y la presión y mantienen sus propiedades sin importar el tamaño de la muestra (Schnack, 2009). Dicho modelo se deduce a partir de la *ecuación general de Boltzmann integrada o ecuación de transporte*

$$\partial_t (n_\alpha \langle g \rangle_\alpha) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha \langle g \vec{v} \rangle_\alpha) - \frac{n_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} g \rangle_\alpha = \int (\partial_t f)_{coll} g d^3 v, \quad (15)$$

la cual describe el comportamiento de un sistema termodinámico fuera del equilibrio (Boltzmann, 1872). Esta es una expresión general que se puede aplicar para cualquier función arbitraria $g(\vec{v})$. Además, al asumir el valor $g = \beta_\alpha$, donde β_α representa ya sea la masa o la carga eléctrica, se obtiene naturalmente la ecuación de continuidad

$$\partial_t n_\alpha \beta_\alpha + \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha \beta_\alpha \vec{u}_\alpha) = S_\alpha, \quad (16)$$

A partir de la expresión (16) se obtiene la ecuación que representa la conservación de la masa

$$\partial_t \rho_{m\alpha} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) = S_\alpha, \quad (17)$$

al definir $\beta_\alpha = m_\alpha$, donde

$$S_\alpha = m_\alpha \int (\partial_t f)_{coll} d^3 v, \quad (18)$$

representa la razón de cambio por unidad de volumen a la cual las partículas α se producen o desaparecen debido a las colisiones y \vec{u} el campo de velocidades. Los procesos físicos que comprende este término son tales que generan una producción o destrucción de alguna especie de partícula, como la ionización, recombinación, intercambio de carga, entre otros.. Por otro lado, resulta la conservación de la carga

$$\partial_t \rho_\alpha + \nabla \cdot \vec{J}_\alpha = S_\alpha, \quad (19)$$

en el caso en el que se define $\beta_\alpha = q_\alpha$. En las expresiones (17) y (19) las cantidades $\rho_{m\alpha}$, ρ_α , \vec{J}_α hacen referencia a la densidad de masa, la densidad de carga y la densidad de corriente, respectivamente.

Por otra parte, si la función se define como $g = \beta_\alpha \vec{v}$, se obtiene la ecuación de movimiento conocida como la *ecuación de Navier-Stokes* (ver apéndice 1)

$$\beta_\alpha n_\alpha \frac{D\vec{u}_\alpha}{Dt} = \frac{n_\alpha \beta_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{F} \rangle_\alpha - \nabla \cdot \mathbb{M}_\alpha - \nabla p_\alpha + \vec{R}_\alpha - \vec{u}_\alpha s_\alpha, \quad (20)$$

la cual describe la conservación del momento lineal

$$m_\alpha n_\alpha \frac{D\vec{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha \langle \vec{F} \rangle_\alpha - \nabla \cdot \mathbb{M}_\alpha - \nabla p_\alpha + \vec{R}_\alpha - \vec{u}_\alpha s_\alpha, \quad (21)$$

en el caso de $\beta_\alpha = m_\alpha$. En esta ecuación el operador $\frac{D}{Dt}$ se conoce como la derivada Lagrangiana y está definido como $\frac{D}{Dt} = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$. Esta expresión describe la relación entre la razón de cambio temporal del momento medio y las fuerzas externas, las fuerzas debidas a la viscosidad, la presión del fluido y las fuerzas internas asociadas con colisiones. En este caso, el término

$$R_\alpha = m_\alpha \int \vec{v} (\partial_t f)_{coll} d^3v, \quad (22)$$

representa el intercambio de momento debido a las colisiones entre especies. Mientras que el término $\vec{u}_\alpha s_\alpha$ hace referencia a la transferencia de momento únicamente debido a procesos de conversión de especies. Además, si se define $\beta_\alpha = q_\alpha$ en (20) se obtiene una ecuación para la evolución temporal de la densidad de corriente (ver apéndice 1)

$$\partial_t \vec{j} + \nabla \cdot (\vec{u} \vec{j} + \vec{j} \vec{u}) + \nabla \cdot \mathbb{P}^E = \sum_\mu \left(\frac{q_\mu}{m_\mu} \right) n_\mu \langle \vec{F} \rangle_\mu + \sum_\mu \left(\frac{q_\mu}{m_\mu} \right) \vec{R}_\mu, \quad (23)$$

la cual considera las interacciones entre las componentes del plasma y relaciona el campo eléctrico con la densidad de corriente (el subíndice μ representa a las componentes cargadas).

Dicha expresión es conocida como la ley de Ohm generalizada (Vasyliūnas, 2005). Para obtenerla es necesario además realizar una suma sobre las especies cargadas (iones y electrones). El término \vec{j} es la densidad de corriente de conducción, la cual representa la densidad de corriente de carga en el marco de referencia que se mueve con una velocidad promedio global \vec{u} , \mathbb{P}^E se conoce como el tensor de presión electrocinético total. Sin embargo, dentro del modelo utilizado no se considerarán todos los términos de la ecuación (23) debido a su complejidad, por lo que se utilizarán los términos principales, con lo cual la expresión se reduce a

$$\vec{E} + \vec{u}_c \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\sigma_0}. \quad (24)$$

Finalmente, cuando se define $g = \beta_\alpha v^2/2$ en la ecuación de transporte (15) se obtiene la expresión que corresponde a la conservación de la energía (ver apéndice 1)

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{\beta_\alpha n_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\left(\frac{\beta_\alpha n_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) \vec{u}_\alpha + \mathbb{M}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + p_\alpha \mathbb{I} \cdot \vec{u}_\alpha + q_\alpha \right] \\ - \frac{\beta_\alpha n_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle = H_\alpha, \end{aligned} \quad (25)$$

donde

$$H_\alpha = \beta_\alpha \int \vec{v}^2 (\partial_t f)_{coll} d^3 v, \quad (26)$$

para $\beta_\alpha = m_\alpha$, representa el intercambio de energía debido a colisiones entre especies. Además, el término $\frac{1}{2} u_\alpha^2 s_\alpha$ representa intercambio energético consecuente de la conversión de

especies y $\vec{u}_\alpha \cdot \vec{R}$ muestra que el intercambio de momento conlleva una interacción energética. El término $\nabla \cdot \vec{q}$ hace referencia al flujo de calor y N es el número de grados de libertad del plasma. Por otra parte, la evolución en el tiempo del campo magnético está dada por la ecuación de inducción

$$\partial_t \vec{B} = \nabla \times [(\vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - \eta \vec{j}], \quad (27)$$

donde η se asocia con el término de difusión del campo magnético. Esta ecuación proviene de la ley de Faraday, la ley de Ampère en la aproximación de bajas frecuencias y la ley de Ohm (ver apéndice 1). En particular, la ley de Ampère para bajas frecuencias será de utilidad para dar explicación al fenómeno de formación de hojas de corriente, esta es

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (28)$$

Adicionalmente, es necesario considerar que el campo magnético tiene carácter solenoidal, por lo que se debe cumplir la relación

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (29)$$

a cada paso de tiempo. El conjunto de ecuaciones (17), (21), (25), (23), (27) y (29) componen lo que se conoce como modelo magnetohidrodinámico para múltiples especies. Este modelo se representa el acople de las ecuaciones de la hidrodinámica con las ecuaciones de Maxwell bajo una aproximación no relativista de un plasma compresible. Su función es describir la dinámica de

dicho fluido y su interacción con el campo magnético.

Adicionalmente, existe un parámetro que determina si la dinámica de un plasma está descrita mayormente por la interacción magnética o por la interacción cinética. Para ello, se define como la razón entre la presión cinética y la presión magnética, es decir

$$\beta = \frac{p_0}{B_0^2/2\mu_0}. \quad (30)$$

Por lo cual, cuando este parámetro es menor que uno, se dice que el plasma es dominado magnéticamente y, en el caso contrario, es dominado cinéticamente.

3.2 Modelo de dos fluidos

Un plasma parcialmente ionizado está compuesto por iones, electrones y átomos neutros, por lo cual un primer modelo teórico describiría a cada especie por aparte comprendiendo términos de interacción entre estas. Este corresponde al modelo de tres fluidos (ver apéndice 1), sin embargo, dicho modelo requiere una capacidad computacional mucho mayor que la requerida para el modelo utilizado durante este proyecto de grado. Por lo tanto, aún cuando la aproximación de tres fluidos funciona de forma adecuada, es de interés reducir el sistema a un modelo de dos fluidos compuesto por un fluido cargado que comprende iones junto con electrones y un fluido neutro. Para ello, se toma la aproximación de iguales concentraciones $n = n_i = n_e$, se desprecia la masa del electrón $m_e \rightarrow 0$ debido a que esta es muy pequeña a comparación de la masa de los iones y se aproxima la masa de los iones a la masa de las partículas neutras $m_i = m_n$ junto con la igualdad de las cargas $q = q_i = q_e$ (Meier and Shumlak, 2012). La densidad de masa correspondiente al fluido cargado es

$$\rho_{mc} = \rho_{mi} + \rho_{me}, \quad (31)$$

la densidad de carga

$$\rho_q = q_i n_i + q_e n_e = -en_e + ez n_i, \quad (32)$$

donde z es el número atómico de los iones y la velocidad del fluido cargado

$$\vec{u}_c = \frac{\rho_{mi} \vec{u}_i + \rho_{me} \vec{u}_e}{\rho_{mc}}. \quad (33)$$

El conjunto de ecuaciones resultante para el modelo de dos fluidos se obtiene entonces al sumar las ecuaciones dadas para los iones con las de los electrones, lo que resulta en (ver apéndice 1):

■ Fluido cargado:

$$\frac{\partial \rho_{mc}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c) = S_c, \quad (34)$$

$$\rho_{mc} \frac{D\vec{u}_c}{Dt} = \vec{j} \times \vec{B} + \rho_{mc} \vec{g} - \nabla \cdot \mathbb{P}_c + \vec{R}_c - \vec{u}_c S_c, \quad (35)$$

$$\frac{N}{2} \frac{Dp_c}{Dt} + \frac{N+2}{2} p_c \nabla \cdot \vec{u}_c = -(\mathbb{M}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_c - \nabla \cdot \vec{q}_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + H_c + \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \eta j^2. \quad (36)$$

- Fluido neutro:

$$\frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n) = S_n, \quad (37)$$

$$\rho_{mn} \frac{D\vec{u}_n}{Dt} = \rho_{mn} \vec{g} - \nabla \cdot \mathbb{P}_n + \vec{R}_n - \vec{u}_n S_n, \quad (38)$$

$$\frac{N}{2} \frac{Dp_n}{Dt} + \frac{N+2}{2} p_n \nabla \cdot \vec{u}_n = -(\mathbb{M}_n \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_n - \nabla \cdot \vec{q}_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + H_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n. \quad (39)$$

Para obtener la ecuación (35) es necesario considerar tanto la fuerza eléctrica como la fuerza debida a la gravedad, mientras que en el caso del fluido neutro (38) se considera únicamente el término asociado con la gravedad. De igual forma, únicamente en la ecuación de energía del fluido cargado (36) aparece un término asociado al calentamiento de Joule j^2 y la resistividad óhmica η . Además, el término \vec{j} es una densidad de corriente relativa entre iones y electrones $\vec{j} = qn(\vec{u}_i - \vec{u}_e)$.

3.3 Ecuaciones conservativas para dos fluidos

Finalmente, para el desarrollo numérico de las ecuaciones es necesario reescribir el sistema de forma conservativa. El sistema de ecuaciones encontrado resultó (ver apéndice 1):

- Fluido cargado:

$$\frac{\partial \rho_{mc}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c) = S_c, \quad (40)$$

$$\partial_t (\rho_{mc} \vec{u}_c) + \nabla \cdot \left[\rho_{mc} \vec{u}_c \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \vec{B} + p_{tc} \mathbb{I} + \mathbb{M} \right] = \rho_{mc} \vec{g} + \vec{R}_c. \quad (41)$$

$$\partial_t E_c = -\nabla \cdot \left[(E_c \mathbb{I} + \mathbb{P}_c) \cdot \vec{u}_+ \vec{Q}_c \right] + \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \rho_q \vec{u}_c \cdot \vec{E} + H_c, \quad (42)$$

- Fluido neutro:

$$\frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n) = S_n. \quad (43)$$

$$\partial_t (\rho_{mn} \vec{u}_n) + \nabla \cdot [\rho_{mn} \vec{u}_n \vec{u}_n + \mathbb{P}_n] = \rho_{mn} \vec{g} + \vec{R}_n, \quad (44)$$

$$\partial_t E_n = -\nabla \cdot [(E_n \mathbb{I} + \mathbb{P}_n) \cdot \vec{u}_n + \vec{Q}_n] + \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} + H_n, \quad (45)$$

Son estas ecuaciones las que finalmente se resolverán mediante el método de volúmenes finitos. En la ecuación para la energía, se utiliza el término

$$E_\mu = \frac{1}{2} \rho_{m\mu} u_\mu^2 + \rho_{m\mu} e_\mu, \quad (46)$$

donde μ representa ya sea el fluido cargado (c) o el neutro (n).

3.4 Términos de colisiones

Los términos asociados con las colisiones entre especies deben cumplir con cierta relación entre ellos para así garantizar la conservación de la masa, el momento y la energía en el fluido completo. Las condiciones son

$$S_c = -S_n, \quad (47)$$

$$\vec{R}_c = -\vec{R}_n, \quad (48)$$

$$H_c = -H_n. \quad (49)$$

Como se mencionó anteriormente, el término de intercambio de masa (47) está relacionado con la conversión de especies. Específicamente se tendrán en cuenta procesos de ionización y recombinación, los cuales se dan debido a colisiones inelásticas entre especies. Su definición se da en función de ciertos coeficientes empíricos que miden las tasas de ionización y recombinación. Por ejemplo, para los neutros

$$S_n = \rho_c \Gamma^{rec} - \rho_n \Gamma^{ion}, \quad (50)$$

donde se aprecia que el coeficiente asociado con la recombinación es positivo ya que cuando ocurre este proceso la cantidad de átomos neutros aumentan y, por lo tanto, aumenta la masa del fluido neutro. Además, la tasa de recombinación está multiplicada por la densidad de masa del fluido cargado, ya que es un porcentaje de estos el que se recombina. De la misma forma, el coeficiente de ionización está asociado con la densidad de masa del fluido neutro porque son los átomos neutros los que se ionizan y, el término es negativo debido a que dicho proceso disminuye la cantidad de átomos neutros. Un razonamiento similar se realiza para analizar los términos asociados con el fluido cargado.

En el caso del término (48) se debe tener en cuenta el intercambio de momento debido a colisiones elásticas proporcional a la diferencia de velocidades y el intercambio de momento resultante de las colisiones inelásticas debidas a la ionización y recombinación. Es decir

$$\vec{R}_n = \alpha_c(\vec{u}_c - \vec{u}_n) + \rho_c \vec{u}_c \Gamma^{rec} - \rho_n \vec{u}_n \Gamma^{ion}, \quad (51)$$

donde se observa que el primer término claramente depende de la diferencia de velocidades entre las especies que colisionan y de un parámetro α_c conocido como el coeficiente de colisiones en física solar (Oliver et al., 2016), el cual está definido como

$$\alpha_c = \frac{4}{3} \xi_c \sqrt{\frac{8k_B}{\pi} \left(\frac{T_i}{m_i} + \frac{T_n}{m_n} \right)} \rho_i \rho_n, \quad (52)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann, T la temperatura, m_n la masa de las partículas neutras, m_i la masa de las partículas ionizadas y el parámetro ξ_c se define en términos de sección transversal de colisión σ_{in} como

$$\xi_c = \frac{\sigma_{in}}{m_i + m_n}. \quad (53)$$

Mientras que el segundo y tercer término de la ecuación (51) son análogos al caso de la conversión de especies (47), con la característica de que ahora se multiplican las velocidades debido a que se trata de la conservación del momento lineal.

Por último, para el término asociado a la ecuación de energía (49) se define la producción de calor debida a colisiones como

$$Q_c^{in} = \alpha_c \left[\frac{1}{2} |\vec{u}_c - \vec{u}_n|^2 + \frac{3}{2} \frac{k_B}{m_i} (T_n - T_i) \right], \quad (54)$$

$$Q_n^{in} = \alpha_c \left[\frac{1}{2} |\vec{u}_c - \vec{u}_n|^2 + \frac{3}{2} \frac{k_B}{m_n} (T_i - T_n) \right], \quad (55)$$

la cual depende de la velocidad y temperatura relativas entre especies (Leake et al., 2014b).

Además, la expresión que determina el intercambio de energía entre especies resulta

$$H_n = \alpha_c \vec{u}_n \cdot (\vec{u}_c - \vec{u}_n) + \frac{1}{2} (\Gamma^{rec} \rho_c u_c^2 - \Gamma^{ion} \rho_n u_n^2) \quad (56)$$

$$+ \frac{3}{2} \frac{k_B}{m_n} (\rho_c T_c \Gamma^{rec} - \rho_n T_n \Gamma^{ion}), \quad (57)$$

donde el primer término muestra el intercambio de energía resultante del intercambio de momento y el segundo término depende de la diferencia de velocidades y de temperaturas entre las especies, por lo cual se tiene un intercambio de energía térmica debido a las colisiones elásticas. Por otra parte, los siguientes dos términos evidencian el intercambio de energía debido a los procesos de ionización y recombinación. Por una parte, se encuentra uno asociado con la energía cinética y, por último, otro que representa el intercambio de energía térmica entre partículas cargadas y neutras debido a colisiones inelásticas (Popescu, 2020).

Las tasas de ionización y recombinación son resultados que se encontraron de forma experimental, estos provienen de diversos ajustes de curvas realizados a datos observacionales con

diferentes parámetros como la temperatura de los electrones y el tipo de ion. Entonces, para la recombinación se utilizó el resultado (Popescu, 2020)

$$\Gamma^{rec} \approx n_e (5.20 \times 10^{-14}) \sqrt{\phi_{ion}/T_e^*} \left(0.4288 + 0.5 \ln \phi_{ion}/T_e^* + 0.4698 (\phi_{ion}/T_e^*)^{-1/3} \right) [1/s], \quad (58)$$

mientras que para la ionización se tomó (Cox and Tucker, 1969)

$$\Gamma^{ion} \approx n_e A \frac{1}{X + \phi_{ion}/T_e^*} \left(\frac{\phi_{ion}}{T_e^*} \right)^K e^{-\phi_{ion}/T_e^*} [1/s], \quad (59)$$

donde $A = 2.91 \times 10^{-14}$, $X = 0.232$ y $K = 0.39$ son las constantes resultantes del ajuste realizado para el átomo de hidrógeno, n_e es la densidad de electrones, ϕ_{ion} es el potencial de ionización del átomo y T_e^* es la temperatura de los electrones en eV . En particular, la función potencial ϕ_{ion} toma un papel muy importante dentro del modelo. De hecho, esta determina cuando la energía de la partícula que colisiona es apropiada ya sea para que quede atrapada y se dé un proceso de recombinación o para que expulse el electrón del átomo neutro y se produzca la ionización.

4. Código MAGNUS

Debido a la complejidad y no linealidad del modelo presentado anteriormente, mediante el cual se describe un plasma parcialmente ionizado desde una perspectiva muy cercana a su comportamiento en la naturaleza, se hace necesario realizar simulaciones enfocadas en la computación de alto rendimiento. En particular, el estudio del clima espacial requiere de escalas espaciales y temporales muy distintas, por lo que se dificulta en gran medida la simulación de varios eventos astrofísicos al mismo tiempo.

Por lo tanto, para el desarrollo numérico y simulación se utilizará el código MAGNUS, el cual está paralelizado con OpenMP y se centra en resolver las ecuaciones de la MHD resistiva con flujos de calor para fluidos totalmente ionizados o parcialmente ionizados. Su estructura de solución de las ecuaciones se basa en el método de líneas (MOL), el cual permite discretizar la parte espacial por medio de diferencias finitas, volúmenes finitos o incluso métodos de Galerkin o elementos finitos. En este caso el método de discretización usado es volúmenes finitos combinado con los solucionadores aproximados de Riemann HLLE y HLLC con diferentes limitadores de pendientes como MINMOD, WENO5 y MC, siendo el último el que se usó durante el proyecto. Además, el código está relacionado con integradores temporales del tipo Runge Kutta y un método de transporte de flujo restringido. Con ello se ha garantizado que la divergencia del campo magnético se mantenga en cero con un error suficientemente bajo ($\approx 1 \times 10^{-12}$) (Navarro et al., 2017). Es de particular interés el método de volúmenes finitos para discretizar la parte espacial, ya que este permite la captura de choques en alta resolución (HRSC) y trabaja con limitadores de pendien-

tes. Es decir, tiene un paso de tiempo adaptativo con el que se escoge la pendiente más pequeña dependiendo de las velocidades de propagación de las ondas, para que así no haya desconexión causal del problema y no se pierda la información que contiene la onda. Otro aspecto importante a tener en cuenta es que tiene una salida en formato HDF5, este es un formato de visualización utilizado para poder analizar los datos por medio de Python.

Con el fin de incluir los términos de ionización y recombinación en el modelo computacional, tal como se encuentran en la teoría expuesta en la sección 3, se añadió una subrutina de fuentes. Así, en cada paso de tiempo la ecuación discretizada mediante volúmenes finitos se iguala a una función de las frecuencias de colisiones inelásticas (ionización y recombinación), haciendo cumplir la no conservación de la masa, momento y energía para cada fluido por aparte. Adicionalmente, como dato inicial se elaboró una subrutina que genera un fluido turbulento. Para ello se utilizó un vórtice de Orszag-Tang (Parashar et al., 2010) con parámetros aleatorios.

El código MAGNUS se ha utilizado previamente para simular y estudiar diferentes fenómenos astrofísicos concernientes al campo de la física solar. Además, los resultados obtenidos en las distintas aplicaciones han sido satisfactorios y corroboran la calidad y eficiencia del mismo. Entre los proyectos abordados mediante este se encuentra la evolución 3D de un pulso de velocidad vertical en la región de transición entre la fotosfera y la corona solar y la simulación 2D de un pulso de velocidad transversal en un lazo de corriente (Navarro et al., 2017), también se utilizó para modelar la propagación de ondas en un medio isotrópico y heterogéneo (Landinez et al., 2021), la emergencia de burbujas de plasma en la corona solar (Navarro et al., 2019), la propagación de ondas de Alfvén torsionales en una atmósfera solar estratificada (Wandurraga et al., 2021) y también

se han estudiado los efectos de conducción térmica en la formación de “tadpole-like jets” solares cromosféricos (Navarro et al., 2021).

5. Resultados

5.1 Turbulencia en plasmas totalmente ionizados

Para comenzar se realiza un estudio sistemático del fenómeno de turbulencia en el caso de un plasma totalmente ionizado. El análisis respectivo se lleva a cabo en diferentes aspectos de la turbulencia, de tal forma que se obtenga una descripción detallada y completa de los resultados. Por una parte, se estudió la componente z de la vorticidad y la densidad de corriente con gráficas dos-dimensionales en la sección 5.1.1. Así, se observó el comportamiento turbulento del fluido por medio de la vorticidad y la formación de hojas de corriente y plasmoides a través de la densidad de corriente. Por lo tanto, el análisis que se realiza en esta sección es de carácter cualitativo y está fundamentado en la teoría expuesta en secciones anteriores y en resultados obtenidos por otros investigadores. Por otra parte, en la sección 5.1.2 se estudia el comportamiento del espectro de energía para el caso de energía cinética y magnética. De esta manera, a partir de las gráficas obtenidas se comparan los diferentes resultados con lo predicho en la teoría de Kolmogorov (Kolmogorov, 1941). Finalmente, en la sección 5.1.3 se analiza el proceso de amplificación del campo magnético y se estudia cómo la turbulencia actúa con respecto a la energía magnética.

Para realizar el dato inicial que se utilizó durante toda la investigación, se realizó una función gaussiana de donde se obtuvieron valores aleatorios para realizar una perturbación en el vórtice de Orszag Tang. Esta función es

$$P(u_1) = (1/(\sqrt{2}\sigma)) \exp(-(u_1)^2/(2\sigma^2)), \quad (60)$$

donde u_1 corresponde a un valor tomado de forma aleatoria. Entonces, por medio de estos valores aleatorios se perturbó cada punto de la malla numérica utilizando modos de Fourier. Es decir, la perturbación total realizada es

$$\begin{aligned} v_x &= - \sum_z \sum_j \sum_i (0.1) v_0^{ijz} P^{ijz}(u_1) \sin(2\pi y(i, j, z) + P^{ijz}(u_2)), \\ v_y &= \sum_z \sum_j \sum_i (0.1) v_0^{ijz} P^{ijz}(u_3) \sin(2\pi x(i, j, z) + P^{ijz}(u_4)), \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} B_x &= - \sum_z \sum_j \sum_i (0.1) B_0^{ijz} P^{ijz}(u_1) \sin(2\pi y(i, j, z) + P^{ijz}(u_2)), \\ B_y &= \sum_z \sum_j \sum_i (0.1) B_0^{ijz} P^{ijz}(u_3) \sin(4\pi x(i, j, z) + P^{ijz}(u_4)), \end{aligned} \quad (62)$$

donde v_0^{ijz} y B_0^{ijz} son las magnitudes de la velocidad y campo magnético en el punto ijz , respectivamente. Además, cabe resaltar que para el caso del plasma parcialmente ionizado, en la siguiente sección, se consideró una perturbación análoga pero en la velocidad del fluido neutro.

5.1.1 Vorticidad y densidad de corriente

En primer lugar, es importante mencionar que en todas las gráficas dos-dimensionales se utilizó una escala normalizada respecto de la longitud característica del sistema l_c para los ejes X y Y . En este caso, se obtuvo la componente z de la vorticidad ω_z y la componente z de la densidad de corriente J_z para un tiempo adimensional $t/t_c = 0.9475$, como se muestra en la figura 4.

En términos generales, tanto en la vorticidad como en la densidad de corriente se observan

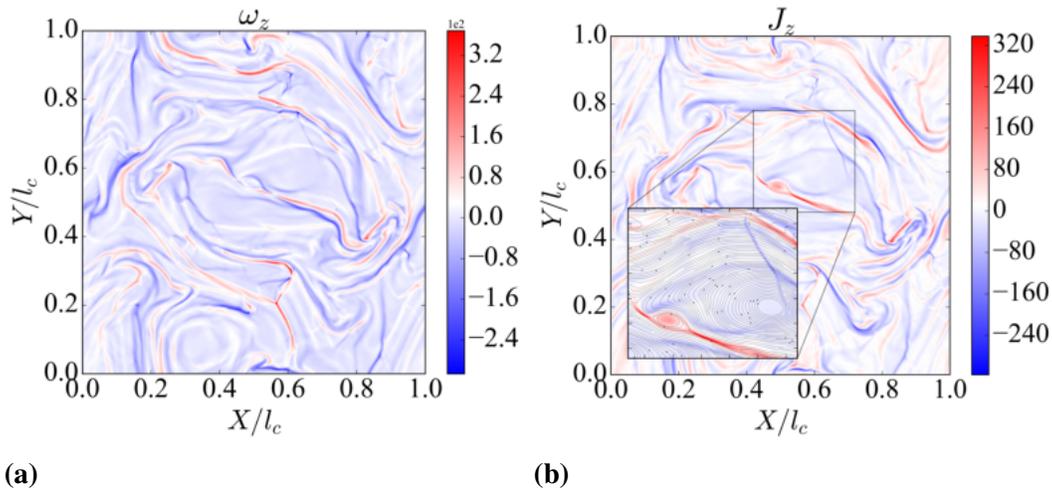


Figura 4

Gráficas de vorticidad y densidad de corriente. La componente z de la vorticidad ω_z se encuentra en (a) y la componente z de la densidad de corriente J_z en (b). Estos resultados se obtuvieron para el tiempo $t/t_c=0.9475$.

características turbulentas. Esto se evidencia en las estructuras típicas de vórtices, el comportamiento caótico de las variables y el comportamiento de fractal (Benavides and Flierl, 2020). Este último hace referencia al hecho de que el aspecto general del fluido se mantiene igual sin importar la escala que se analice, como se observa en la figura 4b.

En cuanto a la vorticidad (figura 4a), también se presentan magnitudes considerables junto con variaciones significativas y caóticas en la misma, lo cual es característico de un comportamiento turbulento (Benavides and Flierl, 2020). Por otra parte, en lo que respecta a la densidad de corriente (figura 4b), se observa la formación aparentemente aleatoria de hojas de corriente, lo cual lleva a múltiples reconexiones magnéticas. Las regiones en las cuales ocurre dicho fenómeno se identifican por el adelgazamiento y ensanchamiento de las hojas de corriente debido a las diferentes presiones magnéticas que actúan en direcciones contrarias a cada lado de la hoja, lo cual lleva

a la creación de plasmoides (Murtas et al., 2022) y una consecuente conversión de energía magnética en energía cinética. La formación de estas estructuras de filamentos se debe a la compresión magnética del fluido (Lazarian et al., 2012) y el efecto que esta tiene en las componentes perpendicular y paralela del número de onda, como se mencionó en el capítulo 2. En el acercamiento realizado en la figura 4b se evidencia un plasmoides en formación y las características mencionadas anteriormente respecto a la hoja de corriente en donde ocurre el fenómeno.

Con el fin de estudiar la reconexión magnética que tiene lugar en múltiples regiones del fluido se muestra el proceso de formación de un plasmoides en la figura 10, en donde también se muestran las líneas de campo magnético con líneas negras alrededor y dentro del plasmoides. En primera instancia (figura 5a) se observa una hoja de corriente con una posición diagonal aproximadamente en el cuadrante superior derecho del fluido. Esta hoja de corriente es una región resistiva de muy alta conductividad que se crea debido a que los campos magnéticos a cada lado tienen direcciones opuestas. Esto es evidente según la ley de Ampère para bajas frecuencias (28), de donde se deduce que cambios abruptos del campo magnético en función de la posición producen una gran densidad de corriente. Posteriormente, el comportamiento difusivo del campo magnético dentro de la hoja de corriente permite que las líneas de campo se acerquen entre sí y se presenten diferentes presiones magnéticas a lo largo de la misma, las cuales forman una inestabilidad que resulta en distintos adelgazamientos y ensanchamientos de la hoja como se observa en la figura 5b. Este acercamiento entre las líneas de campo, junto con las características resistivas y difusivas de la región permiten que se rompa el teorema de flujo congelado y las líneas de campo se reconecten. Dicha reconexión cambia la topología del campo magnético y, en este caso, forma un plasmoides

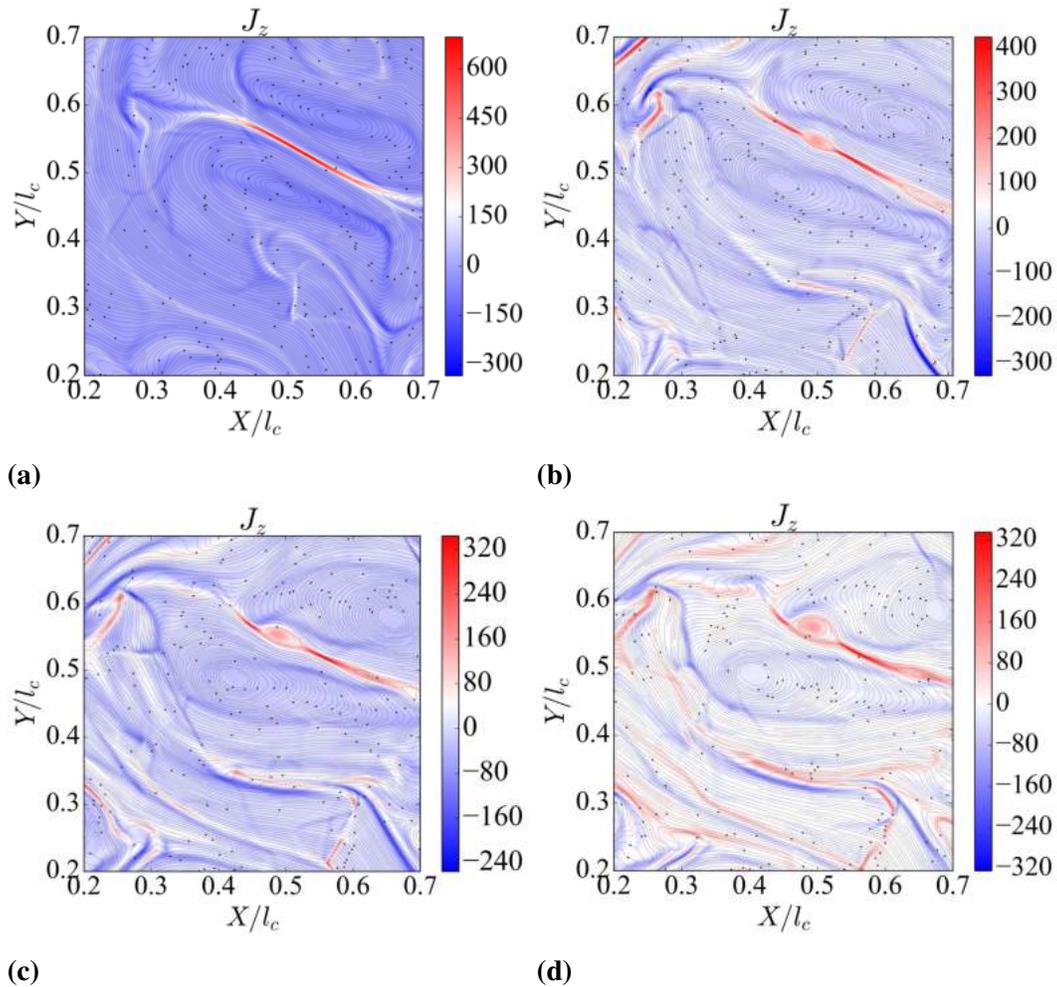


Figura 5

Evolución temporal de un plasmoide a partir de una hoja de corriente. La figura (a) se tomó en un tiempo $t/t_c=0.7310$, la figura (b) en un tiempo $t/t_c=0.8612$, la figura (c) en un tiempo $t/t_c=0.9220$ y la figura (d) en un tiempo $t/t_c=0.9604$.

como el que se observa en la figura 5c.

Este proceso conlleva una conversión de energía magnética a energía cinética que resulta en las partículas que salen eyectadas hacia ambos lados en dirección de la hoja de corriente (opuesta a la dirección en la cual se juntan las líneas de campo inicialmente). Además, por efectos de la tensión magnética se crea un flujo de líneas del campo reconectado en esta misma dirección (ver figura 5c y 5d) y, debido a que el campo reconectado si cumple el teorma de flujo congelado, se produce una aceleración de dichas partículas. Finalmente, el plasmoides se desplazará por la presión magnética y contribuirá a la formación de más hojas de corriente.

5.1.2 Espectro de energía

Un análisis típico en el campo de la turbulencia es el espectro de energía, ya que mediante este se estudia el carácter disipativo del fenómeno y se compara con predicciones teóricas como la ley de Kolmogorov (Kolmogorov, 1941). En la figura 6 se encuentra el espectro de energía tanto para la energía cinética como la magnética. Además, en cada subfigura se encuentra el exponente de decaimiento teórico según la teoría de Kolmogorov representado con la letra k y un exponente $b = -8/3$ que representa una pendiente más pronunciada, la cual se ha medido en algunos escenarios reales y simulaciones. Además, esta última es la más cercana a los resultados obtenidos.

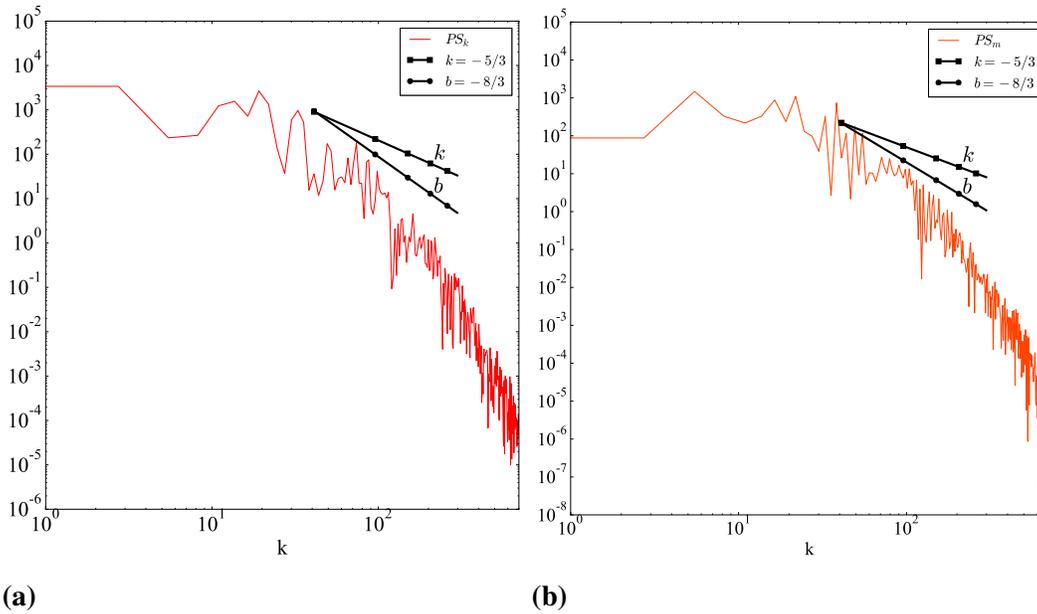


Figura 6

Resultados de los espectros de energía para un plasma totalmente ionizado. El espectro de energía cinética PS_k se encuentra en (a) y el espectro de energía magnética PS_m en (b). Este resultado se obtuvo para el tiempo $t/t_c = 0.9475$.

A partir de los resultados obtenidos de los espectros en 6 se evidencia de qué forma se disipa la energía en un fluido turbulento. Este resultado es acorde con la teoría planteada en la sección 2, ya que debido al proceso de cascada de energía se espera que la energía sea disipada a pequeñas escalas. Es decir, la energía debe decaer para números de onda grandes, como ocurre en la figura 6. Dicho comportamiento se obtuvo para la energía cinética y magnética dentro de las simulaciones realizadas. Además, se encontró que la pendiente con la cual decae cada espectro no varía de forma significativa con el tiempo, es por ello que no se hizo necesario una comparación temporal. No obstante, las pendientes observadas son más inclinadas que el espectro de Kolmogorov, lo que indica que la energía se disipa a escalas mayores que lo previsto teóricamente. De hecho, las pen-

dientes encontradas son muy cercanas a una potencia de $-8/3$. Aún así, en diferentes fenómenos reales ha sido medida esta pendiente de decaimiento, como en la magnetósfera de la Tierra (Schmack, 2009) fue medida por una constelación de satélites o como se encontró en el viento solar a escalas sub-protónicas donde diferentes naves espaciales midieron pendientes similares (David and Galtier, 2019). Asimismo, en simulaciones numéricas realizadas para medios compresibles como en el caso de una implosión de fusión (Chefranov and Chefranov, 2022) o para plasmas con características acordes al viento solar (Meyrand and Galtier, 2013). Además, es necesario considerar que el modelo teórico está fundamentado en ecuaciones ideales, mientras que las ecuaciones resueltas por el código MAGNUS (Navarro et al., 2017) consideran efectos adicionales como la resistividad, difusividad magnética y compresibilidad del fluido. Por tal razón, es posible que la desviación encontrada respecto a la teoría de Kolmogorov se deba a efectos de disipación cinética o a la dinámica no-lineal compleja que se presenta en el modelo propuesto.

5.1.3 Amplificación de la energía magnética

Finalmente, un resultado importante para el análisis de la dinámica de la turbulencia es la amplificación de la energía magnética. En este caso se tiene la amplificación de un plasma totalmente ionizado (ver figura 7) que funcionará como referencia para futuras comparaciones.

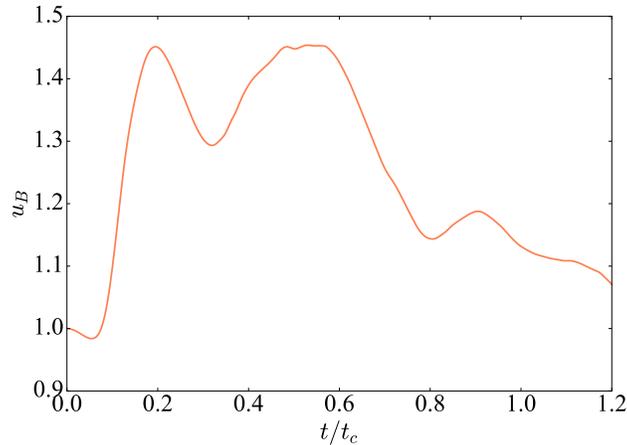


Figura 7

Amplificación de la energía magnética del plasma totalmente ionizado. Este resultado se obtuvo en el tiempo $t/t_c = 0.9475$.

En primer lugar, se tiene en cuenta que el dato inicial proporcionado es un vórtice de tipo Orszag Tang, el cual genera un fluido turbulento rápidamente (Parashar et al., 2010). Ahora, en la figura 7 se observa que inicialmente se produce una amplificación del campo hasta un tiempo aproximado de $t/t_c = 0.2$. Esto se debe a la conversión de energía cinética rotacional en energía magnética, el cual es un resultado previamente estudiado en este tipo de vórtices (Politano et al., 1989). Posteriormente, el sistema tiende a disipar la energía, sin embargo, ya que el vórtice sigue en formación se produce una segunda amplificación hasta aproximadamente el tiempo $t/t_c = 0.5$. A partir de este punto el sistema empieza a exhibir un comportamiento turbulento, por lo que se da una disminución en la energía magnética. Este decaimiento está asociado a las múltiples reconexiones magnéticas que ocurren en el fluido, ya que como se mencionó en la sección 5.1.1 los procesos de reconexión, junto con la difusividad magnética, producen una conversión de energía magnética en energía cinética. Sin embargo, alrededor de $t/t_c = 0.9$ se produce un tercer pico de

amplificación, el cual puede estar asociado a periodos en los que se encuentra una baja tasa de reconexión, lo que permite que la energía rotacional genere nuevamente una amplificación. Además, es necesario considerar que el sistema presenta pérdidas por disipación debido a la resistividad óhmica y la difusividad magnética.

5.2 Turbulencia en plasmas parcialmente ionizados (Colisiones elásticas)

Con el fin de obtener resultados más precisos y cercanos a la realidad, se ajustó el modelo teórico de forma que se considerara un plasma compuesto por una parte cargada y una parte neutra, las cuales interactúan entre ellas por medio de colisiones elásticas. Esta interacción se da por medio de intercambios de momento proporcionales a la diferencia de velocidades entre las dos especies, intercambios de energía y flujos de calor (ver sección 3).

Para determinar el impacto y efecto de las colisiones elásticas en el fluido modelado se realizó un análisis en función del parámetro adimensional ξ que aparece en la ecuación del coeficiente de colisiones α (52), el cual está asociado con la frecuencia de colisiones elásticas. De esta forma, en la sección 5.2.1 se estudió como las colisiones afectan en la vorticidad tanto de la especie neutra como de la cargada y en la densidad de corriente. Además, se analizó la formación de plasmoides para el caso de mayor frecuencia de colisiones, para así comparar con el fluido totalmente ionizado y determinar como afectan las colisiones elásticas sobre dicho proceso. Posteriormente, en la sección 5.2.2 se encontró el espectro de la energía cinética para ambas especies en función del parámetro ξ , con lo cual se determinó la consecuencia que tienen estas colisiones en la disipación de la energía del fluido. Finalmente, en la sección 5.2.3 se analizó qué ocurre con la energía magnética en función de la frecuencia de colisiones elásticas.

5.2.1 Vorticidad y densidad de corriente

Para comprender el efecto que tienen las colisiones en la vorticidad del fluido, es útil partir desde el resultado previo para un plasma totalmente ionizado, lo cual se tiene en la figura 4a. En esta se observa que para el tiempo tomado ya se encuentra deformado el vórtice del dato inicial, lo cual en gran parte se debe a la presencia del campo magnético. Por lo tanto, en la vorticidad del fluido neutro para el caso de $\xi = 0.02$ (ver figura 8d) se observa claramente la evolución del vórtice inicial, ya que este fluido no interactúa con el campo magnético. Además, debido a que el parámetro de colisiones es cercano a cero el sistema se comporta de forma muy similar al caso hidrodinámico. Por otra parte, la magnitud de la resta mostrada en la figura 8g indica que, en este caso, la vorticidad del fluido cargado es muy diferente de la vorticidad del fluido neutro. Ahora, al aumentar la frecuencia de colisiones a $\xi = 10$ (segunda columna de la figura 8) se observa, de forma cualitativa, que la vorticidad del fluido neutro tiende a parecerse a la del fluido cargado. Dicha afirmación se corrobora por medio de la resta correspondiente en la figura 8h, donde se aprecia que la magnitud es menor que en el caso anterior. Por último, al tomar $\xi = 100$ se obtuvo que las vorticidades se ven iguales desde un punto de vista macroscópico (la mayor escala del sistema). Aún así, en el resultado de la figura 8i se observan pequeñas variaciones en la magnitud de estas vorticidades.

Con base en lo mencionado anteriormente, se establece que la vorticidad del fluido neutro tiende a ser igual que la vorticidad del fluido cargado a medida que se aumenta la frecuencia de colisiones elásticas. Es decir, el fluido neutro se comporta como un fluido cargado cuando se tiene

una gran cantidad de colisiones entre las especies. Por lo tanto, se infiere que el campo magnético afecta de forma indirecta las partículas neutras por medio de colisiones con las partículas cargadas. Además, se observa que los fluidos tienden a un estado estable en el que la vorticidad mantiene sus características generales y su magnitud varía de forma más drástica. Dicho estado se obtiene en un menor tiempo cuando se aumenta la frecuencia de colisiones, lo que se debe a que la interacción entre las partículas contribuye a que se relaje el sistema y llegue así a un estado de menor energía. Este efecto de las colisiones elásticas, donde el comportamiento de los dos fluidos tienden a una misma solución, ha sido encontrado previamente para un plasma turbulento parcialmente ionizado (Benavides and Flierl, 2020). Por último, se aprecia que las colisiones en estudio intensifican la turbulencia en ambos fluidos, lo cual es mucho más evidente en el fluido cargado. Por último, es importante mencionar que los resultados de la figura 8 se realizaron para los tiempos más cercanos posibles al caso totalmente ionizado ($t/t_c = 0.9475$). Sin embargo no fue posible una concordancia perfecta debido a que los delta de tiempo utilizados dependen de los valores propios del sistema, los cuales varían cuando las fuentes de las ecuaciones son afectadas. Es decir, cuando varía el parámetro de colisiones ξ también varía el delta de tiempo computacional dt .

Posteriormente, se estudió la formación de hojas de corriente para cada fluido con diferentes frecuencias de colisiones. Para ello, se tomaron nuevamente los tiempo más cercanos posibles al caso del plasma totalmente ionizado (ver figura 4b) con el fin de comparar los resultados. Así, se encontró que las colisiones inhiben en cierta medida la formación de hojas de corriente, ya que se observó una menor cantidad de hojas de corriente en todos los casos. Además, se observa que para un parámetro de colisiones bajo (ver figura 9a y 9b) no se ha formado un plasmóide

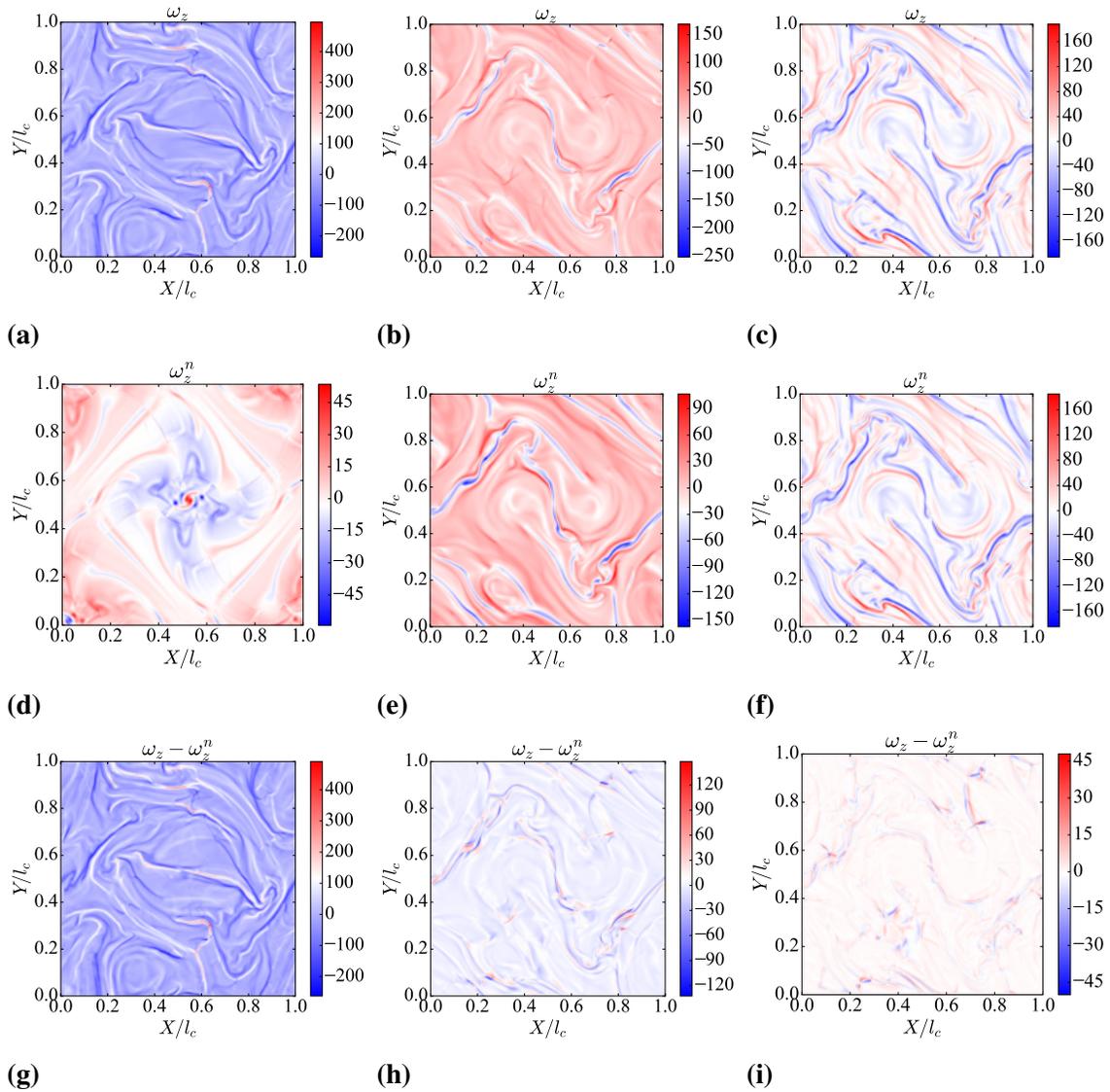


Figura 8

Gráficas en dos dimensiones de la componente z de la vorticidad ω_z para diferentes valores de ξ . La primera, segunda y tercera columnas corresponden a los resultados con el parámetro $\xi = 0.02$, $\xi = 10$ y $\xi = 100$ en los tiempos $t/t_c=0.9429$, $t/t_c=0.9435$ y $t/t_c=0.9454$ respectivamente. En la primera, segunda y tercera fila se encuentran la vorticidad del fluido cargado, la vorticidad del fluido neutro y la diferencia entre estas dos vorticidades, respectivamente.

como en el caso totalmente ionizado. Sin embargo, al aumentar la frecuencia de colisiones, se forma un plasmóide en una etapa de formación más temprana que en dicho caso (ver figura 9c). Adicionalmente, se obtuvo que la magnitud de la densidad de corriente disminuye a medida que se aumenta el parámetro ξ .

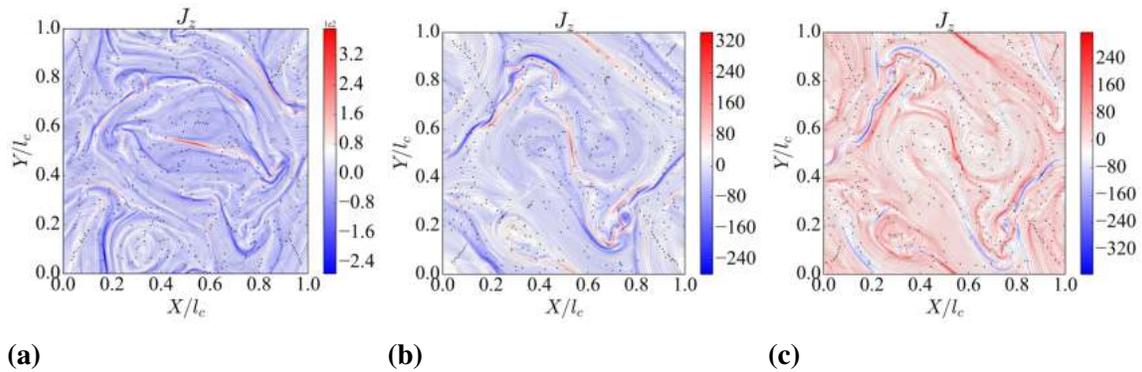


Figura 9

Gráficas en dos dimensiones de la componente z de la densidad de corriente J_z con diferentes valores del parámetro ξ . Se utilizó el parámetro $\xi = 0.02$, $\xi = 10$ y $\xi = 100$ en las gráficas (a), (b) y (c), para los tiempos $t/t_c=0.9429$, $t/t_c=0.9435$ y $t/t_c=0.9454$, respectivamente.

Por otra parte, se analizó la evolución de un plasmóide tomando los tiempos más cercanos posibles a los escogidos en la sección 5.1. La formación del plasmóide se dio con las mismas características, siendo entonces un proceso análogo. En primer lugar, se formó una hoja de corriente debido al campo magnético alrededor (ver figura 10a). Seguido a esto se dio una perturbación que produce diferentes ensanchamientos en la hoja (ver figura 10b). Así, las líneas de campo interactúan entre sí, se reconectan (ver figura 10c) y finalmente se crea el plasmóide con su propio campo (ver figura 10d).

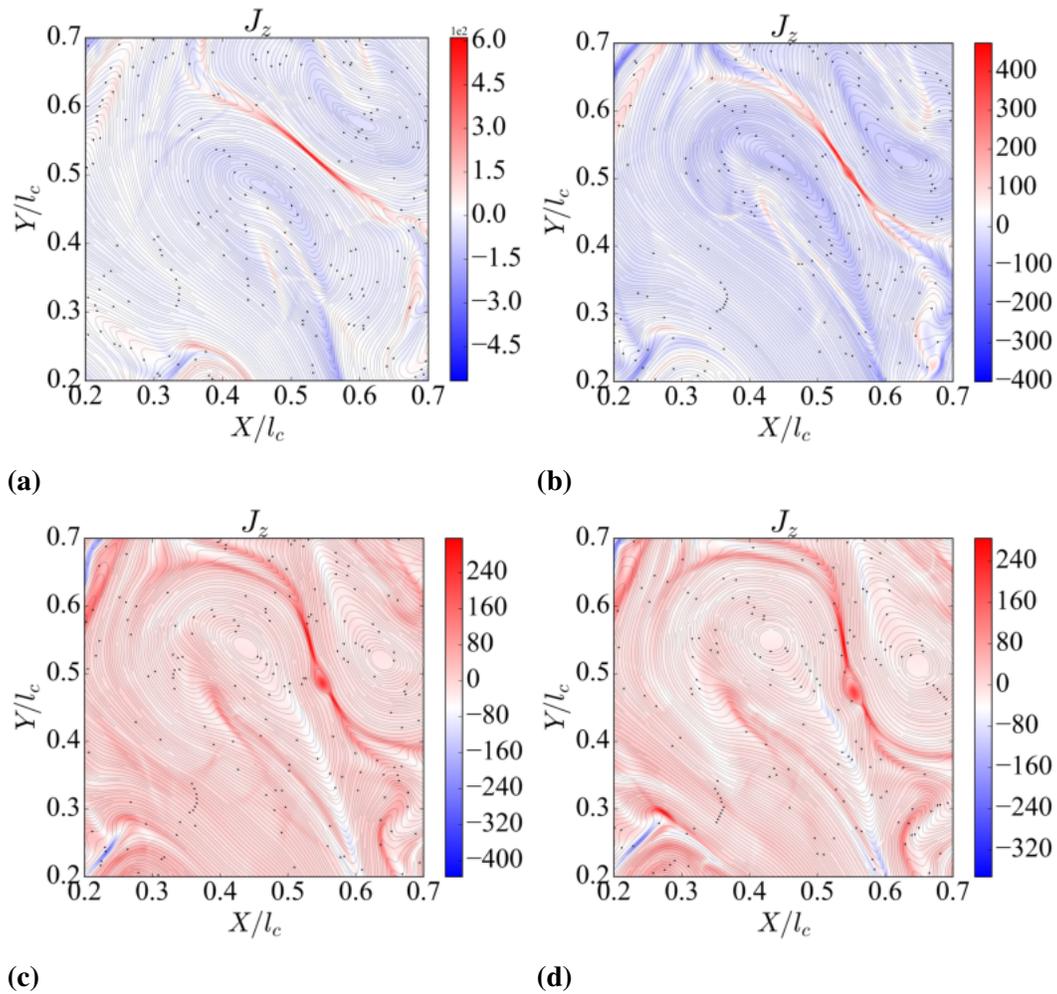


Figura 10

Evolución temporal de un plasmoida a partir de una hoja de corriente para una frecuencia de colisiones $\xi = 100$. La figura (a) se tomó en un tiempo $t/t_c=0.7326$, la figura (b) en un tiempo $t/t_c=0.8644$, la figura (c) en un tiempo $t/t_c=0.9242$ y la figura (d) en un tiempo $t/t_c=0.9665$.

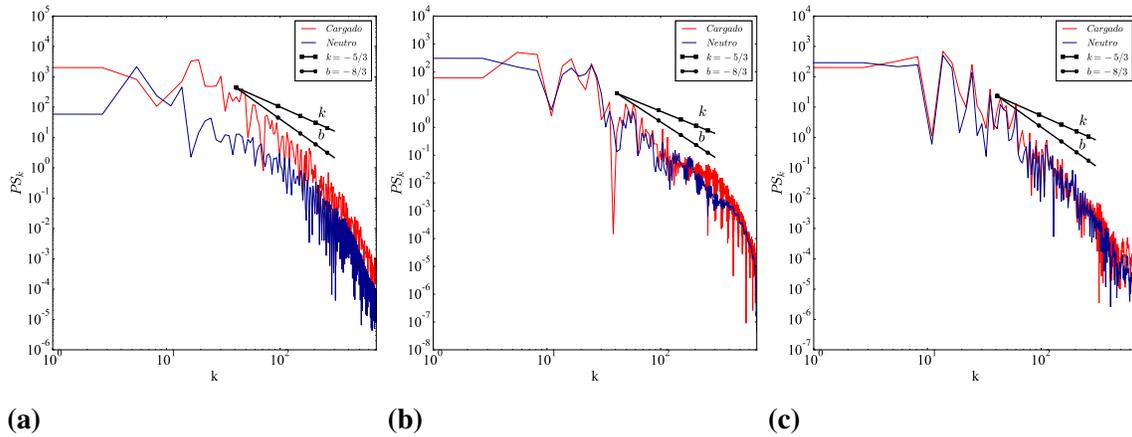


Figura 11

Gráficas para el espectro de energía cinética con diferentes valores del parámetro de colisiones ξ . Se utilizaron los parámetros $\xi = 0.02$, $\xi = 10$ y $\xi = 100$ en las gráficas (a), (b) y (c) en los tiempos $t/t_c=0.9429$, $t/t_c=0.9435$ y $t/t_c=0.9454$ respectivamente.

5.2.2 Espectro de energía

Ahora bien, el análisis del espectro de energía se realizó con el fin de comparar el comportamiento de cada especie (neutra y cargada) y reafirmar el resultado concluido en la sección 5.2.1. Es por esta razón que no se compararon los resultados concernientes a la energía magnética, como se observa en la figura 11.

En primera instancia se tienen los espectros de energía cinética para una frecuencia de colisiones de $\xi = 0.02$ en la figura 11a. En esta gráfica se observa que el fluido cargado tiene una pendiente más inclinada que el fluido neutro, lo cual indica que el campo magnético lleva a que la energía cinética se disipe a mayores escalas que en un caso hidrodinámico. Por otra parte, al comparar con el espectro teórico de Kolmogorov, se obtuvo que el fluido neutro tiene la pendiente más cercana. Este era un resultado esperado debido a que la teoría planteada por Kolmogorov se

realizó para un caso puramente hidrodinámico.

Seguidamente, se observa que los espectros tienden a parecerse entre sí tanto en sus pendientes como en su magnitud, especialmente en la escala macroscópica y el rango inercial (ver figura 11b). Por último, en la figura 11c se evidencian dos espectros de energía cinética que son casi idénticos. Este resultado muestra, al igual que en la sección 5.2.1, que el efecto de las colisiones es llevar a los dos fluidos a un comportamiento común debido a la interacción entre estos, de tal forma que la pendiente de decaimiento de la energía cinética será la misma para las dos especies para frecuencias de colisiones grandes. Por lo tanto, se evidencia nuevamente el efecto de las colisiones elásticas y la tendencia a una solución común que se ha evidenciado en otros trabajos de investigación (Benavides and Flierl, 2020).

5.2.3 Amplificación de la energía magnética

Para finalizar, se analizó el comportamiento de la energía magnética en función del tiempo para las diferentes frecuencias ξ , como se observa en la figura 12. En el resultado obtenido se evidenció que a medida que aumenta la frecuencia de colisiones se amplifica la energía magnética en mayor medida. Este resultado se debe a que las partículas neutras contienen una energía cinética adicional, la cual es transferida por medio de colisiones a las partículas cargadas. Posteriormente, dicha energía se convierte en energía magnética debido al vórtice generado. Además, se tiene que sin importar el parámetro de colisiones se mantiene la forma general de las curvas de amplificación, tal como se obtuvo primero en el caso totalmente ionizado 7, presentando dos notables picos debido al dato inicial y una disipación en la etapa final debido a la turbulencia y parámetros disipativos.

En particular el parámetro de colisiones $\xi = 0.02$ obtuvo una amplificación máxima de

alrededor de un 40%, mientras que $\xi = 10$ obtuvo aproximadamente un 70% en el primer pico de amplificación y en el segundo pico se obtuvo una amplificación aproximada de 102%. Por otro lado, para $\xi = 100$ se obtuvieron resultados mayores, siendo un 87% y un 122% para el primer y segundo pico de amplificación, respectivamente. Estos resultados equivalen a una diferencia entre el caso de menor frecuencia de colisiones y el de mayor de aproximadamente el 47% para una etapa inicial y más del 80% para una etapa intermedia (región del segundo pico de amplificación), por lo cual se infiere que el efecto es más relevante cuando se produce una segunda amplificación.

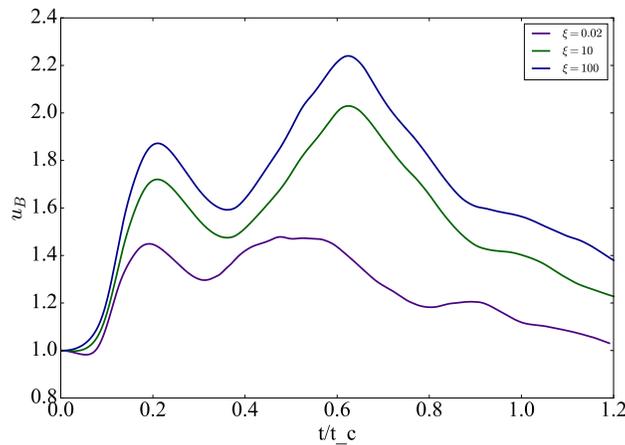


Figura 12

Amplificación de la energía magnética en función del tiempo para diferentes valores de la frecuencia de colisiones ξ .

5.3 Turbulencia en plasmas parcialmente ionizados (Colisiones inelásticas)

Para los términos de ionización y recombinación se realizó el mismo análisis sistemático realizado previamente con los términos de colisiones elásticas y el fluido totalmente ionizado. Por lo tanto, inicialmente se analizó la vorticidad y densidad de corriente en la sección 5.3.1, donde también se analizó la formación de plasmoides para los dos casos propuestos con diferentes

frecuencias de colisiones inelásticas. Además, en esta misma sección se estudia la relación entre la formación de una hoja de corriente con las tasas de ionización y recombinación. Posteriormente, se analizó el efecto de dichos términos sobre el espectro de energía cinética en la sección 5.3.2 y, por último, se estudió cómo influyen las tasas de ionización y recombinación sobre la amplificación de la energía magnética en la sección 5.3.3. Asimismo, los tiempos seleccionados para todos los resultados presentados fueron los más cercanos posibles a los presentados en la sección 5.2 con el fin de realizar una comparación adecuada, es decir tiempos cercanos al tiempo adimensional $t/t_c = 0.9475$.

Por otra parte, en esta sección se realizaron dos simulaciones con el fin de determinar cómo afectan los términos incluidos en el modelo en función de diferentes frecuencias de colisiones. Para ello, las tasas de recombinación Γ_{rec} y de ionización Γ_{ion} se normalizaron de forma que al adimensionalizarlas aparece una frecuencia de colisiones inelásticas τ_{rec} . Así, el primer caso corresponde a un parámetro $\tau_{rec} = 10^{-3}$ y el segundo a $\tau_{rec} = 10^{-6}$. Además, se realizó un análisis de las constantes de adimensionalización de cada Γ , de esta forma se encontró la relación entre las frecuencias de colisiones

$$\tau_{ion} = 10^5 \tau_{rec}, \quad (63)$$

que se mantiene para las simulaciones realizadas en esta sección y la siguiente. Para llegar a este resultado, que es particular del caso en el que se tienen únicamente átomos de hidrógeno, se tuvo en cuenta una razón entre los Γ (ver ecuación (59) y (58)), donde la diferencia entre las

constantes que los acompañan llevan al resultado dado para la relación entre las frecuencias.

5.3.1 Vorticidad y densidad de corriente

Para comenzar, en la vorticidad mostrada en la figura 13 se analizó por aparte el caso del fluido cargado en la primera fila y el fluido neutro en la segunda. En cuanto al primero se observa que los resultados son distintos tanto de forma cualitativa como en magnitud (ver figuras 13a y 13b). Por una parte, al analizar los colores obtenidos, se infiere que para $\tau_{rec} = 10^{-3}$ se dan variaciones más notables en la magnitud de la vorticidad del fluido. Además, es claro que esta misma magnitud disminuye considerablemente con respecto a la de $\tau = 10^{-6}$ (figura 13a), lo cual se debe a que la interacción por medio de colisiones inelásticas es mayor. Por lo tanto, el fluido cargado disminuye su magnitud mientras que el neutro la aumenta y así tienden a una solución “atractora”, al igual que se encontró en la sección 5.2.1.

Por otra parte, en el fluido neutro se observa la formación del vórtice de Orszag-Tang en la figura 13c para $\tau_{rec} = 10^{-6}$, lo que se da porque el parámetro de colisiones es suficientemente pequeño y así el efecto indirecto del campo magnético a través de las colisiones no es significativo, resultando entonces en gráficas totalmente diferentes para los dos fluidos (comparar primera columna de la figura 13). Adicionalmente, se debe tener en cuenta que $\tau_{rec} = 10^{-6}$ es el parámetro que corresponde a una menor tasa de recombinación, por lo que en la figura 13c se obtuvo una magnitud menor que en 13d, ya que en este último se convierte un mayor porcentaje de partículas cargadas en neutras, por lo cual posee mayores magnitudes en su campo de velocidades. Así, en términos generales los resultados fueron acordes a lo esperado, pues el comportamiento de los fluidos fue análogo al de los fluidos con colisiones elásticas. Los resultados en común más evidentes

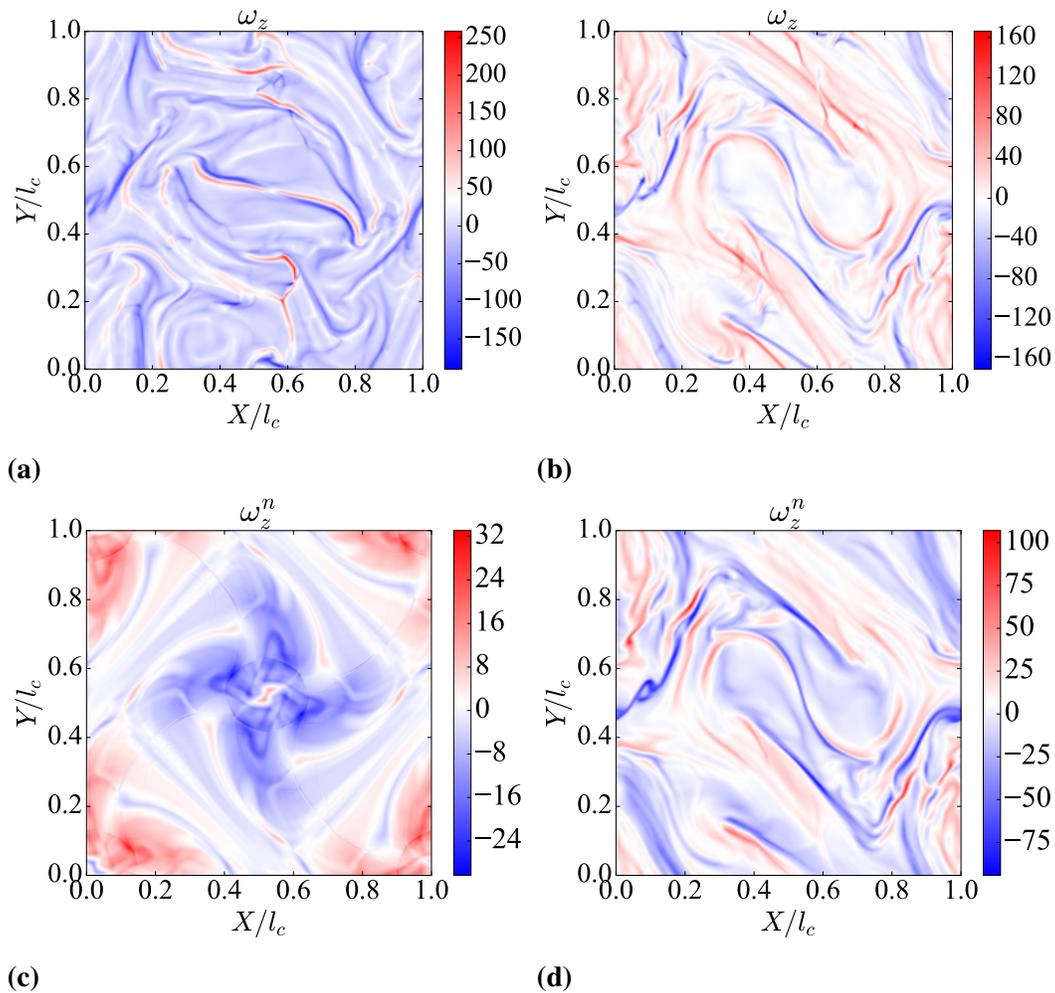


Figura 13

Gráficas en dos dimensiones de la componente z de la vorticidad (ω) para diferentes frecuencias de recombinación τ_{rec} . En la primera y segunda columna se utilizaron $\tau_{rec} = 10^{-6}$ y $\tau_{rec} = 10^{-3}$ para los tiempos $t/t_c=0.9551$ y $t/t_c=0.9500$, respectivamente. En la primera fila se tiene el fluido cargado y en la segunda el neutro.

son la influencia del campo magnético de forma indirecta sobre fluido cargado y la consecuente tendencia de los fluidos a una misma solución a medida que se aumenta la frecuencia de colisiones.

En los resultados correspondientes a la densidad de corriente se obtuvo que los procesos de ionización y recombinación inhiben la formación de plasmoides. Esto se afirma al comparar la densidad de corriente para un plasma totalmente ionizado 4b con las densidades de corriente de las figuras 14a y 14b, teniendo presente que los tiempos utilizados son los más cercanos posibles. En dicha comparación se observa que el plasmoides formado previamente no se desarrolló en ningún caso. Lo anterior ocurre debido a que las tasas de recombinación son menores que las de ionización y, en su mayoría, se dan alrededor de las hojas de corriente, mientras que la ionización se da principalmente dentro de estas, como se observa en la segunda y tercera fila de la figura 14. Por lo tanto, debido a que la cantidad de partículas cargadas alrededor de las hojas disminuye y por dentro aumentan, las diferencias de presiones magnéticas generadas sobre la región no son suficientemente grandes para producir los ensanchamientos característicos de los plasmoides.

Ahora bien, al analizar a detalle el comportamiento de las tasas de ionización y recombinación se encontraron regiones en las cuales el fenómeno de recombinación es más relevante y viceversa. Así, en las figuras 14c y 14d se observa que la recombinación tiene sus mayores magnitudes alrededor de las hojas de corriente y en las figuras 14e y 14f, se evidencia que es dentro de estas donde la ionización toma valores grandes, como se expuso previamente. Es por tal razón que las regiones rojas de las gráficas de recombinación son más cercanas a manchas ubicadas en ciertos vórtices y en las de ionización son más cercanas a filamentos (o en su defecto machas mucho más angostas). Además, la recombinación dentro de la hoja tiene su mínimo valor, lo que se debe a que

estas zonas poseen una conductividad muy alta, por lo que es allí donde se concentra una mayor cantidad de partículas ionizadas.

Al considerar que las partículas neutras no se ven afectadas de forma directa por el campo magnético y las velocidades del fluido cargado varían en función de las densidades de líneas de campo, se infiere que donde se encuentran menos líneas de campo las partículas se mueven con velocidades menores. Además, cuando las partículas cargadas poseen velocidades suficientemente bajas es más probable que se produzca una recombinación, pues la función potencial del ion puede superar la energía cinética del electrón y atraparlo en su órbita. El caso contrario corresponde a velocidades muy grandes, donde es muy probable que una partícula neutra libere un electrón al colisionar con otro, ya que su energía cinética sería suficiente para superar la función potencial que mantiene el átomo estable. Por lo tanto, en las gráficas 14c y 14d se aprecian estas regiones rojas que corresponden en su mayoría al centro de los vórtices formados, donde se tiene una menor densidad de líneas de campo y por ello una mayor cantidad de partículas recombinadas. De la misma forma se tiene una mayor tasa de ionización dentro de la hoja donde las densidades de corriente son muy altas y por ende también la energía cinética de las partículas con carga.

5.3.2 Espectro de energía

En el análisis realizado respecto al espectro de energía se obtuvo que para ambos casos las pendientes de decaimiento del fluido cargado y neutro son muy cercanas (ver figura 15), así como se observó anteriormente en las colisiones elásticas para el parámetro $\xi = 100$ en la figura 11c. Por lo tanto, se infiere que las colisiones inelásticas llevan también a que los espectros sean muy similares debido a que los sistemas tienden a relajarse y llegar a un mismo resultado. Es decir, las

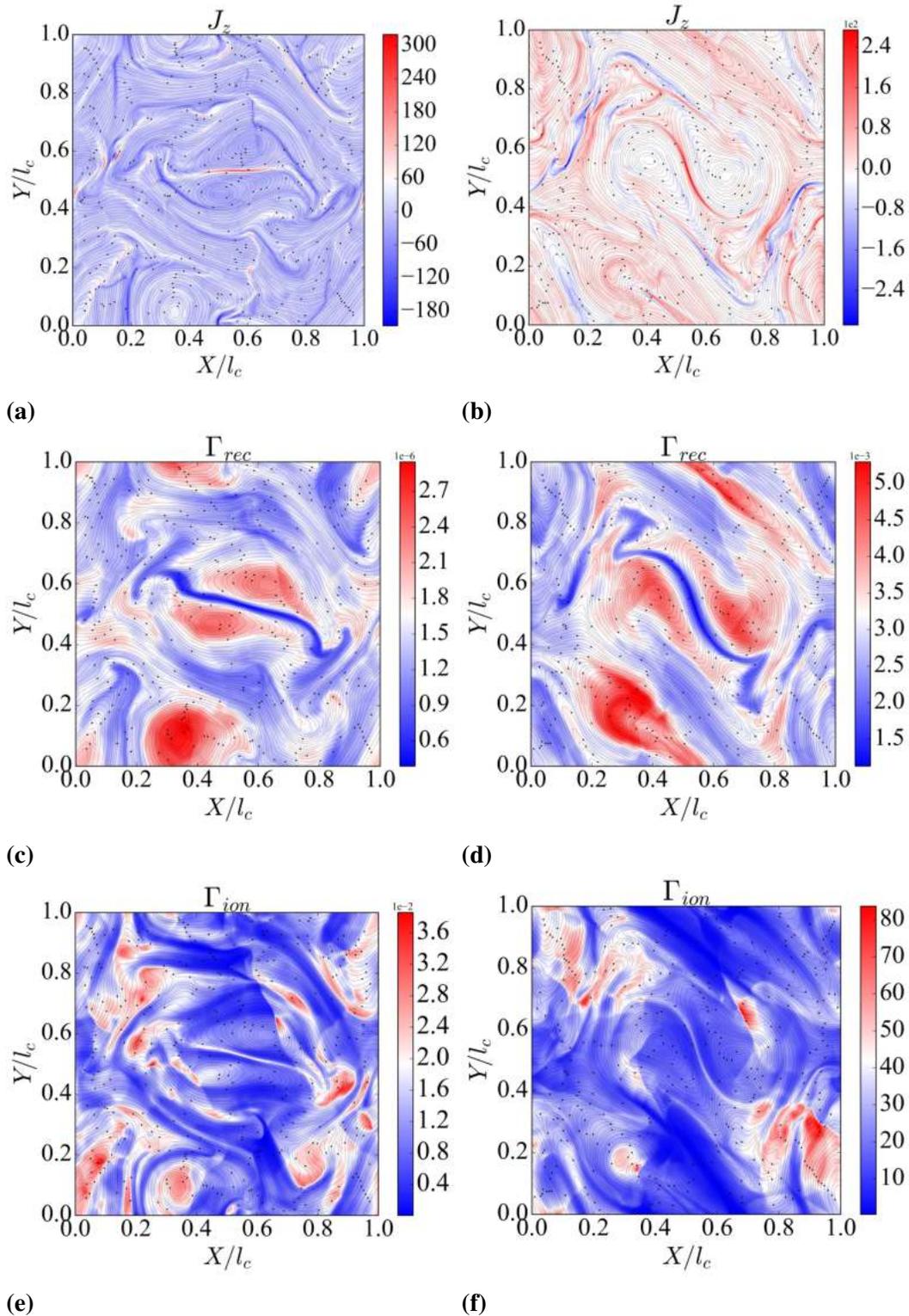


Figura 14

Gráficas en dos dimensiones de la componente z de la densidad de corriente (J_z) y las tasas de ionización Γ_{ion} y recombinación Γ_{rec} para diferentes frecuencias de recombinación τ_{rec} . En la primera y segunda columna se utilizaron $\tau_{rec} = 10^{-6}$ y $\tau_{rec} = 10^{-3}$ para los tiempos $t/t_c=0.9551$ y $t/t_c=0.9500$, respectivamente. En la primera fila se tienen las densidades de corriente J_z , en la segunda el Γ_{rec} y en la tercera el Γ_{ion} .

colisiones inelásticas producen una disipación de energía análoga a la que se da en las colisiones elásticas. Es decir, se confirma nuevamente que el campo magnético está afectando el fluido neutro de forma indirecta por medio de colisiones y dicha influencia se evidencia principalmente en cómo se disipa la energía. Sin embargo, en las dos gráficas se observa un resultado evidente, que es la separación entre el espectro de energía del fluido cargado del espectro del fluido neutro. En ambos casos se tiene que las partículas cargadas poseen una mayor energía a lo largo de todo el espectro, lo cual se debe a que la frecuencia de ionización es mucho mayor que la frecuencia de recombinación (10^5 veces más grande según la ecuación 63). De esta manera, siempre se tendrán más partículas cargadas y por tanto más energía en este fluido.

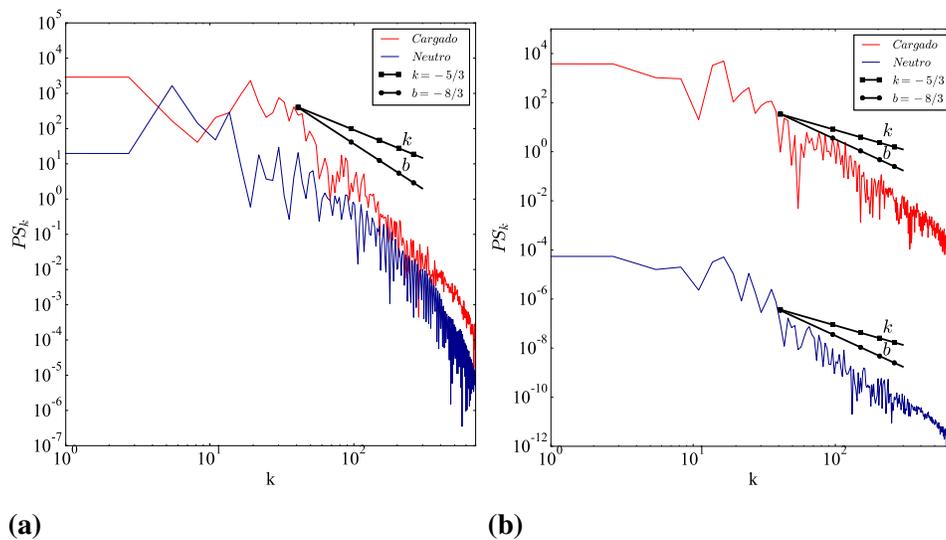


Figura 15

Gráficas para el espectro de energía cinética para diferentes parámetros de colisiones τ_{rec} . La figura (a) corresponde a $\tau_{rec} = 10^{-6}$, y la figura (b) a $\tau_{rec} = 10^{-3}$. Los resultados se obtuvieron en los tiempos $t/t_c = 0.9500$ y $t/t_c = 0.9551$, respectivamente.

Ahora, la diferencia entre las distintas separaciones radica en que el efecto del fenómenos

de ionización y recombinación en el caso de $\tau_{rec} = 10^{-6}$ es mínimo, mientras que para $\tau_{rec} = 10^{-3}$ si se han encontrado resultados muy relevantes. Además, ya que el campo magnético afecta directamente las partículas cargadas convirtiendo su energía magnética en cinética, entre mayor sean las tasas de ionización y recombinación, mayor será la brecha entre los espectros, pues el campo tendrá cada vez más partículas para acelerar.

5.3.3 Amplificación de la energía magnética

Para finalizar la sección de colisiones inelásticas se analizó la amplificación de la energía magnética, la cual se muestra en la figura 16. En los resultados encontrados se obtuvo un comportamiento idéntico al lo que se muestra en la figura 12 de la sección 5.2. Es decir, se obtuvo que a mayor frecuencia de colisiones, mayor amplificación de la energía magnética. Además, la forma general de la gráfica también se mantuvo, teniendo igualmente dos picos sobresalientes debido a la amplificación generada por el dato inicial y una posterior disipación de la energía debido a los procesos de reconexión magnética que se dan en la turbulencia.

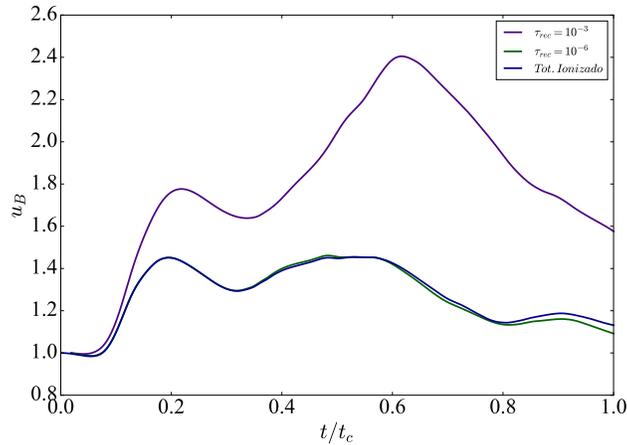


Figura 16

Amplificación de la energía magnética para diferentes valores del parámetro asociado a la frecuencia de colisiones inelásticas τ_{rec} . Este resultado se obtuvo para los tiempos más cercanos a $t/t_c = 0.9475$.

La amplificación de la energía magnética encontrada, en este caso, se debe principalmente a que la frecuencia de ionización mantiene una relación de 10^5 veces la frecuencia de recombinación, como se postuló en la ecuación (63). Por tal razón, al aumentar las frecuencias de colisiones, el aumento de las tasas de ionización están siendo mucho más relevantes. Así, al obtenerse una mayor conversión de partículas neutras en cargadas que el caso contrario, cada vez más partículas se verán afectadas por el campo magnético, lo cual lleva a una mayor energía magnética. Asimismo, nótese que la amplificación para el caso de $\tau_{rec} = 10^{-3}$ es mucho mayor que los demás casos. La razón de ello se ha expuesto en secciones anteriores y es que la cantidad de partículas cargadas que aparecen es mucho mayor que las neutras, entonces cada vez el vórtice amplifica la energía magnética en mayor medida. Ahora, para el caso de $\tau_{rec} = 10^{-6}$ el efecto es mínimo, por lo que la gráfica se mantiene prácticamente igual que el caso totalmente ionizado. Por lo tanto, se tiene

que la amplificación de $\tau_{rec} = 10^{-6}$ es, al igual que el totalmente ionizado, de aproximadamente un 40% como máximo, mientras que para $\tau_{rec} = 10^{-3}$ se tiene un primer pico de amplificación de aproximadamente 79% y un segundo pico de 140%.

Adicionalmente, se puede observar que en la etapa final se encuentra una desviación y termina siendo menor. Esto se debe a que a medida que avanza el tiempo más partículas se convierten buscando el equilibrio del sistema, por lo que en la etapa disipativa final el efecto de la conversión de especies comienza a ser considerable. Asimismo se debe tener presente que así como la conversión genera un mayor crecimiento en las etapas de amplificación, también genera un mayor decaimiento en etapas de desamplificación. Finalmente, se infiere que los efectos de la ionización y recombinación son más notorios a medida que pasa el tiempo y el sistema tiende a una solución estable.

5.4 Aplicación al Viento Solar

El viento solar es un plasma inhomogéneo compresible que se genera desde diferentes regiones del sol y, según la zona de donde proviene, se divide ya sea en viento solar rápido o lento. El primero se origina en las regiones polares del sol, donde se encuentran las líneas de campo magnético abiertas que se identifican por los huecos coronales. Este plasma se encuentra a velocidades entre $500[km/s]$ y $800[km/s]$. Por otra parte, el viento solar lento tiene velocidades entre $300[km/s]$ a $500[km/s]$ y se produce en la zona ecuatorial del sol donde las líneas de campo son cerradas. Asimismo, es más denso, más frío y la densidad e intensidad del campo magnético se mantiene menos estable. Además, las emisiones de plasma debidas a fenómenos abruptos y violentos contribuyen a la generación de viento solar, como las eyecciones de masa coronal debidas a

procesos de reconexión magnética. Este plasma es un medio que se expande a través de la heliosfera hasta una distancia aproximada de $90[UA]$ (Verscharen et al., 2019) y se presenta como una buena oportunidad para estudiar los fenómenos concernientes al plasma a bajas frecuencias donde se han observado grandes fluctuaciones en la amplitud de sus variables (Bruno and Carbone, 2013).

De tal manera, los parámetros que se tomaron en cuenta para realizar una simulación acorde con datos reales a una distancia aproximada de $1[UA]$ fueron los del viento solar lento (Bruno and Carbone, 2013). Los valores típicos de dicho plasma son

$$B_0 = 6 \times 10^{-9}[T],$$

$$n_0 = 1.5 \times 10^7[m^{-3}],$$

$$V_0 = 5 \times 10^5[m/s], \tag{64}$$

$$\rho_0 = 2.50893 \times 10^{-20}[kg/m^3],$$

$$\eta_0 = 10[m^2/s],$$

donde los valores corresponden a la intensidad del campo magnético, la densidad de número, la velocidad característica, la densidad de masa y la resistividad, respectivamente.

Así, como último resultado se realizó una aplicación al viento solar con el fin de acercar el problema planteado a una situación real en la que se puedan analizar distintas características y comportamientos de este plasma. Para ello se utilizaron los parámetros presentados previamente, los cuales se encuentran dentro del rango de parámetros que son propios del viento solar. Adicionalmente, en la simulación realizada se consideró una frecuencia de colisiones elásticas $\xi = 100$ y una frecuencia de colisiones inelásticas $\tau_{rec} = 10^{-3}$, de tal manera que se estudia cómo se comporta un fluido en el que se tienen presentes los dos tipos de colisiones, siendo así una simulación cercana al comportamiento natural. Así mismo, en las simulaciones realizadas se obtuvieron resultados similares a otras simulaciones previas que se utilizaron para el análisis del plasma (Bruno and Carbone, 2013). Entonces, se realizó en primer lugar una caracterización del fluido en la sección 5.4.1 en donde se presentan diferentes variables del fluido como las densidades de masa, la densidad de corriente y las tasas de ionización y recombinación. Posteriormente, se analiza cómo se comporta el espectro de energía en la sección 5.4.2 y en la sección 5.4.3 se finaliza con una comparación de la amplificación de la energía magnética con respecto a los casos presentados previamente. Además, es importante considerar que todas las gráficas obtenidas se tomaron en los tiempos adimensionales más cercanos a los resultados previos y posteriormente se escalaron de forma que se obtuvieran tiempos con unidades reales. Por otra parte, por facilidad para la visualización, se mantuvieron normalizados los ejes de las figuras por la longitud característica escogida para el viento solar de $l_c = 1591549.431 [m]$.

5.4.1 Caracterización del fluido

Los resultados encontrados para las densidades de masa se muestran en la figura 17. En estos se observan las escalas características de la densidad de masa del plasma en el viento solar de alrededor de $10^{-20}[\text{kg}/\text{m}^3]$. Por otra parte, es evidente que la densidad de masa del fluido cargado es alrededor de 4 órdenes de magnitud mayor, lo cual se debe a la diferencia entre la frecuencia de ionización y la de recombinación.

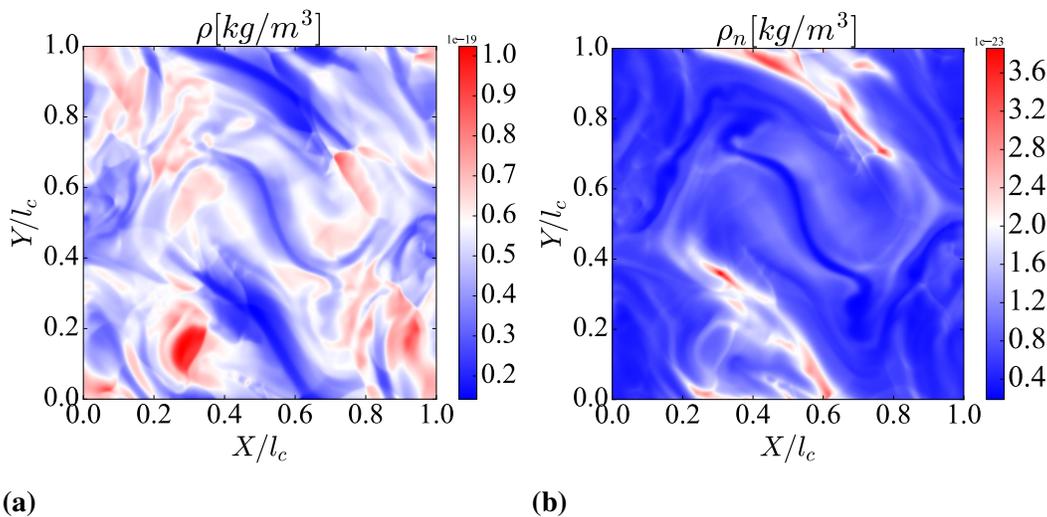


Figura 17

Densidad de masa del fluido cargado ρ en (a) y el fluido neutro ρ_n en (b) para el Viento Solar. Este resultado se obtuvo para el tiempo $t = 3.04813[\text{s}]$.

Por otra parte, el resultado de la densidad de corriente junto con las tasas de ionización y recombinación se encuentran en la figura 18. En estas gráficas se observan los mismos comportamientos que previamente se estudiaron en secciones anteriores. Además, se obtiene la misma apariencia de filamentos que se evidencia en otras simulaciones para la densidad de corriente (Bruno and Carbone, 2013) y se evidencia la diferencia de aproximadamente 4 órdenes de magnitud entre

la tasa de recombinación y la tasa de ionización.

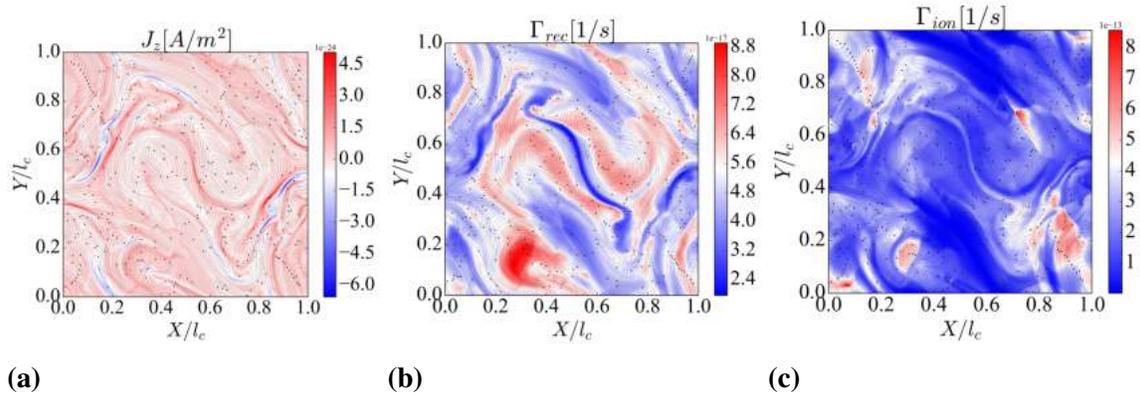


Figura 18

Componente z de la densidad de corriente J_z en (a), tasa de recombinación Γ_{rec} en (b) y tasa de ionización Γ_{ion} en (c). Este resultado se obtuvo para el tiempo $t = 3.04813[s]$.

5.4.2 Espectro de energía

El espectro de energía cinética para las partículas cargadas y neutras se obtuvo considerando la escala adecuada de velocidades y densidad de masa, por lo cual se obtuvo un espectro de un orden de magnitud mucho menor que los anteriores. Las pendientes de disipación encontradas fueron cercanas a los modelos previos y también se evidencia la separación entre los espectros de los dos fluidos.

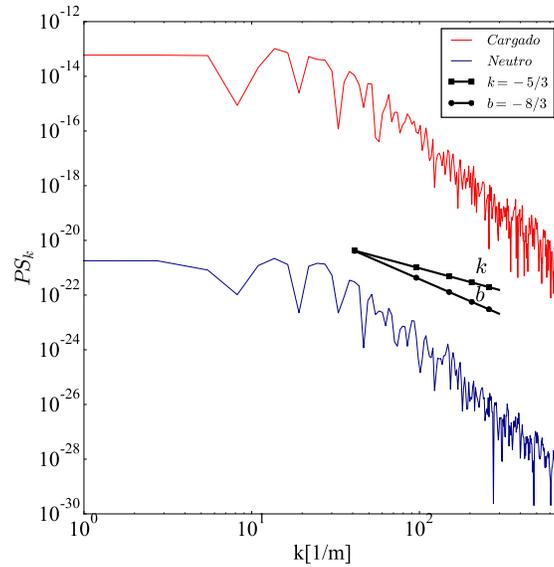


Figura 19

Gráficas para el espectro de energía cinética para el Viento Solar con los parámetros $\xi = 100$ y $\tau_{rec} = 10^{-3}$. Este resultado se obtuvo para el tiempo $t = 3.04813$ [s].

5.4.3 Amplificación de la energía magnética

Como último análisis se estudió la amplificación de la energía magnética y se comparó con los resultados previos en la figura 20. En este caso el comportamiento fue un poco distinto a la tendencia que se tenía con cada tipo de colisiones por aparte debido a la interacción en conjunto entre ambas.

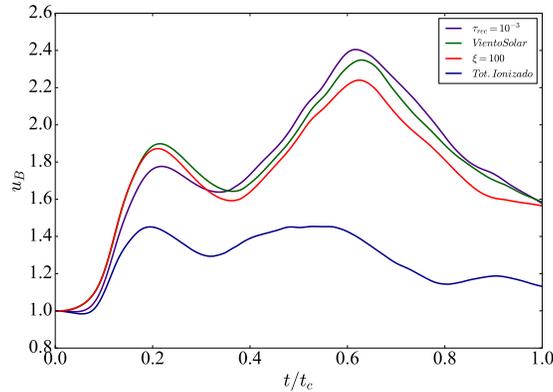


Figura 20

Amplificación del campo magnético normalizado para el Viento Solar, el fluido totalmente ionizado, un fluido con $\xi = 100$ y un fluido con $\tau_{rec} = 10^{-3}$. Tiempo $t/t_c = 0.9576$.

En primera instancia es claro que cualquier tipo de colisión amplifica la energía magnética por encima de como ocurre en el fluido totalmente ionizado. Adicionalmente, se observa que en la simulación del viento solar, que incluye tanto colisiones inelásticas como elásticas, la amplificación es mayor que para el caso en el que se tienen únicamente colisiones elásticas con frecuencia $\xi = 100$. Por otro lado, se obtuvo que para las colisiones inelásticas con frecuencia $\tau_{rec} = 10^{-3}$ la amplificación es menor que para el viento solar y las colisiones elásticas en el primer pico, sin embargo esta las supera a ambas en el segundo. Este comportamiento se da debido a que los efectos de ionización y recombinación son más evidentes a medida que el tiempo avanza, ya que se convierten más partículas y el sistema tiende a una solución estable. Asimismo, el modelo con ambas colisiones no amplifica más porque las colisiones elásticas mantienen el sistema más estable mediante el intercambio de energía entre las dos especies. Específicamente, el caso del viento solar amplificó alrededor de un 90 % durante el primer pico de amplificación y llegó hasta un 135 % en

el segundo.

6. Conclusiones

A partir del estudio sistemático realizado de los diferentes modelos que describen un plasma turbulento se determinó que los procesos de ionización y recombinación tienen diversos efectos significativos en la dinámica del mismo. Por medio del análisis de las gráficas obtenidas se determinó que estos fenómenos influyen en las variables que describen el plasma como su vorticidad, densidad de corriente, densidad de masa, entre otras. De igual forma, se encontraron diferencias muy evidentes respecto al comportamiento del decaimiento en los espectros de energía y de la amplificación de la energía magnética. Por lo tanto, se afirma que el fenómeno de conversión de especies, al igual que las colisiones elásticas, debería ser considerado siempre que se espere describir un plasma turbulento de una manera acertada y completa.

En particular, se encontró que los términos de colisiones inelásticos (ionización y recombinación) hacen que tanto el fluido cargado como el neutro tiendan a un comportamiento similar. Esto se evidenció mediante la comparación de las vorticidades y densidades de corriente en la sección 5.3.1 y las pendientes de decaimiento en los espectro de energía de la sección 5.3.2. Este resultado es análogo al que se da también debido a las colisiones elásticas que se encuentra en la sección 5.2, con la particularidad de que para el caso de la ionización y recombinación se encuentran algunas diferencias en las magnitudes de las variables, como es evidente en el espectro de energía. Además, el hecho de que los fluidos se comporten de esta forma indica que a pesar de que las partículas neutras y el campo magnético no interaccionen directamente, este logra afectarlas e influye en estas por medio de las colisiones.

De igual forma, se obtuvo que la ionización y recombinación podría inhibir la formación de plasmoides en las hojas de corriente creadas por las variaciones abruptas del campo magnético. Para llegar a este resultado se comparó el comportamiento de la componente z de la densidad de corriente para el modelo con conversión de especies en la sección 5.3.1 con los modelos del plasma totalmente ionizado y del plasma con colisiones elásticas en las secciones 5.2.1 y 5.1.1, respectivamente. La razón por la cual se produce esta inhibición es por el comportamiento característico que tienen las tasa de ionización Γ_{ion} y recombinación Γ_{rec} . En términos generales, esto se obtiene porque las regiones en las que se producen las conversiones de especies son tales que logran que las hojas de corriente se mantengan mas estables y las presiones magnéticas generadas a su alrededor no varíen de forma considerable. Sin embargo, una descripción más detallada de este fenómeno se encuentra en la sección 5.3.1.

Por otra parte, se encontró que la ionización y recombinación contribuyen en gran medida en la amplificación de la energía magnética. De hecho, se obtuvo que las colisiones inelásticas influyen sobre la amplificación en una medida comparable con el modelo de colisiones elásticas, ya que para el caso de $\tau_{rec} = 10^{-3}$ el máximo de amplificación fue 140 %, mientras que para las colisiones elásticas con un parámetro de $\xi = 100$ se obtuvo un máximo de 122 %. Adicionalmente, se encontró que para las colisiones inelásticas el efecto sobre la energía magnética es progresivo, ya que las poblaciones de cada especie varían a medida que avanza el tiempo y tienden a una mayor densidad de partículas cargadas.

Finalmente, se ejemplificó cómo la teoría planteada puede aplicarse para la descripción de un plasma real que se encuentra en la naturaleza, para ello se ajustó el modelo a ciertos paráme-

tros característicos del viento solar lento en la sección 5.4. De esta manera, es posible realizar simulaciones muy completas de un plasma turbulento y aportar así para el entendimiento de los diversos fenómenos complejos que la turbulencia produce en el entorno astrofísico. Por lo tanto, es importante considerar que el modelo puede ser ajustado para representar cualquier otro sistema con diferentes parámetros.

Es importante resaltar que los objetivos propuestos durante este trabajo de investigación se cumplieron de forma satisfactoria. En primer lugar, se corroboraron resultados obtenidos previamente para plasmas turbulentos con colisiones elásticas y se amplió y abarcó el estudio de su dinámica desde diferentes perspectivas. Asimismo, se encontraron resultados novedosos respecto a la influencia de los términos de ionización y recombinación sobre la dinámica de dicho plasma. Por tal razón, se está desarrollando un artículo científico en esta dirección con el fin de presentar ante la comunidad científica un avance relevante dentro del campo de la turbulencia y la teoría magnetohidrodinámica.

Referencias Bibliográficas

- Antiga, L. and Steinman, D. A. (2009). Rethinking turbulence in blood. *Biorheology*, 46(2):77–81.
- Balbus, S. A. and Hawley, J. F. (1998). Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks. *Reviews of modern physics*, 70(1):1.
- Ballester Mortes, J. L., Alexeev, I., Collados, M., Downes, T., Pfaff, R. F., Khodachenko, M., Khomeiko, E., Shaikhislamov, I. F., Soler Juan, R. J., Vazquez-Semadeni, E., et al. (2018). Partially ionized plasmas in astrophysics. *Space Science Reviews*, 2018, vol. 214, num. 58, p. 1-149.
- Batchelor, G. K. (1953). *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge university press.
- Batchelor, G. K. and Townsend, A. A. (1949). The nature of turbulent motion at large wavenumbers. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 199(1057):238–255.
- Bell, A. (2004). Turbulent amplification of magnetic field and diffusive shock acceleration of cosmic rays. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 353(2):550–558.
- Benavides, S. J. and Flierl, G. R. (2020). Two-dimensional partially ionized magnetohydrodynamic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 900.
- Beresnyak, A. (2019). Mhd turbulence. *Living Reviews in Computational Astrophysics*, 5(1):1–59.

- Boltzmann, L. (1872). Weitere studien über das wärmeleichgewicht unter gasmolekülen. sitzung-berichte der kaiserlichen akademie der wissenschaften. mathematisch-naturwissenschaftliche classe 66, 275–370. *The kinetic theory of gases. History of modern physical sciences*, 1:262–349.
- Born, M. and Heisenberg, W. (1924). Über den einfluß der deformierbarkeit der ionen auf optische und chemische konstanten. i. *Zeitschrift für Physik*, 23(1):388–410.
- Braginskii, S. (1965). Transport processes in a plasma, edited by ma leontovich consultants bureau. *New York*, 1.
- Bruno, R. and Carbone, V. (2013). The solar wind as a turbulence laboratory. *Living Reviews in Solar Physics*, 10(1):1–208.
- Carbonell, M., Forteza, P., Oliver, R., and Ballester, J. (2010). The spatial damping of magnetohydrodynamic waves in a flowing partially ionised prominence plasma. *Astronomy & Astrophysics*, 515:A80.
- Chandran, B. D. (2000). Scattering of energetic particles by anisotropic magnetohydrodynamic turbulence with a goldreich-sridhar power spectrum. *Physical Review Letters*, 85(22):4656.
- Chefranov, S. G. and Chefranov, A. S. (2022). Universal turbulence scaling law- $8/3$ at fusion implosion. *Physics of Fluids*, 34(3):036105.
- Chen, C., Chandran, B., Woodham, L., Jones, S., Perez, J., Bourouaine, S., Bowen, T., Klein, K.,

- Moncuquet, M., Kasper, J., et al. (2021). The near-sun streamer belt solar wind: turbulence and solar wind acceleration. *Astronomy & Astrophysics*, 650:L3.
- Cheung, M. C. and Cameron, R. H. (2012). Magnetohydrodynamics of the weakly ionized solar photosphere. *The Astrophysical Journal*, 750(1):6.
- Cho, J. and Lazarian, A. (2006). Particle acceleration by magnetohydrodynamic turbulence. *The Astrophysical Journal*, 638(2):811.
- Coleman Jr, P. J. (1968). Turbulence, viscosity, and dissipation in the solar-wind plasma. *The Astrophysical Journal*, 153:371.
- Cowley, S., Bunce, E., and Prangé, R. (2004). Saturn's polar ionospheric flows and their relation to the main auroral oval. In *Annales Geophysicae*, volume 22, pages 1379–1394. Copernicus GmbH.
- Cox, D. P. and Tucker, W. H. (1969). Ionization equilibrium and radiative cooling of a low-density plasma. *The Astrophysical Journal*, 157:1157.
- David, V. and Galtier, S. (2019). Spectrum in kinetic alfvén wave turbulence: Implications for the solar wind. *The Astrophysical journal letters*, 880(1):L10.
- Díaz, A., Soler, R., and Ballester, J. (2012). Rayleigh-taylor instability in partially ionized compressible plasmas. *The Astrophysical Journal*, 754(1):41.
- Dou, H.-S. (2022). *Origin of Turbulence: Energy Gradient Theory*. Springer Nature.

- Erkaev, N., Penz, T., Lammer, H., Lichtenegger, H., Biernat, H., Wurz, P., Grießmeier, J.-M., and Weiss, W. (2005). Plasma and magnetic field parameters in the vicinity of short-periodic giant exoplanets. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 157(2):396.
- Frisch, U., Sulem, P.-L., and Nelkin, M. (1978). A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 87(4):719–736.
- Gilbert, H. R., Hansteen, V. H., and Holzer, T. E. (2002). Neutral atom diffusion in a partially ionized prominence plasma. *The Astrophysical Journal*, 577(1):464.
- Goldstein, M. L. and Roberts, D. A. (1999). Magnetohydrodynamic turbulence in the solar wind. *Physics of Plasmas*, 6(11):4154–4160.
- Gressel, O., Turner, N. J., Nelson, R. P., and McNally, C. P. (2015). Global simulations of protoplanetary disks with ohmic resistivity and ambipolar diffusion. *The Astrophysical Journal*, 801(2):84.
- Guseva, S., Aurela, M., Cortes, A., Kivi, R., Lotsari, E., MacIntyre, S., Mammarella, I., Ojala, A., Stepanenko, V., Uotila, P., et al. (2021). Variable physical drivers of near-surface turbulence in a regulated river. *Water Resources Research*, 57(11):e2020WR027939.
- Hands, A. D., Ryden, K. A., Meredith, N. P., Glauert, S. A., and Horne, R. B. (2018). Radiation effects on satellites during extreme space weather events. *Space Weather*, 16(9):1216–1226.
- Hernandez, J. and Kovtun, P. (2017). Relativistic magnetohydrodynamics. *Journal of High Energy Physics*, 2017(5):1–39.

- Horbury, T., Forman, M., and Oughton, S. (2005). Spacecraft observations of solar wind turbulence: an overview. *Plasma physics and controlled fusion*, 47(12B):B703.
- Jones, A. and Downes, T. (2012). The kelvin–helmholtz instability in weakly ionized plasmas—ii. multifluid effects in molecular clouds. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 420(1):817–828.
- Karman, T. V. (1937). The fundamentals of the statistical theory of turbulence. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 4(4):131–138.
- Khodachenko, M., Arber, T., Rucker, H. O., and Hanslmeier, A. (2004). Collisional and viscous damping of mhd waves in partially ionized plasmas of the solar atmosphere. *Astronomy & Astrophysics*, 422(3):1073–1084.
- Khomenko, E. and Collados, M. (2012). Heating of the magnetized solar chromosphere by partial ionization effects. *The Astrophysical Journal*, 747(2):87.
- Khomenko, E., Collados, M., Diaz, A., and Vitas, N. (2014). Fluid description of multi-component solar partially ionized plasma. *Physics of Plasmas*, 21(9):092901.
- Khomenko, E., Vitas, N., Collados, M., and De Vicente, A. (2018). Three-dimensional simulations of solar magneto-convection including effects of partial ionization. *Astronomy & Astrophysics*, 618:A87.
- Kolmogorov, A. N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Cr Acad. Sci. URSS*, 30:301–305.

- Landinez, G., Rueda, S., and Lora-Clavijo, F. D. (2021). First steps on modelling wave propagation in isotropic-heterogeneous media: numerical simulation of p–sv waves. *European Journal of Physics*, 42(6):065001.
- Lazarian, A., Vlahos, L., Kowal, G., Yan, H., Beresnyak, A., and de Gouveia Dal Pino, E. (2012). Turbulence, magnetic reconnection in turbulent fluids and energetic particle acceleration. *Space science reviews*, 173(1):557–622.
- Leake, J., DeVore, C., Thayer, J., Burns, A., Crowley, G., Gilbert, H., Huba, J., Krall, J., Linton, M., Lukin, V., et al. (2014a). Ionized plasma and neutral gas coupling in the sun’s chromosphere and earth’s ionosphere/thermosphere. *Space Science Reviews*, 184(1-4):107–172.
- Leake, J., DeVore, C., Thayer, J., Burns, A., Crowley, G., Gilbert, H., Huba, J., Krall, J., Linton, M., Lukin, V., et al. (2014b). Ionized plasma and neutral gas coupling in the sun’s chromosphere and earth’s ionosphere/thermosphere. *Space Science Reviews*, 184(1):107–172.
- Leake, J. E. and Arber, T. (2006). The emergence of magnetic flux through a partially ionised solar atmosphere. *Astronomy & Astrophysics*, 450(2):805–818.
- Leake, J. E., Lukin, V. S., Linton, M. G., and Meier, E. T. (2012). Multi-fluid simulations of chromospheric magnetic reconnection in a weakly ionized reacting plasma. *The Astrophysical Journal*, 760(2):109.
- Lehmann, A. and Wardle, M. (2016). Signatures of fast and slow magnetohydrodynamic shocks in

- turbulent molecular clouds. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 455(2):2066–2077.
- Martínez-Sykora, J., De Pontieu, B., and Hansteen, V. (2012). Two-dimensional radiative magnetohydrodynamic simulations of the importance of partial ionization in the chromosphere. *The Astrophysical Journal*, 753(2):161.
- Meier, E. and Shumlak, U. (2012). A general nonlinear fluid model for reacting plasma-neutral mixtures. *Physics of Plasmas*, 19(7):072508.
- Meyer, C. D., Balsara, D. S., Burkhart, B., and Lazarian, A. (2014). Observational diagnostics for two-fluid turbulence in molecular clouds as suggested by simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 439(3):2197–2210.
- Meyrand, R. and Galtier, S. (2013). Anomalous $k^{-8/3}$ spectrum in electron magnetohydrodynamic turbulence. *Physical review letters*, 111(26):264501.
- Moldwin, M. (2008). *An introduction to space weather*, volume 1. Cambridge University Press Cambridge.
- Molokov, S. S., Moreau, R., and Moffatt, H. K. (2007). *Magnetohydrodynamics: Historical evolution and trends*, volume 80. Springer Science & Business Media.
- Mouschovias, T. C., Ciolek, G. E., and Morton, S. A. (2011). Hydromagnetic waves in weakly-ionized media—i. basic theory, and application to interstellar molecular clouds. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 415(2):1751–1782.

- Murphy, N. A. and Lukin, V. S. (2015). Asymmetric magnetic reconnection in weakly ionized chromospheric plasmas. *The Astrophysical Journal*, 805(2):134.
- Murtas, G., Hillier, A., and Snow, B. (2022). Collisional ionization and recombination effects on coalescence instability in chromospheric partially ionized plasmas. *Physics of Plasmas*, 29(6):062302.
- Navarro, A., Lora-Clavijo, F., and González, G. A. (2017). Magnus: a new resistive mhd code with heat flow terms. *The Astrophysical Journal*, 844(1):57.
- Navarro, A., Lora-Clavijo, F., Murawski, K., and Poedts, S. (2021). Thermal conduction effects on formation of chromospheric solar tadpole-like jets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 500(3):3329–3334.
- Navarro, A., Murawski, K., Wójcik, D., and Lora-Clavijo, F. (2019). Numerical simulations of the emerging plasma blob into a solar coronal hole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 489(2):2769–2774.
- Obukhov, A. (1941). Energy distribution in the spectrum of turbulent ow. 32:2224.
- Oliver, R., Soler, R., Terradas, J., and Zaqarashvili, T. (2016). Dynamics of coronal rain and descending plasma blobs in solar prominences. ii. partially ionized case. *The Astrophysical Journal*, 818(2):128.
- Orr, W. M. (1907). The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a

- viscous liquid. part ii: A viscous liquid. In *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, volume 27, pages 69–138. JSTOR.
- Parashar, T. N., Servidio, S., Shay, M., Matthaeus, W., and Cassak, P. (2010). Orszag tang vortices: kinetic study of a turbulent plasma. *1216(1):304–307*.
- Petrosian, V. and Liu, S. (2004). Stochastic acceleration of electrons and protons. i. acceleration by parallel-propagating waves. *The Astrophysical Journal*, 610(1):550.
- Politano, H., Pouquet, A., and Sulem, P. (1989). Inertial ranges and resistive instabilities in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 1(12):2330–2339.
- Popescu, B. (2020). *Simulations of the solar chromosphere in the two-fluid approximation*. PhD thesis, Universidad de La Laguna.
- Prandtl, L. (1921). Bemerkungen über die entstehung der turbulenz. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1(6):431–436.
- Prandtl, L. (1922). Recent progress in the theory of air flow as applied to aeronautics.
- Reynolds, O. (1883). Xxix. an experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal society of London*, (174):935–982.

Richardson, L. F. (1922). *Weather prediction by numerical process*. University Press.

Sakai, J., Tsuchimoto, K., and Sokolov, I. (2006). Simulation of collision of two current loops in the upper chromosphere using the two-fluid model. *The Astrophysical Journal*, 642(2):1236.

Schlickeiser, R. and Miller, J. A. (1998). Quasi-linear theory of cosmic ray transport and acceleration: the role of oblique magnetohydrodynamic waves and transit-time damping. *The Astrophysical Journal*, 492(1):352.

Schnack, D. D. (2009). *Lectures in magnetohydrodynamics: with an appendix on extended MHD*, volume 780. Springer.

Shelyag, S., Khomenko, E., de Vicente, A., and Przybylski, D. (2016). Heating of the partially ionized solar chromosphere by waves in magnetic structures. *The Astrophysical Journal Letters*, 819(1):L11.

Shoda, M., Suzuki, T. K., Asgari-Targhi, M., and Yokoyama, T. (2019). Three-dimensional simulation of the fast solar wind driven by compressible magnetohydrodynamic turbulence. *The Astrophysical Journal Letters*, 880(1):L2.

Smith, P. and Sakai, J. (2008). Chromospheric magnetic reconnection: two-fluid simulations of coalescing current loops. *Astronomy & Astrophysics*, 486(2):569–575.

Soler, R., Ballester, J., and Zaqarashvili, T. (2015). Overdamped alfvén waves due to ion-neutral collisions in the solar chromosphere. *Astronomy & Astrophysics*, 573:A79.

- Soler, R., Díaz, A., Ballester, J., and Goossens, M. (2012). Kelvin–helmholtz instability in partially ionized compressible plasmas. *The Astrophysical Journal*, 749(2):163.
- Soler, R., Terradas, J., Oliver, R., and Ballester, J. L. (2017). Propagation of torsional alfvén waves from the photosphere to the corona: reflection, transmission, and heating in expanding flux tubes. *The Astrophysical Journal*, 840(1):20.
- Sommerfeld, A. (1908). Ein beitrag zur hydrodynamischen erklärung der turbulenten flussigkeitsbewegung. *Atti Congr. Int. Math. 4th*.
- Tatali, R., Serre, E., Tamain, P., Galassi, D., Ghendrih, P., Nespoli, F., Bufferand, H., Cartier-Michaud, T., and Ciraolo, G. (2021). Impact of collisionality on turbulence in the edge of tokamak plasma using 3d global simulations. *Nuclear Fusion*, 61(5):056002.
- Taylor, G. I. (1935). Statistical theory of turbulenc. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 151(873):421–444.
- Taylor, G. I. (1938). Production and dissipation of vorticity in a turbulent fluid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 164(916):15–23.
- Taylor, G. I. and Green, A. E. (1937). Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 158(895):499–521.
- Tong, D. (2022). Lectures on fluid mechanics.

- Tu, J. and Song, P. (2013). A study of alfvén wave propagation and heating the chromosphere. *The Astrophysical Journal*, 777(1):53.
- Usmanov, A. V., Matthaeus, W. H., Breech, B. A., and Goldstein, M. L. (2011). Solar wind modeling with turbulence transport and heating. *The Astrophysical Journal*, 727(2):84.
- Vaivads, A., Retinò, A., Soucek, J., Khotyaintsev, Y. V., Valentini, F., Escoubet, C. P., Alexandrova, O., André, M., Bale, S., Balikhin, M., et al. (2016). Turbulence heating observer–satellite mission proposal. *Journal of Plasma Physics*, 82(5).
- Vasyliūnas, V. (2005). Time evolution of electric fields and currents and the generalized ohm's law. In *Annales Geophysicae*, volume 23, pages 1347–1354. Copernicus GmbH.
- Verma, M. K. (2004). Statistical theory of magnetohydrodynamic turbulence: recent results. *Physics Reports*, 401(5-6):229–380.
- Verscharen, D., Klein, K. G., and Maruca, B. A. (2019). The multi-scale nature of the solar wind. *Living Reviews in Solar Physics*, 16(1):1–136.
- Vogt, C. and Ensslin, T. (2006). Magnetic turbulence in cool cores of galaxy clusters. *Astronomische Nachrichten: Astronomical Notes*, 327(5-6):595–598.
- Wandurraga, P. C., Navarro, A., and Lora-Clavijo, F. D. (2021). Propagación de ondas de alfvén torsionales en una atmósfera solar estratificada. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 45(174):52–66.

Zamora-Aviles, M. and Vázquez-Semadeni, E. (2011). An evolutionary model for the star formation efficiency in gravitationally collapsing molecular clouds. *arXiv preprint arXiv:1105.4777*.

Zaqarashvili, T., Khodachenko, M., and Rucker, H. (2011). Magnetohydrodynamic waves in solar partially ionized plasmas: two-fluid approach. *Astronomy & Astrophysics*, 529:A82.

Zhdankin, V., Uzdensky, D. A., Werner, G. R., and Begelman, M. C. (2018). System-size convergence of nonthermal particle acceleration in relativistic plasma turbulence. *The Astrophysical Journal Letters*, 867(1):L18.

Zweibel, E. G. (1989). Magnetic reconnection in partially ionized gases. *The Astrophysical Journal*, 340:550–557.

Apéndices

Apéndice A. Ecuaciones de conservación

En este apéndice se encuentra el desarrollo matemático detallado de las ecuaciones presentadas en el capítulo 3.

Múltiples especies

Conservación del momento

En primer lugar, para encontrar la ecuación de momento a partir de la ecuación de transporte de Boltzmann (15), se utiliza la función $g(v) = \beta_\alpha \vec{v}$

$$\partial_t(n_\alpha \beta_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha \beta_\alpha \langle \vec{v} \vec{v} \rangle_\alpha) - \frac{n_\alpha \beta_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{v} \rangle_\alpha = \beta_\alpha \int \vec{v} (\partial_t f_\alpha)_{coll} d^3 v, \quad (65)$$

Ahora, se analizará la expresión por partes. Es decir, para el primer término, por medio de la regla de Leibniz, se tiene

$$\begin{aligned} \partial_t(n_\alpha \beta_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha) &= n_\alpha \beta_\alpha \partial_t \langle \vec{v} \rangle_\alpha + \langle \vec{v} \rangle_\alpha \partial_t(n_\alpha \beta_\alpha), \\ &= n_\alpha \beta_\alpha \partial_t \vec{u}_\alpha + \vec{u}_\alpha \partial_t(n_\alpha \beta_\alpha). \end{aligned} \quad (66)$$

Posteriormente, haciendo uso de la ecuación de continuidad (16)

$$\partial_t(n_\alpha\beta_\alpha\vec{u}_\alpha) = n_\alpha\beta_\alpha\partial_t\vec{u}_\alpha - \vec{u}_\alpha\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha\beta_\alpha\vec{u}_\alpha) + \beta_\alpha\vec{u}_\alpha \int (\partial_t f)_{coll} d^3v. \quad (67)$$

Para el segundo término de (65) se define

$$\vec{v} = \vec{c}_\alpha + \langle \vec{v} \rangle_\alpha = \vec{c}_\alpha + \vec{u}_\alpha, \quad (68)$$

donde \vec{c}_α es la velocidad relativa entre \vec{v} y $\langle \vec{v} \rangle_\alpha$, por lo cual se cumple

$$\langle \vec{c}_\alpha \rangle = 0, \quad (69)$$

lo cual lleva a que finalmente el segundo término sea

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha\beta_\alpha \langle \vec{v}\vec{v} \rangle_\alpha) = \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha\beta_\alpha\vec{u}_\alpha\vec{u}_\alpha + n_\alpha\beta_\alpha \langle \vec{c}_\alpha\vec{c}_\alpha \rangle). \quad (70)$$

El primer término de la ecuación (70) se puede expresar en términos de las derivadas espaciales, lo cual por medio de la regla de Leibniz resulta

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha\beta_\alpha\vec{u}_\alpha\vec{u}_\alpha) &= n_\alpha\beta_\alpha \left(u_{\alpha x} \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial x} + u_{\alpha y} \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial y} + u_{\alpha z} \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial z} \right) \\ &+ \vec{u}_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x}(n_\alpha\beta_\alpha u_{\alpha x}) + \frac{\partial}{\partial y}(n_\alpha\beta_\alpha u_{\alpha y}) + \frac{\partial}{\partial z}(n_\alpha\beta_\alpha u_{\alpha z}) \right], \end{aligned} \quad (71)$$

que se sintetiza como

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_{\alpha} \beta_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}) = n_{\alpha} \beta_{\alpha} (\vec{u}_{\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_{\alpha} + \vec{u}_{\alpha} [\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_{\alpha} \beta_{\alpha} \vec{u}_{\alpha})]. \quad (72)$$

Entonces, retomando la ecuación (70)

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_{\alpha} \beta_{\alpha} \langle \vec{v} \vec{v} \rangle_{\alpha}) &= n_{\alpha} \beta_{\alpha} (\vec{u}_{\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_{\alpha} + \vec{u}_{\alpha} [\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_{\alpha} \beta_{\alpha} \vec{u}_{\alpha})] \\ &+ \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_{\alpha} \beta_{\alpha} \langle \vec{c}_{\alpha} \vec{c}_{\alpha} \rangle), \end{aligned} \quad (73)$$

donde $n_{\alpha} \beta_{\alpha} \langle \vec{c}_{\alpha} \vec{c}_{\alpha} \rangle$, para $\beta_{\alpha} = m_{\alpha}$, es conocido como el tensor de presión cinética \mathbb{P}_{α}

$$\mathbb{P}_{\alpha} = \mathbb{M}_{\alpha} + p_{\alpha} \mathbb{I} = n_{\alpha} \beta_{\alpha} \langle \vec{c}_{\alpha} \vec{c}_{\alpha} \rangle, \quad (74)$$

mientras que para $\beta_{\alpha} = q_{\alpha}$ se encuentra el tensor electrocinético. Además, el tensor \mathbb{M}_{α} es el tensor de viscosidad y p_{α} es la presión cinética escalar. Por lo tanto, se obtiene

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_{\alpha} \beta_{\alpha} \langle \vec{v} \vec{v} \rangle_{\alpha}) = n_{\alpha} \beta_{\alpha} (\vec{u}_{\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_{\alpha} + \vec{u}_{\alpha} [\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_{\alpha} \beta_{\alpha} \vec{u}_{\alpha})] + \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_{\alpha} + \nabla_{\vec{r}} p_{\alpha}. \quad (75)$$

Posteriormente, para el tercer término de la expresión inicial del momento (65), al desarrollar las derivadas del campo de velocidades y aplicar el producto interno, se encuentra

$$-\frac{n_\alpha \beta_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{v} \rangle_\alpha = -\frac{n_\alpha \beta_\alpha}{m_\alpha} \langle F_x \hat{e}_x + F_y \hat{e}_y + F_z \hat{e}_z \rangle_\alpha = -\frac{n_\alpha \beta_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{F} \rangle_\alpha. \quad (76)$$

Entonces, al juntar los tres resultados (67), (75) y (76) en la expresión de momento (65)

$$\begin{aligned} n_\alpha \beta_\alpha \partial_t \vec{u}_\alpha - \vec{u}_\alpha \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha \beta_\alpha \vec{u}_\alpha) + \beta_\alpha \vec{u}_\alpha \int (\partial_t f)_{coll} d^3 v + n_\alpha \beta_\alpha (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_\alpha + \\ \vec{u}_\alpha [\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha \beta_\alpha \vec{u}_\alpha)] + \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_\alpha + \nabla_{\vec{r}} p_\alpha - \frac{n_\alpha \beta_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{F} \rangle_\alpha = \beta_\alpha \int \vec{v} (\partial_t f_\alpha)_{coll} d^3 v, \end{aligned} \quad (77)$$

que se puede reescribir como (a continuación se tomará $\nabla_{\vec{r}} = \nabla$)

$$\begin{aligned} n_\alpha \beta_\alpha (\partial_t + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha + \nabla \cdot \mathbb{M}_\alpha + \nabla p_\alpha - \frac{n_\alpha \beta_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{F} \rangle_\alpha \\ = \beta_\alpha \int \vec{v} (\partial_t f_\alpha)_{coll} d^3 v - \beta_\alpha \vec{u}_\alpha \int (\partial_t f)_{coll} d^3 v, \end{aligned} \quad (78)$$

Al considerar las definiciones (18), (22) y la derivada lagrangiana, se obtiene la expresión

$$n_\alpha \beta_\alpha \frac{D\vec{u}_\alpha}{Dt} = \frac{n_\alpha \beta_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{F} \rangle_\alpha - \nabla \cdot \mathbb{M}_\alpha - \nabla p_\alpha + \vec{K}_\alpha - \vec{u}_\alpha s_\alpha, \quad (79)$$

que para el caso en que se define $\beta = m_\alpha$ se encuentra

$$m_\alpha n_\alpha \frac{D\vec{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha \langle \vec{F} \rangle_\alpha - \nabla \cdot \mathbb{M}_\alpha - \nabla p_\alpha + \vec{R}_\alpha - \vec{u}_\alpha s_\alpha, \quad (80)$$

que corresponde al resultado buscado (21).

Conservación de la energía

Al reemplazar la función $\beta_\alpha v^2/2$ en la ecuación (15), se encuentra

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{n_\alpha \beta_\alpha}{2} \langle v^2 \rangle_\alpha \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{n_\alpha \beta_\alpha}{2} \langle v^2 \vec{v} \rangle_\alpha \right) - \frac{n_\alpha \beta_\alpha}{2m_\alpha} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} v^2 \rangle_\alpha \\ = \frac{1}{2} \beta_\alpha \int v^2 (\partial_t f)_{coll} g d^3v. \end{aligned} \quad (81)$$

A partir de la definición (68) y la condición (69) se obtiene la expresión (82)

$$\langle v^2 \rangle = u_\alpha^2 + \langle c_\alpha^2 \rangle. \quad (82)$$

De la misma forma que en el caso del momento lineal, se analiza término a término la expresión (81). En primer lugar, se tiene en cuenta (82)

$$\partial_t \left(\frac{n_\alpha \beta_\alpha}{2} \langle v^2 \rangle_\alpha \right) = \partial_t \left(\frac{\beta_\alpha n_\alpha}{2} u_\alpha^2 \right) + \partial_t \left(\frac{\beta_\alpha n_\alpha}{2} \langle c_\alpha^2 \rangle \right), \quad (83)$$

donde, según la definición (74), el término $\beta_\alpha n_\alpha \langle c_\alpha^2 \rangle$ corresponde a la diagonal del tensor de presión cinético (o electrocinético), es decir

$$Np_\alpha = \beta_\alpha n_\alpha \langle c_\alpha^2 \rangle, \quad (84)$$

siendo N el número de grados de libertad, lo que lleva a

$$\partial_t \left(\frac{n_\alpha \beta_\alpha}{2} \langle v^2 \rangle_\alpha \right) = \partial_t \left(\frac{\beta_\alpha n_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right). \quad (85)$$

Para el segundo término de (81), se reescribe

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{n_\alpha \beta_\alpha}{2} \langle v^2 \vec{v} \rangle_\alpha \right) = \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{n_\alpha \beta_\alpha}{2} \langle (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \rangle_\alpha \right), \quad (86)$$

que se expande con la definición (68) y el resultado (69), así se obtiene

$$\langle (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \rangle_\alpha = \nabla_{\vec{r}} = u_\alpha^2 \vec{u}_\alpha + \langle c_\alpha^2 \rangle_\alpha \vec{u}_\alpha + 2 \langle \vec{c}_\alpha \vec{c}_\alpha \rangle \cdot \vec{u}_\alpha + \langle c_\alpha^2 \vec{c}_\alpha \rangle. \quad (87)$$

Por lo tanto, al reemplazar en (86) aparece la definición del tensor de presión (74) y una nueva definición que corresponde a la definición del vector de flujo de calor

$$\vec{q}_\alpha = \frac{1}{2} \beta_\alpha n_\alpha \langle c_\alpha^2 \vec{c}_\alpha \rangle, \quad (88)$$

con lo cual resulta

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{n_\alpha \beta_\alpha}{2} \langle v^2 \vec{v} \rangle_\alpha \right) = \nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\left(\frac{n_\alpha \beta_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) \vec{u}_\alpha + \mathbb{P}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + \vec{q}_\alpha \right]. \quad (89)$$

Por último, para el tercer término se tiene

$$-\frac{n_\alpha}{2} \left\langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} v^2 \right\rangle_\alpha = -\frac{n_\alpha}{2} \left\langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} (\vec{v} \cdot \vec{v}) \right\rangle_\alpha, \quad (90)$$

que se reescribe al considerar

$$\nabla_{\vec{v}} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2(\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}}) \vec{v} = 2\vec{v}. \quad (91)$$

Es decir

$$-\frac{n_\alpha}{2} \left\langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} v^2 \right\rangle_\alpha = -n_\alpha \left\langle \vec{F} \cdot \vec{v} \right\rangle_\alpha, \quad (92)$$

lo cual representa la potencia. Al agrupar los resultados (85), (89), (92) y retomar la ecuación (81), junto con la definición del término de colisiones (26), se obtiene la expresión (25)

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{\beta_\alpha n_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\left(\frac{\beta_\alpha n_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) \vec{u}_\alpha + \mathbb{M}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + p_\alpha \mathbb{I} \cdot \vec{u}_\alpha + q_\alpha \right] \\ - \frac{\beta_\alpha n_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle = H_\alpha, \end{aligned} \quad (93)$$

Modelo de tres fluidos

Teniendo en cuenta que un plasma parcialmente ionizado está compuesto por iones, electrones y partículas neutras, la descripción de la dinámica el plasma estaría dada mediante las ecuaciones de conservación para tres especies, es decir tres conjuntos de ecuaciones acoplados mediante

términos de interacción:

- Iones:

$$\begin{aligned}\partial_t(\rho_{mi}) + \nabla \cdot (\rho_{mi}\vec{u}_i) &= S_i, \\ \rho_{mi} \frac{D\vec{u}_i}{Dt} &= n_i \langle \vec{F} \rangle_i - \nabla \cdot \mathbb{M}_i - \nabla p_i + \vec{R}_i - \vec{u}_i S_i, \\ \frac{N}{2} \frac{Dp_i}{Dt} + \frac{N+2}{2} p_i \nabla \cdot \vec{u}_i &= -(\mathbb{M}_i \cdot \nabla) \vec{u}_i - \nabla \cdot \vec{q}_i + \frac{1}{2} u_i^2 S_i - \vec{u}_i \cdot \vec{R}_i + \vec{H}_i.\end{aligned}\tag{94}$$

- Electrones:

$$\begin{aligned}\partial_t(\rho_{me}) + \nabla \cdot (\rho_{me}\vec{u}_e) &= S_e, \\ \rho_{me} \frac{D\vec{u}_e}{Dt} &= n_e \langle \vec{F} \rangle_e - \nabla \cdot \mathbb{M}_e - \nabla p_e + \vec{R}_e - \vec{u}_e S_e, \\ \frac{N}{2} \frac{Dp_e}{Dt} + \frac{N+2}{2} p_e \nabla \cdot \vec{u}_e &= -(\mathbb{M}_e \cdot \nabla) \vec{u}_e - \nabla \cdot \vec{q}_e + \frac{1}{2} u_e^2 S_e - \vec{u}_e \cdot \vec{R}_e + \vec{H}_e.\end{aligned}\tag{95}$$

- Neutros:

$$\begin{aligned}\partial_t(\rho_{mn}) + \nabla \cdot (\rho_{mn}\vec{u}_n) &= S_n, \\ \rho_{mn} \frac{D\vec{u}_n}{Dt} &= n_n \langle \vec{F} \rangle_n - \nabla \cdot \mathbb{M}_n - \nabla p_n + \vec{R}_n - \vec{u}_n S_n, \\ \frac{N}{2} \frac{Dp_n}{Dt} + \frac{N+2}{2} p_n \nabla \cdot \vec{u}_n &= -(\mathbb{M}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n - \nabla \cdot \vec{q}_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + \vec{H}_n.\end{aligned}\tag{96}$$

Nótese que los subíndices i, e y n representan a los iones, electrones y neutros, respectivamente. Este conjunto describe la dinámica de los tres fluidos diferentes que interactúan entre ellos en un mismo volumen.

Modelo de dos fluidos

Para obtener el conjunto de ecuaciones que componen el modelo de dos fluidos, se utiliza

el sistema previo de tres fluidos presentado en la sección 1. A partir de ello se realiza la suma de las ecuaciones para iones y electrones, de forma que se obtiene el fluido cargado y se mantienen igual las ecuaciones correspondientes al fluido neutro.

Ecuación de continuidad

Fluido cargado

Al realizar la suma sobre las componentes cargadas del plasma, representadas con el subíndice $\mu = i, e$ (iones (i) y electrones (e)), se obtiene

$$\sum_{\mu} \partial_t \rho_{m\mu} + \sum_{\mu} \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu}) = S_c, \quad (97)$$

siendo $S_c = S_i + S_e$. Ahora, al considerar las definiciones (31) y (33), se obtiene

$$\frac{\partial \rho_{mc}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c) = S_c, \quad (98)$$

que corresponde a la expresión (34).

Fluido neutro

La ecuación correspondiente al fluido neutro se obtiene de forma inmediata

$$\frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n) = S_n. \quad (99)$$

Ecuación de momento

Fluido cargado

Para determinar la ecuación de momento para el fluido cargado se define la fuerza como

$$\vec{F}_\mu = q_\mu \vec{E} + q_\mu (\vec{u}_\mu \times \vec{B}) + \rho_{m\mu} \vec{g}, \quad (100)$$

y se realiza la suma correspondiente de las ecuaciones para iones y electrones

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \rho_{m\mu} \left[\frac{\partial \vec{u}_\mu}{\partial t} + (\vec{u}_\mu \cdot \nabla) \vec{u}_\mu \right] &= \sum_{\mu} q_\mu n_\mu \vec{E} + \sum_{\mu} q_\mu n_\mu (\vec{u}_\mu \times \vec{B}) \\ &+ \sum_{\mu} \rho_{m\mu} \vec{g} - \sum_{\mu} \nabla \cdot \mathbb{P}_\mu + \sum_{\mu} \vec{R}_\mu - \sum_{\mu} \vec{u}_\mu S_\mu, \end{aligned} \quad (101)$$

Ahora, se utiliza la ecuación de continuidad (97) para reemplazar el término S_μ , es decir

$$\sum_{\mu} \vec{u}_\mu S_\mu = \sum_{\mu} \vec{u}_\mu \left[\frac{\partial \rho_{m\mu}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_\mu) \right]. \quad (102)$$

Entonces, al retomar la ecuación (101), con el resultado (102), se reescribe como

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \left[\rho_{m\mu} \left(\frac{\partial \vec{u}_{\mu}}{\partial t} + (\vec{u}_{\mu} \cdot \nabla) \vec{u}_{\mu} \right) + \vec{u}_{\mu} \left(\frac{\partial \rho_{m\mu}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu}) \right) \right] &= \sum_{\mu} q_{\mu} n_{\mu} \vec{E} \\ &+ \sum_{\mu} q_{\mu} n_{\mu} (\vec{u}_{\mu} \times \vec{B}) + \sum_{\mu} \rho_{m\mu} \vec{g} - \sum_{\mu} \nabla \cdot \mathbb{P}_{\mu} + \sum_{\mu} \vec{R}_{\mu}. \end{aligned} \quad (103)$$

Así, la parte izquierda de la ecuación se puede agrupar como

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu}) + \rho_{m\mu} (\vec{u}_{\mu} \cdot \nabla) \vec{u}_{\mu} + \vec{u}_{\mu} \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu}) \right] \\ = \sum_{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu}) + \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu} \vec{u}_{\mu}) \right], \end{aligned} \quad (104)$$

Por otra parte, se define la velocidad de difusión para cada especie que conforma el fluido cargado (iones y electrones) como

$$\vec{w}_{\mu} = \vec{u}_{\mu} - \vec{u}_c \quad (105)$$

lo cual, lleva a la expresión

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu}) + \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu} \vec{u}_{\mu}) \right] = \\ \sum_{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{m\mu} \vec{u}_c) + \nabla \cdot (\rho_{m\mu} (\vec{w}_{\mu} + \vec{u}_c) (\vec{w}_{\mu} + \vec{u}_c)) \right], \end{aligned} \quad (106)$$

donde el primer término de la parte derecha cumple con la relación

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu} \rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} &= \sum_{\mu} \rho_{m\mu} (\vec{u}_{\mu} - \vec{u}_c) \\
&= \sum_{\mu} \rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu} - \sum_{\mu} \rho_{m\mu} \vec{u}_c \\
&= \rho_{mc} \vec{u}_c - \vec{u}_c \sum_{\mu} \rho_{m\mu} \\
&= \rho_{mc} \vec{u}_c - \rho_{mc} \vec{u}_c = 0.
\end{aligned} \tag{107}$$

Al realizar los productos y aplicar la condición (107) se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu} [\partial_t (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu}) + \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu} \vec{u}_{\mu})] &= \sum_{\mu} [\partial_t (\rho_{m\mu} \vec{u}_c) + \nabla \cdot [\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}]] \\
&+ \nabla \cdot [\rho_{m\mu} \vec{u}_c \vec{u}_c] + \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{u}_c) + \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_c \vec{w}_{\mu}),
\end{aligned} \tag{108}$$

lo cual se reduce nuevamente al aplicar la sumatoria en los dos últimos términos y considerar el resultado (107)

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu} [\partial_t (\rho_{m\mu} \vec{u}_c) + \nabla \cdot [\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}]] &+ \nabla \cdot [\rho_{m\mu} \vec{u}_c \vec{u}_c] + \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{u}_c) + \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_c \vec{w}_{\mu}) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{mc} \vec{u}_c) + \nabla \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c \vec{u}_c) + \sum_{\mu} \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}).
\end{aligned} \tag{109}$$

Posteriormente, se desarrollan las derivadas para reagrupar la expresión como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{mc} \vec{u}_c) + \nabla \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c \vec{u}_c) + \sum_{\mu} \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}) = \\ \rho_{mc} \frac{\partial \vec{u}_c}{\partial t} + \rho_{mc} (\vec{u}_c \cdot \nabla) \vec{u}_c + \vec{u}_c \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho_{mc} + \nabla \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c) \right] + \sum_{\mu} \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}), \end{aligned} \quad (110)$$

que finalmente, mediante la ecuación de continuidad (34) y la definición de derivada Lagrangiana, resulta

$$\begin{aligned} \rho_{mc} \frac{\partial \vec{u}_c}{\partial t} + \rho_{mc} (\vec{u}_c \cdot \nabla) \vec{u}_c + \vec{u}_c \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho_{mc} + \nabla \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c) \right] + \sum_{\mu} \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}) \\ = \rho_{mc} \frac{D\vec{u}_c}{Dt} + \vec{u}_c S_c + \sum_{\mu} \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}). \end{aligned} \quad (111)$$

De esta forma, al reemplazar los resultados encontrados en (103)

$$\begin{aligned} \rho_{mc} \frac{D\vec{u}_c}{Dt} + \vec{u}_c S_c + \sum_{\mu} \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}) = \sum_{\mu} q_{\mu} n_{\mu} \vec{E} \\ + \sum_{\mu} q_{\mu} n_{\mu} (\vec{u}_{\mu} \times \vec{B}) + \sum_{\mu} \rho_{m\mu} \vec{g} - \sum_{\mu} \nabla \cdot \mathbb{P}_{\mu} + \sum_{\mu} \vec{R}_{\mu}. \end{aligned} \quad (112)$$

Tensor de presión cinético

Por otra parte, antes de continuar con el desarrollo de la expresión (112), es necesario hacer énfasis en el término correspondiente al tensor de presión cinética. Previamente este se definió para cada especie por aparte, sin embargo, ahora se busca un tensor de presión cinética para todo el

fluido cargado. Por lo tanto, de forma análoga a la expresión (68), se define una velocidad relativa

$$\vec{c}_{0\mu} = \vec{v}_c + \vec{u}_c, \quad (113)$$

donde \vec{u}_c es la velocidad global promediada de las partículas con carga. Entonces, la definición del tensor de presión cinética para el fluido cargado, acorde con (74), es

$$\mathbb{P}_c = \sum_{\mu} \rho_{m\mu} \langle \vec{c}_{0\mu} \vec{c}_{0\mu} \rangle. \quad (114)$$

Además, de acuerdo con las definiciones de velocidad relativa (68) y velocidad de difusión (105), la expresión (113) se reescribe como

$$\vec{c}_{0\mu} = \vec{c}_{\mu} + \vec{w}_{\mu}, \quad (115)$$

por lo que al realizar los productos de (114) y aplicar la condición (69), el tensor resulta

$$\mathbb{P}_c = \sum_{\mu} \rho_{m\mu} \langle \vec{c}_{\mu} \vec{c}_{\mu} \rangle + \sum_{\mu} \rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu} = \sum_{\mu} \mathbb{P}_{\mu} + \sum_{\mu} \rho_{m\mu} \vec{W}_{\mu} \vec{W}_{\mu}. \quad (116)$$

Por lo tanto, al sustituir el tensor de presión (116) en (112), se obtiene

$$\begin{aligned} \rho_{mc} \frac{D\vec{u}_c}{Dt} + \vec{u}_c S_c + \sum_{\mu} \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}) &= \sum_{\mu} q_{\mu} n_{\mu} \vec{E} + \sum_{\mu} q_{\mu} n_{\mu} (\vec{u}_{\mu} \times \vec{B}) \\ + \sum_{\mu} \rho_{m\mu} \vec{g} + \vec{R}_c - \nabla \cdot \mathbb{P}_c + \sum_{\mu} \nabla \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}), \end{aligned} \quad (117)$$

que al realizar las sumas y simplificar, da como resultado

$$\rho_{mc} \frac{D\vec{u}_c}{Dt} = \rho_q \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} + \rho_{mc} \vec{g} - \nabla \cdot \mathbb{P}_c + \vec{R}_c - \vec{u}_c S_c. \quad (118)$$

Además, al considerar la condición de cuasi-neutralidad que se debe cumplir por tratarse de un plasma, la carga total del fluido debe ser cero, es decir $\rho_q = 0$. De tal forma que se obtiene la conservación del momento para el fluido cargado (35)

$$\rho_{mc} \frac{D\vec{u}_c}{Dt} = \vec{j} \times \vec{B} + \rho_{mc} \vec{g} - \nabla \cdot \mathbb{P}_c + \vec{R}_c - \vec{u}_c S_c. \quad (119)$$

Fluido neutro

Por otra parte, para el fluido neutro se obtiene la expresión de forma inmediata a partir de la expresión (21), teniendo presente que la fuerza está definida como

$$\vec{F}_n = \rho_{mn} \vec{g}, \quad (120)$$

lo que lleva a

$$\rho_{mn} \frac{D\vec{u}_n}{Dt} = \rho_{mn} \vec{g} - \nabla \cdot \mathbb{P}_n + \vec{R}_n - \vec{u}_n S_n. \quad (121)$$

Ecuación de energía

Fluido cargado

Para encontrar la ecuación correspondiente a la conservación de la energía del fluido cargado, en primer lugar, se define $\beta_\alpha = m_\alpha$ en la ecuación (25)

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) \vec{u}_\alpha + \mathbb{M}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + p_\alpha \mathbb{I} \cdot \vec{u}_\alpha + q_\alpha \right] \\ - n_\alpha \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle_\alpha = H_\alpha. \end{aligned} \quad (122)$$

Ahora, se realiza la suma entre la ecuación para iones y electrones, es decir

$$\begin{aligned} \sum_\mu \partial_t \left(\frac{\rho_{m\mu}}{2} u_\mu^2 + \frac{N}{2} p_\mu \right) + \sum_\mu \nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\left(\frac{\rho_{m\mu}}{2} u_\mu^2 + \frac{N}{2} p_\mu \right) \vec{u}_\mu + \mathbb{P}_\mu \cdot \vec{u}_\mu + q_\mu \right] \\ - \sum_\mu n_\mu \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle_\mu = \sum_\mu H_\mu. \end{aligned} \quad (123)$$

Seguidamente, se utiliza la expresión para la fuerza (100). A partir de ello, el término de potencia en la expresión de la energía para múltiples especies (25), se desarrolla como

$$\sum_{\mu} n_{\mu} \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle_{\mu} = \sum_{\mu} n_{\mu} \left[q_{\mu} \langle E \cdot \vec{v} \rangle_{\mu} + q_{\mu} \langle (\vec{u}_{\mu} \times \vec{B}) \cdot \vec{u}_{\mu} \rangle + m_{\mu} \langle \vec{g} \cdot \vec{u}_{\mu} \rangle_{\mu} \right], \quad (124)$$

donde el segundo término es cero debido al producto interno de vectores ortogonales, lo cual indica que la fuerza magnética no realiza trabajo y resulta

$$\sum_{\mu} n_{\mu} \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle_{\mu} = \vec{j} \cdot \vec{E} + \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g}. \quad (125)$$

Entonces, al reemplazar el resultado de la potencia (125) y realizar las sumas correspondientes en (123), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Np_c}{2} + \frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \right) = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{Np_c}{2} + \frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \right) \vec{u}_c + \mathbb{P}_c \cdot \vec{u}_c + \vec{q}_c \right] - \vec{j} \cdot \vec{E} - \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} = H_c. \quad (126)$$

A continuación, se reescribe la expresión como

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Np_c}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{Np_c}{2} \vec{u}_c \right) + \frac{1}{2} u_c^2 \left[\frac{\partial \rho_{mc}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c) \right] \\ & + \vec{u}_c \cdot \left(\rho_{mc} \frac{D\vec{u}_c}{Dt} \right) + \nabla \cdot \vec{q}_c + \nabla \cdot (\mathbb{P}_c \cdot \vec{u}_c) - \vec{j} \cdot \vec{E} - \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} = H_c, \end{aligned} \quad (127)$$

con el fin de utilizar la ecuación para el momento (35) y la conservación de la masa (34)

para el fluido cargado. Por lo tanto, al reemplazar lo mencionado y se acomoda la ecuación como sigue

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} \left(\frac{Np_c}{2} \right) + \frac{Np_c}{2} \nabla \cdot \vec{u}_c + \nabla \cdot \vec{q}_c + (\mathbb{P}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_c \\ & = H_c - \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{E} - \vec{u}_c \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) + \vec{j} \cdot \vec{E} - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + \frac{1}{2} u_c^2 S_c. \end{aligned} \quad (128)$$

Para el término de densidad de corriente se utiliza la ecuación que relaciona la velocidad de cada especie μ con la velocidad de difusión (105), lo que resulta en

$$\vec{j} = \sum_{\mu} n_{\mu} q_{\mu} \vec{u}_{\mu} = \sum_{\mu} n_{\mu} q_{\mu} \vec{w}_{\mu} + \sum_{\mu} n_{\mu} q_{\mu} \vec{u}_c, \quad (129)$$

que lleva a

$$\vec{j} = \vec{j}' + \rho_q \vec{u}_c. \quad (130)$$

En esta expresión se definió la densidad de corriente de conducción \vec{j}' , que representa la densidad de corriente en el marco de referencia que se mueve con la velocidad promedio global \vec{u}_c del fluido cargado. Por otra parte $\rho_q \vec{u}_c$ es la densidad de corriente de convección, que hace referencia al flujo de la carga espacial con velocidad \vec{u}_c . Sin embargo, se tiene que

$$\rho_q = q_i n_i + q_e n_e = 0 \quad (131)$$

para que se cumpla la condición de cuasi-neutralidad característica de un plasma, que implica que se cumpla la condición $n_e = n_i$, por lo que se tiene $j' = j$. Ahora, se analizan los términos asociados con el campo eléctrico y magnético, esto es

$$\begin{aligned}
 & \vec{j} \cdot \vec{E} - \vec{u}_c \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) - \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{E} \\
 &= (\vec{j}' + \rho_{mc} \vec{u}_c) \cdot \vec{E} + (\vec{j}' + \rho_{mc} \vec{u}_c) \cdot (\vec{u}_c \times \vec{B}) - \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{E} \\
 &= \vec{j}' \cdot \vec{E} + \vec{j}' \cdot (\vec{u}_c \times \vec{B}).
 \end{aligned} \tag{132}$$

De tal forma que la expresión que se obtiene a partir de (128) es

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{Np_c}{2} \right) + \frac{Np_c}{2} \nabla \cdot \vec{u}_c + \nabla \cdot \vec{q}_c + (\mathbb{P}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_c = \vec{j}' \cdot \vec{E}' + H_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + \frac{1}{2} u_c^2 S_c. \tag{133}$$

El término $\vec{j}' \cdot \vec{E}'$ es la razón de cambio de la energía debido al calentamiento de Joule.

Seguido a esto, se utiliza la definición del tensor de presión cinético (74)

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{Np_c}{2} \right) + \frac{N+2}{2} p_c \nabla \cdot \vec{u}_c + \nabla \cdot \vec{q}_c + (\mathbb{M}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_c = \vec{j}' \cdot \vec{E}' + H_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + \frac{1}{2} u_c^2 S_c, \tag{134}$$

y, por medio de la ley de Ohm $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u}_c \times \vec{B} = \eta \vec{j}$, donde η es la resistividad de un conductor óhmico, resulta la expresión buscada (36)

$$\begin{aligned} \frac{N D p_c}{2 D t} + \frac{N+2}{2} p_c \nabla \cdot \vec{u}_c &= -(\mathbb{M}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_c - \nabla \cdot \vec{q}_c \\ -\vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + H_c + \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \eta j^2. \end{aligned} \quad (135)$$

Fluido neutro

Para el caso del fluido neutro, se parte desde la ecuación general utilizada previamente para el fluido cargado (122), donde se define el subíndice $\alpha = n$ y se utiliza la fuerza

$$\vec{F}_n = \rho_{mn} \vec{g}. \quad (136)$$

Por lo tanto, la potencia se desarrolla como sigue

$$n_n \langle \vec{F}_n \cdot \vec{u}_n \rangle_n = n_n m_n \langle \vec{g} \cdot \vec{u}_n \rangle = \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g}. \quad (137)$$

y así, se obtiene el resultado

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N p_n}{2} + \frac{1}{2} \rho_{mc} u_n^2 \right) = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{N p_n}{2} + \frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \right) \vec{u}_n + \mathbb{P}_n \cdot \vec{u}_n + \vec{q}_c \right] - \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} = H_n, \quad (138)$$

que al igual que en el caso anterior, se reescribe como

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Np_n}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{Np_n}{2} \vec{u}_n \right) + \frac{1}{2} u_n^2 \left[\frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n) \right] \\ & + \vec{u}_n \cdot \left(\rho_{mn} \frac{D\vec{u}_n}{Dt} \right) + \nabla \cdot \vec{q}_n + \nabla \cdot (\mathbb{P}_n \cdot \vec{u}_n) - \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} = H_n. \end{aligned} \quad (139)$$

Por último, por medio de la ecuación de continuidad (37) y la ecuación de momento (38), se llega a la expresión

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} \left(\frac{Np_n}{2} \right) + \frac{Np_n}{2} \nabla \cdot \vec{u}_n + \nabla \cdot \vec{q}_n + (\mathbb{P}_n \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_n \\ & = H_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n, \end{aligned} \quad (140)$$

la cual, al expresar el tensor de presión cinético según la definición (74), se convierte en la expresión buscada (39)

$$\begin{aligned} & \frac{N D p_n}{2 D t} + \frac{N+2}{2} p_n \nabla \cdot \vec{u}_n = -(\mathbb{M}_n \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_n - \nabla \cdot \vec{q}_n \\ & - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + H_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n. \end{aligned} \quad (141)$$

Ecuaciones conservativas

Conservación de la masa

En el caso de la conservación de la masa, las ecuaciones ya se encuentran escritas de forma conservativa, tanto para el fluido cargado, como para el fluido neutro.

Fluido cargado

$$\frac{\partial \rho_{mc}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c) = S_c. \quad (142)$$

Fluido neutro

$$\frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n) = S_n. \quad (143)$$

Conservación del momento

Fluido cargado Para obtener la forma conservativa de la ecuación de momento, se parte de la expresión encontrada previamente, donde se utiliza la definición de la derivada Lagrangiana

$$\rho_{mc} [\partial_t \vec{u}_c + (\vec{u}_c \cdot \nabla) \vec{u}_c] = \vec{j} \times \vec{B} + \rho_{mc} \vec{g} - \nabla \cdot \mathbb{P}_c + \vec{R}_c - \vec{u}_c S_c. \quad (144)$$

Para obtener el resultado buscado, se analizará cada término de esta expresión por separado.

Entonces, en primer lugar, se tiene

$$\rho_{mc} \partial_t \vec{u}_c = \partial_t (\rho_{mc} \vec{u}_c) - \vec{u}_c \partial_t \rho_{mc}, \quad (145)$$

que al usar la conservación de la masa (40), queda de la forma

$$\rho_{mc} \partial_t \vec{u}_c = \partial_t (\rho_{mc} \vec{u}_c) - \vec{u}_c S_c + \vec{u}_c \nabla \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c). \quad (146)$$

Por otra parte, para el segundo término de (144), se desarrolla

$$\nabla \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c \vec{u}_c) = \vec{u}_c \nabla \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c) + (\rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \nabla) \vec{u}_c, \quad (147)$$

de donde se puede despejar el término

$$\rho_{mc} (\vec{u}_c \cdot \nabla) \vec{u}_c = \nabla \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c \vec{u}_c) - \vec{u}_c \nabla \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c). \quad (148)$$

Por lo tanto, al juntar las expresiones (146) y (148), para posteriormente simplificar, se obtiene

$$\partial_t (\rho_{mc} \vec{u}_c) + \nabla \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_c \vec{u}_c) = \vec{j} \times \vec{B} + \rho_{mc} \vec{g} - \nabla \cdot \mathbb{P}_c + \vec{R}_c. \quad (149)$$

Posteriormente, si se tiene en cuenta la Ley de Ampère en la aproximación de bajas frecuencias

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}, \quad (150)$$

el término asociado con densidad de fuerza magnética se puede reescribir en componentes tensoriales como

$$\left(\vec{j} \times \vec{B}\right)_i = \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{jki} \varepsilon_{jlm} B_k \partial_l B_m, \quad (151)$$

lo cual, al aplicar propiedades del levi-civita, resulta

$$\left(\vec{j} \times \vec{B}\right)_i = \frac{1}{\mu_0} B_k \partial_l B_m (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}), \quad (152)$$

$$= \frac{1}{\mu_0} (\delta_{kl} \delta_{im} B_k \partial_l B_m - \delta_{km} \delta_{il} B_k \partial_l B_m), \quad (153)$$

$$= \frac{1}{\mu_0} (B_l \partial_l B_i - B_m \partial_i B_m). \quad (154)$$

Para el primer término de (154), se utiliza la regla de Leibniz

$$\partial_l (B_l B_i) = B_l \partial_l B_i + B_i \partial_l B_l. \quad (155)$$

Además, al considerar la ley solenoidal $\partial_l B_l = 0$, se tiene

$$\partial_l (B_l B_i) = B_l \partial_l B_i. \quad (156)$$

Respecto al segundo término, se reescribe como

$$B_m \partial_i B_m = \partial_m \left(\delta_{im} \frac{B^2}{2} \right). \quad (157)$$

Por lo tanto, al juntar ambos términos, se obtiene

$$\left(\vec{j} \times \vec{B} \right)_i = \frac{1}{\mu_0} \partial_l \left(B_l B_i - \delta_{il} \frac{B^2}{2} \right), \quad (158)$$

que escrito de forma tensorial es

$$\left(\vec{j} \times \vec{B} \right) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left(\vec{B} \vec{B} - \frac{B^2}{2} \mathbb{I} \right). \quad (159)$$

Estos resultados se reemplazan en la ecuación de momento (149)

$$\partial_t (\rho_{mc} \vec{u}_c) + \nabla \cdot \left[\rho_{mc} \vec{u}_c \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \vec{B} + \left(p_c + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbb{I} + \mathbb{M} \right] = \rho_{mc} \vec{g} + \vec{R}_c, \quad (160)$$

donde se toma como definición de presión escalar total p_{tc} a la cantidad

$$p_{tc} = p_c + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (161)$$

por lo tanto

$$\partial_t (\rho_{mc} \vec{u}_c) + \nabla \cdot \left[\rho_{mc} \vec{u}_c \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \vec{B} + p_{tc} \mathbb{I} + \mathbb{M} \right] = \rho_q \vec{E} + \rho_{mc} \vec{g} + \vec{R}_c, \quad (162)$$

se obtiene la expresión buscada (41).

Fluido neutro

Para el fluido neutro, se inicia desde la ecuación encontrada previamente (38) y se utiliza la definición de derivada Lagrangiana, es decir

$$\rho_{mn} \left[\frac{\partial \vec{u}_n}{\partial t} + (\vec{u}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n \right] = \rho_{mn} \vec{g} - \nabla \cdot \mathbb{P}_n + \vec{R}_n - \vec{u}_n S_n. \quad (163)$$

Para el primer término se utiliza la regla de Leibniz y se obtiene

$$\rho_{mn} \partial_t \vec{u}_n = \partial_t (\rho_{mn} \vec{u}_n) - \vec{u}_n \partial_t \rho_{mn}, \quad (164)$$

que por medio de la conservación de la masa (43), se convierte en

$$\rho_{mn} \partial_t \vec{u}_n = \partial_t (\rho_{mn} \vec{u}_n) + \vec{u}_n [\nabla \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n)] - \vec{u}_n S_n. \quad (165)$$

Por otra parte, para el segundo término se usó también la regla de Leibniz de la siguiente forma

$$\nabla \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n \vec{u}_n) = \vec{u}_n [\nabla \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n)] + (\rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n. \quad (166)$$

Así, al reemplazar los dos términos en la ecuación de momento (163), da como resultado

$$\partial_t (\rho_{mn} \vec{u}_n) + \nabla \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n \vec{u}_n) = \rho_{mn} \vec{g} - \nabla \cdot \mathbb{P}_n + \vec{R}_n, \quad (167)$$

que se puede reescribir como la ecuación que buscamos en forma conservativa (44)

$$\partial_t (\rho_{mn} \vec{u}_n) + \nabla \cdot [\rho_{mn} \vec{u}_n \vec{u}_n + \mathbb{P}_n] = \rho_{mn} \vec{g} + \vec{R}_n. \quad (168)$$

Conservación de la energía

Fluido cargado

La energía total del fluido cargado está dada por

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} + \rho_{mc} e_c. \quad (169)$$

Entonces, para encontrar la ecuación buscada, se analiza la variación temporal de esta energía (169). Así, para obtener el primer término, se parte desde la ecuación de momento (35) y se multiplica por \vec{u}_c

$$\rho_{mc} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_c^2 \right) = -\vec{j} \cdot (\vec{u}_c \times \vec{B}) + \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} - \vec{u}_c \cdot (\nabla \cdot \mathbb{P}_c) + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - u_c^2 S_c. \quad (170)$$

Para llegar a este resultado, se acomodó el primer término teniendo en cuenta que $\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_c^2 \right) = \vec{u}_c \cdot \frac{D}{Dt} (\vec{u}_c)$ y la identidad vectorial $\vec{u}_c \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) = -\vec{j} \cdot (\vec{u}_c \times \vec{B})$. Ahora, el término asociado con el tensor de presión se puede reescribir, teniendo en cuenta que

$$\nabla \cdot (\mathbb{P}_c \cdot \vec{u}_c) = \vec{u}_c \cdot (\nabla \cdot \mathbb{P}_c) + (\mathbb{P}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_c. \quad (171)$$

Posteriormente, se despeja el término requerido, se reemplaza en la ecuación (170) y, para el primer término de dicha expresión se utiliza la regla de Leibniz de forma similar al desarrollo (171), lo que resulta en

$$\begin{aligned} D_t \left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \right) - \frac{1}{2} u_c^2 D_t \rho_{mc} &= -\vec{j} \cdot (\vec{u}_c \times \vec{B}) + \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} \\ &\quad - \nabla \cdot (\mathbb{P}_c \cdot \vec{u}_c) + (\mathbb{P}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_c + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - u_c^2 S_c. \end{aligned} \quad (172)$$

A continuación, se utiliza la conservación de la masa (40) para el segundo término de (172)

$$\begin{aligned}
D_t \left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \right) - \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \frac{1}{2} u_c^2 \rho_{mc} \nabla \cdot \vec{u}_c = -\vec{j} \cdot (\vec{u}_c \times \vec{B}) + \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} \\
- \nabla \cdot (\mathbb{P}_c \cdot \vec{u}_c) + (\mathbb{P}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_c + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - u_c^2 S_c.
\end{aligned} \tag{173}$$

Para el término en el que aparece la divergencia del campo de velocidades, se tiene que

$$\rho_{mc} u_c^2 \nabla \cdot \vec{u}_c = \nabla \cdot (\rho_{mc} u_c^2 \vec{u}_c) - (\vec{u}_c \cdot \nabla) (\rho_{mc} u_c^2), \tag{174}$$

y para el término asociado con la densidad de corriente, se considera la ley de Ohm

$$\vec{j} = \sigma_0 (\vec{E} + \vec{u}_c \times \vec{B}), \tag{175}$$

de donde se despeja

$$\vec{u}_c \times \vec{B} = \eta \vec{j} - \vec{E}, \tag{176}$$

siendo $\eta = 1/\sigma$.

De tal forma que al reemplazar los resultados en (173), expandir la derivada Lagrangiana y simplificar, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \right) = & -\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \mathbb{I} + \mathbb{P}_c \right) \cdot \vec{u}_c \right] + \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} + \vec{j} \cdot \vec{E} \\ & - \eta j^2 + p_c \nabla \cdot \vec{u}_c + (\mathbb{M} \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_c + \rho_q \vec{u}_c \cdot \vec{E} + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \frac{1}{2} u_c^2 S_c. \end{aligned} \quad (177)$$

Por otra parte, para el término que representa la densidad de energía magnética en (169) se utiliza la ley de Faraday

$$\partial_t \vec{B} = -\nabla \times \vec{E}, \quad (178)$$

la cual se multiplica por \vec{B}

$$\vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} = -\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}), \quad (179)$$

$$\partial_t \left(\frac{B^2}{2} \right) = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}). \quad (180)$$

Posteriormente, se considera la ley de Ampère en una aproximación de bajas frecuencias

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}), \quad (181)$$

con lo que la expresión (180) se convierte en

$$\partial_t \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\nabla \cdot \left[\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right] - \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (182)$$

Por último, para la variación del término que corresponde a la densidad de energía interna específica en (169), se tiene en cuenta que dicha energía se relaciona con la densidad de masa y la presión por medio de la ecuación de estado para un gas ideal

$$p_n = (\gamma - 1)\rho_{mn}e_n. \quad (183)$$

Además, es necesario reescribir la ecuación encontrada para la energía (36) en términos del índice adiabático γ , el cual se relaciona con el número de grados de libertad N mediante la expresión

$$\gamma = \frac{N + 2}{N}, \quad (184)$$

por lo tanto, al reorganizar mediante álgebra, se obtiene

$$\frac{1}{\gamma - 1} = \frac{N}{2}, \quad (185)$$

y

$$\frac{N + 2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}. \quad (186)$$

Entonces, el resultado obtenido para dicha expresión es

$$\begin{aligned} \frac{Dp_c}{Dt} + \gamma p_c \nabla \cdot \vec{u}_c &= (\gamma - 1) [-(\mathbb{M}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_c - \nabla \cdot \vec{q}_c \\ &\quad - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + H_c + \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \eta j^2]. \end{aligned} \quad (187)$$

Posteriormente, se reescribe nuevamente la expresión, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} D_t(\rho_{mc} e_c) = D_t \left(\frac{p_c}{\gamma - 1} \right) &= \frac{1}{\gamma - 1} \left[-\gamma p_c \nabla \cdot \vec{u}_c + (\gamma - 1) \left(\frac{1}{2} u_c^2 S_c \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \nabla \cdot \vec{q}_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + H_c - (\mathbb{M}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_c + \eta j^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (188)$$

Posteriormente, se expande la derivada Lagrangiana, se utiliza la regla de Leibniz y la ecuación de estado (183) para llegar a

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_{mc} e_c) &= -\nabla(\rho_{mc} e_c \vec{u}_c) - p_c \nabla \cdot \vec{u}_c + \eta j^2 + H_c \\ &\quad - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + \frac{1}{2} u_c^2 S_c - \nabla \cdot \vec{q}_c - (\mathbb{M}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_c. \end{aligned} \quad (189)$$

Finalmente, al juntar los tres términos encontrado (177), (182) y (189), resulta la expresión
(190)

$$\begin{aligned} \partial_t E_c = \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} + \rho_{mc} e_c \right) = -\nabla \cdot \left[\left(\left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 + \rho_{mc} e_c \right) \mathbb{I} + \mathbb{P}_c \right) \cdot \vec{u}_c \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} + \vec{q}_c \right] + \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} + \rho_q \vec{u}_c \cdot \vec{E} + H_c, \end{aligned} \quad (190)$$

Fluido neutro

Para el fluido neutro, la energía total se define sin tener en cuenta la densidad de energía magnética, puesto que el fluido no interacciona ni con el campo eléctrico ni magnético, es decir

$$E_n = \frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 + \rho_{mn} e_n. \quad (191)$$

El procedimiento que se realiza para encontrar la ecuación de forma conservativa es idéntico al del fluido cargado, la única diferencia es que no se encuentran términos asociados con la densidad de corriente ni con el campo eléctrico o magnético. Por lo tanto, el cambio temporal del primer término de la energía (191), encontrado a partir de la ecuación de momento (38), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \right) = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \mathbb{I} + \mathbb{P}_n \right) \cdot \vec{u}_n \right] + \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} \\ + p_n \nabla \cdot \vec{u}_n + (\mathbb{M} \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_n + \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n - \frac{1}{2} u_n^2 S_n, \end{aligned} \quad (192)$$

(nótese la similitud con la expresión (177)). Por otra parte, el segundo término, mediante el

mismo procedimiento realizado previamente, resulta muy similar a la expresión (189), este es

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_{mn}e_n) = & -\nabla(\rho_{mn}e_n\vec{u}_n) - p_n\nabla\cdot\vec{u}_n + H_n - \vec{u}_n\cdot\vec{R}_n \\ & + \frac{1}{2}\vec{u}_n^2S_n - \nabla\cdot\vec{q}_n - (\mathbb{M}_n\cdot\nabla)\cdot\vec{u}_n. \end{aligned} \quad (193)$$

Por último, se realiza la suma de los dos términos (192) y (193), con lo que se obtiene el resultado final (45)

$$\begin{aligned} \partial_t E_n = \partial_t \left(\frac{1}{2}\rho_{mn}\vec{u}_n^2 + \rho_{mn}e_n \right) = & -\nabla \left[\left(\left(\frac{1}{2}\rho_{mn}\vec{u}_n^2 + \rho_{mn}e_n \right) \mathbb{I} + \mathbb{P}_n \right) \cdot \vec{u}_n + \vec{q}_n \right] \\ & + \rho_{mn}\vec{u}_n\cdot\vec{g} + H_n, \end{aligned} \quad (194)$$