

CONTINUOS $\frac{1}{2}$ -HOMOGÉNEOS

JUAN DAVID SILVA GRANADA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2021

CONTINUOS $\frac{1}{2}$ -HOMOGÉNEOS

JUAN DAVID SILVA GRANADA

Trabajo de grado como requisito para optar al título de:
Matemático

Director:

JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA

Ph. D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2021

AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos a todos y cada uno de los docentes de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, por promover el amor por las matemáticas y por su entera disposición y entusiasmo para el estudio y enseñanza de esta ciencia. En especial, mis agradecimientos al profesor Javier Enrique Camargo García por enseñarme sobre continuos, por su paciencia, dedicación, motivación y responsabilidad en la orientación y desarrollo de este trabajo.

Mis agradecimientos a mi familia, que siempre me han apoyado y acompañado en cada momento de la vida, especialmente a mi papá y mis hermanos por su sincero amor. A mi mamá a quien amo y amaré infinitamente y a mi abuelita Bárbara quien me enseñó la importancia de hacer lo correcto y me demostró con su ejemplo lo que significa el amor por la familia.

Finalmente, agradezco a mis amigos por su apoyo y motivación, por su disposición para acompañarme en este proceso y dejarme los mejores recuerdos de mi paso por el pregrado universitario. Mi agradecimiento especial a Mariale por todo lo que me enseñó y me permitió compartir a su lado.

CONTENIDO

	Pág
INTRODUCCIÓN	8
1 PRELIMINARES	10
2 CONTINUOS $\frac{1}{2}$-HOMOGÉNEOS	29
REFERENCIAS	49
BIBLIOGRAFÍA	50

LISTA DE FIGURAS

		Pág.
Figura 1	Arcos	10
Figura 2	Curvas cerradas simples	11
Figura 3	n -odo simple	11
Figura 4	Curva senoidal del topólogo	12
Figura 5	Abanico armónico.	12
Figura 6	Grafo X	14
Figura 7	Espacio A_1	15
Figura 8	Espacio A_2	15
Figura 9	Dendrita universal D_4	16
Figura 10	Construcción de S_1, S_2 y S_3	16
Figura 11	Triángulo de Sierpinski $\mathcal{T}$	17
Figura 12	Suspensión armónica	18
Figura 13	Conexo en pequeño y no localmente conexo	19
Figura 14	Triodo Simple T	31
Figura 15	$S_1 \cup S_2$	32
Figura 16	Espacio Y para $n = 3$	33
Figura 17	Espacio C para $n = 4$	34
Figura 18	Espacio A	36
Figura 19	Construcción de S_0, S_1 y S_2	37
Figura 20	Curva de Sierpiński	37
Figura 21	Continuo X	39
Figura 22	Espacio X	43
Figura 23	Arete hawaiano	46
Figura 24	Espacio X	47

RESUMEN

TÍTULO: CONTINUOS $\frac{1}{2}$ -HOMOGÉNEOS. ¹.

AUTOR: JUAN DAVID SILVA GRANADA.²

PALABRAS CLAVES: Continuo, Punto de corte, Localmente conexo, $\frac{1}{2}$ homogéneo, $\frac{1}{n}$ homogéneo.

DESCRIPCIÓN:

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente de vacío. La idea intuitiva de un continuo homogéneo es la de un espacio en el que todos sus puntos tienen entornos que preservan las mismas características topológicas y su definición formal establece que un continuo es homogéneo si para cualesquiera dos puntos existe un homeomorfismo que mapea uno de ellos en el otro. Sin embargo, bajo esta definición, existen espacios para los cuales no es posible escoger de manera arbitraria dos puntos para los cuales exista el homeomorfismo antes mencionado y es allí donde se introduce la definición de continuos $\frac{1}{n}$ homogéneos; particularmente los continuos $\frac{1}{2}$ homogéneos, son aquellos en los cuales se generan 2 órbitas por la acción del grupo de homeomorfismos del espacio en sí mismo, un ejemplo que ilustra esta definición lo podemos tener de un espacio conocido como lo es el intervalo unitario, ya que en este espacio, sus extremos pertenecen a una única órbita mientras que todo punto interior pertenece a otra órbita diferente. De allí que el intervalo pueda ser escrito como la unión de estas dos órbitas y por ende, ser un continuo $\frac{1}{2}$ homogéneo. Es importante encontrar órbitas en los diferentes continuos, especialmente en los grafos, esta es una tarea enriquecedora al momento de clasificarlos como $\frac{1}{n}$ homogéneos. A partir de esto, es posible obtener resultados interesantes sobre continuos como el arco, que se puede caracterizar como el único continuo $\frac{1}{2}$ homogéneo, semilocalmente conexo que tiene más de un punto de corte. También se puede establecer que el continuo conocido como el “Arete Hawaiano” es el único continuo hereditariamente localmente conexo, $\frac{1}{2}$ homogéneo, que no es un grafo y su conjunto de puntos de corte es no vacío.

¹Trabajo de grado

²Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas. Director: JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA Ph. D. en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: $\frac{1}{2}$ HOMOGENEOUS CONTINUA. ³

AUTOR: JUAN DAVID SILVA GRANADA. ⁴

KEY WORDS: Continuum, Cut point, Locally connected, $\frac{1}{2}$ homogeneous, $\frac{1}{n}$ homogeneous.

DESCRIPTION:

A continuum is a metric space, compact, connected and different from vacuum. The intuitive idea of a homogeneous continuum is that of a space in which all its points have environments that preserve the same topological characteristics and its formal definition establishes that a continuum is homogeneous if for any two points there is a homeomorphism that maps one of them into the other. However, under this definition, there are spaces for which it is not possible to arbitrarily choose two points for which the aforementioned homeomorphism exists and that is where the definition of continuous $\frac{1}{n}$ homogeneous is introduced; particularly the $\frac{1}{2}$ homogeneous continuums, are those in which 2 orbits are generated by the action of the group of homeomorphisms of the space itself, an example that illustrates this definition can be obtained from a known space such as the unit interval, since that in this space, its ends points belong to a single orbit while every interior point belongs to a different orbit. Hence, the interval can be written as the union of these two orbits and, therefore, be a continuous $\frac{1}{2}$ homogeneous. It is important to find orbits in the different continuums, especially in graphs, this is an enriching task when classifying them as $\frac{1}{n}$ homogeneous. From this, it is possible to obtain interesting results on continuums such as the arc, which can be characterized as the only $\frac{1}{2}$ homogeneous, semilocally connected continuum that has more than one cut-off point. It can also be established that the continuum known as the “Hawaiian Earring” is the only hereditarily locally connected, $\frac{1}{2}$ homogeneous continuum, which is not a graph and its set of cut points is nonempty.

³Grade work.

⁴Faculty of Sciences, School of Mathematics. Director: JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA Ph. D. in Mathematics.

INTRODUCCIÓN

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente de vacío. La propiedad de homogeneidad en cualquier ámbito refiere a la “uniformidad en la estructura”; en esta medida la idea intuitiva de un continuo homogéneo es la de un espacio en el que todos sus puntos tienen entornos que preservan las mismas características topológicas. La definición formal de continuo homogéneo establece que un continuo X es homogéneo si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $h: X \rightarrow X$ tal que $h(x) = y$. El ejemplo mas sencillo de un continuo homogéneo es la circunferencia $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, así como el espacio trivial con un único elemento. La esfera S^2 y el toro $S^1 \times S^1$ son otros ejemplos de continuos homogéneos.

La definición de espacio homogéneo fue introducida en el año 1920 por el matemático polaco W. Sierpinski en el primer tomo de la revista *Fundamenta Mathematica*. Posteriormente, comenzando la década de 1930, el matemático holandés D. Van Dantzing presenta la siguiente definición de espacio n -homogéneo: Sean X un espacio topológico. Se dice que X es n -homogéneo si para todo par de subconjuntos A y B con n elementos, existe un homeomorfismo $h: X \rightarrow X$ tal que $h(A) = B$. En 1958, R.D. Anderson prueba que la *Curva universal de Menger* M es n -homogénea para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, se obtiene el concepto de *Espacio denso homogéneo numerable*, introducido y estudiado en 1972 por Ralph B. Bennett, que considera en la definición anterior los subconjuntos A y B como numerables y densos, y demuestra que el espacio M es un *espacio denso homogéneo numerable*. Para el lector interesado en la historia de los continuos y particularmente de los continuos homogéneos, esta información se presenta en [2]

Un ejemplo de un continuo que no es homogéneo es el intervalo unitario $[0, 1]$ puesto que la única forma de establecer un homeomorfismo de $[0, 1]$ en sí mismo, es fijar a los extremos, es decir, que la imagen de 0 y 1 solo pueda ser 0 ó 1; lo cual desestima la escogencia arbitraria de los puntos en la definición de continuo homogéneo. Es aquí donde es prudente introducir la definición de continuos $\frac{1}{n}$ -homogéneos. Un continuo se dice $\frac{1}{n}$ -homogéneo si se generan exactamente n órbitas por la acción del grupo de homeomorfismos del continuo sobre sí

mismo (se denomina órbita a la acción de un grupo de homeomorfismos, de un espacio X en sí mismo, sobre cualquier punto $x \in X$). De esta manera, es relativamente claro que si el continuo es homogéneo, entonces la acción del grupo de homeomorfismos sobre el continuo tiene exactamente una órbita; es decir, la relación de equivalencia que genera naturalmente la familia de órbitas sobre el espacio, es trivial.

Este trabajo tiene como propósito hacer una descripción de conceptos básicos de la teoría de continuos, mostrar ejemplos y algunos resultados relacionados con continuos $\frac{1}{2}$ -homogéneos y así caracterizar este tipo de espacios mediante sus propiedades topológicas y la relación con los elementos que los componen (puntos de corte, puntos de ramificación, puntos finales, entre otros).

La realización de este trabajo está basada principalmente en los conceptos presentados en el artículo "*On $\frac{1}{2}$ -homogeneous continua*" citado en [9]; del cual además, fueron tomadas las demostraciones de los resultados principales que se presentan, especialmente en el Capítulo 2.

En el Capítulo 1: Preliminares, se presentan definiciones, nociones básicas y ejemplos de continuos y sus elementos. Se presentan las definiciones de grafo, puntos finales, puntos de corte, puntos de ramificación y dendritas; así como algunos ejemplos útiles para visualizar lo mencionado. En una segunda parte de este capítulo se establecen las definiciones de conexidad local, semiconexidad local, conexidad en pequeño y continuos de convergencia y se presentan teoremas que serán de utilidad para relacionar y caracterizar estos conceptos. Finalmente se mencionan teoremas útiles para el desarrollo de la temática a trabajar en el segundo capítulo.

El segundo capítulo tiene como objetivo principal la demostración de dos teoremas, uno de ellos permite caracterizar al arco usando el hecho de ser un continuo $\frac{1}{2}$ -homogéneo, y el otro nos presenta la caracterización de un espacio conocido como el Arete hawaiano, que definiremos en este trabajo. Para poder llegar a estos resultados, el capítulo dos inicia con la definición, ejemplos e ideas fundamentales sobre los continuos $\frac{1}{2}$ -homogéneos, también se introduce la definición de nodo para continuos semilocalmente conexos y algunos lemas y propiedades que permiten identificar nodos en un continuo. Además se presentan lemas necesarios para las demostraciones que se realizan y se establece la importancia de las condiciones que tiene cada teorema.

Capítulo

1

PRELIMINARES

Esta sección está hecha con el fin de proporcionarle al lector algunos conceptos y resultados básicos de la Teoría de Continuos. Las definiciones, teoremas y demás registros que aparecen en este capítulo serán parte fundamental del presente trabajo.

Definición 1.1. Sea X un espacio topológico no vacío. Decimos que X es un continuo, si X es un espacio métrico, compacto y conexo.

Un arco es cualquier espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. El intervalo es un espacio métrico, cerrado y compacto; luego todo espacio homeomorfo a $[0, 1]$ es un continuo (ver Figura 1). Si $h: [0, 1] \rightarrow X$ es un homeomorfismo, los puntos $h(0)$ y $h(1)$ los llamaremos puntos finales del arco X .

Figura 1: Arcos

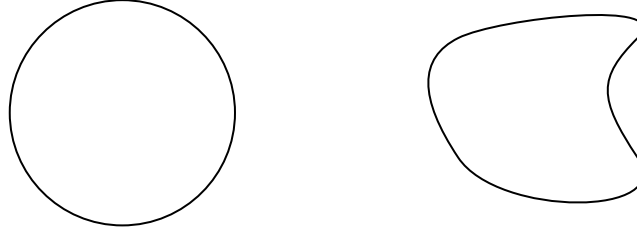


Sea n un entero positivo. Una n -celda se define como un espacio homeomorfo a la bola cerrada B^n en el espacio euclídeo, donde $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$; ó equivalentemente al espacio producto $[0, 1]^n$. Además, definimos una n -esfera como la frontera en $\mathbb{R}^{n+1}$ de una $n + 1$ -celda; esto es, una n -esfera es cualquier espacio homeomorfo a $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$.

Todo conjunto homeomorfo a una circunferencia unitaria S^1 , que es la 1-esfera,

es llamado curva cerrada simple (ver Figura 2). Las n -celdas y n -esferas son ejemplos de continuos.

Figura 2: Curvas cerradas simples



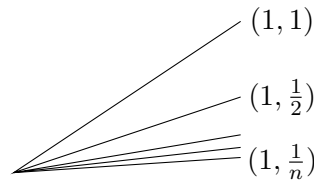
Definición 1.2. *Un grafo es un continuo que puede ser expresado como la unión de una cantidad finita de arcos, los cuales se intersectan en a lo más uno, o sus dos puntos finales.*

El arco y la curva cerrada simple son ejemplos de grafos. Otro ejemplo de grafo es el n -odo simple. Un n -odo simple es cualquier espacio homeomorfo al espacio T_n definido de la siguiente manera:

$$T_n = \{t(0, 0) + (1 - t)(1, \frac{1}{i}) \in \mathbb{R}^2 : i \in \{1, \dots, n\}, t \in [0, 1]\}.$$

La Figura 3 muestra una representación del n -odo simple.

Figura 3: n -odo simple



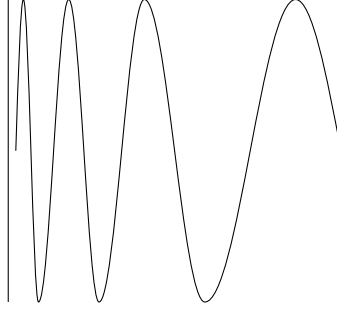
Si $n = 3$, llamaremos al espacio T_3 , *triodo simple*.

Definición 1.3. *Sean X un continuo y $x \in X$. Se dice que X es localmente conexo en x si para cada vecindad de x , U_x , existe una vecindad abierta y conexa V_x tal que $V_x \subseteq U_x$. Si X es localmente conexo en todo punto, entonces diremos que X es localmente conexo.*

Nótese que cualquier grafo es localmente conexo. En particular el arco y la curva cerrada simple son ejemplos de continuos localmente conexos.

Ejemplo 1.4. *Sea $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}$ y denotemos por $W = \text{cl}_{\mathbb{R}^2}(A)$. El continuo W es conocido como la curva senoidal del topólogo (ver Figura 4).*

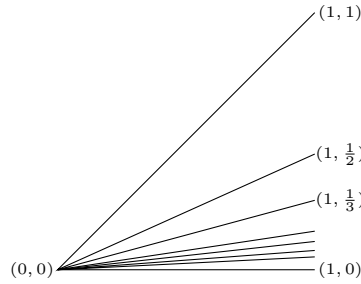
Figura 4: Curva senoidal del topólogo



La definición de conexidad local se puede dar en general para cualquier espacio topológico. En ese contexto, el subespacio $[0, 1) \cup (1, 2]$ de $\mathbb{R}$ es un ejemplo donde todo punto tiene vecindades abiertas y conexas que son arbitrariamente pequeñas (es localmente conexo) y no es conexo. Consideramos importante resaltar que en este trabajo solo hablaremos de conexidad local en continuos. Note que la curva senoidal del topólogo definido anteriormente no es localmente conexo en ningún punto de $\{0\} \times [-1, 1]$. A continuación mostramos otro continuo que no es localmente conexo.

Ejemplo 1.5. Sea $Z = \{t(0, 0) + (1 - t)(1, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}, t \in [0, 1]\}$ y denotemos por $F_H = \text{cl}_{\mathbb{R}^2}(Z)$. El continuo F_H se conoce como *abanico armónico* (ver Figura 5).

Figura 5: Abanico armónico.



Obsérvese que $(1, 0) \in F_H$ y F_H no es localmente conexo en $(1, 0)$. Así, F_H no es localmente conexo.

Definición 1.6. Sean X un continuo y n un cardinal. Se dice que un punto $x \in X$ tiene orden menor o igual que n , si x tiene una base de vecindades abiertas en X cuyas fronteras tienen a lo más n elementos. En este caso escribiremos $\text{Ord}_X(x) \leq n$. Si n es el cardinal más pequeño para el cual x tiene esta base de vecindades, se dice que el orden de x en X es n , y escribimos $\text{Ord}_X(x) = n$.

Note que si T_n es el n -odo simple, definido anteriormente en la Figura 3, los puntos en $\{(1, 1), \dots, (1, \frac{1}{n})\}$ tiene orden 1, $\text{Ord}_X((0, 0)) = n$ y $\text{Ord}_X(x) = 2$ en todo $x \in T_n \setminus \{(0, 0), (1, 1), \dots, (1, \frac{1}{n})\}$.

Definición 1.7. Sea X un continuo. Diremos que un punto $x \in X$ es un punto final, si $\text{Ord}_X(x) = 1$. El conjunto de puntos finales de un espacio X será denotado por $\text{End}(X)$.

Nótese que previamente se mencionaron los puntos finales en un arco. En ese sentido, estos puntos coinciden con la Definición 1.7. Además, retomado el ejemplo del n -odo simple, $\text{End}(T_n) = \{(1, 1), \dots, (1, \frac{1}{n})\}$.

Definición 1.8. Sea X un continuo. Diremos que un punto $x \in X$ es punto de ramificación si $\text{Ord}_X(x) \geq 3$.

El n -odo simple T_n , tiene exactamente un punto de ramificación, el punto $(0, 0)$.

Definición 1.9. Sea X un continuo. Diremos que un punto $p \in X$ es un punto de corte de X si $X \setminus \{p\}$ es desconexo. El conjunto de puntos de corte de X será denotado por $\text{Cut}(X)$. Si $q \in X \setminus \text{Cut}(X)$, diremos que q es un punto de no corte.

Diremos que $p \in X$ es un punto de corte local si existe un subcontinuo Y de X tal que $p \in \text{int}_X(Y)$ y $p \in \text{Cut}(Y)$.

No es difícil ver que en el arco, todo punto $t \in [0, 1] \setminus \{0, 1\}$ lo desconecta y $\text{Ord}_{[0,1]}(0) = \text{Ord}_{[0,1]}(1) = 1$. Así, $\text{End}([0, 1]) = \{0, 1\}$ y $\text{Cut}([0, 1]) = (0, 1)$. Si consideramos una curva cerrada simple, se tiene que $\text{Cut}(S^1) = \emptyset$. Sin embargo, en S^1 todo punto es un punto de corte local.

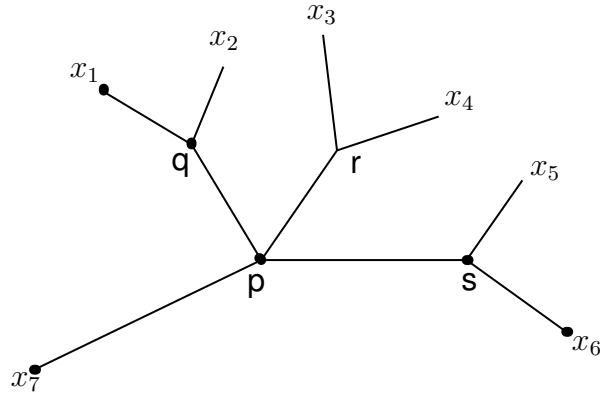
En la Figura 6 que describe un continuo a continuación, se tiene un ejemplo de un grafo X en el cual se puede identificar el conjunto de puntos finales $\text{End}(X) = \{x_i : i \in \{1, \dots, 7\}\}$. El conjunto de puntos $\{p, q, r, s\}$ son puntos de ramificación de X . Además, los puntos de corte $\text{Cut}(X) = X \setminus \{x_i : i \in \{1, \dots, 7\}\}$.

Definición 1.10. Una dendrita es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.

El arco es un ejemplo de dendrita. El grafo mostrado en la Figura 6 es un ejemplo de dendrita. Los grafos que son dendritas se conocen como árboles.

En adelante se hará uso del concepto de límite de una sucesión de continuos para presentar algunos ejemplos y teoremas, por lo tanto se introduce esta definición a continuación.

Figura 6: Grafo X



Definición 1.11. Sean X un continuo y $A_1, A_2, \dots$ una sucesión de subcontinuos de X . Se definen los conjuntos $\liminf A_i$ y $\limsup A_i$ como siendo:

$$\liminf A_i = \{x \in X : \text{para cada abierto } U \text{ de } X, x \in U, \\ \text{existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } U \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \geq k\}.$$

$$\limsup A_i = \{x \in X : \text{para cada abierto } U \text{ de } X, x \in U, \\ U \cap A_i \neq \emptyset \text{ para una cantidad infinita de índices } i\}.$$

Se tiene que $\liminf A_i \subset \limsup A_i$ y, si $\liminf A_i = \limsup A_i = A$ entonces diremos que $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i$ existe, y escribiremos $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = A$ ó $A_i \rightarrow A$.

A continuación presentaremos más ejemplos de continuos, utilizando el concepto de límite que definimos anteriormente.

En Teoría de Continuos, un continuo se conoce como universal si, éste contiene copias homeomorfas de una familia de continuos. En particular, el cubo de Hilbert $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ es universal, pues todo continuo se puede encajar en él, de acuerdo con el Teorema de metrización de Urysohn [1, Teorema 9.1].

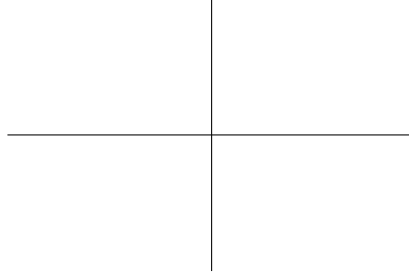
Existe una dendrita universal; es decir, una dendrita que contiene una copia topológica de cualquier dendrita. La construcción de este espacio la encontramos en [7, Ejemplo 10.37 p.181] y se denota por D_{∞} . A continuación presentamos otros ejemplos interesantes de dendritas universales.

Ejemplo 1.12. Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, y definamos al conjunto $T(n)$ como siendo: $T(n) = \{D : D \text{ es dendrita y } \text{Ord}_D(x) \leq n \text{ para todo } x \in D\}$. Sobre el conjunto $T(n)$ se define una dendrita universal de orden n , que denotaremos por D_n , tal que toda dendrita $D \in T(n)$ puede ser topológicamente encajable en D_n .

A continuación presentamos la construcción de la dendrita universal de orden 4, que denotamos por D_4 . Para esto, haremos una construcción inductiva en el plano $\mathbb{R}^2$.

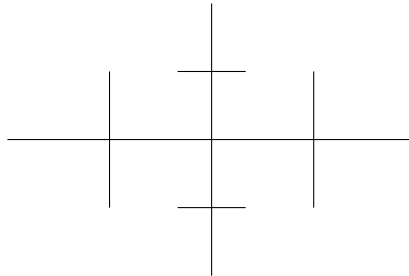
Sea $A_1 = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1, 1])$, como mostramos en la Figura 7.

Figura 7: Espacio A_1



A continuación construiremos A_2 de la siguiente manera: consideremos para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ a B_j como cada una de las “ramas” de A_1 ; es decir, $B_1 = [0, 1] \times \{0\}$, $B_2 = \{0\} \times [0, 1]$, $B_3 = \{0\} \times [-1, 0]$ y $B_4 = [-1, 0] \times \{0\}$ y sean $m_1, \dots, m_4$ los puntos medio de $B_1, \dots, B_4$. En cada punto medio m_j dibujamos un segmento perpendicular a B_j que llamaremos s_j , de tal manera que la longitud de s_j sea $1/3$. Así, definimos $A_2 = A_1 \cup \bigcup_{j=1}^4 s_j$ como mostramos en la Figura 8.

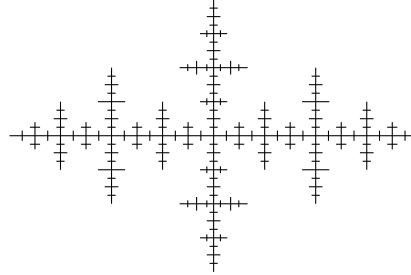
Figura 8: Espacio A_2



Continuamos la construcción con un procedimiento análogo al descrito anteriormente, pero ahora en cada una de las ramas de A_2 . Allí dibujamos nuevos segmentos con las mismas condiciones del paso anterior y obtenemos A_3 como la

unión de A_2 con los 16 nuevos segmentos dibujados. Se continúa con el proceso hasta obtener la sucesión $A_1, A_2, A_3, \dots$ y se concluye que $D_4 = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. Ver la Figura 9 para tener una representación del continuo D_4 .

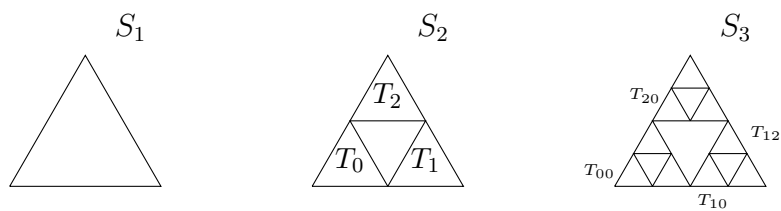
Figura 9: Dendrita universal D_4



Como se mencionaba al inicio de la construcción del ejemplo anterior, todo punto en D_4 tiene orden menor o igual a 4. De hecho en D_4 encontramos que los puntos finales de cada uno de los segmentos dibujados conforman el conjunto $\text{End}(D_4)$; los puntos donde se intersecan cualesquier par de segmentos, son aquellos de orden 4 y todos los demás puntos son de orden 2. Una observación que podemos hacer es que en D_4 todo punto o es de corte o es un punto final; más adelante, en este capítulo, presentaremos un teorema que precisamente caracteriza a las dendritas como continuos en donde todo punto o es de corte o es punto final.

Ejemplo 1.13. Sea S_1 un triángulo equilátero. Uniendo los puntos medios de los lados de S_1 se obtienen 4 triángulos iguales. Sean T_0, T_1 y T_2 los triángulos que tienen algún vértice en común con S_1 . Sea $S_2 = T_0 \cup T_1 \cup T_2$. De la misma manera, repetimos este proceso en cada uno de los triángulos T_0, T_1 y T_2 . Sean $T_{00}, T_{01}, T_{02}, T_{10}, T_{11}, T_{12}, T_{20}, T_{21}$ y T_{22} los triángulos obtenidos de las particiones hechas a T_0, T_1 y T_2 y que comparten vértices con alguno de estos triángulos. Definimos $S_3 = \bigcup \{T_{ij} : i, j \in \{0, 1, 2\}\}$. En la Figura 10 representamos S_1, S_2 y S_3 .

Figura 10: Construcción de S_1, S_2 y S_3



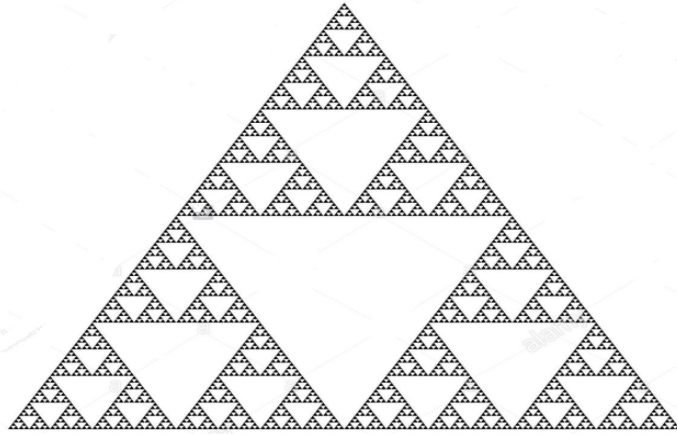
Se continúa con este proceso y se define S_k , para cada $k \in \mathbb{N}$.

Definimos el espacio

$$\mathcal{T} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

y es conocido como el Triángulo de Sierpinski.

Figura 11: Triángulo de Sierpinski $\mathcal{T}$



Como es bien conocido $\mathcal{T}$ es un continuo localmente conexo. Hay tres puntos en $\mathcal{T}$ cuyo orden es igual a 2 y son los puntos ubicados en los vértices del triángulo inicial S_1 . Hay una cantidad numerable de puntos de orden 4 que son los vértices de los triángulos resultantes al hacer las particiones mencionadas en la construcción de $\mathcal{T}$. Aquellos puntos que no son vértices de algún triángulo, son de orden 3. Es claro además que $\text{End}(\mathcal{T}) = \emptyset$.

Definición 1.14. Sea X un continuo. Se dice que X es semilocalmente conexo si tiene una base de vecindades para las cuales el complemento de cada uno de sus elementos tiene un número finito de componentes.

El abanico armónico mostrado en la Figura 5 no es semilocalmente conexo ya que vecindades pequeñas de $(0, 0)$ tienen en su complemento, una cantidad numerable de componentes. Con el siguiente ejemplo mostramos un continuo semilocalmente conexo que no es localmente conexo.

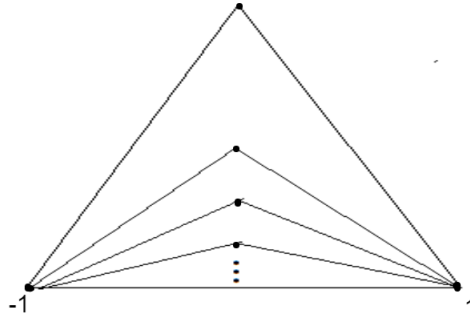
Ejemplo 1.15. Sea $X = \text{Sus}(\{(0, 0)\} \cup \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\})$; esto es,

$$X = ([-1, 1] \times (\{(0, 0)\} \cup \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\})) / \sim,$$

donde $\{-1\} \times (\{(0, 0)\} \cup \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\})$ y $\{1\} \times (\{(0, 0)\} \cup \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\})$ son las únicas clases no degeneradas por $\sim$ (ver Figura 12). Este continuo se

conoce como *suspensión armónica*. Es claro que X no es localmente conexo, pues no es localmente conexo en $(0, 0)$. Sin embargo, para cada punto podemos definir una base de vecindades donde su complemento es conexo. Es decir, X es *semilocalmente conexo*.

Figura 12: Suspensión armónica



A continuación mostramos que todo continuo localmente conexo es semilocalmente conexo.

Teorema 1.16. *Sea X un continuo. Si X es localmente conexo, entonces X es semilocalmente conexo.*

Demostración. Sean X un continuo localmente conexo, $x_0 \in X$ y V un abierto de X tal que $x_0 \in V$. Veamos que existe un abierto U tal que $x_0 \in U \subseteq V$ y $X \setminus U$ tiene una cantidad finita de componentes.

Se tiene que $X \setminus V$ es cerrado y como X es compacto, $X \setminus V$ es compacto. Por otro lado, X es localmente conexo, luego, para todo $x \in X \setminus V$ existe un conjunto abierto y conexo U_x tal que $x \in U_x$ y $x_0 \notin \text{cl}_X(U_x)$.

Como $X \setminus V$ es compacto, existe un conjunto finito $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq X \setminus V$ tal que $X \setminus V \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^m \text{cl}_X(U_{x_i})$ y $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^m \text{cl}_X(U_{x_i})$. Sea $U = X \setminus \bigcup_{i=1}^m \text{cl}_X(U_{x_i})$. Así, U es abierto, $x_0 \in U \subseteq V$ y $X \setminus U$ tiene un número finito de componentes. De lo anterior, X es semilocalmente conexo. ■

Definición 1.17. *Sean X un continuo y $p \in X$. Diremos que X es conexo en pequeño en p , si toda vecindad de p contiene una vecindad conexa de p . Si X es conexo en pequeño en todo punto, se dice que X es conexo en pequeño.*

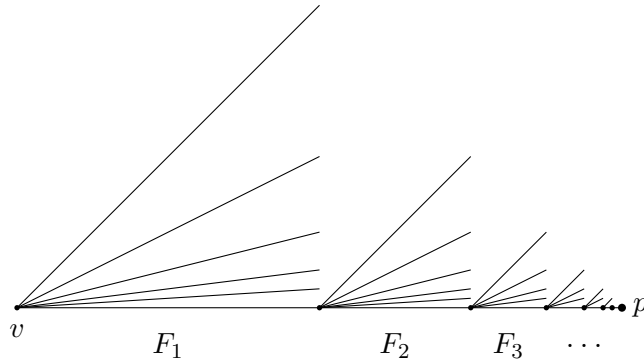
Note que si un continuo X es *localmente conexo* en un punto p entonces es *conexo en pequeño* en p , sin embargo el recíproco de esta observación no es cierto y esto se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.18. Consideremos el abanico armónico F_H definido en el Ejemplo 1.5. Sea

$$X = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) \cup \{p\},$$

donde F_i es homeomorfo a F_H para cada $i \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \{p\}$, como se muestra en la Figura 13; es decir X es la unión de una sucesión de abanicos armónicos que se van tocando dos a dos, junto con el punto de convergencia p .

Figura 13: Conexo en pequeño y no localmente conexo



El continuo X es conexo en pequeño en el punto p , pues si definimos $U_n = (\bigcup_{i=n}^{\infty} F_i) \cup \{p\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es un sistema de vecindades conexas de p . Sin embargo, como se puede verificar, todo abierto conexo que contiene a p debe también contener a v . Así, X no es localmente conexo en p .

Con el siguiente resultado mostramos que las nociones de conexidad local y conexidad en pequeño son equivalentes de manera global.

Teorema 1.19. Sea X un continuo. Entonces, X es conexo en pequeño si, y solo si, X es localmente conexo.

Demostración. Por definición sabemos que si X es localmente conexo, entonces es conexo en pequeño.

Probemos la otra implicación. Sean $x \in X$ y U un abierto de X . Sea C la componente de U tal que $x \in C$. Como X es conexo en pequeño, existe una vecindad conexa V_x tal que $V_x \subset U$. Note que $V_x \cap C \neq \emptyset$, C una componente y V_x conexo,

por lo tanto, $V_x \subset C$. Se tiene que como $x \in \text{int}_X(V_x)$, C es una componente abierta. Finalmente, dado que C es conexo, $x \in C$ y $C \subset U$ se tiene entonces que X es localmente conexo para todo $x \in X$. ■

Los continuos *localmente conexos* también son conocidos como *continuos de Peano*.

Proposición 1.20. *Sea X un continuo de Peano. Si X no es un arco, entonces X contiene un triodo simple o una curva cerrada simple.*

Demostración. Sea X un continuo de Peano que no es un arco. Sean a, b y c puntos en X tal que $X \setminus \{a\}$, $X \setminus \{b\}$ y $X \setminus \{c\}$ son conexos (ver [1, Teorema 10.27]). Por la conexidad local de X y como $X \setminus \{a\}$ es abierto, tenemos que existe un arco $A(bc) \subset X \setminus \{a\}$ que une los puntos b y c . De la misma forma, existen arcos $A(ab) \subset X \setminus \{c\}$ que une a y b , y $A(ac) \subset X \setminus \{b\}$ que une a y c . Sea $Y = A(ab) \cup A(ac) \cup A(bc)$. Es fácil ver si Y no contiene una curva cerrada simple, entonces Y es un triodo simple. ■

El siguiente teorema nos será de utilidad más adelante.

Teorema 1.21. *Sea X un continuo de Peano. Si X no contiene algún triodo simple, entonces X es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración. Sea X un continuo de Peano que no contiene triodos simples. Supongamos que X no es un arco y veámos que es una curva cerrada simple.

De la Proposición 1.20 se tiene que existe S , una curva cerrada simple, tal que $S \subset X$ y supongamos que $X \setminus S \neq \emptyset$. Sea $p \in X \setminus S$, como X es un continuo de Peano, es arcoconexo, entonces se tiene que dado un punto $q \in S$ existe $A(p, q) \subset X$. De aquí, es sencillo ver que X contiene un triodo simple, lo que contradice la hipótesis inicial, por lo tanto, $X \setminus S = \emptyset$, y $X = S$; es decir, X es una curva cerrada simple. ■

A continuación se presenta la definición de continuo de convergencia la cual usaremos para determinar cuándo un continuo es conexo en pequeño.

Definición 1.22. *Sean X un continuo y A un subcontinuo no degenerado de X . Se dice que A es un continuo de convergencia si existe una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X tal que $A = \lim_{i \rightarrow \infty} A_i$, y $A \cap A_i = \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

En la curva senoidal del topólogo definida en el Ejemplo 1.4, el subcontinuo $\{0\} \times [-1, 1]$ es un continuo de convergencia, como se verifica fácilmente.

Además, si X y Y son continuos no degenerados y $p \in Y$, entonces $Z = X \times \{y\}$ es un continuo de convergencia. Pues, como Y no es degenerado, existe una sucesión $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ en Y tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y$. Así, $\lim_{i \rightarrow \infty} X \times \{y_i\} = Z$, donde $Z \cap (X \times \{y_i\}) = \emptyset$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.23. *Sea X un continuo. Definamos*

$$N = \{x \in X : X \text{ no es conexo en pequeño en } x\}.$$

Si $p \in N$, entonces existe un continuo de convergencia K de X tal que $p \in K$ y $K \subset N$.

Demostración. Sea $p \in N$ y construyamos el conjunto K .

Como $p \in N$ entonces X no es conexo en pequeño en p , luego existe M una vecindad cerrada de p tal que si consideramos a C la componente de M que contiene a p se cumple que $p \notin \text{int}_X(C)$ y por tanto, $p \in \text{cl}_X(M \setminus C)$. De lo anterior podemos considerar una sucesión convergente $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $M \setminus C$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = p$.

Sea C_i la componente de M que contiene a p_i para todo i . Supongamos que para algún $i \in \{1, 2, \dots\}$ se tiene que $C_i \cap C \neq \emptyset$. Entonces $C_i \cup C$ sería un subcontinuo de M y como C es maximal, $C_i \cup C \subset C$. De lo anterior, $p_i \in C$ lo cual contradice la escogencia de p_i . Así, $C_i \cap C = \emptyset$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Sea Q una vecindad cerrada de p tal que $Q \subset \text{int}_X(M) \subset M$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que para todo i , $p_i \in Q$ y consideremos K_i la componente de Q que contiene a p_i . Claramente $K_i \subset C_i$ pues C_i es la componente de M que contiene a p_i y $Q \subset M$.

Si consideramos la sucesión $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos de X , se tiene que admite una subsucesión $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergente a un continuo $K \subset X$, esto por [7, Teorema 4.18 p.61]. Se tiene entonces que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} K_j = K \tag{1.1}$$

Es claro que cada $p_j \in K_j$, además por (1.1) y el hecho que $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = p$, se tiene que $p \in K$. Por otro lado, cada $\{K_j\} \subset Q$ y Q es cerrado en X entonces

$\text{cl}_X(K) \subset Q \subset \text{int}_X(M)$ luego $K \subset M$, de aquí que $K \subset C$ pues C es la componente de M que contiene a p . Como ya se mencionó previamente, para todo j , $K_j \subset C_j$ además $C_j \cap C = \emptyset$ y $K \subset C$ luego, para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$K \cap K_j = \emptyset \quad (1.2)$$

$K \neq \{p\}$, pues se tiene por el Teorema 1.26 que para todo i : $K_i \cap \text{Fr}(Q) \neq \emptyset$ luego $K \cap \text{Fr}(Q) \neq \emptyset$ y dado que Q es una vecindad de p entonces $p \notin \text{Fr}(Q)$ luego K es no degenerado.

De 1.1, 1.2 y el hecho que K es no degenerado, se tiene por la Definición 1.22 que K es un continuo de convergencia.

Ahora veamos que $K \subset N$. Supongamos que existe $x \in K \setminus N$, luego $x \in K \subset M$ así que M es una vecindad de x y C la componente de M que contiene a x . De otro lado, como $x \notin N$ se tiene que X es conexo en pequeño en x entonces, existe una vecindad conexa G de x tal que $G \subset M$, y por la maximalidad de C , se cumple que $G \subset C$.

Por (1.1) y dado que $x \in K$ se tiene que $x \in \limsup K_i$ y sabemos que para todo i : $K_i \subset C_i$ luego, $\limsup K_i \subset \limsup C_i$. Por la definición de límite superior que se presentó previamente en este capítulo, se tiene que para algún l , $G \cap C_l \neq \emptyset$ luego $C \cap C_l \neq \emptyset$ y como ya vimos anteriormente esto contradice la escogencia de p_i por lo tanto, $K \subset N$. ■

En adelante, como es usual, $\aleph_0$ denotará la cardinalidad de $\mathbb{N}$.

Teorema 1.24. *Sean X un continuo y $x \in X$. Si $\text{Ord}_X(x) < \aleph_0$, entonces todo subcontinuo de X es un continuo de Peano.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo tal que $\text{Ord}_X(x) < \aleph_0$ para cada punto $x \in X$. Veamos primero que X no contiene continuos de convergencia. Supongamos lo contrario, esto es, existe una sucesión $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de continuos disjuntos dos a dos tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = A$, donde A es un continuo no degenerado. Nótese que si $x \in A$ y U es una vecindad de x tal que $A \setminus U \neq \emptyset$, entonces $\text{Fr}(U) \cap A_i \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de índices. Así, la cardinalidad de $\text{Fr}(U)$ es infinita, lo que contradice que el orden de x es finito. De lo anterior, X no contiene continuos de convergencia.

Por el Teorema 1.23, X es conexo en pequeño en todo punto. Así, X es localmente conexo, por el Teorema 1.19. Es decir, X es un continuo de Peano. ■

El siguiente resultado afirma que el arco y la curva cerrada simple son los únicos continuos donde todos sus puntos tienen orden menor o igual a 2.

Teorema 1.25. *Sea X un continuo no degenerado. Entonces, X es un arco o una curva cerrada simple si, y solo si, $\text{Ord}_X(x) \leq 2$, para todo $x \in X$.*

Demostración. La primera implicación se obtiene por las definiciones de arco y curva cerrada simple.

Ahora bien, supongamos que $\text{Ord}_X(x) \leq 2$, para todo $x \in X$. Por el Teorema 1.24, tenemos que X es un continuo de Peano. Además, es claro que X no contiene ningún triodo simple, pues el triodo tiene un punto de orden 3. Así, por el Teorema 1.21, se tiene que X es un arco o una curva cerrada simple. ■

La demostración del siguiente teorema se aparta de los objetivos del presente trabajo; sin embargo, para el lector interesado, su prueba se puede encontrar en [7, Teorema 5.6 p.74].

Teorema 1.26. *Sean X un continuo y E un subconjunto propio no vacío de X . Si K es una componente de E , entonces $\text{cl}_X(K) \cap \text{Fr}(E) \neq \emptyset$.*

EL siguiente resultado caracteriza los grafos.

Teorema 1.27. *Un continuo X es un grafo si se cumple que:*

1. $\text{Ord}_X(x) < \aleph_0$ para cada $x \in X$ y;
2. $\text{Ord}_X(x) \leq 2$ para cada x excepto tal vez un número finito de puntos.

Demostración. De acuerdo con la Definición 1.2, es claro que todo grafo cumple las condiciones (1) y (2). Para probar la implicación inversa del teorema, empecemos por notar que si para todo $x \in X$ se tiene que $\text{Ord}_X(x) \leq 2$ entonces X es un grafo, esto se tiene por el Teorema 1.25. Supongamos de manera inductiva que si X es un continuo que cumple las condiciones (1) y (2) del teorema, y tiene a lo más k puntos de orden mayor o igual que 3 entonces, X es un grafo.

Sea Z el continuo que satisface (1) y (2) y que tiene a lo mas $k + 1$ puntos p_i , $1 \leq i \leq k+1$ con orden mayor o igual que 3 en Z . Como Z cumple la condición (1)

entonces Z es un continuo de Peano (Teorema 1.24) luego, existe un subconjunto U de Z abierto y conexo tal que $p_i \in U$ y $p_i \notin \text{cl}_Z(U)$ para todo $i \neq 1$.

Note que $\text{cl}_Z(U)$ es un continuo y p_1 es el único punto de orden mayor o igual que 3 que vive en $\text{cl}_Z(U)$. Supongamos que $n = \text{Ord}_{\text{cl}_Z(U)}(p_1)$. Note además, que $n < \aleph_0$ pues $p_1 \in Z$ y Z satisface la condición (1) del teorema. Dadas las condiciones anteriores, se tiene que p_1 es el vértice de un n -odo simple, el cual es una vecindad de p_1 en $\text{cl}_Z(U)$ y por lo tanto, en Z [7, Lema 9.9]. Como Z es un continuo de Peano, existe un abierto conexo V de Z tal que $p_1 \in V$, $\text{cl}_Z(V)$ es n -odo y $|\text{Fr}(V)| = n$, además $\text{Fr}(V) = \text{Fr}(Z \setminus V)$; se tiene que $Z \setminus V$ tiene a lo mas n componentes $K_1, K_2, \dots, K_j$ (ver [7, Proposición 5.19]). Es claro que $p_1 \notin K_i$ además, por hipótesis de inducción se tiene que cada K_i es un grafo, por el Teorema 1.26, se tiene que para cada componente K_i , $K_i \cap \text{cl}_Z(V) \neq \emptyset$, luego $K_i \cap \text{cl}_Z(V) \subset \text{Fr}(V)$ así $K_i \cap \text{cl}_Z(V)$ es un conjunto finito. Sabemos que $\text{cl}_Z(V)$ es un grafo, entonces $K_1 \cup \text{cl}_Z(V)$ es un grafo [7, Proposición 9.2 p.141]. Se tiene que $(\text{cl}_Z(V) \cup K_1) \cap K_2 = \text{cl}_Z(V) \cap K_2$, luego $(\text{cl}_Z(V) \cup K_1) \cup K_2$ es un grafo, repitiendo este procedimiento j veces se tiene que Z es un grafo. Mas aún, se tiene por inducción, que si un continuo cumple las condiciones (1) y (2) entonces es un grafo. ■

Lema 1.28. Sean X un continuo y A un subcontinuo propio de X . Si K es una componente de $X \setminus A$ entonces $K \cup A$ es un continuo.

Demostración. Veamos que $K \cup A$ es un continuo.

Como K es una componente, entonces $\text{cl}_X(K)$ es conexo. Además, K es componente de $X \setminus A$, luego $\text{cl}_X(K) \setminus K \subseteq A$. Entonces, $\text{cl}_X(K \cup A) = \text{cl}_X(K) \cup \text{cl}_X(A) = \text{cl}_X(K) \cup A = K \cup A$. Así, $K \cup A$ es compacto.

Sea $x \in \text{cl}_X(K) \setminus K$. Como K es conexo, $K \cup \{x\}$ es conexo. Además, $x \in A$ y $A \cap (K \cup \{x\}) \neq \emptyset$. De lo anterior, $A \cup (K \cup \{x\})$ es conexo. Pero $A \cup (K \cup \{x\}) = A \cup K$. Así, $K \cup A$ es conexo y por tanto, un continuo. ■

El siguiente teorema, que caracteriza a las dendritas de acuerdo al orden de sus puntos, será útil en el desarrollo del segundo capítulo.

Teorema 1.29. Sea X un continuo. Entonces, X es una dendrita si, y solo si, $X = \text{End}(X) \cup \text{Cut}(X)$.

Demostración. Sean X una dendrita y $p \in X$ tal que $p \notin \text{Cut}(X)$. Veamos que $p \in \text{End}(X)$.

Como X es un continuo localmente conexo y $p \notin \text{Cut}(X)$, dado $\epsilon > 0$ existe U abierto y conexo de X tal que $\text{diam}(U) < \epsilon$ y $X \setminus U$ es conexo.

Ahora bien, supongamos que $|\text{Fr}(U)| \geq 2$ y sean $q, r \in \text{Fr}(U)$ tales que $q \neq r$. Por [7, Proposición 10.9 p.169] todo subconjunto conexo de una dendrita es arcoconexo, por lo tanto U y $X \setminus U$ son arcoconexos, luego existe un arco $A(q, r)$ contenido en $U \cup \{q, r\}$.

Dado que $q, r \in \text{Fr}(U)$ entonces $q, r \in X \setminus U$ luego existe $B(p, q)$ un arco contenido en $X \setminus U$ con extremos q y r . Es claro que $A \cup B$ es una curva cerrada simple y $A \cup B \subset X$ lo que contradice el hecho que X es una dendrita, luego $|\text{Fr}(U)| \leq 1$ y dado que X es no degenerado y $\text{Fr}(U) \neq \emptyset$ entonces $p \in \text{End}(X)$.

Por otra parte, sea X un continuo tal que para todo $p \in X$ se cumple que $p \in \text{Cut}(X)$ ó $p \in \text{End}(X)$ y veamos que X es una dendrita, es decir, es localmente conexo y no contiene curvas cerradas simples.

Es claro que ningún punto final de X puede pertenecer a un continuo de convergencia de X , luego X no posee continuos de convergencia. Por [7, Teorema 10.4 p.167] un continuo es hereditariamente localmente conexo si, y solo si, no posee continuos de convergencia, luego X es hereditariamente localmente conexo y por lo tanto es localmente conexo.

Supongamos que X contiene una curva cerrada simple Z . Es claro que ningún punto final de X puede estar en Z , luego todo punto en Z es un punto de corte de X y por lo tanto Z tendría puntos de corte, lo que contradice el hecho de ser una curva cerrada simple. Así X cumple con las condiciones en la definición de dendrita, ser localmente conexo y no contener curvas cerradas simples. ■

Definición 1.30. *Un continuo se dice hereditariamente localmente conexo si todo subcontinuo es localmente conexo.*

Del Teorema 1.24 y de la Definición 1.2, se tiene que todo grafo es un continuo hereditariamente localmente conexo. El resultado mostrado en [7, Teorema 10.4 p.167] garantiza que un continuo X es hereditariamente localmente conexo si, y solo si, X no contiene continuos de convergencia. Las dendritas también son ejemplos de continuos hereditariamente localmente conexos (ver [7, Corolario 10.5]).

Una 2-celda es un ejemplo de un continuo que es *localmente conexo* pero no es *hereditariamente localmente conexo*; ya que contiene copias de la curva senoidal del topólogo, espacio que no es *localmente conexo* como se mencionó en un ejemplo previo.

Definición 1.31. Sean X un continuo y $x \in X$. Se dice que X es racional en x si existe una base de vecindades de x con frontera numerable; esto es, existe $\mathcal{B}_x$ base de vecindades de x tal que $|\text{Fr}(B)| \leq \aleph_0$ para cada $B \in \mathcal{B}_x$. Si X es racional en todo punto entonces se dice que X es un continuo racional.

En la curva senoidal del topólogo, continuo mostrado en el Ejemplo 1.4, se tiene que es racional. En el abanico armónico, continuo mostrado en el Ejemplo 5, F_H es racional.

Los siguientes resultados los usaremos en el Capítulo 2. Dado que las demostraciones son difíciles y los argumentos utilizados se alejan de los objetivos del presente trabajo, las citamos a continuación para que el lector interesado las pueda consultar, respectivamente: Teorema 1.32 [10, Teorema 3.3, pág.94] y Teorema 1.33 [10, Corolario 9.43, pág.63].

Teorema 1.32. Sea X un continuo. Si X es hereditariamente localmente conexo, entonces X es racional.

Teorema 1.33. Sean X un continuo y L la familia de puntos de corte local de X . Si X es racional, entonces L es denso.

Definición 1.34. Sea $X_1, X_2, X_3, \dots$ una sucesión de conjuntos, decimos que la sucesión es nula si $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(X_n) = 0$.

Teorema 1.35. Sean X un continuo hereditariamente localmente conexo. Entonces, toda sucesión de componentes de un abierto es nula.

Demostración. Sea U un abierto de X y $\{L_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de componentes de U . Veamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(L_n) = 0$. Como X es compacto, $\{\text{cl}_X(L_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{\text{cl}_X(L_{i_j})\}_{j \in \mathbb{N}}$, tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{cl}_X(L_{i_j}) = B$ para algún compacto no vacío B .

Note que B es un continuo. Supongamos que B tiene más de un punto. Sean $x, y \in B$, con $x \neq y$. Como X es localmente conexo, existe un continuo W tal que $x \in \text{int}_X(W)$ y $y \notin W$. Como $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{cl}_X(L_{i_j}) = B$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $L_{i_j} \cap W \neq \emptyset$ para cada $j \geq N$. Sea $Z = W \cup (\bigcup_{j=N}^{\infty} \text{cl}_X(L_{i_j})) \cup B$. Observe que Z es

un continuo. Como L_{i_j} es una componente de U para cada j , Z no es localmente conexo en y . Esto contradice que X es hereditariamente localmente conexo. Así, B tiene un único punto y $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{diam}(\text{cl}_X(L_{i_j})) = 0$. Este proceso se puede aplicar a cualquier subsucesión de $\{L_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. De lo anterior, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\text{cl}_X(L_n)) = 0$ y $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es nula. ■

Definición 1.36. Sea X un continuo. Se dice que X es irreducible si existen $a, b \in X$ tales que no existe un subcontinuo propio que contenga $\{a, b\}$; es decir, si existe K un subcontinuo de X y $\{a, b\} \subset K$, entonces $K = X$.

Los puntos a y b se denominan *puntos de irreducibilidad* del continuo X .

El arco es un continuo irreducible en sus puntos finales. Más aún, los puntos finales de todo arco son los únicos puntos de irreducibilidad.

Ejemplo 1.37. Sea W la curva senoidal del topólogo descrita en el Ejemplo 1.4. Si $p \in \{0\} \times [-1, 1]$ y $q = (1, \sin(1))$, entonces W es irreducible entre p y q .

Para ver esto, supongamos que existe K un subcontinuo de W tal que $\{p, q\} \subset K$. Como K es conexo, se tiene que $\{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\} \subseteq K$. Además, como K es compacto, $\{0\} \times [-1, 1] \subset K$. Así, $W = K$.

Dada la manera arbitraria como seleccionamos p , se tiene que todo punto en el conjunto $\{0\} \times [-1, 1]$ es un punto de irreducibilidad de W .

Sean X un continuo, Y un subcontinuo de X y A y B subconjuntos cerrados de Y . Decimos que Y es irreducible entre A y B si no existe un subcontinuo propio Z de Y tal que $Z \cap A \neq \emptyset$ y $Z \cap B \neq \emptyset$.

Teorema 1.38. Sean X un continuo, Y un subcontinuo de X y A y B dos subconjuntos cerrados de X . Si Y es irreducible entre A y B , entonces $Y \setminus (A \cup B)$ es conexo y denso en Y .

Demostración. Veamos que $Y \setminus (A \cup B)$ es conexo. Para cada $x \in Y$ definamos C_x la componente de $Y \setminus (A \cup B)$ tal que $x \in C_x$. Por el Teorema 1.26, se tiene que $\text{cl}_X(C_x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Definamos los siguientes conjuntos:

- $\mathcal{L}_A = \{\text{cl}_X(C) : C \text{ es componente de } Y \setminus (A \cup B) \text{ y } \text{cl}_X(C) \cap A \neq \emptyset\};$ y
- $\mathcal{L}_B = \{\text{cl}_X(C) : C \text{ es componente de } Y \setminus (A \cup B) \text{ y } \text{cl}_X(C) \cap B \neq \emptyset\}.$

Veamos que los conjuntos $A \cup (\bigcup \mathcal{L}_A)$ y $B \cup (\bigcup \mathcal{L}_B)$ son cerrados. Haremos la prueba que $A \cup (\bigcup \mathcal{L}_A)$ es cerrado; la otra es semejante. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \cup (\bigcup \mathcal{L}_A)$ tal que $x_n \rightarrow x_0$ para algún $x_0 \in X$. Debemos verificar que $x_0 \in A \cup (\bigcup \mathcal{L}_A)$. Note que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene infinitos términos en A o en algún $\text{cl}_X(C) \in \mathcal{L}_A$, entonces $x_0 \in A \cup (\bigcup \mathcal{L}_A)$. Así, supongamos que $(\text{cl}_X(C_i))_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{L}_A$ tal que $x_i \in \text{cl}_X(C_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\text{cl}_X(C_i) \rightarrow L$ para algún subcontinuo L de Y (ver Definición 1.11). Como $\text{cl}_X(C_i) \cap A \neq \emptyset$ para cada $i \in \mathbb{N}$, $L \cap A \neq \emptyset$. Si $x_0 \in L \cap (Y \setminus (A \cup B)) \neq \emptyset$, entonces tomando C' la componente de $L \cap (Y \setminus (A \cup B))$ que contiene a x_0 , su adherencia $\text{cl}_X(C')$ debe intersectar a A , por el Teorema 1.26. De lo anterior, $x_0 \in A \cup (\bigcup \mathcal{L}_A)$ y $A \cup (\bigcup \mathcal{L}_A)$ es cerrado de X .

Finalmente, observemos que $Y = ((A \cup \bigcup \mathcal{L}_A) \cap Y) \cup ((B \cup \bigcup \mathcal{L}_B) \cap Y)$. Luego $(\bigcup \mathcal{L}_A \cap Y) \cap (\bigcup \mathcal{L}_B \cap Y) \neq \emptyset$, por la conexidad de Y . Así, existe C componente de $Y \setminus (A \cup B)$ tal que $\text{cl}_X(C) \in \mathcal{L}_A \cap \mathcal{L}_B$. Pero Y es irreducible entre A y B . Así, $\text{cl}_X(C) = Y$. De lo anterior, $C = Y \setminus (A \cup B)$, con lo que concluimos nuestra demostración. ■

Capítulo

2

CONTINUOS $\frac{1}{2}$ -HOMOGÉNEOS

En este capítulo presentamos formalmente la definición de continuo $\frac{1}{2}$ -homogéneo así como ejemplos. Además, en el Teorema 2.23, mostramos una caracterización del arco, como el único continuo $\frac{1}{2}$ -homogéneo y semilocalmente conexo con más de un punto de corte. Para llegar a este punto, introduciremos la definición de *nodo* y algunas de sus propiedades. El Teorema 2.28, nos muestra que no existen continuos $\frac{1}{2}$ -homogéneos que tengan una cantidad finita, mayor que uno, de puntos de corte. Finalmente presentamos la definición del *Arrete Hawaiian*, y en el Teorema 2.30, damos una caracterización de este espacio usando la teoría desarrollada tanto en este capítulo como en los preliminares.

Comenzamos este capítulo formalizando la definición de continuo homogéneo, que mencionamos en la introducción.

Definición 2.1. Sea X un continuo. Se dice que X es homogéneo si para todos $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $h: X \rightarrow X$ tal que $h(x) = y$.

Ejemplo 2.2. Consideremos la curva cerrada simple $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Se tiene que para cualesquiera par de puntos $p, q \in S^1$, digamos $p = e^{i\alpha}$ y $q = e^{i\theta}$, con $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$. Se establece la función de rotación $f_{\theta-\alpha}: S^1 \rightarrow S^1$ definida por $f(z) = ze^{i(\theta-\alpha)}$ para cada $z \in S^1$. Es claro que $f(p) = q$. Además, f es un homeomorfismo de S^1 en sí mismo. De lo anterior S^1 es un continuo homogéneo.

Usando un argumento similar, es sencillo ver que el toro $S^1 \times S^1$ es otro ejemplo de continuo homogéneo.

Dado un continuo X . Denotaremos por $\text{Aut}(X)$ la familia de todos los homeomorfismos de X en sí mismo. Para cada $x, y \in X$ definimos la relación R , dada

por

$$xRy \text{ si, y solo si, existe } h \in \text{Aut}(X) \text{ tal que } h(x) = y. \quad (2.1)$$

La siguiente proposición es fundamental para el desarrollo de este trabajo.

Proposición 2.3. *Sea X un continuo. La relación definida en (2.1) es una relación de equivalencia sobre X .*

Demostración. Veamos una a una las propiedades que clasifican a R como una relación de equivalencia.

- R es reflexiva: Consideremos la función identidad $\text{Id}_X: X \rightarrow X$. Se tiene que $\text{Id}_X \in \text{Aut}(X)$ y $\text{Id}_X(x) = x$ para todo $x \in X$, es decir, xRx .
- R es simétrica: Sean $x, y \in X$. Si xRy . Existe $h \in \text{Aut}(X)$ tal que $h(x) = y$. Consideremos $h^{-1}: X \rightarrow X$ la función inversa de h . Es claro que $h^{-1} \in \text{Aut}(X)$ y $h^{-1}(y) = x$. Se concluye que yRx .
- R es transitiva: Sean $x, y, z \in X$ tal que xRy y yRz . Sean $h, g \in \text{Aut}(X)$ tales que $h(x) = y$ y $g(y) = z$. Consideremos la función $f = g \circ h$. Se cumple que $f: X \rightarrow X$ es un homeomorfismo y $f(x) = g(h(x)) = g(y) = z$. Se concluye que xRz .

■

Definición 2.4. *Sean X un continuo y $x \in X$. Se define la órbita de x como el conjunto de las imágenes de x obtenidas mediante homeomorfismos de X en sí mismo y se representa con el conjunto $\mathcal{O}(x)$. Esto es*

$$\mathcal{O}(x) = \{h(x) : h \in \text{Aut}(X)\}.$$

Nótese que ésto es equivalente a decir que la órbita de un punto es la clase que lo contiene, generada por la relación R dada en (2.1).

Para $[0, 1]$ se tienen exactamente dos órbitas $(0, 1)$ y $\{0, 1\}$ (esto lo formalizamos en el Ejemplo 2.7); todo espacio homogéneo (por ejemplo S^1 ó $S^1 \times S^1$) tiene exactamente una órbita.

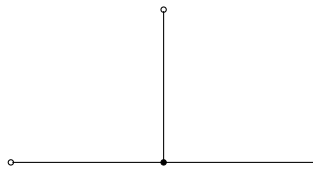
Ejemplo 2.5. *Consideremos un espacio T denominado triodo simple y que se define como un grafo que es unión de tres arcos disjuntos en todos sus puntos*

menos uno, el punto p , que es donde concurren los tres. Esto es, un triodo simple es un espacio topológico homeomorfo a $([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \subseteq \mathbb{R}^2$. (Ver Figura 14.)

El triodo simple $T = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$ tiene tres órbitas:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(0, 0) &= \{(0, 0)\}, \\ \mathcal{O}(-1, 0) &= \{(-1, 0), (1, 0), (0, 1)\} \text{ y} \\ \mathcal{O}(\frac{1}{2}, 0) &= T \setminus \{(0, 0), (-1, 0), (1, 0), (0, 1)\}.\end{aligned}$$

Figura 14: Triodo Simple T



Note que las clases de equivalencia que se generan con la relación R definida en (2.1) son los conjuntos $\mathcal{O}(x)$ en X ; es decir, para cada $x \in X$,

$$[x] = \{y \in X : \exists h \in \text{Aut}(X), h(x) = y\} = \{h(x) : h \in \text{Aut}(X)\} = \mathcal{O}(x).$$

Observación 1. Si el continuo X es homogéneo, se cumple que $\mathcal{O}(x) = X$, para todo $x \in X$.

Definición 2.6. Sea X un continuo. Diremos que X es $\frac{1}{2}$ -homogéneo si existen dos puntos $x_1, x_2 \in X$ tales que $X = \mathcal{O}(x_1) \cup \mathcal{O}(x_2)$.

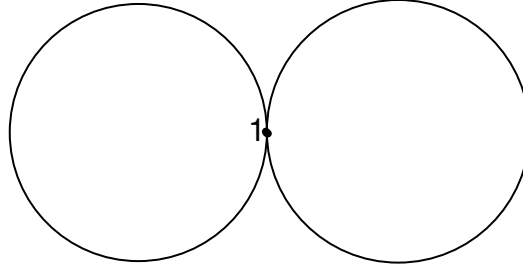
Ejemplo 2.7. El intervalo unitario $[0, 1]$ es $\frac{1}{2}$ -homogéneo. No es difícil ver que $\mathcal{O}(0) = \{0, 1\}$. Además, si $0 < t < s < 1$, basta definir $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{s-1}{t}x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq t; \\ \frac{s}{t-1}x + \frac{s}{1-t} & \text{si } t \leq x \leq 1, \end{cases}$$

para cada $x \in [0, 1]$, tenemos que ϕ es un homeomorfismo tal que $\phi(t) = s$; es decir, $\mathcal{O}(s) = \mathcal{O}(t)$ y $\mathcal{O}(t) = (0, 1)$, para cada $t \in (0, 1)$. Luego, $[0, 1] = \mathcal{O}(0) \cup \mathcal{O}(t)$.

Ejemplo 2.8. Consideremos el continuo $X = S_1 \cup S_2$ donde $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 1\}$. Es claro que $S_1 \cap S_2 = \{1\}$. Note que el número 1 hace referencia al número complejo $1 + 0i$ (ver Figura 15).

Figura 15: $S_1 \cup S_2$



El continuo X es $\frac{1}{2}$ -homogéneo: El único punto que desconecta el espacio es 1, por lo tanto $\text{Cut}(X) = \{1\}$. Veremos que X tiene dos órbitas: $\mathcal{O}(1) = \{1\}$ y $\mathcal{O}(p) = X \setminus \{1\}$ para cualquier $p \in X \setminus \{1\}$. Para ver esto, mostraremos que existe un homeomorfismo $h: X \rightarrow X$ tal que $h(p) = q$, para cualesquiera $p, q \in X \setminus \{1\}$. Consideremos los siguientes casos:

- $p, q \in S_1$ ó $p, q \in S_2$. Podemos obtener un homeomorfismo $h: X \rightarrow X$ tal que $h(p) = q$ de la siguiente manera:

Consideremos el intervalo unitario $[0, 1]$ y la circunferencia unitaria S^1 y definamos la función $f: [0, 1] \rightarrow S^1$ dada por $f(x) = e^{2\pi i x}$, para cada $x \in [0, 1]$. Ahora bien, consideremos la función $\alpha: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por: $\alpha(0) = 1$, $\alpha(1) = 0$ y $\alpha(t) = s$ para $t, s \in (0, 1)$, como lo hicimos en el Ejemplo 2.7. La función α es un homeomorfismo. Para construir la función h , observemos que, para $p, q \in S_1 \setminus \{1\}$ existen s y t en $(0, 1)$ que son sus preimágenes mediante la función f y a su vez podemos establecer el homeomorfismo α , como ya se mencionó, tal que $\alpha(t) = s$. Luego $h(p) = f(\alpha(f^{-1}(p))) = f(\alpha(t)) = f(s) = q$.

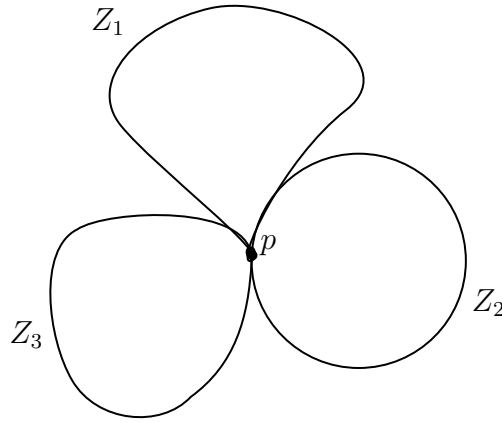
- Si $p \in S_1$ y $q \in S_2$ se tiene que $q = x + iy$ y consideremos la función g de reflexión sobre el eje $x = 1$, tal que $g(q) = q'$ donde $q' = (x - 1) + iy$, el punto en S_1 que se obtiene al reflejar q . Entonces p y q' están en S_1 . Luego, es posible establecer un homeomorfismo h como en el caso anterior, tal que $h(p) = q'$ y se puede establecer $g^{-1}(h(p)) = g^{-1}(q') = q$. Es decir, dados dos puntos, uno en cada circunferencia unitaria del espacio $S_1 \cup S_2$ es posible establecer un homeomorfismo que lleve a uno de ellos en el otro.

De lo anterior, concluimos que $X = \mathcal{O}(1) \cup \mathcal{O}(p)$. Luego X es $\frac{1}{2}$ -homogéneo.

El siguiente ejemplo muestra como construir continuos $\frac{1}{2}$ -homogéneos, apartir del ejemplo anterior.

Ejemplo 2.9. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define el espacio Y como la unión de n copias de S^1 con un único punto en común $\{p\}$, como se muestra en la Figura 16 para $n = 3$.

Figura 16: Espacio Y para $n = 3$



Esto es, $Y = Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_n$ tales que:

1. Z_i es una curva cerrada simple, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$;
2. existe $p \in Y$ tal que $Z_i \cap Z_j = \{p\}$ para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i \neq j$.

Veámos que Y es $\frac{1}{2}$ -homogéneo. El argumento es muy similar al que mostramos en el ejemplo anterior. Para ver esto, mostraremos que si $x, y \in Y \setminus \{p\}$, entonces existe un homeomorfismo $h: Y \rightarrow Y$ tal que $h(x) = y$. Con esto tendremos que Y tiene dos órbitas $\mathcal{O}(p) = \{p\}$ y $\mathcal{O}(x) = Y \setminus \{p\}$, para cualquier $x \in Y \setminus \{p\}$.

Consideremos los siguientes casos:

- $x, y \in Z_j$ para algún $j \in \{1, \dots, n\}$. Con el mismo procedimiento que empleamos en el Ejemplo 2.2, existe un homeomorfismo $h_1: Z_j \rightarrow Z_j$ tal que: $h_1(x) = y$ y $h_1(p) = p$. Así, definimos $h: Y \rightarrow Y$ naturalmente como:

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{si } x \in Z_j; \\ x & \text{si } x \notin Z_j. \end{cases}$$

Es claro que h es un homeomorfismo y $h(x) = y$.

- $x \in Z_i$ y $y \in Z_j$, donde $i \neq j$. Consideremos la función f como una reflexión en el plano, de una manera análoga a como se hizo en el caso 2 del Ejemplo 2.8 tal que $f(Z_i) = Z_j$ y $f(x) = x$ para cada $x \in Y \setminus (Z_i \cup Z_j)$. Así,

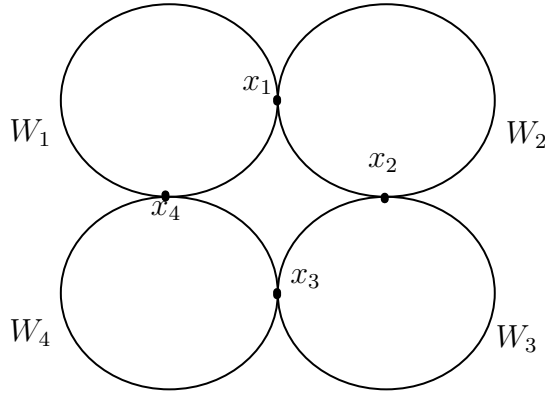
$f(x) = x'$ donde $x' \in Z_j$, luego como x' y y están en Z_j , se puede construir un homeomorfismo g como en el caso anterior y por lo tanto se puede considerar $h : Y \rightarrow Y$ un homeomorfismo tal que $h(x) = (g(f(x))) = g(x') = y$.

De lo anterior, es posible concluir que $Y = \mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(x)$, y Y es $\frac{1}{2}$ -homogéneo.

Usando circunferencias, construimos más ejemplos de continuos $\frac{1}{2}$ -homogéneos, como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.10. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define el espacio C como la unión de n copias de S^1 , que se intersecan dos a dos en un único punto, como se muestra en la Figura 17 para $n = 4$.

Figura 17: Espacio C para $n = 4$



Esto es, $C = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n$ tal que:

1. W_i es una curva cerrada simple, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$;
2. existen puntos diferentes $x_1, \dots, x_n \in C$ tal que $W_i \cap W_{i+1} = \{x_i\}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$; y $W_n \cap W_1 = \{x_n\}$.

El continuo C es $\frac{1}{2}$ -homogéneo. Nótese que podemos definir un homeomorfismo $d: X \rightarrow X$ tal que $d(W_i) = W_{i+1}$, $d(x_i) = x_{i+1}$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $d(W_n) = W_1$ y $d(x_n) = x_1$. Esto muestra que los puntos $\{x_1, \dots, x_n\}$ están en una misma órbita. Para mostrar que C tiene exactamente dos órbitas, sean $y, z \in C \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, y probemos que existe un homeomorfismo que envía y a z . Consideremos dos casos:

- $\{y, z\} \subseteq W_l$, para algún $l \in \{1, \dots, n\}$. Sean $x, x' \in \{x_1, \dots, x_n\}$ tales que x y x' son los dos puntos diferentes en W_l . Note que $W_l \setminus \{x, x'\}$ tiene

exactamente dos componentes, cada una de las cuales es homeomorfa a $(0, 1)$. Como $(0, 1)$ es homogéneo, si y y z están en la misma componente de $W_l \setminus \{x, x'\}$, existe un homeomorfismo $g: W_l \rightarrow W_l$ tal que $g(y) = z$, $g(x) = x$ y $g(x') = x'$. Así, $f: C \rightarrow C$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in W_l; \\ x & \text{si } x \in C \setminus W_l, \end{cases}$$

es un homeomorfismo. Luego, supongamos que y y z están en diferentes componentes de $W_l \setminus \{x, x'\}$. En esta situación, existe $g': W_l \rightarrow W_l$ un homeomorfismo tal que $g'(x) = x$, $g'(x') = x'$ e intercambiamos las componentes de $W_l \setminus \{x, x'\}$. Así, $f': C \rightarrow C$ definida por

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) & \text{si } x \in W_l; \\ x & \text{si } x \in C \setminus W_l, \end{cases}$$

es un homeomorfismo que ubica los puntos x y x' en la misma componente de $W_l \setminus \{x, x'\}$. A continuación, aplicamos nuevamente la función f para obtener un homeomorfismo $h: C \rightarrow C$, donde $h(y) = z$.

- $y \in W_l$ y $z \in W_k$ para algunos $l, k \in \{1, \dots, n\}$, con $l \neq k$. Supongamos que $l < k$. Sea $m = k - l$. Ahora, considerando d como lo definimos al empezar esta prueba, d^m es un homeomorfismo tal que $d^m(y)$ y z están en W_k . A continuación, aplicamos el caso anterior para construir el homeomorfismo $h: C \rightarrow C$ tal que $h(y) = z$.

De lo anterior, $\mathcal{O}(z) = C \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ para cada $z \in C \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, y C tiene dos órbitas: $\mathcal{O}(x_1) = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $\mathcal{O}(z) = C \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. Así, C es $\frac{1}{2}$ -homogéneo.

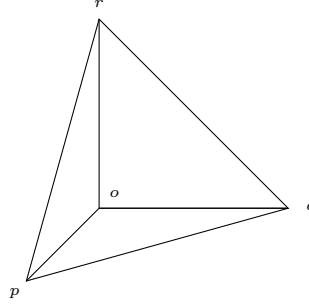
Ejemplo 2.11. Sea T el triodo simple definido como el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$T = \{([0, 1] \times \{0\} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{0\} \times [0, 1])\}.$$

Sean $o = (0, 0, 0)$, $p = (1, 0, 0)$, $q = (0, 1, 0)$ y $r = (0, 0, 1)$, se define el espacio A como sigue (Ver Figura 18):

$$A = T \cup \{tp + (1 - t)r : t \in [0, 1]\} \cup \{tq + (1 - t)r : t \in [0, 1]\} \cup \{tp + (1 - t)q : t \in [0, 1]\}.$$

Figura 18: Espacio A



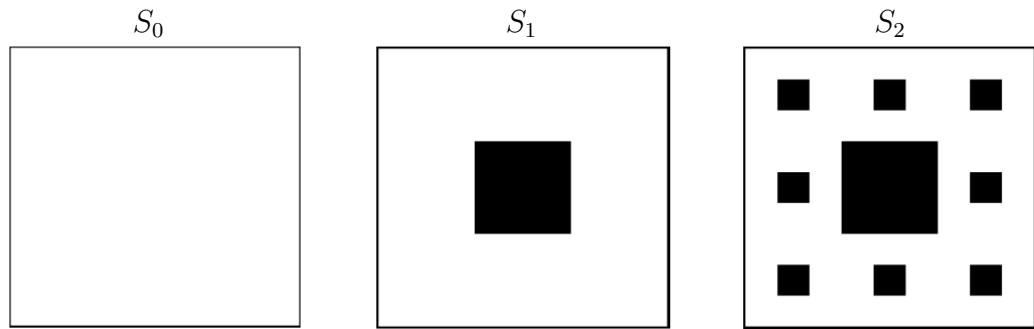
El espacio A es $\frac{1}{2}$ -homogéneo. Observe que A está formado por las aristas de un tetraedro. Así, mediante rotaciones, podemos argumentar que sus vértices o, p, q y r están en una misma órbita. Además, estas mismas rotaciones, generan homeomorfismos donde es posible enviar una arista en cualquier otra arista del tetraedro. De esto, para terminar nuestra prueba, solo debemos mostrar que para cualquier par de puntos x e y en una misma arista, existe un homeomorfismo $h: A \rightarrow A$ tal que $h(x) = y$. Sean $L_1, \dots, L_6$ las aristas del tetraedro. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\{x, y\} \subset L_1 \setminus \{s, t\}$, donde s y t son los puntos en $\{o, p, q, r\}$ que son los puntos finales de L_1 . Usando una construcción como la que mostramos en el Ejemplo 2.7, existe un homeomorfismo $f: L_1 \rightarrow L_1$ tal que $f(x) = y$, $f(s) = s$ y $f(t) = t$. Sea $h: A \rightarrow A$, definida para cada $z \in A$, por:

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in L_1; \\ z & \text{si } z \in A \setminus L_1. \end{cases}$$

Es claro que h es un homeomorfismo tal que $h(x) = y$. De esto concluimos que $\mathcal{O}(x) = A \setminus \{o, p, q, r\}$ para cada $x \in A \setminus \{o, p, q, r\}$, y $\mathcal{O}(o) = \{o, p, q, r\}$. Así, A es $\frac{1}{2}$ -homogéneo.

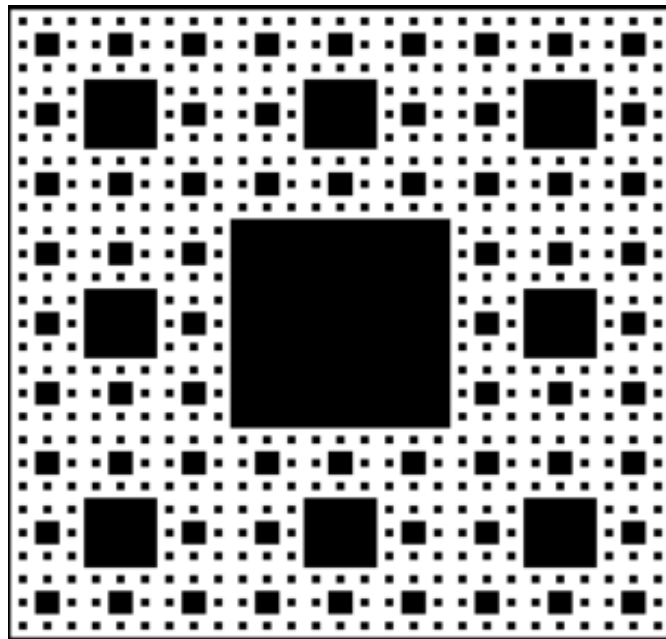
Ejemplo 2.12. Consideremos el espacio $S_0 = [0, 1] \times [0, 1]$ contenido en $\mathbb{R}^2$ y dividamos a S_0 en nueve cuadrados congruentes, luego tomemos el interior del cuadrado del centro y quitémoslo de S_0 , a este nuevo espacio lo denominaremos S_1 , es decir, $S_1 = S_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. A cada uno de los ocho cuadrados que nos quedaron en S_1 los vamos a dividir en nueve cuadrados congruentes, tal como se hizo inicialmente con S_0 y vamos a quitar el interior de cada uno de los ocho cuadrados centrales, a este espacio lo llamaremos S_2 (Ver Figura 19). De esta manera continuamos construyendo $S_3, S_4, \dots, S_n$.

Figura 19: Construcción de S_0 , S_1 y S_2



Definimos el espacio $S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$ el cual se conoce como Curva de Sierpinski (ver Figura 20).

Figura 20: Curva de Sierpiński



La Curva de Sierpiński es un continuo localmente conexo, cuyos complementos en el plano son componentes que tienen por fronteras curvas cerradas simples mutuamente disyuntas. Se denomina como parte racional de S a la unión de todas las fronteras de las componentes de su complemento en el plano. Sin embargo, la curva de Sierpiński no está formada sólo por la parte racional, los demás puntos forman un conjunto denso en S el cual se denomina parte irracional de la curva.

En [3] se enuncia y se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 2.13. *Sea S la curva de Sierpiński. Si $p, q \in S$, entonces existe un homeomorfismo $h : S \rightarrow S$ tal que $h(p) = q$ si, y solo si, p y q pertenecen ambos a la parte racional de S ó, ambos pertenecen a la parte irracional de S .*

De lo anterior es posible concluir que S es $\frac{1}{2}$ -homogéneo. Ya que $S = \mathcal{O}(x) \cup \mathcal{O}(y)$ donde x está en la parte racional de S y y pertenece a la parte irracional de S .

A continuación presentamos la definición de nodo, necesaria para el desarrollo de los objetivos de este capítulo, particularmente para la demostración del Teorema 2.23. Además presentamos un ejemplo que nos ayuda a ilustrar este concepto en un grafo, así como una caracterización de los nodos y algunos lemas y teoremas relacionados con esta definición.

Definición 2.14. *Sean X un continuo semilocalmente conexo y N un subconjunto cerrado de X . El conjunto N es un nodo de X si se cumple alguno de los siguientes enunciados:*

1. $N = \{p\}$ y $p \in \text{End}(X)$, ó
2. N satisface las siguientes dos propiedades:
 - N es un subconjunto no degenerado y maximal de X con la propiedad de ser conexo en X tal que $\text{Cut}(N) = \emptyset$, y
 - $N \cap \text{cl}(X \setminus N)$ consiste exactamente de un punto.

En este caso denotaremos $N \cap \text{cl}(X \setminus N) = \{p_N\}$ y $N^ = N \setminus \{p_N\}$.*

Los conjuntos N y $\text{cl}(X \setminus N)$ se denominan *conjuntos nodales*. Si $p \in \text{Cut}(X)$ y $X \setminus \{p\} = U \cup V$ entonces $U \cup \{p\}$ y $V \cup \{p\}$ son conjuntos nodales de X .

Lema 2.15. *Sean X y Y dos continuos y $F : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Si N es nodo de X entonces $F(N)$ es nodo de Y .*

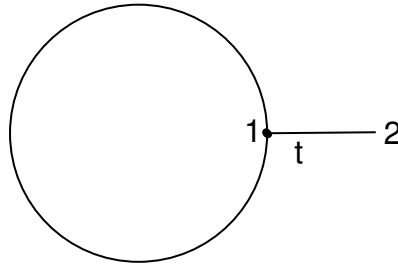
Demostración. Consideremos dos casos:

Si $N = \{p\}$ y $p \in \text{End}(X)$. F es un homeomorfismo, luego $\text{Ord}_X p = 1 = \text{Ord}_Y F(p)$ así $F(N) = F(\{p\}) \in \text{End}(Y)$.

En el caso 2, N es un nodo no degenerado de X , entonces N es un subconjunto conexo maximal de X tal que $\text{Cut}(N) = \emptyset$, por lo tanto, $F(N)$ es un conexo maximal de Y y $\text{Cut}(F(N)) = \emptyset$. Además, $F(N \cap \text{cl}_X(X \setminus N)) = F(N) \cap F(\text{cl}_X(X \setminus N)) = F(N) \cap \text{cl}_Y(F(X \setminus N)) = F(p_N)$. Luego $F(N)$ es un nodo de Y . ■

Ejemplo 2.16. Consideremos el continuo semilocalmente conexo $X = S^1 \cup \{(x \times \{0\}) : 1 < x \leq 2\}$. S^1 es un nodo no degenerado de X , ya que es un continuo maximal en X tal que $\text{Cut}(S^1) = \emptyset$. Consideremos un subconjunto de X que sea conexo y que contenga a S^1 , se tiene entonces algún conjunto de la forma $A_t = S^1 \cup I_t$ donde $I_t = (1, t)$ y $1 < t \leq 2$. Es claro que $\text{Cut}(A_t) \neq \emptyset$. Además se tiene que $S^1 \cap \text{cl}(X \setminus S^1) = \{1\}$. Un ejemplo de un nodo unipuntual de X es el conjunto $\{2\}$ ya que $2 \in \text{End}(X)$ (ver Figura 21).

Figura 21: Continuo X



Proposición 2.17. Sean X un continuo semilocalmente conexo y N y M nodos no degenerados de X . Se cumple que:

1. $p_N \in \text{Cut}(X)$.
2. N^* es un subconjunto abierto de X .
3. Si N y M son dos nodos diferentes de X entonces $N^* \cap M^* = \emptyset$.
4. El conjunto de nodos no degenerados de un continuo es a lo más numerable.

Demostración. Probemos 1. Veamos que $X \setminus \{p_N\}$ es desconexo. De la Definición 2.14, $N \cap \text{cl}(X \setminus N) = \{p_N\}$. Luego, $X \setminus \{p_N\} = X \setminus (N \cap \text{cl}(X \setminus N)) = X \setminus N \cup X \setminus \text{cl}(X \setminus N)$. Además, como N y $\text{cl}(X \setminus N)$ son cerrados en X . Así, $X \setminus N$ y $X \setminus \text{cl}(X \setminus N)$ son abiertos y como consideramos el espacio $X \setminus \{p_N\}$ entonces son además disjuntos. Luego $X \setminus \{p_N\}$ es desconexo. De esto, $p_N \in \text{Cut}(X)$ y tenemos la prueba de 1.

Para probar 2, veamos que todo punto de N^* es punto interior. Sea $x \in N^*$. Entonces $x \in N$ y $x \neq p_N$. Ahora bien, como N es un subconjunto cerrado de X se tiene que $N = \text{cl}(N) = \text{int}(N) \cup \text{bd}(N)$ así que $x \in \text{int}(N)$ o $x \in \text{bd}(N)$. Si $x \in \text{int}(N)$ entonces ya se tiene que x es punto interior; si se considera que

$x \in \text{bd}(N)$ entonces $x \in (\text{cl}(N) \cap \text{cl}(X \setminus N)) = (N \cap \text{cl}(X \setminus N)) = \{P_N\}$ pero como $x \in N^*$ entonces $x \neq P_N$. Luego todo punto en N^* es punto interior, así que N^* es abierto en X .

Para probar 3, sea $x \in N^* \cap M^*$. Se tiene que N y M son nodos de X . Luego tanto N como M son conexos maximales de X , así que $N \subset M$ y $M \subset N$; por tanto $N = M$.

Para probar 4, sea $\{N_i\}_{i \in I}$ la colección de nodos no degenerados y diferentes de un continuo X . Como X es métrico compacto, entonces X es separable. Todo espacio Hausdorff y separable contiene un conjunto denso numerable. De los numerales 2 y 3 de esta observación se tiene que el conjunto de nodos $\{N_i^*\}_{i \in I}$ es una colección de conjuntos abiertos y disjuntos dos a dos, luego el conjunto de índices I es numerable. ■

Lema 2.18. *Sean X un continuo semilocalmente conexo y $p \in X$. Si $p \in \text{Cut}(X)$ entonces X tiene por lo menos dos nodos.*

Para realizar la prueba de este Lema se hace uso del siguiente Teorema, cuya demostración puede ser consultada en [10, Teorema 8.1 p.77], sin embargo en tal demostración se utiliza un argumento análogo al que se encuentra en [1, Proposición 10.24 p.341].

Teorema 2.19. *Sean X un continuo semilocalmente conexo y N un subconjunto no degenerado de X . Si N es un subconjunto nodal de X entonces N contiene un nodo de X .*

Para demostrar el Lema 2.18, consideremos $p \in X$ tal que $p \in \text{Cut}(X)$. Se tiene que $X \setminus \{p\} = U \cup V$. Además, los conjuntos $U \cup \{p\}$ y $V \cup \{p\}$ son conjuntos nodales de X , luego por el Teorema 2.19 se cumple que existe por lo menos un nodo de X en $U \cup \{p\}$, análogamente existe por lo menos un nodo en $V \cup \{p\}$. Así que X tiene por lo menos dos nodos.

Lema 2.20. *Sea X un continuo. Si $N_1, N_2, \dots, N_k$ con $k \in \mathbb{N}$, son elementos del conjunto de nodos no degenerados de X entonces el conjunto $X \setminus \bigcup \{N_i^* : i = 1, 2, \dots, k\}$ es un continuo.*

Demostración. Para probar este lema se procede por inducción matemática.

Sea N_1 un nodo de X . De la Proposición 2.17, se tiene que N_1^* es un abierto de X y P_{N_1} es un punto de corte de X . Luego $X \setminus N_1^*$ es un cerrado de X . Sea

$X \setminus \{P_{N_1}\} = N_1^* \cup U$ donde U es un abierto de X tal que $U \cap N_1^* = \emptyset$. Note que U es una componente de $X \setminus \{P_{N_1}\}$. Así, del Lema 1.28, se tiene que $\{P_{N_1}\} \cup U$ es un continuo. Es claro que $X \setminus N_1^* = \{P_{N_1}\} \cup U$. Luego $X \setminus N_1^*$ es un continuo.

Supongamos ahora que $N_1, N_2, \dots, N_r$ son nodos diferentes y no degenerados de X , tales que si $T = \bigcup \{N_i^* : i = 1, \dots, r\}$, $X \setminus T$ es un continuo. Sea M un nodo de X diferente a $N_1, \dots, N_r$. Se tiene que $M \subset X \setminus T$. Como M es nodo de X , esto satisface la condición 1 de la Definición 2.14. Ahora bien, $P_M \in M \cap \text{cl}((X \setminus T) \setminus M) \subset M \cap \text{cl}(X \setminus M) = \{P_M\}$. Luego $M \cap \text{cl}((X \setminus T) \setminus M) = \{P_M\}$ y se cumplen las condiciones de la Definición 2.14. Luego M es un nodo de $X \setminus T$. Así, $(X \setminus T) \setminus M^*$ es un continuo. Pero, $(X \setminus T) \setminus M^* = X \setminus (N_1 \cup \dots \cup N_r \cup M)$. Con esto concluimos la prueba de nuestro lema. ■

Corolario 2.21. *Sea X un continuo. Si N es un nodo no degenerado de X , entonces $N \cap \text{Cut}(X) = \{P_N\}$.*

Demostración. Sea $q \in N$ tal que $q \neq P_N$, el conjunto $N \setminus \{q\}$ es conexo, ya que de la definición de nodo se tiene que $\text{Cut}(N) = \emptyset$. El conjunto $X \setminus N^*$ es conexo por el Lema 2.20 y se tiene que $X \setminus \{q\} = (N \setminus \{q\}) \cup (X \setminus N^*)$ además, note que $P_N \in (N \setminus \{q\}) \cap (X \setminus N^*)$ lo que garantiza que $X \setminus \{q\}$ es conexo y más aún $q \notin \text{Cut}(X)$. Dada la escogencia arbitraria de q se cumple que $N \cap \text{Cut}(X) = \{P_N\}$ ■

Lema 2.22. *Sea X una dendrita. Si X es $\frac{1}{2}$ -homogénea, entonces es un arco.*

Demostración. Sea X una dendrita. Del Teorema 1.29 se tiene que en X todo punto es de corte o es punto final. Veamos que X tiene exactamente dos puntos finales o de no corte. Supongamos que en X existen p, q y r puntos diferentes tales que $X \setminus \{p\}$, $X \setminus \{q\}$ y $X \setminus \{r\}$ son conexos. Sean pq , qr y pr los arcos en X que unen los puntos p y q , q y r , y p y r , respectivamente. Como X no contiene una curva cerrada simple, $pq \cup qr \cup pr$ es un triodo simple. Por otra parte, por [10, Teorema 9.2 p.61], todo punto de X es de orden 2, salvo una cantidad numerable. Pero esto genera al menos tres órbitas sobre X , $\mathcal{O}(p)$ que contiene puntos que no cortan, $\mathcal{O}(v)$ que contiene puntos de orden 3, donde v es el vértice del triodo simple $pq \cup qr \cup pr$, y $\mathcal{O}(z)$ que contienen puntos de orden 2. Esto contradice que X es $\frac{1}{2}$ -homogéneo. Así, $\text{End}(X)$ tiene exactamente 2 puntos. De lo anterior, X es un arco, por [1, Teorema 10.27]. ■

Teorema 2.23. *Sea X un continuo semilocalmente conexo y $\frac{1}{2}$ -homogéneo. Entonces, $|\text{Cut}(X)| > 1$ si, y solo si, X es un arco.*

Demostración. Supongamos primero que X no es un arco, y veamos que $\text{Cut}(X) = 1$. Note que por el Lema 2.22, X no es una dendrita. Por la caracterización de dendritas mostrada en el Teorema 1.29 existe $x \in X$ tal que $x \in X \setminus (\text{Cut}(X) \cup \text{End}(X))$. Como $\text{Cut}(X) \neq \emptyset$ y X es $\frac{1}{2}$ -homogéneo, tenemos que $\text{End}(X) = \emptyset$. De lo anterior y basados en la Definición 2.14, todos los nodos de X son no degenerados. Por otra parte, X es semilocalmente conexo y tiene mas de un punto de corte así que haciendo uso del Lema 2.18, se puede afirmar que X tiene al menos 2 nodos, más aún, de la Proposición 2.17 conocemos que el conjunto de nodos de un continuo puede ser a lo más numerable. Consideremos el conjunto de nodos de X , $\{N_1, N_2, \dots\}$. De acuerdo con el Lema 2.15 cualquier homeomorfismo h de X en sí mismo mapea un nodo N_i en un nodo N_j , así $h(N_i^*) = N_j^*$ y $h(P_{N_i}) = P_{N_j}$. Del Lema 2.21 sabemos que $N \cap \text{Cut}(X) = \{P_N\}$, al ser X un continuo $\frac{1}{2}$ -homogéneo se tiene que para todo $i \in I$, $P_{N_i} \in \mathcal{O}_1$ y $N_i^* \subset \mathcal{O}_2$. Se definen las dos órbitas que forman al espacio X :

$$\mathcal{O}_1 = \{P_{N_1}, P_{N_2}, \dots\} \quad y \quad \mathcal{O}_2 = \bigcup \{N_i^* : i \in \mathbb{N}\}. \quad (2.2)$$

Consideremos los conjuntos $Z_n = X \setminus \bigcup \{N_i^* : i = 1, \dots, n\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} \subset Z_n$ y por el Lema 2.20, Z_n es un continuo. Teniendo en cuenta 2.2, observamos que:

$$\mathcal{O}_1 = X \setminus \mathcal{O}_2 = X \setminus \bigcup \{N_i^* : i \in \mathbb{N}\} = \bigcap \{Z_n : n \in \mathbb{N}\}. \quad (2.3)$$

Observando 2.3, se puede concluir que $\mathcal{O}_1$ es un continuo, por lo tanto se tiene de [6, Teorema 27.7 p.200] que $\mathcal{O}_1$ debería tener una cantidad no numerable de elementos. Sin embargo, como se menciona en la Proposición 2.17 la cantidad de nodos de no degenerados de un continuo es a lo más numerable, así que $|\mathcal{O}_1| = 1$ luego $|\text{Cut}(X)| = 1$, lo que contradice la hipótesis que $|\text{Cut}(X)| > 1$, por lo tanto se concluye que X es un arco.

La condición inversa es inmediata pues en un arco se cumple que $|\text{Cut}(X)| > 1$. ■

Corolario 2.24. *Sea X un continuo localmente conexo y $\frac{1}{2}$ -homogéneo. Entonces, $|\text{Cut}(X)| > 1$ si, y solo si, X es un arco.*

Demostración. Para probar este corolario basta con hacer uso en el resultado anterior del Teorema 1.16, el cual garantiza que todo continuo localmente conexo es semilocalmente conexo. ■

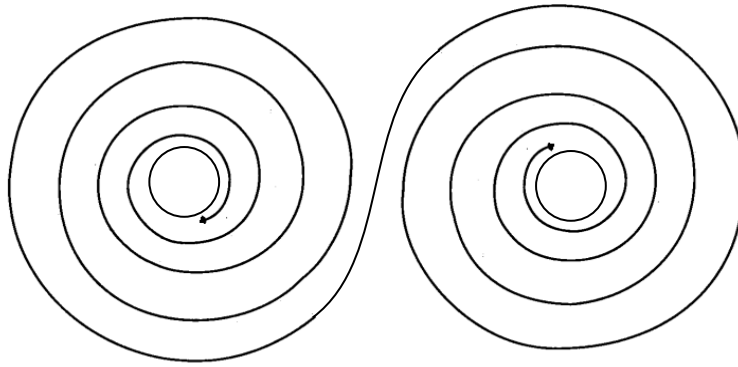
La hipótesis de semiconexidad local en el Teorema 2.23 es necesaria, para ver esto consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.25. Sea Y la circunferencia unitaria con una espiral, esto es: $Y = S^1 \cup S$, donde S^1 es la circunferencia unitaria en el plano y S es el conjunto expresado en coordenadas polares por:

$$S = \{(\rho, \theta) : \rho = 1 + \frac{1}{1 + \theta}, \theta \geq 0\}. \quad (2.4)$$

El conjunto S se aproxima a S^1 . Sea Y' una copia homeomorfa de Y y consideremos a X como el espacio que se obtiene al identificar los puntos finales de Y y Y' (ver Figura 22).

Figura 22: Espacio X



El espacio X es un continuo $\frac{1}{2}$ -homogéneo. Para ver esto, escribamos

$$X = S^1 \cup (S^1)' \cup R,$$

donde $Y' = (S^1)' \cup S'$, $(S^1)' \cong S^1$, $S' \cong S$ y $R = S \cup S'$. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow X$ un encaje tal que $f(\mathbb{R}) = R$. Sean $p, q \in R$. Entonces existen $t, s \in \mathbb{R}$, $t < r$ tales que $f(t) = p$ y $f(r) = q$. Definimos $h: X \rightarrow X$ tal que $h(x) = f(z + (r - s))$, donde $f(z) = x$, para cada $x \in R$, y extendemos continuamente a todo punto de X . Note que $h(p) = f(s + (r - s)) = f(r) = q$. Así, todos los puntos de R están en la misma órbita. Además, como los puntos de $X \setminus R$ no cortan al espacio, $\mathcal{O}(p) = R$ para cualquier punto $p \in R$.

Notemos ahora que si $p, q \in S^1$, una rotación induce un homeomorfismo que

envía p en q ; es decir, $S^1 \subset \mathcal{O}(p)$, para cada $p \in S^1$. Finalmente, $h: X \rightarrow X$ definido tal que $h(x) = f(-z)$, donde $f(z) = x$ induce un homeomorfismo que $h(S^1) = (S^1)'$. De lo anterior, $\mathcal{O}(p) = S^1 \cup (S^1)'$ para cada punto $p \in S^1 \cup (S^1)'$. Concluimos que X es $\frac{1}{2}$ -homogéneo.

La cardinalidad de puntos de corte de X es no numerable, pero X no es un arco, esto pasa ya que X no es semilocalmente conexo pues al considerar una vecindad V de algún punto en S^1 , el complemento $X \setminus V$ tendrá infinitas componentes (ver Corolario 2.24).

Para continuar con algunos resultados sobre continuos $\frac{1}{2}$ -homogéneos se probarán los siguientes dos lemas.

Lema 2.26. Sean X un continuo, S un subconjunto cerrado de X , L una componente de $X \setminus S$ y $p \in X$. Si $p \in \text{Cut}(X) \cap L$ entonces $p \in \text{Cut}(\text{cl}(L))$.

Demostración. Veamos que $\text{cl}(L) \setminus \{p\}$ es desconexo. Sea $p \in \text{Cut}(X) \cap L$. Entonces existen dos abiertos no vacíos de X , U_1 y U_2 tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $X \setminus \{p\} = U_1 \cup U_2$. Sea W un abierto no vacío de X tal que $p \in W \subset \text{cl}(W) \subset X \setminus S$ y para cada i , $U_i \setminus \text{cl}(W) \neq \emptyset$. Sea L_i la componente de $\text{cl}(W \cap \text{cl}(U_i))$ que contiene a p , para cada i . Luego, $L_i \subset \text{cl}(W) \subset X \setminus S$. Por lo tanto se tiene que:

$$L_i \subset L \cap \text{cl}(U_i) \subset \text{cl}(L) \cap (U_i \cup \{p\}). \quad (2.5)$$

Por el Lema 1.28 se sabe que $\text{cl}(U_i)$ es un continuo, ya que $\text{cl}(U_i) = U_i \cup \{p\}$. Ahora bien, del Teorema 1.26 aplicado al abierto $W \cap \text{cl}(U_i)$ de $\text{cl}(U_i)$, la componente L_i toca la frontera de $W \cap \text{cl}(U_i)$. Así, L_i es un conjunto no degenerado, por lo tanto existe $q \in L_i$ tal que $q \neq p$ y por (2.5), sabemos que $L_i \setminus \{p\} \subset \text{cl}(L) \cap U_i$, por tanto $\text{cl}(L) \setminus \{p\} = \text{cl}(L) \cap U_1 \cup \text{cl}(L) \cap U_2$. ■

Lema 2.27. Sean X un continuo y $F \subseteq \text{Cut}(X)$. Si F un conjunto finito con al menos dos elementos, entonces existen componentes C_1 y C_2 de $X \setminus F$ tales que $|\text{cl}(C_1) \cap F| = 1$ y $|\text{cl}(C_2) \cap F| > 1$.

Demostración. Para probar una primera parte de este lema y construir la componente C_1 mencionada, se procederá por inducción matemática sobre el conjunto F .

Supongamos que F es un conjunto con dos elementos $\{p, q\}$ y sean U y V dos abiertos no vacíos de X tales que $U \cap V = \emptyset$ y $X \setminus \{p\} = U \cup V$. Como $q \in U \cup V$,

sin pérdida de generalidad tomaremos $q \in U$. Sea C_1 una componente de V . Se tiene que $\text{cl}(C_1) \subseteq X \setminus U$. Ahora, nótese que $\text{cl}(C_1) \cap \text{fr}(V) \neq \emptyset$, esto se tiene como un resultado del Teorema 1.26 y dado que $\text{fr}(V) = \{p\}$ se concluye que $\text{cl}(C_1) \cap F = \{p\}$.

Supongamos ahora que $|F| = m$ y $m > 2$. Sea $p \in F$ y $F^* = F \setminus \{p\}$. Por hipótesis de inducción sobre F^* se cumple que existe una componente L de $X \setminus F^*$ y un elemento $q \in F^*$ tal que $\text{cl}(L) \cap F^* = \{q\}$. Si $p \notin L$ entonces se tendría que L cumple las condiciones deseadas, luego $L = C_1$. De otro modo, si suponemos que $p \in L$ se tiene por el Lema 2.26 que $\text{cl}(L) \setminus \{p\}$ es desconexo. Considerando a C_1 una componente de $\text{cl}(L) \setminus \{p\}$ que no contiene a $\{q\}$, se tiene, por el Teorema 1.26, que $\text{cl}(C_1) \cap \text{fr}(\text{cl}(L) \setminus \{p\}) \neq \emptyset$, nótese que $\text{fr}(\text{cl}(L) \setminus \{p\}) = \{p\}$ luego C_1 cumple las condiciones del Lema, es decir, $|\text{cl}(C_1) \cap F| = 1$.

De otra parte, sea $p \in F$ y consideremos J , un continuo irreducible de p a $F \setminus \{p\}$. Por el Teorema 1.38, se tiene que $J \setminus F$ es un conjunto conexo, luego está contenido en una componente C_2 ; además $J \setminus F$ es denso en J , luego $J \subseteq \text{cl}(C_2)$ y se cumple claramente que C_2 satisface las condiciones requeridas por el Lema, es decir, $|\text{cl}(C_2) \cap F| > 1$. ■

El Ejemplo 2.25 nos muestra un continuo $\frac{1}{2}$ -homogéneo que tiene más de un punto de corte y no es un arco, de hecho en este ejemplo, el espacio tiene infinitos puntos de corte; con esto en mente, surge la siguiente pregunta: ¿existe un continuo $\frac{1}{2}$ -homogéneo que tenga una cantidad finita, mayor que 1, de puntos de corte? La respuesta a esta incógnita es que no existe tal continuo y se resuelve con el siguiente teorema.

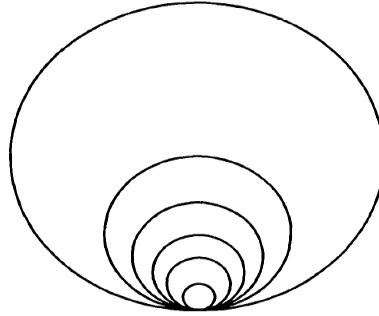
Teorema 2.28. *Sea X un continuo $\frac{1}{2}$ -homogéneo tal que $\text{Cut}(X)$ es un conjunto no vacío y finito. Entonces $|\text{Cut}(X)| = 1$.*

Demostración. Sea $F = \text{Cut}(X)$, $F \neq \emptyset$. De [7, Teorema 6.6 p.89], sabemos que todo continuo que tiene un punto de corte, tiene al menos dos puntos de no corte, además X es $\frac{1}{2}$ -homogéneo, luego $X = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, donde $\mathcal{O}_1 = F$ y $\mathcal{O}_2 = X \setminus F$.

Supongamos que $|F| > 1$, del Lema 2.27 existen dos componentes C_1 y C_2 de $X \setminus F$ tales que $|\text{cl}(C_1) \cap F| = 1$ y $|\text{cl}(C_2) \cap F| > 1$. Sean $a \in C_1$ y $b \in C_2$, Como $X \setminus F$ es homogéneo, existe $h \in \text{Aut}(X)$ tal que $h(a) = b$, así $h(C_1) = C_2$ y $h(\text{cl}(C_1) \cap F) = \text{cl}(C_2) \cap F$. Lo cual no es posible ya que $\text{cl}(C_1) \cap F$ que tiene un solo elemento, tendría mas de una imagen mediante h . Luego $|F| = 1$. ■

Definición 2.29. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto C_n como el círculo en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(0, 2^{-n})$ y radio 2^{-n} . Se define E conocido como el Arete Hawaiano, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ (ver Figura 23).

Figura 23: Arete hawaiano



Teorema 2.30. Sea X un continuo $\frac{1}{2}$ -homogéneo, hereditariamente localmente conexo el cual no es un grafo. Entonces, $\text{Cut}(X) \neq \emptyset$ si, y solo si, X es homeomorfo al Arete Hawaiano.

Demostración. Supongamos que $\text{Cut}(X) \neq \emptyset$. X no es un grafo y por el Corolario 2.24 sabemos que si $|\text{Cut}(X)| > 1$ en un continuo $\frac{1}{2}$ -homogéneo localmente conexo entonces X es un arco, por lo tanto se tiene que $\text{Cut}(X) = \{x_0\}$ y de aquí que:

$$X = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \quad \text{donde} \quad \mathcal{O}_1 = \{x_0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_2 = X \setminus \{x_0\}. \quad (2.6)$$

Como X es hereditariamente localmente conexo entonces se tiene que X es racional, esto por el Teorema 1.32; más aún, el Teorema 1.33 cita que el conjunto de puntos de corte local de X es denso en X , así que de (2.6) se tiene que los puntos de corte local de X están contenidos en $X \setminus \{x_0\}$. Ahora bien, el Teorema citado en [10, Teorema 9.2 p.61] afirma que salvo una cantidad numerable de puntos de corte local en un continuo, son todos puntos de orden 2, así que:

$$\text{Ord}_X(x) = 2 \quad \text{para todo } x \in X \text{ tal que } x \neq x_0. \quad (2.7)$$

Sabemos que $x_0 \in \text{Cut}(X)$ y veámos cuál es el orden de x_0 . Si x_0 tuviera orden finito en X entonces por 2.7, X sería un grafo lo cual contradice la hipótesis inicial. Dado que X es racional, se tiene que existe alguna vecindad V_{x_0} de x_0 cuyas fronteras son a lo más numerables, luego $\text{Ord}_X(x_0) = \aleph_0$.

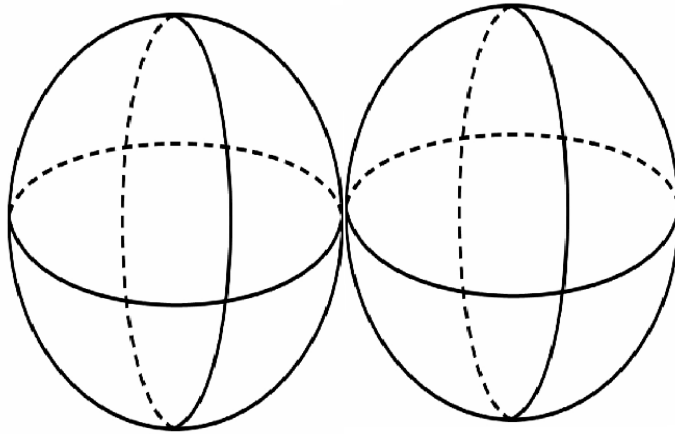
Sea W una componente de $X \setminus \{x_0\}$ y supongamos que $\text{Ord}_{\text{cl}(W)}(x_0) \geq 3$. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ consideremos $L_i \subseteq \text{cl}(W)$ un arco con puntos finales x_0 y a_i

tal que $L_i \cap L_j = \{x_0\}$ cuando $i \neq j$. El resultado mostrado en [7, Teorema 8.26 p.132] afirma que todo subconjunto abierto y conexo de un continuo localmente conexo es arco conexo y dado que X es localmente conexo y W es abierto y conexo, entonces es arco conexo. Sean $A, B \subseteq W$ arcos cuyos puntos finales son a_1, a_2 y a_2, a_3 respectivamente. De acuerdo con (2.7), W no puede contener triodos simples, así que $A \cup L_1 \cup L_2$ es una curva cerrada simple, sin embargo es imposible para el conjunto $A \cup L_1 \cup L_2 \cup B$ no contener un triodo simple en W , esto genera una contradicción con (2.7) por lo tanto $\text{Ord}_{\text{cl}(W)}(x_0) = 2$ así que teniendo en cuenta el Teorema 1.25 se tiene que $\text{cl}(W)$ es una curva cerrada simple. Finalmente sea $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ la familia de componentes de $X \setminus \{x_0\}$. Por el Teorema 1.35, tenemos que $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una colección nula. Luego $\delta(W_i) \rightarrow 0$ y por lo tanto X es homeomorfo al Arete Hawaiano. ■

La hipótesis que afirma que el espacio X sea hereditariamente localmente conexo en el Teorema 2.30 es esencial, como observamos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.31. Sea X el espacio obtenido al identificar dos esferas S^2 en un punto p . X es claramente $\frac{1}{2}$ -homogéneo, sus órbitas son: $\{p\}$ y $X \setminus \{p\}$. X no es un grafo y $\text{Cut}(X) \neq \emptyset$ pero no es un espacio homemomorfo al Arete Hawaiano. Ver Figura 24.

Figura 24: Espacio X



Un estudio que puede complementar el presente trabajo es identificar órbitas en hiperespacios. El lector interesado puede iniciar por conocer, mediante ejemplos, algunos de los hiperespacios de continuos más estudiados, así como notaciones, definiciones y propiedades importantes de estos espacios, para esto se recomienda la lectura y estudio del artículo “Un breve panorama de los hiperespacios

de continuos" citado en [5]. Sea X un continuo, se define como $C(X)$ el hiperespacio de todos los subcontinuos de X , en el artículo "Hyperspaces with exactly two orbits" citado en [8] se puede encontrar un estudio sobre hiperespacios $\frac{1}{2}$ -homogéneos, donde los autores demuestran que bajo algunas hipótesis específicas, el *arco* y la *curva cerrada simple* son continuos para los cuales $C([0, 1])$ y $C(S^1)$ son $\frac{1}{2}$ -homogéneos, sin embargo no se concluye que sean los únicos continuos con esta característica.

REFERENCIAS

- [1] J. Camargo y E. Villamizar-Roa, Topología General, Ediciones UIS, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2019.
- [2] J. J. Charatonik, History of continuum theory in: C. E. Aull and R. Lowen (eds.), Handbook of the History of General Topology, vol. 2 , Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [3] J. Krasinkiewicz, “On homeomorphisms of the Sierpinski curve”, Comment. Math. 12 (1969) 255–257.
- [4] K. Kuratowski, Topology Volume II, Academic Press INC., New York, 1968.
- [5] S. Macías, “Un breve panorama de los hiperespacios de continuos”, Revista integración. 23(2)(2005) 1–13.
- [6] J. R. Munkres, Topología segunda edición, Pearson Educación S.A., Madrid, 2006.
- [7] S. B. Nadler Jr., Continuum Theory: an introduction, Marcel Dekker, INC., New York, 1992.
- [8] S. B. Nadler Jr, P. Pellicer-Covarrubias, “Hyperspaces with exactly two orbits”, Glasnik matematički. 41(61)(2006) 141-157.
- [9] V. Neumann-Lara, P. Pellicer-Covarrubias and I. Puga, “On $\frac{1}{2}$ -homogeneous continua”, Topology and its Applications. 153 (2006) 2518-2527.
- [10] G. T. Whyburn, Analytic Topology, American Mathematical Society, New York, 1942.

BIBLIOGRAFÍA

J. Camargo y E. Villamizar-Roa, Topología General, Ediciones UIS, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2019.

J. J. Charatonik, History of continuum theory in: C. E. Aull and R. Lowen (eds.), Handbook of the History of General Topology, vol. 2 , Kluwer Academic Publishers, 1998.

J. Krasinkiewicz, “On homeomorphisms of the Sierpinski curve”, Comment. Math. 12 (1969) 255–257.

K. Kuratowski, Topology Volume II, Academic Press INC., New York, 1968.

S. Macías, “Un breve panorama de los hiperespacios de continuos”, Revista integración. 23(2)(2005) 1–13.

J. R. Munkres, Topología segunda edición, Pearson Educación S.A., Madrid, 2006.

S. B. Nadler Jr., Continuum Theory: an introduction, Marcel Dekker, INC., New York, 1992.

S. B. Nadler Jr, P. Pellicer-Covarrubias, “Hyperspaces with exactly two orbits”, Glasnik matematički. 41(61)(2006) 141-157.

V. Neumann-Lara, P. Pellicer-Covarrubias and I. Puga, “On $\frac{1}{2}$ -homogeneous continua”, Topology and its Applications. 153 (2006) 2518-2527.

G. T. Whyburn, Analytic Topology, American Mathematical Society, New York,

1942.