,

EL HIPERESPACIO DE NO BLOQUEADORES Y LA PROPIEDAD DE KELLEY

MAYRA ISABEL FERREIRA ORTIZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA
2022

EL HIPERESPACIO DE NO BLOQUEADORES Y LA PROPIEDAD DE KELLEY

MAYRA ISABEL FERREIRA ORTIZ

Trabajo de Grado para optar al título de
Magíster en Matemáticas

Director
Javier Enrique Camargo García
Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2022

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por permitirme esta oportunidad. También agradezco al profesor Javier Enrique Camargo García por su apoyo, tiempo y dedicación que me brindó para la realización de este trabajo. A mi padre, hermano, amigos y compañeros por el apoyo durante este camino.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

TÍTULO: EL HIPERESPACIO DE NO BLOQUEADORES Y LA PROPIEDAD DE KELLEY [*]

AUTOR: MAYRA ISABEL FERREIRA ORTIZ [**]

PALABRAS CLAVE: NO BLOQUEADORES, CONTINUOS HEREDITARIAMENTE DESCOMPONIBLES, PROPIEDAD DE KELLEY.

DESCRIPCIÓN:

Dados A y B dos compactos de un continuo X, diremos que B no bloquea a A, si la unión de todos los subcontinuos de X que intersectan a A y están contenidos en $X \setminus B$ es un subconjunto denso de X. Si $\mathcal{H} \subseteq 2^X$, denotamos:

- $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{B \in 2^X : B$ bloquea a todo elemento de $\mathcal{H}\};$ y
- $\mathcal{NB}(\mathcal{H}) = \{B \in 2^X : B$ no bloquea a cada $A \in \mathcal{H}, A \cap B = \emptyset\}$.

Como $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{NB}(\mathcal{H})$ son subconjuntos de 2^X, éstos serán espacios métricos con la métrica de Hausdorff, y los llamaremos el hiperespacio de bloqueadores y no bloqueadores de $\mathcal{H}$, respectivamente. En particular, estudiamos este hiperespacio cuando $\mathcal{H}$ es $\mathcal{F}_1(X)$.

Como $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ un espacio métrico, es natural hacernos la siguiente pregunta: ¿bajo cuáles condiciones el hiperespacio $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo? Esta pregunta ya ha sido estudiada por diferentes autores. Revisando los espacios X conocidos tales $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo, observamos que en todos los ejemplos presentados hasta el momento, si X no es una curva cerrada simple, entonces X contiene un número infinito de continuos indescomponibles. Por tanto, planteamos la siguientes pregunta: Sea X un continuo hereditariamente descomponible. ¿Si el hiperespacio $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo entonces X es una curva cerrada simple?

Nuestro trabajo se basa en responder parcialmente a esta pregunta, caracterizamos la curva cerrada simple como el único continuo hereditariamente descomponible con la propiedad de Kelley, tal que

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Ph.D. en Matemáticas.

el hiperespacio de no bloqueadores $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo. También, demostramos que si X es un dendroide, entonces $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ no es un continuo.

ABSTRACT

TITLE: THE HYPERSPACE OF NONBLOCKERS AND THE PROPERTY OF KELLEY *

AUTHOR: MAYRA ISABEL FERREIRA ORTIZ **

KEYWORDS: NONBLOCKERS, HEREDITARILY DECOMPOSABLE CONTINUA, PROPERTY OF KELLEY.

DESCRIPTION:

Given A and B two compacts of a continuum X, we say that B does not block A, if the union of all the subcontinua of X intersecting A and contained in $X \setminus B$ is a dense subset of X. If $\mathcal{H} \subseteq 2^X$, we denote:

- $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{B \in 2^X : B$ blocks each element of $\mathcal{H}\}$; y
- $\mathcal{NB}(\mathcal{H}) = \{B \in 2^X : B$ does not block each element of $A \in \mathcal{H}, A \cap B = \emptyset\}$.

Since $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ and $\mathcal{NB}(\mathcal{H})$ are subsets of 2^X, these will be metric spaces with the Hausdorff metric, and the we will call the hyperspace of nonblockers and blockers of $\mathcal{H}$, respectively. In particular, we study this hyperspace when $\mathcal{H}$ is $\mathcal{F}_1(X)$.

Since $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ is a metric space, it is natural to ask ourselves the following question: under what conditions is the hyperspace $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ a continuum? This question has already been studied by different authors. Reviewing the known X spaces such $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ is a continuum, we observe that in all the examples presented so far, if X is not a simple closed curve, then X contains an infinite number of indecomposable continua. Hence, we rise the following question: Let X be an hereditarily decomposable continuum. If the hyperspace $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ is a continuum then X is a simple closed curve?

Our work is based on partially answering this question, we characterize the simple closed curve as the unique hereditarily decomposable continuum with the property of Kelley X, such that the hyperspace

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Ph.D. en Matemáticas.

of nonblockers $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ is a continuum. Also, we show that if X is a dendroid, then $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ is not a continuum.

1. INTRODUCCIÓN

La Teoría de Continuos es la rama de la topología que estudia los espacios métricos compactos y conexos. Esta teoría surge a finales del siglo XIX con los trabajos de George Cantor donde utiliza por primera vez el término “continuo”, e introduce una primera definición en el contexto de espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, la noción de continuo, se formaliza a comienzos del siglo XX con los trabajos de Fréchet, Borel, Hausdorff, Alexandroff y Urysohn, donde se establece tal y como la usamos actualmente, esto es, un continuo es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Casi simultáneamente, Hausdorff, Borsuk, Ulam y Vietoris, introducen y estudian propiedades topológicas en familias de subconjuntos de un continuo, estas familias son conocidas como hiperespacios de continuos. Nuestro trabajo lo desarrollamos en el contexto de la teoría de continuos y sus hiperespacios.

Los conjuntos bloqueadores fueron introducidos en el artículo “Blockers in hyperspaces” de 2011, por Illanes y Krupski. En este trabajo, además de la definición formal de conjunto bloqueador, se presentan ejemplos, se estudian propiedades y se muestra el comportamiento de los bloqueadores en diversas clases de continuos.

Como es usual, para cada continuo X, 2^X representa el hiperespacio de los cerrados diferentes de vacío dotado con la métrica de Hausdorff. Además, $\mathcal{F}_1(X)$ es la colección de conjuntos con un solo punto de X. Es claro que $\mathcal{F}_1(X)$ es subespacio de 2^X. Dados dos compactos no vacíos A y B de un continuo X, se dice que B bloquea a A, si siempre que definamos una función continua $f\colon [0,1] \to 2^X$ tal que $f(0) = A$ y $f(1) = X$, existe $t < 1$ donde $f(t) \cap B \neq \emptyset$. Si $\mathcal{T} \subseteq 2^X$, denotamos:

- $\mathcal{B}(\mathcal{T}) = \{B \in 2^X : B$ bloquea a todo elemento de $\mathcal{T}\}$; y
- $\mathcal{NB}(\mathcal{T}) = \{B \in 2^X : B$ no bloquea a cada $A \in \mathcal{T}, A \cap B = \emptyset\}$.

Como $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ y $\mathcal{NB}(\mathcal{T})$ son subconjuntos de 2^X, éstos serán espacios métricos con la métrica de Hausdorff, y los llamaremos el hiperespacio de bloqueadores y no bloqueadores de $\mathcal{T}$, respectivamente.

Posteriormente, en 2012, Escobedo, López y Villanueva en su artículo “Nonblockers in hyperspaces”, usan el hiperespacio de no bloqueadores para caracterizar algunos continuos. En particular, muestran que el único continuo localmente conexo para el cual $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo, es la curva cerrada simple. Además, formulan la siguiente pregunta:

Pregunta 1.0.1 *¿Para qué continuo X, el hiperespacio de no bloqueadores $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo?*

En este artículo, los autores muestran que además de la curva cerrada simple, el círculo de pseudoarcos también da respuesta positiva a esta pregunta.

Después en “Continua whose hyperspace of nonblockers of $\mathcal{F}_1(X)$ is a continuum” de 2019, escrito por Camargo, Capulín, Castañeda y Maya, continúan el estudio de esta pregunta mostrando más ejemplos de continuos que responden a esta pregunta. En este artículo ellos plantean la siguiente pregunta: ¿Para cuál continuo Y existe un continuo X tal que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ sea homeomorfo a Y? Esta pregunta fue resuelta en el artículo “The hyperspace of non-blockers of singletons, all the possible examples” por Illanes, donde demostró que para cualquier espacio métrico y compacto Y, existe un continuo X tal que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es homeomorfo a Y.

Los ejemplos conocidos de continuos X tales que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo, a excepción de la curva cerrada simple, contienen un número infinito de continuos indescomponibles. Por tanto, como base de nuestra investigación, planteamos la siguiente pregunta:

Pregunta 1.0.2 *¿Si X es un continuo hereditariamente descomponible y $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo entonces X es la curva cerrada simple?*

El principal objetivo de este trabajo es dar una respuesta parcial a esta pregunta. Demostramos que el único continuo hereditariamente descomponible con la propiedad de Kelley X tal que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo, es la curva cerrada simple.
El trabajo está dividido en tres capítulos cuyos contenidos han sido organizados de la siguiente manera: En el Capítulo 1, Preliminares, se establece la notación básica que será usada a lo largo del trabajo; asimismo, se definen algunos conceptos y resultados de la Teoría de Continuos e Hiperespacios, que son necesarios para el desarrollo del trabajo. En el Capítulo 2, El hiperespacio de no bloqueadores, desenvolvemos el concepto de no bloqueador y su hiperespacio. Mostramos algunos resultados conocidos. En algunos casos aunque estos resultados ya han sido demostrados, se mostrarán pruebas diferentes. Un resultado importante original de este trabajo es mostrar que el hiperespacio de no bloqueadores de un dendroide, no puede ser un continuo. El Capítulo 3, Continuos hereditariamente descomponibles con la propiedad de Kelley, tiene como objetivo principal responder de manera parcial la pregunta que planteamos en el párrafo anterior. Se demostrará, que el único continuo hereditariamente descomponible con la propiedad de Kelley tal que su hiperespacio de no bloqueadores es un continuo, es la curva cerrada simple.

2. PRELIMINARES

El objetivo de este capítulo es establecer las notaciones básicas que serán usadas a lo largo de este trabajo. Asimismo, se pretende recordar algunos resultados de la Teoría de continuos que son necesarios para la lectura del trabajo.

La mayoría de los resultados que presentamos en este capítulo son conocidos y sus demostraciones se pueden encontrar en libros de topología general. Por esta razón, no realizaremos muchas de estas demostraciones.

Denotaremos por $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{N}$ a los conjuntos de números reales, complejos y naturales, respectivamente. Dados un espacio métrico X y $A \subseteq X$, (A), (A), Bd(A) y $|A|$ denotan el interior, la clausura, la frontera y la cardinalidad de A, respectivamente. Para $x \in X$ y $r > 0$, definimos $B(x; r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$. Para cada $r > 0$ y cada E subconjunto cerrado y no vacío de X, definimos $\mathcal{N}(r; E) = \{x \in X : d(x, y) < r$ para algún $y \in E\}$.

2.1. CONTINUOS

Iniciamos la sección con la definición formal de continuo. Seguidamente mostraremos varios ejemplos, y finalizamos la sección definiendo diferentes tipos de continuos, cada uno de estos conceptos serán útiles para la comprensión del trabajo.

Definición 2.1.1 *Un continuo es un espacio métrico, compacto y conexo diferente del vacío. Un subcontinuo es un continuo contenido en un espacio métrico.*

Ejemplo 2.1.2 Algunos ejemplos elementales de continuos a tener en cuenta en este trabajo, son los siguientes:

1. *Arco*. Un arco es cualquier espacio homeomorfo a $[0, 1]$. Además, si X es un

arco y $h\colon [0,1] \to X$ es un homeomorfismo, $h(0)$ y $h(1)$ son llamados los *puntos extremos* del arco X.

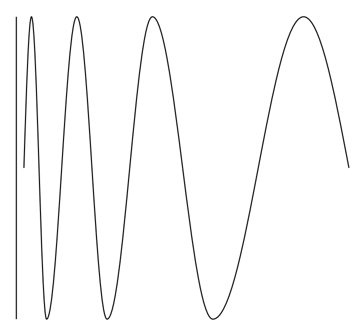
2. *Curva cerrada simple*. Una curva cerrada simple, es un continuo homeomorfo a la circunferencia unitaria $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : ||z|| = 1\}$.

3. *Curva senoidal del topólogo.* La curva senoidal del topólogo, se define por

$$W = (\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \operatorname{sen}(1/x) \text{ y } x \in (0, 1]\})$$

   Este continuo lo representamos en la Figura 1.

Figura 1. Curva senoidal del topólogo.



Los continuos se pueden clasificar según sus propiedades. Los continuos irreducibles, indescomponibles, unicoherentes, arcoconexos, localmente conexos, entre otros, son algunos de ellos.

Definición 2.1.3 *Sea X un continuo. Diremos que X es irreducible si existen $a, b \in X$ tales que si K es un subcontinuo de X y $\{a, b\} \subseteq K$, entonces $X = K$. Además, diremos que X es irreducible entre a y b, donde a y b los llamaremos puntos de irreducibilidad de X.*

Ejemplo 2.1.4 La curva senoidal del topólogo, W, definida en el Ejemplo 2.1.2, es un continuo irreducible con respecto a cualquier punto del conjunto $\{0\} \times [-1, 1]$ y el punto $(1, \operatorname{sen}(1))$.

Sean $p \in (\{0\} \times [-1,1])$ y $q = (1, \operatorname{sen}(1))$, veamos que W es irreducible entre p y q. Sea K un subcontinuo de X tal que $\{p,q\} \subseteq K$. Como K es conexo, se tiene que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \operatorname{sen}(1/x)$ y $x \in (0,1]\} \subseteq K$. Además, como K es compacto, $W \subseteq K$ y $K = W$. De lo anterior, W es irreducible entre p y q. Observemos que como p fue tomado arbitrariamente de $\{0\} \times [-1,1]$, entonces cada punto de $\{0\} \times [-1,1]$ es un punto de irreducibilidad de W.

Definición 2.1.5 *Sean X un continuo y $p \in X$. Definimos la composante $\kappa(p)$ del continuo X como*

$$\kappa(p) = \{x \in X : X \textit{ no es irreducible entre } p \textit{ y } x\}.$$

Si tomamos el arco $[0,1]$, no es difícil ver que $[0,1]$ tiene exactamente tres composantes: $\kappa(0) = [0,1)$, $\kappa(1) = (0,1]$ y $\kappa(\frac{1}{2}) = [0,1]$. De igual manera se puede verificar que $\kappa(z) = S^1$, para cada $z \in S^1$.

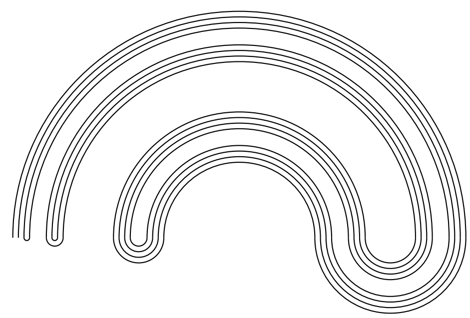
Definición 2.1.6 *Sea X un continuo. Diremos que X es descomponible si existen subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Si X no es descomponible, diremos que X es indescomponible.*

Definición 2.1.7 *Sea X un continuo. X es hereditariamente descomponible si cada subcontinuo no degenerado de X es descomponible.*

Es claro que el arco es descomponible, pues $[0,1]$ puede ser escrito como $[0,1] = [0,\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2},1]$. Además, todo subcontinuo no degenerado es nuevamente un arco; así, el arco es hereditariamente descomponible.
En [Página 204]kura, se pueden ver los detalles de la construcción del continuo de Knaster, ejemplo de continuo indescomponible, continuo que se representa en la Figura 2.

Por otra parte $[0,1]^2$ es un continuo descomponible; pues, es claro que $[0,1]^2 = ([0,\frac{1}{2}]\times[0,1])\cup([\frac{1}{2},1]\times[0,1])$. Como el continuo de Knaster lo podemos encajar en $[0,1]^2$, tenemos que $[0,1]^2$ no es hereditariamente descomponible. En [1], se pueden ver los detalles de la construcción del círculo de pseudoarcos, otro ejemplo de un continuo descomponible, pero no hereditariamente descomponible.

Figura 2. Continuo de Knaster.



Definición 2.1.8 *Sean X un continuo y $x\in X$. Diremos que X es localmente conexo en x, si dado $U\subseteq X$ abierto con $x\in U$, existe $V\subseteq X$ abierto conexo tal que $x\in V\subseteq U$. Un continuo es localmente conexo si lo es en cada uno de sus puntos.*

El arco, la curva cerrada simple y $[0,1]^2$ son ejemplos de continuos localmente conexos. La curva senoidal del topólogo y el continuo de Knaster son ejemplos de continuos que no son localmente conexos.

Definición 2.1.9 *Se dice que un continuo X es unicoherente si para cualesquiera A y B subcontinuos de X tales que $X=A\cup B$, se tiene que $A\cap B$ es conexo.*

Definición 2.1.10 *Un continuo X es hereditariamente unicoherente si cualquiera de sus subcontinuos es unicoherente.*

[1] R. H. BING y F. B JONES. “Another homogeneous plane continuum”. En: *Trans. Amer. Math. Soc* 90 (1959), págs. 171-192.

El siguiente resultado presenta una definición alternativa de los continuos hereditariamente unicoherentes. Su prueba es simple. La presentamos para comodidad del lector.

Proposición 2.1.11 *Sea X un continuo. Entonces, X es hereditariamente unicoherente si, y solo si, $A \cap B$ es conexo, para cualesquiera subcontinuos A y B de X.*

Sean A y B dos subcontinuos de X. Si $A \cap B$ no es conexo, entonces $A \cup B$ es un subcontinuo de X que no es unicoherente. Así, X no es hereditariamente unicoherente. Recíprocamente, si X no es hereditariamente unicoherente, existe un subcontinuo no unicoherente Z de X; esto es, existen A y B subcontinuos de Z tales que $Z = A \cup B$ y $A \cap B$ no es conexo. Así, A y B son subcontinuos de X tales que $A \cap B$ no es conexo.
Es fácil ver que el arco es un continuo unicoherente; más aún, hereditariamente unicoherente. Por otra parte, la curva cerrada simple no es un continuo unicoherente. El continuo $[0,1]^2$ es un continuo unicoherente (vea [2]); pero, no es hereditariamente unicoherente, pues la curva cerrada simple se puede encajar en $[0,1]^2$.

Definición 2.1.12 *Un continuo X es arcoconexo si para cualesquiera dos puntos x_0 y x_1 de X, existe un arco α contenido en X tal que x_0 y x_1 son los puntos extremos de α.*

El arco, la curva cerrada simple y $[0,1]^2$ son ejemplos de continuos arcoconexos. Por otra parte, la curva senoidal del topólogo y el continuo de Knaster son ejemplos de continuos que no son arcoconexos.

Definición 2.1.13 *Sean X un continuo y $p, q \in X$. Diremos que X es aposindético en p con respecto a q si existe un subcontinuo W de X tal que $p \in (W) \subseteq W \subseteq$*

---

[2] J. NOVA. *Unicoherencia en continuos*. Universidad Industrial de Santander: Thesis, 2014.

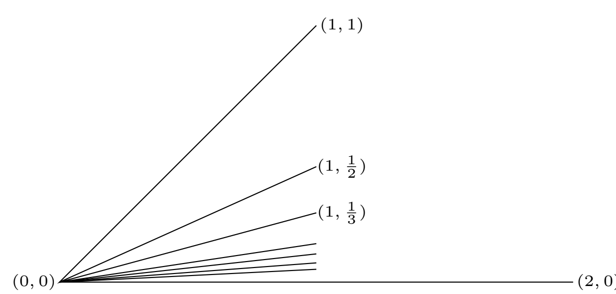
$X \setminus \{q\}$. *El continuo* X *es aposindético en* p *si es aposindético en* p *con respecto a cualquier otro punto. Finalmente,* X *es aposindético si* X *es aposindético en cada uno de sus puntos.*

La curva cerrada simple es un continuo aposindético. En general, todo continuo localmente conexo es aposindético. La curva senoidal del topólogo no es un continuo aposindético, pues, como se puede comprobar fácilmente, no existe un subcontinuo L de W tal que $(0,1) \in (L)$ y $(0,-1) \notin L$.

Definición 2.1.14 *Sean* X *un continuo y* $p \in X$. *Diremos que* X *es semi-localmente conexo en* p, *si para cada subconjunto abierto* U *de* X *tal que* $p \in U$, *existe un subconjunto abierto* V *de* X *tal que* $p \in V \subseteq U$ *y* $X \setminus V$ *tenga un número finito de componentes. Diremos que* X *es semi-localmente conexo, si* X *es semi-localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

El arco es un continuo semi-localmente conexo. Sea $F = \{t(1, 1/n) \mid t \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}\} \cup ([0,2] \times \{0\})$ un continuo, que llamaremos *abanico armónico modificado*. (Vea la Figura 3.)

Figura 3. Abanico Armónico modificado



Es fácil ver que el abanico armónico modificado, no es semi-localmente en $(0,0)$, pues si U es un abierto de X tal que $(0,0) \in U$ y $U \subseteq B((0,0); \frac{1}{2})$, entonces $X \setminus U$ tiene infinitas componentes; por tanto, el abanico armónico modificado no es semi-localmente conexo.

La siguiente proposición muestra que dos conceptos definidos anteriormente son equivalentes. Su prueba se puede ver en [3].

Teorema 2.1.15 *Un continuo X es aposindético si, y sólo si, es semi-localmente conexo.*

Como vimos anteriormente el abanico armónico modificado no es semi-localmente conexo, por tanto no es aposindético.
Por último, recodaremos las definiciones de *subcontinuo terminal* y de un conjunto *conexos por continuos*.

Definición 2.1.16 *Sea X un continuo. Un subcontinuo Z de X es llamado terminal, si para cada Y subcontinuo de X tal que $Y \cap Z \neq \emptyset$, tenemos que $Y \subseteq Z$ o $Z \subseteq Y$.*

Definición 2.1.17 *Sea X un continuo. Un subconjunto Z de X se dice conexo por continuos, si para cualesquiera $x, y \in Z$, existe un subcontinuo L tal que $\{x, y\} \subseteq L \subseteq Z$.*

Nótese que $\{0\} \times [-1, 1]$ es un subcontinuo terminal de la curva senoidal del topólogo W, dada en el Ejemplo 2.1.2. Además, en este mismo ejemplo, $Z = W \setminus \{(0, 1)\}$ es conexo, pero no conexo por continuos.

2.2. DESCOMPOSICIÓN DE CONTINUOS

Para el desarrollo de este trabajo, las descomposiciones de un continuo son fundamentales. Por este hecho, dedicamos esta sección al estudio de propiedades de las descomposiciones de continuos.

---

[3] S. MACÍAS. *Topics on Continua*. Second. -Chan: Springer, 2018.

Definición 2.2.1 *Sea X un continuo. Una descomposición $\mathcal{D}$ de X es una familia de subconjuntos disjuntos dos a dos tal que $\bigcup_{D\in\mathcal{D}} D = X$. Definamos la topología de $\mathcal{D}$, $\tau_{\mathcal{D}}$, como la familia de todos los conjuntos de la forma $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ tales que el conjunto $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ es abierto en X. $(\mathcal{D}, \tau_{\mathcal{D}})$ es llamado espacio descomposición de X o espacio cociente de X.*

Si $\mathcal{D}$ es una descomposición de X, entonces de manera natural definimos la función $\rho : X \to \mathcal{D}$ tal que $\rho(x) = D_x$, donde D_x es el único elemento de $\mathcal{D}$ que contiene a x. La función ρ es continua y es llamada *función descomposición* o *función cociente*.

Existen tres tipos de descomposiciones que definimos a continuación, llamadas: *semicontinua superior, semicontinua inferior* y *descomposición continua*.

Definición 2.2.2 *Sean X un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición de X.*

1. *$\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superior si para cada $D \in \mathcal{D}$ y cada abierto U en X con $D \subseteq U$, existe un abierto V en X, $D \subseteq V$, tal que si $D' \in \mathcal{D}$ y $D' \cap V \neq \emptyset$, entonces $D' \subseteq U$.*

2. *$\mathcal{D}$ es semicontinua inferior si para cada $D \in \mathcal{D}$ y cualesquiera x e y puntos de D y cada abierto U de X tal que $x \in U$, existe un abierto V de X tal que $y \in V$ y si $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \cap U \neq \emptyset$.*

3. *$\mathcal{D}$ es una descomposición continua si $\mathcal{D}$ es semicontinua inferior y superior.*

Definición 2.2.3 *Sean X un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Un abierto U de X es llamado $\mathcal{D}-$saturado si U es unión de elementos de la descomposición $\mathcal{D}$, o equivalentemente, si $U = \rho^{-1}(\rho(U))$, donde $\rho : X \to \mathcal{D}$ es la función descomposición.*

Una equivalencia a la definición de descomposición semicontinua superior es la siguiente. Su prueba se puede ver en [4].

Proposición 2.2.4 *Sean X un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{D}$ es semicontinu superior;*

2. *Si $D \in \mathcal{D}$ y U es abierto en X con $D \subseteq U$, existe un abierto $\mathcal{D}$-saturado V tal que $D \subseteq V \subseteq U$.*

Como vimos anteriormente, si tenemos una descomposición $\mathcal{D}$ de un continuo X, $(\mathcal{D}, \tau_{\mathcal{D}})$ es un espacio topológico; por tanto, es natural preguntarnos cuándo $(\mathcal{D}, \tau_{\mathcal{D}})$ es un continuo. Así, en la siguiente proposición mostramos una condición sobre un descomposición $\mathcal{D}$ de un continuo X, para que su espacio cociente $(\mathcal{D}, \tau_{\mathcal{D}})$, sea un continuo. Las prueba de la siguiente proposición se puede encontrar en [5].

Proposición 2.2.5 *Sean X un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Si $\mathcal{D}$ es semicontinua superior, entonces el espacio cociente $\mathcal{D}$ es un continuo.*

Finalizamos la sección mostrando otra equivalencia a la definición de descomposición semicontinua superior e inferior. Este resultado lo usaremos constantemente en este trabajo. Para este resultado necesitamos la noción de *límite superior de* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y *límite inferior de* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos de un continuo X. Sean X un continuo y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos el *límite inferior de* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y el *límite superior de* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que denotamos respectivamente por $\liminf(A_n)$ y $\limsup(A_n)$, de la siguiente manera:

---

4 J. CAMARGO y E. VILLAMIZAR. *Topología general*. Colombia: Ediciones UIS, 2020.

5 S. NADLER. *Continuum Theory: An Introduction*. Vol. 158. Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong: Monographs, Textbooks in Pure y Applied Math, 1992.

1. $\liminf(A_n) = \{x \in X :$ para todo abierto U tal que $x \in U,$ existe un n_0 tal que $U \cap A_n \neq \emptyset,$ para cada $n \geq n_0\}$.

2. $\limsup(A_n) = \{x \in X :$ para todo abierto U tal que $x \in U,$ se tiene que $U \cap A_n \neq \emptyset,$ para un número infinito de índices$\}$.

Proposición 2.2.6 *Sean X un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición de X tal que D es cerrado para cada $D \in \mathcal{D}$. Entonces, $\mathcal{D}$ es semicontinua superior (semicontinua inferior) si, y sólo si, para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ para algún $x \in X$, tenemos que $\limsup \rho(x_n) \subseteq \rho(x)$ $(\rho(x) \subseteq \liminf \rho(x_n),$ respectivamente).*

Supongamos que $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superior. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, para algún $x \in X$. Supongamos que existe $y \in \limsup \rho(x_n) \setminus \rho(x)$. Como $\mathcal{D}$ es una descomposición $\rho(x) \neq \rho(y)$. Además, como $\rho(y)$ y $\{x\}$ son conjuntos cerrados, existen U y V abiertos, no vacíos y disjuntos de X, tales que $\rho(y) \subseteq U$ y $\{x\} \subseteq V$. Como $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superior, existe un abierto $\mathcal{D}-$saturado W de X, por la Proposición 2.2.4, tal que $\rho(y) \subseteq W \subseteq U$. Por otra parte, note que $x \in \liminf \rho(x_n)$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, $\rho(x_n) \cap V \neq \emptyset$. Observe que no existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $W \cap D \neq \emptyset$ y $V \cap D \neq \emptyset$, pues W es $\mathcal{D}-$saturado. Por tanto, si $n > N$, $\rho(x_n) \cap W = \emptyset$. Lo que contradice que W sea una vecindad de y. Así, $y \in \rho(x)$.

Recíprocamente, sean $D \in \mathcal{D}$ y U un abierto de X tal que $D \subseteq U$. Supongamos que $\mathcal{D}$ no es una descomposición semicontinua superior. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \mathcal{N}(\frac{1}{n}; D)$, existe $E_n \in \mathcal{D}$ tal que $V_n \cap E_n \neq \emptyset$ y $E_n \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Sea $r_n \in E_n \cap V_n$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $r \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = r$. Luego, $\limsup E_n \subseteq \rho(r)$, por hipótesis. Además, $r \in D$, por la construcción de los V_n. Así, $D = \rho(r)$. Por otro lado, como $E_n \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y $X \setminus U$ es cerrado entonces $(\limsup_{n\to\infty} E_n) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Luego, $D \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Una contradicción, pues $D \subseteq U$. Por tanto, $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superior.

Supongamos que $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua inferior. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, para algún $x \in X$. Sean $y \in \rho(x)$ y U un abierto de X tal que $y \in U$. Note que como $\mathcal{D}$ es semicontinua inferior y $x \in \rho(x)$, existe un abierto V tal que $x \in V$ y $\rho(z) \cap U \neq \emptyset$ siempre que $\rho(z) \cap V \neq \emptyset$. Además, como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $x_n \in \rho(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_n) \cap V \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$, y por tanto, $\rho(x_n) \cap U \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$. Como U fue arbitrario, $y \in \liminf(\rho(x_n))$. Así, $\rho(x) \subseteq \liminf(\rho(x_n))$.

Recíprocamente, sean $D \in \mathcal{D}$ y U un abierto de X tal que $D \cap U \neq \emptyset$. Supongamos que $\mathcal{D}$ no es una descomposición semicontinua inferior; luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \mathcal{N}(\frac{1}{n}; D)$, existe $E_n \in \mathcal{D}$ tal que $V_n \cap E_n \neq \emptyset$ y $E_n \subseteq X \setminus U$. Sea $r_n \in E_n \cap V_n$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lim_{n\to\infty} r_n = r$. Note que $r \in D$, por la construcción de los V_n. Luego, $D = \rho(r)$. Además, como $E_n \subseteq X \setminus U$ y $X \setminus U$ es cerrado, entonces $\liminf(\rho(r_n)) \subseteq X \setminus U$. Luego, $D \subseteq X \setminus U$, por hipótesis. Una contradicción. Así, $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua inferior.

2.3. HIPERESPACIOS

En esta sección definiremos los hiperespacios y su respectiva topología.

Definición 2.3.1 *Sea X un continuo. Un hiperespacio de X es una colección específica de subconjuntos cerrados de X con la topología de Vietoris (ver Definición 2.3.2). En particular, trabajaremos con los hiperespacios:*

1. $2^X = \{A \subseteq X$: A *es no vacío y cerrado de* $X\}$.
2. $\mathcal{C}(X) = \{A \in 2^X : A$ *es conexo* $\}$.
3. $\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X : A$ *tiene como máximo* n *puntos*$\}$.
4. $\mathcal{F}_1(X) = \{A \in 2^X : |A| = 1\}$.

En el próximo capítulo, definiremos los hiperespacios $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ y $\mathcal{B}(\mathcal{F}_1(X))$; los cuales constituyen nuestros objetos de esta investigación.
La topología con la que dotaremos los hiperespacios es la *Topología de Vietoris*, la cual definimos a continuación.

Definición 2.3.2 *Sea X un continuo. La topología de Vietoris, denotada por τ_V, es la topología para 2^X generada por la base que consta de todos los subconjuntos de la forma $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$, donde $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son subconjuntos abiertos del continuo X y*

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \right\}.$$

Seguidamente recordaremos la definición de la métrica de Hausdorff, la cual será útil cuando trabajemos con el hiperespacio $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$.

Definición 2.3.3 *Sea (X, d) un continuo. La métrica de Hausdorff para 2^X inducida por d, denotada por $\mathcal{H}$, está definida como:*

$$\mathcal{H}(A, B) = \operatorname{ínf}\{r > 0 : A \subseteq \mathcal{N}(r; B) \text{ y } B \subseteq \mathcal{N}(r; A)\},$$

para cada $A, B \in 2^X$.

La topología generada por la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris tienen una estricta relación cuando X es un continuo. Una prueba del Teorema 2.3.4 se puede encontrar en [6].

Teorema 2.3.4 *Sea X un continuo. Si τ_H denota la topología inducida por la métrica de Hausdorff en 2^X, entonces $\tau_V = \tau_H$.*

---

[6] A. ILLANES y S. NADLER. *Hyperspaces: Fundamentals and recent advances*. Vol. 216. Marcel Dekker, New York y Basel: Monographs, Textbooks in Pure y Applied Math, 1999.

3. EL HIPERESPACIO DE NO BLOQUEADORES

Los conjuntos no bloqueadores fueron estudiadas inicialmente en [7] por Alejandro Illanes y Pawel Krupski, donde definen por primera vez un conjunto bloqueador. Seguidamente, en [8], Raúl Escobedo, María Lopéz y Hugo Villanueva introducen la noción de conjunto no bloqueador y los usan para caracterizar algunos continuos. Dados dos compactos no vacíos A y B de un continuo X, se dice que B no bloquea a A, si $A \cap B = \emptyset$ y la unión de todos los subcontinuos de X que intersecan a A y están contenidos en $X \setminus B$ es densa en X. Si $\mathcal{T} \subseteq 2^X$, definimos $\mathcal{NB}(\mathcal{T}) = \{B \in 2^X : B$ no bloquea a ningún elemento de $\mathcal{T}$ que no toca a $B\}$, este conjunto forma un hiperespacio. Luego, se puede definir diferentes hiperespacios con estos conjuntos bloqueadores, cambiando el subconjunto $\mathcal{T}$ de 2^X. Sin embargo, solo se ha estudiado este hiperespacio cuando $\mathcal{T} = \mathcal{F}_1(X)$. El hiperespacio estudiado para nuestro trabajo, también será $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Este hiperespacio $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ ha sido

---

7 A. ILLANES y P. KRUPSKI. “Blockers in hyperspaces”. En: *Topol. Appl* 158 (2011), págs. 653-659.

8 R. ESCOBEDO, J. LÓPEZ M. de y H. VILLANUEVA. “Nonblockers in hyperspaces”. En: *Topol. Appl* 159 (2012), págs. 3614-3618.

ampliamente estudiado en diferentes artículos como [9], [10], [11], [8], [12], [7], [13], [14] y [15].
En este capítulo abordaremos algunos aspectos generales de los conjuntos no bloqueadores. Mostraremos ejemplos y propiedades de estos conjuntos y su respectivo hiperespacio.

3.1. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

En esta sección introducimos las nociones de: conjuntos bloqueadores y no bloqueadores de un continuo. Seguidamente mostramos algunos ejemplos. Finalmente, mostraremos una familia de continuos tal que su hiperespacio de no bloqueadores es diferente de vacío y una familia de continuos tal que su hiperespacio de no bloqueadores es vacío.

Definición 3.1.1 *Sean $A, B \in 2^X$, diremos que B no bloquea a A si $A \cap B = \emptyset$ y la unión de todos los subcontinuos de X que intersecan a A y están contenidos en $X \setminus B$ es densa en X. De lo contrario, diremos que B bloquea a A.*

---

[9] J. BOBOK, P. PYRIH y V. VEJNAR. "On blockers in continua". En: *Topol. Appl* 202 (2016), págs. 346-355.

[10] J. CAMARGO, D. MAYA y L. ORTIZ. "The hyperspace of nonblockers of $\mathcal{F}_1(X)$". En: *Topol. Appl* 251 (2019), págs. 70-81.

[11] J. CAMARGO y MAYA D. CAPULÍN F. CASTAÑEDA E. "Continua whose hyperspace of nonblockers of $\mathcal{F}_1(X)$ is a continuum". En: *Topol. Appl* 262 (2019), págs. 30-40.

[12] A. ILLANES. "The hyperspace of non-blockers of singletons, all the possible examples". preprint.

[13] S. MACÍAS. "Homogeneous continua and non-blockers". En: *Topology Proc* 55 (2020), págs. 115-121.

[14] C. PICENO. "Nonblockers in homogeneous continua". En: *Topol. Appl* 249 (2018), págs. 127-134.

[15] C. PICENO y H. VILLANUEVA. "Minima Nonblockers and Blocked Sets of a continuum". preprint.

Dados A y B elementos de 2^X, denotaremos:

$$\kappa_{X\setminus B}(A) = \bigcup\{L \in \mathcal{C}(X) : L \cap A \neq \emptyset \text{ y } L \subset X \setminus B\}. \quad (1)$$

Además, como mencionamos en la introducción, si $\mathcal{T} \subseteq 2^X$:

- $\mathcal{B}(\mathcal{T}) = \{B \in 2^X : B$ bloquea a cada elemento de $\mathcal{T}\}$.
- $\mathcal{NB}(\mathcal{T}) = \{B \in 2^X \setminus \{X\} : B$ no bloquea a $A,$ para caada $A \in \mathcal{T}$ y $A \cap B = \emptyset\}$.
- $\mathcal{NB}^*(\mathcal{T}) = 2^X \setminus \mathcal{B}(\mathcal{T})$.

Es importante mencionar que el complemento del hiperespacio de los conjuntos bloqueadores, es el hiperespacio de los conjuntos llamados *no bloqueadores estrella*. Utilizando la notación (1), podemos escribir estos hiperespacios de la siguiente forma:

- $\mathcal{B}(\mathcal{T}) = \{B \in 2^X : \kappa_{X\setminus B}(A)$ no es denso, para cada $A \in \mathcal{T}\}$.
- $\mathcal{NB}(\mathcal{T}) = \{B \in 2^X : \kappa_{X\setminus B}(A)$ es denso, para cada $A \in \mathcal{T},$ con $B \cap A = \emptyset\}$.
- $\mathcal{NB}^*(\mathcal{T}) = \{B \in 2^X : \kappa_{X\setminus B}(A)$ es denso, para algún $A \in \mathcal{T}, B \cap A = \emptyset\}$.

Existen definiciones equivalentes de los conjuntos no bloqueadores. La Proposición 3.1.2, muestra algunas de ellas. Antes de mencionarla, recordaremos la definición de *arco de orden*. Dados A y B dos cerrados no vacíos de un continuo X tales que $A \subsetneq B$, un *arco de orden* de A a B, es una función continua $\alpha\colon [0,1] \to 2^X$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$, y si $t < s$, entonces $\alpha(t) \subsetneq \alpha(s)$.

Proposición 3.1.2 [8] *Sean X un continuo y $B, A \in 2^X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *B no bloquea a A;*

2. *Existe un arco de orden,* $\alpha\colon [0,1] \to 2^X$*, de* A *a* X *tal que* $\alpha(t) \cap B = \emptyset$ *para cada* $0 \leq t < 1$*.*

3. *Si además,* A *es conexo, existe una sucesión de continuos* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* X*, tal que* $A \cap A_n \neq \emptyset$*,* $A_n \cap B = \emptyset$*,* $A_n \subseteq A_{n+1}$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, y* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *es denso en* X*.*

Ejemplo 3.1.3 A continuación, presentamos algunos ejemplos de los conjuntos $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ y $\mathcal{B}(\mathcal{F}_1(X))$ en diferentes continuos.

1. Sea X un arco. Entonces, X es homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$. Es sencillo verificar que

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}_1([0,1])) = \{A \in 2^{[0,1]} : A \cap (0,1) \neq \emptyset\}$$

y

$$\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1([0,1])) = \{\{0\},\{1\},\{0,1\}\}.$$

2. Sea X una curva cerrada simple. Es fácil ver que

$$\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)) = \mathcal{F}_1(X)$$

y

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}_1(X)) = \{B \in 2^X : |B| \geq 2\}$$

3. Sea W la curva senoidal del topólogo. Es sencillo verificar que,

$$\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(W)) = \{\{r\}, J \cup \{r\}, J\},$$

donde $r = (1, \operatorname{sen}(1))$ y $J = \{0\} \times [-1, 1]$ y,

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}_1(W)) = \{A \in 2^W : A \cap \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) : 0 < x < 1\} \neq \emptyset\}.$$

En el siguiente capítulo mostraremos una familia de continuos tal que su hiperespacio de no bloqueadores es diferente del vacío. Asimismo, una familia de continuos tal que su hiperespacio de no bloqueadores es vacío.

3.2. ALGUNAS PROPIEDADES

En esta sección mostraremos algunas propiedades conocidas de los conjuntos no bloqueadores. Aunque algunas de estas se encuentran demostradas en [8] y [14], manteniendo las mismas ideas, mostraremos pruebas diferentes. Finalmente, presentamos algunos resultados sobre el comportamiento de conjuntos no bloqueadores bajo algunas funciones continuas.

Lema 3.2.1 *Sea X un continuo. Si $B \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, entonces $C \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, para cada componente C de B.*

Sean $B \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, C una componente de B y $x \in X \setminus C$. Demostremos que $\kappa_{X \setminus C}(x)$ es densa. Observe que si $x \in X \setminus B$, entonces $\kappa_{X \setminus B}(x) \subseteq \kappa_{X \setminus C}(x)$. Luego, como $B \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, $\kappa_{X \setminus B}(x)$ es densa. Así, $\kappa_{X \setminus C}(x)$ es densa. Supongamos entonces que $x \in B$. Sea D la componente de B que tiene a x. Claramente, $D \subseteq \kappa_{X \setminus C}(x)$, pues C y D son componentes. Como D y C son cerrados y $D \cap C = \emptyset$, existe un abierto U de X tal que $D \subset U$, $(U) \cap C = \emptyset$. Así, $\operatorname{Bd}(U) \cap D = \emptyset$. Note que $\kappa_{X \setminus C}(x) \cap \operatorname{Bd}(U) \neq \emptyset$, por el Teorema de Golpes en la Frontera [5], y la definición de $\kappa_{X \setminus C}(x)$. De lo anterior, $D \subsetneq \kappa_{X \setminus C}(x)$. Sea $y \in \kappa_{X \setminus C}(x) \setminus B$. Sea $L \in \mathcal{C}(X)$ tal que $\{x, y\} \subseteq L \subseteq X \setminus C$. Note que

$$\kappa_{X \setminus B}(y) \cup L \subseteq \kappa_{X \setminus C}(x).$$

Como $\kappa_{X\setminus B}(y)$ es densa, entonces $\kappa_{X\setminus C}(x)$ es densa. Así, en cualquier caso $\kappa_{X\setminus C}(x)$ es densa, y $C \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$.
El siguiente lema muestra en particular que, si B no bloquea a un conexo, entonces B no contiene puntos de corte del continuo.

Lema 3.2.2 *Sean X un continuo, $B \in 2^X$ y $A \in \mathcal{C}(X)$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Si B no bloquea a A, entonces $X \setminus H$ es conexo, para cada $H \subseteq B$.*

Supongamos que existen abiertos disjuntos U y V en X tales que $X \setminus H = U \cup V$. Claramente,

$$\kappa_{X\setminus B}(A) \subseteq X \setminus B \subseteq X \setminus H = U \cup V.$$

Por la conexidad de $\kappa_{X\setminus B}(A)$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\kappa_{X\setminus B}(A) \subseteq U$. Como $\kappa_{X\setminus B}(A)$ es densa, $V = \emptyset$. De lo anterior, $X \setminus H$ es conexo.
La siguiente observación es inmediata de la definición de un conjunto conexo por continuos.

Observación 3.2.3 *Sean X un continuo y $A \in 2^X$. Entonces, $X \setminus A$ es conexo por continuos si, y sólo si, $\kappa_{X\setminus A}(x) = X \setminus A$, para cada $x \in X \setminus A$.*

Lema 3.2.4 *Sean X un continuo, $A \in 2^X$ y $B \in \mathcal{C}(X)$ tal que $A \cap B = \emptyset$. Entonces existe una sucesión de subcontinuos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que $K_n \subseteq K_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\kappa_{X\setminus A}(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.*

Sea $U_n = \mathcal{N}(\frac{1}{n}; A)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como A y B son compactos y $A \cap B = \emptyset$, podemos suponer que $U_n \cap B = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea K_n la componente de $X \setminus U_n$ tal que $B \subseteq K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. No es difícil ver que $K_n \subseteq K_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\kappa_{X\setminus A}(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.
Con la Proposición 2.2.5, el siguiente resultado tiene sentido. En él damos una condición sobre una descomposición $\mathcal{D}$ de X, para que $\mathcal{F}_1(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(\mathcal{D}))$.

Teorema 3.2.5 *Sean X un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición semicontinua superior de X tal que D es un continuo para cada $D \in \mathcal{D}$. Si $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, entonces $\mathcal{F}_1(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(\mathcal{D}))$.*

Sean $A, B \in \mathcal{D}$, $a \in A$ y $b \in B$. Veamos que $\kappa_{\mathcal{D}\setminus\{A\}}(B)$ es densa en $\mathcal{D}$. Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathcal{D}$. Luego, $\bigcup \mathcal{U}$ es un abierto de X (ver Definición 2.2.1). Así, existe un subcontinuo L de X, tal que $b \in L$, $L \cap A = \emptyset$ y $L \cap \bigcup \mathcal{U} \neq \emptyset$, pues $A \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ y $b \notin A$. Como $\mathcal{D}$ es una descomposición, $\rho(A) = A$ y $\rho(L) \cap \rho(A) = \emptyset$, donde ρ es la función descomposición de X a $\mathcal{D}$. Note que $\rho(L)$ es un continuo en $\mathcal{D}$, por la continuidad de ρ. Además, si $z \in L \cap \bigcup \mathcal{U}$, entonces $\rho(z) \in \rho(L) \cap \mathcal{U}$. Así, $\rho(b) = B \subseteq \rho(L)$, $\rho(L) \cap \{A\} = \emptyset$ y $\rho(L) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Por tanto, $\{A\} \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(\mathcal{D}))$. Finalmente, como A fue arbitrario de $\mathcal{F}_1(\mathcal{D})$, tenemos que $\mathcal{F}_1(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(\mathcal{D}))$.
Para finalizar esta sección, estudiaremos el comportamiento de los conjuntos no bloqueadores bajo algunas funciones continuas. A continuación recordamos algunas definiciones de funciones que usaremos en esta sección.

Definición 3.2.6 *Sean X y Y continuos, y $f\colon X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Diremos que:*

1. *f es un homeomorfismo, si f es biyectiva y f^{-1} es continua.*
2. *f es abierta, si $f(U)$ es abierto de Y, para cada abierto U de X.*
3. *f es monótona, si $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$.*
4. *f es atómica, si para cada subcontinuo K de X tal que $f(K)$ es no degenerado, tenemos que $K = f^{-1}(f(K))$.*

Es conocido que si una función f es abierta y monótona, entonces f preserva conjuntos no bloqueadores bajo imagen inversa. El siguiente teorema muestra este resultado. Su prueba se puede encontrar en [8]. Sin embargo, para facilidad del lector la incluimos en el trabajo.

Teorema 3.2.7 *Sea f una función abierta y monótona de un continuo X sobre un continuo Y. Si B es un elemento de 2^Y, entonces, $B \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y))$ si, y sólo si, $f^{-1}(B) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$.*

Sea $B \in 2^Y$. Supongamos que $B \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y))$. Sea $x \in X \setminus f^{-1}(B)$. Luego, existe un arco de orden $\alpha\colon [0,1] \to \mathcal{C}(Y)$ de $\{f(x)\}$ a Y tal que $\alpha(t) \cap B = \emptyset$ para cada $t < 1$, por la Proposición 3.1.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $A_n = f^{-1}(\alpha(1 - \frac{1}{n}))$. Note que A_n es un subcontinuo de X, pues f es monótona. Claramente, $x \in A_n$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ y $A_n \cap f^{-1}(B) = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es denso en X. Sea U un abierto de X. Entonces, $f(U)$ es abierto en Y, pues f es una función abierta. Note que $\bigcup\{\alpha(t) : 0 \leq t < 1\}$ es un conjunto denso en Y. Entonces, existe $t \in [0,1)$ tal que $\alpha(t) \cap f(U) \neq \emptyset$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $t < 1 - \frac{1}{k}$. Como $\alpha(t) \subseteq \alpha(1 - \frac{1}{k})$, tenemos que $f(U) \cap \alpha(1 - \frac{1}{k}) \neq \emptyset$. Luego, $U \cap A_k \neq \emptyset$. Por tanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es denso en X. Es claro que, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \kappa_{X\setminus f^{-1}(B)}(x)$. Por tanto, $\kappa_{X\setminus f^{-1}(B)}(x)$ es densa. Como x fue un punto arbitrario de $X \setminus f^{-1}(B)$, entonces $f^{-1}(B) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$.

Recíprocamente, supongamos que $f^{-1}(B) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Sean $y \in Y \setminus B$ y $x \in f^{-1}(y)$. Note que $x \in X \setminus f^{-1}(B)$. Luego, existe una arco de orden $\alpha\colon [0,1] \to \mathcal{C}(X)$, de $\{x\}$ a X tal que $\alpha(t) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ para cada $t < 1$. Definamos $\beta\colon [0,1] \to \mathcal{C}(Y)$ por $\beta(t) = f \circ \alpha$. Note que β es una función continua. Es claro que $\beta(0) = \{y\}$, $\beta(1) = Y$ y $\beta(t) \cap B = \emptyset$, para cada $t < 1$. Así, $B \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y))$.

Observe que sólo necesitamos que f sea continua y sobreyectiva para que se cumpla la implicación: si $f^{-1}(B) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, entonces $B \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y))$, donde $B \in 2^Y$. La condición de abierta y monótona sobre f son necesarias para la otra implicación. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.8 Consideremos las siguientes funciones:

1. Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ \\ 2(1-x), & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Es fácil ver que f es una función continua y abierta; sin embargo, no es monótona. Por otra parte, note que $\{1\} \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1([0,1]))$. Además, $f^{-1}(\{1\}) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ y $\left\{\frac{1}{2}\right\} \notin \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1([0,1]))$.

2. Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ \\ 1, & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Observe que f es un función continua y monótona, pero no es abierta. Claramente, $\{1\} \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1([0,1]))$. Sin embargo, $f^{-1}(\{1\}) = [\frac{1}{2}, 1]$. Por tanto, $f^{-1}(\{1\}) \notin \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1([0,1]))$.

Después de estudiar diferentes tipos de funciones y el comportamiento de los conjuntos no bloqueadores bajo estas, encontramos una condición sobre f para que los conjuntos no bloqueadores se preserven por imagen directa. A continuación mostramos dicho resultado.

Teorema 3.2.9 *Sea $f\colon X \to Y$ una función atómica. Si $B \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)) \cap \mathcal{C}(X)$, entonces $f(B) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y))$.*

Sea $B \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)) \cap \mathcal{C}(X)$, veamos que $f(B) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y))$. Consideremos dos casos:

1. $|f(B)| > 1$. Sean $y \in Y \setminus f(B)$ y $x \in f^{-1}(y)$. Como $x \notin B$ existe una función continua $\alpha\colon [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = \{x\}$, $\alpha(1) = X$, y $\alpha(t) \cap B = \emptyset$ para cada $t < 1$, por la Proposición 3.1.2. Observe que $B = f^{-1}(f(B))$, pues f es

atómica. Así, $\alpha(t) \cap f^{-1}(f(B)) = \emptyset$ para cada $t < 1$. Luego, $f \circ \alpha\colon [0,1] \to \mathcal{C}(Y)$ es una función continua tal que $(f\circ\alpha)(0) = \{y\}$, $(f\circ\alpha)(1) = Y$ y $f(\alpha(t)) \cap f(B) = \emptyset$, para todo $t < 1$.

2. $f(B)$ es degenerado, esto es, $f(B) = \{p\}$ para algún $p \in Y$. Supongamos que existe $y \in Y \setminus \{p\}$ tal que $\{p\}$ bloquea a $\{y\}$. Sea $x \in f^{-1}(y)$. Note que $x \notin B$, luego existe una función continua $\lambda\colon [0,1] \to \mathcal{C}(X)$ tal que $\lambda(0) = \{x\}$, $\lambda(1) = X$ y $\lambda(t) \cap B = \emptyset$ para todo $t < 1$, por la Proposición 3.1.2. Como $f \circ \lambda\colon [0,1] \to \mathcal{C}(Y)$ es continua tal que $f(\lambda(0)) = \{y\}$, $f(\lambda(1)) = Y$ y $\{p\}$ bloquea a y, entonces existe $t_0 < 1$ tal que $p \in f(\lambda(t_0))$. De lo anterior,

$$f^{-1}(p) \cap \lambda(t_0) \neq \emptyset.$$

Observe que, $\{p, y\} \subseteq f(\lambda(t_0))$. Por otra parte, $B \subseteq f^{-1}(f(\lambda(t_0))) \setminus \lambda(t_0)$ pues $\lambda(t_0) \cap B = \emptyset$ y esto contradice que

$$f^{-1}(f(\lambda(t_0))) = \lambda(t_0),$$

lo cual tenemos, pues f es atómica. Luego, $f(B)$ no es degenerado.

De 1 y 2 concluimos que $f(B) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y))$.

3.3. NO BLOQUEADORES EN DENDROIDES

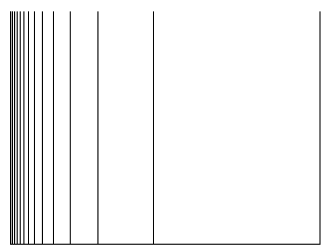
Iniciamos con la definición formal de un *dendroide*. Seguidamente mostraremos ejemplos y definiremos los *puntos finales* en un dendroide. Mostraremos la relación que hay entre los puntos finales de un dendroide y su hiperespacio de no bloqueadores. Concluiremos la sección, demostrando que el hiperespacio de no bloqueadores de un dendroide no puede ser un continuo.

Definición 3.3.1 *Un dendroide es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente.*

El arco y el abanico armónico son ejemplos de dendroides. Una curva cerrada simple o la curva senoidal del topólogo, no son dendroides. A continuación mostramos otro dendroide.

Ejemplo 3.3.2 Sea $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{n}, y \in [0,1]\right\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [0,1]\}$. Nótese que X es un dendroide y se conoce como *el Espacio Peine*. Vea la Figura 4.

Figura 4. Peine



Los siguientes tres teoremas son ampliamente conocidos y útiles para la comprensión de lo que sigue de la sección. La prueba de estos resultados se puede ver en [16].

Teorema 3.3.3 *Sea X es un dendroide. Si Y es un subcontinuo de X, entonces Y es un dendroide.*

Sea Y un subcontinuo de un dendroide X. Sean y_1, y_2 puntos en Y y α un arco en X tal que y_1 y y_2 son sus puntos extremos. Como X es hereditariamente unicoherente, $\alpha \cap Y$ es conexo. Además, $\alpha \cap Y = \alpha$, pues $y_1, y_2 \in Y \cap \alpha$. Así, $\alpha \subseteq Y$. Por tanto, Y es arcoconexo. Claramente, Y es hereditariamente unicoherente. Por tanto, Y es un dendroide.

---

[16] S. MACÍAS. "Sobre dendroides y un poco más". preprint.

Teorema 3.3.4 *Todo dendroide es hereditariamente descomponible.*

Por el Teorema 3.3.3, basta ver que X es descomponible. Supongamos que X es indescomponible. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que estén en distintas composantes [4]. Consideremos el arco α cuyos puntos extremos son x_1 y x_2. Como x_1 y x_2 están en distintas composantes de X y X es indescomponible, entonces $X = \alpha$. Una contradicción. Así, X es descomponible.

Teorema 3.3.5 *Sea $f\colon X \to Y$ una función monótona entre continuos. Si X es un dendroide, entonces Y es un dendroide.*

Sean X un dendroide y $f\colon X \to Y$ una función monótona. Veamos que Y es un dendroide. Supongamos que existen dos subcontinuos K y L de X tales que $K \cap L$ no es conexo. Como f es una función monótona, $f^{-1}(K)$ y $f^{-1}(L)$ son subcontinuos de X. Por otra parte, $f^{-1}(K) \cap f^{-1}(L)$ no es conexa, pues $f^{-1}(K) \cap f^{-1}(L) = f^{-1}(K \cap L)$. Una contradicción. Así, X es hereditariamente unicoherente. Además, como X es arcoconexo y f es sobreyectiva, Y es arcoconexo. De lo anterior, Y es un dendroide.

A continuación definimos punto final en dendroides. Esta noción será de utilidad en este capítulo.

Definición 3.3.6 *Sean X un dendroide y p un punto de X. Diremos que p es un punto final de X, si p es un punto extremo de cualquier arco de X que lo contenga. El conjunto de puntos finales de un dendroide es denotado por (X).*

Del Ejemplo 3.3.2, el conjunto de puntos finales es:

$$\text{End}(X) = \{(1/n, 1) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 1)\}.$$

Definición 3.3.7 *Sean X un dendroide y W un subconjunto de X. Diremos que un subconjunto L de W es una arcocomponente de W, si L es un arcoconexo maximal de W; esto es, si L' es un subconjunto arcoconexo de W y $L \subseteq L'$, entonces $L = L'$.*

El siguiente lema nos muestra que cada punto final de un dendroide está en su hiperespacio de no bloqueadores.

Lema 3.3.8 *Sea X un dendroide. Si $x_0 \in (X)$, entonces $\{x_0\} \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$.*

Sea $x \in X \setminus \{x_0\}$. Mostraremos que $\kappa_{X\setminus\{x_0\}}(x) = X \setminus \{x_0\}$. Claramente,

$$\kappa_{X\setminus\{x_0\}}(x) \subseteq X \setminus \{x_0\}.$$

Si $y \in X \setminus \{x_0\}$, existe un arco α de x a y tal que $\alpha \subseteq X \setminus \{x_0\}$, pues $x_0 \in (X)$. Luego, $y \in \kappa_{X\setminus\{x_0\}}(x)$ y

$$\kappa_{X\setminus\{x_0\}}(x) = X \setminus \{x_0\}.$$

Así, $\kappa_{X\setminus\{x_0\}}(x)$ es denso y $\{x_0\} \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$.

Lema 3.3.9 *Sean X un dendroide y $K \in \mathcal{C}(X)$. Si $X \setminus K$ es diferente de vacío, entonces $X \setminus K$ contiene un punto final de X.*

Sean $p \in X \setminus K$ y L la arcocomponente de $X \setminus K$ tal que $p \in L$. Sea α un arco de p a algún punto w de K tal que $\alpha \cap K = \{w\}$.
Definamos $\mathcal{L} = \{\gamma$ un arco de $X : w \in (\gamma)$ y $p \in \gamma\}$. Ordenamos parcialmente a $\mathcal{L}$ por medio de la inclusión. Sea $\mathcal{C}$ una cadena de elementos de $\mathcal{L}$. Se puede demostrar que $(\mathcal{C})$ es un arco, vea la demostración en [16]. Por tanto, toda cadena de $\mathcal{L}$ tiene cota superior. Así, por el Lema de Kuratowski-Zorn [17], $\mathcal{L}$ tiene elementos maximales. Sea β un maximal de $\mathcal{L}$, β es un arco que tiene a w como uno de sus puntos finales y que también contiene a p. Como X es hereditariamente unicoherente y $p \in X \setminus K$, el otro punto final, r, de β no puede estar en K. Como β es un elemento maximal

---

[17] J. KELLEY. *General Topology*. Vol. 27. Springer-Verlag, New York, Berlin: Graduate Texts in Mathematics, 1991.

de $\mathcal{L}$, β no puede estar contenido en ningún arco de X. En consecuencia, r es un punto final de X.

Teorema 3.3.10 *Sea X un dendroide. Si $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo, entonces $X = \bigcup \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$.*

Como $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo, entonces $\bigcup \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un subcontinuo de X, por [6]. Por tanto, si $\bigcup \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)) \neq X$, existe $x \in (X)$ tal que $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, por el Lema 3.3.9. Lo anterior contradice el Lema 3.3.8. Así, $\bigcup \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)) = X$.

Sea X un dendroide tal que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo. Por el Teorema 3.3.10, para cada $x \in X$, existe $A \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ tal que $x \in A$. Además, por el Lema 3.2.1, para cada $x \in X$, existe un continuo A tal que $x \in A$ y $A \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$.

Definamos

$$\Lambda = \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)) \cap \mathcal{C}(X)$$

Note que Λ es compacto, pues $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ y $\mathcal{C}(X)$ son compactos (vea [6]). Así, con la relación de orden dada por la contenencia $\subseteq$, existen elementos maximales en Λ, que representamos como:

$$\mathcal{D} = \{M_x : M_x \text{ es maximal en } \Lambda \text{ y } x \in M_x\} \tag{2}$$

A continuación, mostraremos que $\mathcal{D}$ es una descomposición. Más aún, demostraremos que $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superior.

Teorema 3.3.11 *Sea X un dendroide tal que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo. Entonces, $\mathcal{D}$, definida en (2), es una descomposición de X.*

Con lo mencionado en el párrafo anterior, sabemos que $\bigcup \Lambda = X$. Además, para cada $A \in \Lambda$, existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $A \subseteq D$. Así, $\bigcup \mathcal{D} = X$.

Sean M_1 y M_2 elementos de $\mathcal{D}$ tales que $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. Supongamos que $M_1 \neq M_2$. Veamos que $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Supongamos que $M_1 \cup M_2 \notin \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$; esto es, por definición de conjunto no bloqueador de $\mathcal{F}_1(X)$, existen $r \in X \setminus (M_1 \cup M_2)$ y un abierto U de X, tales que para todo $L \in \mathcal{C}(X)$ con $r \in L$ y $L \cap U \neq \emptyset$, tenemos que $L \cap (M_1 \cup M_2) \neq \emptyset$. Como $r \in X \setminus M_2$ existe un continuo L tal que $r \in L \subseteq X \setminus M_2$ y $L \cap U \neq \emptyset$. Así, $L \cap M_1 \neq \emptyset$. Por el Teorema 3.3.3, L es un dendroide y por tanto, existe un arco $\gamma \subseteq X \setminus M_2$ de r a algún punto de M_1. De igual forma, existe un arco $\beta \subseteq X \setminus M_1$ de r a algún punto de M_2. Por otra parte, como $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, tenemos que $M_1 \cup M_2$ es un continuo. Nótese que $\gamma \cup \beta$ es también un continuo, donde $(\gamma \cup \beta) \cap (M_1 \cup M_2)$ no es conexo. Contradecimos que X es hereditariamente unicoherente. De lo anterior, $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Una contradicción, pues M_1 y M_2 son elementos maximales. Así, $M_1 = M_2$, y $\mathcal{D}$ es una descomposición.

Teorema 3.3.12 *Sea X un dendroide tal que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo. Entonces, $\mathcal{D}$, definida en (2), es una descomposición semicontinua superior de X.*

Sabemos que $\mathcal{D}$ es una descomposición, por el Teorema 3.3.11. Mostraremos ahora que $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superior. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ para algún $x \in X$ y ρ la función descomposición. Veamos que $\limsup \rho(x_n) \subseteq \rho(x)$. Como $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo y $\rho(x_n) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)) \cap \mathcal{C}(X)$, tenemos que existe $D \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)) \cap \mathcal{C}(X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n) = D$. Claramente, $x \in D$. Luego, por la maximalidad de cada elemento de $\mathcal{D}$, tenemos que $D \subseteq \rho(x)$. Por tanto, $\limsup \rho(x_n) \subseteq \rho(x)$. Así, $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superior, por la Proposición 2.2.6.
El siguiente lema muestra que en un dendroide X, $\mathcal{F}_1(X) \nsubseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$.

Lema 3.3.13 *Sea X un dendroide. Entonces, existe $z \in X$ tal que $\{z\} \notin \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$.*

Sean A y B subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$ y $z \in A \setminus B$ tal que $z \notin (X)$. Entonces, $X \setminus \{z\}$ tiene dos o más arcocomponentes. Por la conexidad de B, tenemos que $B \subseteq L$, para alguna arcocomponente L de $X \setminus \{z\}$. Sea $y \in M$, donde M es otra arcocomponente de $X \setminus \{z\}$ tal que $M \cap L = \emptyset$. Claramente, $\kappa_{X\setminus\{z\}}(y) \subseteq M \subseteq X \setminus B$. Luego, $\kappa_{X\setminus\{z\}}(y)$ no es densa. Por tanto, $\{z\} \notin \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$.

Finalizamos esta sección demostrando que el hiperespacio de no bloqueadores de un dendroide no puede ser un continuo.

Teorema 3.3.14 *Sea X un dendroide. Entonces, $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ no es un continuo.*

Supongamos que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo. Entonces, $\mathcal{D}$ definido en (2), es una descomposición semicontinua superior de X, por el Teorema 3.3.12. Por otra parte, como los elementos de $\mathcal{D}$ son continuos, entonces la función descomposición $\rho : X \to \mathcal{D}$, es monótona. Luego, $\mathcal{D}$ es un dendroide, por el Teorema 3.3.5. Además, $\mathcal{F}_1(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(\mathcal{D}))$, por el Teorema 3.2.5. Lo anterior contradice el Lema 3.3.13. Por lo tanto, $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ no es un continuo.

4. CONTINUOS HEREDITARIAMENTE DESCOMPONIBLES CON LA PROPIEDAD DE KELLEY

Como vimos en el capítulo anterior $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un subespacio topológico de 2^X. Luego, es natural hacer la siguiente pregunta:

Pregunta 4.0.1 *¿Qué condiciones debe cumplir un continuo X para que el hiperespacio $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ sea un continuo?*

En [8], los autores demuestran que si X es localmente conexo, entonces, $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo si, y sólo si, X es una curva cerrada simple. Además, en [8], los autores mostraron que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo cuando X es el círculo de pseudoarcos. En [11], los autores mostraron ejemplos de continuos X tales que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo. Recientemente, A. Illanes demostró en [12], que para cualquier espacio métrico compacto X, existe un continuo Y tal que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y))$ es homeomorfo a X. Revisando los espacios presentados en [8], [11] o [12], observamos que en todos los ejemplos, si X no es una curva cerrada simple y $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo, entonces X contiene un número infinito de continuos indescomponibles. Además, los continuos que tienen la propiedad de Kelley son únicamente la curva cerrada simple y el círculo de pseudoarcos. Por tanto, planteamos las siguientes preguntas:

Pregunta 4.0.2 *Sea X un continuo hereditariamente descomponible. ¿Si el hiperespacio $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo entonces X es una curva cerrada simple?*

Pregunta 4.0.3 *Sea X un continuo con la propiedad de Kelley. ¿Si el hiperespacio $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo entonces X es una curva cerrada simple o el círculo de pseudarcos?*

En este capítulo daremos respuestas parciales a estas preguntas. En el Teorema 4.4.3, caracterizamos la curva cerrada simple como el único continuo hereditariamente descomponible con la propiedad de Kelley, tal que el hiperespacio de no bloqueadores $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo.

4.1. CONTINUOS CON LA PROPIEDAD DE KELLEY

En 1942, J.L.Kelley introduce el concepto de *propiedad de Kelley* para continuos, originalmente llamada *Propiedad 3.2* [18].

Un continuo X se dice que tiene la *propiedad de Kelley*, si para cada punto p de X y cada subcontinuo L de X que contenga a p, existe un $\delta > 0$, tal que si otro punto q de X está a una distancia menor que δ de p, existe un subcontinuo K de X que contenga a q y esté tan cerca como se quiera de L.

Los continuos con la propiedad de Kelley constituyen una familia amplia de continuos; en particular, como veremos en esta sección, los continuos localmente conexos, son ejemplos de continuos con la propiedad de Kelley.

Definición 4.1.1 *Sea X un continuo. Diremos que X tiene la propiedad de Kelley siempre que para cada $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que si $a, b \in X$ con $d(a,b) < \delta$ y $a \in A \in \mathcal{C}(X)$, se tiene que existe $B \in \mathcal{C}(X)$ tal que $b \in B$ y $\mathcal{H}(A,B) < \varepsilon$.*

La siguiente proposición muestra una equivalencia de la definición anterior. No encontramos una prueba en ningún lugar; sin embargo, es un argumento conocido, su demostración no es difícil y la incluimos para facilidad del lector.

Proposición 4.1.2 *Sea X un continuo. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

---

[18] J. KELLEY. “Hyperspaces of a continuum”. En: *Trans. Amer. Math. Soc* 52 (1942), págs. 22-36.

1. *X tiene la propiedad de Kelley.*

2. *Para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ para algún $x \in X$ y para cualquier $A \in \mathcal{C}(X)$ tal que $x \in A$, existe una sucesión de subcontinuos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.*

Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $\lim_{i\to\infty} x_i = x_0$, para algún $x_0 \in X$ y L un subcontinuo de X tal que $x_0 \in L$.

Por la propiedad de Kelley, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $\delta_n > 0$ tal que si $d(x_0, x_i) < \delta_n$, existe un continuo $L_i^{(n)}$ tal que $x_i \in L_i^{(n)}$ y $\mathcal{H}(L, L_i^{(n)}) < \frac{1}{n}$. Como $\lim_{i\to\infty} x_i = x_0$, existe un $N_n \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_0, x_i) < \delta_n$ para todo $i \geq N_n$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\delta_j < \delta_i$ y $n_i < n_j$, para cada $i < j$.
Para cada $i \in \mathbb{N}$, definamos:

$$L_i = \begin{cases} X, & \text{si } i < N_1; \\ L_i^{(n)}, & \text{si } N_n \leq i < N_{n+1}. \end{cases}$$

Claramente, $x_n \in L_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} L_n = L$, por la construcción de la sucesión.

Recíprocamente, sean $\varepsilon > 0$, $p \in X$ y L un subcontinuo de X tal que $p \in L$. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B(p; \frac{1}{n})$ tal que $\mathcal{H}(L, R) \geq \varepsilon$, para todo subcontinuo R de X tal que $x_n \in R$. Claramente, $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ y no existe una sucesión de subcontinuos $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in L_n$ y $\lim_{n\to\infty} L_n = L$. Una contradicción. Luego, existe $\delta > 0$ tal que si $d(p, q) < \delta$, entonces podemos encontrar $K \in \mathcal{C}(X)$ tal que $q \in K$ y $\mathcal{H}(L, K) < \varepsilon$.
El siguiente teorema muestra una familia de continuos con la propiedad de Kelley.

Teorema 4.1.3 *Sea X un continuo. Si X es localmente conexo, entonces X tiene la propiedad de Kelley.*

Sean $\varepsilon > 0$, $p \in X$ y L un subcontinuo de X tal que $p \in L$. Como X es localmente conexo, para $B(p; \frac{\varepsilon}{4})$ existe un subconjunto abierto conexo U de X tal que $p \in U \subseteq B(x; \frac{\varepsilon}{4})$. Además, como U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(p; \delta) \subseteq U$. Así, si $d(p, q) < \delta$, $q \in U$. Definamos $K = L\cup(U)$. Observe que K es un continuo, $q \in K$ y $\mathcal{H}(L, K) < \varepsilon$, pues diám$(U) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, X tiene la propiedad de Kelley.

Consideremos el abanico armónico modificado (vea la Figura 3). Si tomamos $L = [1, 2] \times \{0\}$, $(1, 0) \in L$ y la sucesión $((1, \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $\lim_{n\to\infty}(1, \frac{1}{n}) = (1, 0)$ y fácilmente podemos verificar que, no existe una sucesión de continuos $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(1, \frac{1}{n}) \in L_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} L_n = L$. Por lo tanto, F no tiene la propiedad de Kelley, aplicando la Proposición 4.1.2.

A continuación mostramos una propiedad importante que cumplen los continuos con la propiedad de Kelley. Su demostración la tomamos de [3].

Teorema 4.1.4 *Sea X un continuo con la propiedad de Kelley. Si A es un cerrado de X y K un subcontinuo propio de X tal que $(K) \neq \emptyset$ y $K \cap A = \emptyset$, entonces existe un subcontinuo W de X tal que $K \subseteq (W) \subseteq W$ y $W \cap A = \emptyset$.*

Sean $x \in (K)$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B(x; \varepsilon) \subseteq K$ y $(\mathcal{N}(\varepsilon; K)) \cap A = \emptyset$. Como X tiene la propiedad de Kelley, existe $\delta > 0$ que satisface la propiedad. Supongamos que $\delta < \varepsilon$. Si $y \in X$ y $d(y, z) < \delta$ para algún $z \in K$, entonces existe un subcontinuo W_y de X tal que $y \in W_y$ y $\mathcal{H}(K, W_y) < \varepsilon$. Note que $W_y \cap B(x; \varepsilon) \neq \emptyset$ y $W_y \cap K \neq \emptyset$. Sea $W = (\bigcup\{W_y : y \in \mathcal{N}(\delta; k)\})$. Claramente, W es un continuo y $\mathcal{N}(\delta; K) \subseteq W \subseteq (\mathcal{N}(\varepsilon; K))$. Así, $K \subseteq (W) \subseteq W$ y $W \cap A = \emptyset$.

Existen continuos tales que su hiperespacio de no bloqueadores es diferente del vacío. Los continuos con la propiedad de Kelley cumplen esta propiedad.

Proposición 4.1.5 *Sea X un continuo descomponible. Si X tiene la propiedad de Kelley (Definición 4.1.1), entonces $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)) \neq \emptyset$.*

Sean M y N subcontinuos propios de X tales que $X = M \cup N$. Definamos $L_1 = M$. Claramente, $(L_1) \neq \emptyset$. Por el Teorema 4.1.4, existe un subcontinuo propio R_1 de X tal que $L_1 \subseteq (R_1)$. Sea L_2 un subcontinuo propio de X tal que $R_1 \subseteq L_2$ y $\mathcal{H}(X, L_2) < \frac{1}{2}$ [6]. Observe que $L_1 \subseteq (L_2)$. Inductivamente, podemos construir una sucesión creciente de subcontinuos $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que $L_n \subseteq (L_{n+1})$, $L_n \neq X$ y $\mathcal{H}(L_n, X) < \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus (L_n))$. Como $(L_n) \subseteq (L_{n+1})$, $X \setminus (L_{n+1}) \subseteq X \setminus (L_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, $X \setminus (L_n) \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, A es un subconjunto compacto no vacío de X. Note que $X \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(L_n)$ y como $(L_n) \subseteq L_{n+1}$, $X \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$. Por tanto, $X \setminus A$ es denso, pues $\mathcal{H}(L_n, X) < \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $A \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)$.

Existen continuos tales que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)) = \emptyset$. A continuación mostramos una familia de continuos que cumplen esta condición.

Proposición 4.1.6 *Sea X un continuo. Si X es hereditariamente indescomponible, entonces $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)) = \emptyset$.*

Supongamos que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)) \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Note que por el Lema 3.2.1, podemos suponer que $A \in \mathcal{C}(X)$. Sea K un subcontinuo propio de X, tal que $A \subsetneq K$, y tomemos $p \in K \setminus A$. Como X es hereditariamente indescomponible, entonces $\kappa_{X\setminus A}(p) \subsetneq K$ (ver [6]) y por tanto, $\kappa_{X\setminus A}(p)$ no es densa en X. Lo que contradice que $A \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Así, $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)) = \emptyset$.

Con el siguiente ejemplo mostramos que el recíproco de la proposición anterior no es cierto.

Ejemplo 4.1.7 Existe un continuo X que contiene un subcontinuo propio descomponible y $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)) = \emptyset$.

Sean X un continuo hereditariamente indescomponible y $p, q \in X$. Definamos

$$\mathcal{D} = \{\{x\} : x \in X \setminus \{p, q\}\} \cup \{p, q\}.$$

Es claro que $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superior. Sean $Y = \mathcal{D}$ y $\rho\colon X \to Y$ la función cociente asociada. Por la Proposición 2.2.5, Y es un continuo. Veamos que Y no es hereditariamente indescomponible. Sean A y B continuos propios no degenerados de X tales que $p \in A$, $q \in B$ y $A \cap B = \emptyset$. Dado que $\rho(A) \cap \rho(B) \neq \emptyset$, tenemos que $\rho(A) \cup \rho(B)$ es un continuo descomponible en Y. Así, Y no es hereditariamente indescomponible. Con un argumento similar al mostrado en la Proposición 4.1.6, no es difícil ver que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y)) = \emptyset$.

4.2. NO BLOQUEADORES MINIMALES

En [14], se introduce la función $\pi : X \to \mathcal{C}(X)$, definida por

$$\pi(x) = \begin{cases} \bigcap\{A \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)) : x \in A\}, & \text{si } x \in \bigcup \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)); \\ X, & \text{si } x \notin \bigcup \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)). \end{cases} \tag{3}$$

Por la Proposición 3.1 y el Teorema 3.3 de [14], π está bien definida y $\pi(x) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ para cada $x \in X$, donde $x \in \bigcup \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Mostramos con el Teorema 4.2.7, que π es una función continua cuando X es un continuo descomponible con la propiedad de Kelley tal que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo, dando una respuesta parcial a la Pregunta 3.6 de [14]. Además, mostramos en el Teorema 4.2.10, que $\{\pi(x) : x \in X\}$ es una descomposición continua de X.

Lema 4.2.1 *Sea X un continuo descomponible con la propiedad de Kelley. Si L es un subcontinuo propio de X, entonces existe $A \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ tal que $A \subseteq X \setminus L$.*

Sean M y N subcontinuos propios de X tales que $X = M \cup N$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $M \cap L \neq \emptyset$ y $M \cup L \neq X$. Sea $L_1 = M \cup L$. Como $(M) \neq \emptyset$, $(L_1) \neq \emptyset$. Por el Teorema 4.1.4, existe un subcontinuo propio R_1 de X tal que $L_1 \subseteq (R_1)$. Sea L_2 un subcontinuo propio de X tal que $R_1 \subseteq L_2$ y $\mathcal{H}(X, L_2) < \frac{1}{2}$[6]. Observe que $L_1 \subseteq (L_2)$. Inductivamente, podemos construir una sucesión creciente de subcontinuos $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que $L_n \subseteq (L_{n+1})$, $L_n \neq X$ y $\mathcal{H}(L_n, X) < \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus (L_n))$. Como $(L_n) \subseteq (L_{n+1})$, $X \setminus (L_{n+1}) \subseteq X \setminus (L_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, $X \setminus (L_n) \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, A es un subconjunto compacto no vacío de X. Note que $X \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(L_n)$ y como $(L_n) \subseteq L_{n+1}$, $X \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$. Por tanto, $X \setminus A$ es denso, pues $\mathcal{H}(L_n, X) < \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $A \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)$ y $A \subseteq X \setminus L$. Con el siguiente teorema, mostramos que $\pi(x) \neq X$ para cada $x \in X$, cuando X es un continuo descomponible con la propiedad de Kelley tal que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo.

Teorema 4.2.2 *Sea X un continuo descomponible con la propiedad de Kelley. Si $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo, entonces $X = \bigcup \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$.*

Como $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo entonces $\bigcup \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo, por [6]. Por tanto, $X = \bigcup \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, por el Lema 4.2.1.

En esta sección usaremos la siguiente notación: para cada $x \in X$,

$$B(x) = \{y \in X : x \text{ bloquea a } y\} = \{y \in X : \mathrm{Cl}(\kappa_{X\setminus\{x\}}(y)) \neq X\}.$$

A continuación enunciamos algunas propiedades de los conjuntos $\pi(x)$ y $B(x)$. Aunque el Lema 4.2.3, la Proposición 4.2.4 y la Proposición 4.2.5 se encuentran demostradas en [15], a continuación presentamos pruebas diferentes.

Lema 4.2.3 *Sea X un continuo. Entonces, $B(x) \subseteq \pi(x)$, para todo $x \in X$.*

Veamos que $X \setminus \pi(x) \subseteq X \setminus B(x)$. Sea $y \in X \setminus \pi(x)$. Luego, existe $A \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ tal que $x \in A$ y $y \notin A$. Por tanto, como $\kappa_{X\setminus A}(y)$ es densa y $\kappa_{X\setminus A}(y) \subseteq \kappa_{X\setminus\{x\}}(y)$, tenemos que $\kappa_{X\setminus\{x\}}(y)$ es densa. Así, $\{x\}$ no bloquea a y. Esto es, $y \in X \setminus B(x)$.

Proposición 4.2.4 *Sean X un continuo y $x \in X$. Si $B(x)$ es cerrado, entonces $B(x) = \pi(x)$.*

Por el Lema 4.2.3, $B(x) \subseteq \pi(x)$. Demostremos que $\pi(x) \subseteq B(x)$. Para ello, veamos que $B(x) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Sea $y \in X \setminus B(x)$, entonces $\kappa_{X\setminus\{x\}}(y)$ es densa. Supongamos que existe $w \in \kappa_{X\setminus\{x\}}(y) \cap B(x)$. Luego, $\kappa_{X\setminus\{x\}}(y) \subseteq \kappa_{X\setminus\{x\}}(w)$. Por tanto, $\kappa_{X\setminus\{x\}}(w)$ es densa. Una contradicción, pues $w \in B(x)$. Así, $B(x)$ no bloquea a y, para ninguna $y \in X \setminus B(x)$. Además, como $B(x)$ es cerrado, entonces $B(x) \in 2^X$. De lo anterior, $B(x) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Como $x \in B(x)$, tenemos que $\pi(x) \subseteq B(x)$.

Proposición 4.2.5 *Sean X un continuo y $x \in X$. Si $A \in \mathcal{C}(X)$ y $A \cap B(x) \neq \emptyset$, entonces $A \subseteq B(x)$ o $x \in A$.*

Supongamos que $A \nsubseteq B(x)$ y $x \notin A$. Entonces para $r \in A \setminus B(x)$, tenemos que $\kappa_{X\setminus\{x\}}(r)$ es densa. Sea $z \in A \cap B(x)$. Como $x \notin A$, $\kappa_{X\setminus\{x\}}(r) \cup A \subseteq \kappa_{X\setminus\{x\}}(z)$. Por tanto, $\kappa_{X\setminus\{x\}}(z)$ es densa, lo que contradice que $z \in B(x)$. Así, $A \subseteq B(x)$ o $x \in A$.
A continuación mostramos una condición sobre un continuo X, para que el conjunto $B(x)$ sea cerrado, para cada $x \in X$.

Lema 4.2.6 *Sea X un continuo descomponible. Si X tiene la propiedad de Kelley, entonces x bloquea cada punto de $\pi(x)$ para cada $x \in X$. Por tanto, $\pi(x) \subseteq B(x)$ y $\pi(x) = B(x)$ para cada $x \in X$.*

Veamos que $B(x)$ es cerrado. Sea $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $B(x)$ tal que $\lim_{n\to\infty} w_n = w$, para algún $w \in X$. Supongamos que $w \notin B(x)$. Luego, existe $L \in \mathcal{C}(X)$ tal que $w \in L$, $x \notin L$ y $L \cap (X \setminus \text{Cl}(B(x))) \neq \emptyset$. Dado que X tiene la propiedad de Kelley, existen $k \in \mathbb{N}$ y $L_k \in \mathcal{C}(X)$ tal que $w_k \in L_k$, $x \notin L_k$ y $L_k \cap (X \setminus \text{Cl}(B(x))) \neq \emptyset$. Como $w_k \in B(x)$, tenemos una contradicción. Así, $B(x)$ es cerrado. Por tanto, por la Proposición 4.2.4, $B(x) = \pi(x)$ y x bloquea cada punto de $\pi(x)$.
El siguiente teorema muestra condiciones sobre un continuo X, para que la función π definida en (3), sea continua. Este resultado da una respuesta parcial a la Pregunta 3.6 de [14]. En el siguiente teorema usaremos el hecho que la topología de 2^X se

puede describir en términos del límite superior y el límite inferior como se muestra en el [6].

Teorema 4.2.7 *Sea X un continuo descomponible con la propiedad de Kelley. Si $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo, entonces π es una función continua.*

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, para algún $x \in X$. Veamos que $\lim_{n\to\infty} \pi(x_n) = \pi(x)$.

1. $\limsup \pi(x_n) \subseteq \pi(x)$. Sea $z \in \limsup \pi(x_n)$. Veamos que $z \in \pi(x)$. Como $\mathcal{C}(X)$ es compacto (vea [6]) y $(\pi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{C}(X)$, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \pi(x_{n_k}) = D$, para algún $D \in \mathcal{C}(X)$. Sea $z_{n_k} \in \pi(x_{n_k})$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z$. Note que $z \in D$. Si $z \notin \pi(x)$, entonces existe un subcontinuo L de X tal que $z \in L$, $L \cap \pi(x) = \emptyset$ y $L \cap (X \setminus D) \neq \emptyset$. Sean $w \in L \cap (X \setminus D)$ y $r > 0$ tales que $B(w;r) \cap \pi(x_{n_k}) = \emptyset$ para $k > N$, para algún $N \in \mathbb{N}$. Como X tiene la propiedad de Kelley, existe una sucesión de subcontinuos $(L_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de X tal que $z_{n_k} \in L_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\lim_{k\to\infty} L_{n_k} = L$. Por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que:

   a. $L_{n_m} \cap (X \setminus \pi(x_{n_m})) \neq \emptyset$. Esto se tiene porque $L_{n_m} \cap B(w;r) \neq \emptyset$ y $B(w;r) \cap \pi(x_{n_m}) = \emptyset$.

   b. $x_{n_m} \notin L_{n_m}$. Si $x_{n_k} \in L_{n_k}$ para infinitos $k \in \mathbb{N}$, entonces $x \in L$. Pero esto contradice que $L \cap \pi(x) = \emptyset$ y $x \in \pi(x)$.

   c. $L_{n_m} \cap \pi(x_{n_m}) \neq \emptyset$. Esto se da porque $z_{n_m} \in L_{n_m}$ y $z_{n_m} \in \pi(x_{n_m})$.

   Luego, a, b y c contradicen que x_{n_m} bloquea cada punto de $\pi(x_{n_m})$ (Vea la Proposición 4.2.6). Por tanto, $z \in \pi(x)$ y $\limsup \pi(x_n) \subseteq \pi(x)$.

2. $\pi(x) \subseteq \liminf \pi(x_n)$. Sea $y \in X \setminus \liminf \pi(x_n)$. Por tanto, existe $r > 0$ y una subsucesión $(\pi(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\pi(x_n))$ tal que $\pi(x_{n_k}) \cap \text{Cl}(B(y;r)) = \emptyset$, para cada $k \in$

$\mathbb{N}$. Como $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es compacto, podemos suponer que $\lim_{k\to\infty} \pi(x_{n_k}) = D$ para algún $D \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Además, $D \in \mathcal{C}(X)$ y $x \in D$. Luego, $\pi(x) \subseteq D$, por (3). Puesto que $\pi(x_{n_k}) \cap \mathrm{Cl}(B(y;r)) = \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$, $D \cap \mathrm{Cl}(B(y;r)) = \emptyset$. Por tanto, $y \in X \setminus D \subseteq X \setminus \pi(x)$.

de 1 y 2, π es continua.

Lema 4.2.8 *Sean X un continuo descomponible con la propiedad de Kelley y $x, y \in X$. Si $\pi(x) \cap \pi(y) \neq \emptyset$, entonces $\pi(x) \subseteq \pi(y)$ o $\pi(y) \subseteq \pi(x)$.*

Por la Proposición 4.2.6, $\pi(x) = B(x)$ para cada $x \in X$. Supongamos que $\pi(x) \setminus \pi(y) \neq \emptyset$. Mostraremos que $\pi(y) \subseteq \pi(x)$. Sea $z \in \pi(x) \setminus \pi(y)$. Entonces, existe $L \in \mathcal{C}(X)$ tal que $z \in L$, $L \cap \pi(y) = \emptyset$ y $L \cap (X \setminus \pi(x)) \neq \emptyset$. Como $\pi(x) = B(x)$, $x \in L$. Note que $\pi(y) \in \mathcal{C}(X)$, $\pi(y) \cap B(x) \neq \emptyset$ y $x \notin \pi(y)$. Por tanto, $\pi(y) \subseteq B(x) = \pi(x)$, por la Proposición 4.2.5.
Sea

$$\mathcal{L} = \{\pi(x) : x \in X\}.$$

Note que $\mathcal{L} = \pi(X)$. Por tanto, $\mathcal{L}$ es un subcontinuo de $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Como $\mathcal{L}$ es compacto, con la relación de orden dada por la contenencia $\subseteq$, existen elementos maximales y minimales en $\mathcal{L}$, que respresentamos:

$$\mathcal{M} = \{\pi(x) : \pi(x) \text{ es maximal en } \mathcal{L}\} \text{ y } \mathcal{N} = \{\pi(x) : \pi(x) \text{ es minimal en } \mathcal{L}\}.$$

Proposición 4.2.9 *Sea X un continuo descomponible con la propiedad de Kelley tal que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo. Entonces,*

1. *$\mathcal{M}$ es una descomposición semicontinua superior de X.*

2. *$\pi(x)$ es terminal, para cada $\pi(x) \in \mathcal{N}$.*

3. *$\mathcal{N}$ es compacto.*

4. *$\bigcup \mathcal{N}$ es un subcontinuo de X.*

Probemos 1. Si $\pi(x) \in \mathcal{L}$, entonces existe $\pi(z) \in \mathcal{M}$ tal que $\pi(x) \subseteq \pi(z)$. Como $x \in \pi(x)$ para cada $x \in X$, $\bigcup \mathcal{M} = X$. Además, $\mathcal{M}$ es una descomposición, por el Lema 4.2.8. Veamos que $\mathcal{M}$ es semicontinua superior. Sea $\rho : X \to \mathcal{M}$ la función descomposición. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, para algún $x \in X$. Veamos que $\limsup \rho(x_n) \subseteq \rho(x)$. Sea $z \in \limsup \rho(x_n)$. Entonces, existe una subsucesión $(\rho(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\rho(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \rho(x_{n_k}) = D$, para algún $D \in \mathcal{C}(X)$ y $z \in D$. Como $\mathcal{L}$ es compacto, $D = \pi(w)$ para algún $w \in X$. Note que $x \in D$, pues $x_{n_k} \in \pi(x_{n_k}) \subseteq \rho(x_{n_k})$, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Por tanto, $\pi(w) \cap \rho(x) \neq \emptyset$; luego, $\pi(w) \subseteq \rho(x)$. Como $z \in \pi(w)$, $z \in \rho(x)$. Así, $\limsup \rho(x_n) \subseteq \rho(x)$ y $\mathcal{M}$ es una descomposición semicontinua superior, por la Proposición 2.2.6.

Veamos que $\pi(x)$ es terminal, para cada $\pi(x) \in \mathcal{N}$. Como $\pi(x) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, $\pi(y) \subseteq \pi(x)$ para cada $y \in \pi(x)$, por (3). Por tanto, $\pi(y) = \pi(x)$ para cada $\pi(x) \in \mathcal{N}$ y $y \in \pi(x)$. Sea L un subcontinuo de X tal que $\pi(x) \cap L \neq \emptyset$. Supongamos que $\pi(x) \setminus L \neq \emptyset$. Sea $y \in \pi(x) \setminus L$. Como $\pi(x) = \pi(y)$, $\pi(y) \cap L \neq \emptyset$. Sabemos que, $\pi(y) = B(y)$, por la Proposición 4.2.6. Entonces, $L \subseteq \pi(y) = \pi(x)$, por la Proposición 4.2.5. Por tanto, $\pi(x)$ es terminal y la prueba de 2 queda completa.

Veamos 3. Sea $(\pi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{N}$. Como $\mathcal{L}$ es compacto y $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}$, existen una subsucesión $(\pi(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\pi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ y $\pi(z) \in \mathcal{L}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \pi(x_{n_k}) = \pi(z)$. Entonces, existe $\pi(w) \in \mathcal{N}$ tal que $\pi(w) \subseteq \pi(z)$. Supongamos que $\pi(w) \subsetneq \pi(z)$. Sea $p \in \pi(z) \setminus \pi(w)$ y V un subconjunto abierto de X tal que $V \cap ((\cup_{k=1}^{\infty} \pi(x_{n_k})) \cup \pi(z)) = \emptyset$. Como $p \notin \pi(w)$ y $\pi(w) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, existe un subcontinuo L de X tal que $p \in L$, $L \cap \pi(w) = \emptyset$ y $L \cap V \neq \emptyset$. Sea $p_{n_k} \in \pi(x_{n_k})$ para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k\to\infty} p_k = p$. Como X tiene la propiedad de Kelley, existe un subcontinuo L_k, para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $p_k \in L_k$ y $\lim_{k\to\infty} L_k = L$. Por tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $L_i \cap V \neq \emptyset$ para $i > N$. Por 2, $\pi(x_{n_k})$ es terminal para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, $\pi(x_{n_k}) \subseteq L_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\pi(z) \subseteq L$, pero esto contradice que $\pi(w) \subseteq \pi(z)$ y

$\pi(w) \cap L = \emptyset$.

Finalmente probaremos 4. Por [6], $\bigcup \mathcal{N}$ es compacto. Supongamos que $\bigcup \mathcal{N} = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos cerrados, no vacíos y disjuntos de X. Como $\pi(x) \subseteq \bigcup \mathcal{N}$ y $\pi(x) \in \mathcal{C}(X)$ para cada $\pi(x) \in \mathcal{N}$, tenemos que $\pi(x) \subseteq A$ para cada $x \in A$ y $\pi(y) \subseteq B$ para cada $y \in B$. Note que $\mathcal{L}$ es un continuo y $\langle X \setminus B \rangle \cap \mathcal{L}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{L}$. Por tanto, existe una sucesión $(\pi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en $\langle X \setminus B \rangle \cap \mathcal{L}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \pi(x_n) = \pi(x)$ para algún $\pi(x) \in \mathcal{L} \setminus \langle X \setminus B \rangle$. Sea $y \in \pi(x) \cap B$. Observe que $\pi(y) \subseteq B$. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $y_n \in \pi(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Como $\pi(y_n) \subseteq \pi(x_n) \subseteq X \setminus B$, $\pi(y_n) \cap A \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 4.2.7, π es continua y $\lim_{k\to\infty} \pi(y_n) = \pi(y)$. Por tanto, $\pi(y) \cap A \neq \emptyset$. Esto contradice que $\pi(y) \subseteq B$ y $A \cap B = \emptyset$. Así, $\bigcup \mathcal{N}$ es un subcontinuo de X.
El resultado más importante de esta sección es el siguiente.

Teorema 4.2.10 *Sea X un continuo descomponible con la propiedad de Kelley tal que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo. Entonces, $\mathcal{N} = \{\pi(x) : x \in X\}$ y $\mathcal{N}$ es una descomposición continua de X*

Sabemos que $\bigcup \mathcal{N}$ es un continuo, por la Proposición 4.2.9. Supongamos que $\bigcup \mathcal{N} \neq X$. Por el Lema 4.2.1, existe $B \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ tal que $B \cap \bigcup \mathcal{N} = \emptyset$. Note que $\pi(x) \subseteq B$, para cada $x \in B$. Por tanto, existe $\pi(z) \in \mathcal{N}$ tal que $\pi(z) \subseteq B$. Una contradicción. Así, $\bigcup \mathcal{N} = X$. Veamos que $\mathcal{N}$ es una descomposición. Note que si $z \in \pi(x) \cap \pi(y)$, para cualesquiera $\pi(x), \pi(y) \in \mathcal{N}$, entonces $\pi(x) = \pi(z)$ y $\pi(y) = \pi(z)$, por (3) y la definición de $\mathcal{N}$. Por tanto, $\pi(z) = \pi(x) = \pi(y)$. Así, $\mathcal{N} = \mathcal{M} = \mathcal{L}$. Luego, $\mathcal{N}$ es una descomposición continua, por la Proposición 2.2.6 y el Teorema 4.2.7.
Sean $Y = \mathcal{N}$ el espacio cociente y $f\colon X \to Y$ la función cociente. Como $\mathcal{N}$ es una descomposición continua de X y $\pi(x)$ es un continuo, para cada $x \in X$, f es una función abierta y monótona.

Teorema 4.2.11 *Sea X un continuo descomponible con la propiedad de Kelley tal que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo. Sean $Y = \mathcal{N}$ el espacio cociente y $f\colon X \to Y$ la función cociente. Entonces, $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es homeomorfo a $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y))$ y $\mathcal{F}_1(Y) \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y))$.*

Sabemos que $B \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y))$ si, y sólo si, $f^{-1}(B) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, por [8]. Veamos que $f(D) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y))$ para cada $D \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Sean $D \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ y $x \in D$. Por Lema 3.2.1, $D_0 \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ donde D_0 es la componente de D tal que $x \in D$. Por tanto, $\pi(x) \subseteq D_0 \subseteq D$ y $D = \bigcup\{\pi(x) : x \in D\}$. Así, $D = f^{-1}(f(D))$. Luego, $f(D) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y))$, por [8].

Sea $2^f\colon 2^X \to 2^Y$ la función definida por $2^f(A) = f(A)$, para cada $A \in 2^X$. La función 2^f está bien definida y es continua, por [6]. Sea $g\colon \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)) \to \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y))$ definida por $g = 2^f|_{\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))}$. Note que g está bien definida, es sobreyectiva y continua. Veamos que g es inyectiva. Sean $A, B \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ tales que $A \neq B$. Entonces, $f^{-1}(f(A)) \neq f^{-1}(f(B))$. Luego, $f(A) \neq f(B)$ y $g(A) \neq g(B)$. Así, g es una función inyectiva. Por tanto, g es un homeomorfismo. Como $\pi(x) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ para cada $x \in X$, $f(\pi(x)) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y)) \cap \mathcal{F}_1(Y)$. Por tanto, $\mathcal{F}_1(Y) \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(Y))$.

4.3. MÁS SOBRE LA PROPIEDAD DE KELLEY

En esta sección mostramos algunas propiedades adicionales relacionadas con los continuos con la propiedad de Kelley y su hiperespacio de no bloqueadores. El resultado más importante de esta sección es el Teorema 4.3.9, que afirma que si X es un continuo con la propiedad de Kelley tal que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo y $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, entonces X es aponsindético.

Los siguientes lemas serán útiles para probar los resultados importantes de esta sección.

Lema 4.3.1 *Sea X un continuo descomponible con la propiedad de Kelley. Sean $A \in \mathcal{C}(X)$ y $x, y \in X \setminus A$ tales que $\kappa_{X\setminus A}(x) \cap \kappa_{X\setminus A}(y) = \emptyset$. Si $\kappa_{X\setminus A}(x) \cap (\kappa_{X\setminus A}(y)) \neq \emptyset$, entonces $\kappa_{X\setminus A}(x) \subseteq (\kappa_{X\setminus A}(y))$.*

Supongamos que $\kappa_{X\setminus A}(x) \setminus (\kappa_{X\setminus A}(y)) \neq \emptyset$. Sean $z \in \kappa_{X\setminus A}(x) \cap (\kappa_{X\setminus A}(y))$ y $w \in \kappa_{X\setminus A}(x) \setminus (\kappa_{X\setminus A})(y)$. Luego, existe un subcontinuo L de X tal que $\{z, w\} \subseteq L$ y $L \cap A = \emptyset$. Sean $r > 0$ tal que $B(w; r) \cap (\kappa_{X\setminus A}(y)) = \emptyset$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\kappa_{X\setminus A}(y)$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Como X tiene la propiedad de Kelley, existe una sucesión $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subcontinuos de X tal que $z_n \in L_n$, $L_n \cap B(w; r) \neq \emptyset$ y $L_n \cap A = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $L_n \subseteq \kappa_{X\setminus A}(y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto contradice que $L_n \cap B(w; r) \neq \emptyset$ y $B(w; r) \cap (\kappa_{X\setminus A}(y)) = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $\kappa_{X\setminus A}(x) \subseteq (\kappa_{X\setminus A}(y))$.

Lema 4.3.2 *Sean X un continuo y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subcontinuos disjuntos dos a dos de X tal que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ para algún $A \in \mathcal{C}(X)$. Entonces, existe un conjunto numerable $D \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ tal que $|D \cap A_i| = 1$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq (D)$.*

Sea $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso de A. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $(x_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_i^n \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\lim_{i\to\infty} x_i^n = e_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, es conocido que existe una función biyectiva, $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, (vea [19]). Sean $\mathcal{N}_1 = f^{-1}(\{1\} \times \mathbb{N})$, $\mathcal{N}_2 = f^{-1}(\{2\} \times \mathbb{N})$, $\mathcal{N}_3 = f^{-1}(\{3\} \times \mathbb{N}) \ldots$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{N}$, es claro que $\mathcal{N}_n$ es infinito para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_n \cap \mathcal{N}_m = \emptyset$ cuando $n \neq m$ y $\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{N}_n$. Sea $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ donde $D_n = \{x_i^n : i \in \mathcal{N}_n\}$. Es fácil ver que $|D \cap A_i| = 1$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y que $E \subseteq (D)$, por la construcción de D. Así, $A \subseteq (D)$.

Definición 4.3.3 *Sean X un continuo y W un subconjunto de X. Diremos que un subconjunto L de W es una componente por continuos de W, si L es un conexo por*

[19] C. UZCÁTEGUI. “Elementos de Teoría de Conjuntos”. preprint.

continuos maximal de W; esto es, si L' es un subconjunto conexo por continuos de W y $L \subseteq L'$, entonces $L = L'$.

Lema 4.3.4 *Sean X un continuo y A un subcontinuo propio de X tal que $X \setminus A$ no es conexo por continuos. Sea $B \in 2^X$ tal que $(B) = \emptyset$, $B \subseteq X \setminus A$ y satisface las siguientes condiciones:*

1. *$D \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X)$ para cada componente D de B;*

2. *$(W) \cap W' = \emptyset$ para cualesquiera $W, W' \in \mathcal{W}$, donde*

$$\mathcal{W} = \{W : W \text{ es una componente por continuos de } X \setminus A \text{ y } (W) \cap B \neq \emptyset\},$$

3. *$B \cap W$ es una componente de B, para cada $W \in \mathcal{W}$ tal que $W \cap B \neq \emptyset$.*

Entonces, $B \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$.

Veamos que $X \setminus B$ es conexa por continuos. Sea $x \in X \setminus B$. Mostremos que existe un continuo L_x tal que $L_x \cap A \neq \emptyset$, $L_x \cap B = \emptyset$ y $x \in L_x$. Es claro que esto sucede si $x \in A$; basta tomar $L_x = A$. Supongamos que $x \in X \setminus A$. Consideremos dos casos:

1. $G \notin \mathcal{W}$, para cada componente por continuos G de $X \setminus A$ tal que $x \in (G)$. Sea $L_x = (\kappa_{X \setminus A}(x))$. Observe que $L_x \cap A \neq \emptyset$. Como $\kappa_{X \setminus A}(x) \notin \mathcal{W}$, $L_x \cap B = \emptyset$.

2. Existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $x \in (W)$. Luego, $(W) \cap B \neq \emptyset$. Sea $z \in (W) \cap B$. Si $\kappa_{X \setminus A}(z) \cap W = \emptyset$, entonces $\kappa_{X \setminus A}(z)$ y W están en $\mathcal{W}$ y $(W) \cap \kappa_{X \setminus A}(z) \neq \emptyset$, contradicendo 2. Por tanto, $\kappa_{X \setminus A}(z) = W$ y $B \cap W \neq \emptyset$. Sea $B_0 = B \cap W$. Note que B_0 es una componente de B y $B_0 \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, por 1 y 3. Como $x \notin B_0$, existe un continuo M de X tal que $x \in M$, $M \cap B_0 = \emptyset$ y $M \cap (X \setminus (W)) \neq \emptyset$. Sea L_x la componente de $M \cap (W)$ tal que $x \in L_x$. Por el Teorema de golpes en la frontera [5], $L_x \cap (M \setminus (W)) \neq \emptyset$. No es difícil ver que $L_x \cap (M \setminus (W)) \subseteq A$. Luego, $L_x \cap A \neq \emptyset$.

Por 1 y 2, si $x, y \in X \setminus B$, entonces $L_x \cup A \cup L_y$ es un subcontinuo de $X \setminus B$ tal que $\{x, y\} \subseteq L_x \cup A \cup L_y$. Por tanto, $X \setminus B$ es conexo por continuos y $B \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$.

Teorema 4.3.5 *Sea X un continuo descomponible con la propiedad de Kelley tal que $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ y $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es compacto. Si $A \in \mathcal{C}(X)$ es tal que $\kappa_{X\setminus A}(x)$ es denso para algún $x \in X \setminus A$, entonces existe $L \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ tal que $A \subseteq L$.*

Si $A \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, entonces $L = A$. Por tanto, supongamos que $A \in \mathcal{C}(X) \setminus \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Sea $y \in X \setminus A$ tal que $(\kappa_{X\setminus A}(y)) \neq X$. Definamos

$$L = A \cup \{y \in X \setminus A : (\kappa_{X\setminus A}(y)) \neq X\}.$$

Note que $(\kappa_{X\setminus A}(y)) \subseteq L$ para cada $y \in L\setminus A$, por el Lema 4.3.1. Como $(\kappa_{X\setminus A}(y)) \cap A \neq \emptyset$ para cada $y \in L \setminus A$, L es conexo.

Demostremos ahora que L es cerrado. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en L tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ para algún $x \in X$. Veamos que $x \in L$. Si existen $y_1, y_2, \ldots, y_k$ en $L \setminus A$ tales que

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in A \cup (\kappa_{X\setminus A}(y_1)) \cup (\kappa_{X\setminus A}(y_2)) \cup \cdots \cup (\kappa_{X\setminus A}(y_k))\}$$

es infinito, entonces $x \in A \cup (\kappa_{X\setminus A}(y_1)) \cup (\kappa_{X\setminus A}(y_2)) \cup \cdots \cup (\kappa_{X\setminus A}(y_k)) \subseteq L$. Luego, sin pérdida de generalidad vamos a suponer que existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $L \setminus A$ tal que $x_n \in \kappa_{X\setminus A}(y_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $(\kappa_{X\setminus A}(y_i)) \cap \kappa_{X\setminus A}(y_j) = \emptyset$ siempre que $i \neq j$ (vea el Lema 4.3.1). Sea $\varepsilon > 0$. Si $x \notin L$, entonces $\kappa_{X\setminus A}(x)$ es denso. Luego, existe un subcontinuo M de X tal que $M \cap A = \emptyset$, $x \in M$ y $\mathcal{H}(M, X) < \varepsilon$. Como X tiene la propiedad de Kelley, existe una sucesión de subcontinuos $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que $x_n \in M_n$, $M_n \cap A = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} M_n = M$. Por el Lema 4.3.2, existe un conjunto numerable $D \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ tal que $|D \cap M_n| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $M \subseteq (D)$. Observe que $F \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ para cada subconjunto finito $F \subseteq D$, por el Lema 4.3.4 y el hecho que $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Como $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es compacto, $(D) \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Más aún, como $M \subseteq (D)$ y $\mathcal{H}(M, X) < \varepsilon$, entonces

$\mathcal{H}((D), X) < \varepsilon$. Nuevamente por la compacidad de $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, $X \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Una contradicción. Así, $x \in L$ y L es un subconjunto cerrado de X.

Finalmente, como $\kappa_{X\setminus A}(x)$ es densa y $L \cap \kappa_{X\setminus A}(x) = \emptyset$, tenemos que $(L) = \emptyset$. Además, $\kappa_{X\setminus L}(z)$ es denso para cada $z \in X \setminus L$, por la definición de L. Luego, $L \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ y $A \subseteq L$.

Teorema 4.3.6 *Sea X un continuo descomponible con la propiedad de Kelley tal que $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ y $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es compacto. Si $A \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, entonces $X \setminus A$ es conexo por continuos.*

Sea $x \in X \setminus A$. Probaremos que $X \setminus A = \kappa_{X\setminus A}(x)$ (ver la Observación 3.2.3). Supongamos que existe $y \in X \setminus A$ tal que $\kappa_{X\setminus A}(y) \cap \kappa_{X\setminus A}(x) = \emptyset$. Note que $\kappa_{X\setminus A}(y)$ es densa, pues $A \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Como $\kappa_{X\setminus A}(x)$ es denso, existe una sucesión de subcontinuos $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\kappa_{X\setminus A}(x)$ tal que $L_n \subseteq L_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} L_n = X$, por *3* de la Proposición 3.1.2. Como $\kappa_{X\setminus A}(y) \cap L_n = \emptyset$ y $\kappa_{X\setminus A}(y)$ es denso, tenemos que $\kappa_{X\setminus L_n}(y)$ es denso para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, existe un continuo $K_n \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ tal que $L_n \subseteq K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 4.3.5. Como $\lim_{n\to\infty} L_n = X$, $\lim_{n\to\infty} K_n = X$. Luego, $X \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ por la compacidad de $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Una contradicción. Así, $X \setminus A = \kappa_{X\setminus A}(x)$ y $X \setminus A$ es conexo por continuos.

Teorema 4.3.7 *Sea X un continuo hereditariamente descomponible con la propiedad de Kelley tal que $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ y $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo. Si W es un subcontinuo propio de X, entonces toda componente de $X \setminus W$ es abierta.*

Supongamos lo contrario, esto es, existen una componente C de $X \setminus W$ y un punto $p \in C$ tales que $p \in (X \setminus (W \cup C))$.

Afirmación 4.3.8 *$(\kappa_{X\setminus W}(p)) \subseteq (X \setminus (W \cup C))$.*

Sea $q \in \kappa_{X\setminus W}(p)$. Luego, existe un continuo $P \subseteq \kappa_{X\setminus W}(p)$ tal que $\{p, q\} \subseteq P$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X \setminus (W \cup C)$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Como X tiene la propiedad de Kelley y $P \cap W = \emptyset$, existe una sucesión de continuos $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $X \setminus W$ tal que $x_n \in P_n$ para cada n y $\lim_{n\to\infty} P_n = P$. Note que $P_n \cap C = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $P \subseteq (X \setminus (W \cup C))$ y $q \in (X \setminus (W \cup C))$. Luego, $\kappa_{X\setminus W}(p) \subseteq (X \setminus (W \cup C))$. Como $(X \setminus (W \cup C))$ es compacto, $(\kappa_{X\setminus W}(p)) \subseteq (X \setminus (W \cup C))$. Esto prueba la Afirmación 4.3.8.

Ahora, veamos que $2^{(\kappa_{X\setminus W}(p))} \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Sea F un subconjunto finito de $\kappa_{X\setminus W}(p)$. Por la Afirmación 4.3.8, existe una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $X \setminus (W \cup C)$ tal que

$$(\{z_n : n \in \mathbb{N}\}) \setminus \{z_n : n \in \mathbb{N}\} = F. \tag{4}$$

Además, podemos suponer que $|\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cap G| \leq 1$ para cada componente G de $X \setminus W$. Como $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, $H \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ para cada subconjunto finito $H \subseteq \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, por el Lema 4.3.4. Por tanto, $F \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, por (4). De lo anterior, tenemos que $F \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ para cada subconjunto finito F de $\kappa_{X\setminus W}(p)$. Es conocido que la colección de subconjuntos finitos de $\kappa_{X\setminus W}(p)$ es densa en $2^{(\kappa_{X\setminus W}(p))}$ (vea la definición de la Topología de Viertoris 2.3.2). Por tanto, como $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es compacto, $2^{(\kappa_{X\setminus W}(p))} \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$.

Sea $Q = W \cap (\kappa_{X\setminus W}(p))$. Como $Q \in 2^{(\kappa_{X\setminus W}(p))}$, $Q \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Note que $p \notin Q$ y $\kappa_{X\setminus Q}(p) \subseteq \kappa_{X\setminus W}(p) \subseteq C$. Esto es una contradicción, pues $\kappa_{X\setminus Q}(p)$ es densa y C no es densa. Por tanto, cada componente de $X \setminus W$ es abierta.

Finalizamos la sección demostrando que si X es un continuo con la propiedad de Kelley tal que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo y $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, entonces X es aposindético.

Teorema 4.3.9 *Sea X un continuo descomponible con la propiedad de Kelley tal que $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Si $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo, entonces X es aposindético.*

Sea $p \in X$. Veamos que X es aposindético en p con respecto a cada punto de

$X \setminus \{p\}$ (vea la Definición 2.1.13). Sea $q \in X \setminus \{p\}$.

Como $\{q\} \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, $X \setminus \{q\}$ es conexo por continuos, por el Teorema 4.3.6. Además, existe una sucesión de subcontinuos $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $X \setminus \{q\}$ tal que $X \setminus \{q\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$, por el Lema 3.2.4. Como X es un espacio de Baire, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(L_k) \neq \emptyset$, [20]. Sea R un subcontinuo de $X \setminus \{q\}$ tal que $p \in R$ y $R \cap L_k \neq \emptyset$. Como X tiene la propiedad de Kelley, existe un subcontinuo W de X tal que $L_k \cup R \subseteq (W) \subseteq W \subseteq X \setminus \{q\}$, por el Teorema 4.1.4. De lo anterior, $p \in (W)$ y $q \notin W$. Así, X es aposindético en p con respecto a q. Por tanto, X es aposindético.

4.4. CURVA CERRADA SIMPLE

En esta sección presentamos nuestros principales resultados del capítulo. Mostramos dos caracterizaciones de la curva cerrada simple.

Teorema 4.4.1 *Sea X un continuo descomponible con la propiedad de Kelley tal que $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$. Entonces, $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo si, y sólo si, X es una curva cerrada simple.*

Supongamos que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo. Entonces, por el Teorema 4.3.9, X es aposindético. Luego, X es semi-localmente conexo, por el Teorema 2.1.15. Veamos que X es localmente conexo. Sean $p \in X$ y V un subconjunto abierto de X tal que $p \in V$. Como X es semi-localmente conexo, existe un subconjunto abierto U de X tal que $p \in U \subseteq V$ y $X \setminus U$ sólo tenga un número finito de componentes. Sean $L_1, L_2, \ldots, L_k$, las componentes de $X \setminus U$. Como $\{p\} \in \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$, existe un subcontinuo M_i de X tal que $M_i \cap L_1 \neq \emptyset$, $M_i \cap L_i \neq \emptyset$ y $p \notin M_i$, para cada

---

[20] S. WILLARD. *General Topology*. Reading MA: Addison-Wesley, 1970.

$i \in \{2, \ldots, k\}$ (vea el Teorema 4.3.6). Sea

$$W = (L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_k) \cup (M_2 \cup M_3 \cup \cdots \cup M_k).$$

Observe que W es un continuo y $p \notin W$. Sea J la componente de $X \setminus W$ tal que $p \in J$. Por el Teorema 4.3.7, J es abierto. Además, $J \subseteq X \setminus W \subseteq U \subseteq V$. Por tanto, X es localmente conexo en p. Así, X es una curva simple, por el [8].

Recíprocamente, $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(S^1)) = \mathcal{F}_1(S^1)$. Por tanto, $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(S^1))$ es un continuo.

Teorema 4.4.2 *Sea X un continuo descomponible con la propiedad de Kelley. Si $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo, entonces existe una función continua $f\colon X \to S^1$ tal que f es abierta, monótona y $f^{-1}(z)$ es un subcontinuo terminal de X para cada $z \in S^1$.*

Note que $\mathcal{N} = \{\pi(x) : x \in X\}$ es una descomposición continua de X tal que $\pi(x)$ es un subcontinuo terminal de X para cada $x \in X$, por la Proposición 4.2.9 y el Teorema 4.2.10. Sea $\rho\colon X \to \mathcal{N}$ la función cociente. Como ρ es monótona, $\mathcal{N}$ tiene la propiedad de Kelley, por [21]. No es difícil ver que para cada subcontinuo B de X tal que $(B) \neq \emptyset$, tenemos que $B = \bigcup\{\pi(x) \in \mathcal{N} : \pi(x) \cap B \neq \emptyset\}$, por el hecho que todo elemento de $\mathcal{N}$ es terminal. Con la observación anterior, tenemos que $\mathcal{N}$ es descomponible. Además, $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(\mathcal{N}))$ es un continuo y $\mathcal{F}_1(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(\mathcal{N}))$, por el Teorema 4.2.11. Luego, $\mathcal{N}$ es una curva cerrada simple, por el Teorema 4.4.1. Sea $g\colon \mathcal{N} \to S^1$ un homeomorfismo. Finalmente, basta notar que $f = g \circ \rho$ es una función continua de X a S^1 monótona, abierta y $f^{-1}(z)$ es terminal para cada $z \in S^1$. El siguiente resultado da una respuesta parcial a las preguntas 4.0.2 y 4.0.3.

---

[21] R. WARDLE. “On a property of J.L. Kelley”. En: *Houston J. Math* 3 (1977), págs. 291-299.

Teorema 4.4.3 *Sea X un continuo hereditariamente descomponible con la propiedad de Kelley. Entonces, $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo si, y sólo si, X es una curva cerrada simple.*

Supongamos que $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(X))$ es un continuo. Por el Teorema 4.4.2, existe una función continua $f\colon X \to S^1$ tal que f es abierta, monótona y $f^{-1}(z)$ es un subcontinuo terminal de X, para cada $z \in S^1$. Veamos que $|f^{-1}(z)| = 1$ para cada $z \in S^1$. Sean $z_0 \in S^1$ y α un arco en S^1 tal que $z_0 \in \alpha$. Sea $L = f^{-1}(\alpha)$. Como f es monótona, L es un continuo. Sean $p, q \in L$ tal que α es irreducible entre $f(p)$ y $f(q)$. Veamos que L es irreducible entre p y q. Sea K un subcontinuo de L tal que $p, q \in L$. Luego, $f(K) = \alpha$. Como $f^{-1}(z)$ es terminl para cada $z \in S^1$ y $f^{-1}(z) \cap K \neq \emptyset$, tenemos que $f^{-1}(z) \subseteq K$ para cada $z \in \alpha$. Por tanto, $K = f^{-1}(\alpha)$, $K = L$ y L es irreducible.

Sea $g = f|_L\colon L \to \alpha$. Observe que g es abierta, monótona y $g^{-1}(z)$ es terminal para cada $z \in \alpha$. Entonces, $D = \{x \in L : g^{-1}(g(x)) = x\}$ es un subconjunto denso de L, por [22]. Como g es abierta, $g^{-1}(g(x)) = x$ para cada $x \in \alpha$. Por tanto, $|f^{-1}(z_0)| = 1$. Luego, f es inyectiva. Así, f es un homeomorfismo.

Recíprocamente, $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(S^1)) = \mathcal{F}_1(S^1)$. Por tanto, $\mathcal{NB}(\mathcal{F}_1(S^1))$ es un continuo.

---

[22] L. OVERSTEEGEN y E. TYMCHATYN. “Subcontinua with degenerate trenches in hereditarily descomposable continua”. En: *Trans. Amer. Math. Soc* 278 (1983), págs. 717-724.

BIBLIOGRAFÍA

BING, R. H. y F. B JONES. "Another homogeneous plane continuum". En: *Trans. Amer. Math. Soc* 90 (1959), págs. 171-192 (vid. pág. 16).

BOBOK, J., P. PYRIH y V. VEJNAR. "On blockers in continua". En: *Topol. Appl* 202 (2016), págs. 346-355 (vid. pág. 26).

CAMARGO, J. y MAYA D. CAPULÍN F. CASTAÑEDA E. "Continua whose hyperspace of nonblockers of $\mathcal{F}_1(X)$ is a continuum". En: *Topol. Appl* 262 (2019), págs. 30-40 (vid. págs. 26, 41).

CAMARGO, J., D. MAYA y L. ORTIZ. "The hyperspace of nonblockers of $\mathcal{F}_1(X)$". En: *Topol. Appl* 251 (2019), págs. 70-81 (vid. pág. 26).

CAMARGO, J. y E. VILLAMIZAR. *Topología general*. Colombia: Ediciones UIS, 2020 (vid. págs. 21, 36).

ESCOBEDO, R., J. LÓPEZ M. de y H. VILLANUEVA. "Nonblockers in hyperspaces". En: *Topol. Appl* 159 (2012), págs. 3614-3618 (vid. págs. 25-27, 29, 31, 41, 53, 60).

ILLANES, A. "The hyperspace of non-blockers of singletons, all the possible examples". preprint (vid. págs. 26, 41).

ILLANES, A. y P. KRUPSKI. "Blockers in hyperspaces". En: *Topol. Appl* 158 (2011), págs. 653-659 (vid. págs. 25, 26).

ILLANES, A. y S. NADLER. *Hyperspaces: Fundamentals and recent advances*. Vol. 216. Marcel Dekker, New York y Basel: Monographs, Textbooks in Pure y Applied Math, 1999 (vid. págs. 24, 38, 45-47, 49, 52, 53).

KELLEY, J. *General Topology*. Vol. 27. Springer-Verlag, New York, Berlin: Graduate Texts in Mathematics, 1991 (vid. pág. 37).

— "Hyperspaces of a continuum". En: *Trans. Amer. Math. Soc* 52 (1942), págs. 22-36 (vid. pág. 42).

MACÍAS, S. "Homogeneous continua and non-blockers". En: *Topology Proc* 55 (2020), págs. 115-121 (vid. pág. 26).

— "Sobre dendroides y un poco más". preprint (vid. págs. 35, 37).

— *Topics on Continua*. Second. -Chan: Springer, 2018 (vid. págs. 19, 44).

NADLER, S. *Continuum Theory: An Introduction*. Vol. 158. Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong: Monographs, Textbooks in Pure y Applied Math, 1992 (vid. págs. 21, 29, 55).

NOVA, J. *Unicoherencia en continuos*. Universidad Industrial de Santander: Thesis, 2014 (vid. pág. 17).

OVERSTEEGEN, L. y E. TYMCHATYN. "Subcontinua with degenerate trenches in hereditarily descomposable continua". En: *Trans. Amer. Math. Soc* 278 (1983), págs. 717-724 (vid. pág. 61).

PICENO, C. "Nonblockers in homogeneous continua". En: *Topol. Appl* 249 (2018), págs. 127-134 (vid. págs. 26, 29, 46, 48).

PICENO, C. y H. VILLANUEVA. "Minima Nonblockers and Blocked Sets of a continuum". preprint (vid. págs. 26, 47).

UZCÁTEGUI, C. "Elementos de Teoría de Conjuntos". preprint (vid. pág. 54).

WARDLE, R. "On a property of J.L. Kelley". En: *Houston J. Math* 3 (1977), págs. 291-299 (vid. pág. 60).

WILLARD, S. *General Topology*. Reading MA: Addison-Wesley, 1970 (vid. pág. 59).