

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN MÉTODOS PROBABILÍSTICOS  
APLICADOS AL DISEÑO DE EXPERIMENTOS PARA INGENIEROS

JOHANA ANDREA ARIZA MORENO  
LAIDY ESPERANZA HERNANDEZ MENA  
NOHORA STELLA MAYORGA GARCÍA  
NYDIA ANDREA RUEDA RAMIREZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICO-MECANICAS  
ESCUELA DE INGENIERIA MECANICA  
BUCARAMANGA

2010

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN MÉTODOS PROBABILÍSTICOS  
APLICADOS AL DISEÑO DE EXPERIMENTOS PARA INGENIEROS

JOHANA ANDREA ARIZA MORENO  
LAIDY ESPERANZA HERNANDEZ MENA  
NOHORA STELLA MAYORGA GARCÍA  
NYDIA ANDREA RUEDA RAMIREZ

Trabajo de grado para optar al título de  
Ingeniero Mecánico

Director

Ing. CARLOS BORRÁS PINILLA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICO-MECANICAS  
ESCUELA DE INGENIERIA MECANICA  
BUCARAMANGA

2010

## AGRADECIMIENTOS

*Las autoras expresan sus agradecimientos:*

*A Dios por darnos la fortaleza y sabiduría para culminar exitosamente este proyecto.*

*Al Ing. Carlos Borrás Pinilla, director de este Seminario de Investigación, quien nos brindo su apoyo, confianza, amistad, conocimiento, experiencia, animo, calidad profesional y especialmente humana para el desarrollo del proyecto.*

*A los docentes de la Escuela de Ingeniería Mecánica por su gran labor como guías en nuestra formación integral compartiendo sus conocimientos y experiencias.*

*A la Universidad Industrial de Santander por la oportunidad de recibir una educación de la más alta calidad permitiéndonos crecer como personas.*

## DEDICATORIA

*A Dios por estar siempre presente en mi vida, bendecir cada día de ella y darme la fortaleza para alcanzar este logro.*

*A mis Padres por su paciencia, tolerancia y apoyo incondicional.*

*A mis hermanos y sobrina por estar siempre conmigo, especialmente cuando más los necesite.*

*A mi novio Hernan David por comprenderme, apoyarme y animarme en momentos de dificultad.*

*Dedico este sueño hecho realidad a todos aquellos que de una manera u otra colaboraron en la realización de este proyecto, gracias por estar en los buenos momentos, pero especialmente en los momentos de dificultad, son aquellos en los que están las personas que realmente te quieren y aprecian.*

*Nohora Stella.*

*A Dios por darme fortaleza y ayudarme a culminar esta meta con éxito.*

*A mis Padres por su apoyo incondicional, especialmente a mi mamá por estar siempre brindándome su cariño y compañía.*

*A Felipe y todas las personas que me acompañaron durante esta etapa de mi vida, apoyándome, confiando en mí y dándome animo cuando más lo necesite.*

*Nydia Andrea*

*A Dios por acompañarme en esta tan importante de mi vida.*

*A mis Padres por su paciencia, apoyo y comprensión.*

*A mis hermanos por su colaboración, apoyo y ayuda para el logro de esta meta.*

*A mi novio Alejandro por estar siempre conmigo, apoyándome y brindándome toda su colaboración cuando la necesite.*

*Dedico este Triunfo a mi familia, amigos y compañeros que compartieron conmigo durante todo este tiempo y estuvieron al pendiente de mí.*

*Johana Andrea.*

*A Dios, por estar en mi vida siempre, y darme la fortaleza para luchar por mis sueños y metas.*

*A mis padres Doris y Herver por sus enseñanzas, confianza y apoyo incondicional.*

*A mis hermanos y mi tía por su apoyo, compañía y cariño.*

*A mi novio por estar a mi lado en los buenos y malos momentos.*

*Laidy.*

# CONTENIDO

INTRODUCCION	53
<b>I SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN</b>	<b>55</b>
<b>1. GENERALIDADES DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN</b>	<b>56</b>
1.1 CONCEPTUALIZACIÓN DE SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN . . . . .	56
1.2 OBJETIVO DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN . . . . .	56
1.3 VENTAJAS DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN . . . . .	57
1.4 CARACTERÍSTICAS DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN . . . . .	58
1.5 ORGANIZACIÓN DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN . . . . .	59
1.6 TEMA DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN . . . . .	60
1.7 DIRECCIÓN DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN MÉTODOS PROBABILISTICOS APLICADO AL DISEÑO DE EXPERIMENTOS PARA INGENIEROS. . . . .	60
1.8 METODOLOGÍA . . . . .	61
1.9 RESULTADOS DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN . . . . .	61
<b>2. PLANEACIÓN</b>	<b>62</b>
2.1 ESTUDIO Y SELECCIÓN DEL MATERIAL BIBLIOGRÁFICO . . . . .	63
2.1.1 Libros . . . . .	63
2.1.2 Normas . . . . .	68
2.1.3 Artículos . . . . .	68
2.1.4 Subtemas de Investigación . . . . .	69

2.2 DESCRIPCIÓN DE LOS SUBTEMAS . . . . .	72
2.2.1 Desarrollo y Estudio de los Métodos de Experimentación . . . . .	72
2.2.1 Estudio de calibración . . . . .	73
2.2.3 Características dinámicas de señales con fundamentación matemática.	73
2.2.4 Probabilidad y estadística aplicadas a la Ingeniería. . . . .	74
2.2.5 Estudio y análisis de diseño de experimentos. . . . .	75
2.2.6 Estudio de un sistema de Medición. . . . .	76
2.2.7 Estudio y desarrollo de mediciones de parámetros físicos experimen- tales aplicando métodos probabilísticos. . . . .	76
2.3 PLANEACIÓN DE LAS SESIONES. . . . .	77
<b>3. EJECUCIÓN</b>	<b>81</b>
3.1 DOCUMENTACIÓN PARA LOS SUBTEMAS . . . . .	81
3.2 DESARROLLO DE UNA SESIÓN . . . . .	81
3.3 ACTA . . . . .	83
<b>4. PRESENTACIONES Y DOCUMENTOS.</b>	<b>85</b>
4.1 PRESENTACIONES . . . . .	85
4.1.1 Características . . . . .	85
4.2 DOCUMENTO . . . . .	86
4.3 TALLERES . . . . .	86
<b>II DESARROLLO DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN</b>	<b>87</b>
<b>5. DESARROLLO Y ESTUDIO DEL MÉTODO CIENTÍFICO EN LA EX-     PERIMENTACIÓN</b>	<b>88</b>
5.1 EL MÉTODO CIENTÍFICO . . . . .	88
5.1.1 Etapas del método científico . . . . .	89
5.2 LA EXPERIMENTACIÓN . . . . .	92
5.3 EL MÉTODO CIENTÍFICO Y LA EXPERIMENTACIÓN . . . . .	94

<b>6. ESTUDIO DE CALIBRACIÓN</b>	<b>96</b>
6.1 LA MEDICIÓN EN INGENIERÍA . . . . .	96
6.1.1 El Sistema General de Medición. . . . .	97
6.1.2 Error de medida y conceptos relacionados . . . . .	98
Clasificación de los Errores . . . . .	99
6.2 INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN . . . . .	102
6.2.1 Características De los Instrumentos de Medición . . . . .	102
6.2.2 Clasificación de los Instrumento . . . . .	104
6.2.3 Errores de los Instrumentos . . . . .	105
6.2.4 Instrumento de Comprobación. . . . .	109
6.3 PROCEDIMIENTO GENERAL DE CALIBRACIÓN . . . . .	110
6.3.1 Calibración Estática . . . . .	112
6.3.2 Calibración Dinámica . . . . .	113
6.3.3 Calibración de Instrumentos de Presión . . . . .	113
6.3.4 Calibración de Instrumentos de Flujo. . . . .	115
6.4 CALIBRACIÓN SEGÚN NORMA NTC-ISO 9001:2000 Y 9002:2000 . . . . .	118
6.4.1 Control del proceso. . . . .	120
6.4.2 Inspección y prueba. . . . .	120
6.4.3 Control del equipo de inspección, medición y prueba. . . . .	120
6.4.4 Estado de la inspección y prueba. . . . .	120
6.4.5 Norma Técnica Colombiana NTC-ISO/IEC 17025 (Requisitos generales para la competencia de los laboratorios de ensayo y calibración). . . . .	121
6.4.6 Norma Técnica Colombiana NTC-ISO 10012 (Sistemas de Gestión de la Medición Requisitos Para los Procesos de Medición y Los Equipos de Medición) . . . . .	122
6.4.7 Norma Técnica Colombiana NTC-ISO 14001 (Sistemas de Gestión Ambiental. Requisitos con orientación para su uso). . . . .	122
6.5 CASO DE ESTUDIO: CALIBRACIÓN DE UN MANÓMETRO TUBO BOURDON TIPO C. . . . .	123

<b>7. CARACTERÍSTICAS DINÁMICAS DE SEÑALES CON FUNDAMENTACIÓN MATMÁTICA</b>	<b>126</b>
7.1 MODELADO MATEMÁTICO DE SISTEMAS DE MEDICIÓN . . . . .	126
7.1.1 Sistemas Lineales y No Lineales . . . . .	127
7.1.1.1 Sistemas Lineales . . . . .	127
7.1.1.2 Sistemas No Lineales . . . . .	129
7.2 ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA ESTACIONARIA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO . . . . .	132
7.2.1 Sistemas de Orden Cero . . . . .	133
7.2.2 Sistemas de Primer Orden . . . . .	133
7.2.3 Sistemas De Segundo Orden . . . . .	136
Análisis en el dominio de la frecuencia. . . . .	143
7.3 CRITERIO DE ESTABILIDAD . . . . .	143
7.3.1 Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz . . . . .	143
7.3.2 Criterio de Estabilidad de Nyquist . . . . .	147
7.4 CASO DE ESTUDIO: ANÁLISIS DE LA RESPUESTA EN EL ESTADO DE TIEMPO Y FRECUENCIA PARA UN SISTEMA MASA-RESORTE- AMORTIGUADOR (ACELERÓMETRO) . . . . .	149
<b>5. DESARROLLO Y ESTUDIO DEL MÉTODO CIENTÍFICO EN LA EX- PERIMENTACIÓN</b>	<b>154</b>
8.1 INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA . . . . .	154
8.1.1 Historia y Evolución . . . . .	154
8.1.2 Clasificación de La Estadística . . . . .	157
8.1.2.1 Muestreo Estadístico . . . . .	158
8.1.2.2 Tipos de Datos . . . . .	159
8.2 MEDIDAS DE DISTRIBUCIÓN . . . . .	160
8.2.1 Medidas de posición o tendencia central . . . . .	160
8.2.1.1 Media . . . . .	161
8.2.1.2 Mediana . . . . .	162

8.2.1.3 Moda:	162
8.2.1.4 Cuantiles:	163
8.2.2 Medidas de Dispersión	163
8.2.2.1 Desviación Estándar:	164
8.2.2.2 Varianza Muestral:	164
8.2.2.4 El Rango, amplitud o recorrido:	165
8.2.2.5 Coeficiente de Variación:	165
8.3 ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA	166
8.3.1 Distribución de Frecuencias	167
8.3.1.1 Frecuencia Absoluta " $f_i$ ":	167
8.3.1.2 Frecuencia Relativa " $f_r$ ":	167
8.3.1.3 Frecuencia Porcentual " $p_i$ ":	168
8.3.1.4 Frecuencia Absoluta Acumulada " $f_a$ ":	168
8.3.1.5 La Frecuencia Relativa Acumulada $f_{ra}$ :	168
8.3.2 Series Estadísticas	170
8.3.3 Representación Gráfica de los Datos.	171
8.3.3.1 Diagramas de Sectores Circulares:	172
8.3.3.2 Diagrama de Rectángulos o de Barras:	173
8.3.3.3 Histograma	174
8.3.3.4 Diagramas de líneas:	176
8.3.3.5 Diagrama de Dispersión:	177
8.3.3.6 Diagrama de Caja	179
8.4 CONCEPTOS BÁSICOS DE LA PROBABILIDAD	180
8.4.1 Experimentos Aleatorios	182
8.4.1.1 Evento	183
8.4.1.2 Diagrama de Venn	184
8.4.1.3 Eventos Mutuamente Excluyentes	184
8.4.2 Axiomas de Probabilidad	185
8.4.3 Probabilidad Condicional e Independencia	186

8.4.4 Reglas de Probabilidad . . . . .	187
8.4.4.1 Regla de multiplicación . . . . .	187
8.4.5 Reglas de Probabilidad Total Y Regla de Bayes: . . . . .	187
8.5 ESTUDIO DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS Y CONTINUAS . . . . .	188
8.5.1 Variables aleatorias discretas . . . . .	189
8.5.1.1 Distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta. . . . .	190
8.5.1.2 La función de distribución acumulada. . . . .	191
8.5.2 Características de las variables aleatorias discretas. . . . .	192
8.5.2.1 Esperanza matemática . . . . .	193
8.5.2.2 La varianza poblacional. . . . .	194
8.5.2.3 La desviación estándar poblacional. . . . .	194
8.5.3 Principales distribuciones de variables aleatorias discretas. . . . .	194
8.5.3.1 Distribución de Bernoulli. . . . .	195
8.5.3.2 Distribución Binomial. . . . .	196
8.5.3.3 Distribución Binomial Negativa. . . . .	196
8.5.3.4 Distribución Multinomial. . . . .	197
8.5.3.5 Distribución Geométrica. . . . .	198
8.5.3.6 Distribución Hipergeométrica. . . . .	199
8.5.3.7 Distribución de Poisson. . . . .	200
8.6 DISTRIBUCIONES BIVARIADAS DE PROBABILIDAD . . . . .	203
8.6.1 Distribuciones bivariadas para variables aleatorias discretas . . . . .	203
8.6.1.1 Propiedades . . . . .	204
8.6.1.2 Distribuciones marginales de probabilidad . . . . .	205
8.6.1.3 Distribución condicional de probabilidad . . . . .	206
8.6.2 Distribuciones bivariadas de probabilidad para valores aleatorios continuos . . . . .	206
8.6.2.1 Función de densidad marginal . . . . .	207
8.6.2.2 Función de densidad condicional . . . . .	207

8.6.2.3	Valor esperanza de funciones de dos variables aleatorias . . . . .	207
8.6.2.4	Independencia . . . . .	208
8.6.3	La covarianza y correlación de dos variables aleatorias . . . . .	209
8.6.3.1	Distribución normal bivariada . . . . .	210
8.6.3.2	Relación lineal de variables aleatorias . . . . .	211
8.7	DISTRIBUCIONES MUESTRALES . . . . .	211
8.7.1	Distribución t de estudiante . . . . .	212
8.7.2	Distribución CHI Cuadrado . . . . .	214
8.7.3	Distribución F de Fisher . . . . .	216
8.7.4	Desviación estándar de las medias . . . . .	218
8.7.5	Muestras puestas en común . . . . .	220
8.7.6	Distribuciones muestradas de medias y sumas . . . . .	220
8.7.7	Aproximación normal a la distribución binomial . . . . .	222
8.7.8	Distribuciones muestradas relacionadas con la distribución normal . . . . .	222
8.8	ESTADÍSTICA INFERENCIAL . . . . .	223
8.8.1	Estimación de parámetros . . . . .	223
8.8.1.1	Estimación Puntual . . . . .	223
8.8.1.2	Métodos clásicos de estimación . . . . .	226
8.8.1.3	Estimación del intervalo de confianza de una sola muestra . . . . .	227
8.8.2.1	Procedimiento general para la prueba de hipótesis . . . . .	233
8.8.2	Tipo de pruebas de hipótesis . . . . .	235
8.8.2.1	Prueba de hipótesis sobre la media y la varianza conocida . . . . .	236
8.9	REGRESIÓN Y CORRELACIÓN DE EXPERIMENTOS . . . . .	237
8.9.1	Regresión lineal simple . . . . .	241
8.9.1.1	Método de mínimos cuadrados . . . . .	242
8.9.2	Regresión Múltiple . . . . .	255
8.9.2.1	Método de de mínimos cuadrados para la estimación de parámetros en la regresión lineal múltiples . . . . .	256
8.10	PROCESOS ESTADÍSTICOS DE CALIDAD Y CONTROL . . . . .	259

8.10.1	Control del proceso estadístico . . . . .	259
8.10.1.1	Diagrama de control . . . . .	259
8.10.1.2	Diagramas de Control para Mediciones . . . . .	261
8.10.2	Capacidad de un proceso . . . . .	268
8.10.3	Tendencias del diagrama de control . . . . .	272
8.10.4	Diagramas de control para variables discretas . . . . .	273
8.10.4.1	Diagrama p (Fracción defectuosa o sin calidad de conformidad). . . . .	273
8.10.4.2	Diagrama c (para defectos) . . . . .	277
8.10.4.3	Diagrama u (defectos por unidad) . . . . .	280
8.10.5	Otros tipos de herramientas para el control estadístico . . . . .	284
8.10.6	Calidad Six sigma . . . . .	286
8.10.6.1	Historia . . . . .	286
8.10.6.2	La calidad . . . . .	287
8.10.6.3	Six Sigma . . . . .	288
8.10.6.4	Implementación . . . . .	289
8.11	INGENIERIA DE CONFIABILIDAD . . . . .	295
8.11.1	Configuración de los equipos . . . . .	298
8.11.1.1	Sistemas simples en serie . . . . .	298
8.11.1.2	Redundancia activa simple . . . . .	298
8.11.1.3	Redundancia en espera . . . . .	298
8.11.1.4	Prueba de duración o vida útil . . . . .	299
8.12	PROCESOS ESTOCASTICOS . . . . .	300
8.13	ESTADÍSTICA NO PARAMETRICA . . . . .	301
8.13.1	Prueba de signo . . . . .	301
8.13.1.1	Comparación entre la prueba de signo y la prueba t. . . . .	303
8.13.2	Prueba de Wilcoxon del rango con signo . . . . .	303
8.13.2.1	Comparación con la prueba t. . . . .	304
8.14.3	Prueba de Wilcoxon de la suma de rango . . . . .	304

<b>9. ESTUDIO Y ANÁLISIS DEL DISEÑO DE EXPERIMENTOS</b>	<b>305</b>
9.1 ETAPAS FUNDAMENTALES DE LA EXPERIMENTACIÓN	306
9.1.1 Conocimiento del material experimental	307
9.1.2 Escoger factores y niveles	307
9.1.3 Selección de las variables respuesta según los objetivos.	307
9.1.4 Planeación del experimento (materiales y métodos)	308
9.1.5 Selección del diseño experimental	308
9.1.5.1 Reducción del ruido diseños.	308
9.1.5.2 Diseño de mayor volumen	309
9.1.6 Ejecución del experimento.	309
9.1.7 Análisis de datos (Análisis de la varianza ANOVA)	309
9.1.8 Conclusiones y recomendaciones	310
9.2 PRINCIPIOS BÁSICOS DEL DISEÑO DE EXPERIMENTOS	310
9.2.1 Repetibilidad.	312
9.2.2 Aleatorización.	312
9.2.3 Control Local.	312
9.3 CLASIFICACIÓN DEL DISEÑO DE EXPERIMENTOS	313
9.3.1 Diseño completamente aleatorio	313
9.3.2 Diseño de bloques al azar	316
9.3.3 Diseño en cuadro latino	319
9.3.4 Diseños factoriales	321
9.3.4.1 Diseños factoriales con dos factores.	323
9.3.4.4 Diseño Factorial General $2^k$ .	325
9.3.5 Metodología Taguchi	326
9.4 COMPARACIÓN ENTRE MEDIAS	327
9.4.1 LSD de Fisher (Least significant difference).	327
9.4.2 Método de Tukey.	328
9.4.3 Método de Bonferroni.	329
9.4.4 Método de Ducan.	330

<b>10. ESTUDIO DE UN SISTEMA DE MEDICIÓN</b>	<b>331</b>
10.1 ANÁLISIS CON DISPOSITIVOS ANÁLOGOS Y DIGITALES . . . . .	331
10.1.1 Medidas analógicas. . . . .	332
10.1.2 Instrumentos Analógicos. . . . .	333
10.1.3 Medidas digitales. . . . .	333
10.1.4 Instrumentos digitales. . . . .	334
10.1.5 Dispositivos analógicos y digitales . . . . .	335
10.1.5.1 Medición de presión . . . . .	335
10.1.5.2 Medición de temperatura . . . . .	336
10.1.5.3 Medición de Flujo . . . . .	337
10.1.5.4 Medición de deformación . . . . .	338
10.1.5.8 Medición de desplazamiento . . . . .	342
10.2 MUESTREO CON INSTRUMENTOS ANÁLOGOS, DIGITALES Y ADQUISI- CIÓN DE DATOS . . . . .	344
10.2.1 Sistemas análogos y digitales: bits y palabras . . . . .	344
10.2.1.1 Sistema Analógico . . . . .	346
10.2.1.2 Sistemas digitales: Bits y Palabras . . . . .	346
10.2.2 Convertidores análogo-digital . . . . .	349
10.2.2.1 Tipos convertidores A/D . . . . .	350
10.2.2.4 Convertidor A/D de aproximaciones sucesivas . . . . .	352
10.2.2.5 Convertidor Paralelo (flash converter) . . . . .	352
10.2.2.7 Convertidor de tensión en tiempo (doble rampa) . . . . .	354
10.2.2.8 Convertidor de tensión en frecuencia . . . . .	355
10.3 SISTEMAS DE ADQUISICIÓN DE DATOS . . . . .	356
10.3.1 Características técnicas de las Tarjetas de Adquisición de Datos . . . . .	359
10.4 COMPONENTES DE UN SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE DATOS . . . . .	359
10.4.1 Sensores . . . . .	360
10.4.2 Acondicionamiento de la señal . . . . .	361
10.4.3 Amplificador. . . . .	361

10.4.4 Aislamiento. . . . .	362
10.4.5 Filtros. . . . .	362
10.4.5.1 De acuerdo a la función o trabajo a realizar: . . . . .	363
10.4.5.2 De acuerdo a su tecnología : . . . . .	364
10.4.5.3 De acuerdo a la función matemática utilizada para obtener una curva específica . . . . .	365
10.4.6 Multiplexores. . . . .	367
10.5 CASO DE ESTUDIO: PROCESO DE ADQUISICIÓN DIGITAL Y ANÁLISIS DE DATOS. MEDICIÓN Y ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE UN SONIDO. . . . .	368
10.6 ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRE . . . . .	372
10.6.1 Incertidumbre . . . . .	372
10.6.2 Comparación entre teoría y mediciones . . . . .	373
10.6.3 Error en el proceso de medición . . . . .	374
10.6.3.1 Fuentes de error. . . . .	375
10.6.4 Análisis de Incertidumbre en la etapa de diseño . . . . .	379
10.6.5 Análisis de incertidumbre en la medición. . . . .	380
10.6.6 Tipos estandar de análisis de incertidumbre. . . . .	382
10.6.7 Experimento de única medición de la magnitud a medir (mensurando). . . . .	382
10.6.8 Experimento del resultado de una única medición. . . . .	386
10.6.9 Análisis de incertidumbre de mediciones múltiples. . . . .	387
10.6.10 Análisis de incertidumbre detallado . . . . .	389
10.6.11 Aproximación integral . . . . .	390
10.6.12 Aproximación de la estimación de la incertidumbre . . . . .	390
10.6.13 Propagación del error . . . . .	391
10.6.14 Análisis de incertidumbre en la etapa avanzada . . . . .	392
Incertidumbre de orden cero. . . . .	393
Incertidumbre de orden superior. . . . .	393
Incertidumbre de n-ésimo orden. . . . .	393

<b>11. ESTUDIO Y DESARROLLO DE MEDICIONES DE PARÁMETROS FÍSICOS EXPERIMENTALES APLICANDO MÉTODOS PROBABILÍSTICOS.</b>	<b>396</b>
11.1 PROCEDIMIENTO DE CALIBRACIÓN DE UN TRANSDUCTOR DE PRESIÓN . . . . .	397
11.1.1.1 Caso de estudio: Procedimiento de caracterización de un transductor de presión . . . . .	400
Objetivo de experimento . . . . .	401
Selección de las variables de interes . . . . .	401
Montaje experimental . . . . .	401
Desarrollo de la prueba experimental y adquisición de datos . . . . .	402
Análisis probabilístico de los resultados . . . . .	404
Comprobación de parametros . . . . .	404
Análisis de la adecuación de los datos . . . . .	408
Incertidumbre . . . . .	411
Tabla de conclusiones . . . . .	412
11.2 ANALISIS DE UNA VIGA EN VOLADIZO PORTATIL INSTRUMENTADA CON STRAIN GAGE . . . . .	412
11.2.1 Esfuerzo y deformación . . . . .	412
11.2.1.1 Relación de Poisson . . . . .	413
11.2.2 Medición de deformación . . . . .	414
11.2.2.1 Galga de resistencia eléctrica . . . . .	414
11.2.2.2 Selección del strain gage . . . . .	415
11.2.3 Tipos de aleaciones para strain gages . . . . .	416
11.2.4 Características de un strain gage. . . . .	417
11.2.4.1 Longitud . . . . .	417
11.2.4.2 Autocompensación de temperatura . . . . .	418
11.2.5 Parámetros que afectan la precisión de un strain gage. . . . .	419
11.2.6 Acondicionamiento de la señal de la galga. . . . .	421
11.2.6.1 Configuraciones de puente de wheatstone . . . . .	422

11.2.7 Caso de estudio: Modulo de elasticidad a la flexión de una viga en voladizo portatil instrumentada con strain gage. . . . .	423
11.2.7.1 Objetivo de experimento . . . . .	424
11.2.7.2 Selección de las variables de interes . . . . .	424
11.2.7.3 Montaje experimental . . . . .	424
11.2.7.4 Desarrollo de la prueba experimental y adquisición de datos . . . . .	425
11.2.7.5 Análisis probabilistico de los resultados . . . . .	426
11.2.7.6 Comprobación de parametros . . . . .	426
11.2.7.8 Incertidumbre e intervalos de confianza . . . . .	430
11.2.7.9 Tabla de Resultados . . . . .	431
11.2.8 Caso de estudio: Analisis de esfuerzo en una viga con un concentrador de esfuerzo. . . . .	433
11.2.8.1 Objetivo de experimento . . . . .	434
11.2.8.2 Selección de las variables de interes . . . . .	434
11.2.8.3 Desarrollo de la prueba experimental y adquisición de datos . . . . .	434
11.2.8.4 Análisis probabilistico de los resultados . . . . .	434
11.2.8.5 Comprobación de parametros . . . . .	434
11.2.8.7 Incertidumbre . . . . .	438
11.2.8.8 Tabla de Resultados . . . . .	439
11.2.9 Caso de estudio: Determinación de la relación de poisson . . . . .	439
11.2.9.1 Objetivo de experimento . . . . .	439
11.2.9.2 Selección de las variables de interes . . . . .	440
11.2.9.3 Desarrollo de la prueba experimental y adquisición de datos . . . . .	440
11.2.9.4 Análisis probabilistico de los resultados . . . . .	440
11.2.9.5 Comprobación de parametros . . . . .	440
11.2.9.7 Objetivo de experimento . . . . .	444
11.2.9.8 Selección de las variables de interes . . . . .	444

11.2.9.9	Análisis probabilístico de los resultados . . . . .	444
11.2.9.10	Comprobación de parámetros . . . . .	444
11.3	PROCEDIMIENTO DE CALIBRACIÓN DE UN FLUJÓMETRO DE TURBINA AXIAL . . . . .	450
11.3.1	Conceptos básicos relacionados con la medición de flujo . . . . .	450
11.3.1.1	Determinación gasto volumétrico . . . . .	452
11.3.1.2	Naturaleza de un caudal . . . . .	454
11.3.2	Medidores de caudal . . . . .	455
11.3.2.1	Flujómetros de Turbina . . . . .	457
11.3.3	Celdas de Carga . . . . .	459
11.3.4	Caso de estudio: procedimiento de calibración de un flujómetro de turbina axial. . . . .	460
11.3.4.1	Objetivo y campo de aplicación . . . . .	461
11.3.4.2	Procedimiento . . . . .	461
11.3.4.8	Especificaciones Técnicas . . . . .	464
11.3.4.9	Análisis probabilístico . . . . .	464
11.3.4.10	Método empírico. . . . .	464
	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>471</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>473</b>
<b>III</b>	<b>ANEXOS</b>	<b>477</b>
	<b>A.SEMINARIO ALEMAN</b>	<b>478</b>
	<b>B.PROCEDIMIENTO DE CALIBRACIÓN. MANÓMETRO TUBO BUR- DON TIPO C</b>	<b>479</b>
	<b>C. NORMA TÉCNICA COLOMBIANA-RESUMEN</b>	<b>485</b>
	<b>D. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA Y ESTACIONARIA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA</b>	<b>491</b>

E. MÉTODO DE MODELADO MATEMÁTICO	498
F. APLICACIÓN DE MODELADO MATEMÁTICO A SISTEMAS DINÁMICOS	507
H. TABLAS	516

# LISTA DE TABLAS

2.	Subtemas de investigación . . . . .	69
4.	Temas y Subtemas . . . . .	77
6.	Desarrollo de una sesión del Seminario de Investigación . . . . .	82
8.	Descripción matemática de parámetros físicos de sistemas eléctricos, nivel de líquido y térmico . . . . .	127
9.	Función de Transferencia que Representa Sistemas Dinámico . . . . .	133
10.	Media . . . . .	161
11.	Desviación Estándar . . . . .	164
12.	Valor de los Esfuerzos [psi] . . . . .	168
13.	Datos de Esfuerzos Ordenados [psi] . . . . .	169
14.	Distribución de Frecuencia . . . . .	170
15.	Tipos de Series Estadísticas . . . . .	171
16.	Recomendaciones de Clases en un Histograma . . . . .	175
17.	Operaciones Básicas de Conjuntos . . . . .	183
18.	Espacio muestral . . . . .	190
19.	Característica de las variables aleatorias discretas . . . . .	193
20.	Media y mediana de distribución binomial negativa. . . . .	196
21.	Distribuciones de probabilidad Bivariadas . . . . .	203
22.	Valores tabulados son $p(x,y)$ . . . . .	204
23.	Variable $t$ para diferentes valores de $v$ y $P$ . . . . .	213
24.	Estimación por Intervalos. . . . .	229
25.	Decisiones en la prueba de hipótesis . . . . .	232

26.	Probabilidades de los errores . . . . .	232
27.	Decisiones de hipótesis nula asociada con los valores de $p$ y $\alpha$ . . . . .	233
28.	Hipótesis bilateral y unilateral . . . . .	235
29.	Tipo de Hipótesis . . . . .	236
30.	Intervalo de aceptación . . . . .	237
31.	Sumas de los cuadrados . . . . .	247
32.	Intervalos de confianza en la regresión lineal simple. . . . .	249
33.	Datos de Regresión Lineal Múltiples . . . . .	256
34.	Propiedades de los estimadores en regresión múltiple . . . . .	257
35.	Análisis de varianza para la regresión lineal múltiple . . . . .	258
36.	Estadísticos en la regresión múltiple . . . . .	258
37.	Mediciones de apertura del álabe . . . . .	263
38.	Pureza de un producto químico . . . . .	267
39.	Control para atributos . . . . .	273
40.	Número y proporción de Unidades defectuosas . . . . .	276
41.	Datos de defectos . . . . .	281
42.	Confiabilidad para configuraciones de equipos . . . . .	299
43.	Limites de confianza . . . . .	300
44.	Pruebas de estadística no paramétrica . . . . .	301
45.	Datos típicos de un experimento con un solo factor . . . . .	314
46.	Tabla de ANOVA para el DCA . . . . .	316
47.	Diseño en bloques completos al azar . . . . .	317
48.	ANOVA para un diseño en bloques completos a azar . . . . .	319
49.	Aspectos de los datos en un diseño en Cuadrado Latino . . . . .	320
51.	ANOVA para el diseño en cuadrados latino . . . . .	321
52.	ANOVA para el diseño factorial $axb$ . . . . .	325
53.	Instrumento de referencia de presión . . . . .	336
54.	Instrumentos para medición de temperatura . . . . .	337
55.	Palabra . . . . .	347

56.	Conversión de decimal a binario . . . . .	348
57.	Mediciones repetidas de la fuerza $F'$ . . . . .	389
58.	Anova para la regresión . . . . .	406
59.	Análisis de varianza final . . . . .	407
60.	ANOVA para la regresión . . . . .	409
61.	Análisis de varianza final . . . . .	411
62.	Intervalos de confianza . . . . .	411
63.	Resultados Finales . . . . .	412
64.	Aleaciones de Strain Gages . . . . .	417
65.	Anova para la regresión . . . . .	428
66.	Análisis de varianza final . . . . .	429
67.	Intervalos de confianza . . . . .	431
68.	Resultados Finales . . . . .	432
69.	Tabla de resultados deformaciones . . . . .	433
70.	Anova para la regresión . . . . .	436
71.	Análisis de varianza final . . . . .	438
72.	Resultados Finales . . . . .	439
73.	Anova para la regresión . . . . .	442
74.	Anova para la regresión . . . . .	446
75.	Análisis de varianza final . . . . .	448
76.	Resultados . . . . .	448
77.	Relación de poisson . . . . .	449
78.	Tabla de anova . . . . .	449
79.	Métodos de medición de caudal. . . . .	456
80.	Caracterización de la balanza con celda de carga . . . . .	467
81.	Pendientes de las posibles combinaciones entre las medias muestrales. . . . .	468
82.	Tabla de las medias de la matriz de las pendientes. . . . .	468
83.	ANOVA para el Diseño de Bloques. . . . .	469
84.	Análisis de Duncan para la comparación entre los procesos. . . . .	469

85.	Caracterización del Fluómetro . . . . .	470
86.	Registro de calibración expedido por REYMOM LTDA. . . . .	481
87.	Registro de calibración expedido por REYMOM LTDA. . . . .	483
88.	Requisitos Generales para la Competencia de los Laboratorios de Ensayo y Calibración . . . . .	485
90.	Álgebra de Bloques . . . . .	502
91.	Propiedades de la Media Aritmética . . . . .	515
92.	Datos Transductor de presión . . . . .	516
93.	Datos modulo de elasticidad . . . . .	516

# LISTA DE FIGURAS

1.	Formato actas . . . . .	84
2.	Formato de presentación . . . . .	85
3.	El método Científico . . . . .	89
4.	Etapas del Método Científico . . . . .	91
5.	Relación entre el método científico y la Experimentación . . . . .	95
6.	Clases de Medición . . . . .	97
7.	Sistema General de Medición . . . . .	97
8.	Clasificación de los Errores . . . . .	99
9.	Comparación entre los errores sistemáticos y aleatorios. . . . .	101
10.	Cadena de trazabilidad . . . . .	103
11.	Clasificación de los Instrumentos de Medición . . . . .	104
12.	Curva Variable Real-Lectura . . . . .	105
13.	Error de multiplicidad . . . . .	106
14.	Error de Angularidad . . . . .	106
15.	Error de Histéresis . . . . .	107
16.	Error de linealidad . . . . .	108
17.	Error de Repetibilidad . . . . .	108
18.	Escalera de rastreabilidad . . . . .	110
19.	Calibración de un Instrumento . . . . .	111
20.	Comprobador de peso muerto portátil digital . . . . .	115
21.	Medidor Maestro de Flujo . . . . .	116
22.	Medidores de flujo desplazamiento Positivo . . . . .	116

23.	Medidores de Flujo Tipo Másico (Coriolis)	117
24.	Laboratorio especializado de Flujómetros por el Método Gravimétrico de Llenado Directo	118
25.	Sistema de Medición-Manómetro	123
26.	Esquema del calibrador de presión Tubo Bourdon tipo C.	124
27.	Procedimiento de calibración para un manómetro tubo Bourdon tipo C	125
28.	Linealidad en un Sistema de Control	128
29.	Curvas características para no linealidades-ley cuadrática.	129
30.	Representación de la no linealidad	130
31.	Efectos de las Entradas Ambientales	131
32.	Respuestas sistemas de primer orden	134
33.	Identificación de Linealidad para un Sistema Dinámico	136
34.	Ubicación de condiciones de estabilidad en el plano Imaginario vs. Real.	138
35.	Respuesta que arroja por el software	139
36.	Respuesta función escalón	140
37.	Respuesta rampa	141
38.	Descripción de la respuesta dinámica de un sistema.	143
39.	Trayectoria de Estabilidad de Nyquist	147
40.	Modelo Básico del Acelerómetro	150
41.	Diagrama Esquemático de un Acelerómetro de Circuito Cerrado	151
42.	Bloque de un Acelerómetro de Circuito Cerrado	151
43.	Diagrama de Bode para un Modelo Simple de Acelerómetro	153
44.	División de La Estadística	157
45.	Relación entre Población Y Muestra	158
46.	Tipos de Variables	159
47.	Medidas de Distribución	160
48.	Cuantiles	163
49.	Proceso con los Datos Obtenidos	166
50.	Histograma de Frecuencias	170

51.	Representación Gráfica . . . . .	172
52.	Diagrama de Sectores . . . . .	172
53.	Gráfica de Barras . . . . .	173
54.	Construcción de un Histograma . . . . .	175
55.	Histograma . . . . .	176
56.	Diagrama de líneas . . . . .	177
57.	Elaboración diagrama de dispersión . . . . .	178
58.	Diagrama de Dispersión . . . . .	179
59.	Diagrama de Caja . . . . .	180
60.	Comparación entre Probabilidad y Estadística . . . . .	180
61.	Modelo de Variación de un Sistema . . . . .	181
62.	Diagrama de Venn . . . . .	184
63.	Eventos Mutuamente Excluyentes . . . . .	184
64.	Probabilidad Total . . . . .	188
65.	Variables aleatorias . . . . .	189
66.	Gráfica de barras . . . . .	191
67.	Distribuciones de las variables aleatorias discretas . . . . .	195
68.	Presentación Gráfica de Probabilidad Bivariada . . . . .	204
69.	Distribuciones conjunta y marginales para $[X, Y]$ tabuladas . . . . .	205
70.	Gráfica de la Distribución marginal . . . . .	206
71.	Ubicación puntos de los productos de las desviaciones. . . . .	209
72.	Distribución Chi Cuadrada. . . . .	215
73.	Punto porcentual $\chi^2_{\alpha, k}$ de la distribución chi cuadrada. . . . .	216
74.	Función F . . . . .	217
75.	Distribuciones Muestrales . . . . .	218
76.	Funcion de densidad de probabilidad de los valores medios de x. . . . .	219
77.	Parámetros estadísticos entre medias de las muestras . . . . .	220
78.	Estimadores puntuales . . . . .	224
79.	Distribución de muestreo de una media muestral para muestras grandes . . . . .	225

80.	Distribuciones de muestreo para estimadores . . . . .	225
81.	Distribución de muestreo de dos estimadores imparciales $A$ y $B$ . ( $A$ con menor varianza que $B$ ) . . . . .	226
82.	Intervalos de confianza para la media $\mu$ de una distribución. . . . .	228
83.	Factores de la prueba de hipótesis . . . . .	232
84.	Prueba de Hipótesis . . . . .	233
85.	Distribución de muestreo . . . . .	234
86.	Tipos de Pruebas de hipótesis . . . . .	236
87.	Distribución de muestreo . . . . .	237
88.	Curvas de aproximación . . . . .	238
89.	Distribución de Probabilidad del Error . . . . .	239
90.	Modelo de regresión . . . . .	240
91.	Modelo de Regresión Lineal . . . . .	241
92.	Recta de Mínimos Cuadrados . . . . .	242
93.	La Hipótesis $H_0: \beta_1 = 0$ no se Rechaza . . . . .	246
94.	La Hipótesis $H_0: \beta_1 = 0$ se rechaza . . . . .	246
95.	Representación sumas de los cuadrados de la regresión . . . . .	248
96.	Análisis de Varianza . . . . .	248
97.	Análisis de residuos . . . . .	250
98.	Patrones para gráficas de los residuos.a)satisfactorio,b)embudo,c)doble arco,d)no lineal. . . . .	251
99.	Niveles de Correlación Positiva . . . . .	252
100.	Niveles de Correlación Negativa . . . . .	253
101.	Diagrama de control . . . . .	260
102.	Diagrama $\bar{X}$ y $R$ . . . . .	264
103.	Diagramas de Control $\bar{X}$ y $R$ para l abertura del álabe. . . . .	265
104.	Diagramas de control $\bar{x}$ y $R$ para a. Mediciones Individuales, b. Rango movil de pureza. . . . .	268
105.	Diagrama de tolerancias . . . . .	269

106. Histograma para la apertura del alabe . . . . .	269
107. Caída del proceso y razón de capacidad del proceso RCP. Fuente: Hines, Probabilidad y estadística para Ingeniería. . . . .	271
108. Diagrama $p$ para los datos de la tabla . . . . .	277
109. Número de Grietas . . . . .	279
110. Diagrama $c$ para los datos. . . . .	280
111. Diagrama $u$ . . . . .	282
112. Diagrama de Pareto . . . . .	285
113. Diagrama causa y efecto . . . . .	285
114. Diagramas de control $\bar{X}$ y $R$ con límites revisados. . . . .	286
115. Six sigma . . . . .	289
116. Medida de la variación . . . . .	289
117. Estructura organizacional six sigma. . . . .	290
118. Actividades y su proceso para el proyecto. . . . .	292
119. Distribución de probabilidad normal con valores sigma . . . . .	294
120. Distribución de probabilidad normal con valores de $Z$ . . . . .	294
121. Cambio en sigma para los datos . . . . .	295
122. Algunas aplicaciones de la Ingeniería de Confiabilidad. . . . .	296
123. Distribución de fallas compuestas . . . . .	297
124. Fases del Diseño de Experimentos . . . . .	305
125. Etapas de la experimentación . . . . .	307
126. Diagrama de Fisher “Principios de la experimentación” . . . . .	311
127. Clasificación del diseño de experimentos . . . . .	313
128. Función de pérdida de Taguchi . . . . .	327
129. Señal Analógica . . . . .	331
130. Señal digital . . . . .	332
131. Escala. . . . .	333
132. Instrumento digital . . . . .	334
133. Dispositivos de medición de flujo . . . . .	338

134.	Óhmetro Analógico básico. . . . .	339
135.	Puente de Wheatstone . . . . .	341
136.	Señal analógica y digital. . . . .	345
137.	<i>Ejemplo de un Sistema Análogo.</i> . . . . .	346
138.	Componentes usados en la conversión A/D. . . . .	351
139.	Esquema del Convertidor A/D de aproximaciones sucesivas. . . . .	352
140.	Esquema de un Conversor A/D tipo paralelo. . . . .	353
141.	Esquema de un Conversor de rampa simple. . . . .	354
142.	<i>Esquema del Conversor doble rampa.</i> . . . . .	354
143.	<i>Esquema de un Conversor tensión-frecuencia.</i> . . . . .	355
144.	Sistema General de Adquisición de Datos . . . . .	356
145.	Esquema de medición típico de una señal analógica. . . . .	357
146.	Banco de prueba para la Calibración de un Transductor de Presión. . . . .	358
147.	<i>Programa e interfaz gráfica en LabVIEW.</i> . . . . .	358
148.	Esquema de flujo de la señal para un SAD automatizado . . . . .	360
149.	<i>Modelo de amplificador.</i> . . . . .	362
150.	Clases de Filtros. . . . .	363
151.	Filtro Butterworth. . . . .	365
152.	Filtro de Chebyshev . . . . .	366
153.	<i>Multiplexor.</i> . . . . .	367
154.	Diagrama de flujo para la Adquisición de la señal . . . . .	368
155.	Sistema de adquisición de datos para una señal de voz. . . . .	369
156.	Adquisición y reproducción del sonido. Señal sin tratamiento. . . . .	370
157.	Espectro de la señal sin tratamiento. . . . .	370
158.	Interfaz Gráfica . . . . .	371
159.	Señal de una voz . . . . .	371
160.	Tipos de incertidumbre . . . . .	373
161.	Presentación gráfica de una comparación entre resultados predictivos y experimentales . . . . .	374

162. Errores derivados del proceso experimental . . . . .	375
163. Error elementales de calibración . . . . .	376
164. Experimento con nueve valores registrados . . . . .	378
165. Procedimiento de la incertidumbre en la etapa de diseño. . . . .	379
166. Tipos de análisis de incertidumbre . . . . .	382
167. Errores elementales comprobados por calibración . . . . .	385
168. Procedimiento de las incertidumbre de múltiples mediciones . . . . .	388
169. Diagrama general para el desarrollo de un procedimiento experimental con análisis probabilístico. . . . .	396
170. Probador de Peso Muerto . . . . .	398
171. Probador de Pesos Muertos Marca AMSLER . . . . .	402
172. Sistemas de adquisición de datos . . . . .	403
173. Transductor de Presión MSP 300 . . . . .	403
174. Curva de caracterización Transductor de presión . . . . .	405
175. Grafica de probabilidad de los residuos . . . . .	407
176. Curva de caracterización Transductor de presión . . . . .	408
177. Grafica de probabilidad de los residuos . . . . .	410
178. Histograma de los errores . . . . .	410
179. Strain gage metálico . . . . .	415
180. Distribución del esfuerzo sobre un strain gage . . . . .	418
181. Curvas de salida en función de la temperatura . . . . .	419
182. Puente de Wheatstone . . . . .	422
183. Configuraciones de Puente de Wheatstone . . . . .	422
184. Procedimiento de montaje . . . . .	425
185. Medio puente . . . . .	425
186. Sistemas de adquisición de datos . . . . .	426
187. Curva de caracterización Straing . . . . .	427
188. Grafica de probabilidad de los residuos . . . . .	428
189. Histograma de los errores . . . . .	429

190. Curva de caracterización Straing . . . . .	435
191. Grafica de probabilidad de los residuos . . . . .	437
192. Histograma de los errores . . . . .	437
193. Tabla de resultados . . . . .	438
194. Montaje de galgas . . . . .	439
195. Curva de caracterización Straing . . . . .	441
196. Grafica de probabilidad de los residuos . . . . .	443
197. Histograma de los errores . . . . .	443
198. Curva de caracterización Straing . . . . .	445
199. Grafica de probabilidad de los residuos . . . . .	447
200. Histograma de los errores . . . . .	447
201. Grafica de bloques . . . . .	449
202. Concepto de Superficie de Control. . . . .	450
203. Ubicación de puntos de medición discretos para toma de velocidad. . . . .	453
204. Métodos de medición de caudal según condiciones de volumen de control. . . . .	454
205. Fluviómetro de turbina. . . . .	457
206. Curva característica de factor k de caudalímetro de turbina . . . . .	458
207. Despiece del fluviómetro de turbina. . . . .	459
208. Proceso para la caracterización de un sensor . . . . .	461
209. SAD para el procedimiento de calibración de un fluviómetro de turbina axial. . . . .	462
210. Instalación típica de un fluviómetro . . . . .	463
211. Curva de Regresión del Fluviómetro . . . . .	465
212. Balanza con celda de carga tipo S. Capacidad de 0 a 10 Kg. . . . .	466
213. Sin celda de carga y con celda de carga . . . . .	466
214. Pesas calibradas . . . . .	467
215. Descripción de un manómetro digital-patrón. . . . .	479
216. Manómetros análogos-calibrar. . . . .	479
217. Calibradores de presión de precisión portátil. . . . .	480
218. Cilindro-piston . . . . .	480

219. Curva variable real-lectura . . . . .	484
220. Esquema de Manómetro Bourdon con los tipos de Ajuste para cada Error	484
221. Señal de entrada y salida sinusoidal . . . . .	491
222. Características Típicas de un Sistema en el dominio de la Frecuencia. . .	493
223. Aproximación Asintótica del Diagrama de Bode. . . . .	494
224. Respuesta De Un Sistema De Orden Cero En Función De La Frecuencia.	494
225. Diagrama de Bode Para Sistemas de Primer Orden . . . . .	495
226. Sistema de Segundo Orden . . . . .	495
227. Diagrama de Bode de Sistemas de Segundo Orden.( $k=1$ , $W_n=3,162$ , $z=0,3162$ ) . . . . .	496
228. Diagrama de Bloque Para Sistemas de Tercer Orden . . . . .	497
229. Diagrama de Bode de Orden Superior . . . . .	497
230. Punto Suma . . . . .	499
231. Diagrama de Bloques de Lazo Cerrado . . . . .	500
232. Sistema de Lazo Cerrado sujeto a Perturbación . . . . .	501
233. Estructura General de un Sistema de Medición Representada En un Dia- grama de Bloques . . . . .	503
234. Diagrama de bloques para la relación de ecuación de estado y ecuación de salida. . . . .	504
235. Sistemas Eléctricos . . . . .	507
236. Visualización de Componentes para la Analogía de Distintos Tipos de Sistemas Dinámicos. . . . .	509
237. Sistema De Nivel De Flujo . . . . .	509
238. Linealidad En Sistemas De Nivel De Flujo. . . . .	510
239. Sistema De Dos Tanques Con Interacción. . . . .	511
240. Sistema Térmico . . . . .	513

# LISTA DE ANEXOS

A. SEMINARIO ALEMAN . . . . .	477
B. PROCEDIMIENTO DE CALIBRACIÓN MANÓMETRO TUBO BURDON TIPO C. . . . .	478
C. NORMA TÉCNICA COLOMBIANA-RESUMEN . . . . .	484
D. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA Y ESTACIONARIA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA . . . . .	490
E. MÉTODO DE MODELADO MATEMÁTICO . . . . .	497
F. APLICACIÓN DE MODELADO MATEMÁTICO A SISTEMAS DINÁMICOS . . . . .	506
G. PROPIEDADES DE LA MEDIA . . . . .	513
H. TABLAS . . . . .	515

## RESUMEN

TITULO: ***SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN MÉTODOS PROBABILÍSTICOS APLICADO AL DISEÑO DE EXPERIMENTOS PARA INGENIEROS.***<sup>1</sup>

Autores:

**Johana Andrea Ariza Moreno.**

**Laidy Esperanza Hernández Mena.**

**Nohora Stella Mayorga García.**

**Nydia Andrea Rueda Ramírez.**<sup>2</sup>

Palabras clave: **Método científico, Probabilidad y Estadística, Investigación Experimental, Diseño de Experimentos, Talleres Prácticos.**

Descripción:

El método científico es un proceso lógico y objetivo que se apoya en la experimentación para descubrir nuevos conocimientos, confirmar o rechazar teorías existentes, resolver problemas partiendo de definiciones y conceptos, formulando hipótesis las cuales se ponen a prueba mediante métodos experimentales.

La investigación experimental ha sido fundamental a lo largo de los años para el desarrollo tecnológico. A esta se debe avances en la ciencia y la tecnología, pues ha permitido el estudio de fenómenos físicos y la formulación de hipótesis sobre los mismos, es por esto que en la ingeniería se hace primordial el estudio de los métodos de experimentación, para obtener datos y analizarlos mediante el uso de herramientas estadísticas y probabilísticas las cuales permiten predecir el comportamiento de sistemas y procesos para tomar decisiones con alto grado de confiabilidad.

Por medio de este trabajo, bajo la modalidad de seminario de investigación, se busca presentar las bases teóricas de probabilidad, estadística y diseño de experimentos útiles y necesarios para el campo de estudio del Ingeniero. También se desarrollan talleres prácticos como complemento y aplicación de la teoría con el fin de analizar datos reales de interés para el Ingeniero Mecánico, dichos talleres están enfocados en la medición de variables físicas como lo son: la presión, flujo y deformación usando un transductor de presión, flujometro de turbina axial y viga portátil instrumentada con Strain Gage respectivamente.

---

<sup>1</sup>*Proyecto de Grado.*

<sup>2</sup>Facultad Físico-mecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Director: Carlos Borrás Pinilla.

## ABSTRACT

TITLE: RESEARCH SEMINAR IN PROBABILITY METHODS APPLIED TO THE DESIGN OF EXPERIMENTS FOR ENGINEERS.<sup>3</sup>

Authors:

Johana Andrea Ariza Moreno.

Laidy Esperanza Hernández Mena.

Nohora Stella García Mayorga.

Nydia Andrea Rueda Ramírez.<sup>4</sup>

Key words: Scientific method, Probability y Statistic, Experimental research, Design of experiments, Practical work.

### Description:

The scientific method is a logical and objective process that relies on experimentation to discover new knowledge, confirm or reject existing theories, solve problems based on definitions and concepts, formulating hypotheses which are tested by experimental methods.

Experimental research has been essential over the years for technological development. To this is due advances in science and technology, and it has allowed the study of physical phenomena and the formulation of hypotheses about these phenomena, this is why in engineering is essential to study the experimental methods to obtain data and analyze them using statistical and probabilistic tools which can predict the behavior of systems and processes to make decisions with a high degree of reliability.

Through this work, in the form of research seminar, it aims to present the theoretical basis of probability, statistics and experimental design useful and necessary for the Engineer's field of study. Workshops are also developed as complement and application of theory to analyze real data of interest for the Mechanical Engineer; these workshops are focused on the measurement of physical variables such as: pressure, flow and deformation respectively by a pressure transducer, axial turbine flow meter and an instrumented portable beam with Strain Gage.

---

<sup>3</sup>Graduation Project.

<sup>4</sup>Fisico-Mecánicas Faculty. School of Mechanical Engineering. Director: Carlos Borrás Pinilla.

# GLOSARIO

**Adquisición de datos.** La actividad de medición, transmisión y grabación de señales eléctricas procedentes de sensores, interruptores y transductores. A menudo implica la conversión de estas señales en información digital por ordenador compatible.

**Aleatoriamente o al azar.** Cuando todos los elementos que constituyen o conforman una población, tienen la misma posibilidad de ser seleccionados. Generalmente la palabra “azar” implica que el proceso considerado es, en algún sentido probabilístico.

**Alcance.** El alcance de entrada o salida se especifica con el valor máximo y mínimo de la magnitud de la señal de entrada o salida correspondientemente.

**Análisis de Incertidumbre.** Proceso para identificar los errores en una medición y cuantificar sus efectos.

**Análisis de Regresión.** Consiste en determinar la relación o dependencia que puede existir entre dos variables, se habla también de análisis de covarianza o variabilidad conjunta de dos variables.

**Análisis de Varianza.** Es el procedimiento estadístico para comparar las medias poblacionales.

**Byte.** Ocho bits de datos relacionadas, un número binario de ocho bits. También se utiliza para denotar la cantidad de memoria requerida para almacenar un byte de datos.

**Calibración.** Conjunto de operaciones que establecen, en condiciones especificadas, la relación entre los valores de magnitudes indicados por un instrumento de medición o por un sistema de medición, o los valores representados por una medida materializada o por un material de referencia, y los valores correspondientes determinados por medio de patrones. Ajuste de calibración. Operación que modifica las lecturas o señales de salida de un instrumento mejorando su corrección de calibración. El ajuste más característico es el de cero (zero) y multiplicación (span).

**Campo de Medida (Range).** Espectro o conjunto de los valores de la variable medida que están comprendidos dentro de los límites superior e inferior de la capacidad de medida o de transmisión del instrumento; se expresa estableciendo los dos valores extremos.

**Campo eléctrico.** Es la fuerza de origen eléctrico que experimenta la unidad de carga eléctrica positiva en ese punto.

**Carga eléctrica.** Es la cantidad de electricidad que posee un cuerpo. Hay dos tipos de carga eléctrica negativa y positiva.

**Certificado de calibración.** Documento emitido por un laboratorio de calibración acreditado o no acreditado, en el cual presenta los resultados obtenidos al emplear un método de calibración. Para el caso de los laboratorios de calibración no acreditados, estos deben demostrar la trazabilidad de todos los instrumentos y elementos utilizados en la calibración.

**Ciencia.** Conjunto de conocimientos obtenidos mediante la observación y el razonamiento, sistemáticamente estructurados y de los que se deducen principios y leyes generales.

**Científico.** Que tiene que ver con las exigencias de precisión y objetividad propia de la metodología de las ciencias.

**Clase.** Utilizada en las distribuciones de frecuencias, el agrupar los datos en intervalos, por lo tanto cada uno de ellos tendrá límites inferiores y superiores en cada clase, que algunos denominan como fronteras de clase.

**Coefficiente de Determinación.** Nos indica el porcentaje de dependencia de la variable dependiente en base a la asignación de valores a la variable independiente.

**Comprobabilidad.** un diseño comprobable se define como aquel que incluye utilidades que permiten realizar una comprobación simple, eficiente y efectiva.

**Convertidor de analógico a digital.** Un dispositivo electrónico que convierte las señales analógicas en un formato digital equivalente.

**Correlación Lineal Simple.** Son los métodos estadísticos que nos permiten determinar la posible relación o asociación entre dos variables.

**Corriente.** La intensidad de la corriente eléctrica que circula por un conductor, es la cantidad de carga eléctrica que atraviesa la sección del conducto por unidad de tiempo.

**Covariable.** Variables adicionales que afectan a la respuesta y no pueden ser controladas.

**Cuartiles.** Son medidas de posición que dividen el conjunto de observaciones de una variable en clases, conteniendo cada una de ellas una cierta proporción de observaciones.

**Curtosis.** Medida estadística que describe que tan chata es una función de distribución con respecto a una distribución normal. Un valor positivo indica que la función es alargada en punta y un valor negativo indica que la función es chata con respecto a la normal. Para una distribución normal el valor de curtosis es igual 3, si es mayor que éste valor indica que los valores están muy alejados de la media y se le llama kurtosis excesiva. Para valores muy altos de kurtosis se le es atribuido el nombre de leptokurtosis.

**Datos.** Son los valores cualitativos o cuantitativos mediante los cuales se miden las características de los objetos, sucesos o fenómenos a estudiar.

**Datos Estadísticos.** Datos numéricos referidos a un agregado de elementos individuales, que la estadística compila, analiza e interpreta.

**Analógico a digital (A/D).** Término genérico que se refiere a la conversión de información analógica al lenguaje digital de las computadoras.

**Deriva.** Un instrumento se dice que muestra una deriva si hay un cambio gradual en sus lecturas sobre un periodo de tiempo sin corresponderse con ningún cambio en la entrada.

**Desviación Estándar.** Esta simplemente mide el grado de dispersión de una muestra.

**Diagrama de Barras.** mediante este se representan las distribuciones de frecuencias de variables con valores sin agrupar. La longitud de cada barra sobre el correspondiente valor de la variable es igual a su frecuencia (absoluta o relativa).

**Diagrama de Dispersión.** Es una representación gráfica que nos permite visualizar la posible asociación o relación entre variables.

**Diseño.** Plan o estrategia que se desarrolla para obtener la información que se requiere en una investigación.

**Diseño de experimentos.** Es el procedimiento de selección de datos de la muestra en el conjunto de X.

**Distribución de la Función.** Es un grafico o una relación matemática utilizada para representar los valores de la variable randómica.

**Distribución de probabilidad**, de una variable aleatoria es una función que asigna a cada suceso definido sobre la variable aleatoria la probabilidad de que dicho suceso ocurra. La distribución de probabilidad está definida sobre el conjunto de todos los eventos rango de valores de la variable aleatoria.

**Dominio**. Conjunto de valores que la variable puede tomar dentro del fenómeno estudiado.

**Efecto de Interacción**. Dos factores interactúan significativamente sobre la variable de respuesta cuando el efecto de uno depende del nivel en el otro.

**Elemento**. Fundamento, móvil o parte integrante de una cosa.

**Equilibrio (sistema dinámico)**. Se presenta en el comportamiento constante de la salida en el tiempo en la ausencia de perturbaciones.

**Error**. Es la diferencia entre el resultado de la medida y el valor real de la cantidad que se quiere medir.

**Error Estándar de Estimación**. Es el error que se comete al estimar valores de la variable dependiente mediante la ecuación de regresión.

**Error tipo I**: Es cuando se rechaza  $H_0$  (hipótesis nula) siendo que es verdadera.

**Error tipo II**: Es cuando se acepta  $H_0$  (hipótesis nula) siendo que es falsa.

**Error Experimental**. Es una fuente de variación que permite evaluar el efecto de los tratamientos.

**Errores de carga**. Son errores sistemáticos producidos por la inserción del instrumento de medida en la posición en la que se ha de realizar la medida.

**Error de Medición**. Es la diferencia entre el valor verdadero y el valor medido. Es un valor específico.

**Error de Modelado**. Deficiencia reconocible no debida a la falta de conocimiento.

**Error de Precisión**. Medición estadística de la variación del valor medido durante repetidas mediciones.

**Error Total**. Raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (RSS) de todos los errores que pueden afectar un sistema de medición.

**Escala.** La escala de un instrumento indicador es la matriz de marcas, junto con sus cifras asociadas, sobre la cual se indica la posición de una aguja, un punto luminoso, u otra forma de índice.

**Espacio de Muestra.** Es el conjunto de todos resultados elementales que pueden obtenerse en un experimento.

**Estabilidad.** Un sistema es estable si al aplicar al aplicarle una entrada de magnitud finita, entonces la salida es también finita.

**Estabilidad absoluta.** Es el estudio de la estabilidad de un sistema.

**Estabilidad relativa.** Estudia el grado de estabilidad de un sistema estable.

**Estadística.** La Estadística estudia los métodos científicos para recoger, organizar, resumir y analizar datos, así como para sacar conclusiones válidas y tomar decisiones razonables basadas con tal análisis.

**Estadístico.** Unidad de medida referente a la muestra. Se le llama estadístico también a la persona que trabaja con la estadística.

**Estadístico de Prueba.** Número calculado a partir de los datos, cuya magnitud permite discernir si se rechaza o se acepta la hipótesis nula.

**Estándar.** De acuerdo con la definición de la Real Academia Española, “estándar es aquello que sirve como tipo, modelo, norma, patrón o referencia”. Y estándar de calidad es el que reúne los requisitos mínimos en busca de la excelencia dentro de una organización.

**Estimador puntual.** Estadístico calculado a partir de información de la muestra para estimar el parámetro poblacional.

**Estimadores de mínimos cuadrados.** Son cantidades que se pueden calcular a partir de los datos.

**Exactitud.** Diferencia entre el valor verdadero y el valor medido.

**Experimento.** Es el proceso de recolección de datos de una muestra.

**Experimento Aleatorio.** Ocurre, cuando al repetirlo en condiciones idénticas es imposible predecir su resultado.

**Factor bloque.** En algunos casos el factor ruido puede ser fijado en distintos niveles, de modo que es posible controlar su efecto a esos niveles. Entonces la forma de actuar es mantener constante el nivel del factor para un grupo de unidades experimentales, se cambia a otro nivel para otro grupo y así sucesivamente. Estos factores se denominan factores de bloqueo y las unidades experimentales evaluadas en un mismo nivel del bloqueo se dice que pertenecen al mismo bloque.

**Factores.** Son las variables independientes que pueden estar relacionados con una respuesta variable Y.

**Factores Controlables.** Son variables de proceso y/o características de los materiales y los métodos experimentales que se pueden fijar en un nivel dado.

**Fiabilidad.** Se define como la posibilidad de que opere dentro de unos niveles especificados de prestaciones durante un periodo determinado y bajo unas condiciones ambientales precisas.

**Frecuencia.** Número de veces en que se repite un dato.

**Frecuencia absoluta.** La frecuencia absoluta de un valor de variables es el número de observaciones iguales a dicho valor, equivalentemente, el número de unidades de población que tiene ese valor de la variable.

**Frecuencia de muestreo.** Algunos instrumentos toman muestras de la variable a intervalos regulares. Cuanto mayor sea la frecuencia de muestreo, más fácilmente las lecturas que hace el instrumento reflejarán una entrada rápidamente variable.

**Frecuencia Relativa.** Es la proporción entre la frecuencia de un intervalo y el número total de datos.

**Fuerza.** Causa que tiende a producir un cambio en el movimiento de un cuerpo al cual se le aplica. Existen fuerzas de contacto, que tienen un contacto físico directo con el cuerpo; y fuerzas de campo, que son ocasionadas por la existencia de un campo gravitacional, eléctrico o magnético y no existe un contacto físico.

**Ganancia de un instrumento.** Factor por el cual se multiplica la señal bajo medición para obtener la variable que presenta el instrumento como medida.

**Grados de libertad.** Son parámetros que definen las distribuciones t, ji cuadrada y F, y se determinan a partir de los tamaños muestrales involucrados.

**Gravedad (g).** Aceleración gravitacional constante, varía ligeramente en la superficie terrestre, pero para efectos de cálculos tiene un valor constante de 9.81 [m/s<sup>2</sup>] ó 32.2 [ft/s<sup>2</sup>].

**Gravimetría.** Es un método analítico cuantitativo; es decir, que determina la cantidad de sustancia, midiendo el peso de la misma (por acción de la gravedad).

**Hardware.** Por lo general se refiere a los componentes físicos de un sistema de adquisición de datos, tales como PCs, tarjetas, dispositivos de conversión de datos, etc.

**Heteroscedástico.** Nombre que se le da al diagrama de dispersión cuando la dispersión vertical varía demasiado.

**Hipótesis.** Es una suposición que establece relaciones entre los hechos o fenómenos, mediante dos o más variables (v. independiente y v. dependiente), y a la que todavía falta una comprobación.

**Histéresis.** El error de histéresis es la diferencia entre los valores medidos obtenidos cuando la cantidad medida se ha incrementado o ha decrecido sobre ese valor.

**Histograma.** Es una serie de rectángulos con bases iguales al rango de los intervalos y con área proporcional a sus frecuencias.

**Homoscedástico.** Nombre que se le da al diagrama de dispersión cuando la dispersión vertical no varía demasiado.

**Incertidumbre.** Intervalo en el que se encuentra, con una elevada probabilidad, el valor convencionalmente verdadero de la medición.

**Incertidumbre de medición.** Es una estimación del error en una medida. Representa un rango de valores posibles que error podría asumir para una medición específica.

**Incertidumbre de modelado.** Deficiencia potencial debido a la falta de conocimiento.

**Inferir.** Es emitir juicios o conclusiones basados en algún conocimiento o experiencia sobre un evento o suceso.

**Inferencia Estadística.** Proceso mediante el cual se utiliza la información obtenida a partir de los datos de una muestra para extraer conclusiones acerca de la población de la que ésta proviene.

**Instrumentación.** Es la aplicación de técnicas y conocimientos de ingeniería, de dispositivos de mecanismos para detectar, medir, registrar y controlar un variable o

un conjunto de ellas que pueden estar asociadas en la elaboración de un producto, en la operación de una maquina o en cualquier tipo de proceso.

**Instrumento.** Es un aparato que se usa para comparar magnitudes físicas mediante un proceso de medición. Como unidades de medida se utilizan objetos y sucesos previamente establecidos como estándares o patrones y de la medición resulta un número que es la relación entre el objeto de estudio y la unidad de referencia. Los instrumentos de medición son el medio por el que se hace esta conversión. • Interfaz gráfica de usuario. Un intuitivo, medios gráficos de comunicación de información entre los dispositivos basados en computadoras y usuarios humanos. Este puede parecerse a los paneles frontales de instrumentos u otros objetos asociados con un programa de ordenador.

**Intervalo.** Es la variación máxima entre el valor máximo y mínimo ya sea de la señal de entrada o salida.

**Intervalo de Confianza.** Conjunto de valores formado a partir de una muestra de datos de forma que exista la posibilidad de que el parámetro poblacional ocurra dentro de dicho conjunto con una probabilidad específica llamada nivel de confianza.

**Investigar.** Hacer diligencias para descubrir algo. Realizar actividades intelectuales y experimentales de modo sistemático con el propósito de aumentar los conocimientos sobre una determinada materia.

**Legibilidad.** Es la cercanía con la que la escala del instrumento es leída por un experimentador. Es un valor subjetivo que no entra en la evaluación de la incertidumbre del instrumento.

**Margen.** El margen o intervalo total de un instrumento son los límites entre los que se pueden realizar las lecturas.

**Masa.** Cantidad de materia que contiene un cuerpo. Propiedad que da la inercia, es decir resistencia a moverse o detenerse.

**Media del Error Absoluto.** Es la media del valor absoluto de los residuos, y sirve para ver cuánto falla en promedio el modelo de hacer la estimación de la variable de respuesta.

**Medir.** Es la comparación con una unidad de medida legalmente establecida, la cual está relacionada con escalas.

**Método.** Procedimiento que se sigue en las ciencias para hallar la verdad y enseñarla.

**Mínimos Cuadrados.** Es un método que nos permite determinar la ecuación de mejor ajuste a los datos, para realizar estimaciones de la variable dependiente.

**Modelo (matemático).** En general una descripción matemática para un sistema dinámico.

**Muestra.** Un subconjunto representativo seleccionado de una población donde se realizó un experimento y datos numéricos fueron obtenidos.

**Nivel.** Es la intensidad de la fijación de un factor, es decir, el valor asumido por una serie de factores en un experimento.

**Nivel de confianza.** Valor  $(1 - \alpha)$  de la probabilidad asociada a un intervalo de confianza, se expresa frecuentemente como porcentaje.

**Norma.** Solución que se adopta para resolver un problema repetitivo, es una referencia respecto a la cual se juzgará un producto o una función y, en esencia, es el resultado de una elección colectiva y razonada.

**Parámetro.** Parámetro es condición variable a la que se asignan unos valores determinados y fijos.

**Patrón.** Proporciona el método de comparación según el cual un instrumento se ha calibrado.

**Patrón de referencia.** Patrón que generalmente posee la máxima calidad metrológica disponible en un sitio dado o en una organización dada, a partir de la cual se derivan las mediciones hechas.

**Patrón de trabajo.** Patrón que se utiliza rutinariamente para calibrar o comprobar medidas materializadas, instrumentos de medición o materiales de referencia

**Patrón Internacional.** Patrón reconocido mediante acuerdo internacional, utilizable como base para asignar valores a otros patrones de la magnitud que interesa.

**Patrón Nacional.** Patrón reconocido mediante una decisión nacional utilizable en un país, como base para asignar valores a otros patrones de la magnitud que interesa.

**Peso.** Se define como la fuerza que ejerce la tierra sobre éste debida a su masa.  $P = mg$ , donde P es el peso, m es la masa y g es la gravedad.

**Población.** Es la colección ya sea de un número finito de mediciones o una colección grande, virtualmente infinita, de datos acerca de algo de interés. Si la desviación

típica es pequeña, los datos están agrupados cerca de la media; si es grande, están muy dispersos.

**Precisión o Exactitud**, de una medida es el grado en que difiere del valor verdadero, es decir, el grado de incertidumbre.

**Probabilidad**. Es la parte de las matemáticas que se encarga del estudio de los fenómenos o experimentos aleatorios.

**Procedimiento de medición**. se obtienen de un reflejo cuantitativo del valor de las magnitudes físicas, para satisfacer necesidades humanas, científicas o tecnológicas, utilizando medios de medición.

**Procesamiento digital de señales**. La manipulación de la información de la señal, mientras que existe en forma digital en vez de analógica.

**Proceso**. Es el conjunto de operaciones necesarias para modificar las características de las materias primas. Por lo general, para la obtención de un cierto producto, se necesitan múltiples operaciones individuales.

**Rango**. Señala la amplitud de la variación de un fenómeno entre su límite menor y uno claramente mayor. El rango estadístico, por lo tanto, es el intervalo que contiene dichos datos y que puede calcularse a partir de restar el valor mínimo al valor máximo considerado.

**Región de Aceptación**. Son los posibles valores donde no se rechaza la hipótesis nula.

**Región de Rechazo**. Es el conjunto de valores estadísticos de prueba que llevan a rechazar la hipótesis nula.

**Repetibilidad**. Es la capacidad de reproducción de las mediciones sucesivas en una medición (variable detectada por posiciones o del índice o de la señal de salida del instrumento), al medir repetidamente valores idénticos en la medición en las mismas condiciones de servicio y en el mismo sentido de variación, recorriendo todo el campo.

**Repetición**. Es una réplica de la aplicación de un tratamiento en otra unidad experimental bajo las mismas condiciones.

**Resolución**. Es la menor división indicada físicamente que el instrumento muestra o marca.

**Respuesta en frecuencia**. Respuesta de un sistema a una entrada senoidal.

**Respuesta en estado estable.** Hace referencia a la manera en la cual se comporta la salida del sistema conforme el tiempo tiende a infinito.

**Robustez.** Representa una medida de la sensibilidad de un sistema a la variación de parámetros.

**Ruido.** Es el término utilizado para las señales no deseadas que son recogidas por un instrumento y dan como resultado errores aleatorios.

**Señal.** Es una alteración que se introduce o que aparece en el valor de una magnitud cualquiera y sirve para transmitir información.

**Señal Eléctrica.** Es una alteración en una tensión, corriente, potencia u otra magnitud eléctrica utilizada para transmitir información.

**Serie Estadística.** Conjunto de observaciones o medidas realizadas en una población, atendiendo a una o varias características.

**Sesgo.** Medida estadística que describe la simetría de una distribución partiendo de un promedio. Si es igual a cero, la distribución es simétrica; si es positiva, la asimetría se presentara en los valores positivos, y de igual forma para un valor negativo.

**Sistema.** Conjunto de elementos que, ordenadamente relacionadas entre sí, contribuyen a determinado objeto.

**Sistema de lazo cerrado.** Sistemas con retroalimentación, la salida vuelve al principio para que analice la diferencia y en una segunda opción se ajuste más, así hasta que el error es cero.

**Sistema de lazo abierto.** Sistemas sin retroalimentación, la salida no se compara con la entrada y la precisión depende de la previa calibración del sistema.

**Tabla Estadística.** Sirven para contener los datos de la serie de una forma ordenada y fácil de consultar.

**Teorema de Nyquist.** Ley de la teoría del muestreo indica que los datos de frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de las variaciones de frecuencia más alta en la señal de interés. Debe ser observado para preservar los patrones en los datos y de no introducir artificial, patrones de frecuencia más baja.

**Tiempo de respuesta.** Tiempo que transcurre desde que hay un cambio en la cantidad que se quiere medir hasta que el instrumento de medida responda correctamente al cambio.

**Tolerancia.** Intervalo especificado de valores dentro del cual debe estar un resultado, la cual es determinada por la criticidad del proceso o de la medición.

**Transmitancia.** Término aplicado a la relación de la función de salida con respecto a la función de entrada en la transformada de Laplace.

**Tratamiento.** Factor sometido a estudio y comparación en un experimento.

**Trazabilidad.** Propiedad del resultado de una medición o de un valor de un patrón, en virtud de la cual ese resultado se puede relacionar con referencias estipuladas, generalmente patrones nacionales o internacionales, a través de una cadena ininterrumpida de comparaciones que tengan todas las incertidumbres determinadas.

**Variable.** Es una característica (magnitud, vector o número) que puede ser medida, adoptando diferentes valores en cada uno de los casos de un estudio. Se encuentran dos tipos de variables en estudio, la variable respuesta y las variables explicativas o controladas:

- Respuesta. Variable medida a las unidades experimentales, es el resultado de la realización de un experimento.
- Controlada. Manejada por el investigador (es decir que, los valores o niveles de la variable son determinados a priori por el investigador), interesa determinar su influencia sobre la variable respuesta. Esta variable también es llamada Factor, los valores que toma la variable son llamados los niveles del factor. Estas variables pueden ser cuantitativas o cualitativas (Temperatura, Raza). Son usadas para clasificar poblaciones, una por cada nivel del factor.

**Unidad experimental.** Es el objeto sobre el cual la respuesta Y se mide.

# INTRODUCCION

El papel de la Estadística en la investigación y la Ingeniería juega cada vez un rol más importante en el entendimiento y desarrollo de la ciencia y tecnología. Al analizar datos o información recopilados en experimentos de cualquier tipo, se observa en la mayoría de las ocasiones que dichos datos están sujetos a algún tipo de incertidumbre, los cuales deben ser estudiados y analizados en forma crítica por el investigador o el profesional para tomar decisiones con alto grado de confiabilidad. El análisis probabilístico de datos experimentales cumple un papel primordial en la implementación y desarrollo de investigaciones y procesos analíticos en la ingeniería, por ello surge la necesidad de su aplicación como una manera de contribuir a un aumento significativo de la calidad, seguridad, confiabilidad, productividad y control en diferentes procesos o sistemas. Resulta indispensable que el ingeniero posea conocimientos básicos del uso y aplicación de las herramientas probabilísticas.

Sin duda alguna, una de las formas de empezar a difundir en la comunidad universitaria de la Escuela de Ingeniería Mecánica el uso y la importancia de dichas herramientas es mediante el desarrollo de un Seminario de Investigación en Métodos Probabilísticos Aplicados al Diseño de Experimentos para Ingenieros, el cual permitirá introducir bases fundamentales de estadística, probabilidad y sus métodos de aplicación que pueden ser útiles en cualquier campo de interés del ingeniero mecánico, logrando así formar profesionales idóneos capaces de aplicar y analizar estos métodos mediante la experimentación.

El Seminario de Investigación en Métodos Probabilísticos Aplicados al Diseño de Experimentos para Ingenieros es un proceso reflexivo, sistemático y crítico que tiene como propósito fortalecer en el estudiante las habilidades requeridas en el manejo de la información y la comunicación para desarrollar investigación científica, valiéndose de la formación para el trabajo tanto personal como en equipo, iniciando el estudio de nuevos objetos de investigación de interés para la Escuela de Ingeniería Mecánica mediante una dinámica que comprende actividades de relatoría, correlatoría, discusión y elaboración de un documento de síntesis, en el cual se incluye el estudio de los referentes contextuales en métodos Probabilísticos, desarrollando así todo el tema de manera compacta, lógica y coherente entre los subtemas que conforman el seminario.

Adicionalmente se desarrollaran talleres los cuales serán un complemento práctico de la parte teórica que se tratara en el Seminario de Investigación, donde se harán procedimientos correctos de los cuales se obtienen datos útiles a los que se les aplica un análisis probabilístico.

La escuela de Ingeniería Mecánica en su misión contempla la construcción, aplicación y divulgación del conocimiento científico. Por ello, es necesario estudiar el uso de herramientas estadísticas y probabilísticas a procesos industriales relacionados con la ingeniería.

Parte I

SEMINARIO DE  
INVESTIGACIÓN

# 1. GENERALIDADES DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

## 1.1 CONCEPTUALIZACIÓN DE SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

El Seminario de Investigación, también conocido como Seminario Alemán (ver Anexo A), es una actividad académica cuyo origen se dio a finales del siglo XVIII en la Universidad de GITANEEN de Alemania, para renovar las estrategias de estudio y formación de los investigadores, además para demostrar que la docencia y la investigación se pueden unir y complementar para obtener mejores resultados<sup>5</sup>.

Consiste en estudiar, discutir e intercambiar experiencias acerca de un tema en particular, en un grupo, en el cual sus participantes se intercomunican exponiendo dicho tema (la Relatoría) complementándolo, evaluándolo (Correlatoría), aportando entre todos (la Discusión), sacando conclusiones y planteando nuevos interrogantes lo que permite que todo ello quede en la memoria escrita (el protocolo).

El Seminario de Investigación se programa por subtemas, estos son seleccionados con la orientación del director del seminario, quien con su experiencia y conocimiento del tema central, guía la selección con la debida pertinencia, actualidad y ubicación en el contexto. Los temas son desarrollados en sesiones planificadas, en las cuales los miembros del grupo deben asumir diferentes roles de acuerdo con la descripción anterior y mantener una relación de interés y compromiso con el conocimiento sin jerarquías en un clima de colaboración y participación activa.

## 1.2 OBJETIVO DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

Formar a los participantes en la investigación científica mediante el desarrollo de habilidades específicas aplicadas al asumir los diferentes roles dentro del seminario. Dichas habilidades están orientadas a desarrollar la capacidad de lector crítico de resultados de

---

<sup>5</sup>Universidad Industrial de Santander. Lineamientos para el seminario de investigación como modalidad para el desarrollo del trabajo de grado. Correctora académica. Septiembre de 2007

investigación en cualquiera de las áreas del conocimiento, a fortalecer la capacidad de observar e identificar los problemas presentes en temas bajo análisis, a buscar respuestas a preguntas clave y sustentarlas teórica y metodológicamente en forma verbal y por escrito; y a identificar las relaciones del problema objeto de estudio con el contexto económico, político o social a fin de enriquecer, con una mirada de integralidad, el conocimiento para el grupo de estudiantes. Para ello se programan y ejecutan ejercicios estructurados que permiten a los estudiantes desarrollar competencias iniciales de investigador, avanzar en el conocimiento y aportar buenas revisiones y análisis sobre temas que pueden facilitar el desarrollo de la investigación.

Para alcanzar dicho objetivo es preciso que haya una formación desde el trabajo personal hacia el trabajo en equipo; para esto, cada participante debe reconocer sus intereses, estilos de aprendizaje, capacidades para aprender en interacción con pares; además debe apropiarse de la metodología y los instrumentos con los cuales trabajará con el fin de lograr al interactuar con los demás miembros del grupo en las sesiones del seminario, compartir, criticar y corregir las ideas que surjan de él en un ambiente de colaboración mutua.

Los seminarios de investigación no se enfocan hacia la repetición de trabajos ya realizados, sino hacia la búsqueda de respuestas con nuevos argumentos; por tal razón los trabajos que se deriven del cumplimiento del objetivo del Seminario deben caracterizarse por su originalidad y estar acordes al nivel científico de formación de sus participantes.

## 1.3 VENTAJAS DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

El seminario de investigación, como herramienta para el desarrollo integral, presenta las siguientes ventajas:

- Permite a los participantes contar con un director (profesor) durante el seminario, el cual les guía hacia la consecución de los propósitos establecidos y resuelve las dudas e inquietudes, orienta sobre las fuentes de consulta y ayuda a los miembros del grupo en la búsqueda de información para suplir las necesidades que se presenten.
- Fortalece el hábito de documentarse acerca del tema bajo estudio. Para esto los participantes recurren a fuentes bibliográficas, bases de datos y textos de referencia

obligada; este ejercicio refuerza el desarrollo de las competencias interpretativas, argumentativas y propositivas; permite apropiarse y aprender de los métodos que emplearon los autores de los artículos y textos, así como también reconocer su valor y aporte a la investigación.

- Permite que los participantes desempeñen diferentes roles dentro del grupo y desarrollen habilidades comunicativas y de relaciones interpersonales complementarias para la formación tanto personal como profesional.
- Fomenta el aprendizaje como una experiencia grupal. Permite experimentar la eficiencia del trabajo en equipo y, si el grupo está conformado por estudiantes de diferentes áreas del conocimiento, la riqueza de la interdisciplinariedad, características todas aplicables y necesarias en el desempeño laboral del mundo de hoy.
- Permite el uso de distintas herramientas didácticas de apoyo al desarrollo de las sesiones, así como un control sobre la planificación establecida de éstas.
- Es una metodología integradora centrada en el estudiante con amplio potencial para fortalecer la habilidad de aprender a aprender, fundamental para tomar el perfil del ciudadano del siglo XXI, quien deberá asumir el compromiso de aprender a lo largo de la vida como la plantea J. Delors <sup>6</sup>.

## 1.4 CARACTERÍSTICAS DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

El seminario de investigación consta las siguientes características:

- Participación activa de todos los miembros del seminario, puesto que no solo el director (profesor) interviene, sino que también todos los integrantes del grupo realizan su aporte desde el rol que estén desempeñando. En este proceso los discípulos participantes empiezan a recorrer el camino hacia Maestros.
- El Seminario de Investigación está conformado por un grupo reducido, de aprendizaje activo y cooperativo; inducido a investigar, reflexionar, descubrir y concluir información del tema.
- Empleo del dialogo permanente para compartir los conocimientos adquiridos.

---

<sup>6</sup>Jaques Delors et al. La Educación Encierra un Tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la educación para el siglo XXI. París, 1996.

- Fomenta un ambiente amable y cooperativo que mejora la participación de los integrantes del grupo.
- Se desarrolla en sesiones que utilizan medios didácticos de apoyo al aprendizaje.
- La estructura, todas las actividades y parámetros para desarrollar el seminario son planificados en la primera sesión.
- El seminario de investigación exige a los participantes una alta responsabilidad para lograr la preparación adecuada que les permita tener bases para llevarlo a ca

## 1.5 ORGANIZACIÓN DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

El Seminario de Investigación se compone de las siguientes actividades: la Relatoría, la Correlatoría, la Discusión y el Protocolo, las cuales deben girar en torno a un tema, del que se desprenden los subtemas que se trataran durante las sesiones.

Dichas actividades son responsabilidad de los integrantes del grupo, por lo cual a cada uno de ellos es asignado un rol de carácter rotativo; es así como una persona que en una sesión asume el rol de correlator podrá ser el protocolante en la siguiente, es decir, el responsable del protocolo.

La organización del seminario también implica establecer el lugar donde se llevará a cabo, el número de sesiones y las fechas para realizarlo; así como la duración de cada una de ellas.

El seminario de Investigación en Métodos Probabilísticos Aplicados al Diseño de Experimentos Para Ingenieros esta integrado por:

**Director:** Ing. Carlos Borrás Pinilla

**Participantes:** JOHANA ANDREA ARIZA MORENO

LAILY ESPERANZA HERNÁNDEZ MENA

NOHORA STELLA MAYORGA GARCÍA

NYDIA ANDREA RUEDA RAMIREZ

A los participantes se les asigna un rol para cada sesión. La sesiones se llevan a cabo en las instalaciones de la Escuela de Ingeniería Mecánica. El número de sesiones depende

del tema y los subtemas mostrados en la Tabla 2. Las sesiones están programadas para una duración de dos horas.

## **1.6 TEMA DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN**

El seminario de investigación tratará los métodos probabilísticos aplicados al diseño de experimentos para ingenieros, los cuales constituyen una herramienta fundamental en el análisis de datos obtenidos experimentalmente, contribuyendo especialmente en la ingeniería de confiabilidad como base para la toma de decisiones que ayuden a diseñar, mejorar y optimizar procesos nuevos o existentes garantizando una mejora continua. El conocimiento de la estadística y la probabilidad se convierten en una herramienta poderosa para ayudar a los ingenieros y científicos en el buen tratamiento de datos con los que se trabajan frecuentemente.

El análisis probabilístico es un proceso dinámico que contempla diversos factores derivados del diseño experimental permitiendo analizar la variabilidad de los datos obtenidos estudiando los factores que intervienen en dicha variación desde la etapa de medición hasta la obtención y tratamiento de datos, pues la validez de las conclusiones que se obtienen de un experimento dependen en gran medida de la manera en que éste se efectuó.

## **1.7 DIRECCIÓN DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN MÉTODOS PROBABILÍSTICOS APLICADO AL DISEÑO DE EXPERIMENTOS PARA INGENIEROS.**

La dirección del seminario de Investigación en Métodos probabilísticos aplicados al diseño de experimentos para ingenieros estuvo a cargo del profesor: Carlos Borrás Pinilla que cuenta con una amplia experiencia en la docencia, en la industria y en el campo de la investigación a nivel nacional e internacional.

Su principal función es orientar y liderar la investigación, brindando la asesoría requerida para encaminar los trabajos y tareas hacia el cumplimiento de lo programado, brindando un adecuado ambiente de trabajo e interviniendo durante las sesiones corrigiendo y complementando las opiniones de los participantes, propiciando el debate para enriquecer la argumentación y la participación crítica durante el seminario.

## 1.8 METODOLOGÍA

Para llevar a cabo el seminario de Investigación en Métodos Probabilísticos Aplicados al Diseño de Experimentos para Ingenieros satisfactoriamente se debe hacer una adecuada planeación y organización de las sesiones con el fin de garantizar la fluidez de las mismas y el cumplimiento de los objetivos planteados, para esto se desarrollan diferentes etapas contenidas en tres grupos: planeación, ejecución y finalización; las cuales se relacionan entre sí, dependiendo cada una de la anterior. En los siguientes capítulos se explicara detalladamente la planeación, ejecución y finalización.

## 1.9 RESULTADOS DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

El Seminario de Investigación tiene como objetivo fundamental que los estudiantes entren en contacto con los marcos teóricos existentes sobre el tema de estudio, para que sobre esa base realicen sus propias producciones. Como resultado del cumplimiento se desarrolla un proceso dinámico donde todos aporten en cada sesión y así generar un documento síntesis que refleje el trabajo y el valor agregado dado por los estudiantes que desarrollan el Seminario.

Se espera que este proceso de investigación no finalice sino que sea el punto de partida para el desarrollo de Seminarios de Investigación futuros, pues no se abarcan todos los temas que se desean y se debe tener en cuenta que la investigación siempre da cabida a nuevos interrogantes que llevaran a otros estudios complementarios del tema de interés.

## 2. PLANEACIÓN

En esta etapa se establecieron los lineamientos bajo los cuales se desarrolló el seminario, se defirieron los alcances y resultados que se esperaban obtener mediante la selección del tema, el estudio bibliográfico, los subtemas, y la planificación de las sesiones.

Los alcances y objetivos del seminario fueron:

- Elaborar un documento síntesis original donde se recopilen los resultados de la investigación y la discusión realizada en cada sesión a partir de los resúmenes, las relatorías recopiladas complementadas con talleres, y los protocolos en el seminario de investigación de acuerdo con los siguientes temas especificados en la tabla2.
- Realizar presentación en Power Point de los temas estudiados de acuerdo a los lineamientos en la tabla 2.
- Utilizar diferentes herramientas computacionales como: Látex, para la edición de documentos científicos de alta calidad; LabVIEW y/o Matlab para simulación y recopilación de datos experimentales.
- Elaborar talleres para profundizar, aplicar conceptos y objetos de investigación discutidos en la tabla2, respaldado con documentos que serán entregados por los autores del Seminario de Investigación.

### TALLERES

Los talleres serán un complemento de la parte teórica que se tratara en el Seminario de Investigación. En ellos se harán procedimientos correctos en los cuales se encontrara y arrojará datos útiles como si las herramientas utilizadas tuviesen un seguimiento patronal.

- Análisis de esfuerzos de una viga en voladizo portátil instrumentada con Strain Gage (certificación del fabricante) cuyo objetivo es determinar: a. Modulo de elasticidad a la flexión, utilizando herramientas estadísticas. b. Determinación de la relación de Poisson.
- Análisis de esfuerzos en una viga con un concentrador de esfuerzos.
- Procedimiento para calibrar un transductor de presión en un intervalo de 0 a 30 bar.
- Proceso de calibración de un flujómetro para equipos hidráulicos entre intervalo mínimo de 0 a 1 GPM. El flujómetro es de tipo turbina axial.
- Proceso de adquisición digital y análisis de datos. Medición y análisis en el dominio de la frecuencia de un sonido.

## 2.1 ESTUDIO Y SELECCIÓN DEL MATERIAL BIBLIOGRÁFICO

Antes de iniciar el Seminario de Investigación en Métodos Probabilísticos Aplicados al Diseño de Experimento Para Ingenieros, se definió la bibliografía para estudiar el tema seleccionado y cada uno de los estudiantes se documento dependiendo de los requerimientos y acudiendo algunas veces a otras fuentes. Para el estudio de los temas, la bibliografía usada corresponde a libros, normas y artículos, estos documentos se detallan a continuación:

### 2.1.1 Libros

- MENDENHALL, William. y SINCICH, Terry. *Statistics for Engineering and the Sciences*. 5 ed. New York, USA.: Pearson Prentice-Hall, Inc, 2007.

Tiene un enfoque dirigido hacia las ideas básicas de la estadística. Explica como se puede describir los datos de prueba, y presenta conceptos básicos de probabilidad. Hace referencia a dos temas básicos para hacer inferencia respecto a los parámetros de la población: Estimación de parámetros usando intervalos de confiabilidad y prueba de hipótesis, estos temas son utilizados para hacer un análisis de ingeniería a los datos obtenidos en las diferentes experiencias. También incluye temas como el análisis de regresión, el análisis de varianza para el diseño de experimentos, la introducción a la estadística no perimétrica y la estadística de calidad y control.

- MONTGOMERY, Douglas. & RUNGER, George. *Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería*. 2 ed.: McGraw-Hill, 1996.

Este libro esta enfocado a los estudiantes de ingeniería, presentando inicialmente una introducción de la estadística, así como a los métodos básicos de estadística descriptiva, abarca conceptos básicos de probabilidad, variables aleatorias continuas y discretas, distribuciones de probabilidad, enfocándose a métodos empleados para resolver problemas reales de ingeniería de una manera practica.

- NAVIDI, William. *Estadística para ingenieros y científicos*. 4 ed. México.: McGraw-Hill, 2006.

A lo largo de este libro se presentan temáticas como: muestreo y estadística descriptiva, probabilidad, propagación de errores, distribuciones comúnmente usadas como Bernoulli, binomial, de Poisson, entre otras; intervalos de confianza, pruebas de hipótesis, correlación y regresión lineal simple, regresión múltiple, experimentos factoriales y control estadístico de calidad, con un enfoque ingenieril.

- HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. Probabilidad y Estadística para Ingeniería. 4 ed. México.: Cecsa, 2006.

Este libro presenta en su contenido bases sobre la probabilidad y estadística necesarias para poder responder ante situaciones cotidianas a las que se enfrentara el ingeniero. Contiene una clara cobertura de la estadística, amplias discusiones sobre el control de calidad, el diseño de experimentos, los diferentes tipos de estimación de intervalos y también aborda algunos tópicos especiales como la estadística no paramétrica, los valores  $p$  en pruebas de hipótesis y análisis residual.

- PÉREZ, César. Técnicas de muestreo estadístico: Teoría práctica y aplicaciones informáticas. 1 ed. México.: Alfaomega, 2000.

En este libro se presentan técnicas de muestreo estadístico en su doble faceta teórica y práctica. Adicionalmente se contemplan aplicaciones informáticas referentes a las diversas técnicas de muestreo. Comienza presentando las herramientas básicas en muestreo estadístico, explicando de forma completa su utilización y teniendo presente que la teoría de la probabilidad es el fundamento de los métodos de muestreo.

- WHEELER, Anthony J. y GANJI, Ahmad R. Introduction to Engineering Experimentation. 2 ed. New Jersey, USA.: Pearson Education, Inc, 2004.

Este material cubre los elementos mas comunes necesarios para diseñar, ejecutar, analizar y documentar un experimento en ingeniería o para especificar la instrumentación de un proceso de producción. Además de las descripciones de los instrumentos mas comunes el libro incluye técnicas estadísticas, sistemas de adquisición de datos y aspectos del muestreo discreto. Inicialmente hace una introducción a las características generales de los instrumentos y sistemas de medición eléctricos, dando algunas pautas sobre los sistemas de adquisición de datos, selección de dispositivos de medición, análisis estadísticos de datos, sistemas de medición dinámicos, incertidumbre en la medición, además como planear y documentar un experimento todo esto teniendo en cuenta consideraciones en métodos experimentales modernos.

- HOLMAN, Jack P. Experimental methods for engineers. 6 ed. USA.: McGraw-Hill, 1994.

Este libro representa un primer estudio de métodos experimentales. Propone discutir un amplio rango de instrumentos y técnicas de medición experimentales, haciendo un fuerte énfasis en la solución de problemas de ingeniería y en la importancia de los conceptos de exactitud, error e incertidumbre en mediciones experimentales. Estudia diferentes temáticas de interés como conceptos básicos en los sistemas de medición, análisis de datos experimentales, adquisición y procesamiento de datos; mediciones de flujo, presión, fuerza, torque y esfuerzo enfocados a la ingeniería usando métodos experimentales.

- DUNN, Patrick. Measurement & Data Analysis for Engineering & Science. 1 ed. University of Notre Dame, Indiana, USA.: McGraw-Hill, 2005.

Este libro enfatiza en la medición y análisis de datos para ingeniería y la ciencia en el proceso de experimentación. Su objetivo es exponer las herramientas esenciales de ésta última cualidad, el detalle científico tras estas herramientas, y el rol de la experimentación en el proceso científico.

Presenta perspectivas históricas e ilustraciones de instrumentos y las personas detrás de los métodos experimentales, con una explicación a fondo del rol de la experimentación; acercamiento actualizado del análisis de incertidumbre, y un paquete suplementario extensivo que incluye un extenso manual de ejercicios de laboratorio utilizando la herramienta software Matlab.

- FIGLIOLA, Richard. y BEASLEY, Donald. Mediciones mecánicas: Teoría y Diseño. 4 ed. México.: Alfaomega, 2008.

Este libro proporciona una referencia oportuna y profunda de las teorías de las mediciones de la ingeniería, permitiendo adquirir, instrumentar y medir datos con exactitud y precisión en sus tareas de investigación y experimentación. Estudia los principios, teoría, comportamiento, diseño y práctica de los sistemas de medición; además de los conocimientos para medir las variables físicas más importantes en la ingeniería. Explica el comportamiento de los sistemas de medición a través de la simulación en un modelo matemático, analizando la respuesta del sistema y la relación entre el diseño y el sistema. Explica el análisis de incertidumbre proponiendo una metodología para identificar y cuantificar errores en el diseño, ejecución e interpretación de pruebas.

Se integran los elementos necesarios para el diseño de sistemas de medición y la medición en pruebas de proyectos, con énfasis en el papel de la estadística y del análisis de incertidumbre en el diseño.

- GUTIERREZ, Humberto. Análisis y diseño de experimentos. 2 ed. Universidad de Guadalajara, México.: Mc Graw Hill. 2008.

En este libro se describen los aspectos mas importantes del diseño y análisis de experimentos, y aunque se ven los aspectos matemáticos, se hace énfasis en los conceptos así como en cuando aplicar cada tipo de diseño, como aplicarlo y como hacer el análisis e interpretación de los datos obtenidos mediante el experimento. Se apoya de muchos ejemplos para resaltar los aspectos relevantes de la aplicación del diseño y análisis de experimentos haciendo evidente la gran utilidad que tiene como herramienta de mejora e innovación.

- CREUS, Antonio. Instrumentos Industriales su ajuste y Calibración. 3 ed. México.: Alfaomega, 2009.

Este libro en su contenido examina las características de los instrumentos, la calibración de los instrumentos de medición de las variables, presión, caudal, nivel, temperatura y otras variables con una descripción de los patrones utilizados. También se examinan los tipos de mantenimiento correctivo, preventivo y predictivo, la seguridad y fiabilidad de los instrumentos, la frecuencia de mantenimiento y la normativa de calidad ISO 9000:2000 aplicada a la instrumentación.

- DOEBELIN, Ernest. Sistemas de Medición e Instrumentación: Diseño y Aplicación. 5 ed. México.: McGraw-Hill. 2005.

Este libro trata a la instrumentación como una importante ciencia que comienza con los principios básicos, aplicando sensores para variables físicas y se complementa con la cadena de medición, con señales condicionadas y con el hardware y software para la adquisición y procesamiento de datos. Dentro de sus temáticas de estudio se encuentran los tipos de aplicaciones de instrumentos para la medición, características generalizadas de desempeño o funcionamiento de los instrumentos, dispositivos de medición, mediciones de variables físicas, manipulación y registro de datos entre otros.

- CREUS, Antonio. Instrumentación Industrial. 7 ed. España.: Alfaomega, 2006.

En este libro se examina los términos que definen al instrumento y un código para su identificación, estudiando algunas variables medidas y controladas en los procesos industriales, en particular, la presión, el caudal, el nivel y la temperatura, que son considerados más importantes. Describe los errores propios de los instrumentos, un sistema general de calibración e instrumentos de comprobación o patrones. Además incluye una descripción de la evolución de la instrumentación de acuerdo con las necesidades de la industria.

- SOISSON, Harold. Instrumentación Industrial. 6 ed. México.: Limusa Noriega Editores, 2007.

En este libro se presentan una amplia investigación de los instrumentos de medición ya existentes y se incluyen el principio de operación y características de funcionamiento. Se hace gran énfasis en el instrumento y sus accesorios esenciales necesarios para mediciones tanto estáticas como dinámicas. Se analizan combinaciones mecánicas, hidráulicas, eléctricas, electrónicas, y otras, todas ellas esenciales para desempeñar la función de medición y control.

- NISE, Norman. Control Systems engineering. 5 ed. United States of América.: John Wiley & Sons, 2008.

Este libro hace hincapié en la aplicación práctica de la ingeniería en sistemas de control. Inspecciona un tratamiento equilibrado de los equipos y partes del software del desarrollo de los sistemas integrados discutiendo su ciclo de vida. Trata temas como: modelado en el dominio frecuencia, tiempo de respuesta en la reducción de múltiples subsistemas, errores de estabilidad de estado, diseño a través de la frecuencia de respuesta, sistemas de control digital, analizar y diseñar sistemas de control de retroalimentación para la tecnología moderna, prácticas en el uso de MATLAB, Simulink, entre otros.

- OGATA, Katsuhiko. Ingeniería de Control Moderna. 3 Ed. México.: Pearson Prentice Hall, 1995.

Este libro presenta un tratamiento completo del análisis y el diseño de sistemas de control en tiempo continuo. Se presenta material introductorio sobre sistemas de control, el modelado matemático de los sistemas dinámicos y desarrolla modelos mediante la función de transferencia y el espacio de estados; incluye un análisis de cálculo de la respuesta transitoria mediante el uso de MATLAB. También estudia la respuesta de los sistemas de orden superior y los criterios de estabilidad de Routh y de Nyquist.

- OPPENHEIM, Alan V., WILLSKY, Alan S. y HAMID NAWAB, S. Señales y Sistemas. 2 ed. México.: Pearson Prentice Hall, 1997.

Este libro trata conceptos, técnicas y temas de fundamental importancia para todas las disciplinas de la ingeniería, no solo se enfoca al análisis de señales y sistemas ya existentes sino también al diseño de sistemas para procesar señales en formas particulares. También desarrolla en paralelo los métodos de análisis de señales continuos y discretos, ofreciendo un enfoque con una ventaja pedagógica clara y extremadamente importante. El principal enfoque de este libro se centra en la clase particular de sistemas lineales invariantes en el tiempo.

## 2.1.2 Normas

- Normas ANSI/ISA S 5.1-1984 (R-1992) American National Standard. Normas ANSI / ISA Para Instrumentación Símbolos e Identificaciones. Universidad Técnica Federico Santa María Sede Viña Del Mar, Chile. 2003.
- INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TÉCNICAS Y CERTIFICACIÓN. Trabajos escritos: presentación y referencias bibliográficas. NTC 1486. Bogotá. El Instituto, 2008.
- INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TÉCNICAS Y CERTIFICACIÓN. Sistema de gestión de Calidad. Requisitos. NTC-ISO 9001. Bogotá.: El Instituto, 2000.
- INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. Certificación de calidad en servicios, producción o implementación de productos. ISO 9002.
- INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TÉCNICAS Y CERTIFICACIÓN. Sistemas de gestión de la medición para los procesos de medición y los equipos de medición. NTC-ISO 10012. Bogotá.: El Instituto, 2003.
- NTC-ISO/IEC 17025 : Requisitos generales para la competencia de los laboratorios y ensayos de calibración.
- NTC 3529: Exactitud (veracidad y precisión) de los métodos y resultados de la medición.
- INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TÉCNICAS Y CERTIFICACIÓN. Sistema de gestión ambiental: Requisitos con orientación para su uso. NTC-ISO 14001. Bogotá.: El Instituto, 2004.

## 2.1.3 Artículos

- SKINNER, Katina, *et al.* Multivariate Statistical Methods for Modeling and Analysis of Wafer Probe Test Data. En: IEEE. Noviembre, 2002. vol. 15, no. 4, . p. 523-530.
- HARTIGAN, J. A. Introduction: Classification, Probability and Statistics. En: Elsevier Science. USA. 1996,.
- TAIZHONG, H. & ZHUANG, W. A note on Stochastic Comparisons of Generalized Order Statistics. En: Elsevier. 2005.

- M. Mahmoud, K. Sultan, S. Amer. Order Statistics from Inverse Weibull Distribution and Associated Inference. En: Elsevier. 2002.
- R. Michellini, G. Rossi. Assessing Measurements Uncertainty in Quality Engineering. En: IEEE Instrumentation and Measurement. Brussels,1996.
- J. Bellido. Sistemas de medición del ozono: Instrumentación asociada y Calibración. En: ACAM - Asociación Catalana de Meteorologia. Tethys, 3. 2006. p. 59–62.

#### 2.1.4 Subtemas de Investigación

Una vez realizado el estudio bibliográfico se determinaron los subtemas de acuerdo a los objetivos propuestos buscando profundizar en los aspectos mas relevantes que permitan entender la aplicación de la probabilidad y estadística en la ingeniería. En base a lo anterior se seleccionaron los subtemas mostrados en la Tabla 2.

Tabla 2: Subtemas de investigación

<b>Subtemas de Investigación</b>
1. Desarrollo y estudio del método científico en la experimentación. <ul style="list-style-type: none"> <li>■ El método científico.</li> <li>■ Estado del arte de la experimentación.</li> <li>■ El método científico en la experimentación.</li> </ul>

continúa en la página siguiente

## Subtemas de Investigación

### 2. Estudio de calibración

- Método General de Medición en ingeniería.
- Error de medida y conceptos relacionados
- Procedimiento general de calibración.
- Calibración según Normas NTC-ISO 9001:2000 Y 9002:2000.
- Caso de estudio: Calibración de un manómetro tubo bourdon tipo C

### 3. Características dinámicas de señales con fundamentación matemática.

- Modelado matemático de sistemas dinámicos
- Análisis de la respuesta transitoria y estacionaria en el dominio del tiempo y frecuencia en Sistemas de primer orden, segundo orden, orden superior.
- Análisis de los criterios de estabilidad de Routh-Hurwitz y de Nyquist.
- Caso de estudio: Análisis de un sistema masa-resorte-amortiguador (acelerómetro).

continúa en la página siguiente

### **Subtemas de Investigación**

4. Probabilidad y Estadística en la Ingeniería de diseños de Experimentos.

- Introducción a la estadística.
- Estadística descriptiva
- Conceptos básicos de probabilidad
- Estudio de Variables Randómicas discretas y continuas.
- Análisis de distribuciones de probabilidad.
- Estadística Inferencial.
- Regresión y correlación de experimentos.
- Procesos estadísticos y calidad de control.
- Productos y confiabilidad del sistema
- Estadística No Paramétrica

5. Estudio y análisis del diseño de experimentos.

- Principios del diseño experimental.
- Aplicación del análisis de varianza.

continúa en la página siguiente

<b>Subtemas de Investigación</b>
<p>6. Estudio de un sistema de medición.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Análisis de mediciones con dispositivos análogos y digitales.</li> <li>▪ Adquisición y procesamiento de datos usando herramientas computacionales (Matlab y LabVIEW).</li> <li>▪ Análisis de Incertidumbre: Propagación del error.</li> </ul>
<p>7. Estudio y desarrollo de mediciones de parámetros físicos experimentales aplicando métodos probabilísticos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Procedimiento de calibración de un transductor de presión.</li> <li>▪ Procedimiento de calibración de un flujómetro de turbina axial.</li> <li>▪ Análisis de esfuerzos en una viga cantilever (Strain Gage).</li> </ul>

## 2.2 DESCRIPCIÓN DE LOS SUBTEMAS

### 2.2.1 Desarrollo y Estudio de los Métodos de Experimentación

La investigación experimental ha sido fundamental a lo largo de los años para el desarrollo tecnológico. A esta se le debe muchos avances en la ciencia y la tecnología, pues ha permitido el estudio de fenómenos físicos y la formulación de hipótesis sobre los mismos, es por esto que en la ingeniería se hace primordial el estudio de los métodos de experimentación.

La evolución de los métodos experimentales está relacionada con los avances tecnológicos de los instrumentos como respuesta a la necesidad de optimización y control de procesos. El exigente mercado en busca de su crecimiento, puso en marcha el ingenio, tanto de los diseñadores como de los propios usuarios para idear y fabricar gran variedad de instrumentos utilizados en la industria.

El método científico es un proceso lógico y objetivo que se apoya en la experimentación para descubrir nuevos conocimientos o resolver problemas partiendo de definiciones y conceptos, formulando hipótesis las cuales se ponen a prueba mediante métodos experimentales.

La experimentación consiste en alterar controladamente las condiciones naturales del objeto de investigación, para obtener relaciones entre las variables de entrada y salida mediante pruebas y desarrollo de modelos matemáticos. Por lo tanto, la experimentación juega un rol importante en el desarrollo del método científico permitiendo examinar críticamente los resultados basados en el conocimiento y, validando o rechazando las hipótesis propuestas.

Es importante emplear métodos probabilísticos para un completo y satisfactorio desarrollo de diseños experimentales, que permite garantizar un análisis del problema; buscando que el experimento sea muy preciso y viable económicamente.

### **2.2.1 Estudio de calibración**

En este capítulo se tendrá como base introductoria el proceso de medición en Ingeniería, los instrumentos que intervienen y los errores que se pueden presentar en éste. Se trata los conceptos y parámetros relacionados que permiten establecer la importancia de la calibración de los instrumentos de medición. La calibración garantiza que los instrumentos industriales tengan la exactitud y el rango requerido para mantener en operación y en condiciones económicamente controladas los sistemas; como herramienta, define la precisión en la medición de una variable. Los instrumentos y técnicas utilizadas para cuantificar estas variables se conocen como estándares o patrones.

Por último, se hace énfasis en el proceso general de calibración, especialmente de los instrumentos relacionados con el ámbito ingenieril, tomando como caso de estudio la calibración de un manómetro Bourdon tipo C. El procedimiento de calibración (caso de estudio) se desarrolló con la colaboración de la empresa REYMOM Ltda. como facilitadora de las instalaciones e instrumentos necesarios certificados por PROGEM S.A para realizar dicho proceso con la aplicación de la normativa que lo rige.

### **2.2.3 Características dinámicas de señales con fundamentación matemática.**

En esta sección se trata el comportamiento dinámico de las señales, analizando los sistemas de primer, segundo orden y orden superior haciendo énfasis en la respuesta de tiempo y frecuencia para diferentes tipos de entrada.

La dinámica de un sistema físico, ya sea mecánico, hidráulico, térmico, eléctrico u otro, puede ser representado mediante un modelos matemáticos, los cuales son hal-

lados tomando como base leyes físicas aplicables al caso y verificando las relaciones que existen entre las variables del sistema.

Algunos de los métodos empleados para determinar el modelo matemático de un sistema son: Función de transferencia, Diagrama de bloques y Variables de estado. De los cuales sobresale el método de variables de estado, que debido a la configuración de su estructura moderna matricial, puede ser aplicado a sistemas no lineales, y de esta manera analizar situaciones más reales.

Por último, se definen los criterios de estabilidad de Routh-Hurwitz y el criterio de estabilidad de Nyquist como herramientas que ayudan a determinar la inestabilidad de un sistema de medición experimental, permitiendo conocer bajo qué condiciones su comportamiento es estable.

Como una aplicación de estos sistemas se toma el sistema masa-resorte-amortiguador (acelerómetro) como caso de estudio, analizando su comportamiento en el dominio de tiempo y frecuencia con su respectiva fundamentación matemática.

#### **2.2.4 Probabilidad y estadística aplicadas a la Ingeniería.**

La recopilación y el análisis de datos experimentales son fundamentales en la ciencia y en la ingeniería porque permiten que los investigadores descubran los principios que rigen el mundo físico y a su vez que los ingenieros aprenden cómo diseñar y/o mejorar procesos.

Existe la ciencia de la estadística que permite la recopilación y organización de datos, también comprende técnicas de muestreo y análisis de los mismos. La estadística se divide en dos ramas: *estadística descriptiva* y *estadística inferencial*, la primera trata esencialmente las fases de recolección, clasificación y presentación de datos para realizar el respectivo análisis. La estadística inferencial o la estadística inductiva se subdivide en estimación de parámetros y prueba de hipótesis, las cuales tienen como objetivo sacar conclusiones y hacer afirmaciones acerca de una población o proceso con base en la información contenida en una muestra, estas afirmaciones permiten la toma de decisiones y la validación de los resultados.

Hacer uso de la estadística en el diseño de experimentos es de gran utilidad en la ingeniería e investigación, por lo tanto, es necesario e importante tener conocimiento de ella para iniciar un proceso de investigación experimental y garantizar un razonamiento lógico, facilitando la toma de decisiones y minimizando la influencia del error logrando que los procesos sean más eficientes.

Los métodos estadísticos hacen un control del comportamiento de la variable y de esa manera garantizar los cálculos premeditados de la probabilidad; esto se hace graficando

en un diagrama de control los datos y verificando que estos se mantengan en un intervalo alrededor de la magnitud requerida para el sistema.

Generalmente en la experimentación cuando se repite una operación o un experimento bajo las mismas condiciones, los resultados obtenidos no son totalmente idénticos, este tipo de experimento se denomina aleatorio ya que se ven afectados por el azar.

La probabilidad es la parte de las matemáticas que trata estos fenómenos en los que interviene el azar, es el puente entre la Estadística Descriptiva y la Estadística Inferencial, pues permite usar propiedades obtenidas de la descripción de muestras para formular y aceptar hipótesis relacionadas a la población que generó dicha muestra.

Otro tema a tratar importante en la probabilidad es el análisis de regresión. Este comprende una serie de técnicas utilizadas para estudiar la relación entre variables, y permite el análisis de muchos fenómenos. La regresión lineal tanto simple como variable sirve para explorar la relación que existe entre variables dependientes o independientes, además la regresión permite diagnosticar e interpretar los resultados obtenidos.

Muchas veces cuando se aplican métodos estadísticos suele pasar que las suposiciones que parecían razonables no se cumplen, en estas ocasiones es conveniente disponer de procedimientos que sean válidos, la estadística no paramétrica es uno de ellos.

### **2.2.5 Estudio y análisis de diseño de experimentos.**

El término diseño hace referencia al plan o estrategia utilizada para obtener la información que se desea. El diseño indica al investigador lo que debe hacer para alcanzar sus objetivos de estudio y dar respuesta a los interrogantes que se han planteado.

El experimento es definido como un estudio en el que se manipulan intencionalmente una o más variables independientes para analizar las consecuencias que la manipulación tiene sobre las variables dependientes dentro de una situación de control para el investigador. En otras palabras es un proceso de causa- efecto.

Cuando se quiere mejorar un proceso existen dos maneras básicas de obtener la información para ello: una es observar o monitorear mediante herramientas estadísticas hasta obtener señales útiles que permitan mejorarlo; la otra manera es experimentar.

El diseño de experimentos consiste en planear un conjunto de pruebas experimentales, de tal manera que los datos generados puedan analizarse estadísticamente para obtener conclusiones válidas y objetivas acerca del sistema o proceso.

Existen diferentes factores que influyen en la selección de un diseño experimental, en el capítulo 9 se mostrará una clasificación general de acuerdo al número de factores, al tipo

de efectos que se pretende estudiar y según las restricciones existentes.

### **2.2.6 Estudio de un sistema de Medición.**

Las mediciones hacen parte de la experimentación, por lo tanto, cumplen un papel importante en la validación de las leyes de la ciencia. Son fundamentales para estudiar, desarrollar y monitorear muchos dispositivos, sistemas y procesos.

Sin embargo, el proceso mismo de medición implica una serie de procedimientos antes de producir un conjunto útil de información. Es preciso estudiar cada uno de los procedimientos de la medición, lo cual constituye el objetivo del capítulo 10.

En un experimento el control de los parámetros físicos como la corriente, la temperatura, el voltaje, etc. conllevan al éxito o fracaso del mismo, es aquí donde el uso de un buen sistema de medición contribuye en la calidad de la información obtenida por el investigador.

El equipo experimental es el conjunto de elementos que hacen parte del desarrollo del diseño de experimentos, por lo tanto el sistema de adquisición de datos es indispensable para obtener datos con alto grado de precisión. Estos datos son el material de análisis del experimento; el investigador mediante el procesamiento de esta información puede inferir conclusiones que permiten la toma de decisiones acertadas.

Para una buena adquisición de datos, se debe conocer la fundamentación teórica necesaria para la manipulación de software combinado con el hardware correspondiente. Como aplicación de la temática tratada en esta sección, se desarrolla un caso de estudio de adquisición de un sonido: la voz, usando Matlab como software para la adquisición y procesamiento de la señal.

### **2.2.7 Estudio y desarrollo de mediciones de parámetros físicos experimentales aplicando métodos probabilísticos.**

En esta parte del libro, se aplicarán los métodos probabilísticos estudiados con anterioridad a datos obtenidos mediante la realización de diferentes pruebas experimentales como:

- Procedimiento de calibración de un transductor de presión.
- Análisis de esfuerzos de una viga en voladizo portátil instrumentada con Strain gage cuyo objetivo es determinar el módulo de elasticidad a la flexión y la relación de Poisson.

- Análisis de esfuerzos en una viga con concentrador de esfuerzos
- Procedimiento de calibración de un flujómetro de turbina axial para equipos hidráulicos.

Se utilizó LabVIEW como software para la adquisición y recopilación de datos experimentales, al igual que un multímetro digital marca FLUKE como instrumento de verificación de los datos bajo las mismas condiciones de operación.

El análisis estadístico de los datos obtenidos se realizó con el uso de la herramienta computacional Matlab, mediante la programación de un código de acuerdo a los requerimientos establecidos por los autores.

## 2.3 PLANEACIÓN DE LAS SESIONES.

El número de sesiones se determinó de acuerdo a los subtemas seleccionados, se asignó a cada participante un subtema para exponer arbitrariamente, de manera equilibrada y se definieron los roles de cada participante: Relator, Correlator, Protocolante, Asistente (según Tabla 4) dichos roles fueron rotados para que todos los participantes desarrolle las destrezas necesarias para cada uno de ellos. Al tener definido el número de sesiones se organizaron las respectivas fechas de tal modo que hubiera un lapso de tiempo previo para la preparación de los subtemas.

Tabla 4: Temas y Subtemas

TEMAS	RELATOR	CORRELATOR	PROTOCOLO	DISCUSIÓN
<b>1. Desarrollo y estudio del método científico en la experimentación.</b> El método científico. Estado del arte de la experimentación.. Método científico en la experimentación.	Laidy Hernández	Nohora Mayorga	Nydia Rueda	Johana Ariza

continúa en la página siguiente

TEMAS	RELATOR	CORRELATOR	PROTOCOLO	DISCUSIÓN
<p><b>2. Estudio de calibración</b> Método General de Medición en ingeniería. Procedimiento general de calibración. Calibración según Normas NTC-ISO 9001:2000 Y 9002:2000. Caso de estudio: Calibración de un manómetro tubo bourdon tipo C</p>	Johana Ariza	Laidy Hernández	Nohora Mayorga	Nydia Rueda
<p><b>3. Características dinámicas de señales con una fundamentación matemática.</b> Modelado matemático de sistemas dinámico Análisis de la respuesta transitoria y estacionaria en el dominio del tiempo y frecuencia en Sistemas de primer orden, segundo orden, orden superior.</p>	Nydia Rueda	Johana Ariza	Laidy Hernández	Nohora Mayorga
<p>Estudio de los criterios de estabilidad de Routh y de Nyquist. Caso de estudio: Análisis de un sistema masa-resorte-amortiguador (acelerómetro).</p>	Nohora Mayorga	Nydia Rueda	Johana Ariza	Laidy Hernández
<p><b>4. Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería.</b> Introducción a la estadística.</p>	Laidy Hernández	Nydia Rueda	Nohora Mayorga	Johana Ariza

continúa en la página siguiente

TEMAS	RELATOR	CORRELATOR	PROTOCOLO	DISCUSIÓN
Estadística descriptiva. Conceptos básicos de probabilidad				
Estudio de Variables Randómicas discretas y continuas.	Johana Ariza	Nohora Mayorga	Laidy Hernández	Nydia Rueda
Distribuciones Bivariables de probabilidad.	Nydia Rueda	Laidy Hernández	Johana Ariza	Nohora Mayorga
Estadística Inferencial	Nohora Mayorga	Johana Ariza	Nydia Rueda	Laidy Hernández
Regresión y correlación de experimentos. Estadística No Paramétrica	Laidy Hernández	Nydia Rueda	Nohora Mayorga	Johana Ariza
<b>5. Estudio y Análisis de diseño de Experimentos.</b> Principios del diseño experimental. Aplicación del análisis de varianza.	Johana Ariza	Nohora Mayorga	Laidy Hernández	Nydia Rueda
Procesos estadísticos y calidad de control. Productos y confiabilidad del sistema	Nydia Rueda	Laidy Hernández	Johana Ariza	Nohora Mayorga
<b>6. Estudio de un sistema de medición .</b> Análisis de mediciones con dispositivos análogos y digitales.	Laidy Hernández	Nydia Rueda	Nohora Mayorga	Johana Ariza
Adquisición y procesamiento de datos usando herramientas computacionales (Matlab y LabVIEW).	Johana Ariza	Nohora Mayorga	Nydia Rueda	Laidy Hernández
Análisis de Incertidumbre: Propagación del error.	Nohora Mayorga	Johana Ariza	Laidy Hernández	Nydia Rueda

continúa en la página siguiente

TEMAS	RELATOR	CORRELATOR	PROTOCOLO	DISCUSIÓN
<b>7. Estudio y desarrollo de mediciones de parámetros físicos experimentales aplicando métodos probabilísticos.</b> Caracterización de un flujo de turbina axial.	Nydia Rueda	Laidy Hernández	Johana Ariza	Nohora Mayorga
Caracterización de un transductor de presión.	Laidy Hernández	Nydia Rueda	Nohora Mayorga	Johana Ariza
Análisis de esfuerzos en una viga cantilever (Strain Gage).	Nohora Mayorga	Johana Ariza	Laidy Hernández	Nydia Rueda

## 3. EJECUCIÓN

Esta etapa consistió en llevar a cabo lo establecido en la planeación del seminario; la preparación de un documento por parte del relator de cada subtema y el desarrollo de cada sesión.

### 3.1 DOCUMENTACIÓN PARA LOS SUBTEMAS

El relator de cada sesión elaboró un documento en formato látex y su respectiva presentación en Power Point, con normas técnicas y metodología científica acerca de su exposición, resultado de la respectiva investigación, de una forma propositiva y argumentativa. Antes de cada sesión este documento fue revisado por parte del director para su respectiva aprobación.

Previo a las sesiones, los miembros del grupo; conocieron y estudiaron dicho documento para participar y aportar durante el desarrollo de la sesión.

### 3.2 DESARROLLO DE UNA SESIÓN

Cada sesión se desarrolla de manera fluida siguiendo el orden de las actividades que aparecen en la tabla 6. La duración de cada relatoría se estableció en un lapso de tiempo de dos horas, de acuerdo a la complejidad del tema.

Tabla 6: Desarrollo de una sesión del Seminario de Investigación

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	RESPONSABLE	DURACIÓN (Minutos)
<b>1. Apertura de la sesión</b>	Lectura del plan de trabajo. Verificación de la asistencia. Confirmación o asignación de roles. Asignación de los roles para la próxima sesión.	Profesor (Director)	10
<b>2. Lectura del protocolo.</b>	Lectura del protocolo Preguntas aclaratorias del texto del protocolo.	Protocolante	10
<b>3. Relatoría</b>	Exposición del tema. Entrega del trabajo escrito.	Relator	45
<b>4. Correlatoría</b>	Se complementa y evalúa la relatoría. Se introduce a la discusión	Correlator	15
<b>5. Discusión</b>	Se realizan preguntas, intervenciones y aclaraciones. Se valida el conocimiento demostrado por el relator.	Todos los participantes	20

Fuente: Universidad Industrial de Santander. Lineamientos para el seminario de investigación como modalidad para el desarrollo del trabajo de grado. Vicerrectoría académica. Septiembre de 2007

Para dar una descripción detallada de los roles asumidos por los participantes durante la ejecución del seminario se presenta a continuación en qué consiste cada actividad desempeñada por el participante que asume cierto rol.

**Relatoría:** La relatoría es el procesamiento a través del cual el RELATOR expone el tema correspondiente en la sesión del seminario. El relator tiene como misión principal enriquecer, como resultado de su investigación y estudio, el saber de los demás, buscando por medio de una argumentación rigurosa aportar algo nuevo que permita avanzar en el conocimiento sobre el objeto de estudio. El relator durante su exposición debe estimular e inducir el grupo a la discusión, mantener su atención y despertar interés de participación,

a través de la argumentación rigurosa, explicaciones claras y el planteamiento de su punto de vista<sup>7</sup>.

### **Correlatoría**

Consiste en el complemento y enriquecimiento de la relatoría por parte de un CORRELATOR, el cual debe estar muy atento a la exposición del relator, pues no debe repetir lo expuesto, sino evaluar el contenido, la claridad y el manejo de la exposición, con el fin de plantear su reflexión personal, y su posición frente a la relatoría, de una manera crítica, destacando los aportes más relevantes de la relatoría motivando a los PARTICIPANTES al debate<sup>8</sup>.

**Discusión** Es el medio a través del cual los PARTICIPANTES con base en lo expuesto en la relatoría y la argumentación del correlator, confrontan sus concepciones y apreciaciones sobre el tema. Esta dinámica se desarrolla a manera de discusión, la cual se caracteriza por ser de carácter positivo, argumentativo y enfocado al enriquecimiento del trabajo en grupo. La discusión requiere participación oportuna y respeto por las opiniones de los demás, criticándolas constructivamente. Este ejercicio permite a los participantes fortalecer procesos cognitivos a partir de la escucha atenta, la reflexión, la toma notas sobre lo que desea expresar para luego a hablar.

**Protocolo** El protocolo es la evidencia escrita de cada sesión del seminario y un insumo para la elaboración del informe final. Éste debe ser leído antes de comenzar cada sesión, ya que es un acta de registro de lo ocurrido en la anterior y de los compromisos planteados. Su autor es el PROTOCOLANTE, el cual plasma en un documento las actividades tal y como fueron desarrolladas, utilizando una redacción clara y concisa.


## **3.3 ACTA**

El acta es un documento escrito donde se hace constar el tema a tratar en cada sesión, el día, el lugar, la duración, asistentes, funciones y tareas cumplidas, observaciones y conclusiones realizados entre los miembros del seminario. El documento modelo se observa en la figura 1.

---

<sup>7</sup>Néstor H. Bravo Salinas. El Seminario Investigativo, El Seminario como práctica pedagógica para la formación integral

Figura 1: Formato actas



SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN METODOS  
PROBABILISTICOS APLICADOS AL DISEÑO DE  
EXPERIMENTOS PARA INGENIEROS.

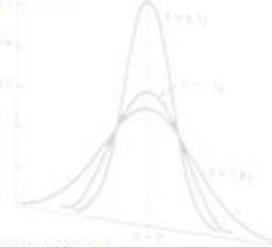
**ACTA N° \_\_\_**

SESION ___ : TEMA	
FECHA:	
LUGAR:	
HORA DE INICIO:	
HORA DE FINALIZACION:	

**A SISTENTES:**  
**DIRECTOR:** Dr. Carlos Borrás Pinilla.  
**RELATOR:**  
**CORRELATOR:**  
**DISCUSIÓN:**  
**PROTOCOLO:**

**ORDEN DEL DIA:**

1. Verificación de asistencia.
2. Lectura del acta anterior
3. Desarrollo del tema a tratar.
4. Observaciones.
5. Conclusiones.



OB SERVACIONES
CONCLU SIONES

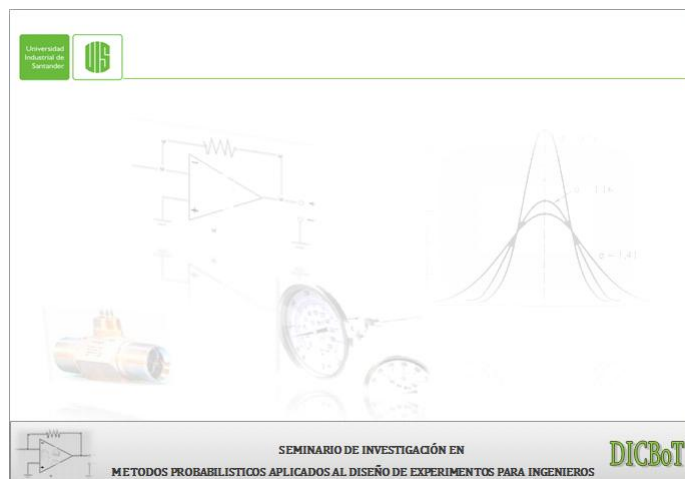
**FIRMA DE A SISTENTES.**

# 4. PRESENTACIONES Y DOCUMENTO.

## 4.1 PRESENTACIONES

Las presentaciones son un documento elaborado en Power Point por el relator de cada sesión como herramienta de apoyo para socializar la temática a tratar ante los participantes. Dichas presentaciones, constituyen la síntesis del resultado de un trabajo investigativo realizado por el relator, expuesto de manera clara usando un ambiente gráfico y siguiendo ciertos parámetros con el objetivo que la información sea entendible por los asistentes. Por esta razón se diseñó un formato estándar para las presentaciones de este seminario como el mostrado a continuación figura 2.

Figura 2: Formato de presentación



### 4.1.1 Características

Las diapositivas son una herramienta que le permite al relator dar a conocer el contenido a desarrollar de una manera dinámica que ayuda a captar la atención del auditorio. Los aspectos esenciales de esta herramienta son:

- Servir de guía y apoyo al expositor.
- Mostrar de manera clara y ordenada la temática a desarrollar.
- Transmitir las ideas al auditorio captando su atención y facilitando su entendimiento.

Lo importante de la presentación es la comunicación que debe existir con el auditorio mediante una interacción verbal y corporal haciendo uso de recursos didácticos como imágenes, gráficas, cuadros de texto y sinópticos, esquemas, etc.

## 4.2 DOCUMENTO

La elaboración del documento síntesis se basó en normas y técnicas de la metodología científica, representa el resultado de la labor investigativa y argumentativa de los participantes, enriquecido con los aportes individuales, la discusión de grupo y la asesoría del director en la revisión de los temas durante el transcurso de las sesiones.

El documento está dividido en siete (7) capítulos y es una recopilación de todos los subtemas expuestos durante las sesiones contenidas en la tabla 4 siguiendo el mismo orden para tener una continuidad y un orden lógico entre los mismos, profundizando por medio de secciones y subsecciones su contenido.

Dicho documento fué elaborado en **Látex**, programa usado para la elaboración de textos científicos con una apariencia estándar y de alta calidad usados para composición tipográfica de artículos, reportes, libros, etc.

## 4.3 TALLERES

En el desarrollo del seminario de investigación se planteó la realización de algunos talleres como un complemento de la parte teórica tratada. En ellos se ejecutaron procedimientos experimentales que permitieron la adquisición, procesamiento y análisis de datos, usando como herramienta los métodos probabilísticos. Los talleres realizados fueron:

- Análisis de esfuerzos en una viga cantilever (Strain Gage).
- Procedimiento para caracterización de un transductor de presión en un intervalo de 0 a 30 bar.
- Proceso de caracterización de un flujómetro para equipos hidráulicos entre intervalo mínimo de 0 a 1 GPM. El flujómetro es de tipo turbina axial.

## Parte II

# DESARROLLO DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN

## 5. DESARROLLO Y ESTUDIO DEL MÉTODO CIENTÍFICO EN LA EXPERIMENTACIÓN

A lo largo de la historia el hombre se ha preocupado por entender el mundo que lo rodea, por investigar sus leyes y descubrir el sentido de los fenómenos físicos que existe a su alrededor, interrogándose y buscando respuestas mediante la experimentación.

Hoy en día la ingeniería está encaminada a formar profesionales con espíritu científico y crítico capaces de generar conocimiento que a su vez contribuye al desarrollo mediante soluciones y nuevas propuestas en aplicaciones industriales. La investigación como búsqueda de nuevos conocimientos, necesita apoyarse en el uso del método científico, pues gran parte del trabajo científico consiste en investigaciones particulares, cuyos resultados proporcionan la base empírica para la formulación y comprobación de leyes, modelos y teorías.

De esta manera el ingeniero investigador toma conciencia de los fenómenos que ocurren en su entorno, y tiene un enfoque de la experimentación no como algo rígido sino como una disciplina que está abierta al cambio, permitiendo contenidos, procedimientos, actitudes y objetivos que el científico puede tomar, para generar nuevo conocimiento desde su disciplina.

### 5.1 EL MÉTODO CIENTÍFICO

Bunge<sup>9</sup>, define el método científico como, el conjunto de reglas que señalan el procedimiento para llevar a cabo una investigación cuyos resultados serán aceptados como válidos por la comunidad científica, y agrega que el estudio del método científico es la teoría de la investigación, la cual es descriptiva en la medida que descubre la investigación científica.

Como se observa en la figura 3, a través del método científico se busca observar, describir, explicar y predecir un fenómeno. Para ello se parte de técnicas que permitan recopilar información del fenómeno y luego hacer un análisis para emitir conclusiones o enunciados,

---

<sup>9</sup>RAMIREZ, Alberto. El método científico. En: Metodología de la investigación científica. Bogotá. p.25.

y dar una explicación científica de dicho fenómeno. El método científico como tal se puede dividir en método analítico, método sintético, método inductivo y deductivo.

Figura 3: El método Científico



**Método Analítico:** Parte de un todo, se necesita conocer la naturaleza del fenómeno y objeto que se estudia para comprender su esencia. Ya que conociendo más del objeto de estudio, se puede explicar, hacer analogías y realizar nuevas teorías.

**Método Sintético:** Significa integrar las partes de un todo, llegando a conocer la esencia del mismo, los aspectos y relaciones básicas. La síntesis va desde lo abstracto a lo concreto, entonces al compactar el todo en sus aspectos y relaciones esenciales permite una mayor comprensión de los elementos constituyentes.

**Método Inductivo y deductivo:** En cualquier área de conocimiento científico el interés radica en poder plantear hipótesis, leyes y teorías para alcanzar una comprensión más amplia y profunda del origen, desarrollo y transformación de los hechos empíricos a través de la experiencia, a demás la ciencia se interesa en confrontar sus verdades con realidades concretas la cual se encuentra en permanente cambio. En la inducción a partir de los hechos particulares se llegan a afirmaciones de carácter general, es decir partiendo de las observaciones o experimentos llegar a planteamientos de hipótesis, leyes y teorías que abarcan no solamente casos particulares, sino generalizar resultados apoyándose en formulaciones existentes en la ciencia.

La deducción permite pasar de afirmaciones de carácter general a hechos particulares, consiste en encontrar principios desconocidos a partir de otros conocidos o describir consecuencias desconocidas de principios conocidos.

### 5.1.1 Etapas del método científico

**La observación** Los investigadores siempre se están planteando interrogantes, por su curiosidad de saber o de comprobar algo en aras del cambio, por ello están en todo mo-

mento observando fenómenos, generalmente esta primera percepción no es muy precisa, y es ahí donde surge la necesidad de determinar con mayor claridad, el problema cuya solución va a ser el objeto de investigación.

En esta etapa intervienen elementos que permiten ver mejor las cosas como los sentidos, instrumentos, herramientas y el interés que tenga cada investigador por su labor, siendo capaz de analizar objetivamente los aspectos de la investigación.

Cuando el tema de interés es complejo la tendencia de la observación científica se dirige hacia la cuantificación, se usan los números donde sea posible para la descripción de un fenómeno, pues las mediciones numéricas permite una representación más precisa y hace posible la aplicación de la matemática y la estadística.

**Cuestionamiento** Cada evento es único y no puede ser observado otra vez, es por esto que en esta etapa surgen las preguntas de acuerdo a ciertas características de lo observado, estas preguntas son seleccionadas para estudiarlas a fondo e informarse de teorías o conocimientos científicos anteriores y la información será complementada con ideas empíricas o supuestos que serán la base de la investigación.

Es importante tener en cuenta que para que ocurra algo intervienen factores que causan efectos los cuales inquietan y hacen que el hombre se cuestione del por qué de las cosas pues el ser humano siempre está buscando el control de los fenómenos de la naturaleza, y la ciencia los permite controlar y pronosticar.

**Hipótesis** La hipótesis constituye una herramienta que ayuda a ordenar, estructurar y sistematizar el conocimiento mediante una proposición, con ella se busca dar explicación al fenómeno que se está estudiando; algunas veces se pretende descubrir la investigación científica comparando interrogantes con teorías o leyes que ya han sido comprobadas para buscar respuestas que lleven al resultado adecuado, es el nexo existente entre la teoría y la realidad. Para el investigador la hipótesis sirve como una guía de a dónde se quiere llegar, esta debe ser muy clara de tal manera que se puedan obtener deducciones refutando o confirmando el cuestionamiento planteado.

**Experimentación** Permite modificar y controlar variables de un fenómeno, para luego organizar los datos o las ideas en forma de leyes, teorías o modelos que luego se comprobaran, es así como se busca de una idea general explicar hechos futuros e independientes.

**Validación del Experimento** Las leyes y teorías en esta etapa se contrarrestan con la realidad, a menudo para la prueba de la hipótesis se suelen realizar experimentos ya que

no solo basta con la observación, pues algunas veces el observador crea las condiciones o eventos desfavorables, conocidos como variables que terminan alterando el resultado de la investigación. Debido a las variables que intervienen se recurre a métodos de análisis de resultados como la estadística, herramienta usada comúnmente.

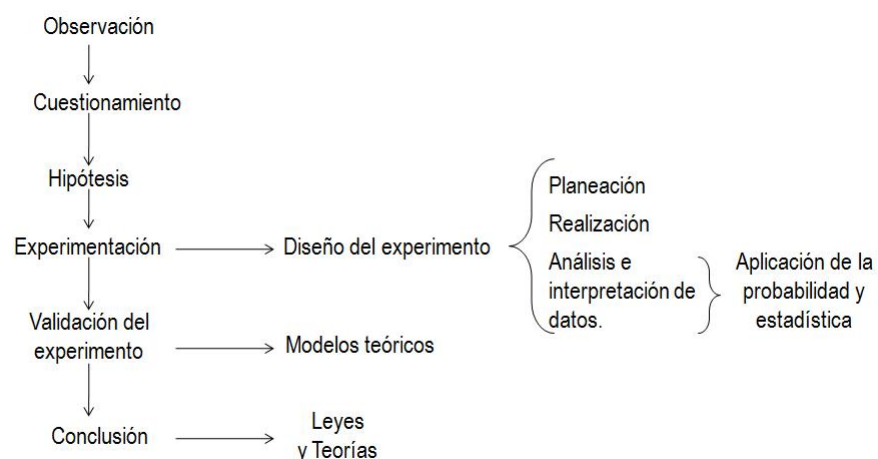
**Consecuencias de los resultados** En esta etapa se observan las consecuencias de los resultados obtenidos en el experimento, qué alcance tendrán, sus limitaciones y si afectan de manera positiva o negativa. Se pueden buscar las causas de otros posibles errores, debido a que no hay circunstancias completamente idénticas.

**Conclusión** Con el nuevo conocimiento obtenido se intenta formalizar leyes, teorías o conceptos ya experimentados para que a partir de estos, se puedan crear nuevos interrogantes y seguir con el proceso dinámico de la investigación en busca de un mejoramiento continuo.

Sin embargo, Tomás KHz en su obra *La estructura de las revoluciones científicas* ha subrayado que la aceptación de las teorías depende del consenso de la comunidad científica, y que tal consenso no es una simple consecuencia de las demostraciones lógicas<sup>10</sup>.

En la figura 4 se muestra un esquema general de las etapas del método científico y su relación con la experimentación para la generación de conocimiento mediante el uso de modelos teóricos que permiten proponer nuevas leyes y teorías o simplemente verificar o refutar las ya existentes.

Figura 4: Etapas del Método Científico



<sup>10</sup>KUHN,Thomas. *La Estructura de las Revoluciones Científicas*. 1 ed. México.: Fondo de Cultura Económico, 1992.

## 5.2 LA EXPERIMENTACIÓN

La ciencia experimental moderna tiene 303 años, pues los fragmentos construidos en épocas anteriores no llegaron a formar un cuerpo amplio de conocimiento, es decir, no se basaban en la aplicación sistemática de un método. En 1687, Isaac Newton publicó sus Principios matemáticos de la filosofía natural, donde se encuentra la primera teoría física en el sentido moderno, desde esta publicación la ciencia experimental no ha cesado de desarrollarse.

Básicamente la ciencia experimental se consolidó cuando:

- Se afianzó la idea de que la actividad científica tiene un objeto con dos aspectos, el teórico y el práctico, mutuamente relacionados e inseparables.
- Se consolidaron las actividades de investigación, sistematización, transmisión y aplicación.
- Se consiguió construir objetos científicos en relación con teorías matemáticas y métodos experimentales.
- Se utilizó el método hipotético-deductivo recurriendo a los criterios que determinan su fiabilidad.

En cuanto a diferentes disciplinas, la física fue la primera rama de la ciencia experimental que se consolidó establemente, y dentro de ella la mecánica fue la que alcanzó un gran auge científico en el sentido moderno. Las minuciosas investigaciones históricas de Pierre Duhem sacaron a la luz los antecedentes medievales de la mecánica clásica<sup>11</sup>, como consecuencia del trabajo de Pierre, por primera vez se observaron resultados objetivos que no tenían relación con el sentido común. En definitiva, la mecánica clásica quedó establecida gracias a un trabajo conceptual y experimental realizado durante varios siglos que culminó con la obra de Newton.

Parece indudable que en la ciencia experimental se dé un progreso acumulativo, puesto que las construcciones teóricas mantienen su validez propia aunque se formulen otras nuevas que tengan mayor alcance. El progreso científico se explica dentro de una perspectiva en la cual la ciencia experimental es considerada en toda su complejidad. Admite diversos campos que corresponden a los diferentes aspectos de la actividad científica, de sus métodos y sus resultados.

---

<sup>11</sup>Ramírez, Alberto. Metodología de la investigación científica. Pontificia Universidad Javeriana.

La ciencia experimental se apoya en el diseño de experimentos como herramienta que ayuda al estudio de un tema de interés para el investigador. Fue Ronald A. Fisher quien inicio con el estudio del diseño de experimentos, él con sus múltiples investigaciones en el área de la agricultura incluye el análisis estadístico a sus estudios, y aplica la estadística a los datos obtenidos de sus experimentos para llegar a resultados validos. Más adelante George E.P.Box siguió con las investigaciones en este campo y el diseño de experimentos se empieza a convertir en una gran herramienta en las áreas de investigación y desarrollo<sup>12</sup>.

Hacia la década de 1980 Deming e Ishikawa promueven aun más la aplicación de la estadística en el diseño de experimentos, permitiendo resolver problemas y hacer un mejor diseño de productos y procesos<sup>13</sup>.

Como respuesta a todos los avances que han surgido en estos campos y en aras de mejorar la calidad, se empezó a entrenar a los ingenieros en las aplicaciones del diseño de experimentos facilitando el estudio de muchos procesos con el fin de mejorar la calidad de la investigación y por ende optimizar la exactitud de los resultados.

La evolución de los métodos experimentales ha ido de la mano con la evolución de los instrumentos, y estos a su vez empezaron a aparecer de acuerdo a la necesidad de los procesos. El exigente mercado permitió el crecimiento de las empresas fabricantes de instrumentos, y puso en marcha la inventiva tanto de los fabricantes como de los propios usuarios para idear y fabricar nuevos instrumentos de gran variedad utilizados en los diferentes procesos industriales.

La tecnología es más que ciencia aplicada, pues es producto de la experimentación y se ha visto beneficiada por el método científico; en primer lugar porque tiene sus propios procedimientos de investigación adaptados a circunstancias concretas que a diferencia de los casos puros necesitan ser estudiados por la ciencia, en segundo lugar, porque toda rama de la tecnología contiene un conjunto de reglas empíricas descubiertas antes por los principios científicos. La tecnología no es necesariamente el resultado de aplicar el conocimiento científico existente a los casos prácticos, es esencialmente, el enfoque científico de los problemas prácticos, es decir, el tratamiento de estos sobre un fondo de conocimiento científico y con ayuda del método científico, siendo fuente de nuevos conocimientos. La conexión de la ciencia con la tecnología no es asimétrica. Todo avance tecnológico plantea problemas científicos cuya solución puede consistir en la invención de nuevas teorías o de nuevas técnicas de investigación que conduzcan a un conocimiento más adecuado y a un mejor dominio de la misma. La ciencia y la tecnología constituyen

---

<sup>12</sup>CREUS, Antonio. Instrumentos Industriales su ajuste y Calibración. 3 ed. México.: Alfaomega, 2009.

<sup>13</sup>RAMIREZ, Alberto. Metodología de la investigación científica. Pontificia Universidad Javeriana.

un ciclo de sistemas que interactúan entre sí y se alimentan el uno al otro.

En conclusión, se da progreso en la medida en que se consiguen mejores medios para alcanzar el objetivo de la ciencia experimental, y las modalidades del progreso coinciden con los caminos para lograrlo de manera más eficaz.

## 5.3 EL MÉTODO CIENTÍFICO Y LA EXPERIMENTACIÓN

Son tres los principales aspectos que pueden distinguirse en las ciencias experimentales. En primer lugar, la ciencia es una actividad humana que se realiza en vista a unos objetivos específicos. En segundo lugar, los medios que se utilizan para alcanzar esos objetivos son igualmente específicos: se trata de los métodos científicos. En tercer lugar, la aplicación de los métodos proporciona unos resultados, que son los contenidos teóricos de cada disciplina, tales como los enunciados acerca de los hechos, las leyes experimentales y los sistemas teóricos.

Todo trabajo de investigación se basa en un conocimiento teórico. Uno de los muchos problemas de la metodología es, precisamente averiguar cuáles son los criterios para decidir si una hipótesis dada puede considerarse razonablemente confirmada. Más aun, la investigación sigue reglas y técnicas que han resultado eficaces en el pasado pero que son perfeccionadas continuamente, no sólo a la luz de nuevas experiencias, sino también de resultados de experiencias realizadas por las ciencias básicas, como puede ser la matemática.

Las ciencias emplean el método experimental, ya que este constituye formas generales para desarrollar o probar hipótesis, dicho método consiste en pruebas empíricas para extraer conclusiones particulares de hipótesis generales. Este tipo de verificación requiere la manipulación de la observación y el registro de fenómenos, el control de las variables o factores relevantes, y en todos los casos exige el análisis para verificar los resultados y asegurar que estos sean dignos de confianza, para lograrlo es preciso organizarlos, analizarlos, interpretarlos y confrontarlos con modelos teóricos.

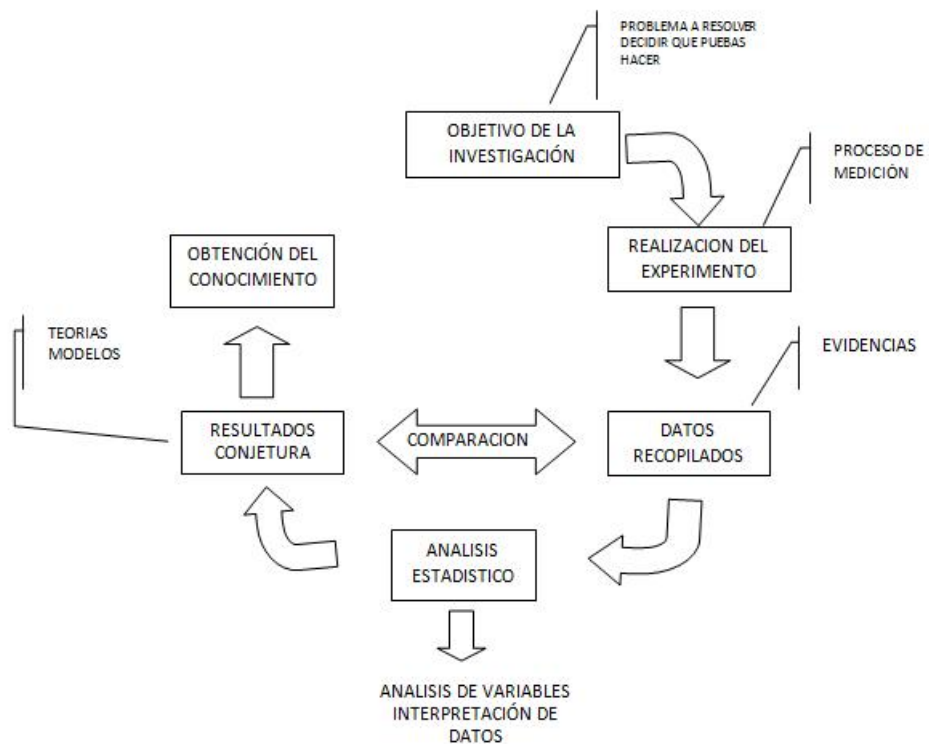
Las ciencias exactas son empíricas en el sentido que la comprobación de sus hipótesis involucre la experiencia. La ciencia, es pues, esclava de sus propios métodos y técnicas mientras éstos tienen éxito, pero es libre de multiplicar y de modificar en todo momento sus reglas, en aras de mayor eficacia y objetividad.

Los investigadores o experimentadores usualmente no aceptan nuevos hechos a menos que puedan certificar, de alguna manera, su autenticidad, y esto se hace, no tanto contrastándolos con otros hechos, sino mediante el uso de herramientas como el método científico.

El conocimiento científico racionaliza la experiencia en lugar de limitarse a describirla; la ciencia da cuenta de los hechos no inventariándolos sino explicándolos por medio de hipótesis (enunciando leyes) y teorías. Los ingenieros investigadores sacan conjeturas de lo que hay tras los hechos observados.

En la figura 5 se pretende dar una visión de la relación entre el método científico y la experimentación como herramientas fundamentales en la construcción de conocimiento, apoyándose en el uso del diseño de experimentos.

Figura 5: Relación entre el método científico y la Experimentación



## 6. ESTUDIO DE CALIBRACIÓN

Los instrumentos de medición y control son ampliamente utilizados en la industria permitiendo garantizar la calidad de los productos terminados, de aquí la importancia que los instrumentos estén en perfecto estado de funcionamiento a fin de asegurar un proceso controlado y estable, evitando paros parciales o totales en la planta y reduciendo al máximo el costo del mantenimiento.

Los procesos industriales exigen el control de la fabricación de los diversos productos con el objetivo de conseguir una mejora continua orientada a la satisfacción del cliente, por tanto, la necesidad de medir bien ha conducido a la ciencia metrológica que tiene por objeto de estudio la determinación de magnitudes físicas.

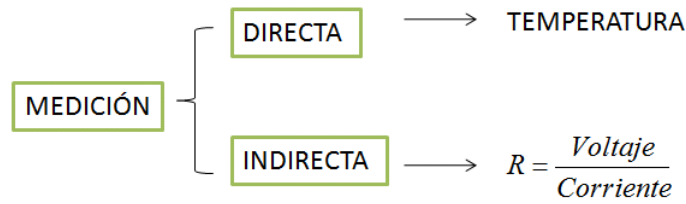
La calibración de instrumentos de medición surge como un proceso que permite lograr objetivos de control y calidad exigentes en el campo ingenieril, de ahí la necesidad de su estudio y su aplicación de acuerdo a las normas que lo rigen.

### 6.1 LA MEDICIÓN EN INGENIERÍA

Los sistemas de medición son importantes en la investigación, son la herramienta que permiten cuantificar variables físicas de interés. La medición en sí, facilita ampliar la capacidad de los sentidos humanos los cuales, aunque pueden percibir diferentes propiedades tangibles e intangibles, están limitados y no tienen la capacidad de asignar valores específicos a las variables detectadas. Como todo sistema de medición tiene imperfecciones, el uso de procesos como la calibración permite reducir las desviaciones entre el valor real y el valor medido.

En general existen dos clases de medición: la medición directa y la medición indirecta. En la figura 6 se puede observar la diferencia entre las mismas, en la medición directa, el proceso de medida se hace directamente sobre el objeto de estudio y se obtienen inmediatamente los resultados buscados; en la medición indirecta se debe recurrir a formulas para llegar al valor buscado a partir de las variables medidas.

Figura 6: Clases de Medición



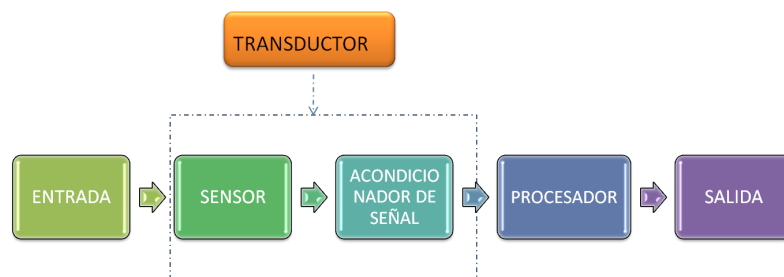
En ingeniería, todo proceso está relacionado con parámetros físicos sujetos a medición que ayudan a analizar y entender el comportamiento de un sistema y la influencia de la variabilidad de dichos parámetros. El análisis posterior a la medición se apoya en la probabilidad como herramienta estadística, que permite llegar a conclusiones con alto grado de confiabilidad.

La medición en ingeniería involucra gran variedad de factores como el tipo de medición, el procedimiento de medición, el sistema de unidades, el tipo de instrumento a utilizar, el proceso de adquisición de datos y el análisis estadístico que debe ser tenido en cuenta en forma particular.

### 6.1.1 El Sistema General de Medición.

Los métodos de medición permiten adquirir datos que facilitan entender, analizar y concluir sobre el comportamiento de un sistema o proceso de estudio en el campo de la ingeniería. El sistema general de medición es un método genérico que está compuesto por un conjunto de elementos físicos que permiten adquirir, procesar y visualizar una variable. En la figura 7 se muestra un esquema general de los elementos que intervienen en dicho sistema<sup>14</sup>.

Figura 7: Sistema General de Medición



<sup>14</sup>FIGLIOLA, Richard. y BEASLEY, Donald. Mediciones mecánicas: Teoría y Diseño. 4 ed. México.: Alfaomega, 2008

A continuación se definen los elementos que intervienen en el sistema de medición de una manera mas detallada:

**Entrada:** Hace referencia a la variable física real de interés a medir.

**Transductor:** Dispositivo que contiene las etapas de sensor, y con frecuencia el acondicionamiento de la señal de un sistema de medición. En algunos casos, es un elemento que convierte la información detectada por el sensor en una forma de señal que puede ser eléctrica, mecánica u óptica.

**Sensor:** Elemento físico que detecta o responde en forma directa a la variable de entrada del proceso de medición. La selección, ubicación e instalación de dicho elemento es de particular importancia, pues la interpretación de la información que pasa a través del sistema de medición depende de lo que realmente detecta. Algunos ejemplos de sensores son: termocuplas, el calibrador de deformación, galgas extensiométricas, entre otros.

**Acondicionador de señal:** Esta etapa intermedia del sistema de medición puede usarse para realizar un tratamiento a la señal mediante técnicas como la amplificación, el filtrado, linealización, diferenciación, integración, etc.

**Procesador de señales:** Toma la salida del elemento acondicionador y la convierte de forma más adecuada para la representación. Algunos ejemplos son: El convertidor análogo/digital o el convertidor digital/análogo.

**Salida:** Presenta el valor medido en una forma que el investigador pueda reconocer fácilmente. Por ejemplo: indicador con escala o manecillas, graficador, despliegue alfanumérico, entre otros.

### 6.1.2 Error de medida y conceptos relacionados

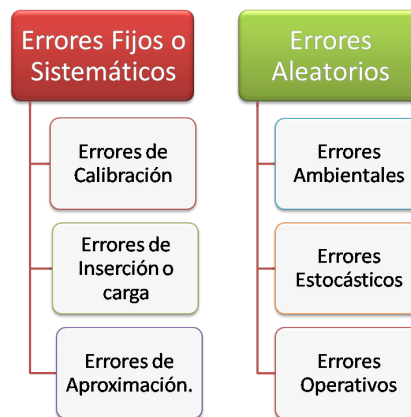
En cualquier sistema de medición que se encuentre sometido a un proceso de lectura de variables, se presentarán errores en repetidas tomas o muestras los cuales generalmente tienden al mismo valor. Para garantizar la confiabilidad en la lectura, es importante validar la medida reduciendo el error.

Varios términos estándar se utilizan para especificar la validez de una medida y uno de ellos es el *error de medida*, el cual se define como la diferencia entre el valor medido y el valor verdadero de la cantidad que se mide<sup>15</sup>.

## Clasificación de los Errores

A continuación se mencionan algunos de los tipos de errores que pueden causar incertidumbre en una medida. Estos errores se pueden clasificar en: **Errores Sistemáticos** y **Errores Aleatorios**, como se muestra en la figura 8.

Figura 8: Clasificación de los Errores



**Errores Sistemáticos** Estos errores también llamados errores de Sesgo, se conocen puesto que son el mismo en cada lectura y, como consecuencia, se pueden eliminar por medio de la calibración<sup>16</sup>. En este tipo de errores la desviación del valor medido con respecto al valor real es igual o presenta una misma tendencia. Si se detecta y se descubre su origen, se puede eliminar completamente del resultado final. El error sistemático puede ser estimado usando la ecuación 2:

$$\text{Error sistemático} = \text{promedio de lecturas} - \text{valor verdadero} \quad (1)$$

Para que estas ecuaciones sean razonables, el número de lecturas que forman el promedio debe ser mayor que 30 para eliminar los efectos de los errores aleatorios en las mediciones individuales.

Según la figura 8 se puede clasificar en<sup>17</sup>:

<sup>15</sup>BOLTON, Bill. Mediciones y Pruebas Eléctricas y Electrónicas . ALFAOMEGA. 1995.

<sup>16</sup>DOEBELIN, Ernest. Sistemas de Medición e Instrumentación: Diseño y Aplicación. 5a ed. McGraw-Hill, 2005.

<sup>17</sup>BOLTON. Op.cit.,p.15.

- **Errores de Fabricación:** Derivados del proceso de fabricación del instrumento y sus componentes.
- **Errores de Equipo:** Ocurren debido a un fallo en el instrumento que realiza la calibración. Incluso la calibración más exacta dará lugar a un error sistemático residual.
- **Errores de cero:** Originado al posicionar incorrectamente el cero de un instrumento, esto provoca una lectura indeseada.
- **Errores de Calibración:** Una incorrecta calibración da como resultado, por ejemplo, lecturas en el instrumento más altas o bajas en toda la escala.
- **Errores de aproximación:** Se originan al realizar hipótesis en cuanto a relaciones entre cantidades. Si la medición varía en una región o segmento, pero una sola medida o un número limitado de medidas se utilizan para determinar el valor medio para la región, habrá un error de aproximación.
- **Errores de envejecimiento:** Estos se presentan cuando los instrumentos se hacen viejos, se deterioran y como consecuencia necesitan, en repetidas ocasiones, mantenimiento.
- **Errores de carga o inserción:** Es una consecuencia de la existencia de una resistencia propia del instrumento distinta de cero. Es un error que se agrega al error propio del instrumento y al de lectura y depende de las condiciones de medición.

**Errores Aleatorios** El error debido a la imprecisión se le da el nombre de *error aleatorio* ya que, en general, es diferente para cada una de las lecturas y no se le puede eliminar<sup>18</sup>. El error aleatorio en una sola medida se puede estimar como la diferencia entre la sola lectura y el promedio de todas las lecturas del mismo valor de la medida. Puede ser estimado por la ecuación 2.

$$Error\ aleatorio = Lecturas - Promedio\ de\ lecturas \quad (2)$$

Son errores inevitables, se produce por eventos que por su naturaleza son difícil de controlar durante el proceso de medición. Según la figura 6 se clasifican en:

- **Errores operativos:** Son producidos por el operario del instrumento. Algunos errores ocasionados por dicho operador son: errores de lectura, errores de cálculo,

---

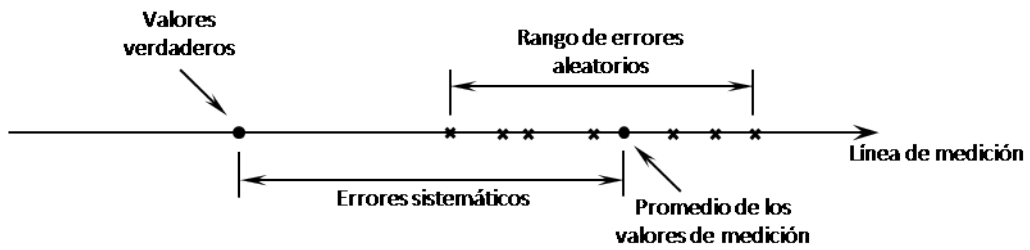
<sup>18</sup>DOEBELIN, Op.cit.,p.40.

errores por elección incorrecta del instrumento y errores en el mal ajuste del mismo. Aunque esto no implica fallos en la experimentación.

- **Errores ambientales:** Causados por efectos ambientales, como fluctuaciones en la temperatura, la humedad o la presión atmosférica.
- **Errores estocásticos:** Son procesos inherentemente aleatorio, y son detectados por el instrumento si este es lo suficientemente sensible. Como el Ruido.

La diferencia entre los errores sistemáticos y aleatorios se muestra gráficamente en la figura 9, la dispersión en los datos representa errores aleatorios, y la desviación entre el promedio de las lecturas y el valor verdadero muestra errores sistemáticos.

Figura 9: Comparación entre los errores sistemáticos y aleatorios.



Fuente: WHEELER, Anthony. *Engineering Experimentation*. p. 9.

En la medición es muy importante conocer varios conceptos estándar que se utilizan para especificar la validez de una medida como los son<sup>19</sup>:

- **Campo de medida o rango:** Comprende el conjunto de valores de la variable medida que están entre los límites superiores e inferiores de la capacidad de medida, de recepción o de transmisión del instrumento. Este describe los valores de la medición al que un sistema responderá adecuadamente, las medidas por fuera de la gama o rango, no produce una salida útil. El rango de operación de entrada puede expresarse en términos de la diferencia de sus límites como se observa en la ecuación 3 y el rango de operación de salida esta dado por la ecuación 4.

$$r_i = x_{m\acute{a}x} - x_{m\acute{i}n} \quad (3)$$

$$r_o = y_{m\acute{a}x} - y_{m\acute{i}n} \quad (4)$$

<sup>19</sup>CREUS SOLÉ, Antonio. *Instrumentos Industriales, su ajuste y calibración*. 3a ed. Alfaomega, 2009. p. 7.

- **Alcance (span):** Es la diferencia algebraica entre los valores superior e inferior del campo de medida del instrumento .
- **La exactitud:** Es el grado de aproximación con el cual un sistema de medición indica el valor verdadero.
- **La precisión:** Es el grado de dispersión de la medida cuando está se repite un número determinado de veces bajo las mismas condiciones.
- **La incertidumbre de la medida:** Es un parámetro que caracteriza el intervalo dentro del cual se cree con gran seguridad que se encuentra el verdadero valor medido.

## 6.2 INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN

Los instrumentos de medición son herramientas que sirven de apoyo en la medición, regulación, observación, transformación y control de una variable dada en un proceso productivo. Estos pueden realizar entre otras, las siguientes funciones aplicadas a las variables<sup>20</sup>:

- Sensar
- Acondicionar
- Transmitir
- Controlar
- Indicar
- Registrar
- Convertir

### 6.2.1 Características De los Instrumentos de Medición

Los instrumentos de medición y control empleados en las industrias de proceso como química, petroquímica, alimenticia, metalúrgica, energética, textil, papel, etc., tiene su propia terminología que define sus características propias de medida y control. Algunas a tener en cuenta son<sup>21</sup>:

---

<sup>20</sup>Creuss. Instrumentación Industriales. p. 15.

<sup>21</sup>Ibid.,p. 9.

- **Sensibilidad:** Es la razón entre el incremento de la señal de salida o de la lectura y el incremento de la variable que lo ocasiona (señal de entrada), después de haber alcanzado el estado de reposo. Viene dada en tanto por ciento del alcance de la medida. Cuantitativamente esta razón esta dada por la ecuación 5.

$$Sensibilidad = \frac{\Delta Señal Salida}{\Delta Señal Entrada} \quad (5)$$

- **Escala:** Series de marcas o intervalos regulares, frente a la que se indica la posición de una aguja, un punto luminoso.
- **Linealidad:** Aproximación de una curva de calibración a una línea recta especificada. Se expresa en forma de desviación máxima con relación a una línea recta que pasa a través de los puntos dados correspondientes y a 0 % y a 100 % de la variable medida.
- **Trazabilidad:** Propiedad de un resultado de medición que nos permite relacionar ese resultado con el respectivo patrón internacional de la magnitud que se está midiendo como se puede observar en la figura 10. Este es uno de los atributos indispensables para garantizar la confiabilidad de cualquier resultado de medición.

Figura 10: Cadena de trazabilidad



Fuente: VIDAL V. Julián. *Aseguramiento metrológico y aseguramiento de equipos*. p. 16.

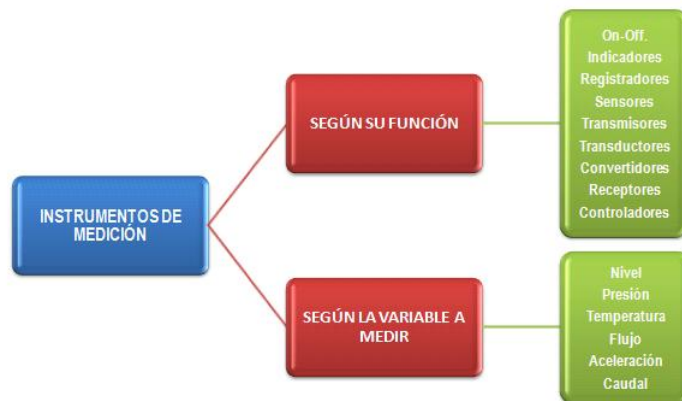
- **Resolución:** Representa el incremento más pequeño que puede discernirse en el valor medido. En términos del sistema de medición se cuantifica por el menor incremento en la escala o el menos importante (el dígito menos significativo) del indicador de lectura de resultados. Usualmente es tratado como un error aleatorio.

- **Histéresis:** Diferencia en el valor indicado para cualquier entrada particular cuando esa entrada tiene una dirección ascendente contra la dirección de entrada descendente.

## 6.2.2 Clasificación de los Instrumento

En la figura 11 se considera una forma de clasificar los instrumentos de medición, especificando algunos relacionados con el tema de estudio.

Figura 11: Clasificación de los Instrumentos de Medición



### Clasificación según la función del instrumento

- **Instrumento On-Off:** Son aquellos que no tienen indicación visible de la variable, ejemplos: Instrumentos de alarmas, presostatos y termostatos.
- **Instrumentos Indicadores:** Disponen de un índice y una escala visible en la que se puede leer el valor de la variable, ejemplo: manómetros.
- **Instrumentos registradores:** Registran con trazo continuo o a puntos la variable, ejemplo: un registrador digital.
- **Sensores:** Captan el valor de una variable física de un proceso y envían la señal de salida que es una señal análoga a un transductor. Este puede formar parte de otro instrumento, un ejemplo es el transmisor.
- **Transmisores:** Captan la variable del proceso a través de un elemento primario, como lo son los sensores, y la transmiten a distancia, por ejemplo; en forma de señal neumática proporcional, usualmente de margen de 0,2 a 1 bar, o electrónica de 4 a 20 mA de corriente continua o bien digital.

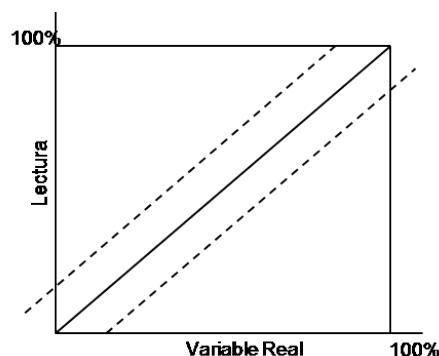
- **Transductores:** Reciben la señal de entrada en función de una o más cantidades físicas, y la convierten en una señal de salida.
- **Convertidores:** Reciben una señal de entrada procedente de un instrumento y después de modificarla envía la resultante en forma de señal de salida.
- **Receptores:** Reciben señales procedentes de los transmisores y los indican o registran.
- **Controladores:** Comparan la variable controlada como lo son la presión, nivel, temperatura, etc., con un valor deseado y ejercen una acción correctiva de acuerdo con la desviación.
- **Elemento final de control:** Reciben la señal del controlador y modifica su posición variando el caudal del fluido.

**Clasificación según la variable a medir:** Este tipo de instrumentos permiten cuantificar diferentes parámetros físicos. De acuerdo a la variable a medir se encuentran: flujómetros, termómetros, galgas extensiométricas, barómetros, manómetros, higrómetros, anemómetros, etc.

### 6.2.3 Errores de los Instrumentos

**Error de cero:** Se presenta cuando todas las lecturas o señales de salida se encuentran desplazadas en todo el rango un mismo valor con relación a la lectura ideal. Este tipo de error puede verse en la figura 12 donde se observa que el desplazamiento puede ser positivo o negativo, cambia el punto de partida de la recta representativa sin que varíe la inclinación o la forma de la curva<sup>22</sup>.

Figura 12: Curva Variable Real-Lectura

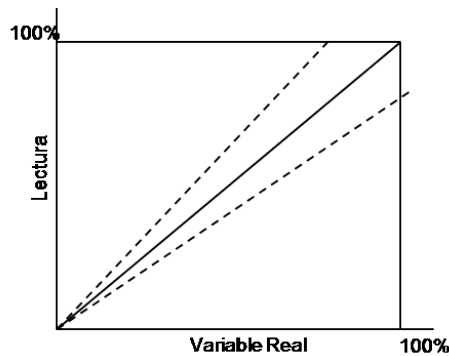


Fuente. CREUS, Antonio. *Instrumentos Industriales*. Alfaomega. p. 42.

<sup>22</sup>CREUS SOLÉ, Instrumentos industriales su ajuste y calibración. Op.cit.,p.42.

**Error de amplitud o multiplicidad:** Se presenta cuando todas las lecturas o señales de salida aumentan o disminuyen progresivamente con relación a la recta representativa, como se observa en la figura 13, el desplazamiento puede ser positivo o negativo, sin que el punto de partida cambie.

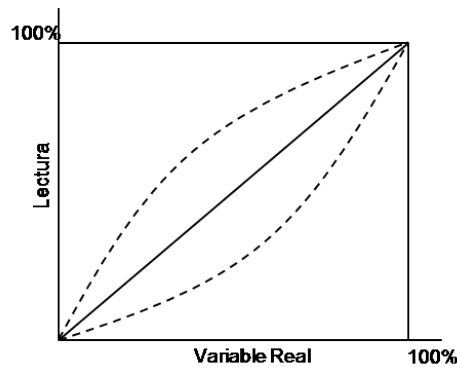
Figura 13: Error de multiplicidad



Fuente. CREUS, Antonio. *Instrumentos Industriales*. Alfaomega, 2009. p. 42.

**Error de angularidad:** En este error la curva coincide con los puntos 0 y 100 % como se muestra en la figura 14, de la recta representativa, pero se aparta de la misma en los restantes. El máximo de la desviación suele estar a la mitad de la escala.

Figura 14: Error de Angularidad



Fuente. CREUS, Antonio. *Instrumentos Industriales*. Edit. Alfaomega. Pág. 42.

**Error de Histéresis:** Se refiere a las diferencias entre una prueba secuencial de escala ascendente y una prueba secuencial de escala descendente. El error de histéresis de un sistema esta dado por la ecuación 6, y se especifica para un sistema de medida en términos del máximo error de histéresis como se observa en la ecuación 7. El efecto de este error se observa en la figura 15.

$$e_h = y_{ascendente} - y_{descendente} \quad (6)$$

$$\%e_{h_{m\acute{a}x}} = \frac{e_{h_{m\acute{a}x}}}{r_o} \times 100 \quad (7)$$

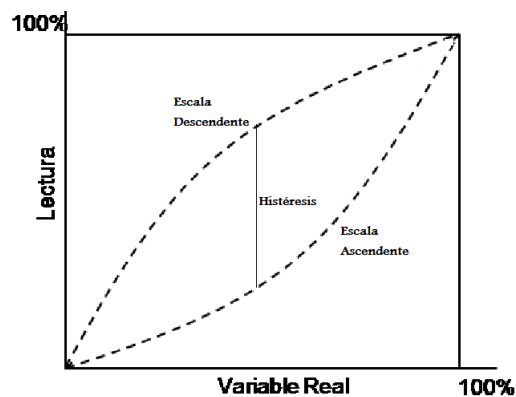
Donde

$e_h$  = Error de Histéresis

$e_{h_{m\acute{a}x}}$  = Máximo Error de Histéresis

$r_o$  = Rango de operación de salida

Figura 15: Error de Histéresis



Fuente. Figliola, Richard. *Mediciones Mecánicas teoría y diseño*. Alfaomega. p. 21.

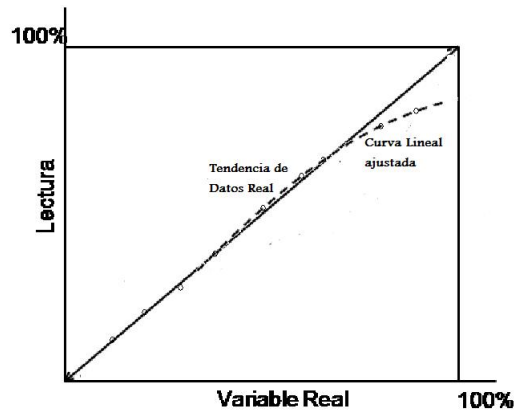
**Error de Linealidad:** Es una medida de la desviación máxima de cualquier punto de calibración con respecto de una recta. La relación entre  $y_L(x)$  y el valor medido  $y(x)$  es una medida de el comportamiento no lineal del sistema donde  $e_L(x)$  está dado por la ecuación 8 y es el error de linealidad que surge al describir el comportamiento del sistema real, se suele especificar como error de linealidad máximo según la ecuación 9, el efecto de este error se ve en la figura 16<sup>23</sup>.

$$e_L(x) = y(x) - y_L(x) \quad (8)$$

$$\%e_{L_{m\acute{a}x}} = \frac{e_{L_{m\acute{a}x}}}{r_o} \times 100 \quad (9)$$

<sup>23</sup>FIGLIOLA. Op. cit.,p.21.

Figura 16: Error de linealidad



Fuente. Figliola, Richard. *Mediciones Mecánicas teoría y diseño*. Alfaomega. p. 21.

**Error de Repetibilidad:** Aptitud de un instrumento para mostrar la misma lectura en repetidas tomas del mismo valor de la cantidad que está siendo medida, bajo las mismas condiciones, en el mismo sentido (incremento o disminución) del mensurando. Numericamente la expresión de repetibilidad en condiciones de controladas de calibración esta dada por la ecuación 10. Este error lo podemos observar en la figura 17.

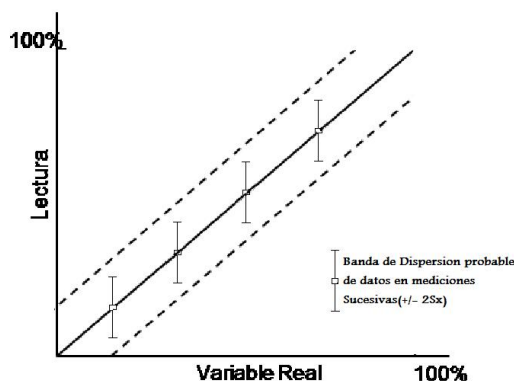
$$Error\ Repetibilida(\%) = \frac{2 * S_x}{r_o} x 100 \quad (10)$$

Donde:

$S_x$  :Desviación estándar.

$r_o$ : Rango de salida.

Figura 17: Error de Repetibilidad



Fuente. Figliola, Richard. *Mediciones Mecánicas teoría y diseño*. Alfaomega. p. 21.

**Error Total del Instrumento:** Un estimado del error total del instrumento se basa al

combinar todos los errores, este resultado general es una incertidumbre. Una estimación se calcula a partir de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de todos los errores conocidos. Para M errores conocidos, el error del instrumento  $u_c$ , se estima mediante la ecuación 11.

$$u_c = [e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_M^2]^{1/2} \quad (11)$$

Otros errores provenientes de la lectura del instrumento por el observador son:

**Error de Paralelaje:** Se produce cuando el observador efectúa la lectura de modo que la línea de observación al índice no es perpendicular a la escala del instrumento.

**Error de Interpolación:** Se presenta cuando el índice no coincide exactamente con la graduación de la escala, y el experimentador redondea sus lecturas por exceso o por defecto.

#### 6.2.4 Instrumento de Comprobación.

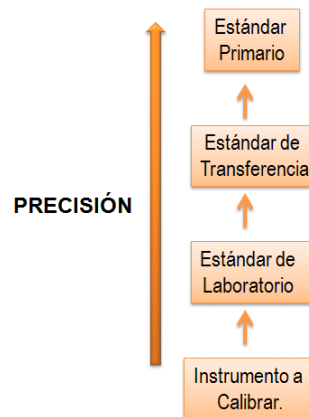
Algunos procesos de la calibración son complejos, y no es práctico para los laboratorios de medición mantener los estándares necesarios. Los laboratorios pueden comprar los instrumentos que han sido calibrados por los fabricantes<sup>24</sup>.

Durante el proceso de calibración de un manómetro la presión se cuantifica por la diferencia entre la lectura del manómetro de presión específica, y la lectura indicada por el estándar primario de presión. Sin embargo, el fabricante del manómetro de presión no puede tener acceso al estándar primario para medir la precisión de sus productos, pero puede medir la precisión de sus manómetros respecto de un estándar portátil intermedio o de transferencia. La precisión estándar de transferencia debe obtenerse por calibración contra el estándar de precisión extrema de presión fundamental. Esto introduce el concepto de escalera de rastreabilidad figura 18.

---

<sup>24</sup>WHEELER. Op. cit.,p.30.

Figura 18: Escalera de rastreabilidad



Fuente: BENTLY. Jhon P. *Sistemas de medición Principios y aplicaciones*. 2 ed. Compañía Editorial Continental. p. 23.

El instrumento se calibra usando el estándar de laboratorio, que debe calibrarse también contra el estándar de transferencia y este, a su vez, debe calibrarse utilizando el estándar de precisión extrema. Cada elemento de la escalera debe ser significativamente más preciso que el anterior.

Después de haber presentado los conceptos generales de instrumentación industrial, sistemas de control, calibración, precisión, etc., podemos analizar más a fondo los tipos de estándares de referencia para la calibración y el procedimiento general de calibración. Existen en la industria de la medición, uno o quizás dos tipos de estándares instrumentales, primarios y secundarios. El estándar primario es una unidad de valor absoluto extremadamente precisa, donde normalmente los fabricantes de instrumentos y algunos usuarios importantes, son los únicos grupos que cuentan con estándares primarios. La adquisición y el mantenimiento de estos estándares son sumamente costosos. Están certificados y se utilizan para calibrar instrumentos vendidos como estándares secundarios para la calibración de instrumentos industriales. El rango de calibración para estándares secundarios depende de la exactitud y del tipo de estándar que se mantiene. El intervalo de calibración para instrumentos industriales varía desde semanas hasta años, dependiendo de la clase de servicio en que se empleen y del tipo de construcción del instrumento<sup>25</sup>.

## 6.3 PROCEDIMIENTO GENERAL DE CALIBRACIÓN

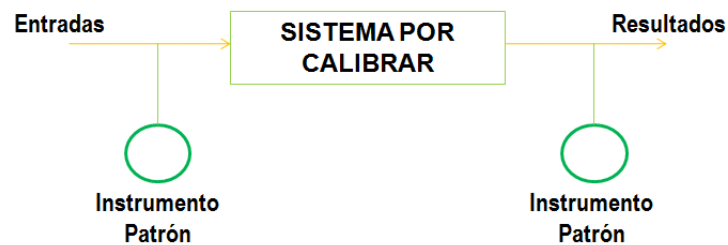
Realizar una buena medición de variables es importante, por que asegurar el buen funcionamiento de los instrumentos involucrados en dicha medición. Como respuesta a esta

<sup>25</sup>SOISON, Harold E. *Instrumentación Industrial*. LIMUSA, 2007.

necesidad, surge el proceso de calibración que permite garantizar la precisión en la medición de acuerdo a los estándares dados por el fabricante del instrumento.

La calibración es la única garantía que los instrumentos tengan la exactitud y el rango requerido para mantener en operación y en condiciones controladas un proceso asegurando la precisión en la medición de una variable. Los instrumentos y técnicas utilizadas para cuantificar estas variables se conocen como estándares o patrones. En la figura 19 se muestra un esquema general de calibración con los elementos necesarios para su realización.. Las entradas son las distinta variables a medir, ya sea presión, flujo, temperatura, etc.

Figura 19: Calibración de un Instrumento



En algunas industrias donde se emplean o utilizan equipos e instrumentos de medición, generalmente realizan pruebas de funcionamiento que registran en un documento que es comúnmente un certificado de trabajo, documento que no tiene validez metrológica, puesto que el proceso para obtener los resultados son parte de una norma y no hay registro (en algunos casos) de que utilicen patrones de medida. Los patrones son instrumentos certificados por laboratorios especializados en el diseño, construcción y montaje de estos, y por ende de la calibración. Aunque estos laboratorios tienen a su vez, otro reconocimiento o certificación de un laboratorio con sistemas metrológico más preciso.

Uno de los parámetros importante en el Aseguramiento Metrológico, es la determinación de los períodos de calibración. Estos períodos los determinan los fabricantes o laboratorios de acreditación de equipos o instrumentos, dependiendo del uso, manejo, tiempo de utilización, calidad del instrumento, estabilidad histórica, condiciones de trabajo u otros. Estos laboratorios de acreditación deben estar certificados según el ICONTEC por las normas enumeradas a continuación:

1. NTC-ISO/IEC 17025:2005. Requisitos generales para la competencia de los laboratorios de ensayo y calibración.
2. NTC-ISO 10012. Sistemas de gestión de la medición. Requisitos para los procesos de medición y los equipos de medición.

3. NTC-ISO 14001. Directrices para la auditoría medioambiental y de la calidad.
5. NTC 2194. Vocabulario de términos básicos y generales en metrología.

En cuanto a los instrumentos es importante conocer lo siguiente:

- Un instrumento entre más exacto y preciso sea, tienen un mayor precio. Mejor expresado: entre mayor sea el valor de la resolución, mejor instrumento y mayor precio.
- El precio de la calibración para algunos instrumentos es mayor que el precio de él mismo.

Un instrumento patrón debe ser 10 veces de mejor calidad en todos sus aspectos que el instrumento que se desea calibrar, razón por la cual el precio crece de manera exponencial.

- Una calibración no incluye el ajuste del instrumento, sólo se refiere a la comparación de los parámetros importante en el aseguramiento metrológico, es la determinación de los períodos de calibración. Estos períodos los determinan los fabricantes o laboratorios de acreditación de equipos o instrumentos, dependiendo del uso, manejo, tiempo de utilización, calidad del instrumento, estabilidad histórica, condiciones de trabajo u otros. Estos laboratorios de acreditación deben estar certificados según el ICONTEC por las normas enumeradas a continuación; entre un instrumento y el patrón requerido.
- Se aceptan métodos paralelos de comprobación o verificación de las medidas, siempre y cuando esta tenga un buen soporte.

Una calibración aplica datos conocidos de entrada a un sistema de medida con el propósito de observar los valores de salida del sistema. Establece la relación entre ambos tipos de valores. El valor conocido que se usa para la calibración se conoce como el estándar<sup>26</sup>. Es por esta razón, existen dos tipos de calibración: *estática* y *dinámica*.

### 6.3.1 Calibración Estática

Esta se refiere a una situación en la cual todas las entradas (deseadas, interferentes, modificadoras), excepto una, se mantienen en algunos valores constantes. Entonces, la entrada en estudio se hace variar sobre algún intervalo de valores constantes, lo cual ocasiona que la salida(s) varíe sobre algún intervalo de valores constantes<sup>27</sup>. En las

---

<sup>26</sup>FIGLIOLA. Op. cit.,p.15.

<sup>27</sup>DOEBELIN. Op. cit.,p.30.

calibraciones estáticas solo son importantes las magnitudes de la entrada conocida y la salida medida.

Al aplicar un rango de valores de entrada conocidos y observar los valores de salida del sistema se desarrolla una curva de calibración directa para el sistema de medición. La curva de *calibración estática* describe la relación estática de entrada-salida para un sistema de medición y forma la lógica con la que la salida indicada se puede interpretar durante una medición real. También, esta curva se usa como parte del desarrollo de una relación funcional, es decir, una ecuación conocida como una correlación entre la entrada y salida. La correlación esta descrita por:  $y = f(x)$ , y se determina aplicando a la curva de calibración un razonamiento físico y técnicas de ajuste de curvas. La correlación se usa en mediciones para averiguar el valor desconocido de entrada, con base en el valor de salida, el valor indicado por el sistema de medición<sup>28</sup>.

### 6.3.2 Calibración Dinámica

Cuando las variables de interés son dependientes del tiempo o espacio y se busca tal variación de información, se requiere información dinámica. Una calibración dinámica determina la relación entre una entrada de comportamiento dinámico conocido y la salida del sistema de medición. En general, estas calibraciones involucran la aplicación de una señal senoidal o un cambio en escalón como la señal de entrada conocida. La naturaleza dinámica de las señales se examinan en el capítulo 7.

La calibración dinámica se utiliza para expresar una verificación multipunto contra estándares conocidos y supone introducir cualquier elemento (como los líquidos) conocido en el instrumento, para ajustarlo a una sensibilidad predeterminada y determinar una relación de la calibración. Esta relación es derivada de una respuesta del instrumento a sucesivas muestras de diferentes concentraciones conocidas .

### 6.3.3 Calibración de Instrumentos de Presión

La presión es la representación de la fuerza soportada por una unidad de area. Para calibrar instrumentos de presión se encuentran los patrones básicos que indican y registran los estándares que la presión debe abarcar. El rango está entre los menores a 10-1 mm Hg, hasta varias toneladas por pulgada cuadrada. Los patrones que se emplean generalmente son los manómetros en forma de columna en U de mercurio de precisión, medidores de pistón de peso muerto o comparadores de presión, estos se emplean para presiones de

---

<sup>28</sup>FIGLIOLA. Op. cit.,p.15.

vacío. También se encuentran, para presiones mayores a 10-1 mm Hg a 10-3 mm Hg, el vacuómetro de McLeod. Estos manómetros son de alta exactitud del orden del  $\pm 2\%$  de toda la escala. En el mercado actual existen los transmisores digitales inteligentes que pueden utilizarse como instrumento patrón de medición, está posee una exactitud elevada del orden del  $\pm 0,2\%$ .

Teniendo en cuenta lo anterior, el procedimiento general de calibración para instrumentos indicadores de presión es básicamente el siguiente:

1. Efectuar el mantenimiento requerido por el Instrumento (Desarme, lavado, limpieza, armado) y detectar partes defectuosas para reemplazo si es necesario.
2. Verificar que el soporte haya sido instalado teniendo en cuenta el servicio del instrumento.
3. Al instalar el manómetro en el punto de prueba aplicar cinta teflón en la rosca para evitar escapes.

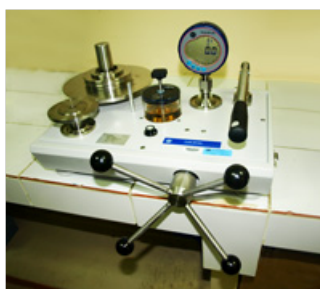
NOTA: En manómetros que operen con OXIGENO no debe ponerse en contacto con aceite o grasa incompatibles, ya que existe RIESGO DE EXPLOSIÓN.

4. Conectar el cable del banco de prueba, para energizar el manómetro (Con contactos eléctricos) y/o Presostato.
5. Conectar la señal del instrumento patrón (manómetro digital y/o Análogo).
6. Proceder a colocar señal con el instrumento patrón en por lo menos ocho (8) puntos del rango en forma ascendente y descendente y registrar lecturas en el documento de protocolo.
7. Comparar datos observados por el instrumentista con respecto al Instrumento Patrón y observar su comportamiento para determinar si su reposición se encuentra dentro de los parámetros requeridos.
8. Analizar los resultados para observar si el instrumento se encuentra dentro de la exactitud y/o clase de acuerdo con las especificaciones requeridas.
9. Una vez realizadas las pruebas de verificación-calibración se procede a desmontar en forma segura el instrumento. tanto de las señales neumáticas - hidráulicas y/o Eléctricas, conectadas.

10. Colocar etiqueta de calibración con el logo de la Empresa y expedir ficha técnica generada por el encargado y desarrollo del procedimiento de calibración del laboratorio (Fecha de la calibración y Numero de registro).

En el mercado industrial se encuentran disponibles, instrumentos de alta tecnología. Para los manómetros de presión están los manómetros digitales figura 20. Estos determinan la presión absoluta, el vacío o la presión diferencial. Existen manómetros digitales para aire y líquidos, así como aparatos seguros y con protección del exterior. Todos los aparatos están dirigidos por un microprocesador y garantizan alta precisión y fiabilidad. Su breve tiempo de respuesta y su carcasa resistente al polvo y a las salpicaduras de agua hacen que estos aparatos instrumentos sean idóneos para el sector industrial o para investigación y desarrollo. Existen múltiples rangos de medición (existen aparatos apropiados para cada aplicación). Estos aparatos tienen la posibilidad de transmitir los datos a un PC, laptop o a una impresora o bien una memoria.

Figura 20: Comprobador de peso muerto portátil digital



Fuente. PCE Group Ibérica S.L. <http://www.pce-iberica.es/index.htm>

#### 6.3.4 Calibración de Instrumentos de Flujo.

Los proyectos de investigación experimental y procesos industriales dependen de una medida del flujo para suministrar los datos importantes para el análisis. La medición del flujo son tan comunes y son tantas las aplicaciones, que existe un gran número de diferentes dispositivos de medición de flujo que se han desarrollado en la industria de la instrumentación. A continuación se describirán los flujómetros más conocidos por su aplicación industrial<sup>29</sup>.

Los flujómetros son generalmente bastante fáciles de calibrar. Existen diversos procedimientos de calibración, algunos más precisos que otros.

<sup>29</sup>WHEELER, Anthony J. Introduction to Engineering Experimentation. 2da ed. PEARSON, 2004.

### 6.3.4.1 Medidor Maestro de Flujo

Cuando un medidor es seleccionado como referencia para evaluar otro medidor, aquel se denomina medidor maestro ver figura 21 y la comparación de las dos lecturas de los medidores es el método de prueba llamado indirecto.

Figura 21: Medidor Maestro de Flujo



Fuente. [www.asisucede.com.mx](http://www.asisucede.com.mx)

**Calibración:** Los medidores maestros tipo turbina y desplazamiento positivo deben ser calibrados a las mismas condiciones operacionales y con el mismo producto con los cuales va a trabajar. Para una mejor exactitud de su calibración se recomienda calibrar el medidor maestro con probadores de volumen pequeño o probadores convencionales de tubería previamente calibrados por el método Water Draw. Su calibración se hará cada tres meses. Los tipos de probadores pueden ser:

- Unidireccionales, en los cuales el flujo viaja en una sola dirección a través de la sección calibrada durante el período de prueba. El flujo retorna a su posición inicial por medio de un mecanismo adicional actuado hidráulicamente.

Figura 22: Medidores de flujo desplazamiento Positivo



Fuente. [www.euromotores.net](http://www.euromotores.net)

- **Bidireccionales:** Como se ve en la figura 23, son los que permiten al flujo viajar en una dirección y luego en la otra durante el período de calibración. Esto se logra reversando el flujo por medio de una válvula de 4 vías.

Los medidores tipo Coriolis ver figura 23, pueden ser utilizados como medidores maestros en cuyo caso no requieren ser calibrados con los mismos productos a los cuales va a trabajar.

Figura 23: Medidores de Flujo Tipo Másico (Coriolis)



Fuente. [www.euromotores.net](http://www.euromotores.net)

#### 6.3.4.2 Operación:

Tanto el medidor a evaluar como el medidor maestro deben estar equipados con registradores de flujo o contadores de pulsos, de tal forma que éstos sean inicializados y parados al mismo tiempo en forma eléctrica. Al igual que los probadores convencionales, el medidor maestro debe ser acoplado en serie, asegurándose que todo el flujo que pasa por el medidor a evaluar pase también por el medidor maestro.

#### 6.3.4.3 Referencia gravimétrica con llenado directo.

Contempla la utilización de una balanza o celda de carga de alta precisión sobre la cual se ubica un estanque. Al comenzar la calibración el líquido comienza inmediatamente a fluir por el flujómetro y posteriormente llenar el estanque figura 24.

Figura 24: Laboratorio especializado de Flujómetros por el Método Gravimétrico de Llenado Directo



Fuente. [www.siaflujo.com](http://www.siaflujo.com)

#### 6.3.4.4 Referencia gravimétrica con compuerta de flujo.

Similar al anterior, pero éste cuenta con una compuerta que permite la recirculación del líquido y posterior llenado del estanque cuando el sistema está funcionando en régimen permanente. Es decir, el estanque se comenzará a llenar sólo una vez que por el flujómetro esté circulando el líquido a una velocidad constante.

De los tres métodos antes mencionados, el tercero es el más preciso ya que se ajusta solo con mediciones realizadas con equipos operando en condiciones normales y no se considera el inicio y la detención en la calibración. Es por esto que se profundizará en este método para realizar la calibración<sup>30</sup>.

## 6.4 CALIBRACIÓN SEGÚN NORMA NTC-ISO 9001:2000 Y 9002:2000

La calidad es un criterio que apuntan a mejorar los procesos operativos, productos y servicios, donde se aplica ISO 9000. El término se refiere a una serie de normas universales que define un sistema de “Garantía de Calidad” desarrollado por la Organización Internacional de Normalización (ISO) y adoptado por aproximadamente 90 países en todo el mundo<sup>31</sup>. ISO está compuesta por representantes de normas nacionales de más de 100 países. Su objetivo es promover el intercambio de productos y servicios en todo el mundo y fomentar la cooperación mundial en las áreas intelectual, científica, tecnológica y económica.

<sup>30</sup>BELLIDO, J. Sistemas de medición del ozono: Instrumentación asociada y Calibración. Revista ACAM - Asociación Catalana de Meteorologia. Tethys, 3, 59–62, 2006.

<sup>31</sup>PEACH, Robert W. MANUAL DE ISO 9000. 3ra ed. McGraw-Hill.

Para obtener la certificación ISO 9000, una empresa debe cumplir con ciertas normas de garantía de calidad en sus operaciones, conforme a lo certificado por un organismo de certificación externo. El sistema de garantía de calidad, no el producto ni el servicio en sí, logra la certificación. Una certificación ISO 9000 indica a los clientes que esta empresa ha implementado un sistema para garantizar que cualquier producto o servicio que venda cumplirá constantemente con las normas internacionales de calidad.

Aunque las industrias se concentraron primero en la garantía de calidad, la norma NTC-ISO 9001:2000 y 9002:2000, no excluye industrias o sectores económicos específicos. Su decisión de tratar de obtener o no la certificación dependerá más de lo que esperan sus clientes o requiere el mercado.

Para el caso de las industrias de medición e instrumentación, que realizan actividades como de generación de proyectos (investigación), fabricación, instalación y servicios, sus clientes desean que satisfagan sus necesidades y expectativas, y que se expresen en las especificaciones del producto, es decir, las empresas deberían obtener la certificación ISO 9000, donde generalmente se benefician con menos reclamos de clientes, menos costos operativos y una mayor demanda por sus productos o servicios. Y para entrar más en detalle, desde el punto de vista de la calibración de los instrumentos, la norma más importante es la NTC-ISO 9001:2000 y 9002:2000.

Estas dos normas son prácticamente idénticas; sin embargo, NTC-ISO 9001:2000 se aplica a las empresas que se dedican al diseño de productos o servicios y también a su producción o implementación. NCT-ISO 9002:2000 simplemente excluye el elemento de diseño de un modelo similar para garantía de calidad.

La NTC-ISO 9001: Sistemas de Gestión de Calidad. Requisitos, establecen unos requisitos que tienen como objetivo fundamental “evitar productos no conformes en todas las etapas, desde el proyecto hasta el final de su vida útil o, si estos se producen detectarlos antes de su instalación y tomar las medidas correctivas oportunas”<sup>32</sup>. La norma describe cuatro (4) principios operativos básicos para “Equipos de inspección, Medida y Ensayo”:

1. Control del proceso.
2. Inspección y prueba.
3. Control del equipo de inspección, medición y prueba.
4. Estado de la inspección y prueba.

---

<sup>32</sup>Ibid.,p.10

### **6.4.1 Control del proceso.**

Por lo general toda industria de medición o cualquier otra, tiene tres procesos esenciales:

- Diseño del instrumento como una respuesta a la necesidad del cliente, ya se percibida o expresada.
- Diseño de los procesos que prestarán al servicio.
- Prestación del servicio.

### **6.4.2 Inspección y prueba.**

El objetivo de los requisitos es solo verificar la conformidad con las que las especificaciones a medida que el instrumento o sus componentes se desplazan en los procesos de construcción.

### **6.4.3 Control del equipo de inspección, medición y prueba.**

Verificación del proceso, que significa esto, identificar, calibrar y ajustar todo el equipo de inspección, medida y ensayo que puede afectar la calidad del producto, a intervalos definidos con relación a equipos de calibración certificados por un organismo reconocido.

### **6.4.4 Estado de la inspección y prueba.**

Es importante establecer, documentar y mantener los procedimientos de calibración de los instrumentos y de los equipos de calibración. Puesto que el objetivo de este principio es de prevenir el uso, entrega o instalación de un producto no aprobado, y teniendo identificado los procesos, es más factible una solución oportuna.

Y para finalizar, y cumplidos todos estos principios, se debe asegurar las condiciones ambientales adecuadas para las operaciones de calibración, inspección, medida y ensayos que se efectúen en los instrumentos. Asimismo, la empresa debe establecer una función metrológica, es decir con responsabilidad en la organización para definir e implementar los principios básicos de control de mediciones. El periodo de calibración es fijado por la propia empresa, de acuerdo con la experiencia que posee sobre su trabajo.

La NTC-ISO 9002:2000 Sistemas de Calidad: Modelo para el Aseguramiento de la Calidad en la Producción, la Instalación y el Servicio Postventa, tiene como propósito establecer

una política sobre el sistema de administración de la calidad, que incluye la supervisión de equipos de calibración que estén debidamente certificados por un organismo reconocido, que dichos equipos se calibren periódicamente así como los instrumentos de medición y control afectados, que se identifiquen perfectamente los instrumentos, se entrene al personal y que todo esté perfectamente documentado. Según estos requisitos, existen normas mas específicas para hacer cumplir los ya mencionados requisitos<sup>33</sup>. Estos documentos de referencia son: NTC-ISO 17025, NTC-ISO 10012 y NTC-ISO 14001.

#### **6.4.5 Norma Técnica Colombiana NTC-ISO/IEC 17025 (Requisitos generales para la competencia de los laboratorios de ensayo y calibración).**

Esta norma internacional especifica los requisitos generales para la competencia en la realización de ensayos y calibraciones, incluido el muestreo. Cubre los ensayos y calibraciones realizados con métodos estandarizados, no estandarizados y métodos desarrollados por el laboratorio.

El mayor uso de los sistemas de calidad ha incrementado la necesidad de asegurar que los laboratorios que forman parte de grandes organizaciones o que ofrecen otros servicios puedan operar un sistema de calidad que cumpla con la ISO 9001, la ISO 9002 y con esta norma internacional. Por ello, que se ha tenido cuidado de incorporar todos aquellos requisitos de la ISO 9001 e ISO 9002 que son relevantes para los servicios de ensayo y calibración que están cubiertos por el sistema de calidad del laboratorio.

Por consiguiente, los laboratorios de ensayo y calibración que cumplan con esta norma internacional también operarán en conformidad con la ISO 9001 e ISO 9002. No obstante, la certificación de acuerdo con la ISO 9001 e ISO 9002 no puede demostrar por sí sola la competencia del laboratorio para producir datos y resultados técnicamente válidos.

La aceptación de los resultados de ensayo y calibración entre países se facilitaría si los laboratorios cumplen con esta norma internacional y si obtienen la acreditación de organismos que han firmado acuerdos de reconocimiento mutuo con organismos equivalentes en otros países y que han usado esta norma internacional.

De este modo, la presente norma internacional facilitará la cooperación entre laboratorios y otros organismos, y será de utilidad en el intercambio de información y experiencia, así como en la armonización de normas y procedimientos.

---

<sup>33</sup>INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. Certificación de calidad en servicios, producción o implementación de productos. ISO 9002.

Como su nombre lo indica, los requisitos que trata esta norma los podemos ver en la tabla C.1 en el Apéndice C<sup>34</sup>.

#### **6.4.6 Norma Técnica Colombiana NTC-ISO 10012 (Sistemas de Gestión de la Medición Requisitos Para los Procesos de Medición y Los Equipos de Medición)**

Un sistema eficaz de gestión de las mediciones asegura que el equipo y los procesos de medición son adecuados para su uso previsto y es importante para alcanzar los objetivos de la calidad del producto y gestionar el riesgo de obtener resultados de medición incorrectos. En esta norma internacional, el término “proceso de medición” se aplica a las actividades de medición física.

Uno de los principios de gestión establecidos en la norma internacional NTC-ISO 9000 trata del enfoque basado en procesos. Los procesos de medición deberían considerarse como procesos específicos cuyo objetivo es apoyar la calidad de los productos elaborados por la organización.

Esta norma internacional incluye tanto requisitos como orientaciones para la implementación de sistemas de gestión de las mediciones y puede ser útil en la mejora de las actividades de medición y de la calidad de los productos <sup>35</sup>.

#### **6.4.7 Norma Técnica Colombiana NTC-ISO 14001 (Sistemas de Gestión Ambiental. Requisitos con orientación para su uso).**

Esta norma internacional especifica los requisitos para un sistema de gestión ambiental, destinados a permitir que una organización desarrolle e implemente una política y unos objetivos que tengan en cuenta los requisitos legales y otros requisitos que la organización suscriba, y la información relativa a los aspectos ambientales significativos. Se aplica a aquellos aspectos ambientales que la organización identifica que puede controlar y aquellos sobre los que la organización puede tener influencia.

Todos los requisitos de esta norma internacional tiene como fin su incorporación a cualquier sistema de gestión ambiental. Su grado de aplicación depende de factores

---

<sup>34</sup>INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TÉCNICAS Y CERTIFICACIÓN. Sistema de gestión ambiental: Requisitos con orientación para su uso. NTC-ISO 14001. Bogota.: El Instituto, 2004.

<sup>35</sup>INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TÉCNICAS Y CERTIFICACIÓN. Sistemas de gestión de la medición para los procesos de medición y los equipos de medición. NTC-ISO 10012. Bogota.: El Instituto, 2003.

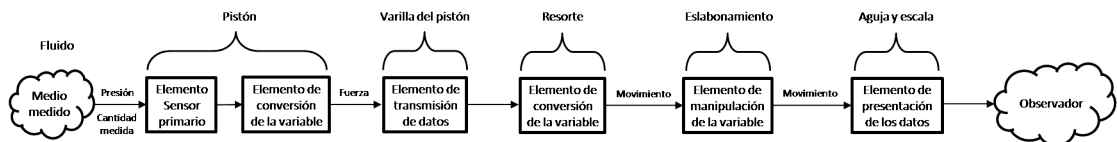
tales como la política ambiental de la organización, la naturaleza de sus actividades, productos y servicios y la localización donde y las condiciones en las cuales opera<sup>36</sup>.

Las normas exigen mantener en perfectas condiciones de uso estos equipos. La diferencia es que la determinación de la conformidad de estos equipos para ser utilizados no se hace evidente por simple inspección visual. Por ejemplo, no conocemos el nivel de error de un manómetro hasta que no realizamos una comparación de sus resultados con un patrón, y es ahí en donde recurrimos a estos sistemas de gestión de calidad que son la herramienta utilizada para determinar la conformidad de estos equipos.

## 6.5 CASO DE ESTUDIO: CALIBRACIÓN DE UN MANÓMETRO TUBO BOURDON TIPO C.

El manómetro es un instrumento utilizado para medir la presión diferencial basada en la relación entre la presión y la carga hidrostática equivalente del fluido<sup>37</sup>. En la figura 25 se observa el sistema de medición de un manómetro de presión, donde se especifican las funciones de cada elemento que lo componen, desde la variable física de entrada hasta los datos muestreados en la escala.

Figura 25: Sistema de Medición-Manómetro



Fuente: Doebelin, Ernest E. *Sistemas de Medición e Instrumentación. Diseño y Aplicación*. 5 ed. Mc Graw Hill. 2005. Pág. 41.

Para la realización de este caso de estudio se buscó a REYMOM Ltda que es una empresa que presta servicios de reparación, recuperación, y mantenimiento y montaje de válvulas industriales; se encuentra localizada en la ciudad de Barrancabermeja (Santander). Dicha empresa consta de un laboratorio para la calibración de manómetro industriales análogos y digitales certificado por ICONTEC y sus instrumentos patrones por PROGEN. Gracias a la supervisión del encargado de este laboratorio, se llevó a cabo la calibración de un manómetro tubo Bourdon tipo C figura 26 y se conoció la metodología de este proceso

<sup>36</sup>INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TÉCNICAS Y CERTIFICACIÓN. Sistema de gestión ambiental: Requisitos con orientación para su uso. NTC-ISO 14001. Bogota.: El Instituto, 2004.

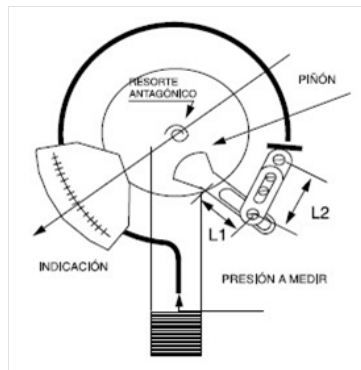
<sup>37</sup>FIGLIOLA. Op. cit.,p. 413.

desde la llegada del instrumento a la empresa hasta la entrega de este cumpliendo con los requerimientos del cliente.

El procedimiento para la calibración consta básicamente de tres criterios para ajustar dicho instrumento:

1. Determinar el rango o clase en el que se encuentra el instrumento. Este procedimiento se realiza en un laboratorio certificado.
2. Si el cliente o dueño del instrumento a ajustar, desea una mejor precisión de su instrumento, se determina el tipo de error con el que llegó este y se le hace su debida corrección o ajuste.
3. Y por último, se realiza los debidos cálculos para determinar el nuevo índice de calidad e incertidumbre de medición con todos los ajustes correspondientes para una mejor precisión en la toma de datos.

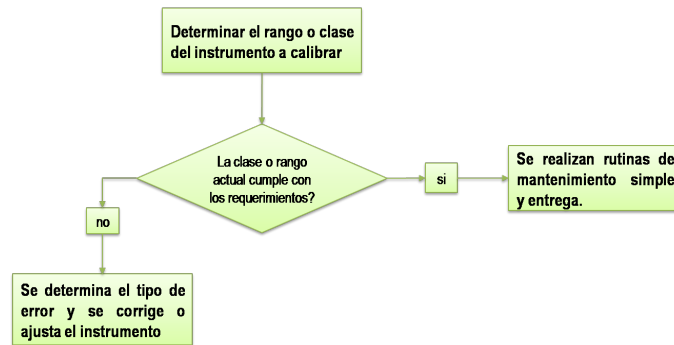
Figura 26: Esquema del calibrador de presión Tubo Bourdon tipo C.



Fuente. HOLMAN, J.P. *Experimental Methods for Engineers*. p. 241.

Para visualizar la secuencia que se debe seguir para la ejecución de estos criterios, se ilustrará en un diagrama de flujo para un mejor entendimiento como se observa en la figura 27:

Figura 27: Procedimiento de calibración para un manómetro tubo Bourdon tipo C



En el Anexo B se encontrará información mas detallada sobre todo el desarrollo del procedimiento de calibración del manómetro realizado en la empresa REYMOM LTDA .

# 7. CARACTERÍSTICAS DINÁMICAS DE SEÑALES CON FUNDAMENTACIÓN MATEMÁTICA.

## 7.1 MODELADO MATEMÁTICO DE SISTEMAS DE MEDICIÓN

El modelado matemático es primordial para iniciar con el estudio del comportamiento de los sistemas dinámicos ya sean mecánicos, eléctricos, de medición, de proceso, control, entre otros, utilizados en la industria, que en su estructura los sensores, acondicionadores y transductores toman un rol importante para llevar a cabo la transmisión de señales con un análisis dinámico que describe matemáticamente la relación que existe entre la señal de salida y la excitación, considerando perturbaciones de otras variables que se pudiesen presentar por la configuración del sistema<sup>38</sup>.

Por ejemplo, en un sistema de medición la señal de entrada o excitación del sistema representa el valor real de una variable y la señal de salida o respuesta del sistema es el valor numérico de la variable que es el objetivo de este tipo de sistema: representar un valor numérico a un observador de la variable de interés<sup>39</sup>.

La forma en que se adopta el modelo cuantitativo al sistema depende de las circunstancias y características de éste, por ello para un mismo sistema pueden existir varios modelos dependiendo de la perspectiva con que se analice. Estos, son utilizados en algunos casos para controlar parámetros necesarios en equipos industriales, donde la herramienta de medición es conectada al dispositivo de acondicionador de señal a eléctrica, mecánica, neumática, etc. y de esa manera ser analizada y evaluada, ya sea por un software computacional para una señal digital, por un procesador en caso de una señal eléctrica u otro equipo según la necesidad.

Encontrar un equilibrio entre simplicidad del modelo y la precisión en la descripción del sistema lleva en algunas ocasiones a omitir ciertos parámetros que podrían complicar el modelo, se debe tener cuidado que lo omitido no influya críticamente en la dinámica del sistema que origine una respuesta inexacta con la representación física experimental y conlleve a un análisis erróneo. Existe una metodología para el desarrollo de un nuevo modelo, la cual implica primero llevar a cabo un modelo simplificado para obtener una

---

<sup>38</sup>CREUS SOLÉ, Instrumentación industrial, Op.cit., Apéndice A.

<sup>39</sup>BENTLEY, Jhon P. Sistemas de Medición. Principios y Aplicaciones. 2 ed. CECSA. 1999.

idea del resultado y después agregarle pormenores y detalles que particularizan el modelo para un sistema determinado<sup>40</sup>.

Se debe tener en cuenta en el momento de realizar un modelo, que la misma ecuación puede no ser válida al cambiar el rango de algunas propiedades, como por ejemplo la frecuencia, ya que el comportamiento del sistema puede ser distinto a bajas y altas frecuencias. Es allí donde se presenta la existencia de sistemas lineales y no lineales.

Para hallar el modelo matemático que describe un sistema dinámico existen diferentes métodos (ver apéndice III) que se vale de estrategias de análisis para hallar una ecuación diferencial, en la cual se puede determinar si corresponde a un sistema de primer orden, segundo orden u orden superior. Algunas aplicaciones de estos métodos se visualizan en los sistemas eléctricos que en ocasiones se toma como parámetro de analogía de otros sistemas dinámicos como el térmico (ver apéndice III). En la tabla 8 se visualiza una comparación en cuanto características descritas matemáticamente que sirven como herramienta para hallar el modelo matemático general de un conjunto que se requiera analizar.

Tabla 8: Descripción matemática de parámetros físicos de sistemas eléctricos, nivel de líquido y térmico

SISTEMA	RESISTENCIA	CAPACITANCIA
<b>ELECTRICO</b>	$V_R = Ri_R(t)$	$C = \frac{dq_e(t)}{dt} = i_C(t)$
<b>NIVEL DE LIQUIDO</b>	<p>FLUJO LAMINAR <math>R = \frac{dH}{dQ} = \frac{H}{Q}</math></p> <p>FLUJO TURBULENTO <math>R = \frac{2H}{Q}</math></p>	$C = \frac{\Delta \text{Volumen en tanque [m}^3\text{]}}{\Delta h [\text{m}]}$
<b>TERMICO</b>	$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{1}{R}$ <small><math>R = \frac{\text{Cambio en la diferencia de temperatura [}^\circ\text{C]}}{\text{Cambio de flujo de calor [Julio/seg]}}</math></small>	$C = mc$ <small><math>C = \frac{\text{Cambio de calor almacenado [Julio]}}{\text{Cambio de temperatura [}^\circ\text{C]}}</math></small>

## 7.1.1 Sistemas Lineales y No Lineales

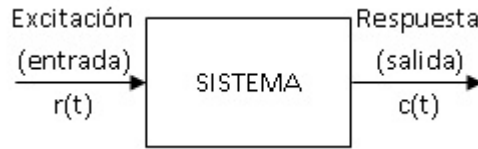
### 7.1.1.1 Sistemas Lineales

En este tipo de sistemas se puede aplicar el principio de superposición, el cual establece que la solución a una respuesta dinámica producida por varias entradas es la suma de las soluciones correspondientes a cada entrada. Otra manera de determinar la linealidad del sistema es el cumplimiento de la propiedad de la homogeneidad, dado la causa  $r(t)$  y el

<sup>40</sup>OGATA, K. Ingeniería de Control moderna, Tercera edición. Editorial Pearson, 1995.

efecto  $c(t)$  son proporcionales, o sea que a una entrada  $A*r(t)$ , la salida que corresponde será también  $A * c(t)$ <sup>41</sup>, como se ve en la fig. 28.

Figura 28: Linealidad en un Sistema de Control



Fuente: Creus. Instrumentación industria. Pág. 646.

La propiedad de la homogeneidad se puede representar en una gráfica donde la relación entre la entrada y salida es una línea recta, por ello idealmente el punto de intercepto de las magnitudes máximas de la señal de entrada y salida y el punto intercepto de las magnitudes mínimas de la señal de entrada y salida son unidos por una línea recta ideal y por ello es descrita por la ecuación 12:

$$r - r_{min} = \left[ \frac{r_{max} - r_{min}}{c_{max} - c_{min}} \right] (c - c_{min}) \quad (12)$$

Se representa la ecuación 12 en forma simplificada en la ecuación 13, donde  $k$  es la pendiente de la línea recta ideal representada en la ecuación 14 y  $a$  es la magnitud del punto de intersección de la línea recta ideal con eje de la salida según ecuación 15.

$$c = kr + a \quad (13)$$

$$k = \frac{c_{max} - c_{min}}{r_{max} - r_{min}} \quad (14)$$

$$a = r_{min} - kc_{min} \quad (15)$$

Los sistemas lineales invariantes en el tiempo contienen en las ecuaciones diferenciales coeficientes constantes, lo cual indica que los parámetros que conforman el sistema dinámico son lineales invariantes con el tiempo, siendo éste el modelo útil de más amplia aplicación de la respuesta dinámica de los sistemas de medición<sup>42</sup>. Y los sistemas lineales variantes con el tiempo, se caracterizan por ecuaciones diferenciales cuyos coeficientes son funciones de una sola variable independiente.

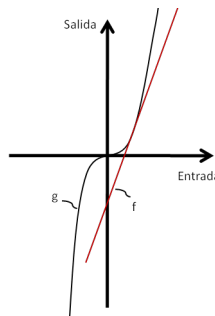
<sup>41</sup>NISE N. S., Control Systems engineering, Quinta edición. Editorial John Wiley & Sons, 2008.

<sup>42</sup>DOEBELIN, Ernest E. Sistemas de Medición e Instrumentación. Diseño y Aplicación. Quinta edición. Editorial Mc Graw Hill. 2005.

### 7.1.1.2 Sistemas No Lineales

La mayoría de los sistemas reales, son sistemas no lineales, de hecho, los que se consideran lineales solo pueden ser en un rango del dominio de los parámetros involucrados en el proceso. Por ejemplo, en el comportamiento de un flujo, la solución cambia cuando pasa de flujo laminar a turbulento sin contar con la zona de transición, que es poco explicable mediante un modelo matemático, en la figura 29 se puede observar las curvas características.

Figura 29: Curvas características para no linealidades-ley cuadrática.



Fuente: Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. p 59.

En los sistemas no lineales, no es posible aplicar el principio de superposición ni homogeneidad, y su conjetura matemática es compleja para encontrar una solución, ya que el comportamiento de causa y efecto no tienen proporcionalidad, por ello para tramos de ésta relación se puede encontrar o acomodar en ecuaciones diferenciales lineales de un modelo matemático, como se muestra en la figura 29, donde la suposición básica es que la respuesta de la aproximación lineal representa la respuesta del proceso en la región cercana al punto de operación, alrededor del cual se realiza la linealización<sup>43</sup>.

Un método para linealizar estos modelos matemáticos con intención de facilitar su descomposición para su análisis es aplicar la técnica de expansión de la función en una serie de Taylor, lo cual, aproxima la respuesta del sistema no lineal a ecuaciones diferenciales lineales. Esta técnica se aplica alrededor de un punto base,  $\bar{x}$ , que por lo general hace parte del intervalo de interés a solucionar utilizando la ecuación 16.

$$f(x) = f(\bar{x}) + \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)_{\bar{x}} (x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right)_{\bar{x}} (x - \bar{x})^2 + \dots \quad (16)$$

Al despreciar los términos de segundo grado o más de la ecuación 16 se hallara una función linealizada, que es la expansión de Taylor simplificada como se observa en la ecuación 17.

<sup>43</sup>SMITH, C. y CORRIPIO, A. *Control Automático de Procesos: Teoría y Práctica*. 1ra ed. John Wiley & Sons, 1991.

$$f(x) = f(\bar{x}) + \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)_{\bar{x}} (x - \bar{x}) \quad (17)$$

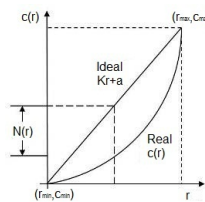
Un procedimiento similar se realiza para una función dependiente de n variables, aplicando la ecuación 260.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \left( \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right)_{\bar{x}} (x_i - \bar{x}_i) \quad (18)$$

También es posible linealizar la ecuación desarrollando una ecuación lineal teniendo en cuenta la diferencia entre la función lineal ( $c_{lineal}(r)$ ) y la función real ( $c_{nolineal}(r)$ ) que se define en términos de una función  $N(r)$  como se representa en la fig. 30, siendo ésta la no linealidad del sistema que se cuantifica en términos del valor máximo como un porcentaje de la deflexión a escala completa como se observa en la ecuación 19.

$$\% \text{ Nolinealidad} = \frac{N_{max}}{C_{max} - C_{min}} * 100 \quad (19)$$

Figura 30: Representación de la no linealidad



Fuente. BENTLEY, Jhon P. *Sistemas de Medición. Principios y Aplicaciones*. 2 ed. CECSA. 1999. Pág. 9.

La ecuación que representa el sistema no lineal será determinado por la ecuación 20 y puede estar expresada como un polinomio o utilizar una función que se acople mejor al comportamiento del sistema<sup>44</sup>.

$$c_{real} = kr + a + N(r) \quad (20)$$

Otra característica importante en el modelado matemático de un sistema de medición es la sensibilidad, definida como la razón de cambio de la señal de salida con respecto a la señal de entrada ( $dc/dr$ ), que para el caso de un sistema ideal estará dado por k.

### 7.1.1.3 Modelo Generalizado de un Sistema de Medición

Un modelo que puede representar la señal de salida de un elemento de medición esta dado por la ecuación 21:

<sup>44</sup>BENTLEY. Op. cit., p. 9.

$$c = kr + a + N(r) + k_M r_M r + k_I r_I \quad (21)$$

Donde  $r_M$  es la desviación de una entrada ambiental modificadora respecto del valor dado en condiciones estándar, que produce un cambio en la sensibilidad lineal de  $k$  a  $k + k_M r_M$  como se observa en la fig. 31 a; por otra parte,  $r_I$  es la desviación en una entrada ambiental interferente respecto del valor en condiciones estándar, que produce un cambio de  $a$  a  $a + k_I r_I$  según fig. 31 b; las constantes  $k_M$  y  $k_I$  son de acoplamiento respecto a condiciones ambientales diferentes a las estándar.

Figura 31: Efectos de las Entradas Ambientales

Figura 7.4a: Entrada Modificadora.

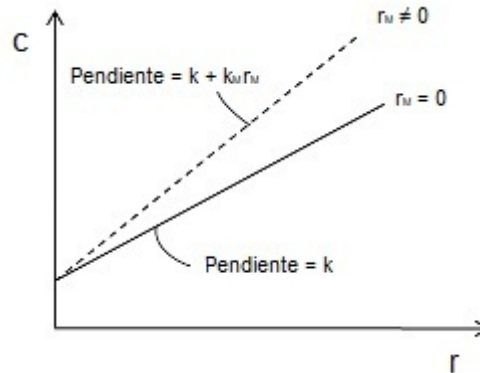
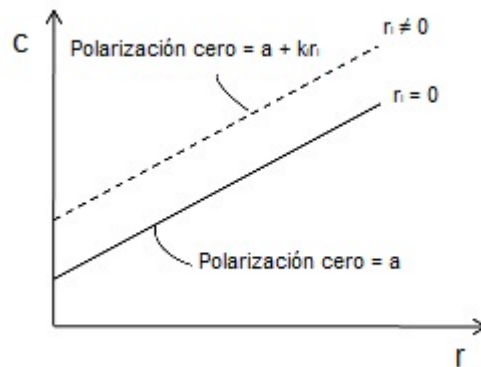


Figura 7.4b: Entrada Interferente.



Fuente. BENTLEY, Jhon P. *Sistemas de Medición. Principios y Aplicaciones*. 2 ed. CECSA. 1999. p. 11..

## 7.2 ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA ESTACIONARIA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

El modelado matemático es el primer paso para el análisis de la respuesta dinámica de un sistema ante diferentes tipos de señales de entrada: escalón, rampa, parábola, impulso, sinoidal, entre otros; las cuales son herramientas para realizar pruebas experimentales necesarias y determinar el posible comportamiento que se presentara en la práctica, aunque son solo aproximaciones bastas de la realidad, son útiles para el análisis del comportamiento de los sistemas debido a cambios en los parámetros de excitación o para comparar dos sistemas de medición<sup>45</sup>.

La utilización de un tipo particular de entrada es definida por:

- El tipo de señal de entrada más frecuente que recibirá susodicho sistema.
- La señal que puede inducir al sistema a una respuesta crítica e inestable.

Después de concretar el modelo matemático del sistema, se puede llegar a una solución matemática que describe la respuesta dinámica del mismo, la cual está compuesta de dos partes: por un lado la respuesta estable que se refiere al comportamiento tendiendo  $t$  al infinito; y, la respuesta transitoria, que va del estado inicial y se extingue en el tiempo, conllevando a una asíntota o valor constante que se establece como la respuesta estable.

En el análisis de los sistemas dinámicos existe la característica de estabilidad, la cual determina o es una clasificación del sistema, al igual que la linealidad que representa en el modelo matemático.

Para los sistemas lineales e invariantes con el tiempo en cuanto a estabilidad absoluta existen los siguientes estados:

- **Estable:** Cuando el sistema tiende a regresar a la posición de equilibrio después de atribuirle unas condiciones iniciales.
- **Críticamente estable:** Cuando un comportamiento de la respuesta (oscilaciones) continúa en el tiempo hasta el infinito.
- **Inestable:** Implica que diverge del equilibrio del sistema con el tiempo.

---

<sup>45</sup>DOEBELIN. Op. cit., p. 100.

Se debe tener en cuenta las limitaciones (como obstáculos, falla por fatiga en un tiempo definido o simplemente cambio en las propiedades del sistema que lo convierte en ecuaciones no lineales) que pueden estar afectando la respuesta del sistema, siendo de esta manera inútil la ecuación diferencial lineal.

Para estudiar la respuesta transitoria de un sistema dinámico se debe distinguir las representaciones matemáticas de una clasificación general como lo son los sistemas de primer orden, segundo orden y orden superior, como es mostrado en el apéndice .

Tabla 9: Función de Transferencia que Representa Sistemas Dinámico

ORDEN	FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA
CERO	$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{a_n}{b_n}$
PRIMERO	$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{RCs+1}$
SEGUNDO	$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{ms^2+bs+k}$
SUPERIOR	$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\dots+a_n}$

### 7.2.1 Sistemas de Orden Cero

Se presenta cuando en la ecuación 16 todos los coeficientes son cero exceptuando  $a_n$  y  $b_m$ , en un rango de operación pre-establecido, generando la ecuación diferencial simple 22.

$$a_n r = b_m c \quad (22)$$

$$\frac{c}{r} = \frac{a_n}{b_m} = K \quad (23)$$

Como se puede observar en la ecuación 22 la señal de salida es un múltiplo constante a la señal de entrada, sin importar las condiciones de la excitación, por ello éste instrumento representa el rendimiento dinámico ideal y perfecto, que lo convierte en un instrumento que sirve como estándar para comparar con otros menos exactos<sup>46</sup>.

### 7.2.2 Sistemas de Primer Orden

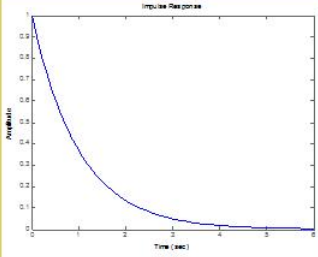
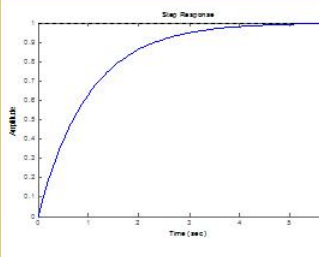
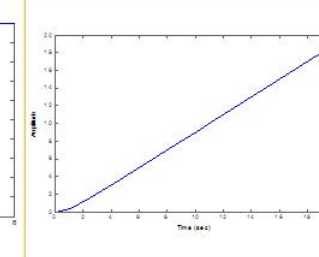
Los sistemas de primer orden pueden ser representados por la función de transferencia según la ecuación 24:

<sup>46</sup>DOEBELIN, Ernest E. Sistemas de Medición e Instrumentación: Diseño y Aplicación. 5 ed. McGraw-Hill, 2005.

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{C(s)}{R(s)} \quad (24)$$

Las respuestas dependiendo del tipo de entrada o excitación del sistema como la función escalón unitario, rampa unitaria e impulso unitario, serán halladas tomando las condiciones iniciales cero y los resultados se observan en la figura 32.

Figura 32: Respuestas sistemas de primer orden

ENTRADA	IMPULSO	ESCALÓN	RAMPA
	$c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$ <p>para <math>t \geq 0</math></p>	$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$ <p>para <math>t \geq 0</math></p>	$c(t) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}}$ <p>para <math>t \geq 0</math></p>
RESPUESTA			

**Impulso unitario:** La transformada de Laplace de esta función de entrada está dada por  $R(s) = 1$ , por lo tanto la respuesta está dada por la ecuación 25:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (25)$$

Se obtiene la ecuación 26 de respuesta en función del tiempo como:

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{para } t \geq 0 \quad (26)$$

**Escalón unitario:** Donde la transformada de Laplace es  $R(s) = 1/s$  y deduciendo de la ecuación 24 se obtiene la ecuación 27:

$$C(s) = \frac{1}{S} * \frac{T}{Ts + 1} \quad (27)$$

Expandiendo en fracciones parciales, se obtiene la ecuación 28:

$$C(s) = \frac{1}{S} - \frac{T}{Ts + 1} = \frac{1}{S} - \frac{1}{s + 1/T} \quad (28)$$

Al tomar la transformada inversa de Laplace la función de salida está dada por la ecuación 29.

$$c(t) = 1 - e^{(-t/T)} \quad \text{para } t \geq 0 \quad (29)$$

Analizando este tipo de respuestas encontramos:

- En el tiempo  $t = 0$ , no hay respuesta alguna.
- En el tiempo  $t = T$ , se obtiene un valor de  $c(t) = 0,632$ , o sea que en el momento que llegue a este tiempo la respuesta adquirirá en 63,2 % del valor obtenido cuando  $t \rightarrow \infty$ , el cual es el valor de la respuesta estable del sistema, después de pasar de la transición. La magnitud de  $T$  toma el nombre de constante de tiempo
- Se observa que cuando decrece el valor de  $T$  la respuesta estable es alcanzada más rápidamente por el sistema.
- Analizando la pendiente de la curva de respuesta en la ecuación 30:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} = 0 = \frac{1}{T} \quad (30)$$

Se observa que la pendiente en  $t=0$  obtiene el valor anterior y disminuye a cero cuando  $t$  tiende a infinito.

La gráfica escalón de la figura 32 fue hecha para  $T=1$ , por ello en:

En  $t=T$ : 63.2 %  $c(t)$

En  $t=2T$ : 86.5 %  $c(t)$

En  $t=3T$ : 95 %  $c(t)$

En  $t=4T$ : 98.2 %  $c(t)$

En  $t=5T$ : 99.3 %  $c(t)$

De lo anterior se infiere que un valor razonable del tiempo que necesita para alcanzar la estabilidad se puede estimar en cuatro veces la constante de tiempo.

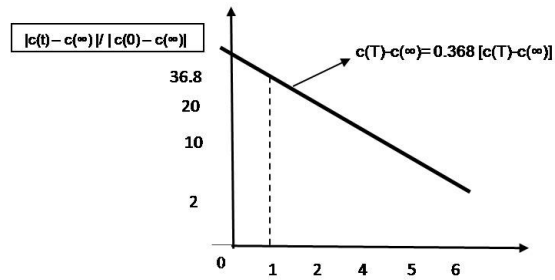
Cada vez que la magnitud de  $T$  sea menor se puede lograr una respuesta mas rápida del sistema y por ende una mejor medición dinámica con respecto a un instrumento<sup>47</sup>.

Una forma de determinar la linealidad de primer orden del sistema experimentalmente es graficar  $|c(t)-c(\infty)|/|c(0)-c(\infty)|$ , contra  $t$  en papel semilogarítmico como se aprecia en la figura 33.

---

<sup>47</sup>Ibid.,p. 60.

Figura 33: Identificación de Linealidad para un Sistema Dinámico



**Rampa Unitario:** La ecuación de transferencia que describe ésta señal de entrada está dada por  $1/s^2$ , obteniendo la respuesta utilizando la ecuación 24, se halla usando la ecuación 31:

$$C(s) = \frac{1}{s^2} * \frac{1}{Ts + 1} \quad (31)$$

Expandiendo en fracciones parciales:

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts + 1} \quad (32)$$

Se aplica la transformada inversa de Laplace de la ecuación y se obtiene la ecuación 33:

$$c(t) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}} \quad \text{para } t \geq 0 \quad (33)$$

De este modo, la señal de error  $e(t)$  esta dado por la ecuación 94:

$$e(t) = r(t) - c(t) = T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (34)$$

La respuesta se evidencia en la gráfica de rampa 32 junto con la función rampa, observando el error que existe entre ellas.

### 7.2.3 Sistemas De Segundo Orden

Una ecuación diferencial de segundo orden podría ser representada por una función de transferencia como se observa en la ecuación 35:

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{C(s)}{R(s)} \quad (35)$$

Hallando los valores de las raices de la ecuación característica cuando el denominador es igual a cero (Polos), se presentan tres condiciones que serán evaluadas para cada entrada según ecuación 36:

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4mk)}}{2m} \quad (36)$$

Estas condiciones me determinan el tipo de comportamiento del sistema que se presentara como respuesta a la excitación:

$b^2 > 4mk$ , valores de  $s$  reales y diferentes.

$b^2 = 4mk$ , valores de  $s$  reales e iguales.

$b^2 < 4mk$ , valores de  $s$  imaginarios.

Lo anterior conduce a la determinación de estados en el plano de eje imaginario vs. eje real para la comprensión de estabilidad que puede presentar el sistema ante una perturbación<sup>48</sup>. Los estados generales que se presentan son:

- Respuesta sobreamortiguada:

Polos: Dos números reales,  $\sigma_1, \sigma_2$ ;  $b^2 > 4mk$ ,

$$c(t) = k_1e^{-\sigma_1} + k_2e^{-\sigma_2}$$

- Respuesta subamortiguado:

Polos: Dos números imaginarios:  $\sigma_d \pm w_d j$ ;  $b^2 > 4mk$

$$c(t) = Ae^{-\sigma_1} \cos(w_d t - \varphi)$$

- Respuesta marginalmente estable:

Polos: Dos números imaginarios,  $\pm w_d j$

$$c(t) = A \cos(w_d t - \varphi)$$

- Respuesta críticamente amortiguada:

Polos: Dos números reales e iguales:  $\sigma_1$ ;  $b^2 = 4mk$

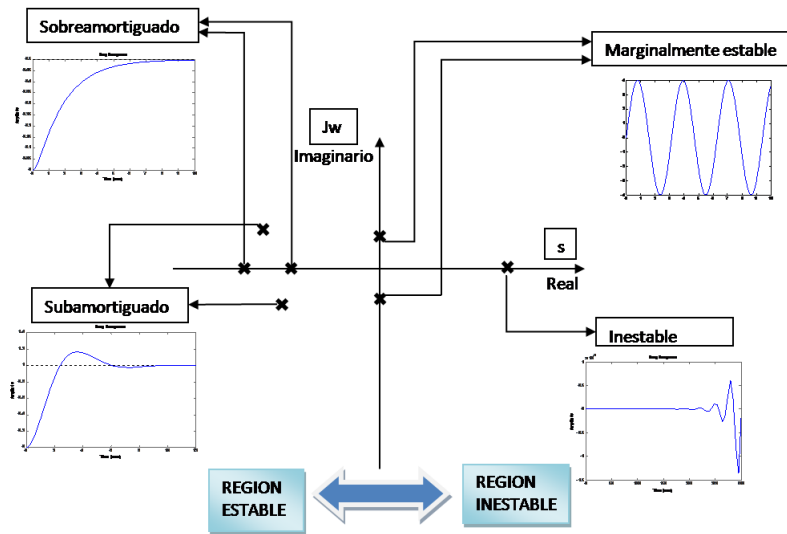
$$c(t) = k_1 t e^{-\sigma_1} + k_2 e^{-\sigma_1}$$

La ubicación en el plano de imaginario vs. real se observa en la figura 34:

---

<sup>48</sup>NISE, N. Control Systems Engineering, 5 ed. John Wiley & Sons, 2008.

Figura 34: Ubicación de condiciones de estabilidad en el plano Imaginario vs. Real.



### 7.2.3.1 Impulso unitario:

$$C(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} * 1 \quad (37)$$

Se llama la función de transferencia del sistema por medio de Matlab con el siguiente código:

- num=[1]; % Numerador del polinomio
- den=[m b k]; % Denominador del polinomio
- H=tf(num,den); % Convierte el sistema en una ecuación de transferencia.

Para aplicarle al sistema una excitación de Impulso, la sintaxis quedaría:

- impulse(H) {1}
- impulse(num,den) {2}
- impulse(num,den,t){3}

La forma {1} y {2} da la misma gráfica, pero en la {3}, t es el dominio tiempo que requiere para graficar.

Si se utiliza la forma de solución por espacio de estados, la forma de describirla en Matlab o guardar la información básica del sistema es:

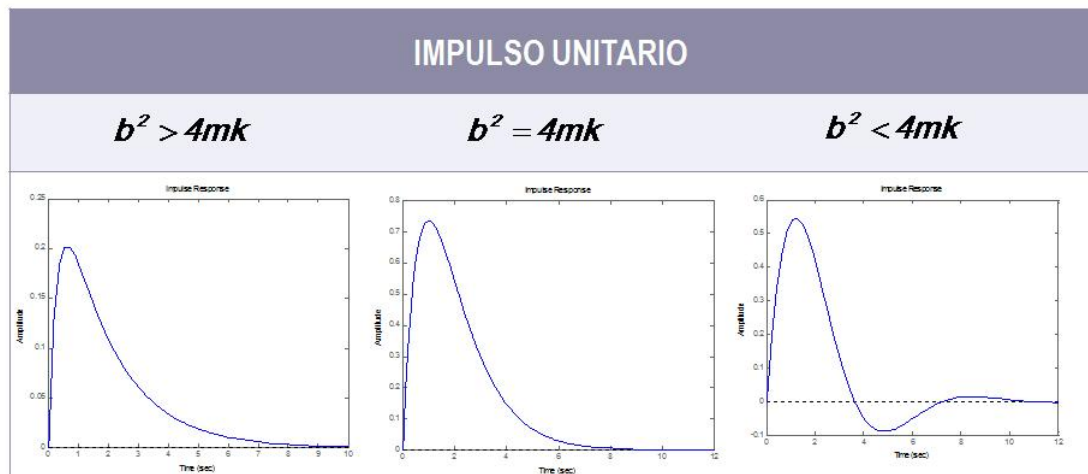
- H=ss(A,B,C,D)

- Y para aplicar una excitación:
- `impulse(H)`
- `impulse(A,B,C,D)`
- En el caso de colocar:
- `[x,y,t]= impulse(num,den,t)`
- `[x,y,t]= impulse(A,B,C,D)`

No aparecerá una gráfica, sino el software guardara en las matrices `y` y `x` la salida la respuesta del estado del sistema, respectivamente, evaluadas en el dominio `t`.

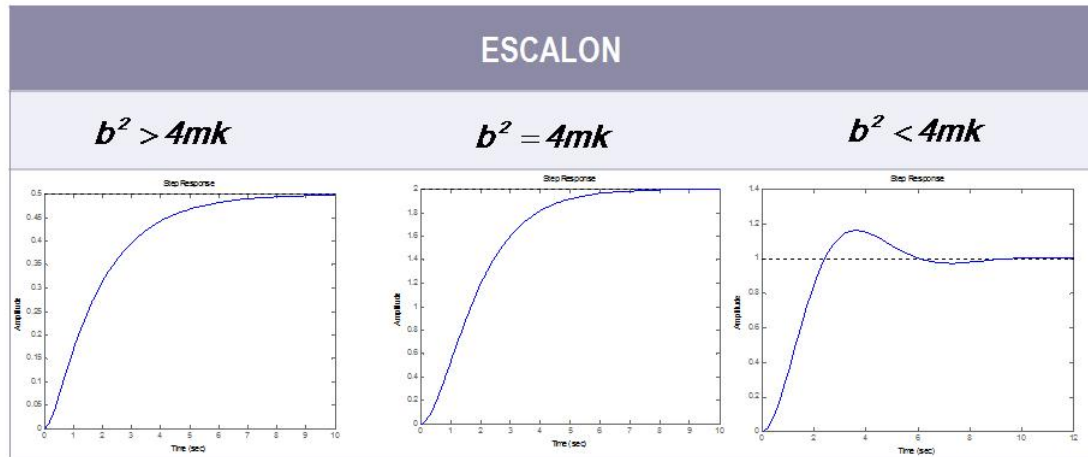
La respuesta arrojada por el software es la que se observa en la figura 35.

Figura 35: Respuesta que arrojada por el software



**7.2.3.2 Función Escalón:** Se coloca en el software: `step(H)` `step(num,den)` `step(num,den,t)` y los resultados obtenidos se pueden ver en la figura 36.

Figura 36: Respuesta función escalón



**7.2.3.3 Función Rampa:** En Matlab no hay un comando que aplique la entrada rampa al sistema directamente, por lo tanto se debe multiplicar por la transformada de Laplace de la función rampa que es  $1/s^2$ , como se observa en la ecuación 38.

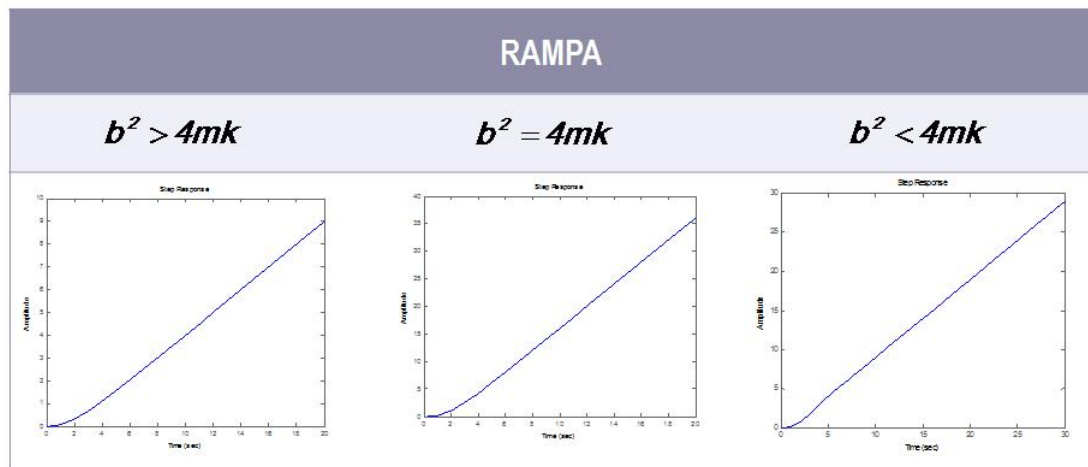
$$C(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} * \frac{1}{s^2} = \frac{1}{ms^3 + bs^2 + ks} * \frac{1}{S} \quad (38)$$

Se ingresa a Matlab aplicando como función entrada de escalón unitario ya que su transformada de Laplace es  $R(s) = 1/s$ , lo cual no modificaría la función de transferencia, así:

- num=[1]; % Numerador del polinomio
- den=[m b k 0]; % Denominador del polinomio
- H=tf(num,den); % Convierte el sistema en una ecuación de transferencia. step(H)

Y la respuesta que se observa en la figura 37.

Figura 37: Respuesta rampa



Para un buen análisis de los comportamientos de los sistemas dinámicos y capacidad de crítica a la hora de una decisión se deben tener en cuenta algunas características de su función respuesta; en el caso de sistemas de segundo orden, si se supone condiciones iniciales según ecuación 112 :

$$y(t=0) = y_o, \Lambda, \frac{dy}{dt}(t=0) = 0 \quad (39)$$

La función de transferencia se transformara de la siguiente manera aplicando el álgebra necesaria:

$$Y(s) = \frac{(ms + b)y_o}{ms^2 + bs + k} = \frac{C(s)}{R(s)} \quad (40)$$

La ecuación 40 se llevara a un estado general para efectos de análisis y facilidad en la ecuación 41.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(s + b/m)y_o}{s^2 + (b/m)s + k/m} = \frac{(s + \zeta w_n)y_o}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (41)$$

Donde:

$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , frecuencia natural no amortiguada.

$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$ , razón de amortiguamiento.

Los valores de s, para los cuales el denominador es cero en forma general para una ecuación de segundo orden se ven en la ecuación 42:

$$s_1, s_2 = -\zeta w_n \pm w_n \sqrt{(\zeta^2 - 1)} \quad (42)$$

Las características para un sistema general como en la ecuación 42 están determinadas por el tiempo que demore un evento específico<sup>49</sup>, tales como:

<sup>49</sup>DORF, R. y BISHOP, R. Sistemas de Control Moderno. 10 ed. Pearson, 2005

- Tiempo de retardo ( $t_d$ ): es el tiempo que requiere para que la respuesta alcance por primera vez la mitad del valor final.
- Tiempo de levantamiento ( $t_r$ ): es el tiempo que necesita el sistema para alcanzar la respuesta de 10 a 90 %, del 5 al 95 % o del 0 al 100 % del valor final, utilizándose el primero para sistemas sobre amortiguados y el ultimo para subamortiguado; linealizando la ecuación 43 para hallar este valor, ya que su expresión es complicada de obtener:

$$t_r = \frac{2.16\zeta + 0.60}{w_n} \quad (43)$$

- Tiempo pico ( $t_p$ ): Tiempo que demora en llegar al primer pico de la función.

$$t_p = \frac{T}{w_n \sqrt{(1 - \zeta^2)}} \quad (44)$$

- Sobrepasso máximo ( $M_p$ ), %: Corresponde al valor pico máximo de la curva de respuesta, el cual es medido a partir de la unidad, si el valor en estado estable es distinto a la unidad, se utiliza un porcentaje para describirlo, según ecuación 45:

$$\% \text{ sobrepasso máximo} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} * 100 \quad (45)$$

Se le atribuye a este valor la descripción en forma directa de la estabilidad relativa del sistema.

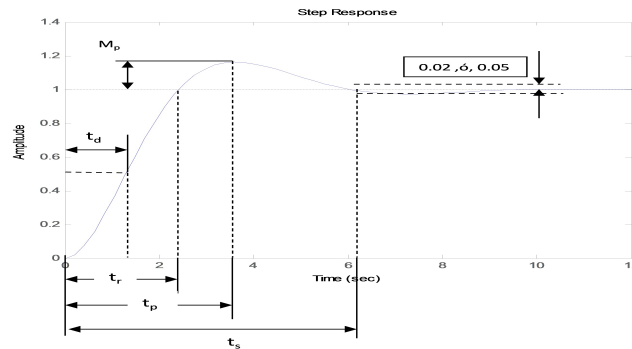
$$M_p = 1 + e^{-\zeta\pi} \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (46)$$

- Tiempo de asentamiento ( $t_s$ ): Es el tiempo que el sistema requiere para alcanzar un comportamiento en el cual la variación de la respuesta se encuentre en un rango de 2 al 5 % de su valor de estabilidad final dependiendo de los requerimientos del sistema, y se obtiene según la ecuación 47.

$$t_s = 4T = \frac{4}{\zeta w_n} \quad (47)$$

En la figura 38 se puede observar como es el comportamiento de un sistema y sus características.

Figure 38: Descripción de la respuesta dinámica de un sistema.



Fuente. Ogata. Ingeniería de Control Moderna. p. 151.

## Análisis en el dominio de la frecuencia.

El análisis de la respuesta estacionaria en el dominio de la frecuencia de un sistema se define como la respuesta del sistema en un estado estacionario a una señal sinusoidal de entrada que permite hallar señales periódicas y la cual difiere de la forma de onda de entrada solamente en amplitud y ángulo de fase<sup>50</sup>. Para mayor detalle ver anexo D.

## 7.3 CRITERIO DE ESTABILIDAD

### 7.3.1 Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz es un algoritmo de aplicación directa que me permite determinar el número de polos que se encuentra en el semiplano derecho (raíces inestables) sin necesidad de calcular las raíces de la ecuación característica. Es uno de los métodos más usados y útil sobre todo para sistemas de orden superior. El procedimiento es el siguiente:

1. Se escribe el polinomio según la ecuación 48:

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad (48)$$

En donde los coeficientes son cantidades reales.

<sup>50</sup>DORF, R. y BISHOP, R. Sistemas de Control Moderno. 10 ed. Pearson, 2005.

2. Si el polinomio presenta uno de los coeficientes cero o negativo, con algún otro positivo, existe al menos una raíz que es imaginaria o que tiene parte real positiva, en cuyo caso el sistema es inestable. Luego como condición necesaria todos los coeficientes deben estar presentes y ser positivos, aunque esto no indique que el sistema sea necesariamente estable.
3. Si todos los coeficientes del polinomio son positivos, se realiza el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{cccccc}
 s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\
 s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\
 s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
 s^1 & f_1 & & & & \\
 s^0 & g_1 & & & & 
 \end{array} \tag{49}$$

Donde:

$$b_1 = (a_1 a_2 - a_0 a_3) / a_1$$

$$b_2 = (a_1 a_4 - a_0 a_5) / a_1$$

$$b_3 = (a_3 b_1 - a_0 a_7) / a_1$$

$$c_1 = (a_1 a_6 - a_1 b_2) / b_1$$

Se continúa evaluando los valores de b hasta que las restantes son cero. Se prosigue con el mismo patrón de evaluación (multiplicación cruzada de los coeficientes de los dos renglones anteriores) para evaluar las c, d, e, etc., hasta completar el n-ésimo renglón.

El criterio plantea que el número de raíces del polinomio con parte real positiva está dado por el número de cambios de signo de la primera columna del arreglo.

La condición fundamental y suficiente para que todas las raíces del polinomio se encuentren en el semiplano izquierdo del plano s es que todos los coeficientes del polinomio sean positivos y que todos los términos de la primera columna del arreglo tengan signo positivo. De cumplirse lo anterior, dicho polinomio será Hurwitz.

**7.3.1.1 Posibles casos** Para la primera columna del arreglo de Routh se pueden presentar cuatro casos diferentes de configuraciones que se deben tener en cuenta para el

correcto desarrollo del arreglo de Routh. A continuación se ilustra cada caso con un ejemplo para su mejor entendimiento.

- Ningún elemento de la primera columna es cero.

Sea el polinomio de orden dos:

$$q(s) = a_0s^2 + a_1s + a_2 \quad (50)$$

Luego, el arreglo de Routh se escribe:

$$\begin{array}{ccc} s^2 & a_0 & a_2 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & b_1 & 0 \end{array}$$

Donde,

$$b_1 = (a_1a_2 - a_0a_3)/a_1 = a_2$$

- Si un término de la primera columna es cero de cualquier renglón, pero los términos restantes del mismo renglón no son cero o no presenta demás términos.

El término cuyo valor es cero se reemplaza por un valor positivo muy pequeño  $\varepsilon$  y se procede normalmente. Si el signo del término que se encuentra encima de  $\varepsilon$  es igual al signo del término que se encuentra debajo de  $\varepsilon$ , significa que hay un par de raíces imaginarias. Si por el otro lado, dichos signos son opuestos, quiere decir que hay un cambio de signo. Por ejemplo:

$$p(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 \quad (51)$$

El arreglo de Routh es entonces:

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 2 & 11 \\ s^4 & 2 & 4 & 10 \\ s^3 & \varepsilon & 6 & 0 \\ s^2 & c_1 & 10 & 0 \\ s^1 & d_1 & 0 & \\ s^0 & 10 & 0 & \end{array} \quad (52)$$

En donde,

$$c_1 = (4\varepsilon - 12)/\varepsilon = (-12)/\varepsilon \quad (53)$$

$$d_1 = (6c_1 - 10\varepsilon)/c_1 \rightarrow 6 \quad (54)$$

Luego, el signo del término que esta encima de  $\varepsilon$  es opuesto al que está debajo de  $\varepsilon$ , lo cual quiere decir que hay dos raíces en el semiplano derecho, haciendo el sistema inestable.

- Si todos los términos de cualquier renglón son cero:

Esto quiere decir que para el polinomio existen raíces con magnitudes iguales pero con signos opuestos y/o dos raíces imaginarias conjugadas. En este caso, se procede con el resto de la evaluación del arreglo mediante la formación de un polinomio auxiliar con los términos del último renglón y empleando los coeficientes de la derivada de dicho polinomio en el siguiente renglón. Las raíces con magnitudes iguales y signos opuestos se encuentran despejando el polinomio auxiliar el cual siempre es par. Para ilustrar lo anterior, se tiene:

$$q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + 8 \quad (55)$$

Donde el arreglo de Routh es:

$$\begin{array}{r} s^3 \quad 1 \quad 4 \\ s^2 \quad 2 \quad 8 \\ s^1 \quad 0 \quad 0 \end{array} \quad (56)$$

Nótese que los términos del renglón  $s^1$  son cero. Luego el polinomio auxiliar se obtiene a partir de los coeficientes del renglón  $s^2$ :

$$p(s) = 2s^2 + 8s^0$$

y

$$dp(s)/ds = 4s$$

Luego, el arreglo de Routh modificado queda:

$$\begin{array}{r} s^3 \quad 1 \quad 4 \\ s^2 \quad 2 \quad 8 \\ s^1 \quad 4 \quad 0 \\ s^0 \quad 8 \end{array} \quad (57)$$

No se presenta cambio de signo. Ahora resolviendo  $p(s) = 0$ :

$$0 = 2s^2 + 8s^0 = 2(s^2 + 4) = 2(s + j2)(s - j2) \quad (58)$$

Debido a estas raíces sobre el eje  $js$ , el sistema presenta una oscilación.

- Raíces repetidas del polinomio en el eje  $jw$ .

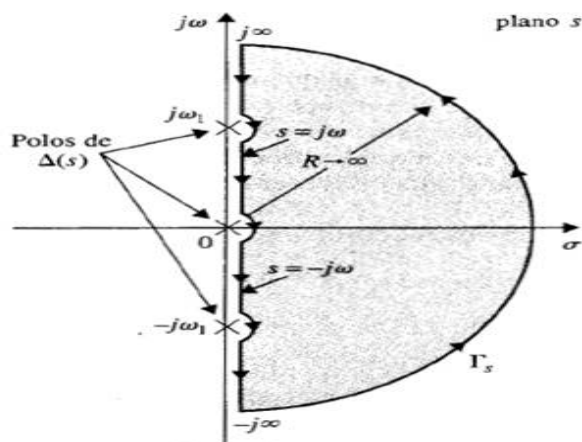
Si las raíces que se presentan sobre el eje  $jw$  son sencillas, el sistema presenta una forma sinusoidal subamortiguada, y se considera que el sistema no es estable ni inestable, sino que es marginalmente estable. Si por el contrario las raíces sobre el eje  $jw$  están repetidas la respuesta del sistema será inestable.

La desventaja más notoria del criterio de estabilidad de Routh al aplicarlo a sistemas de control, es que no sugiere cómo mejorar la estabilidad ni tampoco cómo estabilizar un sistema inestable. A pesar de esto, es posible determinar los efectos que tienen uno o dos parámetros del sistema examinando los distintos valores que producen inestabilidad.

### 7.3.2 Criterio de Estabilidad de Nyquist

La trayectoria de Nyquist se define para rodear al semiplano derecho del plano  $s$ , como se muestra en la siguiente Figura 39:

Figura 39: Trayectoria de Estabilidad de Nyquist



Debido a que la trayectoria no debe pasar por ningún cero o polo de  $\Delta(s)$  se presentan unos pequeños semicírculos que rodean a los polos a lo largo del eje  $jw$ . Esto con el fin de indicar que la trayectoria debe encerrar estos polos y ceros si se encuentran sobre el eje  $jw$ . Cabe notar que si cualquier polo cae en el semiplano derecho del plano  $s$ , éste será encerrado por la trayectoria de Nyquist  $\Gamma_s$ .

Criterio de Nyquist y la trayectoria de  $L(s)$  o  $G(s)H(s)$

Para investigar la estabilidad de un sistema en lazo cerrado, se debe graficar el lugar geométrico de  $\Delta(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + L(s)$  cuando  $s$  toma valores a lo largo de la trayectoria de Nyquist, y se determina el comportamiento de la traza  $\Delta(s)$  con respecto al punto crítico (origen del plano  $\Delta(s)$ ). Sin embargo, debido a que  $L(s)$  es conocida, puede ser más simple construir la trayectoria de  $L(s)$  que corresponda a la traza de Nyquist, y se puede llegar a la misma conclusión de estabilidad en lazo cerrado si se observa el comportamiento de  $L(s)$  con respecto al punto  $(-1, j0)$  en el plano  $L(s)$ . Lo anterior se debe a que el origen del plano  $\Delta(s)$  corresponde al punto  $(-1, j0)$  en el plano  $L(s)$ . Por tanto éste punto se convierte en el punto crítico para determinar la estabilidad en lazo cerrado del sistema. Luego, si se tiene un sistema de control cuya ecuación característica corresponde a igualar  $1 + L(s)$  a cero, donde  $L(s) = G(s)H(s)$ , la aplicación del criterio de Nyquist para determinar la estabilidad involucra los siguientes tres pasos:

1. Se define la trayectoria de Nyquist  $\Gamma_s$ .
2. Se construye la traza de  $L(s)$  que corresponde a la trayectoria de Nyquist.
3. Note el número de encierros  $N$  del punto crítico  $(-1, j0)$  hechos por la traza  $L(s)$ .
4. El criterio de Nyquist se obtiene de:  $N = Z - P$

Donde:

$N$  = número de encierros del punto crítico  $(-1, j0)$  hechos por la traza  $L(s)$ .

$Z$  = número de ceros de  $1 + L(s)$  que se encuentran dentro de la trayectoria de Nyquist.

$P$  = número de polos de  $1 + L(s)$  que se encuentran dentro de la trayectoria de Nyquist.

La estabilidad se interpreta en términos de  $Z$  y  $P$ :

- Para la estabilidad en lazo cerrado,  $Z=0$ .
- Para la estabilidad en lazo abierto,  $P=0$ .

Esto quiere decir que, la condición de estabilidad está dada por:

$$N = -P$$

Luego:

Para que un sistema sea estable en lazo cerrado, la traza  $L(s)$  debe encerrar el punto crítico  $(-1, j0)$  un número de veces  $N$  igual al número de polos  $P$  de  $L(s)$  que se encuentran en el semiplano derecho, y dichos encierros (en caso de presentarse) deben

ser realizados en dirección SMR (Sentido de las Manecillas del Reloj) si  $\Gamma_s$  está definida en SCMR (Sentido Contrario a las Manecillas del Reloj).

Criterio de Nyquist para sistemas con función de transferencia de fase mínima

Una función de transferencia de fase mínima tiene las siguientes propiedades:

- No posee polos ni ceros sobre el eje  $jw$  (incluyendo el origen) o en el semiplano derecho.
- Para  $L(s)$  con  $n$  polos y  $m$  ceros, cuando  $s=jw$  (excluyendo los polos en  $s=0$ ) y  $w$  varía de  $\infty$  a  $0$ , la variación de fase de  $L(jw)$  es  $(n - m)\pi/2$  [rad].
- Su valor no puede ser cero o infinito ni en cualquier frecuencia finita distinta de cero.
- Cuando  $w$  varía de  $\alpha$  a  $0$  la función tendrá un corrimiento de fase más positivo. Por el contrario cuando  $w$  varía de  $0$  a  $\infty$  tendrá una fase más negativa

Debido a que  $L(s)$  es de fase mínima, no posee polos o ceros sobre el semiplano derecho o sobre el eje  $jw$ , excepto en  $s=0$ ,  $P=0$ . Luego, el criterio de Nyquist se simplifica a:  $N=0$

Luego, un sistema en lazo cerrado con  $L(s)$  de fase mínima es estable en lazo cerrado si la traza de  $L(s)$  que corresponde a la trayectoria de Nyquist no encierra al punto crítico  $(-1, j0)$ . Si dicho punto está encerrado por la traza de Nyquist, entonces el sistema es inestable.

## 7.4 CASO DE ESTUDIO: ANÁLISIS DE LA RESPUESTA EN EL ESTADO DE TIEMPO Y FRECUENCIA PARA UN SISTEMA MASA-RESORTE-AMORTIGUADOR (ACELERÓMETRO)

El acelerómetro es un detector de vibración, choque y de medición de movimiento absoluto en general muy importante para éste tipo de medición. Existen diferentes tipos de éste para condiciones de uso requeridas. Las características que lo identifican son<sup>51</sup>:

- La respuesta en frecuencia es cero a un valor alto limitante. Se puede medir aceleraciones constantes, excepto en el acelerómetro piezoeléctrico.

<sup>51</sup>BENTLEY, Jhon P. Sistemas de Medición: Principios y Aplicaciones. 2da ed. CECSA, 1999.

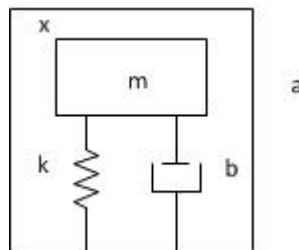
- Con integración eléctrica se obtiene el desplazamiento y la velocidad, que es preferible en lugar de la diferenciación.
- Es mas fácil realizar medición en presencia de movimientos transitorios (choques) con respecto a los detectores de velocidad o desplazamiento.
- Las fuerzas destructivas generalmente se relacionan con la aceleración que con la velocidad o desplazamiento

El modelo más simple que representa físicamente un acelerómetro se muestra en la figura 40, la cual hace notar el principio de operación: se supone la aceleración  $\ddot{x}_i$  a medir como constante. La masa en estado permanente permanecerá en reposo con respecto a la cubierta, lo que significa que la aceleración absoluta será  $\ddot{x}_i$ ; debe existir una fuerza que acelere la masa  $m$ , y si  $m$  no está en movimiento con respecto a la cubierta, la fuerza solo puede provenir del resorte; conociendo que la fuerza es proporcional a la deflexión  $x_o$  del resorte, y por ende proporcional a la aceleración,  $x_o$  puede considerarse una medida de la aceleración  $\ddot{x}_i$ . Por lo anterior la medición de la aceleración absoluta se convierte en la medición de la fuerza que se requiere para mover una masa de comprobación, que puede conllevar a errores debido a la fuerza inercial de ésta última.

Existe un extensa gama de tipos de acelerómetros como lo es el acelerómetro tipo deflexión, de balanceo nulo (servo), para navegación inercial, entre otros.

En este caso se analizara un servo acelerómetro que se presenta en la figura 41, el cual utiliza el método de retroalimentación negativa de alta ganancia con el objetivo de realizar una compensación dinámica y de esa manera reducir el error dinámico que se puede presentar<sup>52</sup>.

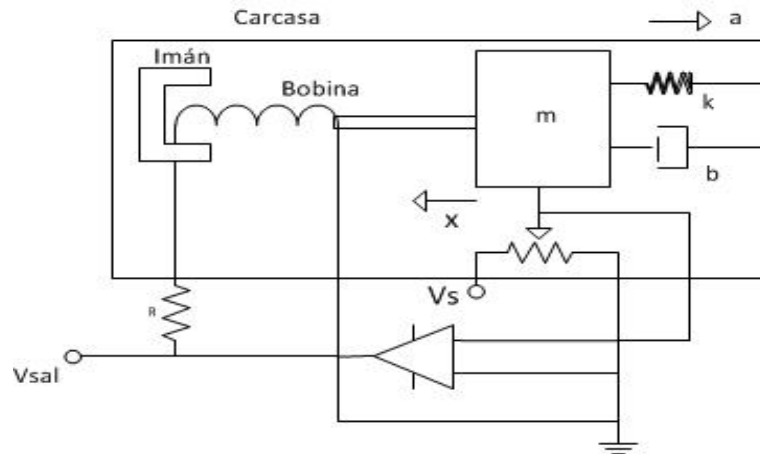
Figura 40: Modelo Básico del Acelerómetro



Fuente: *System Level Simulation of Servo Accelerometer in Simulink*, D. P. Kumar, K. Pal.

<sup>52</sup>BENTLEY, Op.cit., p.80.

Figura 41: Diagrama Esquemático de un Acelerómetro de Circuito Cerrado



Debido a su base estructural se parte de la ecuación de movimiento para la masa:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -ma \quad (59)$$

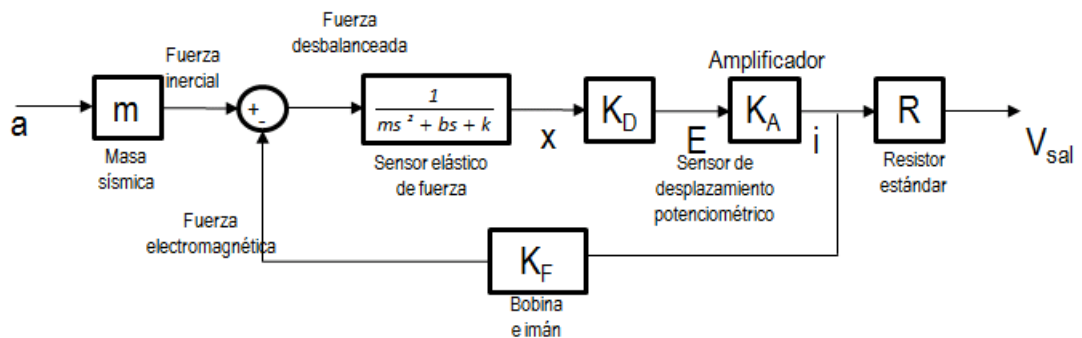
Donde b es el coeficiente de amortiguamiento y k la constante del resorte, que con su respectivo tratamiento algebraico, con condiciones iniciales iguales a cero la ecuación de transferencia es:

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \quad (60)$$

Como se menciona, a diferencia de los otros tipos de acelerómetro en éste se presenta la retroalimentación; que hace que una corriente debida a la salida de un transductor de desplazamiento, obligue a la masa a permanecer estacionaria con respecto a la estructura.

El diagrama de bloques que representa este sistema se muestra en la figura 42.

Figura 42: Bloque de un Acelerómetro de Circuito Cerrado



Fuente. BENTLEY, Jhon P. *Sistemas de Medición. Principios y Aplicaciones*. 2 ed. CECSA. 1999. p. 82.

El cual genera una ecuación de transferencia:

$$\frac{\Delta V(s)}{\Delta a(s)} = \frac{mR}{K_F} \frac{1}{\left(\frac{k}{(K_A K_D K_F)} \frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{k}{(K_A K_D K_F)} s + \left(1 + \frac{k}{(K_A K_D K_F)}\right)\right)} \quad (61)$$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , frecuencia natural no amortiguada.

$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$ , razón de amortiguamiento.

Por último para el análisis del modelo matemático por el método de espacio de estados, las variables de estado pueden ser definidas por:

$$X_1 = x$$

$$X_2 = \dot{x}$$

Estableciendo la ecuación de estado y salida:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/b & -b/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} [f(t)] \quad (62)$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + [D] \quad (63)$$

Donde  $f(t)$  representa la función de la señal de entrada del sistema.

La solución a esta ecuación consiste de una respuesta transitoria que depende de unas condiciones iniciales específicas, y de una respuesta en estado estable, que es independiente de las condiciones iniciales. Se debe tener en cuenta para la respuesta en estado estable, dos parámetros de rendimiento importantes:

- Aceleración mínima detectable: Sea la aceleración aplicada constante. La respuesta en estado estable es entonces  $x = a/\omega_n^2$ . En otras palabras, el estiramiento o compresión neta del resorte en estado estable es directamente proporcional a la aceleración aplicada. Suponga que la deflexión mínima medible del resorte es  $x_{min}$ , luego la aceleración mínima detectable del acelerómetro está dada por la ecuación 64.

$$a_m [in] = x_m [in] \omega_n^2 \quad (64)$$

- Ancho de banda. Sea la aceleración aplicada una sinusoidal con frecuencia circular  $\omega$ , esto es,  $a = a_0 \cos(\omega t)$ . La deflexión del resorte en estado estable es de la forma  $x = x_0 \cos(\omega t + \phi)$ . La magnitud de deflexión  $x_0$  está relacionada con la magnitud de la aceleración aplicada  $a_0$  por:

$$x_0(\omega) = \left(\frac{a_0}{\omega}\right) * \frac{1}{\sqrt{[(\omega/\omega_n)^2 - 1]^2 + 4\zeta^2 (\omega/\omega_n)^2}} \quad (65)$$

Como se indica por la notación,  $x_0$  depende de la frecuencia de conducción,  $\omega$ . En particular,  $x_0$  se torna más pequeña cuando  $\omega$  es lo suficientemente grande, y el acelerómetro dejará de ser útil para las aceleraciones a tal frecuencia. En la práctica, el ancho de banda dentro del cual el acelerómetro es útil está dado por la frecuencia de corte  $\omega_c$ . Esta frecuencia es definida por la ecuación  $\frac{x_0(\omega_c)}{x_0(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , y está dada por:

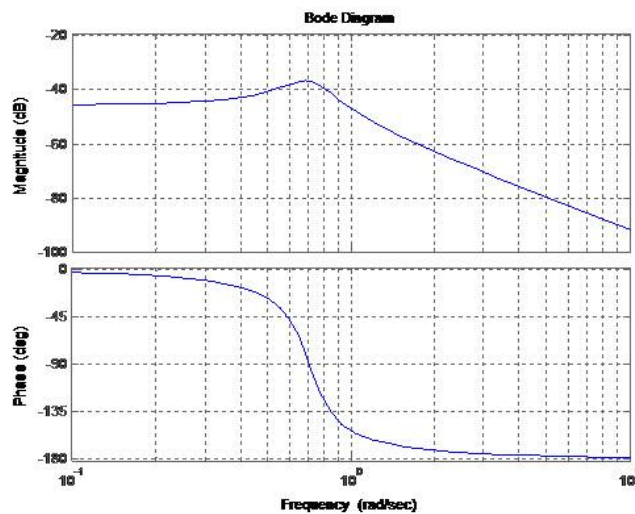
$$\omega_c = \gamma \omega_n \quad (66)$$

Donde

$$\gamma = \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{(1 - 2\zeta^2)^2 + 1}} \quad (67)$$

La gráfica 43 me muestra el diagrama de bode para el anterior acelerómetro:

Figura 43: Diagrama de Bode para un Modelo Simple de Acelerómetro



Utilizando el comando bandwidth de Matlab, el cual presenta un ancho de banda de 0 hasta una frecuencia de 0.8627 rad/seg.

# 8. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA EN LA INGENIERÍA DE DISEÑO DE EXPERIMENTOS.

## 8.1 INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA

Para iniciar el estudio de los métodos estadísticos es necesario tener en cuenta que la estadística es la ciencia que se encarga de recolectar, organizar, resumir y analizar datos para después obtener conclusiones a partir de ellos<sup>53</sup>.

El papel de la estadística en la ciencia y la ingeniería es crucial debido a su aplicación en los procesos industriales, fundamentalmente porque al analizar datos recopilados en experimentos de cualquier tipo, se observa que dichos datos están sujetos a algún tipo de incertidumbre. El investigador o el profesional debe tomar decisiones respecto de su objeto de análisis basándose en el procesamiento adecuado de datos, para lo cual debe dotarse de herramientas adecuadas como los métodos estadísticos.

Los métodos estadísticos permiten que los científicos e ingenieros diseñen experimentos válidos y obtengan conclusiones confiables a partir de ellos, facilitando el manejo de grandes cantidades de información. La utilidad de esta información dependerá en gran parte del objetivo de la investigación y de la forma como se obtengan los datos; teniendo siempre presente que todo proceso esta sujeto a la variabilidad como resultado de cambios inherentes al sistema de medición.

### 8.1.1 Historia y Evolución

La estadística ha estado presente desde tiempos históricos, aun sin ser considerada como una ciencia era parte de la vida cotidiana de las personas, relacionadas con la actividad mercantil, industrial, artística, arquitectónica, intelectual y científica durante la etapa conocida como el renacimiento ( Siglo XV).

En esta época surge una nueva relación del hombre con la naturaleza, que va unida a una concepción ideal y realista de la ciencia. Con el avance en las matemáticas y la filosofía, se empieza a dar una explicación coherente a muchos fenómenos que no seguían un patrón determinístico, sino aleatorio. Es el caso de todos los fenómenos relativos a la probabilidad de los sucesos, concretados en este tiempo fundamentalmente en los juegos de azar.

---

<sup>53</sup>RINCÓN, Luis. Una Introducción a la Probabilidad y Estadística. México D.F.: Facultad de Ciencias UNAM, 2006.

En este periodo empiezan a surgir más inquietudes entorno a contabilizar el número de posibles resultados de un dado lanzado varias veces, o problemas más prácticos sobre cómo repartir las ganancias de los jugadores cuando el juego se interrumpe antes de finalizar. Estas inquietudes surgieron más como intentos de resolver problemas cotidianos con el fin de ser justos en las apuestas y repartos o incluso de conocer las respuestas para obtener ventajas y en consecuencia mayores ganancias respecto a otros jugadores y no por inquietudes matemáticas. De hecho la idea de modelizar el azar mediante las matemáticas aún no estaba plenamente presente en los intelectuales de la época.

El problema más importante relativo a los juegos de azar era el conocido como “problema del reparto de apuestas” que distribuía las ganancias entre jugadores cuando la partida se interrumpía antes de finalizar. Fue Girolamo Cardano(1501-1576)<sup>54</sup> quien escribió la primera obra importante relacionada con el cálculo de probabilidades en los juegos de azar en 1565 y se llamaba “Libro de los juegos de azar”.

Entre los precursores de la probabilidad se destacó un hombre mas conocido en otros campos de las matemáticas y la física como fue Galileo Galilei, que durante su vida también resolvió problemas sobre dados, hasta tal punto que escribió un libro llamado “Sobre la puntuación en tiradas de dados”. Sin embargo, el mayor aporte de Galileo a los inicios de la probabilidad fue la invención de su teoría de la medida de errores. Clasificó los errores en dos tipos: “sistemáticos” y “aleatorios”, clasificación que se mantiene aún en la actualidad y estableció cuidadosamente las propiedades de los errores aleatorios. Con esto contribuyó sin saberlo a la creación de ramas fundamentales de la estadística y posteriormente a la probabilidad.

En 1665, Pascal publica un tratado sobre el triángulo aritmético, la más importante contribución realizada hasta la fecha en el ámbito de la combinatoria. El libro se basa en la construcción y propiedades combinatorias del posteriormente llamado triángulo de Pascal. Los aportes de Pascal se extienden a muchos campos como la filosofía e incluso a la teología, intentando argumentar la existencia de Dios en términos probabilísticos y gananciales: “Probabilísticamente es mejor creer que no creer, es decir, es mejor actuar como si existiera, por si acaso existe”.

**8.1.1.1 Primeras definiciones y teoremas básicos.** El primero en dar la definición clásica de probabilidad fue Jacob Bernoulli, matemático suizo que trabajó en la universidad de Basilea en 1687, en su obra “Ars coniectandi (El arte de la conjetura)” se encuentra la importante proposición conocida como el Teorema de Bernoulli mediante el cual la teoría de la probabilidad fue usada en la solución de problemas no particulares

---

<sup>54</sup>SALINERO, Pablo. Historia de la teoría de la probabilidad. UAM. p.

sino generales. Bernoulli siempre detacó la importancia de que los fenómenos aleatorios dejaran de enfocarse como casos particulares y se intentara ver los conceptos generales que había detrás de ellos, sólo así se avanzaría y profundizaría en el entendimiento de esta materia.

Otro de los descubrimientos importantes de Bernoulli fue el saber obtener la probabilidad de ocurrencia de un suceso sin necesidad de contar los casos favorables. Para ello, inventó la probabilidad a posteriori, es decir: mediante la observación múltiple de los resultados de pruebas similares; de esta manera, introdujo el concepto de probabilidad estadística: asignar como probabilidad de un suceso el resultado que se obtendría si el proceso se repitiera en condiciones similares un número grande de veces.

Sin embargo, estas condiciones no eran muy concretas y con ellas no se podía dar lugar a una definición seria y rigurosa de todos los conceptos que manejaba Bernoulli. Se hablaba de un número grande de veces, pero no se da ninguna indicación sobre cuál es ese número o lo suficientemente grande que debe ser, no se especifica tampoco qué significa condiciones similares y tampoco se establece cuál es el error admitido respecto al resultado teórico.

Fundamentalmente, Laplace fusiono las dos disciplinas más importantes dentro de la teoría de la probabilidad: el cálculo de probabilidades y la estadística, de manera que el cálculo de probabilidades se convirtió en el soporte matemático de la estadística. Toda la base matemática que permitió desarrollar la teoría de probabilidades está extraída del análisis combinatorio, una disciplina iniciada por Leibniz y Jacob Bernoulli. Posteriormente con el paso del tiempo fue introduciendo la teoría de límites disminuyendo el peso que tenía el análisis combinatorio.

Esta fue sólo la primera de las modernizaciones que sufriría la probabilidad en el siglo XIX. Otra de las más importantes fue la que llevó a cabo el matemático alemán Karl Friedrich Gauss, que desarrolló la teoría de errores conjuntamente con Bessel y Laplace llegando a establecer el método de mínimos cuadrados como el procedimiento más elemental para resolver los problemas de la teoría de errores. Gauss y Laplace, independientemente aplicaron conceptos probabilísticos al análisis de los errores de medida de las observaciones físicas y astronómicas. De hecho, científicos consagrados de la época como Maxwell, Boltzmann y Gibbs aplicaron la probabilidad en su obra "Mecánica Estadística". La teoría de los errores se constituyo como la primera rama de la estadística que puede considerarse como una estructuración teórico-matemática.

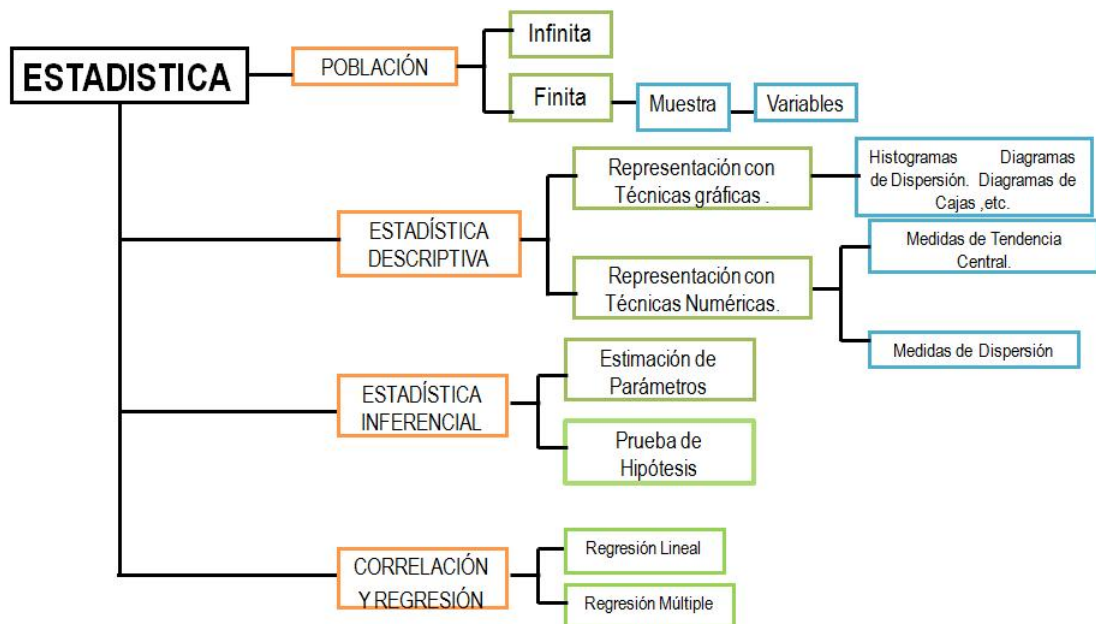
Otras contribuciones importantes a la teoría de errores fueron las de Simeon Denis Poisson que descubrió que "la media aritmética no es siempre mejor que una única observación". El francés Poisson hizo aportes destacados a la teoría de la probabilidad,

como la distribución que lleva su nombre, también introdujo el concepto de variable aleatoria, no como lo entendemos actualmente, sino trazando sus primeros pasos como un conjunto de  $b_1, b_2, \dots, b_n$  cada uno con su probabilidad  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Posteriormente, Chebyshev asumió que esos conjuntos de los que hablaba Poisson eran independientes e introdujo el término variable aleatoria que aún tiene validez en la actualidad; pero fue A.Liapunov quien especificó que estas variables no serían siempre independientes y que esa dependencia estaba sujeta a ciertas condiciones, dando una definición de distribución casi exacta a la actual.

### 8.1.2 Clasificación de La Estadística

En el campo de la estadística se pueden distinguir dos ramas: la Estadística Descriptiva y la Estadística Inferencial (inductiva), como se observa en la figura 44 el muestreo también hace parte de dicha clasificación como método usado para la recopilación de datos.

Figura 44: División de La Estadística



**Estadística descriptiva:** Esta trata esencialmente de los métodos para resumir y organizar datos, tiene como objetivo fundamental la descripción numérica y gráfica de un conjunto de datos; comprende las fases de recolección, clasificación, análisis, elaboración y presentación de datos.

**Estadística inferencial o estadística inductiva:** Desarrolla modelos teóricos que se ajusten a la realidad con cierto grado de confianza. Tienen como objetivo sacar

conclusiones y hacer afirmaciones validas acerca de una población o proceso con base en la información contenida en una muestra, estas afirmaciones permiten tomar decisiones, mediante y validar resultados.

### 8.1.2.1 Muestreo Estadístico

La población y la muestra son conceptos fundamentales al iniciar una investigación, ya que toda investigación tiene generalmente una colección de datos que caracterizan un fenómeno y están bien definidos que forman una población, y la muestra es simplemente un subconjunto representativo seleccionado aleatoriamente de un población, en la figura 45 podemos ver una gráfica de la relación existente entre las dos, y la inferencia estadística pretende dados unos datos sujetos a incertidumbre (muestra), obtener el conocimiento de los parámetros, la inferencia utiliza un razonamiento de tipo inductivo<sup>55</sup>.

Figura 45: Relación entre Población Y Muestra



El muestreo es de vital importancia en la estadística y existen diferentes tipos de muestreo como<sup>56</sup>:

- Muestreo Aleatorio Simple
- Muestreo de Conveniencia
- Muestreo Ponderado
- Muestreo Aleatorio Estratificado
- Muestreo Agrupado

<sup>55</sup>GUTIERREZ, P. Análisis Y Diseño De Experimentos. 2da Ed. Mc Graw Hill, México, 2008.

<sup>56</sup>NAVIDI. W. Estadística Para Ingenieros Y Científicos. Edit. Mc Graw Hill, México, 2006.

**Muestreo Aleatorio Simple(SRS):** Es el mas usado, donde la muestra se elige por un método donde cada colección de  $n$  elementos de la población tienen la misma probabilidad de formar la muestra, como en una lotería.

**Muestreo de Conveniencia:** Cuando es difícil extraer una muestra aleatoria se suele usar este método, y el investigador es el que elige la muestra usando un método que el considere, tomando algún patrón conveniente, este tipo de muestras podrían diferir sistemáticamente de la población en alguna forma.

**Muestreo Ponderado:** Cuando a algunos elementos se les da mayor oportunidad que a los otros para ser seleccionados.

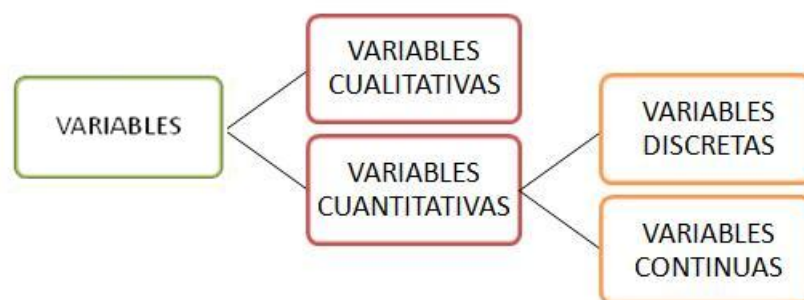
**Muestreo Aleatorio Estratificado:** La población se divide en subpoblaciones llamados estratos y se extrae una muestra aleatoria simple de cada uno de los estratos.

**Muestreo agrupado:** Los elementos se extraen de una población en grupos, útil cuando la población es demasiado grande.

### 8.1.2.2 Tipos de Datos

Los datos en una muestra, generalmente tienden a ser variables y en la investigación estadística se ven dos tipos de variables las cuales se observan en la figura 46.

Figura 46: Tipos de Variables



Las variables cualitativas comprenden las observaciones que solo pueden clasificarse en categorías no numéricas, como grupo sanguíneo, tipo de estudios, entre otras. De estas solo se pueden hacer representaciones gráficas que den una idea de la variable en estudio, hay varias formas de representar como los diagramas de rectángulos o de sectores.

Las variables cuantitativas son las que toman valores numéricos como altura, tiempo, etc. Se dividen en variables discretas y variables continuas; las variables discretas toman una cantidad finita o número de valores, y la variable continua pueden tomar cualquier

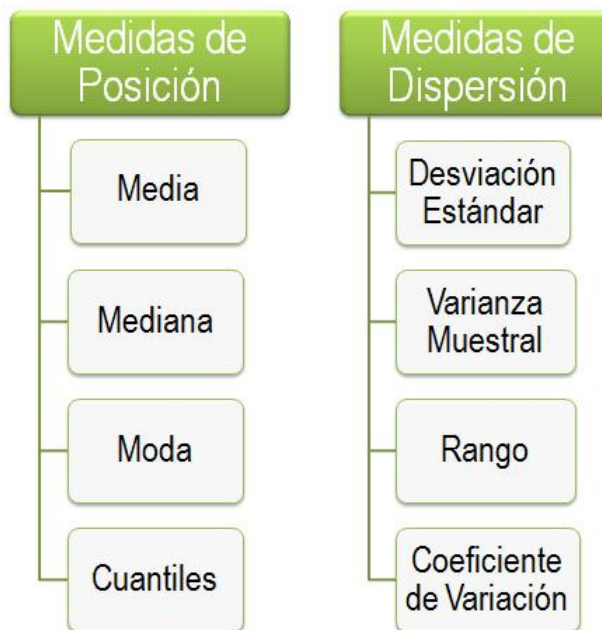
valor en un intervalo acotado o no. En general las magnitudes relacionadas con el tiempo (edad, duración de un fenómeno), la masa (volumen, peso), espacio (longitud, superficie) o combinaciones de estas son variables continuas.

## 8.2 MEDIDAS DE DISTRIBUCIÓN

Son una descripción numérica que permiten conocer algunas características de los datos. Consiste en sacar ciertos valores que representan los aspectos más destacables de una distribución y facilitan su estudio.

En la figura 47 se observan los diferentes tipos de medidas de distribución.

Figura 47: Medidas de Distribución



### 8.2.1 Medidas de posición o tendencia central

También llamadas de centralización o de “Tendencia Central” permite al investigador conocer los valores centrales de una distribución en una muestra. Las principales medidas son:

- Media
- Mediana

- Moda
- Cuantiles

### 8.2.1.1 Media

Se emplea frecuentemente en distribuciones simétricas y es el valor que representa menos fluctuaciones al variar los datos de una muestra. Es especialmente útil cuando se van a hallar posteriormente otros valores estadísticos como desviaciones. Se divide en media aritmética simple y media poblacional como se ve en la tabla 10.

Tabla 10: Media

Media Muestral	Media Poblacional
$X = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$	$\mu = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}$

**La media aritmética simple:** También llamada “media aritmética” ,o, “promedio”. Es la suma de todos los elementos de la serie dividido por el número de ellos y se calcula según la ecuación 68, ya que casi siempre se considera a los datos como una muestra, la media aritmética se conoce como **media muestral**.

$$X = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots x_i + \dots x_n}{n} \quad (68)$$

Donde:

$X$  =Media aritmética de la variable X

$x_i$  =Valor de la Variable X

$n$  =Número de observaciones

**La media poblacional  $\mu$ :** Valor promedio de todas las observaciones de una población. Cuando existe un número finito de observaciones  $N$  en la población, la media poblacional se da como se ve en la ecuación 69:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (69)$$

Donde:

$\mu$  =Media Poblacional

$x_i$  = Valor de la Variable X

$N$  = Número de observaciones de la población

La media de la población también se denomina valor esperado de  $x$  o esperanza matemática de  $x$  que a menudo se representa como  $E(x)$ .

Los datos en estadística generalmente están agrupados en clases o intervalos, y es necesario que conocer las propiedades de la media aritmética que facilitara el cálculo de la media para datos agrupados en el apéndice III se ven estas propiedades<sup>57</sup>.

### 8.2.1.2 Mediana

Al igual que la media, representa una medida de la tendencia central de los datos, donde la muestra se divide en dos partes iguales. Es preferida cuando la distribución de los datos es asimétrica, y cuando los valores extremos están alejados y distorsionarían los valores de la media<sup>58</sup>. Del mismo modo que existe un valor medio de la muestra  $\bar{x}$ , existe un valor medio de la población  $\bar{\mu}$ .

La mediana de una distribución es un valor de la variable aleatoria tal que hay una probabilidad de 0.5 de que el valor observado de  $x$  sea menor que o igual a la mediana, y hay una probabilidad de 0.5 de que el valor observado de  $x$  sea mayor que o igual a la mediana<sup>59</sup>.

Dados  $n$  números ordenados del mas pequeño al más grande:

- Si  $n$  es impar, la mediana muestral es el número en la posición  $\frac{n+1}{2}$ :

$$\bar{x} = x_{(\frac{n+1}{2})} \quad (70)$$

- Si  $n$  es par, la mediana muestral es el promedio de los número en las posiciones:  $\frac{n}{2}$  y  $\frac{n}{2} + 1$ .

$$\bar{x} = \frac{x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} \quad (71)$$

### 8.2.1.3 Moda:

Es el valor que tiene más frecuencia en una muestra, si algunos valores tienen frecuencia igual cada uno representa una moda. Puede servir para estimar de una manera rápida y

<sup>57</sup>MENDENHALL, William. y SINCICH, Terry. Statistics for Engineering and the Sciences. 5 ed. New York, USA.: Pearson Prentice-Hall, Inc, 2007.

<sup>58</sup>NAVIDI.. Op. cit., p.20.

<sup>59</sup>HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. Probabilidad y Estadística para Ingeniería. 4 ed. México.: Cecsca, 2006.

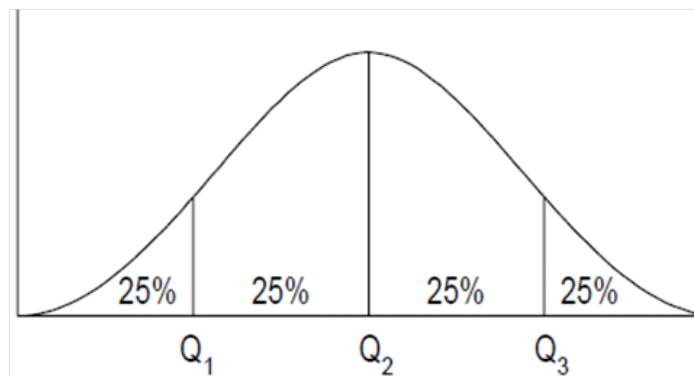
poco precisa la tendencia de una muestra. A partir de esto se pueden encontrar grupos de datos con una moda conocidos como (unimodales), y con dos modas conocidos como (bimodales).

#### 8.2.1.4 Cuantiles:

Son medidas de dispersión pero no necesariamente ligados al centro de los datos. La mediana divide los datos en dos partes iguales, pero también es posible dividirlos en más de dos partes. Estas medidas son también llamadas cuantiles, cuantiles o fractiles y cuyo objetivo es describir el comportamiento de una variable dividiendo la serie de valores en diferente número de partes porcentualmente iguales, las más usadas son:

- Los cuartiles (cuartas partes): Son aquellos números que dividen las series en cuatro partes porcentualmente iguales como lo muestra la figura 48.

Figura 48: Cuantiles



- Los deciles (décimas partes): Son ciertos números que dividen el conjunto de observaciones (ordenadas) en diez partes porcentualmente iguales. Los deciles se denotan por  $D_1, D_2, \dots, D_9$ . El decil 5 corresponde al cuartil 2 (mediana)
- Los centiles o percentiles (centésimas partes): Son ciertos números que dividen el conjunto de datos ordenados en cien partes porcentualmente iguales. El percentil 50 equivale a la mediana.

### 8.2.2 Medidas de Dispersión

En las medidas de dispersión se tienen:

- La desviación estándar

- La varianza muestral
- El rango.
- Coeficiente de Variación

### 8.2.2.1 Desviación Estándar:

Mide el grado de dispersión de una muestra. La idea básica es que cuando la dispersión es grande, los valores de la muestra tenderán a alejarse de su media, pero cuando la dispersión es pequeña, los valores tenderán a acercarse a su media. Las desviaciones grandes tanto positivas como negativas, son indicadores de la dispersión<sup>60</sup>. La desviación estándar muestral y poblacional esta dada por la tabla 11.

Tabla 11: Desviación Estándar

Desviación Estándar Muestral	Desviación Estándar Poblacional
$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x - X)^2}$	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x - \mu)^2}$

Donde

$s$  =Desviación estándar muestral

$\sigma$  =Desviación estándar poblacional

$x_i$  =Valores de la variable  $X$

$X$  =Media Aritmética muestral

$\mu$  =Media poblacional

$n$  =Tamaño de la muestra

$N$  =Tamaño de la población

### 8.2.2.2 Varianza Muestral:

Mide la variabilidad de los datos, entre mas grande la variabilidad mayor será la desviación. Esta definida como la media aritmética de los cuadrados de las diferencias entre los valores que toma la variable y su media aritmética, se representa por la ecuación 72.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - X)^2 \quad (72)$$

<sup>60</sup>NAVIDI. Op. cit., p.20.

Donde:

$s^2$  = Varianza

$x_i$  = Valor de la variable X

$\bar{X}$  = Media aritmética de los datos

$n$  = Número de datos

### 8.2.2.3 Varianza poblacional $\sigma^2$ :

Es análoga a la varianza muestral, es una medida de variabilidad en la población. Cuando la población es finita y está formada por N valores, la varianza poblacional puede definirse por la ecuación 73.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N} \quad (73)$$

### 8.2.2.4 El Rango, amplitud o recorrido:

Es la diferencia entre los valores más grandes ( $X_{m\acute{a}x}$ ) y los valores más pequeños ( $X_{m\acute{i}n}$ ) en una muestra, depende solamente de los dos valores extremos, un valor pequeño indica poca dispersión, puesto que la variable toma valores pequeños en un intervalo pequeño, un gran valor puede indicar alta dispersión.

$$R = X_{m\acute{a}x} - X_{m\acute{i}n} \quad (74)$$

Algunas veces, cuando el tamaño de la muestra está entre  $n \leq 10$ , la pérdida de información asociada con el rango no es muy grande.

### 8.2.2.5 Coeficiente de Variación:

Representa la variación como una fracción de la media. Es útil cuando se compara la variabilidad de dos o más conjuntos de datos que difieren de manera considerable en la magnitud de las observaciones está dado por la ecuación 75<sup>61</sup>.

$$cv = \frac{s}{\bar{X}} \quad (75)$$

Donde:

$cv$  = Coeficiente de Variación

---

<sup>61</sup>MONTGOMERY. Op. cit., p. 28.

$s$  = Desviación estándar

$\bar{X}$  = Media

### 8.3 ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

La estadística descriptiva se define como un conjunto sistemático de procedimientos para observar y describir numéricamente un fenómeno, y descubrir las leyes que regulan la aparición, transformación y desaparición del mismo, este incluye la representación gráfica de datos que es útil para revelar la estructura de los mismos, los cuales generalmente vendrán escritos en columnas de bases de datos, tablas, o registrados en un ordenador.

Cuando en la estadística descriptiva se va a estudiar un fenómeno determinado, se deben tener en cuenta dos factores fundamentales: La fiabilidad que se refiere a la obtención de las medias (frecuencias, medias) que permitan la mayor precisión posible, y la simplicidad del estudio realizado que se refiere a la elección de la muestra que sea manejable respecto a la magnitud sin perder la representatividad del colectivo.

El uso de la distribución de frecuencia permite a partir de una serie de datos obtener una información de ellos y presentarlos de manera mas ordenada, mediante una agrupación de los mismos. Las distribuciones de frecuencias se presentan mediante tablas estadísticas que permiten colocar los datos en forma lógica, el proceso para el análisis de datos obtenidos se ve en la figura 49.

Figura 49: Proceso con los Datos Obtenidos



### 8.3.1 Distribución de Frecuencias

Si una muestra es demasiado grande ( $n \gg 30$ ), es difícil observar las diversas características o calcular la media o la desviación estándar. Por eso es útil organizar y agrupar los datos originales en clases o categorías y determinar el número de individuos que pertenecen a cada clase, llamada frecuencia de clase. La agrupación resultante se denomina distribución de frecuencia o tabla de frecuencia<sup>62</sup>.

Para realizar una adecuada distribución de frecuencias es necesario conocer las diferentes frecuencias.

#### 8.3.1.1 Frecuencia Absoluta “ $f_i$ ”:

La frecuencia absoluta de un valor es el número de veces que se repite cada valor que toma la variable<sup>63</sup>.

Sea  $n$  el número total de datos y  $A_i$  una clase concreta de una variable estadística, la frecuencia absoluta de un valor de variables es el número de observaciones iguales a dicho valor, equivalentemente, el número de unidades de población que tiene ese valor de la variable.

$$0 \leq n_i \leq n \quad (76)$$

$$\sum n_i = n \quad (77)$$

#### 8.3.1.2 Frecuencia Relativa “ $f_r$ ”:

Valor de una fracción cuyo numerador es la frecuencia absoluta de una clase y cuyo denominador es el número de individuos de la población. Estará siempre comprendida entre 0 y 1.

$$f_r = \frac{f_i}{n} \quad (78)$$

Donde:

$f_i$  = frecuencia de cada clase

$n$  = número de individuos

---

<sup>62</sup>SPIEGEL, M y SCHILLER, J. Probabilidad y Estadística. 2da Ed, Mc Graw-Hill, Colombia. 2006.

<sup>63</sup>CASTILLO, I; GUIJARRO, M. Estadística Descriptiva y cálculo de la probabilidades. Pearson, España, 2006.

### 8.3.1.3 Frecuencia Porcentual “ $p_i$ ”:

Es la representación mediante porcentajes de la frecuencia relativa. Se calcula multiplicando por 100 la frecuencia relativa.

### 8.3.1.4 Frecuencia Absoluta Acumulada “ $f_a$ ”:

La frecuencia acumulada es la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado.

### 8.3.1.5 La Frecuencia Relativa Acumulada $f_{ra}$ :

Es la suma de las frecuencias relativas de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado.

#### Ejemplo 8.1

(Fuente: Montgomery. Probabilidad y estadística aplicada a la ingeniería. Ej-1.8 p. 14)  
En una empresa se toman los datos del número de ciclos transcurridos hasta que se presente la falla en una prueba de piezas de aluminio sujetas a un esfuerzo alternamente repetido de 21000 psi, a 18 ciclos por segundo.

Donde:

- $n$ : El tamaño de la muestra, es el número de observaciones.
- $x_i$ : La variable, es cada uno de los diferentes valores que se han observado.

Desarrollando el procedimiento para análisis de datos como lo dice la figura 49.

#### 1. Obtención de Datos:

Tabla 12: Valor de los Esfuerzos [psi]

1115	1567	1223	1782	1055	798	1016	2100	910	1501
1310	1883	375	1522	1764	1020	1102	1594	1730	1238
1540	1203	2265	1792	1330	865	1605	2023	1102	990
1502	1270	1910	1000	1608	2130	706	1315	1578	1468
1258	1015	1018	1820	1535	1421	2215	1269	758	1512
1315	845	1452	1940	1781	1109	785	1260	1416	1750
1085	1674	1890	1120	1750	1481	885	1888	1560	1642

## 2. Ordenar Datos:

Tabla 13: Datos de Esfuerzos Ordenados [psi]

375	885	1020	1120	1270	1452	1535	1608	1781	1910
706	910	1055	1203	1310	1468	1540	1642	1782	1940
758	990	1085	1223	1315	1481	1560	1674	1792	2023
785	1000	1102	1238	1315	1501	1567	1730	1820	2100
798	1015	1102	1258	1330	1502	1578	1750	1883	2130
845	1016	1109	1260	1416	1512	1594	1750	1888	2215
865	1018	1115	1269	1421	1522	1605	1764	1890	2265

## 3. Agrupar datos

- a) Intervalos de clase: Para construir una distribución de frecuencia, primero divide el rango de los datos en intervalos de clase. Las clases deben tener el mismo ancho con el fin de disminuir el error, el número de clases depende de el número de datos y de la dispersión.
- b) En la practica se suele hallar el número de clases aproximadamente igual a la raíz cuadrada del número de observaciones. Calculando:

$$N_{clase} = \sqrt{n} \quad (79)$$

Número de Observaciones. Para este caso  $n = 70$ .

$$N_{clase} = \sqrt{70} = 8,36$$

Entonces 9 o 10 clases darán una distribución de frecuencias satisfactoria. El rango es  $2265-375=1890$ , por tanto nueve clases , cada una con un ancho de

$$\frac{1890}{9} = 210$$

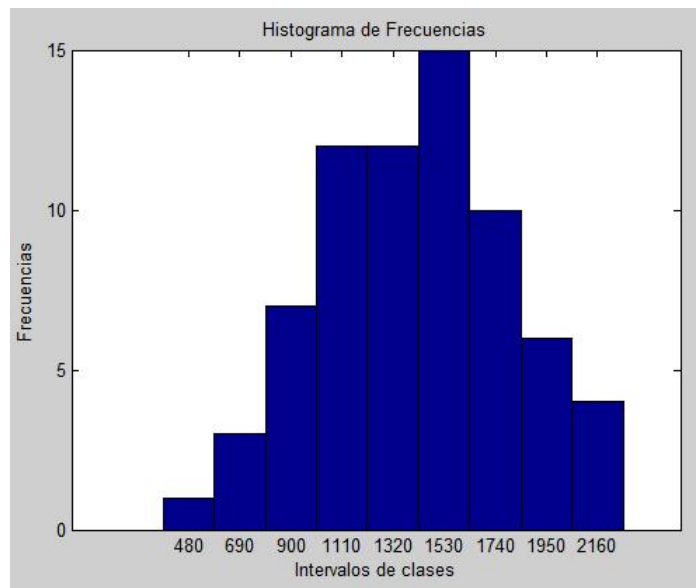
## 4. Presentación de las tablas estadísticas

Tabla 14: Distribución de Frecuencia

Intervalo de Clase	Conteo	Frecuencia $f_l$	Frecuencia Relativa $f_r$	Frecuencia Relativa Acumulada $f_{ra}$
$375 \leq x < 585$	I	1	0,014	0,014
$585 \leq x < 795$	III	3	0,042	0,056
$795 \leq x < 1005$	IIIIII	7	0,1	0,156
$1005 \leq x < 1215$	IIIIIIIIII	12	0,17	0,326
$1215 \leq x < 1425$	IIIIIIIIII	12	0,17	0,496
$1425 \leq x < 1635$	IIIIIIIIIII	15	0,21	0,706
$1635 \leq x < 1845$	IIIIIIII	10	0,14	0,846
$1845 \leq x < 2055$	IIIII	6	0,085	0,931
$2055 \leq x < 2265$	IIII	4	0,057	0,999

5. Representación grafica de la tabla estadística.

Figura 50: Histograma de Frecuencias



### 8.3.2 Series Estadísticas

Las series estadísticas generalmente se disponen en tablas estadísticas, que muestran la información de una forma ordenada y fácil de consultar. No todas las series estadísticas se ocupan de características de la misma índole; y se pueden considerar diferentes tipos de series que se describen en la siguiente tabla 15<sup>64</sup>.

<sup>64</sup>GARZO, F y GARCIA, F. Estadística. Mc Graw Hill, México, 1988.

Tabla 15: Tipos de Series Estadísticas

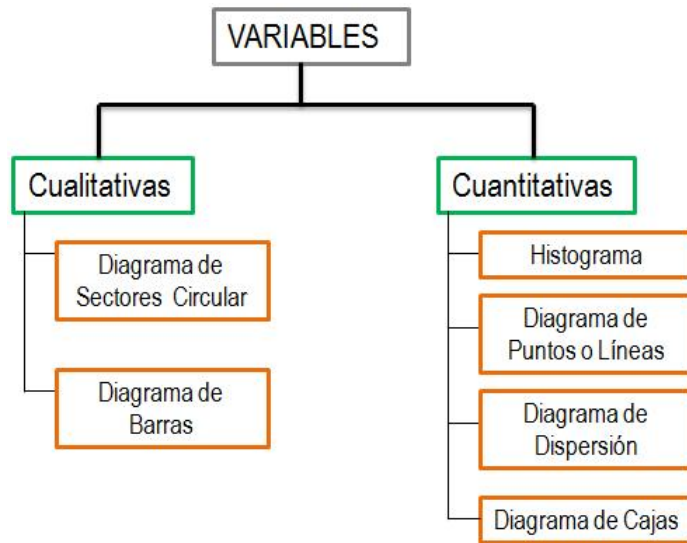
Tipos de Series Estadísticas	Características	Ejemplos
Series Simples	A cada dato del hecho estudiado se le asigna el valor extraído de la observación.	Número de habitantes de cada país de un continente.
Series Agrupadas	VARIABLES estadísticas continuas o discretas con un gran número de valores. Se agrupan por clase.	Estatura de los individuos de un muestra o población.
Series Cronológicas	Comportamiento de los hechos a lo largo del tiempo.	Variación de flujo en cierto tiempo.
Cuadros Estadísticos	Tablas estadísticas resultantes de agrupar varias series estadísticas.	Distribución de la estatura según la edad del colectivo de alumnos de una clase.

### 8.3.3 Representación Gráfica de los Datos.

Las gráficas son una forma rápida, directa y clara de representar las tablas estadísticas, son un medio auxiliar de la investigación estadística, útil para observar la variación y características de un fenómeno y facilita el análisis estadístico de las variables, en esta sección se presentan varios tipos de graficas para resumir y mostrar datos.

Hay diferentes tipos de gráficas usadas para representar el comportamiento de las variables ya sean cualitativas o cuantitativas como se observa en la figura51.

Figura 51: Representación Gráfica



### 8.3.3.1 Diagramas de Sectores Circulares:

Los diagramas de sectores permite observar los datos de una variable en forma global, haciendo una comparación inmediata del porcentaje o la frecuencia de cada una de sus categorías y su forma de representación es según gráfica 52.

Figura 52: Diagrama de Sectores



Características

- Interpretan el aporte de cada una de las categorías al total de la variable.
- Esta construido por un circulo subdividido en diferentes sectores, uno para cada tipo de valor de datos.
- La frecuencia relativa del valor de un datos está indicada por el área de su sector, siendo esta área igual al área total del círculo multiplicado por la frecuencia relativa del valor del dato.
- Utilizados para analizar proporciones.

### 8.3.3.2 Diagrama de Rectángulos o de Barras:

Consiste en representar la serie por unas barras o rectángulos cuya base es constante, la altura y la superficie es proporcional a la frecuencia absoluta correspondiente, visualiza la relación entre dos variables. Se emplean en general para las comparaciones por categorías de variables cualitativas como se observa en la figura 53.

Figura 53: Gráfica de Barras



Los diagramas de barras se dividen en; diagramas de barras simples, múltiples y compuestas.

- **Diagrama de barras simples:** Este representa un hecho único, la frecuencia simple(absoluta o relativa) de cada modalidad mediante la altura de una barra, donde la altura de la barra es proporcional a la frecuencia simple de la categoría que representa.
- **Diagrama de barras Múltiples:** En esta se pueden comparar una serie con otra, se pueden utilizar diagramas de barras compuestas o barras simples, utilizando

barras distintas para cada serie y poniéndolas en el mismo gráfico, unas al lado de las otras.

- **Diagramas de barras Compuestas:** Este procedimiento consiste en representar dos series en el mismo gráfico, dibujar el diagrama de una de las series y continuar con la otra de otro color. Cada barra tendrá una altura que será la suma de la frecuencia absoluta del suceso que representa la barra en la primera serie más la frecuencia absoluta del suceso en la segunda serie.

### 8.3.3.3 Histograma

Un histograma es un gráfico formado por rectángulos unidos unos a otros, cuyos vértices de la base coinciden con los extremos de los intervalos y el centro de cada intervalo con la marca de clase, representado en el eje de la abscisa, los histogramas pueden dar a los investigadores una mejor comprensión de los datos, y es muy útil al presentar la forma, localización y variabilidad de los datos.

En la práctica hay dos tipos de histogramas<sup>65</sup>.

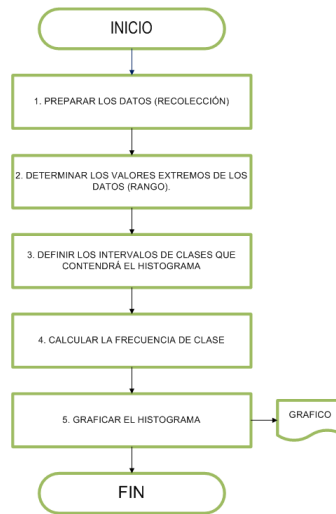
- Histograma de intervalo de igual probabilidad, tiene intervalos de clase de ancho variable. Esta tiene el mismo número de ocurrencias.
- Histogramas de intervalos de igual ancho, intervalos de clase de anchura fija. Contiene una posibilidad de diferente número de ocurrencias. .

Para la construcción de un histograma se deben tener en cuenta los pasos que se ven en la figura 54:

---

<sup>65</sup>SHEDD, T. Measurement and Data analysis for Engineering and Science. Measurements Lab. Edit. Mc Graw-Hill Primis.2009.

Figura 54: Construcción de un Histograma



1. Preparación de datos: El primer paso consiste en recoger de forma correcta los datos.
2. Determinar los valores extremos de los datos  $V_{max}$ ,  $V_{min}$ . Y hallar el recorrido  $R$ ;  $R = V_{max} - V_{min}$
3. Definir “intervalo de clases” que contengan el histograma. El intervalo de clase depende de del número de observaciones y de la cantidad de dispersión de los datos, el intervalo de clase debe estar entre 5 y 20, se puede elegir como la raíz cuadrada del número de datos. Según la tabla 16.

Tabla 16: Recomendaciones de Clases en un Histograma

Número de Datos	Número de clases recomendado
20-50	6
51-100	7
101-200	8
201-500	9
501-1000	10
Más de 1000	11-20

Todas las clases tendrán el mismo intervalos , la amplitud del intervalo se halla dividiendo el recorrido por el numero de clase.

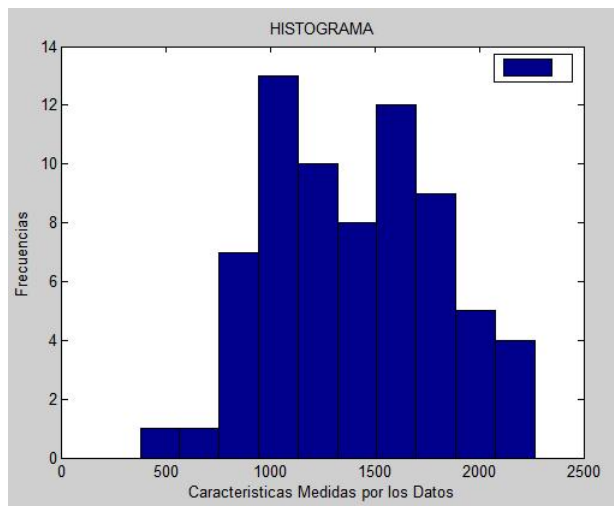
Construir clase anotando los limites de cada una de ellas: Los límites de la primera clase incluirán el valor mínimo de los datos.

4. Calcular la frecuencia de clase: Determinar el número de datos que están incluidos en cada una de las clases(frecuencia de clases).
5. Gráficar el histograma: El eje vertical representa las frecuencias , por tanto en el se rotularan números naturales. El eje horizontal representa la magnitud de la característica medida por los datos.

Las barras verticales corresponden a la clase, su base situada en el eje horizontal y su altura corresponderá a la frecuencia de la clase

Se puede representar como se puede ver en la figura 55.

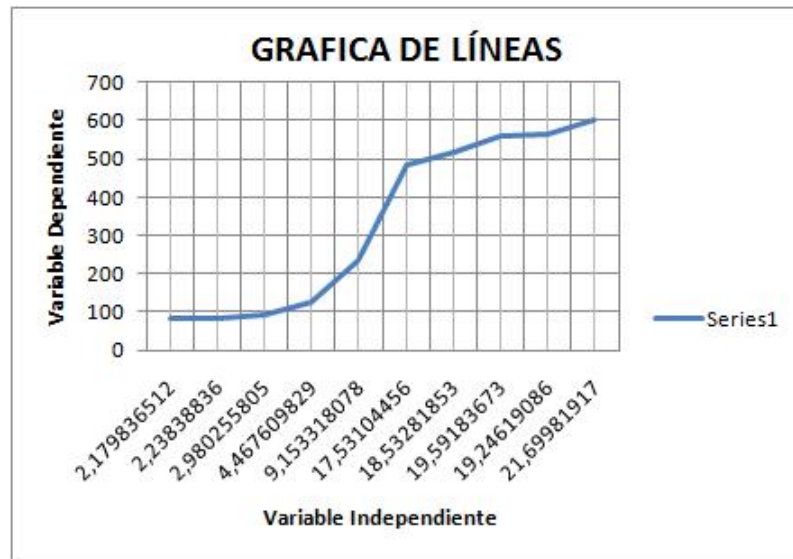
Figura 55: Histograma



#### 8.3.3.4 Diagramas de líneas:

Para trazar la gráfica de líneas se usa el plano coordenadas; en el eje horizontal se representa a la variable y en el eje vertical la frecuencia. Se determinan los puntos de corte del valor de la variable con su frecuencia y se unen estos puntos obteniéndose la gráfica de línea que nos muestra con claridad los cambios que experimentó la variable. Tanto para variables discretas como continuas, son utilizados fundamentalmente para mostrar tendencias en la figura 56 se observa un diagrama de líneas.

Figura 56: Diagrama de líneas



Polígono de Frecuencias: Este gráfico es de líneas y puede obtenerse uniendo los puntos medios de los rectángulos y, por tanto, los vértices de la línea quebrada son los puntos cuyas abscisas coinciden con las marcas de clase<sup>66</sup>.

Características:

- No muestran frecuencias acumuladas.
- Se prefiere para el tratamiento de datos cuantitativos.
- El punto con mayor altura representa la mayor frecuencia.

### 8.3.3.5 Diagrama de Dispersión:

El Diagrama de Dispersión es una herramienta útil para comprobar (aceptar o rechazar) teorías respecto a la supuesta existencia de una relación entre dos variables.

Características:

- Permite conocer el grado de relación existente entre dos variables (grado de correlación).
- Simplifica el análisis de situaciones numéricas que tienen gran cantidad de datos.
- Permite obtener conclusiones sobre la existencia de una relación entre dos variables, no sobre la naturaleza de dicha relación.

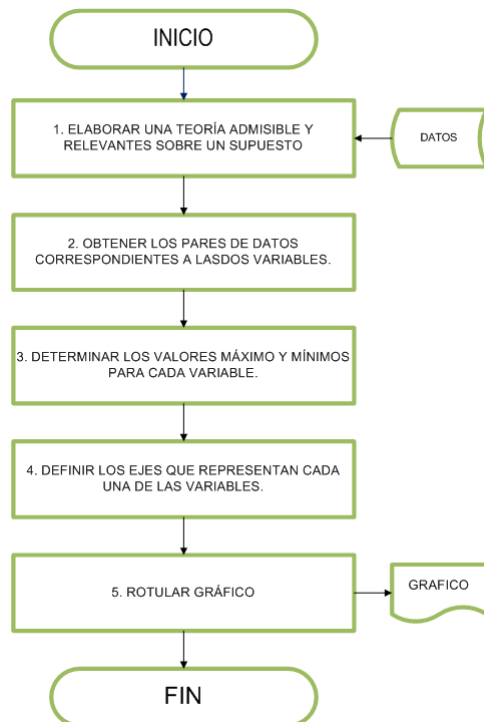
<sup>66</sup>GARZO. Op. cit., p. 55.

- El análisis de datos mediante esta herramienta proporciona mayor información que el simple análisis matemático de correlación, sugiriendo posibilidades y alternativas de estudio, basadas en la necesidad de conjugar datos y procesos en su utilización.

Construcción de un diagrama de dispersión:

Para realizar el diagrama de dispersión debemos tener en cuenta los pasos que se ven en la figura 57.

Figura 57: Elaboración diagrama de dispersión



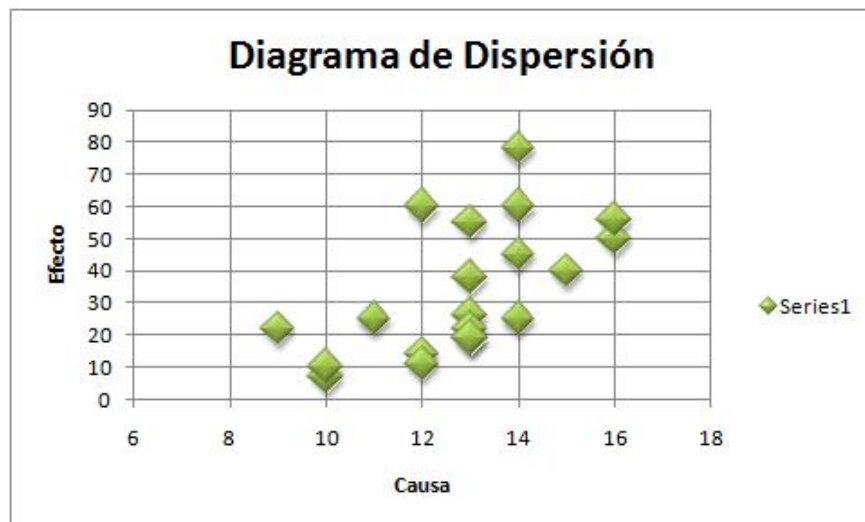
Los pasos que se describen en la gráfica 57 se detallan a continuación:

1. Elaborar una teoría admisible y relevante sobre la supuesta relación entre dos variables.
2. Obtener los pares de datos correspondientes a las dos variables: Al igual que en cualquier otra herramienta de análisis de datos, éstos son la base de las conclusiones obtenidas, por tanto cumplirán las siguientes condiciones:

- En cantidad suficiente: Se consideran necesarios al menos 40 pares de datos para construir un Diagrama de Dispersión
- Datos correctamente emparejados: Se estudiará la relación entre ambos.
- Datos exactos: Las inexactitudes afectan a su situación en el diagrama desvirtuando su apariencia visual.

- Datos representativos: Asegúrese de que cubren todas las condiciones operativas del proceso.
  - Información completa: Anotar las condiciones en que han sido obtenidos los datos
3. Determinar los valores máximos y mínimos para cada variable.
  4. Definir ejes que representan cada una de las variables.
    - Eje x (variable independiente)
    - Eje y (variable dependiente)
  5. Marcar sobre el diagrama los pares de datos.
  6. Rotular el gráfico: Esta etapa comprende la elaboración del diagrama de dispersión como se observa en la figura 58.

Figura 58: Diagrama de Dispersión



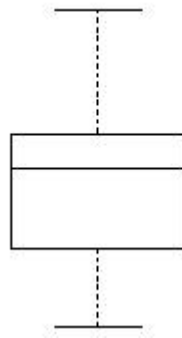
### 8.3.3.6 Diagrama de Caja

El diagrama de caja que se puede observar en la figura 59 es una presentación visual que describe al mismo tiempo varias características importantes de un conjunto de datos, tales como:

- El centro
- La dispersión

- La desviación de la simetría
- Identificación de observaciones que se alejan de manera poco usual del resto de los datos.

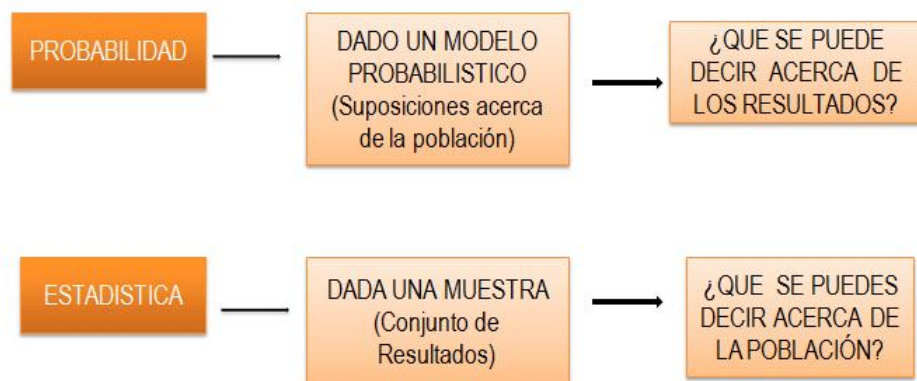
Figura 59: Diagrama de Caja



## 8.4 CONCEPTOS BÁSICOS DE LA PROBABILIDAD

Es importante que antes de seguir tener clara la diferencia entre la probabilidad y estadística y esta se puede ver mas claramente en la figura 60.

Figura 60: Comparación entre Probabilidad y Estadística

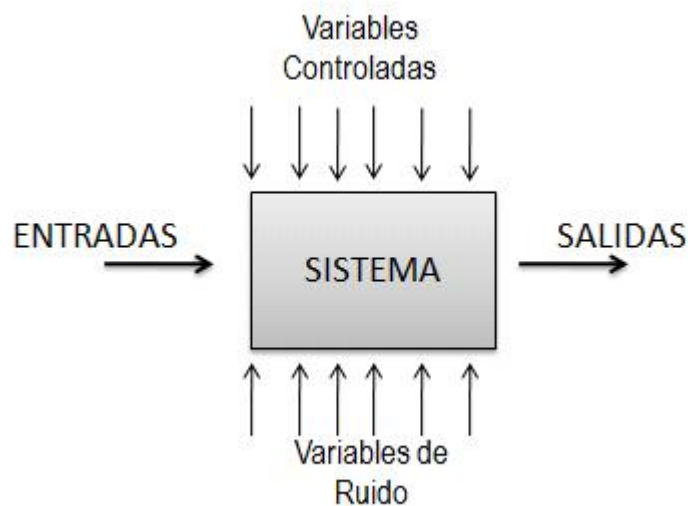


A menudo los ingenieros y científicos se involucran en tareas de análisis y diseño de sistemas, donde las componentes características del sistema no están determinadas (son aleatorios), ya que sin importar con cuánto cuidado se diseñe un experimento siempre

presentará variaciones. La meta es comprender, cuantificar y modelar el tipo de variación que se encuentre, para obtener conclusiones fundamentales de los resultados para ello se hace uso de la probabilidad.

Algunos modelos permiten variaciones en las salidas del sistema, aun cuando las variables que se controlan no cambian. En la figura 61 se observa un modelo que incorpora entradas no controlables (ruido), combinadas con entradas controladas para producir la salida del sistema. Debido a la presencia de entradas no controlables, el empleo de las mismas condiciones no siempre dará como resultado las mismas salidas cada vez que se haga una medición sobre el sistema.

Figura 61: Modelo de Variación de un Sistema



*Fuente: MONTGOMERY, Douglas. & RUNGER, George. Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería. 2 ed.: McGraw-Hill, 1996. p.48.*

La probabilidad se asocia muchas veces con los juegos de azar ya que permite estudiar sucesos aleatorios, uno de los fenómenos casuales más simple es el lanzamiento de una moneda, ya que existe la probabilidad de que salga cara o sello; de la misma manera se puede relacionar con la definición de un experimento ya que este constituye un proceso con un resultado que no se puede predecir certeramente con anterioridad, el hecho de arrojar un dado, lanzar una moneda son ejemplos de experimentos; y el conjunto de resultado posibles se llama espacio muestral.

La Teoría de la Probabilidad es la parte de las matemáticas que trata los fenómenos en los que interviene el azar. En definitiva, usamos la probabilidad con el fin de tomar decisiones de las que esperamos obtener la mayor ganancia o que conlleven el menor riesgo. Además, es el puente entre la Estadística Descriptiva y la Estadística Inferencial,

pues permite usar propiedades obtenidas de la descripción de muestras para formular y aceptar hipótesis relativas a la población que generó dicha muestra.

Existen tres componentes esenciales de un modelo probabilístico:

1. Identificación de todos los posibles resultados del experimento.
2. Identificación de todos los eventos de interés
3. Asignación de probabilidades para estos eventos de interés.

### 8.4.1 Experimentos Aleatorios

Un experimento aleatorio es aquel que proporciona diferentes resultados aun cuando se repita siempre de la misma manera.

Los experimentos aleatorios tienen unas características comunes que describimos a continuación<sup>67</sup>.

1. Aun cuando no podemos predecir el resultado con certeza, si es posible describir el conjunto de resultados posibles.
2. Conceptualmente el experimento podría repetirse en condiciones invariables, a pesar de lo cual los resultados son fortuitos.
3. A medida que el número de repeticiones aumenta, surgen ciertos patrones en la frecuencia de la ocurrencia de los resultados. Estos patrones hacen posible la construcción de un modelo matemático preciso con el cual analizamos el experimento.

Para modelar y analizar un experimento aleatorio, primero debe comprenderse el conjunto de resultados posibles del experimento aleatorio este conjunto recibe el nombre de **espacio muestral**, denotado por la letra  $S$ . Para ello es necesario usar los conceptos básicos de conjunto y las operaciones entre conjuntos.

Los espacios muestrales pueden ser continuos o discretos<sup>68</sup>.

- Espacio muestral discreto: Es aquel en el que hay un número finito o numerable de resultados.

Ejemplos:

---

<sup>67</sup>MEYER, Paul. Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas. Departamento de Matemáticas, Washington State University, 1970.

<sup>68</sup>MONTGOMERY. Op. cit., p50.

Experimento: lanzar una moneda

S: {cara, sello} conjunto finito

- Espacio muestral continuo: Tiene resultados incontables.

Ejemplo:

Experimento: Un aparato registra las emisiones radiactivas de una fuente de energía en un minuto.

S: {0,1,2,...}conjunto contable infinito.

#### 8.4.1.1 Evento

Otra noción básica es el concepto de evento, ocurrencia o no ocurrencia de un fenómeno, o simplemente un subconjunto del espacio muestral de un experimento aleatorio, en la experimentación existe siempre la probabilidad de que ocurrirá o no un evento, como medida de la probabilidad conviene asignar números entre 0 y 1<sup>69</sup>.

- Si estamos seguros que el evento ocurrirá decimos que la probabilidad es 1.
- Si estamos seguros de que no ocurrirá decimos que la probabilidad es 0.

Generalmente se tiene interés de describir eventos nuevos a partir de combinaciones de eventos existentes. Ya que estos eventos son subconjuntos, es posible usar las operaciones básicas de conjuntos, tales como uniones, intersecciones y complementos, para formar eventos de interés. El resumen de estas operaciones básicas de conjuntos en términos de eventos, las encontramos en la tabla 17.

Tabla 17: Operaciones Básicas de Conjuntos

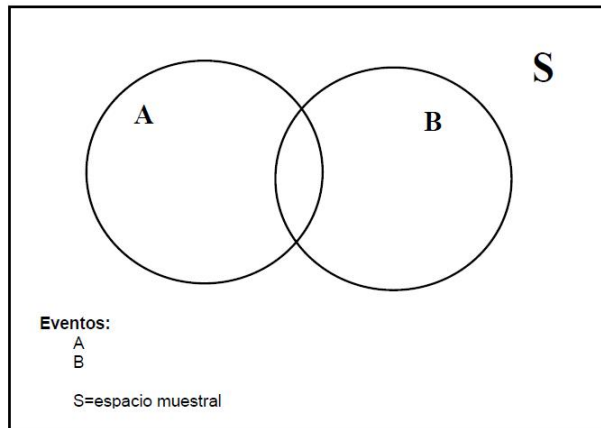
OPERACIÓN	DEFINICIÓN	DENOTACIÓN
UNIÓN DE DOS EVENTOS A y B	Es la serie de resultados que pertenecen a A, a B, o a los dos.	$A \cup B$
INTERSECCIÓN DE DOS EVENTOS A y B	Es la serie de resultados que pertenecen a A y a B.	$A \cap B$
COMPLEMENTO DE DOS EVENTOS A y B	Es la serie de resultados que no pertenecen a A. Este evento "A <sup>c</sup> " ocurre siempre que A no ocurra.	$A^c$

<sup>69</sup>Ibid., p.52.

### 8.4.1.2 Diagrama de Venn

Son diagramas que se usan con frecuencia para representar relaciones entre conjuntos, y también son muy útiles para describir relaciones entre eventos. Representan un espacio muestral "S" y los eventos contenidos en éste "A y B" tal como se ve en la figura 62.

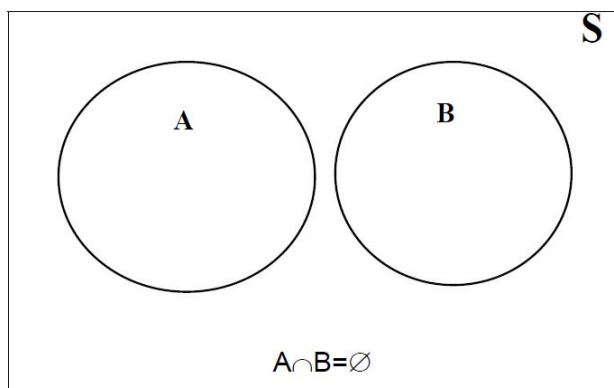
Figura 62: Diagrama de Venn



### 8.4.1.3 Eventos Mutuamente Excluyentes

Sean dos eventos A y B, tales que  $A \cap B = \emptyset$ , se dice que son mutuamente excluyentes. Es decir que los eventos que no tienen resultados en común. Y el diagrama de Venn que los representa se ve en la figura 63.

Figura 63: Eventos Mutuamente Excluyentes



## 8.4.2 Axiomas de Probabilidad

Es posible reunir las hipótesis realizadas hasta el momento con respecto a las probabilidades en un conjunto de axiomas que deben satisfacer las probabilidades de cualquier experimento aleatorio. Los axiomas no determinan las probabilidades; éstas se asignan con base en el conocimiento que se tiene del sistema estudiado. Pero los axiomas facilitan el cálculo de las probabilidades de algunos eventos a partir del conocimiento de las probabilidades de otros.

En la práctica estas probabilidades se asignan en base a:

1. Estimaciones obtenidas en experiencias u observaciones previas.
2. Una consideración analítica de las condiciones experimentales.

Sea  $S$  el espacio muestral  $A$  es cualquier evento del experimento aleatorio.

Las siguientes son algunos axiomas asociados con la probabilidad<sup>70</sup>:

Axioma 1. Para cualquier evento  $A$ , una probabilidad no puede ser negativa.

$$P(A) \geq 0$$

Axioma 2. La probabilidad asociada al espacio muestral esta dada por la ecuación 80, esta probabilidad es una consecuencia del hecho de que un resultado del espacio muestral ocurre en cada prueba de un experimento.

$$P(S) = 1 \tag{80}$$

Axioma 3. Para cualquier número de eventos mutuamente excluyentes  $A_1, A_2, \dots$ , la probabilidad esta dada por la ecuación 81, si los eventos  $A_1$  y  $A_2$  no tienen resultados en común, la probabilidad de los resultados es la suma de las probabilidades de los resultados individuales  $A_1$  y  $A_2$ .

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots \tag{81}$$

Los axiomas y sus consecuencias restringen las asignaciones de probabilidad de una manera que permite interpretar éstas como frecuencias relativas sin inconsistencias.

A partir de los axiomas anteriores se encuentra varios teoremas de probabilidad que serán muy útiles posteriormente<sup>71</sup>.

1. Probabilidad es siempre un número positivo con valor máximo de 1:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

---

<sup>70</sup>Ibid., p.65.

<sup>71</sup>Ibid., p.65.

2. Si un evento  $A$  es cierto que ocurre,  $P(A) = 1$ .
3. Si un evento  $A$  no ocurre,  $P(A) = 0$ .
4. La probabilidad de que un evento no ocurra es igual a 1 menos la probabilidad de que ocurra.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

5. La probabilidad de que cualquier evento contenga un número infinito de resultados se puede determinar mediante la suma de las probabilidades de los resultados que incluyen el evento.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

6. Si los eventos  $A$  y  $B$  son independientes, la probabilidad de que uno ocurra no depende de del otro. La probabilidad de que tanto  $A$  como  $B$  ocurran juntos es:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B).$$

7. Para cualesquiera dos eventos en un espacio de muestra. Para determinar la probabilidad de que ocurran cualquiera de los dos eventos  $A$  y  $B$ , se suman las probabilidades de los eventos y luego se resta la probabilidad de que ambos ocurran,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Como se observa estas propiedades no señalan al investigador cómo asignar las probabilidades, sin embargo restringen la manera como estas asignaciones pueden llevarse a cabo.

### 8.4.3 Probabilidad Condicional e Independencia

La probabilidad de un evento depende de la mayor o menor información que tengamos.

La probabilidad de que un evento  $A$  ocurra cuando se sabe que ya ocurrió un evento  $B$  se llama probabilidad condicional y se denota por  $P(A/B)$  que por lo general se lee como probabilidad de que "ocurra  $A$  dado que ocurrió  $B$ ". Esta probabilidad se define según la ecuación 82.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ Con } P(B) > 0 \quad (82)$$

**Independencia:** Desde el punto de vista intuitivo dos sucesos son independientes cuando "la ocurrencia de uno de ellos no nos dice nada nuevo sobre la ocurrencia del otro" tal como se observa en la ecuación 83.

$$P(A \cap B) = P(A) P(B) \quad (83)$$

Si;

$$P(A) \neq 0 \text{ y } P(B) \neq 0$$

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

## 8.4.4 Reglas de Probabilidad

### 8.4.4.1 Regla de multiplicación

Esta regla será muy útil cuando se quiere calcular la probabilidad de ocurrencias simultáneas de varios sucesos y las probabilidades condicionadas del segundo miembro sean sencillas de calcular.

Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  una colección de sucesos aleatorios.

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) * P(A_2/A_1) * P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

### 8.4.5 Reglas de Probabilidad Total Y Regla de Bayes:

Estas reglas de Probabilidad total y la regla de Bayes van a ser útiles cuando se den las siguientes circunstancias<sup>72</sup>:

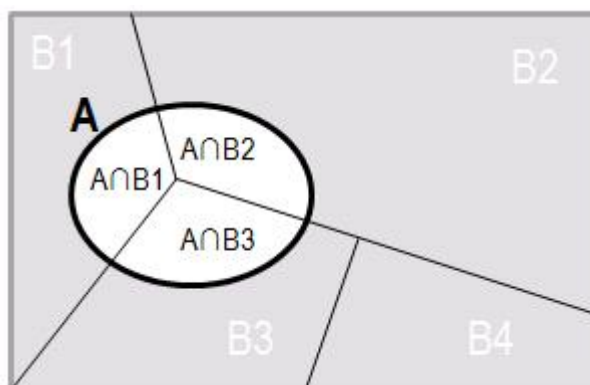
1. El experimento aleatorio se puede separar en dos etapas
2. Es sencillo dar una partición de todo el espacio muestral  $\{S\}$  mediante eventos  $A_1, \dots, A_n$  correspondientes a resultados de la primera etapa.
3. Son conocidas y fácilmente calculables las probabilidades  $P(A_1), \dots, P(A_n)$ .
4. Son conocidas o fácilmente calculables las probabilidades  $P(B/A_1), \dots, P(B/A_n)$  donde B es un evento correspondiente a resultados de la segunda etapa.

Cuando se den estas circunstancias y se tenga que  $B_1, B_2, \dots, B_k$  representan una partición de un espacio muestral S como el que se observa en la figura 64 , la regla de la probabilidad total será muy útil para calcular  $P(B)$ , y la regla de Bayes será muy conveniente para obtener  $P(A/B_k)$ .

---

<sup>72</sup>Ibid., p.65.

Figura 64: Probabilidad Total



**Teorema de probabilidad Total:** Si  $B_1, B_2, \dots, B_k$  representa una partición de un espacio muestral  $S$  como el que se observa en la figura 64, la probabilidad total esta dada por la ecuación 84.

$$P(A) = P(B_1) * P(A/B_1) + P(B_2) * P(A/B_2) + \dots + P(B_k) * P(A/B_k) \quad (84)$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + \dots + P(A \cap B_k)$$

Este teorema es muy utilizado, ya que hay numerosas situaciones prácticas en las que  $P(A)$  no puede calcularse directamente. Sin embargo con la información que  $B_k$  ha ocurrido, es posible evaluar  $P(A/B_k)$  y determinar así  $P(A)$  cuando se obtiene los valores de  $P(B_k)$ .

**Regla de Bayes:** Si  $B_1, B_2, \dots, B_k$  eventos exhaustivos y mutuamente excluyentes, de un espacio muestral  $S$  y  $A$  es un evento arbitrario de  $S$  entonces para  $r=1,2,\dots,k$  la probabilidad esta dada por la ecuación 85.

$$P(B_r/A) = \frac{P(B_r)P(A/B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A/B_i)} \quad (85)$$

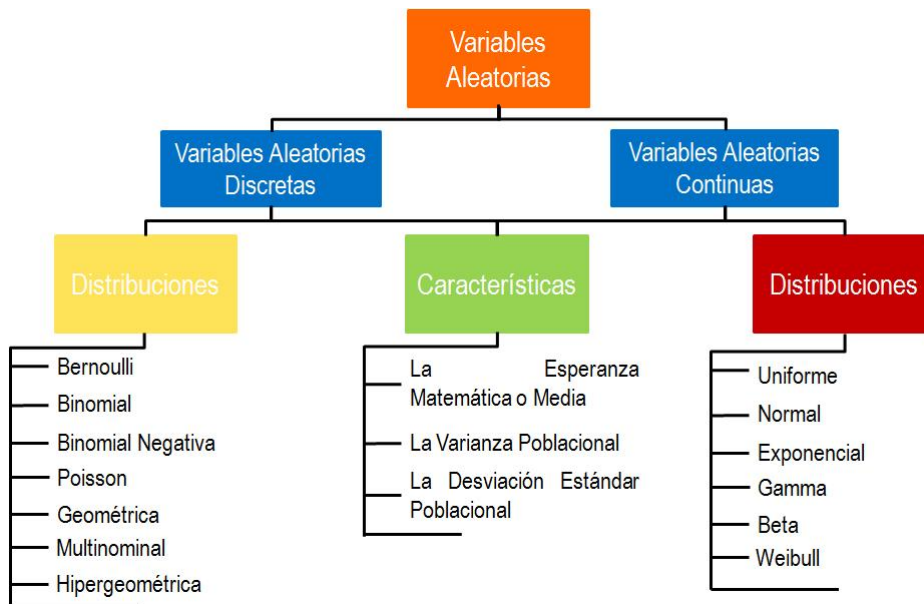
$$P(B_r/A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)}$$

## 8.5 ESTUDIO DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS Y CONTINUAS

Algunas veces el interes es resumir con un número el resultado de un experimento aleatorio. Los diferentes aspectos o características de los resultados de un experimento con

resultados mensurables, se denomina *variables aleatorias*. Una variable aleatoria es una función real definida en el espacio muestral de un experimento, es decir, se establece una correspondencia entre el conjunto de los posibles sucesos elementales y el conjunto de los números reales, de manera que a cada suceso elemental le corresponda un número real arbitrario y que a sucesos elementales distintos les correspondan números distintos. Usualmente estas variables se denotan con letras mayúsculas, como  $X$  o  $Y$ <sup>73</sup>, y con letras minúsculas, como  $x$  o  $y$ , sus valores. También se le llama variable de azar o variable estocástica, y significa cantidad que puede tomar varios valores imprevistos. Las variables aleatorias pueden clasificarse en dos categorías: variables discretas o continuas como se observa en la figura 65.

Figura 65: Variables aleatorias



Las funciones de distribución de probabilidad para variables aleatorias discretas son llamadas funciones de masa de probabilidad; y para variables aleatorias continuas son llamadas funciones de densidad de probabilidad.

### 8.5.1 Variables aleatorias discretas

Una variable aleatoria es discreta si sus valores posibles constituyen un conjunto de números finitos de valores. Estos valores pueden ser un conjunto de enteros. Si un espacio muestral contiene un número finito de posibles valores se llama *espacio muestral discreto*.

<sup>73</sup>SPIEGEL, Murray R. Probabilidad y Estadística. 2 Ed. Colombia: McGraw-Hill, 2003.

### 8.5.1.1 Distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta.

Dado los valores de una variable aleatoria  $Y$ , pueden ser valores numéricos, se desea conocer sus probabilidades. Una tabla, una fórmula o un gráfico que da estas probabilidades se llama la *distribución de probabilidad* o *función de masa de probabilidad*, para la variable aleatoria.

**Función de masa de probabilidad** Para variables aleatorias  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; para un valor de  $x_i$  la probabilidad de que ocurra es  $P(x_i)$ . La suma de los valores de probabilidad de valores de  $x_i$ , debe ser igual a uno según ecuación 86.

$$\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1 \quad (86)$$

El valor de la media está dada por la ecuación 87.

$$\mu = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i) \quad (87)$$

Donde  $\mu$  es el valor esperado de  $x$ ,  $E(x)$ . La varianza de la población está dada por la ecuación 88.

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 P(x_i) \quad (88)$$

**Ejemplo 8.2** (Fuente: HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería*. 4 ed. México.: Cecsca, 2006.) El número de fallas de un alambre de cobre de 1 in de longitud, fabricado en proceso específico, varía de alambre en alambre. En conjunto, el 48 % de los alambres producidos no tiene falla, 39 % presenta una, 12 % fue detectado con dos y el 1 % tiene 3. Sea  $Y$  el número de fallas en una pieza de alambre seleccionada aleatoriamente. Entonces el espacio muestral está dado por la tabla 18.

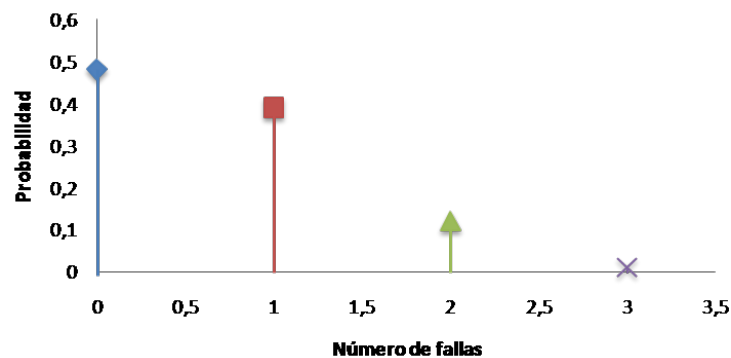
Tabla 18: Espacio muestral

Resultado	X(Variable aleatoria)	Probabilidad
48 %	0 falla	0,48
39 %	1 falla	0,39
12 %	2 falla	0,12
1 %	3 fallas	0,01

La lista de valores posibles 0,1,2,3, junto con las probabilidades para cada uno, proporciona una descripción completa de la población de la que se tomó a  $Y$ . Esta descripción es la que se conoce como *distribución de probabilidad*.

Por tanto una variable aleatoria  $Y$  que representa el número de fallas en una longitud de alambre,  $p(0) = 0,48$ ,  $p(1) = 0,39$ ,  $p(2) = 0,12$ ,  $p(3) = 0,01$  y para cualquier valor de  $y$  diferente de 0, 1, 2 o 3  $p(y) = 0$ . Es cierto que para cualquier distribución de probabilidad sobre todo los valores posibles de  $Y$ , la suma es igual a 1. La razón es que al sumar los valores de una distribución de probabilidad sobre todo los valores posibles de una variable aleatoria es igual a uno de sus valores posibles y esta probabilidad es siempre igual a 1. A menudo es útil ver una distribución de probabilidad en forma gráfica. Se pueden graficar los puntos  $[x, f(x)]$  del ejemplo anterior, por medio de un *diagrama de barras*, ilustrada en la figura 66, en el cual se dibuja una recta vertical para cada uno de los valores posibles de la variable aleatoria.

Figura 66: Gráfica de barras



Las alturas son iguales a las probabilidades de los valores correspondientes. La interpretación física de este diagrama es que cada recta representa una masa igual a su altura.

El conjunto de pares ordenados  $[x, f(x)]$  es una distribución de probabilidad o también llamada una función de masa de probabilidad de la variable aleatoria discreta  $Y$  si, para cada resultado posibles de  $y$ , tenemos las siguientes propiedades.

$$f(x) \geq 0. \quad (89)$$

$$\sum f(x) = 1. \quad (90)$$

$$P(X = x) = f(x). \quad (91)$$

### 8.5.1.2 La función de distribución acumulada.

La función de masa de probabilidad especifica la probabilidad de que una variable aleatoria sea igual a un valor determinado. Pero en muchas ocasiones, hay problemas donde se

desea calcular la probabilidad de que el valor observado de una variable  $X$  sea menor o igual que algún número real  $x$ . Al escribir  $F(x) = P(X \leq x)$  para cualquier número real  $x$ , definimos  $F(x)$  como la *función de la distribución acumulada* de la variable aleatoria  $X$ .

Y la función matemática que la define es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \text{ para } -\infty < x < \infty \quad (92)$$

**Ejemplo 8.3** (Fuente: HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería*. 4 ed. México.: Cecsca, 2006.) Sea  $F(x)$  la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria  $X$  que representa el número de fallas en un alambre elegido aleatoriamente. Determine  $F(2)$  y  $F(1,5)$ .

Solución. Puesto que  $F(2) = P(X \leq 2)$  se necesita encontrar  $P(X \leq 2)$ . Con dicho propósito se suman las probabilidades de los valores de  $Y$  que son menores o iguales a 2, a saber, 0, 1 y 2. Por tanto

$$\begin{aligned} F(2) &= P(X \leq 2) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= 0,48 + 0,39 + 0,12 \\ &= 0,99 \end{aligned}$$

Ahora  $F(1,5) = P(X \leq 1,5)$ . Por tanto, para calcular  $F(1,5)$  se debe sumar las probabilidades para los valores de  $Y$  que son menores o iguales a 1,5, que son 0 y 1. Por lo que,

$$\begin{aligned} F(1,5) &= P(X \leq 1,5) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= 0,48 + 0,39 \\ &= 0,87 \end{aligned}$$

Se observa en particular el hecho de que la distribución acumulativa es una función no decreciente monótona que se define no sólo para los valores que toma la variable dada, sino para todos los números reales.

## 8.5.2 Características de las variables aleatorias discretas.

Se trata de resumir la información de una variable aleatoria en un conjunto de medidas (números). De forma análoga a lo que se hizo en el tema de Estadística Descriptiva, pode-

mos definir para las variables aleatorias medidas de centralización, dispersión, simetría y forma. Por interés, se centrará en dos medidas especiales sobre variables aleatorias que son: la esperanza matemática, que desempeña un papel equivalente al de la media, la varianza y desviación estándar como se observa en la tabla 19 .

Tabla 19: Característica de las variables aleatorias discretas

CARACTERÍSTICA	Esperanza Matemática	La varianza Poblacional	La desviación Estándar Poblacional
DENOTACIÓN	$E(Y)$ ó $\mu$	$Var(Y)$ ó $\sigma^2$	$\sigma_y$
ECUACIÓN	$E(Y) = \sum_{i=1} y_i f(y_i)$	$\sigma_y^2 = \sum_y y^2 P(Y = y) - \mu_y^2$	$\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2}$

### 8.5.2.1 Esperanza matemática

El siguiente ejemplo permite ver la aplicación de esta propiedad de una manera mas clara según tabla 19<sup>74</sup>.

**Ejemplo 8.4** (Fuente: HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería. 4 ed. México.: Cecs, 2006.*) Determine la media de la variable aleatoria  $Y$  que representa el número de fallas en una pieza de alambre elegida aleatoriamente.

Solución. La media es el centro de masa de la gráfica de la función de masa de probabilidad (Figura 66). El centro de masa se calcula multiplicando la altura de cada recta por su valor en el eje horizontal y después se suman los productos. Los valores son 0, 1, 2 y 3. Las alturas son  $P(Y=0)=0.48$ ,  $P(Y=1)=0.39$ ,  $P(Y=2)=0.12$  y  $P(Y=3)=0.01$ . La media es, por tanto,

$$\begin{aligned} \mu_y &= 0 \cdot P(Y = 0) + 1 \cdot P(Y = 1) + 2 \cdot P(Y = 2) + 3 \cdot P(Y = 3) \\ &= (0)(0,48) + (1)(0,39) + (2)(0,12) + (3)(0,01) \\ &= 0,66 \end{aligned}$$

En general, la media de una variable aleatoria discreta se encuentra al multiplicar cada valor posible aleatoria por su probabilidad y después se suma.

<sup>74</sup>NAVIDI. Op. cit., p. 96

### 8.5.2.2 La varianza poblacional.

Se define a la varianza poblacional de una variable aleatoria discreta como el momento de inercia de la gráfica de su función de masa de probabilidad con respecto a la media poblacional  $\mu$  y su función matemática se observa en la figura 19.

### 8.5.2.3 La desviación estándar poblacional.

La desviación se define como la raíz cuadrada de la varianza poblacional. Esta se denota por  $\sigma_y$  o simplemente por  $\sigma$ , como se observa en la ecuación 93.

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} \quad (93)$$

**Ejemplo 8.5** (Fuente: HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería*. 4 ed. México.: Cecsa, 2006.) Determinar la varianza y la desviación estándar para la variable aleatoria  $Y$  que representa el número de fallas de una pieza de alambre elegida aleatoriamente.

Solución. En el ejemplo 8.4 la media de  $Y$  con un valor de  $\mu_y = 0,66$ . Se encuentra la varianza utilizando la ecuación 93:

$$\sigma_y^2 = (0 - 0,66)^2 \cdot P(Y = 0) + (1 - 0,66)^2 \cdot P(Y = 1) + (2 - 0,66)^2 \cdot P(Y = 2) + (3 - 0,66)^2 \cdot P(Y = 3)$$

$$\sigma_y^2 = (0,4356)(0,48) + (0,1156)(0,39) + (1,7956)(0,12) + (5,4756)(0,01)$$

$$\sigma_y^2 = 0,5244$$

La desviación estándar es  $\sigma_y = \sqrt{0,5244} = 0,724$

### 8.5.3 Principales distribuciones de variables aleatorias discretas.

Sin importar si la distribución de probabilidad discreta se representa de forma gráfica mediante un histograma, en forma tabular o con una fórmula, describe el comportamiento de una variable aleatoria. A menudo las observaciones que se generan en diferentes experimentos estadísticos tienen el mismo tipo general de comportamiento. En la práctica, la función de probabilidad de la mayoría de las variables discretas se ajusta a un modelo teórico expresado mediante una fórmula concreta. Las distribuciones más habituales son: La Bernoulli, la Binomial, la de Binomial Negativa, Multinomial, La Geométrica, Hipermétrica y distribución de poisson.

Figura 67: Distribuciones de las variables aleatorias discretas

Tipo de distribución	Función de masa de probabilidad	Función de distribución Acumulada	Grafica
<b>Bernoulli</b> $X \rightarrow Ber(p) \Leftrightarrow x = \begin{cases} 0 \rightarrow q = 1 - p = P[X=0] \\ 1 \rightarrow p = P[X=1] \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} q & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso;} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ q & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$	
<b>Binomial</b> $X \rightarrow Bin(n, p) \Leftrightarrow X = X_1 + \dots + X_n$	$f(k) = P[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ donde $k = 0, 1, \dots, n$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$	
<b>Binomial Negativa</b> $X \rightarrow NB(r, p)$	$f(k) = \binom{k+r-1}{k} p^r q^k$	No tiene	

Tipo de distribución	Función de masa de probabilidad	Función de distribución Acumulada	Grafica
<b>Multinomial</b> $X \rightarrow MN(x_i)$	$f(Y = y_i) = \frac{n!}{y_1! y_2! y_3!} p_1^{y_1} p_2^{y_2} p_3^{y_3} \dots$	No tiene	
<b>Geométrica</b> $X \rightarrow Geom(p)$	$f(k) = P[X = k] = p(1-p)^k$ donde $k = 0, 1, \dots, n$	$F(x) = 1 - p^x$	
<b>Hipergeométrica</b> $HGeo(N, n, p) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} Bin(n, p)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\binom{N-k}{n-i} \binom{k}{i}}{\binom{N}{n}} & \text{si } i = 0, 1, 2, \dots, n, i \leq k, n-i \leq N-k \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\binom{N-k}{n-i} \binom{k}{i}}{\binom{N}{n}} & \text{si } j \leq x < j+1, j = 1, 2, \dots, n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$	
<b>Poisson</b> $X \rightarrow Poi(\lambda)$	$f(k) = P[X = k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$	$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P(x) = 1$	

### 8.5.3.1 Distribución de Bernoulli.

La distribución de Bernoulli se aplica cuando se realiza una sola vez un experimento que tiene únicamente dos posibles resultados (éxito o fracaso), por lo que la variable sólo puede tomar dos valores: el 1 (éxito) y el 0 (fracaso). Definimos la variable aleatoria discreta  $Y$ , con función de masa de probabilidad, así:

Si 1, denota (10 %) de los componentes fabricados mediante determinado proceso está defectuoso. Se selecciona un componente aleatoriamente. Sea  $Y=1$  si el componente está defectuoso y  $Y=0$  en cualquier otro caso. ¿Cuál es la distribución de  $Y$ ?

Solución. La probabilidad de éxito es  $p = P(Y = 1) = 0,1$ . Por lo que  $Y \sim \text{Bernoulli}(0.1)$

### 8.5.3.2 Distribución Binomial.

La distribución binomial que se expresa como  $Y \sim \text{Binomial}(p)$ , es parte de la distribución de Bernoulli. Se aplica cuando se realizan un número "n" de veces el experimento de Bernoulli, siendo cada ensayo independiente del anterior. Realizamos el experimento anterior n veces de forma independiente, y definimos la variable aleatoria discreta, como: Y es igual al "Número de éxitos obtenidos en las n realizaciones" que puede tomar los valores  $y = 0, 1, \dots, n$

0 es igual a todos los experimentos que han sido fracaso.

n es igual a todos los experimentos que han sido exitosos.

Y su probabilidad esta dada por las ecuaciones de la figura 67.

**Ejemplo 8.6** (Fuente: MONTGOMERY. *probabilidad y estadística aplicada a la ingeniería*. p. 122) Cuando se lanza al aire una moneda hay una probabilidad de 0.5 de que caiga en "cara". Sea  $Y=1$  si la moneda cae en "cara" y  $Y=0$  si cae en "cruz". ¿Cuál es la distribución de Bernoulli Y?

Solución. Puesto que  $Y=1$  cuando cae "cara", ésta es resultado de éxito. La probabilidad de éxito,  $P(Y=1)$  es igual a 0.5. Por tanto  $Y \sim \text{Bernoulli}(0.5)$ .

Ahora, ¿Cuál es la probabilidad de obtener 6 caras al lanzar una moneda 10 veces?

$$p(6) = \frac{10!}{6! \cdot (10-6)!} \star 0,5^6 \star (1 - 0,5)^{10-6}$$

$$p(6) = 0,205$$

Entonces, se tiene una probabilidad del 20.5 % de obtener 6 caras al lanzar 10 veces una moneda.

### 8.5.3.3 Distribución Binomial Negativa.

La distribución Binomial negativa constituye una extensión de la distribución geométrica. El número Y de pruebas que genera r-ésimo éxitos en un experimento binomial negativo se llama *variable aleatoria binomial negativa* y su distribución de probabilidad se llama *distribución binomial negativa* sus ecuaciones se observan en la figura 67.

Si X es una variable aleatoria binomial negativa con parámetros p y r, entonces la media y la varianza son X según la tabla 20.

Tabla 20: Media y mediana de distribución binomial negativa.

Media	Varianza
$\mu_X = E(x) = \frac{r}{p}$	$\sigma_X^2 = V(X) = r(1 - p)/p^2$

**Ejemplo 8.7** (Fuente: HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería*. 4 ed. México.: Cecs, 2006.). En una prueba de fuerza de soldadura, 80 % de las pruebas da como resultado ruptura de soldadura, mientras que otro 20 % propicia ruptura de la viga. Sea  $X$  el número de pruebas incluyendo la tercera ruptura de la viga. ¿Cuál es la distribución de  $X$  ? Determine  $P(X=8)$ .

Solución. Dado que  $X$  representa el número de ensayos incluyendo al tercer éxito, y puesto que la probabilidad de éxito es  $p = 0.2$ ,  $X \sim \text{NB}(3, 0.2)$ . Se calculará  $P(X=8)$  y el método de calculo conducirá a una deducción de la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria binomial negativa. Debido a que  $X \sim \text{NB}(3, 0.2)$ , el evento  $X = 8$  significa que el tercer éxito se presentó en el octavo ensayo. Otra forma de decir esto es que hubo exactamente dos éxitos en los primeros siete (7) ensayos y el octavo ensayo fue un éxito. En virtud de que todos los experimentos son independientes, se tiene que  $P(Y = 8) = P(\text{Sólo dos éxitos en los primeros siete ensayos}) P(\text{éxitos en el octavo ensayo})$

Ahora el número de éxitos en los primeros siete ensayos tiene una distribución  $\text{Bin}(7, 0.2)$ , por lo que

$$P(\text{exactamente dos éxitos en los primeros siete ensayos}) = \binom{7}{2} (0,2)^2 (0,8)^5$$

La probabilidad de que el octavo ensayo dé como resultado un éxito es 0.2. Por tanto,

$$P(Y = 8) = \binom{7}{2} (0,2)^2 (0,8)^5 (0,2)$$

$$P(Y = 8) = 0,05505$$

#### 8.5.3.4 Distribución Multinomial.

La distribución multinomial es similar a la distribución binomial, con la diferencia de que en lugar de dos posibles resultados en cada ensayo, puede haber múltiples resultados, la función de masa de probabilidad se observa en la figura 67.

**Ejemplo 8.8** (Fuente: HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería*. 4 ed. México.: Cecs, 2006.). Se inspecciona las unidades producidas por una línea de ensamble, y se clasifica cada una como correspondiente (aceptable), inferior o rechazada. En general, 70 % de las unidades son correspondientes, 20 % son inferiores y 10 % rechazadas. Suponga que se selecciona de forma independiente y aleatoria cuatro unidades. Sean  $Y_1, Y_2, Y_3$  los números entre los cuatro eventos correspondientes, inferiores y rechazados, respectivamente. ¿Cuál es la distribución de  $Y_1, Y_2, Y_3$ ?

Solución. Cada unidad es un ensayo multinomial con tres posibles resultados: correspondiente, inferior y rechazada. Las probabilidades asociadas con los resultados son  $p_1 = 0,7$ ,  $p_2 = 0,2$  y  $p_3 = 0,1$ . Las variables aleatorias  $Y_1, Y_2, Y_3$  se refieren a los números de cada resultado en los cuatro ensayos independientes. Por tanto,  $Y_1, Y_2, Y_3 \sim MN(4, 0.7, 0.2, 0.1)$ .

Para mostrar cómo se calculan las probabilidades de variables aleatorias multinomiales, se calculará  $P(Y_1 = 2, Y_2 = 1, Y_3 = 1)$ , en la que  $Y_1, Y_2, Y_3$  se definieron anteriormente.

Esto último conduce a una deducción de la función de masa de probabilidad multinomial. Se comenzará por observar que hay 12 arreglos de dos (2) correspondientes (C), una inferior (D) y una rechazada (R) entre los cuatro (4) resultados.

*CCDR CCRD CDRD CDCR CRCD CRDC  
DCCR DCRC DRCC RCCD RCDC RDCC*

Cada uno de estos 12 arreglos es igualmente probable. Se calcula la probabilidad de CCDD. El evento CCDD es una secuencia de cuatro resultados: C en el primer ensayo, C en el segundo, D en el tercer y R en el cuarto. Dado que los ensayos son independientes, la probabilidad de la secuencia de resultados es igual al producto de cada una de sus probabilidades.

$$P(CCDD) = (0,7)(0,7)(0,2)(0,1)$$

Puesto que cada uno de los 12 arreglos tiene la misma probabilidad,

$$P(Y_1 = 2, Y_2 = 1, Y_3 = 1) = (12)(0,7)^2(0,2)(0,1) = 0,1176$$

### 8.5.3.5 Distribución Geométrica.

Suponga que se lleva a cabo una secuencia de ensayos de Bernoulli independientes, cada uno con la misma probabilidad de éxito  $p$ . Sea  $X$  el número de experimentos hasta incluir el primer éxito. Por tanto,  $X$  es una variable aleatoria discreta, la cual tiene una Distribución Geométrica con parámetro  $p$ . Se expresa como  $X \sim \text{Geom}(p)$ .

Entonces, si  $X \sim \text{Geom}(p)$  es la función de masa de probabilidad de  $X$  se muestra en la figura 67.

**Ejemplo 8.9** (Fuente: HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería*. 4 ed. México.: Cecs, 2006.). Una prueba de resistencia de soldadura consiste en poner cargar en uniones soldadas hasta que se dé una ruptura. Para cierto tipo de soldadura, 80 % de las rupturas ocurren en la propia soldadura, mientras que el otro 20 % se da en las vigas. Se prueba cierto número de soldaduras. Sea  $Y$  el número

de pruebas, incluyendo la primera que da como resultado la ruptura de la viga. ¿Cuál es la distribución de  $Y$ ?

Solución. Cada prueba es un ensayo de Bernoulli, con un éxito definido como la ruptura de una viga. Por consiguiente, la probabilidad de éxito es  $p = 0.2$ . El número de ensayos incluyendo al primer éxito tiene una distribución geométrica con parámetro  $p = 0.2$ . Por consecuencia,  $Y \sim \text{Geom}(0.2)$ .

### 8.5.3.6 Distribución Hipergeométrica.

La distribución hipergeométrica es el modelo que se aplica en experimentos donde, al igual que en la distribución binomial, en cada ensayo hay tan sólo dos posibles resultados: éxito o fracaso. Pero se diferencia de la distribución binomial en que los distintos ensayos son dependientes entre sí. Suponga una población finita que contiene  $N$  unidades, de ellas  $R$  son clasificadas como éxitos y  $N - R$  como fracasos. Suponga que se extraen  $n$  unidades de esta población, y sea  $Y$  el número de éxitos en la muestra. Entonces  $Y$  sigue la distribución Hipergeométrica con los parámetros  $N$ ,  $R$  y  $n$ , que se puede denotar como  $X \sim H(N, R, n)$ . La función de masa de probabilidad de  $X$  se observa en la figura 67.

**Ejemplo 8.10** (Fuente: HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería*. 4 ed. México.: Cecs, 2006.). Se tiene un lote de 20 unidades que contiene seis (6) que están defectuosos, y que se extrae aleatoriamente cinco (5) unidades de este lote. Sea  $X$  el número de unidades defectuosas en la muestra. Se calculará  $P(X=2)$ . Con este propósito, primero se cuenta el número total de los grupos diferentes de cinco (5) unidades que puede extraerse de la población de 20. El número de combinaciones de cinco (5) unidades es el número de muestras diferentes que se puede extraer, y cada una es igualmente probable. Después se determinará cuántas de estas combinaciones contienen exactamente dos defectuosas. La probabilidad de que una combinación de cinco (5) unidades contenga sólo dos (2) defectuosas es el cociente,  $P(X = 2) = \frac{\text{Número de combinaciones de cinco unidades que contiene dos defectuosas}}{\text{Número de combinaciones de cinco unidades que pueden seleccionarse entre 20}}$

En general, el número de combinaciones de  $k$  unidades que se puede elegir de un grupo de  $n$  unidades se denota por  $\binom{n}{k}$  y es igual a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Por tanto, el número de combinaciones de cinco (5) unidades que se puede elegir entre 20 está dado por:

$$\binom{20}{5} = \frac{20!}{5!(20-5)!} = 15504$$

Para determinar el número de combinaciones de cinco (5) que contienen sólo dos (2) defectuosas, se describe la construcción de dicha combinación como una secuencia de dos operaciones. Primero, se selecciona dos unidades de las seis (6) defectuosas; segundo, se seleccionan tres unidades de las 14 no defectuosas. El número de combinaciones de dos (2) unidades seleccionadas entre seis (6) es

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$$

Y el número de combinaciones de tres (3) unidades elegidas de 14 es

$$\binom{14}{3} = \frac{14!}{3!(14-3)!} = 364$$

Por tanto, el número total de combinaciones de cinco (5) unidades que puede componerse de dos (2) defectuosas y tres (3) no defectuosas es el producto  $\binom{6}{2} \binom{14}{3} = (15)(364) = 5460$ . Se concluye que,

$$P(X = 2) = \frac{\binom{6}{2} \binom{14}{3}}{\binom{20}{5}}$$

$$P(X = 2) = \frac{5460}{15504} = 0,3522$$

Para calcular  $P(X = 2)$ , fue necesario conocer el número de unidades en la población (20), el de unidades defectuosas en la población (6) y el de unidades extraídas (5). La función de masa de probabilidad de la variable aleatoria  $X$  se determina al utilizar estos tres parámetros. Específicamente,  $Y$  tiene una distribución hipergeométrica con los parámetros 20, 6 y 5, ello se denota mediante  $X \sim H(20, 6, 5)$ .

### 8.5.3.7 Distribución de Poisson.

Esta distribución aparece en algunos procesos que tienen una dimensión temporal o espacial. En este tipo de experimentos los éxitos buscados son expresados por unidad de área, tiempo, etc. Y la región específica podría ser: un segmento de línea, un área o quizás una pieza de material. Un experimento Poisson se deriva de un proceso Binomial, el cual verifica las siguientes propiedades:

1. El número de resultados que ocurren en un intervalo o región específica es independiente del número que ocurre en cualquier otro intervalo o región del espacio

disyunto.

2. La probabilidad de que ocurra un solo resultado durante un intervalo muy corto o una región pequeña es proporcional a la longitud del intervalo o al tamaño de la región y no depende del número de resultados que ocurren fuera de este intervalo o región.
3. La probabilidad de que ocurra más de un resultado en tal intervalo corto o que caiga en tal región pequeña es insignificante.

El número  $X$  de resultados que ocurren durante un experimento de Poisson se llama *variable aleatoria de poisson* y su distribución de probabilidad se llama *distribución de Poisson*. La fórmula a utilizar será 94.

$$P(y = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad (94)$$

Donde,

$P(y=k)$  es la probabilidad de que ocurran  $k$  éxitos cuando el número promedio de ocurrencia de ellos es  $\lambda$ .

$\lambda$  es la media o promedio de éxitos por unidad de tiempo, área o producto.

$Y, y$  es la variable que nos denota el número de éxitos que se desea que ocurra.

Hay que hacer notar que en esta distribución el número de éxitos que ocurren por unidad de tiempo, área o producto es totalmente al azar y que cada intervalo de tiempo es independiente de otro intervalo dado, así como cada área es independiente de otra área dada y cada producto es independiente de otro producto dado. En estas condiciones el proceso de Poisson, que mide el número de éxitos en un intervalo de tiempo  $t$ , en lugar de por unidad de tiempo, vendría dado por la ecuación 269.

$$p_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \quad (95)$$

Donde  $n=0, 1, 2, \dots$ , y a  $\lambda$  se le llama tasa de emisión (por unidad de tiempo).

**Ejemplo 8.11** (Fuente: HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería*. 4 ed. México.: Cecs, 2006.) En la inspección de hojalata producida por un proceso electrolítico continuo, se identifican 0.2 imperfecciones en promedio por minuto. Determine las probabilidades de identificar.

- a) Una imperfección en 3 minutos.
- b) Al menos dos imperfecciones en 5 minutos.

c) Cuando más una imperfección en 15 minutos.

Solución.

a)  $y$  es la variable que nos define el número de imperfecciones en la hojalata por cada 3 minutos = 0, 1, 2, 3, ..., etc. y  $\lambda$  es las imperfecciones en promedio por cada 3 minutos en la hojalata, entonces:

$$\lambda = 0,2 \times 3 = 0,6$$

$$p(y = 1, \lambda = 0,6) = \frac{(0,6)^1 e^{-0,6}}{1!}$$

$$p(y = 1, \lambda = 0,6) = \frac{(0,6) \cdot 0,55}{1} = 0,33$$

b)  $y$  es la variable que nos define el número de imperfecciones en la hojalata por cada 5 minutos = 0, 1, 2, 3, ..., etc. y  $\lambda$  es las imperfección en promedio por cada 5 minutos en la hojalata, entonces:

$$\lambda = 0,2 \times 5 = 1$$

$$p(y = 2, 3, 4, etc... \lambda = 1) = 1 - p(y = 0, 1, \lambda = 1) = 1 - \left[ \frac{(1)^0 e^{-1}}{0!} + \frac{(1) \cdot e^{-1}}{1!} \right]$$

$$p(y = 2, 3, 4, etc... \lambda = 1) = 1 - (0,37 + 0,37) = 0,27$$

c)  $y$  es la variable que nos define el número de imperfecciones en la hojalata por cada 15 minutos = 0, 1, 2, 3, ..., etc.  $\lambda$  es las imperfecciones en promedio por cada 15 minutos en la hojalata, entonces:

$$\lambda = 0,2 \times 15 = 3$$

$$p(y = 0, 1, \lambda = 3) = p(y = 0, \lambda = 3) + p(y = 1, \lambda = 3) = \frac{(3)^0 e^{-3}}{0!} + \frac{(3)^1 e^{-3}}{1!}$$

$$p(y = 0, 1, \lambda = 3) = 0,05 + 0,15 = 0,2$$

También se puede considerar esta distribución como una aproximación de la binomial cuando  $n \uparrow$  y  $p \downarrow$ , pero el producto  $n \cdot p$  permanece constante. Cuando en una distribución binomial se realiza el experimento un número " $n$ " muy elevado de veces y la probabilidad de éxito " $p$ " en cada ensayo es reducida, manteniéndose constante  $n \cdot p$ , entonces se aplica el modelo de distribución de Poisson.

Realizamos indefinidamente el experimento y definimos la variable aleatoria discreta como:

$Y$  es el "Número de éxitos obtenidos" que puede tomar los valores  $k = 0, 1, 2, \dots$

Al igual que ocurría con la binomial, los valores acumulados de la distribución de Poisson se encuentran tabulados para que resulte más fácil su manejo.

**Ejemplo 8.12** (Fuente: HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería*. 4 ed. México.: Cecs, 2006.) En una concurrida intersección de

tráfico, la probabilidad de que un automóvil tenga un accidente de tráfico es muy escasa, digamos de 0.0001. Sin embargo, durante cierta parte del día (entre las 4:00 pm y las 6:00 pm) un gran número de automóviles pasa por esa intersección, digamos unos 1000. En dichas condiciones, ¿cual es la probabilidad de que dos o más accidentes ocurran durante ese período?

Solución.

$Y$  es el número de accidentes en 1000 automóviles

$$Y \sim \text{Binomial}(1000, 0.0001)$$

$$P(Y \geq 2)$$

Como la probabilidad " $P$ " es menor que 0,1, y  $n \geq 30$ , entonces aplicamos el modelo de distribución de Poisson y podríamos aproximar por:

$$Y \sim P(0,1) P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - 0,9953 = 0,0047$$

## 8.6 DISTRIBUCIONES BIVARIADAS DE PROBABILIDAD

Existen diferentes tipos de distribuciones bivariadas las cuales encontramos en la tabla 21.

Tabla 21: Distribuciones de probabilidad Bivariadas

Tipo de distribución	VARIABLES DISCRETAS	VARIABLES CONTINUAS
<b>MARGINAL</b>	$P(X Y) = P(X,Y) / P_1(X)$ $P(Y X) = P(X,Y) / P_2(Y)$	$f(X Y) = f(X,Y) / f_1(X)$ $f(Y X) = f(X,Y) / f_2(Y)$
<b>CONDICIONAL</b>	$P_1(X) = \sum_{y=1}^n P(X, Y)$ $P_2(Y) = \sum_{x=1}^n P(X, Y)$ <p><math>n</math> : N° de valores adquiridos por la variable aleatoria</p>	$f_1(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(X,Y) dx$ $f_2(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(X,Y) dy$
<b>CONJUNTA</b>	$P(X, Y) = P_1(X)P_2(Y)$	$f(X, Y) = f_1(X)f_2(Y)$

### 8.6.1 Distribuciones bivariadas para variables aleatorias discretas

Si se tienen dos variables  $X$  y  $Y$ , las cuales son importantes para un caso de estudio en cuanto a la probabilidad de los valores que ésta tomara y de las cuales dependerán el

comportamiento y la exactitud del proyecto como tal.

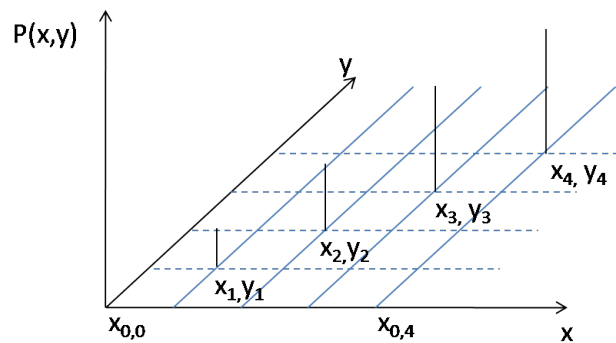
De manera similar a las distribuciones de una sola variables, una distribución de probabilidad bivariable se puede mostrar de forma tanto tabular como gráfica, o en algunos casos de forma matemática, como es el caso donde  $[X, Y]$  sean continuas<sup>75</sup>.

Un ejemplo de valores de probabilidad  $P(X, Y)$ , para cada punto de  $P_{x,y}$ , se listan en la tabla 22, y se muestra graficamente en la figura 68.

Tabla 22: Valores tabulados son  $p(x,y)$

$\frac{X}{Y}$	0	1	2	3	4
0	$P_{0,0}$	$P_{1,0}$	$P_{2,0}$	$P_{3,0}$	$P_{4,0}$
1	$P_{0,1}$	$P_{1,1}$	$P_{2,1}$	$P_{3,1}$	$P_{4,1}$
2	$P_{0,2}$	$P_{1,2}$	$P_{2,2}$	$P_{3,2}$	$P_{4,2}$
3	$P_{0,3}$	$P_{1,3}$	$P_{2,3}$	$P_{3,3}$	$P_{4,3}$
4	$P_{0,4}$	$P_{1,4}$	$P_{2,4}$	$P_{3,4}$	$P_{4,4}$

Figura 68: Presentación Gráfica de Probabilidad Bivariada



### 8.6.1.1 Propiedades

Las distribuciones bivariadas tienen algunas propiedades que se listan a continuación.

1. La intersección de dos eventos es la probabilidad que los dos eventos ocurran al tiempo y se expresa matemáticamente en la ecuación 96.

$$P(X \cap Y) = P(X = x, Y = y) = p(x, y) = p_1(x)p_2(y|x) = p_2(y)p_1(x|y) \quad (96)$$

<sup>75</sup> HINES. Op. cit., p. 300.

2. La probabilidad de la intersección para todos los valores de  $X$  y  $Y$  podrá ser una tabla gráfica o fórmula que es llamada “distribución de conjunto de probabilidad”, la cual proporciona los valores de  $p_{(x,y)}$  para todas las combinaciones de los valores de  $X$  y  $Y$ .
3. Requisitos de una distribución bivariada discreta de probabilidad para  $X$  y  $Y$ :

$$a) 0 \leq p_{(x,y)} \leq 1$$

$$\sum_y \sum_x p_{(x,y)} = 1$$

### 8.6.1.2 Distribuciones marginales de probabilidad

Se refiere a la distribución de probabilidad de  $X$  o  $Y$  por separado:

La ecuación 97 representa la distribución marginal de probabilidad de  $X$  y, la ecuación 98 representa la distribución marginal de probabilidad para  $Y$ :

$$P_{1(X=x)} = p_{(x)} = \sum_{y=1}^n p_{(x,y)} \quad (97)$$

$$P_{2(Y=y)} = p_{(y)} = \sum_{x=1}^n p_{(x,y)} \quad (98)$$

Donde  $n$  representa los valores de  $Y$  para cada combinación del valor de  $X$  al cual se esta hallando la probabilidad marginal<sup>76</sup>.

$P_1$  da la probabilidad observada de valores específicos de  $X$  y,  $P_2$  es la probabilidad de la variable aleatoria discreta  $Y$ , por ende  $P_1(X)$  y  $P_2(Y)$  son llamadas las “distribuciones de probabilidad marginal” para  $X$  y  $Y$ , que es la distribución incondicional de probabilidad.

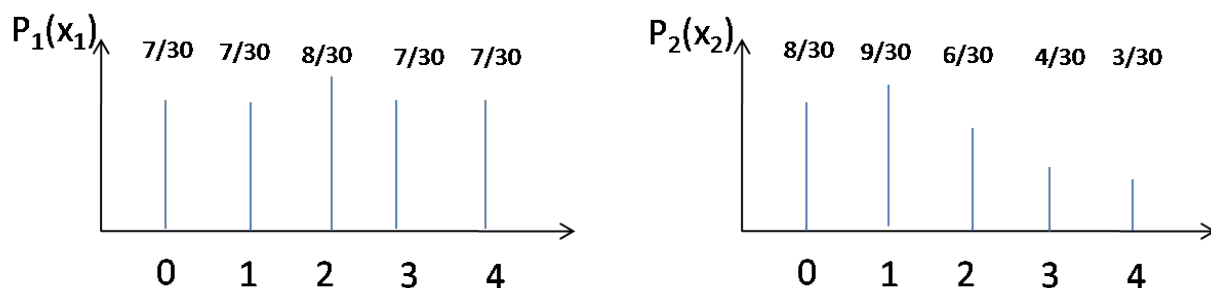
En la tabla 69 se muestra la distribución de probabilidad marginal para los datos listados, y estos a su vez son representados graficamente en la figura 70.

Figura 69: Distribuciones conjunta y marginales para  $[X, Y]$  tabuladas

Y \ X	0	1	2	3	4	P2[Y]
0	1/30	1/30	2/30	3/30	1/30	8/30
1	1/30	1/30	3/30	4/30		9/30
2	1/30	2/30	3/30			6/30
3	1/30	3/30				4/30
4	3/30					3/30
P1[X]	7/30	7/30	8/30	7/30	1/30	$\sum P(X)=1$

<sup>76</sup> MENDENHALL. Op. cit.,p. 212.

Figura 70: Gráfica de la Distribución marginal



### 8.6.1.3 Distribución condicional de probabilidad

Cuando se trabaja con dos variables aleatorias conjuntamente distribuidas puede resultar de interés encontrar la distribución de una de ellas, dado un valor particular de la otra, las expresiones que representan la distribución condicional de probabilidad son las ecuaciones 99 y 100.

$$p_1(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_2(y)} \quad (99)$$

y

$$p_2(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_1(x)} \quad (100)$$

### 8.6.2 Distribuciones bivariadas de probabilidad para valores aleatorios continuos

En este caso las funciones aplicadas a la probabilidad de las variables aleatorias continuas en lugar de ser sumatorias se convierten en integración debido a la naturaleza del tipo de las variables.

La función de densidad de probabilidad bivariada de conjunto  $f(x, y)$ , para las variables aleatorias continuas  $X$  y  $Y$ , satisface las siguientes propiedades dadas por las ecuaciones 101, 102 y 103.

$$f(x, y) \geq 0 \quad (101)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) = 1 \quad (102)$$

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \quad (103)$$

### 8.6.2.1 Función de densidad marginal

Las ecuaciones 104 y 105 representa las funciones de densidad para  $X$  y  $Y$  respectivamente.

$$f_1(x) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x, y) dy \quad (104)$$

y,

$$f_2(y) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x, y) dx \quad (105)$$

### 8.6.2.2 Función de densidad condicional

Las ecuaciones 106 y 107 representan las funciones de densidad condicional para  $X$  y  $Y$  respectivamente.

$$f_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \quad (106)$$

y

$$f_2(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \quad (107)$$

### 8.6.2.3 Valor esperanza de funciones de dos variables aleatorias

Si  $X$  es una variable aleatoria, y  $Z = H(X)$  es una función de  $X$ , el valor esperado de  $H(x)$  está dado por las ecuaciones 108 y 110, según las propiedades de la variable aleatoria.

$$E[H(X)] = \sum_i H(x_i) p_x(x_i) \quad (108)$$

Para  $X$  como variable discreta.

$$E[H(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) f_x(x) \quad (109)$$

Para  $X$  como variable continua.

Si  $g(X, Y)$  es una función de variables aleatorias  $X$  y  $Y$ . Luego el valor esperanza (media) de  $g(x, y)$  es definido por las ecuaciones 110 y 111 según la naturaleza de las variables.

$$E[g(X, Y)] = \sum_Y \sum_X g(x, y) p(x, y) \quad (110)$$

donde  $X$  y  $Y$  son discretas.

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy \quad (111)$$

donde  $X$  y  $Y$  son continuas.

Los teoremas que aplican a la esperanza bivariada son<sup>77</sup> :

**Theorem 1.** Si  $c$  es una constante, luego  $E(c) = c$ .

Si  $c$  es una constante, y  $g(x, y)$  es una función de las variable aleatorias  $X$  y  $Y$ , se cumple la ecuación 112.

$$E[cg(X, Y)] = cE[g(X, Y)] \quad (112)$$

**Theorem 2.** Si  $g_1(X, Y), g_2(X, Y), \dots, g_k(X, Y)$  son  $k$  funciones de variables aleatorias  $X$  y  $Y$  entonces el valor esperanza de la suma de estas funciones es la suma del valor espéranza de las mismas dado en la ecuación 113.

$$E[g_1(X, Y) + g_2(X, Y) + \dots + g_k(X, Y)] = E[g_1(X, Y)] + E[g_2(X, Y)] + \dots + E[g_k(X, Y)] \quad (113)$$

Según el ejemplo dado en la figura 69, el valor esperanza para  $X$ , es:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{7}{30} + 1 \cdot \frac{7}{30} + 2 \cdot \frac{8}{30} + 3 \cdot \frac{7}{30} + 4 \cdot \frac{1}{30} = 8/5$$

#### 8.6.2.4 Independencia

Como dos eventos  $A$  y  $B$  son independientes se cumple que  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ , dos variables aleatorias continuas son independientes si satisfacen un criterio similar.

- Si  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias discretas con una distribución de probabilidad de conjunto  $p(x, y)$  y una distribución de probabilidad marginal  $p_1(x)$  y  $p_2(y)$ . Luego  $X$  y  $Y$  son independientes si y solo si  $p(x, y) = p_1(x)p_2(y)$  para todos las parejas.
- Si  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias continuas con una función de densidad de conjunto  $f(x, y)$  y una función de densidad marginal  $f_1(x)$  y  $f_2(y)$ . Luego  $X$  y  $Y$  son independientes si y solo si  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$  para todos las parejas

Para las variables independientes se cumple el teorema:

Si  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias independientes:  $E(XY) = E(X)E(Y)$

En el dominio de la función de distribución bivariable, se debe presentar un rectángulo con los puntos que tienen una probabilidad positiva si las variables son independientes, ya que de lo contrario los valores que toma una de ellas condiciona la existencia de la otra, aunque esta condición no es definitiva para concluir tal afirmación.

---

<sup>77</sup> Ibid., p. 221.

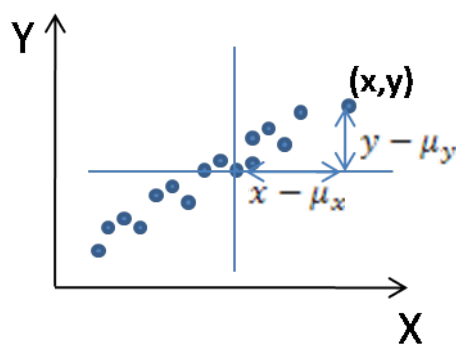
### 8.6.3 La covarianza y correlación de dos variables aleatorias

La relación que existe entre dos variables aleatorias, al graficar los valores pares  $(x, y)$  de los puntos de muestreo se podrá visualizar la proporcionalidad lineal ya sea directa o indirecta, o la inexistencia de ésta; dependiendo de la dispersión de los puntos con respecto a una línea recta, se puede verificar que tan fuerte o débil es susodicha relación lineal. Una manera de hallar el tipo de relación que existe entre las dos variables es calcular el producto cruz de la desviaciones  $(x - \mu_x)$  y  $(y - \mu_y)$  para cada punto, que arrojará un valor positivo si los puntos de los datos están ubicados mas arriba o a la derecha o mas bajo y a la izquierda del cuadrante, en una pendiente positiva; ó, negativos cuando la ubicación de los puntos se encuentra mas arriba a la izquierda o mas abajo a la derecha del cuadrante, en una pendiente negativa. Si los valores del producto cruz son tanto positivos como negativos y su valor medio relativamente pequeño, cercano a cero, se evidenciara una proporción lineal débil ya que la ubicación de los puntos hará presencia en los cuatro cuadrantes.

La covarianza de dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$  es definida por la ecuación 114.

$$Cov(X, Y) = E [(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] \quad (114)$$

Figura 71: Ubicación puntos de los productos de las desviaciones.



Fuente: MENDENHALL, William. y SINCICH, Terry. *Statistics for Engineering and the Sciences*. 5 ed. New York, USA.: Pearson Prentice-Hall, Inc, 2007.

Para el valor de la covarianza de dos variables aleatorias se cumple los teoremas expuestos en las ecuaciones 115.

**Theorem 3.**

$$Cov(X, Y) = E(XY) - \mu_x \mu_y \quad (115)$$

**Theorem 4.** Si dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$  son independientes:

$$Cov(X, Y) = 0 \quad (116)$$

La prueba del teorema 3 es radicado del teorema 4.

Si la magnitud de la covarianza entre dos variables aleatorias es positiva,  $Y$  tiende a incrementar cuando  $X$  se incrementa. En cambio cuando la magnitud de la covarianza es negativa  $Y$  tiende al decremento cuando  $X$  incrementa, y si el valor de la covarianza es igual a cero no existe relación lineal entre  $X$  y  $Y$ , de lo contrario cuando el valor es diferente de cero su valor absoluto dependerá de las unidades de medición de  $X$  y  $Y$ , por ello se define una versión estandarizada de la covarianza conocida como coeficiente de correlación.

El coeficiente de correlación  $\rho$  representa una medida numérica de la fuerza de la relación lineal entre dos variables<sup>78</sup>, este valor esta dado por la ecuación 117 para dos variables aleatorias.

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{(\sigma_x \sigma_y)} \quad (117)$$

Donde  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  son las desviaciones estándar de  $X$  y  $Y$  respectivamente.

$\rho$  arroja valores en el intervalo  $-1 \leq \rho \leq 1$ , especialmente en los valores de 1 y -1 se presenta perfecta relación lineal entre  $X$  y  $Y$ , lo anterior con una pendiente positiva y otra negativa, respectivamente. Si  $\rho = 0$  no significa con certesa que las variables aleatorias son independientes, sin embargo no habrá linealidad entre  $X$  y  $Y$ .

### 8.6.3.1 Distribución normal bivariada

En el caso de una distribución bivariada la expresión que representa su función normalizada esta dada por la ecuación 118. En la cual se condiciona que la desviación estándar de la distribución marginal de  $x$  y  $y$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  respectivamente, son positivas, y el coeficiente de correlación varía en el rango de  $-1 < \rho < 1$ , para cualquier valor de la media,  $\mu_x$  y  $\mu_y$ , para toda  $x$  y  $y$  en su orden.

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-0,5}{1-\rho^2} \left( \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right)} \quad (118)$$

Las distribuciones de probabilidad marginal mencionadas anteriormente son consideradas de naturaleza normal.

<sup>78</sup>SPIEGEL, M y SCILLER, J; Probabilidad y Estadística. 2da Ed, Mc Graw-Hill, Colombia.2006.

### 8.6.3.2 Relación lineal de variables aleatorias

En el estudio de una variable que depende de variables aleatorias, se puede presentar una relación lineal entre ellas, lo cual genera una *combinación lineal* entre las variables independientes, como se expresa en la ecuación 119, donde una variable,  $Y$ , es aleatoria debido a que depende de forma proporcional a  $p$  variables aleatorias.

$$Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_pX_p \quad (119)$$

El valor esperado y la varianza para la variable,  $Y$ , está dado por la ecuación 120 y 121, teniendo en cuenta para ésta para el cálculo de la varianza se requiere que las variables de la combinación lineal sean independientes<sup>79</sup>.

$$E(Y) = c_1E(X_1) + c_2E(X_2) + \dots + c_pE(X_p) \quad (120)$$

$$V(Y) = c_1^2V(X_1) + c_2^2V(X_2) + \dots + c_p^2V(X_p) \quad (121)$$

## 8.7 DISTRIBUCIONES MUESTRALES

Estas distribuciones describen el comportamiento probabilístico de la estadística en muestreos repetidos del mismo universo o en el proceso mismo de asignación de variables del proceso<sup>80</sup>.

Siendo  $n$  mediciones en un muestreo que pueden ser vista como observaciones sobre  $N$  variables aleatorias,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . En consecuencia la media  $\bar{Y}$ , la varianza muestral  $s^2$ , y otras estadísticas son funciones de las variables aleatorias, con ayuda de estas se halla los parámetros de la población y de esta manera hallar y evaluar las propiedades de la distribución de probabilidad de una estadística, que son llamadas distribuciones muestrales de la estadística; análogamente para una variable aleatoria singular su media es el valor esperanza de la estadística, su desviación estándar, el error estándar de la estadística. “Las distribución muestral de una estadística es su distribución de probabilidad”<sup>81</sup>.

El error estándar de una estadística es la desviación estándar de su distribución de muestreo. Existen varias técnicas matemáticas que sirven como herramienta para hallar

---

<sup>79</sup>Ibid., p. 270.

<sup>80</sup>MONTGOMERY. Op. cit., p. 300.

<sup>81</sup>Ibid., p. 300.

la distribución muestreada de una estadística que puede ser halladas utilizando herramientas computacionales que permitan simular una distribución muestreada.

Si estamos inhabilitados para encontrar una forma matemática exacta para una distribución de probabilidad o hacer una simulación aproximada podemos hallar su media y varianza utilizando otros métodos, y con ayuda de un rol empírico obtener una descripción aproximada de la distribución muestreada.

### 8.7.1 Distribución t de estudiante

Debido a la necesidad de corregir la sobre-estimación en cuanto a la probabilidad de valores cercanos a la media y sub-estimaciones de la probabilidad de las muestras alejadas de su media, fue desarrollada la distribución t de estudiante, defecto que ocurre cuando el número de muestras tomadas,  $n$  es muy pequeño.

La función de distribución de probabilidad de t de estudiante está dada por la ecuación 122.

$$p(t, v) = \frac{\Gamma[\frac{v+1}{2}]}{\sqrt{\pi v} \Gamma(\frac{v}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \quad (122)$$

Donde:

$v$ : Grados de libertad

$\Gamma$ : Función gamma con las siguientes propiedades,

$\Gamma(n) = (n - 1)!$  para  $n$ :integrador completo,

$\Gamma(m) = (m - 1)(m - 2) \dots (3/2)(1/2)\sqrt{\pi}$  para  $m$ :integrador medio,

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Los valores de la media y desviación estándar se representan por las ecuaciones 123 y 124 si  $N$  es muy grande, y por las ecuaciones 125 y 126 si  $N$  es pequeña.

$$x' = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) * \sum_{i=1}^n (x_i - x')^2 \quad (123)$$

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x')^2 \quad (124)$$

$$\bar{x} = 1/N \sum_{i=1}^N x_i \quad (125)$$

$$s_x^2 = 1/(N - 1) \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (126)$$

$\bar{x}$ : Media muestral, valor que varía con respecto a  $x'$ .

$x'$ : Media real.

$s_x^2$ : Varianza de la muestra, en contraste con  $\sigma^2$ .

$\sigma^2$ : Varianza real.

Al igual que en la distribución normal se estandariza una variable estadística dada en la ecuación 127.

$$t_1 = (x_1 - \bar{x})/s_x \quad (127)$$

Entonces la probabilidad para la variable distribuida normalmente,  $x_i$ , en un muestreo pequeño, esta dado por la ecuación 128.

$$x_i = \bar{x} \pm t_{v,p} s_x (\%P) \quad (128)$$

Donde,  $\pm t_{v,p} s_x$  representa el intervalo de precisión. Los valores son listados en la tabla 23.

Tabla 23: Variable t para diferentes valores de  $v$  y  $P$ .

$v$	$t_{v,P=50\%}$	$t_{v,P=90\%}$	$t_{v,P=95\%}$	$t_{v,P=99\%}$
1	1.000	6.341	12.706	63.657
2	0.816	2.920	4.303	9.925
3	0.765	2.353	3.192	5.841
4	0.741	2.132	2.770	4.604
5	0.727	2.015	2.571	4.032
6	0.718	1.943	2.447	3.707
7	0.711	1.895	2.365	3.499
8	0.706	1.860	2.306	3.355
18	0.688	1.734	2.101	2.878

Fuente: DUNN, Patrick. *Measurement & Data Analysis for Engineering & Science*. 1 ed. University of Notre Dame, Indiana, USA.: McGraw-Hill, 2005.

La relación entre la variable t de estudiante y la variable z normalizada esta dada por la ecuación 130, teniendo en cuenta la ecuación 129 que corresponde a la expresión de la media de la distribución de probabilidad normalizada.

$$x_i = x' \pm z_p \sigma (\%P) \quad (129)$$

$$t_{v,p} = \pm [(x' - \bar{x}) \pm z_p \sigma] / s_x (\%P) \quad (130)$$

Cuando  $N$  tiende al infinito, la función de distribución de  $t$  de estudiante, tiende a aproximarse a la función de distribución normal<sup>82</sup>.

<sup>82</sup> DUN. Op. cit., p.226.

**Ejemplo 8.21** (Fuente: HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería*. 4 ed. México.: Cecs, 2006.) Se realiza un experimento en cual un muestreo finito de 19 valores de una presión diferencial son medidos, los cuales toman valores de: 4.97, 4.92, 4.93, 5.0, 4.98, 4.92, 4.91, 5.06, 5.01, 4.98, 4.97, 5.02, 4.92, 4.94, 4.98, 4.99, 4.92, 5.04 y 5.0. Estimar el rango de presión de la presión diferencial con  $P = 95\%$ , dado los valores medidos.

Solución: Se utiliza las respectivas ecuaciones para la media y varianza muestral con valor de  $N$  pequeño:

$$\bar{p} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i = \frac{1}{19}(4,97 + 4,92 + 4,93 + 5,0 + 4,98 + 4,92 + 4,91 + 5,06 + 5,01 + 4,98 + 4,97 + 5,02 + 4,92 + 4,94 + 4,98 + 4,99 + 4,92 + 5,04 + 5,0) = 4,97$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{(19-1)} \sum_{i=1}^{19} (p_i - \bar{p})^2} = 0,046$$

Con  $v = N - 1 = 18$ , lo cual corresponde a  $t_{v,P} = t_{18,95} = 2,101$ , según la tabla 2.

$$p_i = \bar{p} \pm t_{v,p} S_x (\%P) = 4,97 \pm 2,101(0,046)(95\%) = 4,97 \pm 0,097(95\%)$$

### 8.7.2 Distribución CHI Cuadrado

Utilizando unos valores de solo un muestreo de  $n$  mediciones y la ecuación 131 (el valor de la media real de una población de  $N$  muestras con  $n$  mediciones) puede ser calculado la media real de la población.

$$x' = \bar{x} t_{v,p} s_{\bar{x}} = \bar{x} + t_{v,p} \frac{s_x}{\sqrt{N}} (\%) \quad (131)$$

Igualmente, hay un camino análogo para estimar el rango que contiene la varianza real de una población usando los valores desde un solo muestreo de  $n$  mediciones.

Determinar el intervalo de precisión de la varianza real, comparar dos muestreos del mismo o diferente tamaño, son algunos cálculos estadísticos donde se aplica la distribución chi-cuadrado. La variable estadística,  $\chi^2$ , representa la suma de los cuadrados de los diferencias entre los valores normalizados medidos y esperados por su varianza. Luego, el valor de  $\chi^2$  es dependiente del número de mediciones,  $N$ , al cual la comparación es hecha, y, por lo tanto el número de grados de libertad,  $v = N - 1$ . Desde esta definición  $\chi^2$  se relaciona con la variable estandarizada,  $z_i = (x_i - x')/\sigma$ , y el número de mediciones

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N z_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - x')^2}{\sigma^2}$$

$\chi^2$  puede ser definido como una medida de la desviación total de todos los valores  $x_i$  desde la media real de su población con respecto a su desviación estándar, que es utilizada

para comparar el valor de  $\chi^2$  de una muestra con respecto al valor esperado dado por una muestra del mismo tamaño partiendo de una población normalmente distribuida,

$$\chi^2 = \left(\frac{vs_x^2}{\sigma^2}\right)$$

Si  $N \rightarrow \infty$ ,  $\chi^2 \rightarrow v$ :

La función de densidad de probabilidad de  $\chi^2 \geq 0$  está dada por la ecuación 132.

$$p(\chi^2, v) = [2^{v/2}\Gamma\frac{v}{2}]^{-1}(\chi^2)^{(v/2)-1}exp\left(\frac{-\chi^2}{2}\right) \quad (132)$$

Y en otro caso  $p(\chi^2, v) = 0$

Donde  $\Gamma$  representa la función gamma dada por:

$$\Gamma(v/2) = \int_0^\infty x^{(v/2)-1}exp(-x)dx = \left(\frac{v}{2} - 1\right)! \quad (133)$$

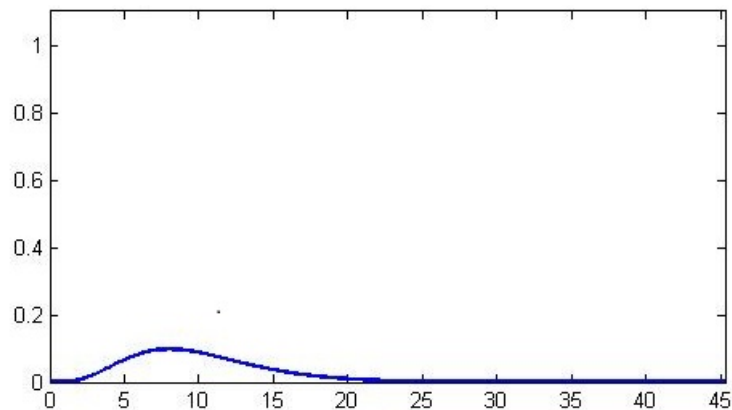
La media y la varianza de la distribución chi cuadrada está dada por la ecuación 134 y 135 respectivamente.

$$\mu = v \quad (134)$$

$$\sigma^2 = 2k \quad (135)$$

En la figura 72 se muestra la forma de una distribución de chi cuadrada, donde la variable aleatoria es no negativa, se visualiza que la distribución de probabilidad es sesgada hacia la derecha, y a medida que  $v$  se incrementa, la distribución será más simétrica, siendo su límite la distribución normal<sup>83</sup>.

Figura 72: Distribución Chi Cuadrada.



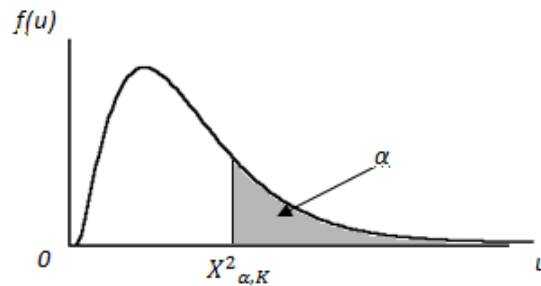
Al definirse  $\chi_\alpha^2$ , como el punto porcentual o valor de la variable aleatoria chi cuadrada con  $v$  grados de libertad, tal que la probabilidad de que  $\chi^2$  exceda ese valor es  $\alpha$ , lo cual

<sup>83</sup> MONTGOMERY. Op. cit., p. 308.

es expresado (figura 73) en la ecuación 136.

$$P\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2 = \int_{\chi_{\alpha}^2}^{\infty} p(\chi^2, v)d(\chi^2) = \alpha \quad (136)$$

Figura 73: Punto porcentual  $\chi_{\alpha}^2, k$  de la distribución chi cuadrada.



En este tipo de distribución se emplea la propiedad reproductiva, la cual se expresa en el teorema.

**Theorem 5.** Sea  $\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_p^2$  variables aleatorias chi cuadrada independientes con  $v_1, v_2, \dots, v_p$  grados de libertad. Entonces la expresión dada en la ecuación 137, sigue que la distribución chi cuadrada con el valor de grados de libertad dado en la ecuación 138.

$$Y = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \dots + \chi_p^2 \quad (137)$$

$$v = \sum_{i=1}^p v_i \quad (138)$$

### 8.7.3 Distribución F de Fisher

La función F tiene dos valores para los grados de libertad: Uno asociado con el numerador y otro asociado al denominador.

Características

- La distribución F es una distribución continua.
- No puede ser negativa
- La distribución F tiene un sesgo positivo
- A medida que aumentan los valores, la curva se aproxima al eje x, pero nunca lo toca

La función F está relacionada con el cociente de las varianzas cada una dividida en sus respectivos grados de libertad,  $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ , si  $s_1^2$  y  $s_2^2$  son varianzas muestrales independientes de tamaño  $n_1$  y  $n_2$  con varianzas  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$ .

Para la función de la distribución F dada en la ecuación 139, se clasifica como variables aleatorias independientes chi-cuadrada  $W$  y  $Y$ , con grados de libertad  $u$  y  $v$  respectivamente.

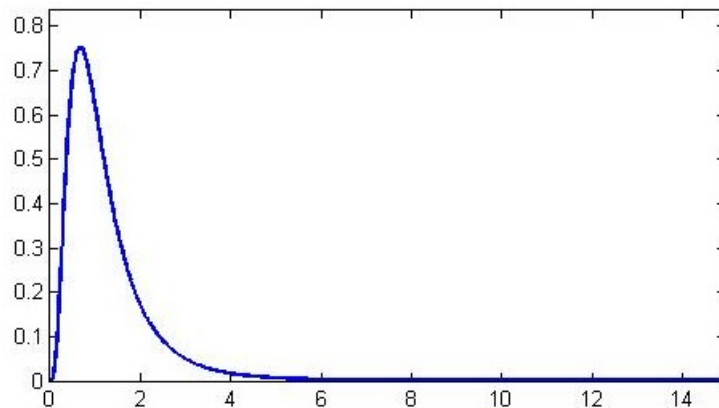
$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{u+v}{2}) (\frac{u}{v})^{u/2} x^{(u/2)-1}}{\Gamma(\frac{u}{2}) \Gamma(\frac{v}{2}) [(\frac{u}{v})x + 1]^{(u+v)/2}}, \quad 0 < x < \infty \quad (139)$$

La media y varianza de la distribución F está dada por la ecuación 140 y 141 respectivamente.

$$\mu = v/(v - 2) \quad (140)$$

$$\sigma^2 = \frac{2v^2(u + v - 2)}{u(v - 2)^2(v - 4)}, \quad v > 4 \quad (141)$$

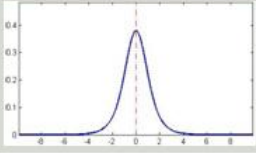
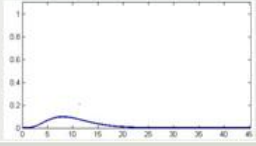
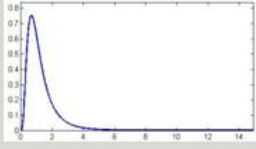
Figura 74: Función F



La distribución F utiliza una tabla que permite obtener los valores de ciertos cuantiles, para un gran número de grados de libertad.

En la tabla 75 se presenta un resumen de las diferentes distribuciones muestrales que fueron estudiadas.

Figura 75: Distribuciones Muestrales

EST.	ECUACION	CARACTERISTICA	GRAFICA
$t$	$p(t, v) = \frac{\Gamma\left[\frac{v+1}{2}\right]}{\sqrt{\pi v} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-(v+1)/2}$	$\mu = 0$ $\sigma^2 = \frac{v}{v-2}, v > 2$	
$\chi^2$	$\left[2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\right]^{-1} (X^2)^{\frac{v}{2}-1} \exp\left(-\frac{X^2}{2}\right)$	$\mu = v$ $\sigma^2 = 2v$	
$F$	$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right) \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{u}{2}} x^{(u/2)-1}}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \left[\frac{u}{v}x+1\right]^{(u+v)/2}} \quad 0 < x < \infty$	$\mu = \frac{v}{v-2}$ $\sigma^2 = \frac{2v^2(u+v-2)}{u(v-2)^2(v-4)}, v > 4$	

### 8.7.4 Desviación estándar de las medias

Para un muestreo de  $N$  mediciones, la región que contiene la media real  $x'$  de la población bajo la curva puede ser inferida desde su misma media,  $\bar{x}$ , y la desviación estándar  $s_x$ , esto es hecho estadísticamente relacionando la muestra de la población a través de la desviación estándar de las medias.

Asumir que hay  $N$  entradas (muestreo), cada una contiene  $n$  mediciones. Un valor específico es identificado por  $x_{ij}$ ; para cada entrada habrá un valor medio,  $\bar{x}_j$  (ecuación 142), donde:

$$\bar{x}_j = 1/N \left( \sum_{i=1}^n x_{ij} \right) \quad (142)$$

Y la desviación estándar es está dada por la ecuación 143.

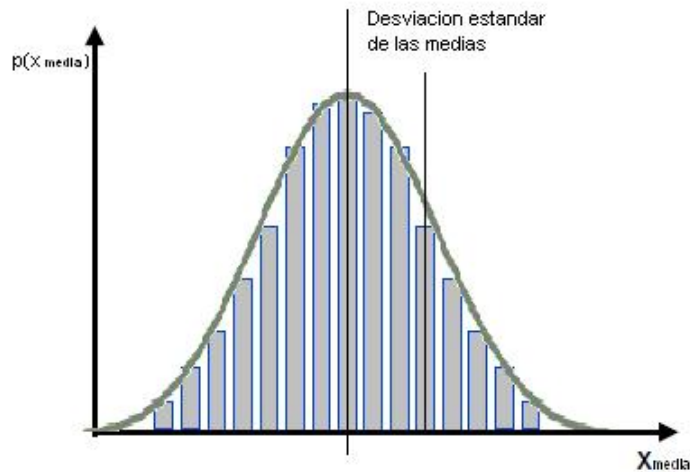
$$s_{x_j} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2} \quad (143)$$

Ahora cada  $\bar{x}_j$  es una variable aleatoria. El teorema del límite central nos asegura que los valores  $\bar{x}_j$  serán normalmente distribuidos cerca de su valor medio, la media de los

valores medios<sup>84</sup>,  $\bar{x}$ , está dado por la ecuación 144.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{x}_j \quad (144)$$

Figura 76: Funcion de densidad de probabilidad de los valores medios de x.



fuelle: DUNN, Patrick. Measurement & Data Analysis for Engineering & Science. 1 ed. University of Notre Dame, Indiana, USA.: McGraw-Hill, 2005.

La desviación estándar de los valores medios determinados como la desviación estándar de las medias está dado por la ecuación 145.

$$s_{\bar{x}} = \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\bar{x}_j - \bar{x})^2 \right]^{1/2} \quad (145)$$

Utilizando la ecuación 143, se halla la expresión dada en la ecuación 146, que especifica un factor para hallar los límites en los cuales cada valor medio real de la población entera llegara, desde los valores de una sola entrada finita, el valor medio de una población y su intervalo de incertidumbre está dado por la ecuación 147.

$$s_{\bar{x}} = s_x / \sqrt{N} \quad (146)$$

$$x' = \bar{x} + t_{v,p} s_{\bar{x}} = \bar{x} + t_{v,p} \frac{s_x}{\sqrt{N}} (\% \quad (147)$$

<sup>84</sup> DUNN. Op. cit., p. 238.

Esta formula implica que los limites entre cada  $x'$  pueden disminuir para una mayor precision en su estimación, esto puede ser logrado incrementando  $N$  o decrementando  $s_x$ .

Es mejor ser cuidadoso al planear un experimento para minimizar el número de efectos aleatorios con anticipación, ya que puede ser conveniente reducir  $s_x$  en lugar de gastar tiempo tomando mas datos para lograr los mismos limites en  $x'$ .

El intervalo de  $\pm t_{v,P} s_{\bar{x}}$  es llamado intervalo de precisión del valor medio real. Como  $N$  aumenta, la ecuación 146 indica que la desviación estándar de las Medias decrementa y el valor de la media muestral tiende hacia el valor de la media real, en este caso el intervalo de precisión del valor medio real puede ser visto como una medida de la incertidumbre para determinar  $x'$ .

### 8.7.5 Muestras puestas en común

Cuando es necesario combinar datos de  $N$  experimentos, cada uno compuesto por  $n$  mediciones, se puede colocar en común por una entrada  $N * n$  mediciones<sup>85</sup>, para el  $j$ -ésimo experimento se cumple las ecuaciones de la figura 77, si  $n$  no es constante para  $N$  experimentos, entonces se calcula la media ponderada en común.

Figura 77: Parámetros estadísticos entre medias de las muestras

TAMAÑO DE MUESTRAS	IGUALES	DIFERENTES
MEDIA	$\bar{x} = \{\bar{x}\} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \bar{x}_j = \frac{1}{MN} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N x_{ij}$	$\{\bar{x}\}_w = \frac{\sum_{j=1}^M N_j \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^M N_j}$
DESVIACION ESTANDAR	$\{S_{\bar{x}}^2\} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M S_{\bar{x}_j}^2 = \frac{1}{M(N-1)} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$	$\{S_x\}_w = \sqrt{\frac{v_1 S_{x_1}^2 + v_2 S_{x_2}^2 + \dots + v_M S_{x_M}^2}{v}}$ $v = \sum_{j=1}^M v_j = \sum_{j=1}^M (N_j - 1)$
FACTOR DE ERROR	$S_{\bar{x}_e} = S_x / \sqrt{N}$	$(S_{\bar{x}_e})_w = (S_x)_w / \sqrt{\sum_{j=1}^M N_j}$

### 8.7.6 Distribuciones muestradas de medias y sumas

Se debe aplicar el teorema del límite central: "Si una muestra aleatoria de  $n$  observaciones,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  es elaborado desde una población con media finita  $\mu$  y varianza

<sup>85</sup>Ibid., p. 240.

$\sigma^2$ , luego, cuando  $n$  es suficientemente grande, la distribución muestreada de la media muestral  $\bar{Y}$  puede ser aproximada por una función de densidad normal<sup>86</sup>.

Dado  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  son muestras aleatorias de  $n$  observaciones de una población con media finita  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ , entonces la media y la desviación estándar de la distribución muestreada de  $\bar{Y}$ , denotada  $\mu_{\bar{y}}$  (ecuación 148) y  $\sigma_{\bar{y}}$  (ecuación 149), respectivamente.

$$\mu_{\bar{y}} = \mu \quad (148)$$

$$\sigma_{\bar{y}} = \sigma / \sqrt{n} \quad (149)$$

Lo anterior permite entender que la distribución normal puede representar las distribuciones muestreadas con una considerable aproximación con una media muestreada  $\bar{y}$  tan grande como la población posea, media y varianza finita y el número de mediciones en el muestreo suficiente según el tipo de distribución a representar. Para el caso de una distribución normal de una población, entonces la distribución muestreada será una función de densidad normal sin tener en cuenta el tamaño de la muestra.

Por lo anterior se puede afirmar que “cualquier distribución muestreada de cualquier función lineal de variables normalmente distribuidas aleatorias, incluso aquellas que son correlacionadas, tienen medias y varianzas diferentes, es una distribución normal.”, lo cual se contempla en el siguiente teorema:

**Theorem 6.** Si  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son constantes y  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  son variables aleatorias normalmente distribuidas con un valor esperado, varianza y covarianza dadas por las ecuaciones 150, 151 y 152.

$$E(Y_i) = \mu_i \quad (150)$$

$$V(Y_i) = \sigma_i^2 \quad (151)$$

$$Cov(Y_i, Y_j) = \sigma_{ij} \quad (152)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Luego la distribución muestreada de una combinación de variables aleatorias normal  $l = a_1Y_1 + a_2Y_2 + \dots + a_nY_n$  Posee una función de densidad normal con media y varianza, dada por la ecuación 153 y 154, respectivamente.

$$E(l) = \mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \dots + a_n\mu_n \quad (153)$$

$$V(l) = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2 + 2a_1a_2\sigma_{12} + \dots + 2a_1a_n\sigma_{1n} + \dots + 2a_2a_n\sigma_{2n} + \dots + 2a_{n-1}a_n\sigma_{n-1,n} \quad (154)$$

---

<sup>86</sup>MENDENHALL. Op.cit., p. 400.

Para realizar una aproximación de la suma de de una muestra de  $n$  mediciones  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , de una población con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , cuando  $n$  es suficientemente grande , la distribución muestrada de la suma:  $\sum_{i=1}^n Y_i$  puede ser aproximada a una función de densidad normal con media y varianza dada por las ecuaciones 154 y 153.

$$E\left(\sum Y_i\right) = n\mu \quad (155)$$

$$V\left(\sum Y_i\right) = n\sigma^2 \quad (156)$$

### 8.7.7 Aproximación normal a la distribución binomial

Se considera una variable aleatoria  $Y$  con parámetros  $n$  y  $p$ ; su media  $\mu = np$  y varianza  $\sigma^2 = npq$ , y teniendo en cuenta que el número  $Y$  de sucesos en  $n$  intentos puede ser considerado como una suma que consiste en  $n$  valores de 0 y 1, que representa la salida (falla o suceso) de un intento particular.

$Y = \sum_{i=1}^n Y_i$  donde  $Y_i = 1$  si sucede y  $Y_i = 0$  si falla

La distribución de probabilidad binomial se convierte a normal cada vez que  $n$  crezca satisfaciendo de este modo el teorema del límite central. Cuando  $p = 0,5$ , quiere decir que la distribución muestrada es simétrica cercana a su media, lo que conlleva a una aproximación a la función de densidad normal con valores de  $n$  tan pequeños como  $n = 10$ ; si  $p$  tiende a 0 ó 1, querrá decir que la gráfica se vera sesgada hacia la izquierda o derecha, característica que va siendo insignificante cuando  $n$  toma valores mas altos tanto que se cumpla las ecuaciones 157 y 158.

$$\mu - 2\sigma = np - 2\sqrt{npq} \quad (157)$$

$$\mu + 2\sigma = np + 2\sqrt{npq} \quad (158)$$

Ambas dadas entre 0 y  $n$ , satisfaciendo la condición que  $np \geq 4$  y  $nq \geq 4$ .

### 8.7.8 Distribuciones muestradas relacionadas con la distribución normal

**Theorem 7.** Si una muestra aleatoria de  $n$  observaciones,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , es seleccionada desde una distribución normal con una media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , luego la distribución muestrada de:

$$\chi^2 = ((n - 1)s^2)/\sigma^2$$

Tiene una función de densidad chi-cuadrada con  $v = (n - 1)$  grados de libertad.  $s^2$  representa la varianza muestral.

**Theorem 8.** Si  $\chi_1^2$  y  $\chi_2^2$  son variables aleatorias chi-cuadrada independientes con  $v_1$  y  $v_2$  grados de libertad, respectivamente, luego la suma  $\chi_1^2 + \chi_2^2$  tiene una distribución chi-cuadrada con  $v_1 + v_2$  grados de libertad.

**Definición:** Sea  $Z$  una variable aleatoria normal estándar y  $\chi^2$  una variable aleatoria chi-cuadrada con  $v$  grados de libertad. Si  $Z$  y  $\chi^2$  son independientes, entonces:  $T = Z / \sqrt{\frac{\chi^2}{v}}$ .

Es decir posee una distribución  $T$  de estudiante (o simplemente distribución T) con  $v$  grados de libertad.

**Definición:** Si  $\chi_1^2$  y  $\chi_2^2$  son variables aleatorias chi-cuadrada independientes con  $v_1$  y  $v_2$  grados de libertad, respectivamente, luego:

$$F = \frac{\chi_1^2/v_1}{\chi_2^2/v_2}$$

Es decir tiene una distribución F con  $v_1$  en el numerador grados de libertad y  $v_2$  en el denominador grados de libertad.

## 8.8 ESTADÍSTICA INFERENCIAL

En la ciencia, la ingeniería y en todos los procesos de investigación experimental, es muy importante utilizar la información obtenida de manera experimental a partir de los datos de una muestra para extraer conclusiones acerca de la población de la que ésta proviene, y aplicando la probabilidad asegurar resultados con un nivel de confianza establecido.

El campo de la estadística inferencial está formado por los métodos utilizados para tomar decisiones o para obtener conclusiones sobre una población. Estos métodos utilizan la información contenida en una muestra de la población para obtener conclusiones.

La estadística inferencial puede dividirse en dos grandes áreas: estimación de parámetros y prueba de hipótesis.

### 8.8.1 Estimación de parámetros

#### 8.8.1.1 Estimación Puntual

La estimación puntual de algún parámetro  $\theta$  de la población es un valor numérico  $\hat{\theta}$  de la estadística  $\hat{\Theta}$ . La estimación por puntos de un parámetro es un solo valor numérico de

una estadística que corresponde a ese parámetro, es decir, si  $X$  es una variable aleatoria con distribución de probabilidad  $f(x)$ , caracterizada por el parámetro desconocido  $\theta$ , y si  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , es una muestra aleatoria de  $X$  de tamaño  $n$ , entonces la estadística  $\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$  recibe el nombre de estimador puntual de  $\theta$ .

Los problemas de estimación ocurren con frecuencia en Ingeniería y menudo se necesita estimar algunos parámetros, y los estimadores de estos parámetros los encontramos en la tabla 78<sup>87</sup>.

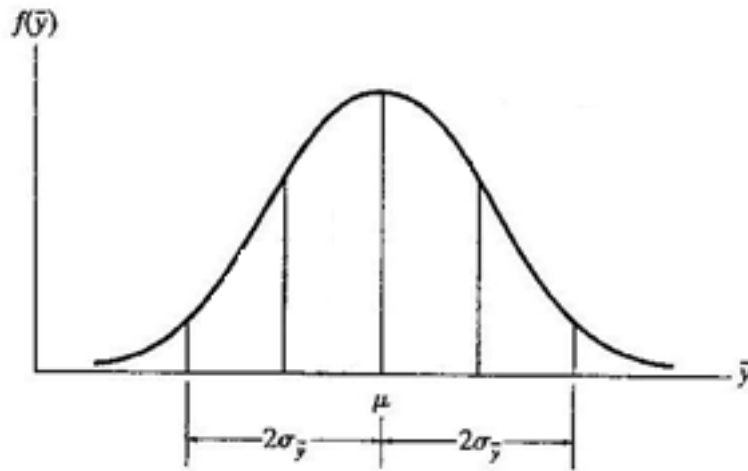
Figura 78: Estimadores puntuales

Parámetro	Estimador
La media $\mu$	$\hat{\mu} = \bar{x}$ Media muestral
La varianza $\sigma^2$	$\hat{\sigma} = \bar{s}$ Varianza muestral
La proporción $p$	$\hat{p} = \frac{x}{n}$ proporción muestral donde, $x$ es el número de objetos en una muestra de tamaño $n$ que pertenece a una clase de interés.
Diferencia entre medias, $\mu_1 - \mu_2$	$\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$ , la diferencia entre las media de las muestras de dos muestras aleatorias independientes.
Diferencia entre proporciones de población $p_1 - p_2$	$p_1 - p_2 = \hat{p}_1 - \hat{p}_2$ , la diferencia entre dos proporciones de la muestra calculadas a partir de dos muestras aleatorias independientes.

Ya que un estimador puntual es calculado de una muestra, posee una distribución de muestreo. La distribución de muestreo de un estimador puntual describe completamente sus propiedades. Por ejemplo, de acuerdo con el teorema del límite central, la distribución de muestreo de una media muestral será aproximadamente una distribución normal para grandes tamaños de muestra, según Montgomery  $n \geq 30$ , con media  $\mu$  y error estándar  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . En la figura 81 se puede observar como una media muestral  $\bar{y}$  tiene la misma probabilidad de caer por encima o por debajo de  $\mu$ , con una probabilidad aproximadamente de 0.95, y no se desviará de  $\mu$  por más de  $2\sigma_{\bar{y}} = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ .

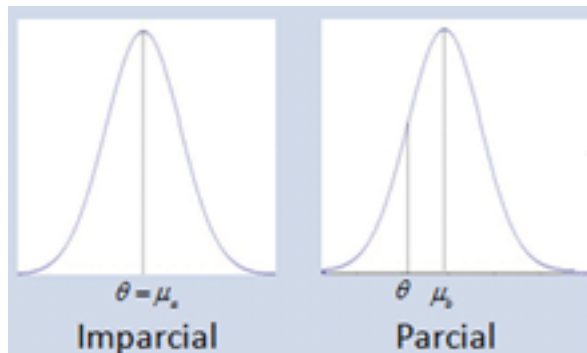
<sup>87</sup>Ibid., p.288

Figura 79: Distribución de muestreo de una media muestral para muestras grandes



Si la media de la distribución de muestreo de un estimador  $\hat{\theta}$  es igual al parámetro estimado  $\theta$ , entonces se dice que el estimador es imparcial; de lo contrario se dice que el estimador es parcial. La media muestral es un estimador imparcial de la media poblacional  $\mu$ . En la figura 80 se puede observar las distribuciones de muestreo para los estimadores imparciales y parciales.

Figure 80: Distribuciones de muestreo para estimadores

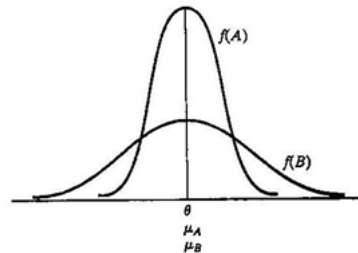


Un estimador  $\hat{\theta}$  de un parámetro  $\theta$  es imparcial si  $E(\hat{\theta}) = \theta$ . Si  $E(\hat{\theta}) \neq \theta$ , se dice que el estimador es parcial. Adicionalmente a la imparcialidad, se busca que la distribución de muestreo de un estimador tenga varianza mínima, esto es, se desea que la dispersión de la distribución de muestreo sea tan pequeña como sea posible para que las estimaciones tiendan a caer cerca a  $\theta$ <sup>88</sup>.

<sup>88</sup>NAVIDI. Op.cit., p. 322.

La Figura 81 muestra la distribución de muestreo de dos estimadores imparciales, A y B, con A teniendo menor varianza que B. Un estimador imparcial que tiene la mínima varianza entre todos los estimadores imparciales se llama el estimador imparcial de varianza mínima (MVUE).

Figure 81: Distribución de muestreo de dos estimadores imparciales A y B. (A con menor varianza que B)



El estimador imparcial de varianza mínima (MVUE) de un parámetro  $\theta$  es el estimador  $\hat{\theta}$  que tiene la menor varianza de todos los estimadores imparciales.

### 8.8.1.2 Métodos clásicos de estimación

Hay una serie de métodos diferentes para encontrar estimadores puntuales de parámetros. Algunos de ellos son:

#### 1. Método de los momentos.

Se sabe que el parámetro  $E(Y) = \mu$  es el primer momento sobre el origen o, como se le llama algunas veces, el primer momento poblacional. Similarmente, se define el primer momento muestral según la ecuación 159.

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad (159)$$

Donde  $y_1, y_2, \dots, y_n$  representa una muestra aleatoria de  $n$  valores observados en una variable aleatoria  $Y$  con alguna distribución de probabilidad (discreta o continua). El momento poblacional  $k$ -ésimo y el momento muestral  $k$ -ésimo están definidos como:

- Momento poblacional  $k$  -ésimo:  $E(Y^k)$
- Momento muestral  $k$ -ésimo:  $m_k = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^k}{n}$

Para el caso en que  $k = 1$ , el primer momento poblacional es  $E(Y) = \mu$ , y el primer momento muestral es  $m_1 = \bar{y}$ .

## 2. Método de máxima posibilidad.

El método de máxima posibilidad y una exposición de las propiedades de los estimadores de máxima posibilidad son el resultado del trabajo de Sir Ronald A. Fisher (1890 – 1962).

- a) La función posibilidad  $L$  de una muestra de  $n$  observaciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , es la función de probabilidad conjunta  $p(y_1, y_2, \dots, y_n)$  cuando  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  son variables aleatorias discretas.
- b) La función posibilidad  $L$  de una muestra de  $n$  observaciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , es la función de densidad conjunta  $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , cuando  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  son variables aleatorias continuas.

## 3. Estimadores de bayes.

La aproximación clásica a la estimación se basa en el concepto de que el parámetro desconocido  $\theta$  es una constante. Toda la información disponible acerca de  $\theta$  está contenida en la muestra aleatoria  $y_1, y_2, \dots, y_n$  seleccionada de la población relevante. En contraste, la aproximación Bayesiana a la estimación refiere  $\theta$  como una variable aleatoria con alguna distribución de probabilidad  $g(\theta)$  conocida previamente. La información de la muestra es usada para modificar la distribución conocida sobre  $\theta$  para obtener una distribución posterior,  $f(\theta/y_1, y_2, \dots, y_n)$ . El estimador de Bayes de  $\theta$  es entonces la media de la distribución de probabilidad posterior.

### 8.8.1.3 Estimación del intervalo de confianza de una sola muestra

En situaciones, la estimación no proporciona la suficiente información acerca de un parámetro de interés, es allí donde una estimación del intervalo resulta ser más útil.

De forma general, para construir un estimador de intervalo del parámetro desconocido  $\theta$ , se debe encontrar dos estadísticas  $L$  y  $U$ , tales que ellas sean los límites de confianza inferior y superior respectivamente y dentro de estos límites se encuentre el valor del parámetro desconocido  $\theta$ , tal que:

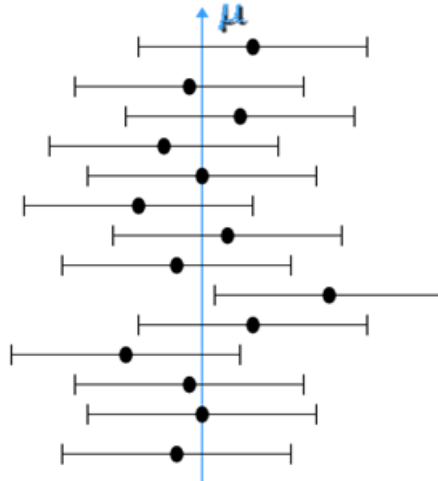
$$P \{L \leq \theta \leq U\} = 1 - \alpha$$

El intervalo  $L \leq \theta \leq U$  se llama intervalo de confianza de  $100(1 - \alpha)\%$  para el parámetro desconocido  $\theta$ , donde  $(1 - \alpha)$  recibe el nombre de coeficiente de confianza.

La interpretación del intervalo de confianza es que, si se recopilan muchas muestras aleatorias y se calcula un intervalo de confianza de  $100(1 - \alpha)\%$  en  $\theta$  de cada muestra,  $100(1 - \alpha)\%$  de estos intervalos contendrán el valor verdadero de  $\theta$ .

En la figura 82 se observan varios intervalos de confianza para la media  $\mu$  de una distribución, los puntos del centro de cada intervalo indica la estimación puntual de  $\mu$ , uno de los intervalos graficados no contiene el verdadero valor de  $\mu$ .

Figura 82: Intervalos de confianza para la media  $\mu$  de una distribución.



La mejor forma de expresarlo sería que  $\theta$  se encuentra en el intervalo  $[L, U]$  con una confianza de  $100(1-\alpha)$ . A este tipo de intervalo se le conoce como intervalo de confianza de dos lados. Un intervalo de confianza de un lado estaría dado por:  $L \leq \theta$  donde el límite de confianza inferior L se elige de modo que:

$$P \{L \leq \theta\} = 1 - \alpha \tag{160}$$

De manera similar se procede con el límite de confianza superior si se quiere obtener un intervalo de confianza de un lado.

“Cuanto más largo sea el intervalo de confianza, mayor confianza tendremos que este contiene en realidad el verdadero valor de  $\theta$ , pero menor será la información que tenemos en torno al verdadero valor de  $\theta$ . En una situación ideal se desea obtener un intervalo relativamente corto con una confianza elevada”<sup>89</sup>.

Hay diversos casos donde se aplica los intervalos de confianza y estos se especifican en la tabla 24.

<sup>89</sup>HINES. Op. cit., p.370.

Tabla 24: Estimación por Intervalos.

TIPO	DEFINICIÓN
Intervalo de confianza para la media con varianza conocida	<p>Si <math>\bar{X}</math> es la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño <math>n</math> de una población con varianza conocida <math>\sigma^2</math> un intervalo de confianza para <math>\mu</math> del <math>100(1 - \alpha)\%</math> esta dado por:</p> $\bar{X} - (Z_{\alpha/2} \times \sigma_{\bar{x}}) \leq \mu \leq \bar{X} + (Z_{\alpha/2} \times \sigma_{\bar{x}})$ <p>Donde: <math>\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}</math> y <math>Z_{\alpha/2}</math> es el punto de la distribución normal estándar que corresponde al porcentaje <math>\alpha/2</math>. Si se utiliza como estimación de <math>\mu</math>, entonces puede tenerse una confianza del <math>100(1 - \alpha)\%</math> de que el error no será mayor que una cantidad específica <math>E</math> cuando el tamaño de la muestra sea:</p> $n = \left( \frac{Z_{\alpha/2} \times \sigma}{E} \right)^2$
Intervalo de confianza para la diferencia de dos medias, varianzas conocidas	<p>Si <math>\bar{X}_1</math> y <math>\bar{X}_2</math> son las medias de dos muestras aleatorias independientes de tamaños <math>n_1</math> y <math>n_2</math> tomadas de poblaciones que tienen varianzas conocidas <math>\sigma_1^2</math> y <math>\sigma_2^2</math>, respectivamente, un intervalo de confianza del <math>100(1 - \alpha)\%</math> para <math>\mu_1 - \mu_2</math>:</p> $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \left( Z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right) \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \left( Z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$ <p>Donde <math>Z_{\alpha/2}</math> es el punto crítico superior que corresponde al porcentaje <math>\alpha/2</math> de la distribución normal estándar. Nota: Para poblaciones que no son normales, el nivel de confianza es aproximadamente válido para tamaños grandes de muestras (<math>n \geq 30</math>).</p> <p>Si se conocen las desviaciones estándar <math>\sigma_1</math> y <math>\sigma_2</math> y los tamaños de las muestras son iguales (<math>n_1 = n_2</math>). El tamaño requerido para la muestra de cada población es:</p> $n = \left( \frac{Z_{\alpha/2}}{E} \right)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
Intervalo de confianza para la media de una distribución normal, varianzas desconocida	<p>Son <math>\bar{X}_1</math> y <math>s</math> son la media y la desviación estándar de una muestra aleatoria tomada de una distribución normal con varianza <math>\sigma^2</math> desconocida, entonces el intervalo de confianza del <math>100(1 - \alpha)\%</math> esta dado por:</p> $\bar{X} - \left( t_{\alpha/2(n-1)} \times \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \leq \mu \leq \bar{X} + \left( t_{\alpha/2(n-1)} \times \frac{s}{\sqrt{n}} \right) (\#)$ <p>Donde <math>t_{\alpha/2(n-1)}</math> es el punto crítico superior que corresponde al porcentaje <math>\alpha/2</math> de la distribución t de Student con <math>(n-1)</math> grados de libertad.</p>
Intervalo de confianza para la diferencia entre dos medias de dos distribuciones normales, varianzas desconocidas pero iguales.	<p>Si <math>\bar{X}_1</math>, <math>\bar{X}_2</math>, <math>s_1^2</math> y <math>s_2^2</math> son las medias y las varianzas de dos muestras aleatorias de tamaños <math>n_1</math> y <math>n_2</math> respectivamente, tomadas de dos poblaciones normales e independientes con varianzas desconocidas pero iguales, entonces un intervalo de confianza del <math>100(1 - \alpha)\%</math> para la diferencia entre medias <math>\mu_1 - \mu_2</math> es:</p> $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \left( t_{(\alpha/2, n_1+n_2-2)} \times \left( s_p \times \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right) \right) \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \left( t_{(\alpha/2, n_1+n_2-2)} \times \left( s_p \times \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right) \right) (\#)$ <p>Donde <math>s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}}</math> es el estimador combinado de la desviación estándar común de la población, y <math>t_{\alpha/2(n_1+n_2-2)}</math> es el punto crítico superior que corresponde al porcentaje <math>\alpha/2</math> de la distribución t con <math>(n_1 + n_2 - 2)</math> grados de libertad.</p>

Intervalo de confianza para la diferencia entre dos medias de dos distribuciones normales, varianzas desconocidas y desiguales	<p>Si <math>\bar{X}_1, \bar{X}_2, s_1^2</math> y <math>s_2^2</math> son las medias y las varianzas de dos muestras aleatorias de tamaños <math>n_1</math> y <math>n_2</math> respectivamente, tomadas de dos poblaciones normales e independientes con varianzas desconocidas y desiguales, entonces un intervalo de confianza del <math>100(1-\alpha)\%</math> para la diferencia entre medias <math>\mu_1 - \mu_2</math> es:</p> $\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - \left(t_{(\alpha/2, \nu)} \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right) \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) + \left(t_{(\alpha/2, \nu)} \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right) (\#)$ <p>Donde: <math>\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2</math> y <math>t_{(\alpha/2, \nu)}</math> es el punto crítico superior que corresponde al porcentaje <math>\alpha/2</math> de la distribución t con <math>\nu</math> grados de libertad.</p>
Intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ observaciones pareadas	<p>Si <math>\bar{d}</math> y <math>s_d</math> son la media y desviación estándar muestrales de las diferencias de <math>n</math> pares aleatorios de mediciones normalmente distribuidas, entonces un intervalo de confianza de <math>100(1-\alpha)\%</math> para la diferencia entre medias:</p> $\bar{d} - \left(t_{(\alpha/2, (n-1))} \times \frac{s_d}{\sqrt{n}}\right) \leq \mu_d \leq \bar{d} + \left(t_{(\alpha/2, (n-1))} \times \frac{s_d}{\sqrt{n}}\right) (\#)$ <p>Donde: <math>t_{(\alpha/2, (n-1))}</math> es el punto crítico superior que corresponde al porcentaje superior <math>\alpha/2</math> de la distribución t con <math>(n-1)</math> grados de libertad.</p>
Intervalo de confianza para el cociente de varianzas de dos distribuciones normales.	<p>Si <math>s_1^2</math> y <math>s_2^2</math> son las varianzas muestrales de dos muestras aleatorias de tamaño <math>n_1</math> y <math>n_2</math> respectivamente, tomadas de dos poblaciones normales e independientes con varianzas <math>\sigma_1^2</math> y <math>\sigma_2^2</math> desconocidas, entonces un intervalo de confianza del <math>100(1-\alpha)\%</math> para el cociente <math>\sigma_1^2 / \sigma_2^2</math> es:</p> $\frac{s_1^2}{s_2^2} \times \left(f_{(1-\alpha/2, n_2-1, n_1-1)} \times \frac{s_d}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \left(f_{(\alpha/2, n_2-1, n_1-1)} \times \frac{s_d}{\sqrt{n}}\right) (\#)$ <p>Donde: <math>f_{(\alpha/2, n_2-1, n_1-1)}</math> y <math>f_{(1-\alpha/2, n_2-1, n_1-1)}</math> son los puntos críticos superior e inferior que corresponden al porcentaje <math>\alpha/2</math> de la distribución F con <math>(n_2-1)</math> y <math>(n_1-1)</math> grados de libertad en el numerador y en el denominador, respectivamente.</p>
Intervalo de confianza para una proporción	<p>Si <math>\hat{p}</math> es la proporción de observaciones de una muestra aleatoria de tamaño <math>n</math> que pertenece a una clase de interés, entonces un intervalo de confianza aproximado del <math>100(1-\alpha)\%</math> para la proporción <math>P</math> de la población que pertenece a esta clase es:</p> $\hat{p} - \left(Z_{(\alpha/2)} \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) \leq p \leq \hat{p} + \left(Z_{(\alpha/2)} \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) (\#)$ <p>Donde: <math>Z_{(\alpha/2)}</math> es el punto crítico superior que corresponde al porcentaje <math>\alpha/2</math> de la distribución normal estándar.</p> <p>Puede escogerse el tamaño de la muestra <math>n</math> de modo que exista una confianza del <math>100(1-\alpha)\%</math> de que el error es menor que algún valor especificado <math>E</math>. Si se hace <math>Z_{(\alpha/2)} \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}</math> y se resuelve para <math>n</math>, el tamaño apropiado de la muestra es: <math>n = \left(\frac{Z_{(\alpha/2)}}{E}\right)^2 p(1-p)</math></p>
Intervalo de confianza para la diferencia de dos proporciones	<p>Si <math>p_1</math> y <math>p_2</math> son las proporciones muestrales de una observación en dos muestras aleatorias independientes de tamaños <math>n_1</math> y <math>n_2</math> que pertenecen a una clase de interés, entonces un intervalo de confianza del <math>100(1-\alpha)\%</math> para la diferencia de las proporciones <math>p_1 - p_2</math> es:</p> $\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2\right) - \left(Z_{(\alpha/2)} \times \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}\right) \leq p_1 - p_2 \leq \left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2\right) + \left(Z_{(\alpha/2)} \times \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}\right) (\#)$ <p>Donde <math>Z_{(\alpha/2)}</math> es el punto crítico superior que corresponde al porcentaje <math>\alpha/2</math> de la distribución estándar.</p>

## 8.8.2 Prueba de hipótesis

Muchos problemas de ingeniería, ciencias y experimentación requieren que se tome una decisión entre aceptar o rechazar una proposición sobre algún parámetro. Esta proposi-

ción recibe el nombre de hipótesis y cuando se hace con respecto a una o mas poblaciones recibe el nombre de hipótesis estadística, el procedimiento que permite tomar esta decisión recibe el nombre de prueba de hipótesis.

Se considera la prueba de hipótesis estadística como la etapa de análisis de datos de un experimento comparativo, en donde el ingeniero esta interesado en hacer algún tipo de comparación con un valor especificado, la hipótesis que desea probarse recibe el nombre de hipótesis nula y la hipótesis alternativa es el rechazo de la hipótesis nula.

$H_0$  =Hipótesis Nula

$H_1$  =Hipótesis Alternativa

Las hipótesis son proposiciones sobre la población y no sobre la muestra, por lo general el parámetro de la población especificada en la hipótesis nula se puede determinar de tres maneras diferentes según Montgomery<sup>90</sup> y se muestran a continuación:

1. Puede ser resultado de la muestra pasada o del conocimiento del proceso, o experimentos previos, en este caso el objetivo de la hipótesis es determinar si a cambiado el parámetro.
2. Puede obtenerse de teorías o modelo que se relaciona con el proceso en estudio. En este caso el objetivo de la prueba de hipótesis es verificar la teoría o modelo.
3. Cuando el valor del parámetro de la población proviene de consideraciones externas, tales como las especificaciones de diseño o ingeniería.

El procedimiento de prueba de hipótesis depende de como se emplea la información contenida en una muestra aleatoria de la población de interés. Si esta información es consistente con la hipótesis se concluye que es verdadera, si es inconsistente se concluye que está es falsa.

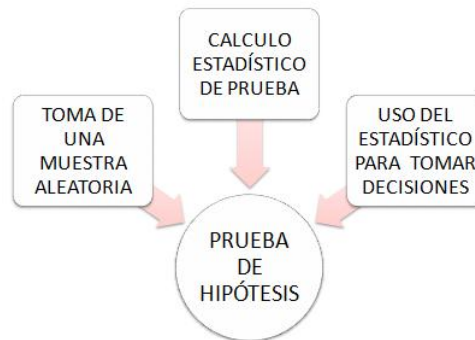
Usualmente el procedimiento de prueba de hipótesis esta sujeto cierta incertidumbre, y la hipótesis nula se plantea de manera que especifique de manera exacta el valor del parámetro, y la hipótesis alternativa permite que el parámetro tome diversar alternativas.

La prueba de hipótesis involucra diversos factores como los que se ven en la figura 83.

---

<sup>90</sup>MONGOMERY. Op. cit., p 371.

Figura 83: Factores de la prueba de hipótesis



Existen dos conclusiones erróneas en la prueba de hipótesis: el error tipo I y el error tipo II, y existen cuatro situaciones diferentes que determinan si la decisión final es correcta o errónea. Estas situaciones aparecen en la tabla 25.

Tabla 25: Decisiones en la prueba de hipótesis

Decisión	Ho es verdadero	Ho es falsa
Aceptar Ho	No hay error	Error tipo II
Rechazar Ho	Error tipo I	No hay error

Fuente: MONTGOMERY, Douglas. & RUNGER, George. *Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería*. 2 ed.: McGraw-Hill, 1996. p.374.

Dado que las decisiones se basan en variables aleatorias, es posible asociar probabilidades con los errores tipo I y II. La probabilidad de cometer un error tipo I se denota por la letra griega  $\alpha$  también se conoce como nivel o tamaño de significancia de la prueba, y la probabilidad del error tipo II se denota por  $\beta$  como se observa en la tabla 26.

Tabla 26: Probabilidades de los errores

PROBABILIDAD	SÍMBOLO	ECUACIÓN
P(Error tipo I)	$\alpha$	$\alpha = P(\text{error tipo I}) = P(\text{rechazar } H_0 / H_0 \text{ es verdadera})$
P(Error tipo II)	$\beta$	$\beta = P(\text{error tipo II}) = P(\text{acepto } H_0 / H_0 \text{ es falsa})$

El investigador generalmente controla la probabilidad  $\alpha$  del error tipo I cuando escoge los valores críticos, y puede controlar de manera más directa la probabilidad de rechazar de manera errónea  $H_0$ , y se considera el rechazo de la hipótesis nula una conclusión fuerte. Y la probabilidad  $\beta$  del error tipo II no es constante y depende del valor verdadero del

parámetro y tamaño de la muestra y se considera la decisión de aceptar  $H_0$  como una conclusión débil.

Las relaciones entre aceptar o rechazar la hipótesis nula con los valores de  $p$  y  $\alpha$  están dados en la tabla 27.

Tabla 27: Decisiones de hipótesis nula asociada con los valores de  $p$  y  $\alpha$ .

Valor $p$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,10$
$p \geq 0,1$	aceptar	aceptar	aceptar
$0,05 < p < 0,1$	aceptar	aceptar	rechazo
$0,01 < p < 0,05$	aceptar	rechazo	rechazo
$p < 0,01$	rechazo	rechazo	rechazo

Fuente: P. Dunn, *Measurement & Data Analysis for Engineering & Science*. Edit. Mc Graw Hill, 2005..p. 239.

### 8.8.2.1 Procedimiento general para la prueba de hipótesis

La prueba de hipótesis se puede realizar mediante un procedimiento sistemático que se describe en la figura 84.

Figura 84: Prueba de Hipótesis



1. Identificar el parámetro de interés de acuerdo al tema de investigación.
2. Especificar la hipótesis:
  - a) Hipótesis nula  $H_0$ : Es una afirmación que no se rechaza a menos que los datos muestrales proporcionen evidencia que es falsa. Contiene signo de igualdad con respecto al valor especificado del parámetro.

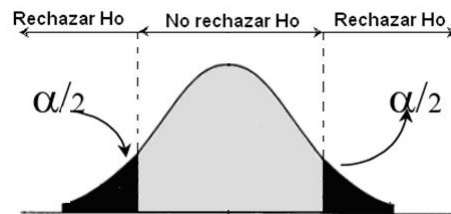
b) Hipótesis alternativa H1: Es una afirmación que se acepta si los datos muestrales proporcionan evidencia suficiente de que la hipótesis nula es falsa. Nunca contiene un signo de igualdad con respecto al valor especificado del parámetro.

3. Seleccionar el nivel de significancia:

El estadístico controla el error tipo I y generalmente se toma el valor de  $\alpha$  como 0.05 ó si se quiere ser mas riguroso 0.01.

La distribución de muestreo de la estadística de prueba se divide en dos regiones como se observa en la figura 85, una región de rechazo (conocida como región crítica) y una región de no rechazo (aceptación).

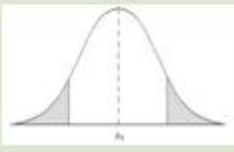
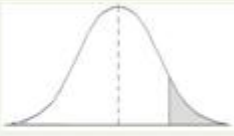
Figura 85: Distribución de muestreo



4. Establecer el estadístico de prueba:

El estadístico de prueba es el valor determinado a partir de la información muestral, que se utiliza para determinar si se rechaza la hipótesis nula, existen muchos estadísticos de prueba como los estadísticos z y t. La elección de uno de estos depende de la cantidad de muestras que se toman, si las muestras de la prueba son iguales a 30 o más se utiliza el estadístico z, en caso contrario se utiliza el estadístico t. Las pruebas se describen en la tabla 28.

Tabla 28: Hipótesis bilateral y unilateral

PRUEBA	CARACTERISTICA	GRAFICO
PRUEBA BILATERAL	La región crítica se separa en dos partes, con la misma probabilidad en cada lado de la distribución estadística, se formula con la igualdad.	
PRUEBA UNILATERAL	La hipótesis planteada se formula con $\geq$ o $\leq$ .	

5. Establecer región de rechazo:

Se establece las condiciones específicas en la que se rechaza la hipótesis nula y las condiciones en que no se rechaza la hipótesis nula. La región de rechazo define la ubicación de todos los valores que son tan grandes o tan pequeños, que la probabilidad de que se presenten bajo la suposición de que la hipótesis nula es verdadera, es muy remota. Si la estadística de prueba cae dentro de la región de aceptación, no se puede rechazar la hipótesis nula.

6. Calcular las cantidades muestrales necesarias, sustituirlas en la ecuación para el estadístico de prueba, ya sea  $z$  o  $t$ .

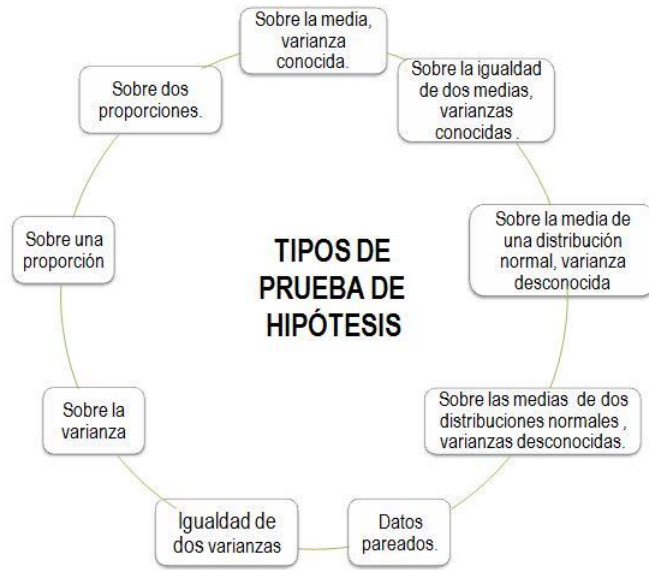
7. Decidir se se rechaza o no la hipótesis:

Se establece las condiciones específicas en la que se rechaza la hipótesis nula y las condiciones en que no se rechaza la hipótesis nula. Se calcula el estadístico de prueba, se compara con el valor crítico y se toma la decisión de rechazar o no la hipótesis nula. Tenga presente que en una prueba de hipótesis solo se puede tomar una de dos decisiones: aceptar o rechazar la hipótesis nula. Debe subrayarse que siempre existe la posibilidad del error tipo I y el error de tipo II.

### 8.8.2 Tipo de pruebas de hipótesis

Existen diferentes tipos de pruebas de hipótesis y están dados en la figura 86.

Figura 86: Tipos de Pruebas de hipótesis



A continuación se desarrolla el procedimiento general para la prueba de hipótesis, tomando la hipótesis sobre la media y la varianza conocida, los otros tipos de hipótesis serán mostrados en un resumen dado por Montgomery<sup>91</sup>.

### 8.8.2.1 Prueba de hipótesis sobre la media y la varianza conocida

La población o distribuciones de interés tienen media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  conocida. El estadístico de prueba se basa en la media muestral  $\bar{X}$ .

1. Se supondrá que la población está distribuida de manera normal o que se aplica el teorema del límite central.
2. Se especifica la hipótesis de acuerdo al contraste según la tabla 29.

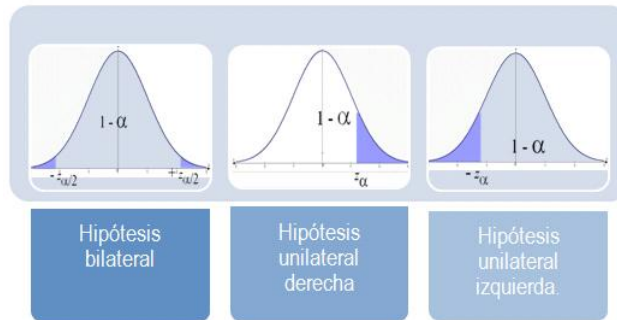
Tabla 29: Tipo de Hipótesis

Bilateral	Unilateral derecha	Unilateral izquierda
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$

3. Es una hipótesis la distribución de muestreo está dada por alguna de las figuras de la gráfica 87.

<sup>91</sup>Ibid. p.462.

Figura 87: Distribución de muestreo



4. El estadístico de prueba esta dado por la ecuación 161.

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (161)$$

5. Se halla la región de aceptación según las ecuaciones dadas en la tabla.

Tabla 30: Intervalo de aceptación

Bilateral	Unilateral derecha	Unilateral izquierda
$-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}$	$z > z_{\alpha/2}$	$z > -z_{\alpha/2}$
$P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2})=1-\alpha$	$P(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha})=1-\alpha$	$P(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > -z_{\alpha})=1-\alpha$
$(\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})$	$(-\infty, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha})$	$(\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}, +\infty)$

6. Si la media muestral está fuera de este intervalo rechazamos  $H_0$  y no rechazamos  $H_0$  en caso contrario.

## 8.9 REGRESIÓN Y CORRELACIÓN DE EXPERIMENTOS

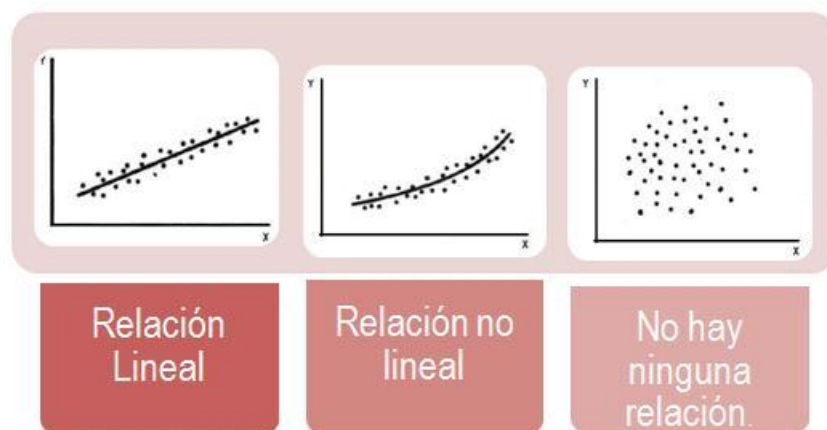
En muchos problemas existe una relación entre la variable medida y las variables independientes que se controlan durante un proceso de medición, cuando esta variable se muestrea las otras condiciones se controlan, luego de la muestra estas variables se cambian y se toma una nueva muestra con otras condiciones de operación, y este proceso se usa para documentar la relación entre la variable medida y una variable independiente del proceso.

El análisis de regresión es una técnica estadística para el modelado y la investigación de la relación entre dos o más variables dependiente e independiente, permite estimar los parámetros del modelo de regresión<sup>92</sup>.

El diagrama de dispersión es una gráfica que representa la regresión en la que cada par  $(x_i, y_i)$  está representado con un punto en un sistema de coordenadas bidimensionales. El análisis de este diagrama de dispersión indica que, si bien una curva no pasa por todos los puntos, existe una relación fuerte de los puntos dispersos aleatoriamente alrededor de una línea recta.

Apartir del diagrama de dispersión se puede visualizar una curva que se aproxima a los datos (curvas de aproximación), y esta curva se puede analizar según casos de la figura 88 para determinar la linealidad del diagrama.

Figura 88: Curvas de aproximación



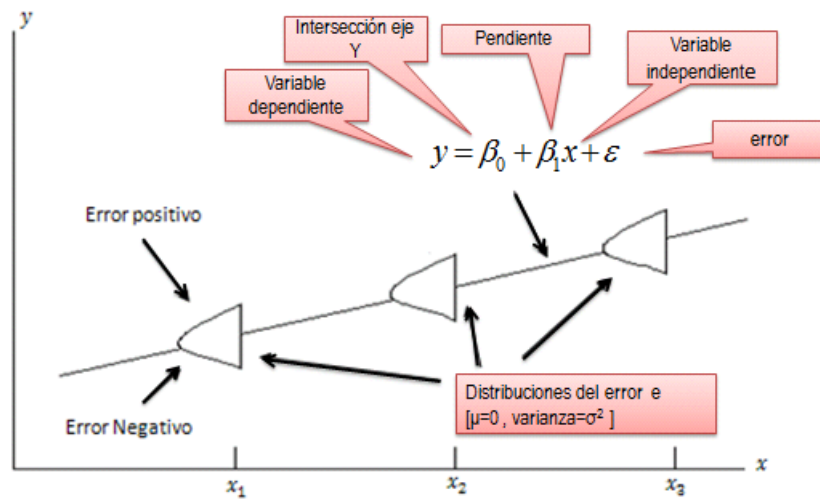
1. Cuando los datos se aproximan bien por una línea recta decimos que existe una relación lineal en la figura 88.
  - a) Cuando hay una relación entre las variables pero ésta no es lineal, se dice relación no lineal como se ve en la figura 88.
  - b) Cuando no existe ninguna relación entre las variables se tienen la figura 88.

Esta relación ente las variables se puede expresar de una manera matemática mediante una ecuación que permite conectar las variables, llamada ecuación de regresión, esta ecuación de regresión ajustada se utiliza en la predicción de observaciones futuras de Y, o para estimar la respuesta promedio para un nivel particular de x.

<sup>92</sup>Ibid., p.471.

Un análisis de regresión asume que la variación en la variable dependiente medida, sigue una distribución normal en cada valor fijo de la variable independiente como se observa en la figura 89. Las mediciones repetidas de  $y$  (variable dependiente) producirán una distribución normal con varianza  $S_y^2$  con respecto a algún valor medio,  $\bar{y}$ .

Figura 89: Distribución de Probabilidad del Error

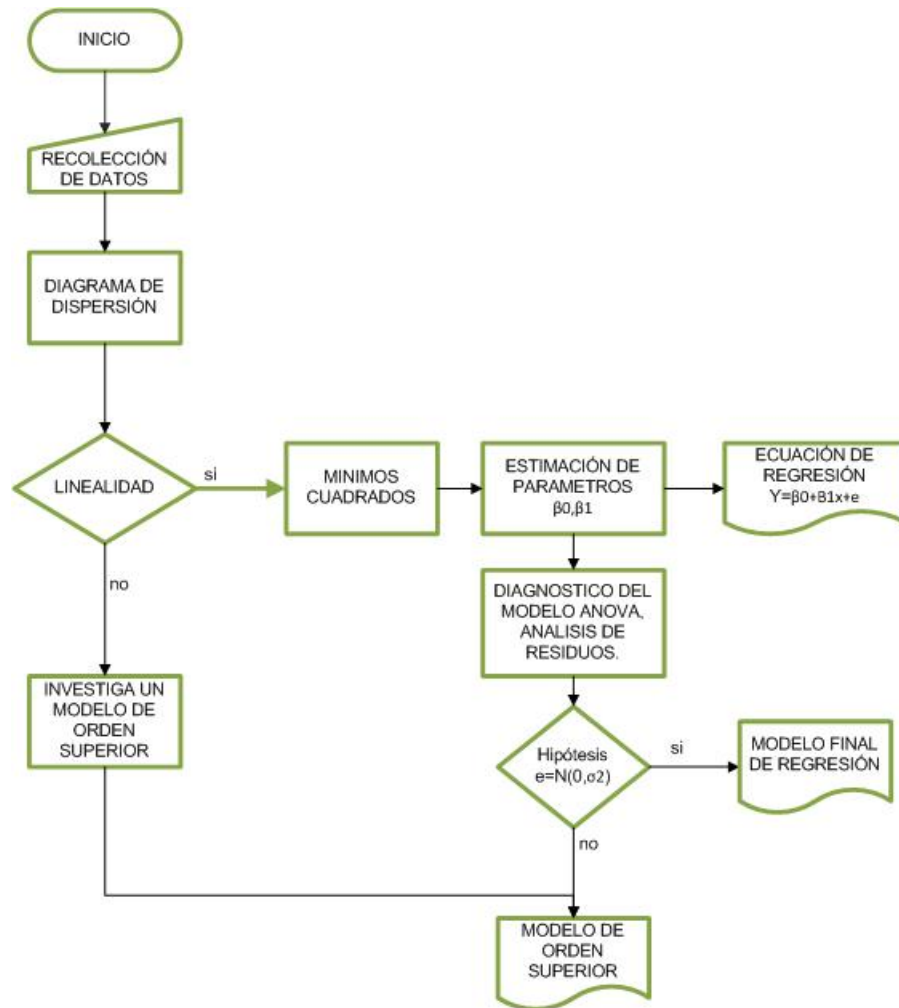


Por ello es razonable suponer que la media  $\mu$  de la variable aleatoria  $Y$  está relacionada con  $x$  por la ecuación 162, donde la pendiente y la ordenada al origen de la recta reciben el nombre de coeficientes de regresión.

$$E(Y/x) = \mu_{Y/x} = \beta_0 + \beta_1 x \quad (162)$$

Es posible realizar regresión lineal simple y múltiple pero en general el procedimiento para la regresión se puede observar en la figura 90.

Figura 90: Modelo de regresión



Si bien la media de  $Y$  es una función lineal de  $x$ , el valor real de  $y$  no cae de manera exacta sobre la recta. Para generalizar este hecho es necesario utilizar un modelo probabilístico lineal en el cual se supone que el valor esperado de  $Y$  es una función lineal de  $x$ , pero para un valor fijo de  $x$  el valor real de  $Y$  está determinado por el valor medio de la función (el modelo lineal) mas un termino que representa el error aleatorio como se observa en la ecuación 163. Este modelo recibe el nombre de regresión lineal simple, ya que solo tiene una variable independiente o regresor<sup>93</sup>.

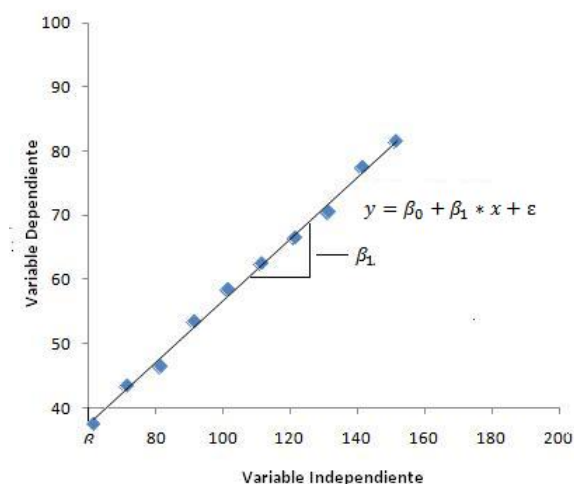
$$Y_c = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon_i \quad (163)$$

<sup>93</sup>Ibid., p. 472.

## 8.9.1 Regresión lineal simple

Los modelos de regresión lineal surgen de alguna relación teórica o algunas veces cuando no existe ningún modelo teórico se basan en el diagrama de dispersión, en estos casos el modelo se considera empírico, donde es posible fijar el valor de  $x$  y observar el valor de la variable  $Y$ , el componente  $\epsilon$  determina las propiedades de  $Y$ , este componente  $\epsilon$  es un error aleatorio con media 0 y varianza  $(\sigma^2)^{94}$ , y encontramos nuevamente que se cumple la ecuación 163. La estructura de un modelo de regresión lineal se puede ver en la figura 91.

Figura 91: Modelo de Regresión Lineal



Donde:

- $\beta_0$  y  $\beta_1$  son variables desconocidas
- $\beta_0$  representa el valor de la ordenada donde la línea de regresión se intercepta con el eje  $Y$ .
- $\beta_1$  la pendiente; representa el cambio de la variable  $Y$  por unidad de cambio en  $x$ , la variabilidad de  $Y$  está determinada por la varianza del error  $\sigma^2$ , cuando los valores de  $\sigma^2$  son pequeños, los valores de  $Y$  caen cerca de la línea recta, cuando  $\sigma^2$  es grande los valores observados de  $Y$  se alejan de la línea recta, si  $\sigma^2$  es constante, la variabilidad en  $Y$  para cualquier valor de  $x$  es la misma.
- $\epsilon$  representa el error aleatorio con media cero y varianza  $\sigma^2$ .

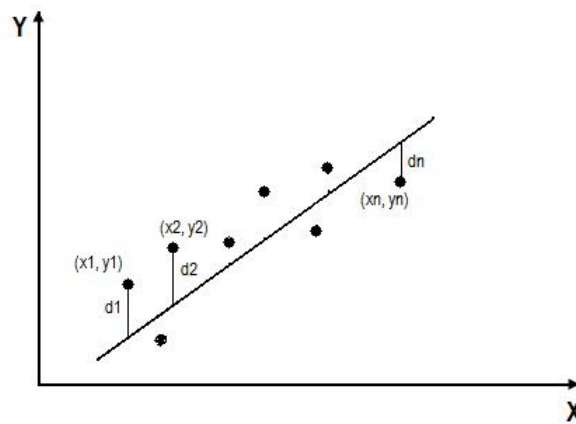
<sup>94</sup>GUTIERREZ, Op.cit., p. 479.

En diferentes problemas de ingeniería los valores de la ordenada al origen, la pendiente de la recta y la varianza  $\sigma^2$  no se conocen y se deben estimar a partir de datos muestrales. El análisis de regresión comprende una serie de herramientas para determinar dichos parámetros, con el fin de hallar los valores que mejor se ajusten a los datos experimentales. El científico alemán Jaral Gauss (1777-1855)<sup>95</sup> propuso estimar los parámetros  $\beta_0$  y  $\beta_1$  de modo que se minimice la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales entre el dato real y el ajuste polinomial de un orden establecido, ajustando los valores de los coeficientes, este criterio es el mas usado en ingeniería y se conoce como *método de mínimos cuadrados*.

### 8.9.1.1 Método de mínimos cuadrados

Cuando dos variables tienen una relación lineal, el diagrama de dispersión tiende a estar agrupado alrededor de la recta de mínimos cuadrados como se observa en la figura 92, el método de mínimos cuadrados permite hallar los valores de  $\beta_0$  y  $\beta_1$  que son los coeficientes de regresión<sup>96</sup>.

Figura 92: Recta de Mínimos Cuadrados



Los puntos de los datos son  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  y  $d$  se denomina desviación, error o residuo y puede ser positiva, negativa o cero, de tal manera que a los valores  $x_1, \dots, x_n$  les corresponden una desviación  $d_1, \dots, d_n$ .

La cantidad  $d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2$  provee una medida de el ajuste de la recta. Si esta es grande, el ajuste es malo, si es pequeña, el ajuste es pequeño. Y la curva que mas se aproximan al conjunto de  $n$  puntos de datos, es la curva que tenga la propiedad de:

<sup>95</sup>MONTGOMERY. Op. cit., p. 475.

<sup>96</sup>ibid.,p. 475.

$d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 = \text{Un mínimo}$

Debido a que en el análisis de regresión no se ajustara cada dato de forma exacta, existirá siempre una desviación entre los puntos de datos y el polinomio, esta diferencia entre lo observado y lo estimado es una estimación del error  $\epsilon$  o residuo  $\epsilon = y - y_c$ , y comprende una desviación estándar que se puede calcular con base en la desviación de cada dato y la curva ajustada, y consiste en elevar al cuadrado los residuos  $\epsilon$  y sumarlos, obteniendo la ecuación 164.

$$d^2 = \sum_{i=1}^n \epsilon^2 \quad (164)$$

Dado que  $\sum_{i=1}^n (y - y_c)^2 = \sum_{i=1}^n d^2$ , se trata de encontrar los valores que minimizan la suma de los errores al cuadrado, para determinar el orden del polinomio.

$$D = \sum_{i=1}^N (y - y_c)^2 \quad (165)$$

$$D = \sum (y - \beta_0 + \beta_1 x)^2 \quad (166)$$

Para minimizar la suma de los cuadrados de las desviaciones se requiere que  $dD = 0$  y al hacer 0 cada una de las derivadas parciales de las variables donde los estimadores de mínimos cuadrados de  $\beta_0$  y  $\beta_1$  ( $\hat{\beta}_0$  y  $\hat{\beta}_1$ ), deben satisfacer las ecuaciones 167 y 168:

$$\frac{dD}{d\beta_0} \Big|_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0 \quad (167)$$

$$\frac{dD}{d\beta_1} \Big|_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) x_i = 0 \quad (168)$$

$$y_c = \beta_0 + \beta_1 X \quad (169)$$

Donde  $\beta_0$  y  $\beta_1$  son obtenidos de las ecuaciones 170 y 171.

$$\sum y = \beta_0 + \beta_1 \sum x \quad (170)$$

$$\sum xy = \beta_0 \sum x + \beta_1 \sum x^2 \quad (171)$$

Los valores  $\hat{\beta}_0$  y  $\hat{\beta}_1$  son;

$$\hat{\beta}_0 = \frac{(\sum_{i=1}^n y)(\sum_{i=1}^n x^2) - (\sum_{i=1}^n x)(\sum_{i=1}^n xy)}{n \sum_{i=1}^n x^2 - (\sum_{i=1}^n x)^2} = \bar{y} - \hat{\beta}_1 * \bar{x} \quad (172)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n xy - \frac{(\sum_{i=1}^n x)(\sum_{i=1}^n y)}{n}}{\sum_{i=1}^n x^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x)^2}{n}} \quad (173)$$

Donde

$$\bar{x} = (1/n) \sum xi$$

y

$$\bar{y} = (1/n) \sum yi$$

Por notación , en ocasiones se dan símbolos especiales al numerador y denominador de las ecuaciones 173 y 172 así:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (xi - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n xi^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n xi)^2}{n} \quad (174)$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n yi(xi - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n xiyi - \frac{(\sum_{i=1}^n xi)(\sum_{i=1}^n yi)}{n} \quad (175)$$

### 8.9.1.2 Propiedades de los estimadores de mínimos cuadrados $\beta_0$ y $\beta_1$ .

El error  $\epsilon$  del modelo visto en la ecuación 163 es una variable aleatoria de media 0 y varianza  $\sigma^2$ , puesto que los valores de  $x$  son fijos, y  $Y$  es una variable aleatoria con media  $\mu_{Y/x} = \beta_0 + \beta_1x$  y varianza  $\sigma^2$ . Por lo tanto los valores  $\hat{\beta}_0$  y  $\hat{\beta}_1$  pueden verse como variables aleatorias. El sesgo y las propiedades de la varianza se encuentran a continuación.

- El valor esperado de  $\hat{\beta}_1$  esta dado por  $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$ .
- La varianza de  $\hat{\beta}_1$  esta dada por  $V(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{s_{xx}}$ .
- El valor esperado de  $\hat{\beta}_0$  esta dado por  $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$ .
- La varianza de  $\hat{\beta}_0$  esta dada por  $V(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2}{s_{xx}}$ .
- La suma de los cuadrados de los residuos, o suma de los cuadrados de los errores está dado por:

$$SS_E = \sum_{i=1}^n \epsilon^2 \quad (176)$$

$$= \sum_{i=1}^n (y - \hat{y}_c)$$

- El valor esperado de la suma de los cuadrados de los errores  $SS_E$  se observa en la ecuación 385.

$$E(SS_E) = (n - 2)\sigma^2 \quad (177)$$

- El estimador no sesgado de  $\sigma^2$  es:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{N - 2} \quad (178)$$

### 8.9.1.3 Prueba de Hipótesis en la Regresión Lineal Simple

Para la evaluación de un modelo de regresión lineal simple, se utiliza la prueba de hipótesis en torno a los parámetros del modelo y la construcción de ciertos intervalos de confianza.

Probar una hipótesis consiste en investigar con base en la evidencia contenida en una muestra, si lo afirmado por la hipótesis nula es verdadero o no, y en caso de ser falsa se toma como verdadera la hipótesis alternativa. Para probar la hipótesis respecto de la pendiente y la ordenada al origen del modelo de regresión, debemos hacer la suposición adicional de que la componente del error  $\epsilon$  se distribuye normalmente. Entonces los errores son distribución normal independiente con media cero y varianza  $\sigma^2$  como se abrevia con  $NID(0, \sigma^2)$ <sup>97</sup>.

#### 1. Uso de pruebas t

- Si se quiere probar la hipótesis de que la pendiente es igual a una constante, digamos  $\beta_{1,0}$ . Las hipótesis apropiadas son;

$$H_0 : \beta_1 = \beta_{1,0}$$

$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_{1,0}$$

Puesto que los errores  $\epsilon$  son  $NID(0, \sigma^2)$ , se sigue de manera directa que las observaciones  $Y_i$  son  $NID(\beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2)$ , y  $\hat{\beta}_1$  es una combinación lineal de las observaciones  $Y_i$ , y una combinación de variables aleatorias independientes,  $\hat{\beta}_1$  es  $N(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}})$ , utilizando las propiedades de sesgo y varianza de la pendiente. entonces el estadístico esta dado por la ecuación 179, que sigue a la distribución t con n-2 grados de libertad bajo  $H_0: \beta_1 = \beta_{1,0}$ .

$$T_o = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / S_{xx}}} \quad (179)$$

Puede rechazarse  $H_0: \beta_1 = \beta_{1,0}$  si:

$$|t_0| > t_{\alpha/2, n-2}$$

Un caso especial es cuando se tiene la hipótesis de la significancia de la regresión donde.

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

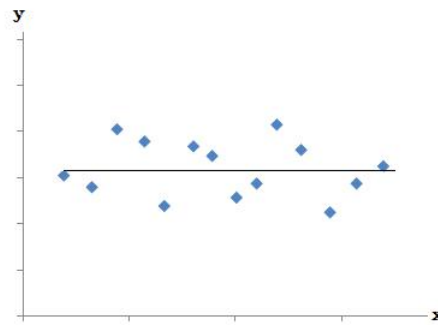
$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

---

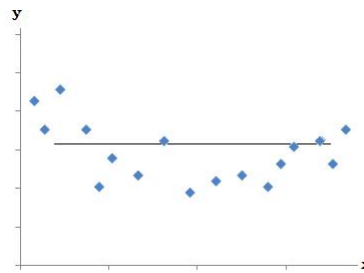
<sup>97</sup>Ibid., p. 490

El hecho de no rechazar  $H_0 : \beta_1 = 0$  es equivalente a concluir que no hay relación lineal entre  $x$  y  $y$ . Y esto puede implicar ya sea que  $x$  es de poco valor en la explicación de la variación en  $y$ , y que el mejor estimado de  $y$  para cualquier  $x$  es  $y = \bar{y}$  (figura 93a) o que la relación real entre  $x$  y  $y$  no es lineal(figura 93b)<sup>98</sup>.

Figura 93: La Hipótesis  $H_0:\beta_1 = 0$  no se Rechaza



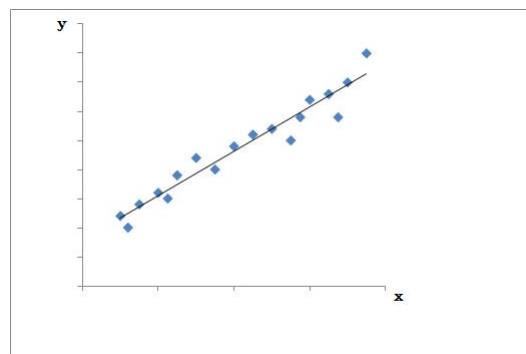
a)



b)

Y el rechazo de  $H_0 : \beta_1 = 0$  podría significar que el modelo de línea recta es adecuado.

Figura 94: La Hipótesis  $H_0:\beta_1 = 0$  se rechaza



<sup>98</sup>Hines,W; Montgomery,D .Probabilidad y Estadística para Ingeniería. Edit. Cedsa, México, 2007.

- El procedimiento usado para probar la hipótesis con respecto a la ordenada al origen es similar. Y las hipótesis son:

$$H_0 : \beta_0 = \beta_{0,0}$$

$$H_1 : \beta_0 \neq \beta_{0,0}$$

Se utiliza el estadístico

$$T_o = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_{0,0}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right]}} \quad (180)$$

Puede rechazarse si:

$$|t_0| > t_{\alpha/2, n-2}$$

#### 8.9.1.4 Análisis de varianza para la prueba de significancia de la regresión.

Para probar la significancia de la regresión puede usarse un método conocido como análisis de varianza. El procedimiento particiona la variabilidad total en la variable de respuesta en componentes más manejables los cuales se observan en la tabla 31.

Tabla 31: Sumas de los cuadrados

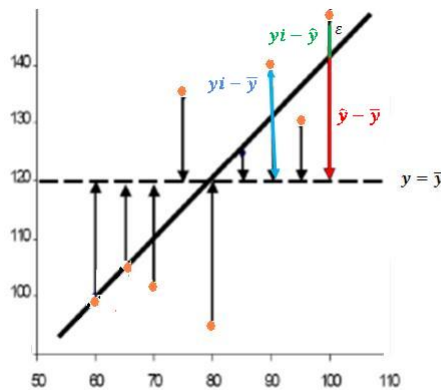
Suma de los cuadrados totales	Suma de los cuadrados de la regresión.	Suma de los cuadrados de los errores
$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$	$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$
Variabilidad total	Variabilidad tomada en cuenta por la regresión	Variabilidad debida al error aleatorio

**Suma de los cuadrados de los errores (SSE):**  $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ , mide la variabilidad total en los valores observados respecto a la recta de regresión Y, ya que el error pronosticado será el residuo  $(y_i - \hat{y}_i)$ .

**Suma total de los cuadrados (SST):**  $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ , representa la variación de los errores con respecto a la media de la muestra, es básica para la determinación de la varianza y de la desviación estándar de la muestra.

**Suma de los cuadrados de la Regresión (SSR):**  $\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ , variabilidad total en los valores observados de  $Y$ , considerando la relación lineal entre  $X$  y  $Y$ , mientras más grande sea la variabilidad, más fuerte serán la agrupación de puntos alrededor de la recta de mínimos cuadrados y la relación lineal entre  $x$  y  $y$ , por tanto SSR es un estadístico de la bondad del ajuste, pero debida a que tiene unidades cuadradas, se debe utilizar un estadístico de la bondad del ajuste cuyo número sea puro .

Figura 95: Representación sumas de los cuadrados de la regresión



De donde aparece:

$$SST = SSR + SSE$$

Si la hipótesis nula  $H_0: \beta_1 = 0$  es verdadera, el estadístico sigue a la distribución  $F_{1,n-2}$ , con lo que  $H_0$  debe rechazarse si  $f_0 > f_{\alpha,1,n-2}$  donde  $f_0$  está dado por la ecuación 181. Las cantidades  $MS_R = SSR/1$  y  $MS_E = SSE/(n - 2)$  reciben el nombre de media de cuadrados.

$$F_0 = \frac{SSR/1}{SSE/(n - 2)} = \frac{MS_R}{MS_E} \quad (181)$$

Usualmente se acomoda el procedimiento de prueba en una tabla de análisis de varianza, como la tabla 96.

Figura 96: Análisis de Varianza

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media de cuadrados	$F_0$
Regresión	$SS_R = \hat{\beta}S_{xy}$	1	$MS_R$	$\frac{MS_R}{MS_E}$
Error	$SS_E = S_{yy} - \hat{\beta}S_{xy}$	n-2	$MS_E$	
Total	$S_{yy}$	n-1		

Fuente: MONTGOMERY, Douglas. & RUNGER, George. Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería. 2 ed.: McGraw-Hill, 1996.p. 494.

### 8.9.1.5 Intervalos de confianza en la regresión lineal simple

Además de las estimaciones puntuales de la pendiente y la ordenada al origen es posible obtener estimaciones de los intervalos de confianza para estos parámetros. El ancho de los intervalos darán una medida de la calidad total de la recta de regresión. Bajo la suposición de que las observaciones están distribuidas de manera normal e independiente los intervalos de confianza del 100(1- $\alpha$ ) por ciento de la pendiente  $\beta_1$  y la ordenada al origen  $\beta_0$  están dados en la tabla 62, también es posible hallar un intervalo de confianza a partir de la respuesta media del 100(1- $\alpha$ ) por ciento para el valor de  $x = x_0, \mu_{Y/x_0}$  que encontramos en la tabla 32<sup>99</sup>.

Tabla 32: Intervalos de confianza en la regresión lineal simple.

Intervalo de Confianza	Ecuación
Intervalo para la pendiente $\beta_1$	$\hat{\beta}_1 - t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}$
Intervalo para la ordenada al origen $\beta_0$	$\hat{\beta}_0 - t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right]} \leq \beta_0 \leq \hat{\beta}_0 + t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right]}$
Intervalo de confianza alrededor de la respuesta media	$\hat{\mu}_{Y/x_0} - t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]} \leq \mu_{Y/x_0} \leq \hat{\mu}_{Y/x_0} + t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]}$

### 8.9.1.6 Evaluación del modelo de regresión

Los métodos que se han analizado hasta ahora son válidos bajo el supuesto de que la relación entre variables  $x$  y  $y$  satisfacen el modelo lineal, donde los errores satisfacen los supuestos 1 al 4.

- Los errores  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  son aleatorios e independientes. La magnitud de cualquier error  $\varepsilon_i$  no influye en el valor del siguiente error  $\varepsilon_{i+1}$ .
- Todos los errores  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  tienen media 0.
- Todos los errores  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  tienen la misma varianza, denotada por  $\sigma^2$ .
- Los errores  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  están distribuidos Normalmente

<sup>99</sup>ibid., 500.

La validez de estas suposiciones deben ser estudiadas para determinar que tan adecuado es el modelo, existen diferentes métodos que son útiles para este propósito como:

- El análisis residual
- Coeficiente de determinación ( $R^2$ ).
- Prueba de falta de ajuste

1. El análisis residual :

El análisis de residuos es útil para verificar la hipótesis de que los errores tienen una distribución normal, así como para determinar la utilidad de adicionar mas términos al sistema, como se observa en la figura 97.

Figura 97: Análisis de residuos



Definimos un residuo como:

$$\varepsilon = y - \hat{y}$$

Donde:

$y$  =Valor observado

$\hat{y}$ =Valor Estimado

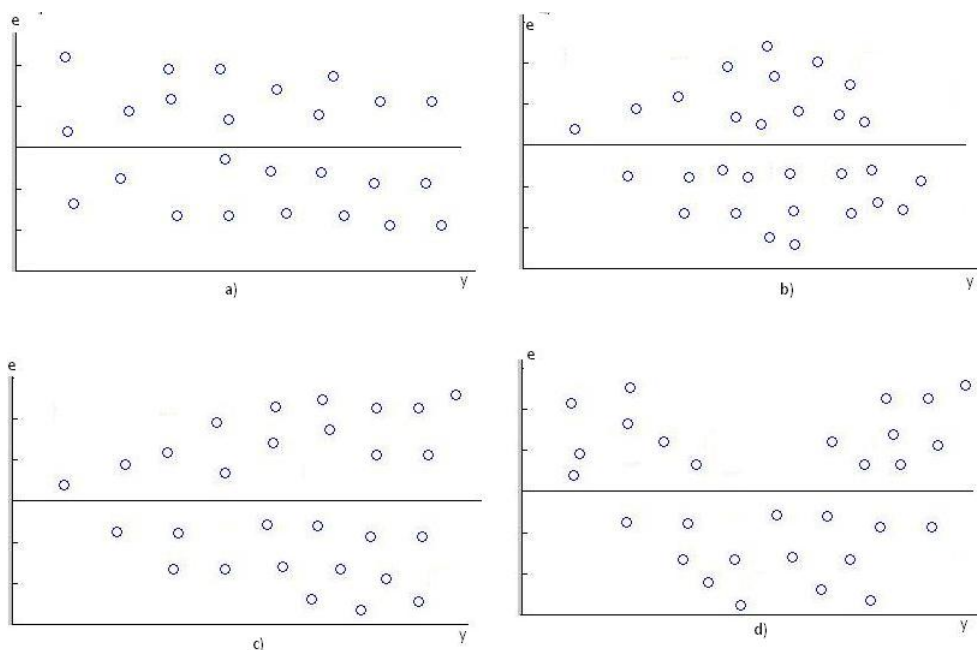
Gráfica de residuos: Diagnóstico para la regresión de mínimos cuadrados, gráfica residuos  $\varepsilon$  contra valores ajustados  $\hat{y}$ . Por facilidad matemática los residuos tienen media 0, y también la corrección entre los residuos y los valores ajustados es cero. Por tanto, la recta de mínimos cuadrados horizontal, pasando a través de 0 sobre el

eje vertical. Cuando el modelo lineal es válido y satisface los supuestos, la gráfica no indicara un patrón importante. Es útil graficar los residuos en :

- En secuencia del tiempo (si se conoce).
- Contra valor ajustado
- contra la variable independiente  $x$ .

Estas gráficas suelen verse como uno de los siguientes cuatro patrones:

Figura 98: Patrones para gráficas de los residuos.a)satisfactorio,b)embudo,c)doble arco,d)no lineal.



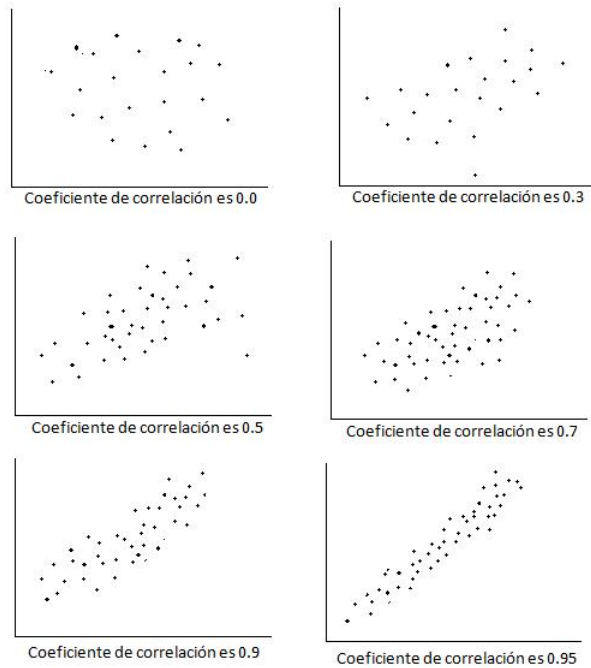
## 2. Coeficiente de determinación ( $R^2$ )

El estadístico  $r$  mide la fuerza de relación lineal entre  $x$  y  $y$ , entonces se considera un estadístico de la bondad del ajuste. El coeficiente de correlación  $r$  representa una medida cuantitativa de la asociación lineal entre dos variables  $x$  y  $y$ . Luego de haber hallado las medias y las desviaciones estándar de las  $x$  y de las  $y$ . Cuando el coeficiente de correlación se calcular para cualquier conjunto de puntos que constituyen una muestra aleatoria recibe el nombre de correlación muestral, que es una estimación de la correlación poblacional. La correlación muestral es útil en la construcción de intervalos de confianza y la relación de pruebas de hipótesis. Pero no es indicador de precisión efectivos.

El coeficiente de correlación está limitada por  $\pm 1$ , lo cual significa la correlación perfecta; el signo positivo del coeficiente indica que la recta de mínimos cuadrados

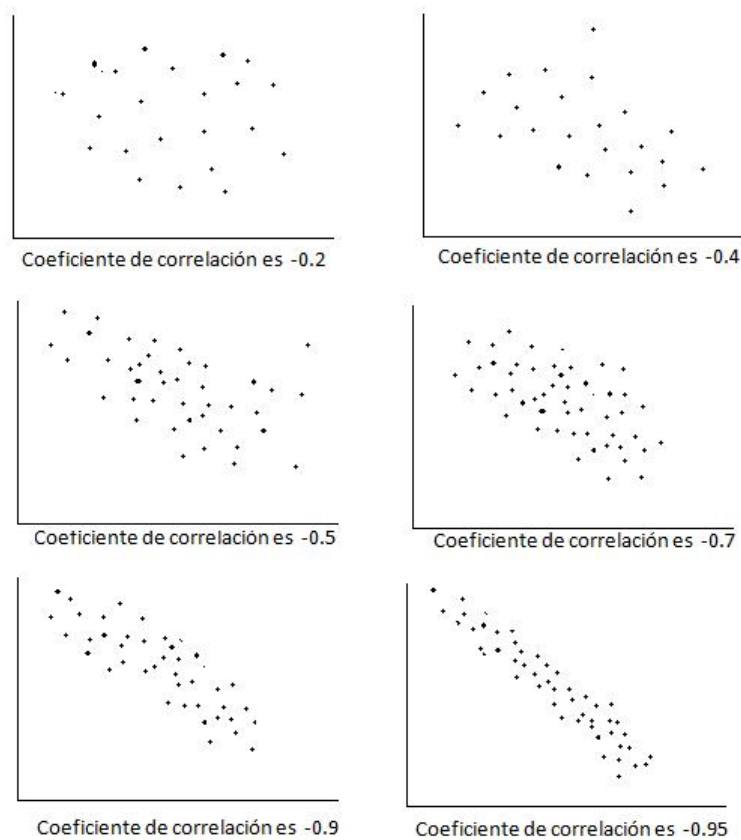
tiene pendiente positiva ver figura 99, los valores negativos del coeficiente indican que la pendiente de la recta tiene pendiente negativa figura 100. El valor del coeficiente de correlación cercanos a 1 o  $-1$  indican fuerte relación lineal, valores cercanos a 0 indican débil relación lineal, si el coeficiente se halla exactamente sobre una recta horizontal o vertical, el coeficiente de correlación está indeterminado, ya que una de las desviaciones estándar es igual a 0.

Figura 99: Niveles de Correlación Positiva



Fuente: NAVIDI, William. *Estadística para ingenieros y científicos*. 4 ed. México.: McGraw-Hill, 2006.

Figura 100: Niveles de Correlación Negativa



Fuente: NAVIDI, William. *Estadística para ingenieros y científicos*. 4 ed. México.: McGraw-Hill, 2006.

si  $r \neq 0$ ,  $x$  y  $y$  están correlacionados

si  $r = 0$ ,  $x$  y  $y$  no están correlacionados

Para el polinomio lineal un coeficiente de correlación,  $r$ , se determina por:

Podemos expresar

$$r = \sqrt{1 - \frac{S_{yx}^2}{S_y^2}}$$

Donde:

$$S_y = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y - \bar{y})^2$$

De lo cual se deduce  $r^2 \leq 1$ , es decir  $-1 \leq r \leq 1$

Siendo  $r$  el coeficiente de correlación lineal; la cantidad  $r^2$  es decir el cuadrado del coeficiente de correlación recibe el nombre de coeficiente de la determinación, y

expresa esta reducción como una proporción de la dispersión alrededor de  $y = \bar{y}$

$$r^2 = \frac{\text{Suma de los cuadrados de la regresión}}{\text{Suma total de los cuadrados}}$$

$$S_a = S_{yx} \sqrt{\frac{N}{N \sum_{i=1}^N x^2 - (\sum_{i=1}^N x)^2}}$$

### 3. Prueba de falta de ajuste

Los modelos de regresión normalmente se ajustan a los datos cuando la verdadera relación funcional se desconoce, y en esta probaremos si el modelo asumido es correcto<sup>100</sup>. Esta prueba se emplea para determinar la *bondad del ajuste* del modelo de regresión. De tal manera las hipótesis a probar son:

Ho: El modelo de regresión lineal es correcto

H1: El modelo de regresión lineal no es correcto.

La prueba consiste en dividir el error o la suma residual de cuadrados en los componentes de la ecuación siguiente:

$$SS_E = SS_{PE} + SS_{LOF} \quad (182)$$

Donde  $SS_{PE}$  es la suma de los cuadrados atribuibles al error puro.

$SS_{LOF}$ : Suma de los cuadrados de la atribuibles a la falta de ajuste .

Para calcular  $SS_{PE}$  es necesario tener observaciones repetidas de la respuesta  $Y$  al menos para un nivel de  $x$ .

Nótese que existen  $m$  niveles distintos de  $x$ . La contribución a la suma de cuadrados del error puro en  $x_1$  esta dado por la ecuación 183.

$$\sum_{u=1}^{n_j} (y_{iu} - \bar{y}_1)^2 \quad (183)$$

Existen  $n_{pe} = \sum_{i=1}^m (n_i - 1) = n - m$  grados de libertadasociado con la suma de cuadrados del error puro. La suma de los cuadrados de la falta de ajuste esta dado por la ecuación 184.

$$SS_{LOF} = SS_E - SS_{PE} \quad (184)$$

Con  $n - 2 - n_{pe} = m - 2$  grados de libertad. El estadístico de prueba la falta de ajuste será entonces:

<sup>100</sup>MONTGOMERY. Op. cit., p. 513.

$$F_o = \frac{SS_{LOF}/(m-2)}{SS_{PE}/(n-m)} = \frac{MS_{LOF}}{MS_{PE}} \quad (185)$$

Con lo que la hipótesis nula de que el modelo ajusta de manera adecuada los datos, se rechaza si  $f_o > f_{\alpha, m-2, n-2}$ .

Este procedimiento de prueba puede introducirse con facilidad en el análisis de varianza realizado para la significancia de la regresión. Si se rechaza la hipótesis nula con respecto a lo adecuado del modelo, entonces debe abandonarse el modelo para buscar uno más adecuado. Si no se rechaza no hay ninguna razón para dudar sobre el adecuado modelo.

### 8.9.2 Regresión Múltiple

El modelo de regresión que estudiaremos ahora involucra más de una variable regresiva  $y$  recibe el nombre de regresión múltiple. En este podemos buscar una ecuación que conecte las variables y tenga la forma de la ecuación 186.

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon \quad (186)$$

Ésta se llama una ecuación de regresión de  $y$  en  $X_1$  y en  $X_2$ , se representa en un plano de tres dimensiones, y se denomina plano de regresión. Esta técnica estadística es más ampliamente utilizada, en general, la variable respuesta puede relacionarse con  $k$  variables independientes. Este modelo describe un hiperplano en el espacio  $k$ -dimensional de las variables regresoras.

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon \quad (187)$$

Los modelos de regresión lineal múltiple se utilizan a menudo como funciones de aproximación. Es decir la verdadera relación funcional entre  $y$  y  $x_1, x_2, \dots, x_k$  se desconocen, aunque sobre ciertos intervalos de las variables independientes el modelo de regresión lineal es una aproximación adecuada.

Hay algunos casos especiales de la regresión lineal múltiple que se utilizan frecuentemente en la práctica<sup>101</sup>. Uno es el modelo de regresión polinomial, donde las variables independientes son función de una sola variable.

El modelo de regresión polinomial de grado  $p$  es :

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \dots + \beta_k X_k^p + \varepsilon_i$$

<sup>101</sup>NAVIDY. Op. cit., p. .

Los modelos de regresión múltiple también se pueden hacer con potencias de diversas variables. Como el modelo de regresión polinomial de grado 2 llamado modelo cuadrático, en dos variables  $x_1$  y  $x_2$  está dado por:

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{1i} X_{2i} + \beta_4 X_{1i}^2 + \beta_5 X_{2i}^2 + \varepsilon_i$$

Una variable producto de otra variable se llama interacción. En la ecuación anterior la variable  $x_{1i} x_{2i}$  es la interacción entre  $x_1$  y  $x_2$ .

### 8.9.2.1 Método de de mínimos cuadrados para la estimación de parámetros en la regresión lineal múltiples

El método de mínimos cuadrados puede utilizarse para estimar los coeficientes de regresión, ya que al igual que en la regresión lineal simple; la suma de los cuadrados de los valores observados debe ser mínima.

Si tomamos la ecuación 187, y suponemos que se disponen  $n \geq k$  observaciones, y sea  $x_{ij}$  denote la observación i-estima o el nivel de la variable  $x_j$ . Los datos aparecen en la tabla 33.

Tabla 33: Datos de Regresión Lineal Múltiples

$y$	$x_1$	$x_2$	$x_k$
$y_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{1k}$
$y_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{2k}$
$y_n$	$x_{n1}$	$x_{n2}$	$x_{nk}$

En base en esta tabla, se puede construir un modelo para predecir la variable  $y$ . Y permite estudiar la relación existente con la variable  $x_1, \dots, x_k$ .

La ecuación 187 en términos de las observaciones se pueden escribir como:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j X_{ij} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (188)$$

Donde la función de mínimos cuadrados es

$$L = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$$

$$L = \sum_{i=1}^n \left( y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ij} \right)^2$$

En este tipo de análisis es mas simple resolver las ecuaciones , si estas se presentan en forma matricial. y se puede escribir así:

$$y = \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix}, X = \begin{matrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{matrix}$$

$$\beta = \begin{matrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{matrix}, \epsilon = \begin{matrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{matrix}$$

Donde  $y$  es un vector de observaciones de  $(n \times 1)$ ,  $X$  es una matriz  $(n \times k)$  de las variables independientes,  $\beta$  es un vector de  $(k \times 1)$  formado por los coeficientes de regresión y  $\epsilon$  es un vector de  $(n \times 1)$  de errores aleatorios.

### 8.9.2.2 Propiedades de los estimadores de mínimos cuadrados y estimación del $\sigma^2$

Las propiedades estadísticas de los estimadores de mínimos cuadrados  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$  pueden determinarse con facilidad bajo ciertas condiciones sobre los términos del error  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  del modelo de regresión, estas propiedades se pueden ver de manera más clara en la tabla 26.

Tabla 34: Propiedades de los estimadores en regresión múltiple

Propiedad	característica matemática
Los errores son estadísticamente independientes de media 0 y varianza $\sigma^2$	$NID(0, \sigma^2)$
Los estimadores de mínimos cuadrados de $\hat{\beta}_1$ son estimadores insesgados del coeficiente de regresión $\beta_1$ .	$E(\hat{\beta}) = \beta.$
El estimador no sesgado de $\sigma^2$ está dado por el error o residuo cuadrático medio.	$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{n-p}$

### 8.9.2.3 Análisis de varianza para la prueba de significancia de la regresión lineal múltiple.

Para probar la significancia de la regresión puede usarse un método conocido como análisis de varianza. Este procedimiento determina si existe una relación lineal entre la

variable de respuesta  $y$  y un subconjunto de las variables de regresión  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Las hipótesis apropiadas son:

$$H_0 = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0 \quad (189)$$

$H_1 = \beta_j \neq 0$  al menos para una  $j$

La variabilidad total en la variable de respuesta se observan en la tabla 96, la cual representa el análisis de varianza.

Tabla 35: Análisis de varianza para la regresión lineal múltiple

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media de cuadrados	Fo
Regresión	$SS_R$	k	$MS_R$	$\frac{MS_R}{MS_E}$
Error residuo	$SS_E$	n-p	$MS_E$	
Total	$Syy$	n-1		

Fuente: MONTGOMERY, Douglas. & RUNGER, George. *Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería*. 2 ed.: McGraw-Hill, 1996p. 556.

Estas sumas de los cuadrados puede utilizarse para deducir los estadísticos que se emplean en la regresión múltiple.

Los estadísticos mas utilizado en la regresión múltiple son los siguientes y se detallan en la tabla :

- $S^2$ : Estimador de la varianza del error.
- $R^2$  : El Coeficiente de determinación
- Estadístico  $F$ .

Tabla 36: Estadísticos en la regresión múltiple

Estadístico	Ecuación
$S^2$	$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p-1}$
$R^2$	$R^2 = \frac{SSR}{SST}$
$F$	$F = \frac{SSR/p}{SSE/(n-p-1)}$

## 8.10 PROCESOS ESTADÍSTICOS DE CALIDAD Y CONTROL

### 8.10.1 Control del proceso estadístico

En el control estadístico de la calidad se dispone de métodos estadísticos e ingeniería utilizados para la medición, supervisión y manipulación de un proceso para el mejoramiento de la calidad.

Para llevar a cabo un control de calidad en un proceso es indispensable que la medición se lleve a cabo de forma estandarizada y con poca variabilidad en su lectura; una manera de lograrlo es por medio de controles de proceso estadísticos en línea, en general estos métodos son herramientas idóneas para resolución de fallas que se puede representar en graficas como histogramas, diagramas de Pareto, causa-efecto, concentración de defectos, dispersión u hoja de verificación, de los cuales se resalta el diagrama de control como una herramienta de gran utilidad.

#### 8.10.1.1 Diagrama de control

Desarrollada por el doctor Walter A. Shewhart en los años de 1920<sup>102</sup>, que al comprender la teoría de la variación, formulada por él mismo, donde estipula que todos los procesos, sin importar su efectividad, presentan variación en las medidas realizadas con instrumentos de suficiente resolución; parte de esta dispersión se debe a causas inherentes al proceso que son difícil especificar, pero en la aleatoriedad de los datos se puede aplicar un control estadístico, las cuales son llamadas *causas comunes* o probable; la otra parte de la variación es causada por situaciones de error humano o logístico que se llevan a cabo por fluctuaciones en condiciones ambientales, materia prima, equipos en malas condiciones u operación inadecuada, entre otras, conocidas como *causas especiales o asignables*.

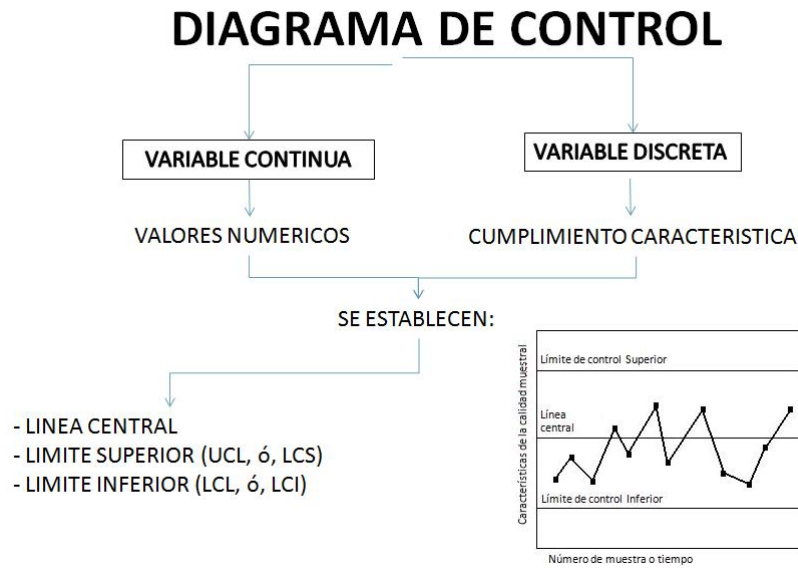
La presencia de causas asignables no es aceptable y el objetivo del diagrama de control es encontrarlas, aplicar la solución correspondiente para eliminarlas y garantizar la apropiada operación del proceso.

Se distingue en un diagrama de control para mediciones la presencia de valores numéricos a diferencia de un diagrama de control para atributos, donde se verifica el cumplimiento de una característica o no como se observa en la figura 101.

---

<sup>102</sup>MONTGOMERY, Douglas. Control estadístico de calidad. 3 ed.: Limusa Wiley, 2006.

Figura 101: Diagrama de control



El diagrama de control como el mostrado en la figura 101, en general consta de una línea central, la cual indica un valor medio de los datos y dos límites de control: superior (UCL, ó, LCS) e inferior (LCL, ó, LCI); los valores correspondientes al área fuera de dichos límites corresponden a situaciones donde se es inexistente el control estadístico. Es necesario tomar muestras periódicas de la variable aleatoria del proceso, realizar cálculos y graficarlos en el diagrama de control, cuando un valor cae fuera de los límites ya nombrados se debe buscar la causa asignable al caso de la falta de control estadístico; sin contar que la gráfica puede indicar algún comportamiento concurrente que alarme una posible falla de control.

La toma de cada muestra se debe realizar en condiciones lo más semejantes posible, lo que atribuye ser parte del subgrupo racional para garantizar la efectividad del análisis de un comportamiento en común, y en caso necesario encontrar una causa asignable real; una forma de lograrlo es teniendo en cuenta el orden del proceso y la fuente, si existe alguna.

Los *subgrupos racionales* son cierto número de muestras tomadas durante determinado periodo. En el principio básico de la variabilidad de las mediciones, ésta debería ser resultado de causas comunes y ninguna de causas especiales. En la elección de un subgrupo de esta clase se debe definir que causas especiales son las más importantes y probables de detectar. Los métodos más utilizados son:

- Muestreo en intervalos irregulares, los elementos de cada muestra son producidos casi en el mismo tiempo en que se realiza el muestreo.

- Muestreo en intervalos regulares, los elementos de cada muestra se extraen a partir de todas las unidades producidas desde que se tomo la última muestra.

Los diagramas de control que se utilizan para variables continuas se conocen como diagramas de control de variables, aquellos idoneos para variables binarias o discretas se llaman diagramas de control de atributos.

### 8.10.1.2 Diagramas de Control para Mediciones

Las mediciones realizadas a una característica de calidad se debe realizar control tanto en su valor promedio como en su variabilidad.

- Diagrama de control para medias (Diagrama  $\bar{X}$ ): Realiza control sobre la calidad promedio.
- Diagrama de control de rango (Diagrama  $R$ ): Control de la variabilidad del proceso
- Diagrama de desviación estándar (Diagrama  $s$ ): Control de variabilidad teniendo en cuenta todos los valores.

#### Diagrama de control para medias y rango :

Se debe utilizar por lo menos 20 a 25 muestras, las cuales se llaman  $M$  muestras preliminares de tamaño  $n$ , donde se recomienda que  $n$  sea 4, 5, ó 6 por lo general<sup>103</sup>, aunque son tamaños relativamente pequeños, la práctica confirma su uso ya que surgen de subgrupos racionales. Según lo anterior se halla la media de las medias que corresponde a la línea central del diagrama de control dado por la ecuación 190.

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{X}_i \quad (190)$$

$M$ : Numero de muestras preliminares

Se podría estimar  $\sigma$  a partir de las desviaciones estándar o de los rangos de las  $M$  muestras. Para el segundo caso, el cual es mas utilizado en la práctica. Al realizar la estimación de  $\sigma$  se pierde poco en eficiencia ya que se utiliza un tamaño pequeño de  $n$ . Es necesario la relación entre el rango,  $R$ , de una muestra de una población normal con parámetros conocidos, y la desviación estándar de la población. Como  $R$  es una variable

<sup>103</sup>MONTGOMERY, Probabilidad y estadística de calidad. Op. cit., pag. 615

aleatoria el rango relativo  $W = R/\sigma$  también lo es, y tiene una media denominada  $d_2$ , valores que están tabulados en tablas<sup>104</sup>, para diversos valores de  $n$ .

El rango promedio y el  $\sigma$  estimado, está dado por la ecuación 191 y 192 respectivamente.

$$\bar{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M R_i \quad (191)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (192)$$

Los límites superior e inferior para el diagrama  $\bar{X}$ , están dados por las ecuaciones 193 y 194 respectivamente.

$$LCS = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} \quad (193)$$

$$LCI = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} \quad (194)$$

Donde:

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} \quad (195)$$

$A_2$  es una constante dependiente del tamaño de la muestra, sus valores se encuentran tabulados para diferentes tamaños de muestra<sup>105</sup>, para diversas  $n$ . Para el diagrama  $R$ , la línea central será  $\bar{R}$ ; para determinar límites de control se estima la desviación estándar de  $R$ ,  $\sigma_R$ ; suponiendo proceso bajo control, se halla la distribución del rango relativo,  $W$  y su desviación estándar  $\sigma_W$ , la cual es una función de  $n$ , dada por la ecuación 196, y su valor estimado por la ecuación 197.

$$\sigma_R = \sigma_W\sigma \quad (196)$$

$$\hat{\sigma}_R = \sigma_W\frac{\bar{R}}{d_2} \quad (197)$$

Entonces para el diagrama de  $R$  los límites superior e inferior están dados por las ecuaciones 198 y 199 correspondientemente.

$$LCS = \bar{R} - \frac{3\sigma_W}{d_2}\bar{R} = D_4\bar{R} \quad (198)$$

$$LCI = \bar{R} + \frac{3\sigma_W}{d_2}\bar{R} = D_3\bar{R} \quad (199)$$

Donde:

---

<sup>104</sup>Ibid., p. tabla XIII.

<sup>105</sup>Hines, W; Montgomery, tabla XIII.

$$D_3 = 1 - \frac{3\sigma_w}{d_2} \bar{R} \quad (200)$$

$$D_4 = 1 + \frac{3\sigma_w}{d_2} \bar{R} \quad (201)$$

Los valores de las  $D_3$  y  $D_4$  están tabulados para diversas  $n^{106}$ . Ya que son valores preliminares de prueba deben tratarse como tal e investigar las posibles causas de puntos que queden fuera del intervalo de control; cuando se elimine la causa asignable se debe determinar nuevos límites de control y de esa manera llevar un control actualizado del comportamiento del proceso.

**Ejemplo 8.22** (Fuente: HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería. 4 ed. México.: Cecs, 2006.*) Un componente del motor de un jet se manufactura por medio de un proceso de fundición del revestimiento. La apertura del álabe en esta fundición es un parámetro funcional importante de la pieza. Evaluar la estabilidad estadística de éste proceso. La tabla 37 presenta 5 muestras de cinco piezas cada una.

Tabla 37: Mediciones de apertura del álabe

Número de muestras	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$\bar{X}$	$R$
1	33	29	31	32	33	31,6	4
2	35	33	31	37	31	33,2	6
3	35	37	33	34	36	35,0	4
4	30	31	33	34	33	32,2	4
5	33	34	35	33	34	33,8	2
6	38	37	39	40	38	38,4	3
7	30	31	32	34	31	31,6	4
8	29	39	38	39	39	36,8	10
9	28	34	35	36	43	35,2	15
10	39	33	32	34	32	34	7
11	28	30	28	32	31	29,8	4
12	31	35	35	35	34	34	4
13	27	32	34	32	37	33	10
14	33	33	35	35	36	34,8	4
15	35	37	32	35	39	35,6	7
16	33	33	27	31	30	30,8	6
17	35	34	34	30	32	33	5
18	32	33	30	30	33	31,6	3
19	25	27	34	27	28	28,2	9
20	35	35	36	33	30	33,8	6
						$X = 33,33$	$R = 5,85$

<sup>106</sup>ibid., p. A-38.tabla XIII.

Se halla los límites de control de prueba para el diagrama  $\bar{X}$ .

$$\bar{\bar{X}} \pm A\bar{R} = 33,3 \pm (0,577)(5,85) = 33,33 \pm 3,37 \quad (202)$$

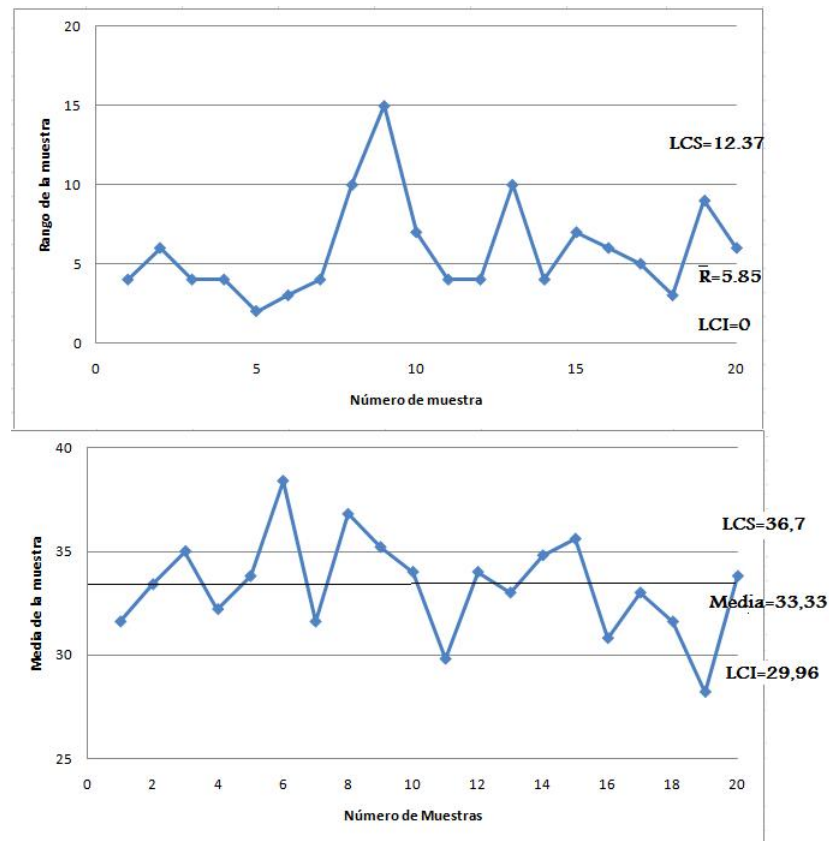
Lo que indica que  $LCS = 36,70$  y  $LCI = 29,96$

Para el diagrama  $R$ , los límites de control de prueba son:

$$LCS = D_4\bar{R} = (2,115)(5,85) = 12,37$$

$$LCI = D_3\bar{R} = (0)(5,85) = 0$$

Figura 102: Diagrama  $\bar{X}$  y  $R$



Se observa que los puntos 6, 8, 11, 19 se encuentran fuera de control en el diagrama  $\bar{X}$ , y la 9 en el diagrama  $R$ , por lo cual se debe encontrar una causa y eliminarlo, lo que conlleva nuevos cálculos, para el diagrama  $\bar{X}$ :

$$\bar{\bar{X}} \pm A\bar{R} = 32,90 \pm (0,577)(5,313) = 32,90 \pm 3,065 \quad (203)$$

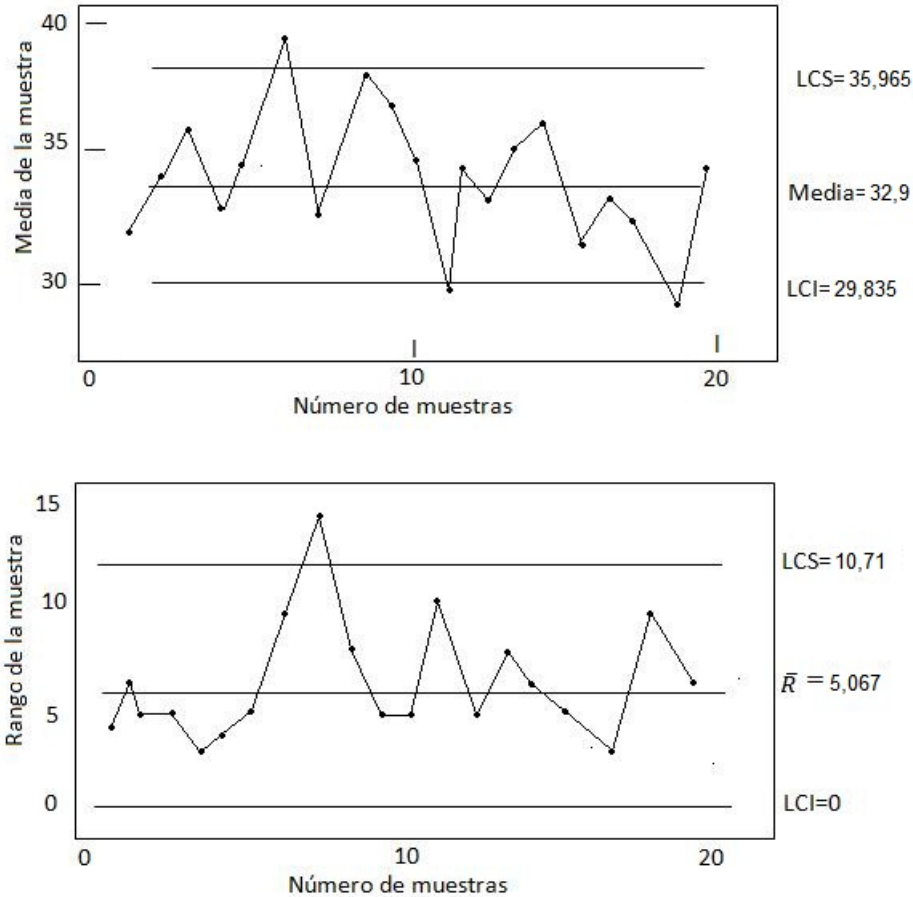
Lo que indica que  $LCS=35,96$  y  $LCI=29,84$

Para el diagrama  $R$

$$LCS = D_4\bar{R} = (2,115)(5,067) = 10,71$$

$$LCI = D_3\bar{R} = (0)(5,067) = 0$$

Figura 103: Diagramas de Control  $\bar{X}$  y  $R$  para l abertura del álabe.



Fuente: HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. Probabilidad y Estadística para Ingeniería. 4 ed. México.: Cecs, 2006.

El mismo procedimiento se debe llevar a cabo para llevar un control constante del proceso disminuyendo errores o problemas en el funcionamiento de la maquinaria u otro aspecto que afecte el proceso.

### Diagrama S

Cuando la población es normal, hacer control con el diagrama S es mas preciso debido a una menor incertidumbre ya que la desviación estándar toma en cuenta todos los valores dados en una muestra a diferencia del rango que solo se basa en los datos mayor y menor. Por ello para procesos con un tamaño de muestra mayor de aproximadamente 5, es recomendable utilizar el diagrama S.

Ésta es una alternativa del diagrama R, pero a diferencia que R controla la variabilidad con respecto al rango muestral de la característica, y lo hace tomando como referencia

la desviación estándar muestral.

La línea central estará ubicada en el valor dado por  $\bar{s}$ , que es el promedio de las desviaciones estándar y sus límites de control dado por las ecuaciones 204, 205 y 206.

$$LCS = B_4\bar{s} \quad (204)$$

$$LCI = B_3\bar{s} \quad (205)$$

Las constantes  $B_3$  y  $B_4$ , están tabuladas según el tamaño de la muestra  $n$ <sup>107</sup>.

$$\bar{s} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (206)$$

### Diagrama de control para mediciones individuales

En ocasiones una muestra consta de una sola observación,  $n = 1$ , por causa de una producción lenta y costosa, o debido a una inspección automatizada, por ello resultaría impráctico que el tamaño de la muestra sea mayor. En estos casos se utiliza el diagrama de control Shewhart para mediciones individuales, donde el rango móvil es definido por la ecuación 207.

$$RM_i = |x_i - x_{i-1}| \quad (207)$$

Donde  $i$  varía de 0 a  $M$  observaciones. “Los gráficos de control simultáneos se pueden establecer sobre las observaciones individuales y sobre el rango móvil”<sup>108</sup>.

Los límites de control para el diagrama de control individual se especifican en las ecuaciones 208 y 209.

$$LCS = \bar{x} + 3\frac{\bar{RM}}{d_2} \quad (208)$$

$$LCI = \bar{x} - 3\frac{\bar{RM}}{d_2} \quad (209)$$

Donde  $\bar{RM}$  es la media de la muestra de la  $RM_i$ ; Línea central  $=\bar{x}$

En caso de utilizar un rango móvil de tamaño  $n = 2$ , corresponde a  $d_2 = 1,128$ , según datos tabulados<sup>109</sup>.

Los límites de control para diagrama de control de rango móvil está dada por la ecuación

$$LCS = D_4\bar{RM} \quad (210)$$

$$LCI = D_3\bar{RM} \quad (211)$$

<sup>107</sup>NAVIDI. Op. cit., p. tabla A.9. Apéndice A.

<sup>108</sup>Ibid., p. tabla XIII de apéndice A.

<sup>109</sup>Ibid. p. tabla XIII de apéndice

$\bar{RM}$ : Línea central

**Ejemplo 8.23** (Fuente: HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería*. 4 ed. México.: Cecs, 2006.) Se seleccionan lotes de un producto químico particular de un proceso, y se mide la pureza de cada uno. En la tabla se muestran los datos recopilados de 15 lotes sucesivos. Los rangos móviles de tamaño  $n=2$  también se representan en la tabla.

Para realizar el diagrama de control individual, necesitamos primero el promedio de la muestra 15 mediciones de la pureza. Se encuentra que este promedio de  $\bar{x} = 0,757$ . El promedio de los rangos móviles de las dos observaciones es  $\bar{RM} = 0,046$ . Los límites de control para los diagramas individuales con rangos móviles de tamaño 2 usados en los límites de la ecuación son:

$$LCS = 0,757 + 3 \frac{0,046}{1,128} = 0,879$$

$$\text{Línea central} = 0,757$$

$$LCI = 0,757 - 3 \frac{0,046}{1,128} = 0,635$$

Los límites de control para el diagrama de rango móvil se encuentran usando los límites dados en la ecuación:

$$LCS = 3,267 * 0,046 = 0,15$$

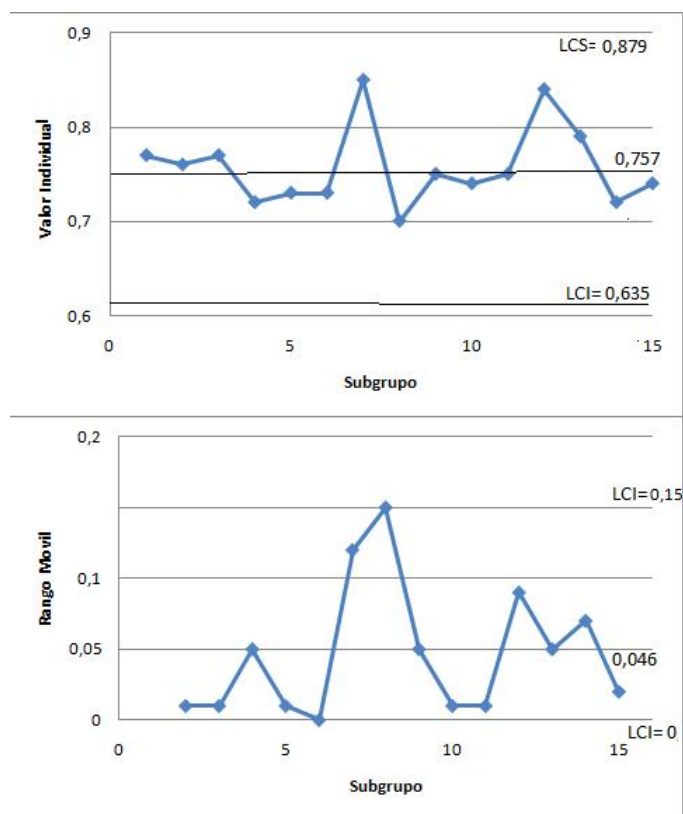
$$\text{Línea central} = 0,046$$

$$LCI = 0 * 0,046 = 0$$

Cuadro 38: Pureza de un producto químico

Lote	Pureza, x	Rango móvil, RM
1	0,77	
2	0,76	0,01
3	0,77	0,05
4	0,72	0,05
5	0,73	0,01
6	0,73	0,00
7	0,85	0,12
8	0,70	0,15
9	0,75	0,05
10	0,74	0,01
11	0,75	0,01
12	0,84	0,09
13	0,79	0,05
14	0,72	0,07
15	0,74	0,02
	$\bar{x} = 0,757$	$MR = 0,046$

Figura 104: Diagramas de control  $\bar{x}$  y  $R$  para a. Mediciones Individuales, b. Rango móvil de pureza.



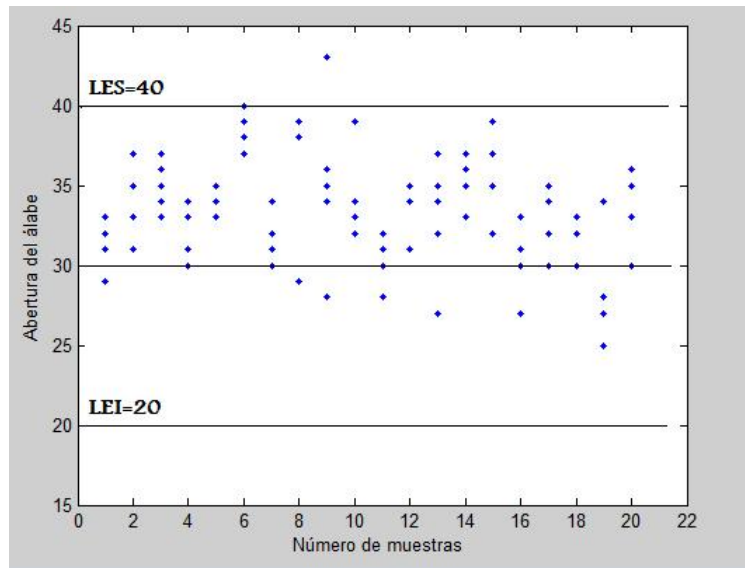
### 8.10.2 Capacidad de un proceso

El diagrama de tolerancia (diagrama de hileras), y el histograma son herramientas gráficas en el análisis y obtención de información sobre la capacidad del proceso. El diagrama de tolerancia se utiliza para revelar patrones sobre el tiempo en las mediciones individuales y mostrar valores inusuales tanto en  $\bar{X}$  como en  $R$ .

Graficar límites de especificaciones en un diagrama de control no es adecuado ni es aconsejable utilizar esos valores para determinar los límites de control<sup>110</sup>, ya que no tienen ninguna relación; pero en el diagrama de tolerancia es conveniente ya que éste hace referencia a tomas individuales.

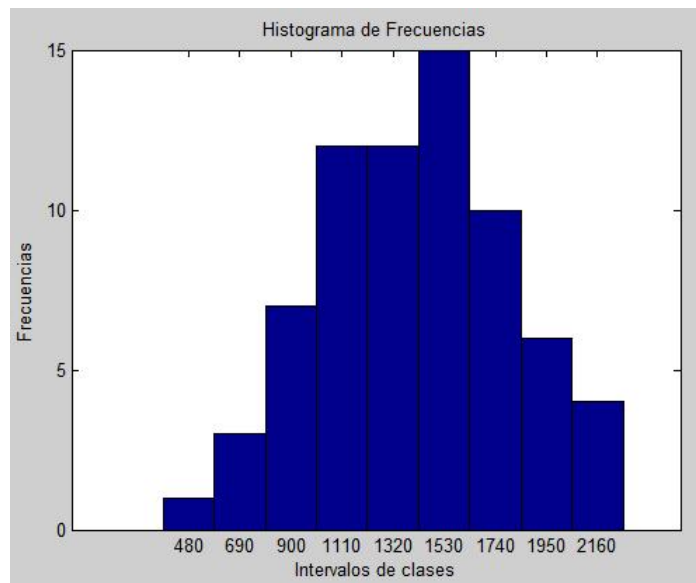
<sup>110</sup>MONTGOMERY. Op. cit., p. 444.

Figura 105: Diagrama de tolerancias



Se debe observar en la figura 105 que el proceso se está llevando a cabo fuera del centro de los niveles de especificación nominal de la pieza (diámetro = 0,530), lo contrario a lo establecido en la figura 106, que representa el histograma del proceso omitiendo aquellos puntos que se encuentran fuera de control en la figura 105, y de esa manera se cumplen las condiciones requeridas de la pieza.

Figura 106: Histograma para la apertura del álabe



La Razón de Capacidad del Proceso (RCP), es otra manera de describir, como su nombre lo indica, la capacidad del proceso, en este caso potencial, para ello el RCP se define con la ecuación 212.

$$RCP = \frac{(LES - LEI)}{6\sigma} \quad (212)$$

Tener en cuenta que una dispersión de  $6\sigma$  ( $3\sigma$  a cualquier lado de la media) se conoce como capacidad básica del proceso y sus límites como tolerancia natural, que un proceso debe cumplir con la mayor parte de las unidades producidas para identificarse bajo control, si se estima  $\sigma$ , con los valores ubicados dentro de la zona de control:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{4,8}{2,326} = 2,06$$

Por lo tanto,

$$RCP = \frac{LES-LEI}{6\sigma} = \frac{(40-20)}{(6(2,06))} = 1,62$$

El RCP se expresa en porcentaje de la banda de tolerancia empleada por el proceso,

$$\frac{1}{1,62} * 100 = 61,7 \%$$

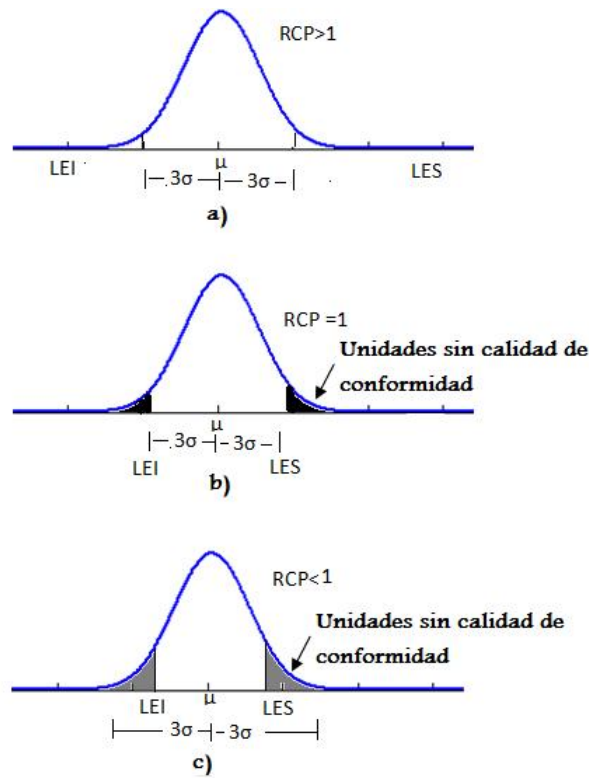
Por ello, el proceso de apertura del álabe emplea el 61,7 % aproximadamente de la banda de tolerancia.

La capacidad de un proceso se distingue del control debido a que su condición depende del cumplimiento en las especificaciones de diseño o requerimientos necesarios en las condiciones industriales y demanda del mismo.

En el caso que el RCP exceda la unidad (figura 107a), se observa que éste rango se encuentra dentro de los límites de control, lo que quiere decir que menos unidades defectuosas o sin calidad de conformidad se producirán, cumpliendo con la tolerancia natural del proceso<sup>111</sup>. Si RCP es la unidad (107b), resultan mas unidades defectuosas comparando con lo anterior; se ha estimado que en este caso la fracción defectuosa es 0,27 %, o 2700 partes por millón de unidades producidas. Y cuando el RCP sea menor que la unidad se producirá una buena cantidad de unidades defectuosas.

<sup>111</sup>Hines,W; Montgomery,D .Probabilidad y Estadística para Ingeniería. Edit. Cedsa, México, 2007.

Figura 107: Caída del proceso y razón de capacidad del proceso RCP. Fuente: Hines, Probabilidad y estadística para Ingeniería.



Fuente: HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. Probabilidad y Estadística para Ingeniería. 4 ed. México.: Cecs, 2006.

La medida dada por RCP se puede considerar como la capacidad potencial de un proceso, siempre y cuando éste se encuentre centrado respecto a la dimensión nominal, en caso contrario, el valor real del RCP será menor que el calculado y se halla en la ecuación 213.

$$RCP_k = \min[(LES - \bar{X})/3\sigma, (\bar{X} - LEI)/3\sigma] \quad (213)$$

$RCP_k$  es la razón de capacidad de proceso de un lado que se calcula respecto del límite de especificación más cercano a la media del proceso, y se puede considerar como el valor de la capacidad real, para el caso de apertura del alabe:

$$RCP_k = \min[(40 - 33,19)/(3(2,06)) = 1,10, (33,19 - 20)/(3(2,06)) = 2,13] = 1,10$$

En caso que  $RCP = RCP_k$  el proceso se centra en la dimensión nominal, tal caso se puede demostrar en las graficas anteriores se evidencia la desentralizacion con respecto a la dimensión nominal dado su valor  $RCP = 1,62 \neq RCP_k = 1,10$ , lo cual debe tener una causal asignada que encontrar y corregir.

En compañías de Estados Unidos se emplea la  $RCP = 1,33$  como objetivo aceptable

mínimo, y  $RCP = 1,66$  como objetivo mínimo en caso de características de resistencia seguridad o críticas. En otras empresas internacionales, especialmente la industria automotriz, se adopta la terminología japonesa  $Cp = RCP$  y  $Cpk = RCP_k$ .

### 8.10.3 Tendencias del diagrama de control

Realizando un análisis de los valores o variaciones que se presentan en el diagrama de control se puede detectar una tendencia en él con la ayuda de los símbolos “+” y “-”, los cuales describen un valor por encima y por debajo respectivamente de la línea central que toma la variable característica e identifica la corrida de la misma.

Una “corrida” se define como una secuencia de puntos que caen en el mismo lado de la línea central del diagrama de control.

La idea es identificar las corridas hechas por la variable característica de calidad realizando un análisis con algunas reglas que se han establecido estadísticamente, existe la posibilidad de detectar una tendencia del comportamiento que puede conllevar al descubrimiento de la existencia o posible falla; generalmente estas pruebas se realizan con las corridas mas extensas que son encontradas.

Personas como Grant y Leavenworth, en 1988, notaron que era recomendable sospechar una causa asignable de la variación si alguna secuencia de puntos, presentaba el siguiente comportamiento<sup>112</sup>:

- Siete o mas puntos consecutivos en el mismo lado de la línea central.
- Al menos 10-11, 12-14, 14-17 puntos consecutivos en el mismo lado de la línea central.

Una manera para identificar cuando una variable esta fuera de control sin necesidad que ésta tome valores por fuera de los limites de control es utilizando las reglas Western Electric, que en 1956 los ingenieros proponen una lista de condiciones aplicables si en el diagrama se presenta una tendencia o patrón en un largo periodo de tiempo o muestreo.

Se calcula los límites de control para  $m = 3, 2$  y  $1 \sigma$  en la ecuación 214.

$$\bar{X} \pm mA_2 \frac{\bar{R}}{3} \tag{214}$$

Las reglas que prueban que un proceso se encuentra fuera de control son<sup>113</sup>:

<sup>112</sup>MENDENHALL. Op. cit., p. 810.

<sup>113</sup>NAVIDI. Op.cit., p.737. .

- Cualquier punto del diagrama fuera de los límites  $3\sigma$ .
- Dos de tres puntos consecutivos del diagrama por arriba o por debajo del límite superior o inferior  $2\sigma$ , respectivamente.
- Cuatro de cinco puntos consecutivos del diagrama de control por encima o por debajo del límite superior o inferior  $1\sigma$ , respectivamente.
- Ocho puntos consecutivos del diagrama que estén del mismo lado que la recta central.

### 8.10.4 Diagramas de control para variables discretas

También llamados diagramas de control para atributos, se tienen una clasificación para esta clase de diagramas de control como la que se observa en la figura 101.

Tabla 39: Control para atributos

	LINEA CENTRAL	LIMITE SUPERIOR DE CONTROL	LIMITE INFERIOR DE CONTROL
p	$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k D_i}{kn}$	$LCS = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$	$LCI = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$
c	$\bar{c} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k c_i$	$LCS = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}$	$LCI = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}$
u	$u = \frac{c}{n}$ $\bar{u} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k u_i$	$LCS = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{n}}$	$LCI = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{n}}$

#### 8.10.4.1 Diagrama p (Fracción defectuosa o sin calidad de conformidad).

Se utiliza cuando la característica de calidad a medir solo toma dos valores, con el objetivo de clasificar un producto como defectuoso o no en base a un estándar de forma más simple y hasta económica en su inspección; por ejemplo el diámetro de un cojinete de bola puede verificarse determinando si pasará a través de un medidor compuesto por agujeros circulares cortados en una plantilla<sup>114</sup>, lo cual es más sencillo que realizar

<sup>114</sup>MONTGOMERY. Control estadístico de calidad. Op. cit., p. 770.

una medición con micrómetro. Pero contrarresta su ventaja la necesidad de adquirir un valor mayor de muestras que en el caso de mediciones de contrapartes. Se debe tener en cuenta que una unidad puede ser al mismo tiempo defectuosa y no defectuosa y en base a condiciones predeterminadas clasificarse como defectuosa o no, según el número de defectos que tenga.

Se supone  $D$  como el número de unidades defectuosas, la cual es una variable aleatoria binomial con parámetro desconocido  $p$ , la fracción de muestra defectuosa es un estimador  $\hat{p}$  dado por la ecuación 215.

$$\hat{p} = D/n \quad (215)$$

Para ello, la varianza de la estadística  $\hat{p}$  está especificado por la ecuación 216, y su valor estimado en la ecuación 217.

$$\sigma_p^2 = (p(1 - p))/n \quad (216)$$

$$\hat{\sigma}_p^2 = (\hat{p}(1 - \hat{p}))/n \quad (217)$$

Suponiendo  $M$  muestras preliminares, cada una de tamaño  $n$ ,  $D_i$  es el número de defectos en la  $i$ -ésima muestra, la línea central está dada por la ecuación 218, y sus límites por la ecuación 219 y 220.

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k D_i}{kn} \quad (218)$$

$$LCS = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}} \quad (219)$$

$$LCI = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}} \quad (220)$$

Los límites de control inmediatamente anterior mencionados se basan en la aproximación normal a la distribución binomial, no resultando adecuado cuando  $p$  es pequeña, en dado caso se recomienda utilizar límites de control obtenidos directamente de una tabla de probabilidades binomiales o, talvez, de la aproximación de Poisson a la distribución binomial. Si  $p$  es pequeña, el límite de control inferior puede ser un número negativo. Si esto debe ocurrir, se acostumbra considerar que el límite de control inferior es igual a cero<sup>115</sup>.

Se ha observado que el tamaño de muestra necesario para construir un diagrama  $\bar{p}$  usualmente es mayor que el requerido para un diagrama  $\bar{X}$ , ya que el tamaño de la muestra debe ser mayor o igual a 30, para que exista varias unidades defectuosas en cada muestra y especifique un valor representativo.

---

<sup>115</sup>ibid., p. 372.

Al momento de analizar éste diagrama se debe considerar el hecho que no se puede reaccionar de la misma manera que un punto se grafique por encima en lugar que por debajo de los límites de control, ya que en el primer caso significa que ha aumentado el número de unidades defectuosas y es evidente la necesidad de encontrar la causa asignable para eliminarla, en cambio en el segundo caso, significa que el número de unidades defectuosas ha disminuido para una misma producción, lo que induce a encontrar la causa para estimular su ejecución y seguir disminuyendo las unidades defectuosas del proceso.

**Ejemplo 8.24** (Fuente : NAVIDI, William. *Estadística para ingenieros y científicos*. 4 ed. México.: McGraw-Hill, 2006.) En la producción de placas de silicio se extraen 30 muestras de tamaño 500, y se calcula la proporción de placas defectuosas en cada muestra. La tabla 40 muestra los resultados .

- Calcule la recta central y los límites de control del diagrama p.
- Dibuje el diagrama.

Tabla 40: Número y proporción de Unidades defectuosas

MUESTRA	Número de Unidades Defectuosas	Proporción de unidades Defectuosas
1	17	0,034
2	26	0,052
3	31	0,062
4	25	0,05
5	26	0,052
6	29	0,058
7	36	0,072
8	26	0,052
9	25	0,050
10	21	0,042
11	18	0,036
12	33	0,066
13	29	0,058
14	17	0,034
15	28	0,056
16	26	0,052
17	19	0,038
18	31	0,062
19	27	0,054
20	24	0,048
21	22	0,044
22	24	0,048
23	30	0,060
24	25	0,050
25	26	0,052
26	28	0,056
27	22	0,044
28	31	0,062
29	18	0,036
30	23	0,046

**Solución**

El promedio de las 30 proporciones muestrales  $\bar{p} = 0,050867$  y la recta central se ubica en este valor.

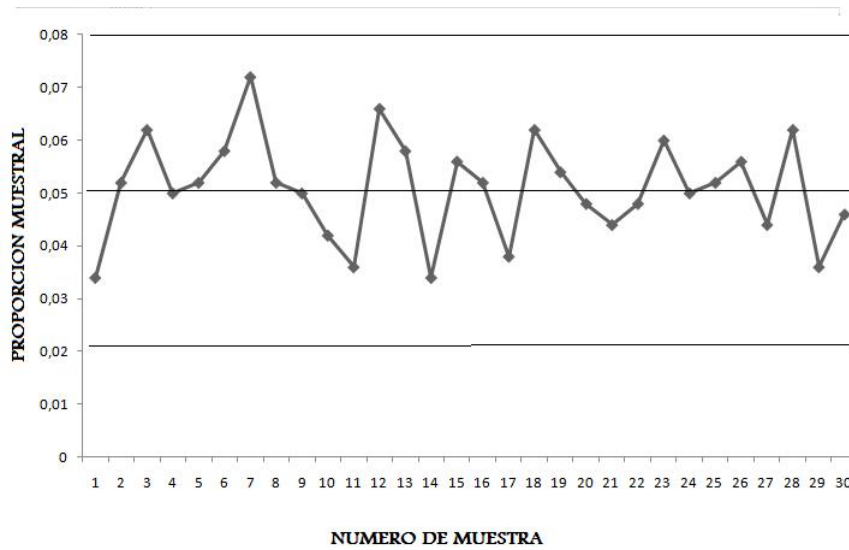
los límites de control estan en  $0,050867 \pm 3\sqrt{0,050867 * 0,949133/500}$

Limite de control inferior = 0,0214

Limite de control superior = 0,0803

De la grafica podemos observar que el proceso si está en control.

Figura 108: Diagrama  $p$  para los datos de la tabla



#### 8.10.4.2 Diagrama $c$ (para defectos)

Para el caso del control del número de defectos de una unidad, como en el caso del ensamblado del ala de una aeronave, que se debe controlar el número de remaches faltantes por metro. En general es necesario que la descripción del número de defectos por unidad que pueda ser modelado por medio de la distribución de Poisson.

La variable aleatoria  $c$  de Poisson el número de defectos en una unidad con parámetro  $\alpha$ , por tanto la media y la varianza de esta distribución es  $\alpha$ ,  $\sigma = \sqrt{\alpha}$ , se dispone de  $k$  unidades y  $c_i$  es el número de defectos por la unidad  $i$ , la línea central del diagrama de control y sus límites están dados por las ecuaciones 221, 222 y 223.

$$\bar{c} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k c_i \quad (221)$$

$$LCS = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} \quad (222)$$

$$LCI = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} \quad (223)$$

Las anteriores ecuaciones son validas si  $\bar{c} > 10$ , es posible que la unidad utilizada se componga de un bloque de unidades para llegar a un valor del número de defectos requerido.

**Ejemplo 8.25** (Fuente: NAVIDI, William. *Estadística para ingenieros y científicos*. 4 ed. México.: McGraw-Hill, 2006.)

Se examinan las grietas en las superficies de los rollos de láminas de aluminio utilizados

para fabricar latas. La tabla presenta el número de grietas que hay en 40 muestras de  $100 \text{ m}^2$  cada una. Calcule la recta central y los límites de control  $3\sigma$  para el diagrama  $\bar{c}$ . Dibuje el diagrama. ¿El proceso parece estar en control?

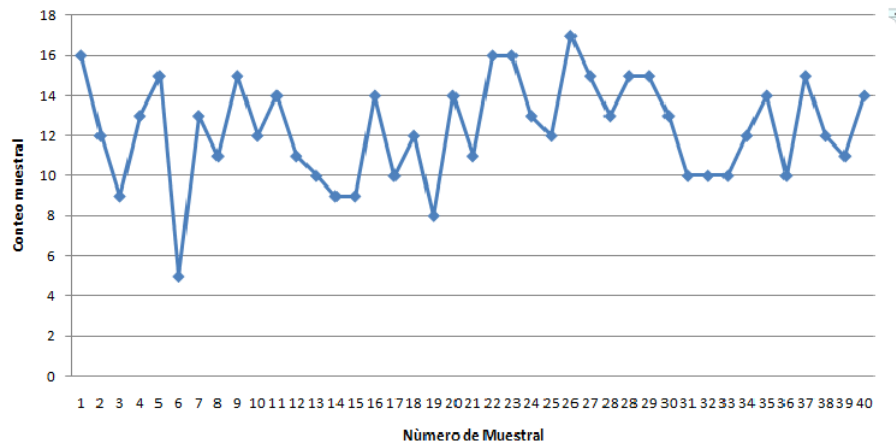
Figura 109: Número de Grietas

Muestra	Número de Grietas (c)
1	16
2	12
3	9
4	13
5	15
6	5
7	13
8	11
9	15
10	12
11	14
12	11
13	10
14	9
15	9
16	14
17	10
18	12
19	8
20	14
21	11
22	16
23	16
24	13
25	12
26	17
27	15
28	13
29	15
30	13
31	10
32	10
33	10
34	12
35	14
36	10
37	15
38	12
39	11
40	14

El promedio de los 40 conteos es  $\bar{c}=12,275$  . Por tanto la recta central se localiza en

12,275. Los límites de control  $3\sigma$  se grafican en  $12,275 \pm 3\sqrt{12,275}$ . En consecuencia el límite superior es 22,7857 y el de control inferior es 1,7643.

Figura 110: Diagrama c para los datos.



#### 8.10.4.3 Diagrama u (defectos por unidad)

En lugar de trabajar con el número total de defectos se prefiere hacer el análisis con el número de defectos por unidad, por tanto con  $n$  unidades por muestra con  $c$  defectos totales, un número promedio de defectos por unidad está dado por la ecuación 224.

$$u = c/n \quad (224)$$

Con  $M$  muestras preliminares, la línea central y sus límites del diagrama de control corresponden a las ecuaciones

$$\bar{u} = 1/M \sum_{i=1}^M u_i \quad (225)$$

$$LCS = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{n}} \quad (226)$$

$$LCI = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{n}} \quad (227)$$

Para distinguir la aplicación del diagrama c al diagrama u, se utiliza éste último en casos donde el tamaño de las muestras sea variable<sup>116</sup>.

**Ejemplo 8.26** (Fuente : NAVIDI, William. *Estadística para ingenieros y científicos*. 4 ed. México.: McGraw-Hill, 2006.)

<sup>116</sup>MONTGOMERY. Control estadístico de calidad. Op.cit., p. 400..

Es posible construir un diagrama u para los datos de defectos de unas tarjetas de circuitería, puesto que cada muestra contiene n=5 tarjetas de circuitería, los valores u para cada muestra pueden calcularse como se ilustra en la tabla 41.

Tabla 41: Datos de defectos

Muestra	Tamaño de la muestra, n	Número de defectos, c	Defectos por unidad
1	5	6	1,2
2	5	4	0,8
3	5	8	1,6
4	5	10	2
5	5	9	1,8
6	5	12	2,4
7	5	16	3,2
8	5	2	0,4
9	5	3	0,6
10	5	10	2
11	5	9	1,8
12	5	15	3
13	5	8	1,6
14	5	10	2
15	5	8	1,6
16	5	2	0,4
17	5	7	1,4
18	5	1	0,2
19	5	7	1,4
20	5	13	2,6

La línea central para el diagrama u es

$$\bar{u} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} = \frac{32}{20} = 1,6$$

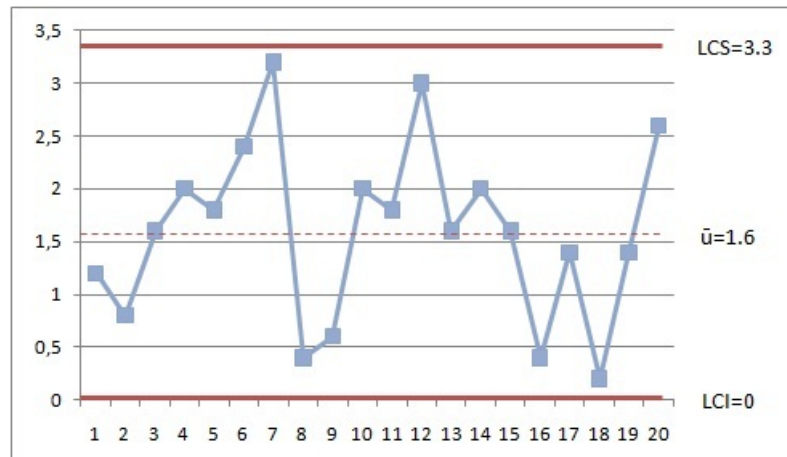
y los límites de con

$$LCS = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} = 1,6 + 3\sqrt{\frac{1,6}{5}} = 3,3$$

$$LCI = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} = 1,6 - 3\sqrt{\frac{1,6}{5}} < 0, \text{ determinado en } 0.$$

El diagrama de control se grafica en la figura 111. Observe que el diagrama es equivalente a un diagrama c. cuando la muestra no es constante, el diagram u es preferible al diagrama c.

Figura 111: Diagrama u



### Diagramas de control SUMACU y PMEP

Los anteriores diagramas de control (diagramas de control de Shewhart), los cuales son básicos, no presentan suficiente sensibilidad para detectar variación en los valores de las muestras, aproximadamente menores a  $1,5\sigma$ , ya que su análisis se basa en datos de observación actual; una alternativa a esta desventaja es utilizar diagrama de control de suma acumulativa y el diagrama de control de promedio móvil exponencialmente ponderado, ya que incluye observaciones actuales y del pasado reciente. Diagrama tabular de control SUMACU para la media del proceso presentado en un principio por Pages (1954), con información de una serie de observaciones muestrales.

El diagrama grafica las sumas acumulativas de las desviaciones de las observaciones a partir de un valor objetivo. Como ejemplo suponga que  $x_j$  es la media de la  $j$ -ésima muestra y  $\mu_0$  representa el valor objetivo para la media del proceso, y  $n \geq 1$ , el diagrama grafica  $C_i$  contra la muestra  $i$ .

$$C_i = \sum_{j=1}^i (\bar{x}_j - \mu_0) \quad (228)$$

Como se observa en la ecuación 228, el valor  $C_i$  representa una suma acumulativa de las observaciones con referencia al valor objetivo, siendo evidente la variación de la muestra con la media, ya que idealmente ésta última ha de ser igual a cero ( $C_i = 0$ ) que garantiza el control del proceso. Se implementa fácilmente tanto para datos de subgrupos como para observaciones individuales. Un diagrama tabular SUMACU para observaciones individuales implican dos estadísticas,  $C_i^+$  y  $C_i^-$ , que representa las desviaciones acumuladas arriba (límite superior unilateral SUMACU) y debajo (límite inferior unilateral SUMACU) de la media objetivo, respectivamente; que se calcula en las ecuaciones 229 y 230.

$$C_i^+ = \max[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+] \quad (229)$$

$$C_i^- = \text{máx}[0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-] \quad (230)$$

Cuyos valores iniciales son  $C_0^- = C_0^+ = 0$ .

La constante  $K$ , se conoce como el valor de referencia, y con frecuencia se elige a la mitad entre la media objetivo,  $\mu_0$ , y la media fuera de control que nos interesa detectar, denotada por  $\mu_1$ , o sea  $K$  representa la magnitud de desplazamiento de  $\mu_0$  a  $\mu_1$ ,  $K = (\mu_1 - \mu_0)/2$ . Los valores dados en las ecuaciones correspondientes a  $C_i^+$  y  $C_i^-$ , acumula las desviaciones respecto del objetivo que son tan grandes como  $K$ , y reajusta a cero cuando la cantidad se vuelve negativa. Este diagrama de control grafica  $C_i^+$  y  $C_i^-$  para cada muestra. En el caso que cualquier estadística se ubica fuera del intervalo de decisión,  $H$ , se interpreta que el proceso está fuera de control, aproximadamente  $H = 5\sigma^{117}$ . Este diagrama de control se considera como una poderosa herramienta de calidad para detectar un proceso que está cambiando la media objetivo del proceso. Si son seleccionadas correctamente  $H$  y  $K$ , repercutirá en mejorar la sensibilidad del diagrama, protegiéndolo de falsas alarmas, también se utiliza para detectar el cambio en una sola dirección, llamados diagramas unilaterales.

Diagramas de control PMEP, por su siglas, el diagrama de control de Promedio Móvil Exponencialmente Ponderado, es utilizado también para detectar los cambios pequeños en la media del proceso para los diagramas de control Shewhart. Se puede aplicar para subgrupos de tamaños  $n > 1$  y para mediciones individuales. El diagrama de control PMEP se presento alrededor de 1959 por Roberts<sup>118</sup>, y es definido por la ecuación 231.

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1} \quad (231)$$

Donde  $\lambda$ , es un peso que varía según el intervalo  $0 < \lambda \leq 1$ , para el siguiente procedimiento  $z_0 = \mu_0$ , la media objetivo del proceso, en caso de desconocimiento de una media objetivo, se utiliza el promedio de los datos preliminares  $\bar{x}$ , para el valor inicial del PMEP. Según la interpretación de la ecuación anterior la información de las observaciones pasadas se incorpora al valor actual  $z_i$ , el cual es un promedio ponderado de todas las medias previas de la muestra, que se puede observar reemplazando en forma sucesiva en la ecuación 231, resultado mostrado en la ecuación 232.

$$z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j x_{i-j} + (1 - \lambda)^i z_0 \quad (232)$$

Por lo anterior se puede interpretar que el PMEP es un promedio ponderado de todas las medias pasadas y actuales donde los valores mas lejanos adquieren un menor peso

<sup>117</sup>HINES.Op. cit., p. 633.

<sup>118</sup>Ibid., p. 636.

decreciendo geométricamente. La estadística PMEP se utiliza frecuentemente para predecir, y su diagrama de control para supervisar diferentes tipos de procesos. Como las observaciones son variables aleatorias independientes con varianza  $\sigma^2$ , la varianza PMEP se da en la ecuación 233.

$$\sigma_{z_i}^2 = \sigma^2(\lambda/(2 - \lambda))[1 - (1 - \lambda)^{2I}] \quad (233)$$

Con una media objetivo  $\mu_0$  y su varianza, la línea central y sus límites de control son los mostrados en la ecuación

$$LCS = \mu_0 + L\sigma\sqrt{((\lambda/(2 - \lambda))[1 - (1 - \lambda)^{2i}])} \quad (234)$$

$$LCI = \mu_0 - L\sigma\sqrt{((\lambda/(2 - \lambda))[1 - (1 - \lambda)^{2i}])} \quad (235)$$

Donde L es la amplitud entre los límites de control.

### 8.10.5 Otros tipos de herramientas para el control estadístico

Además del diagrama de control utilizado en la búsqueda de la causa de un mal proceso, se vuelve eficaz complementarlo con otras herramientas estadísticas. Por ejemplo en el caso de un valor muy alto de  $c$ , que describe el número de defectos por unidad, se visualiza la necesidad de buscar la causa de tal circunstancia.

Se puede comenzar con la construcción de un diagrama de Pareto (figura 112) de los tipos de defectos individuales, para este caso en particular se visualiza para cada tipo de causa el número de defectos que se presenta en las unidades, con posibilidad de concluir que causa ocupa mayor porcentaje en el número total de defectos, también es posible notar la relación que podría existir entre las causas con mayor porcentaje del total de defectos convergiendo a un área de trabajo a la cual se le debe prestar mayor atención, como el mantenimiento, tipo de soldadura, operación de la máquina, capacidad de la máquina, materia prima utilizada, entre otras. Dependiendo de éste resultado urge la necesidad de encontrar la causa-semilla que está generando el defecto, por ello se genera una lluvia de ideas que se debe ordenar en un diagrama de causa y efecto (figura 113), en el cual se visualiza las causas potenciales con sus respectivos efectos y posibles interrelaciones que pudiesen presentarse entre ellos.

Figura 112: Diagrama de pareto

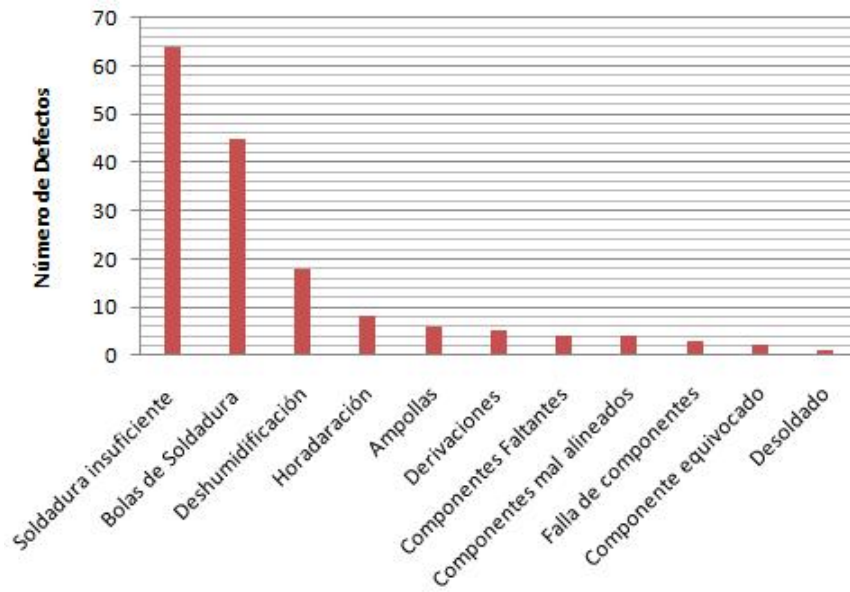


Figura 113: Diagrama causa y efecto

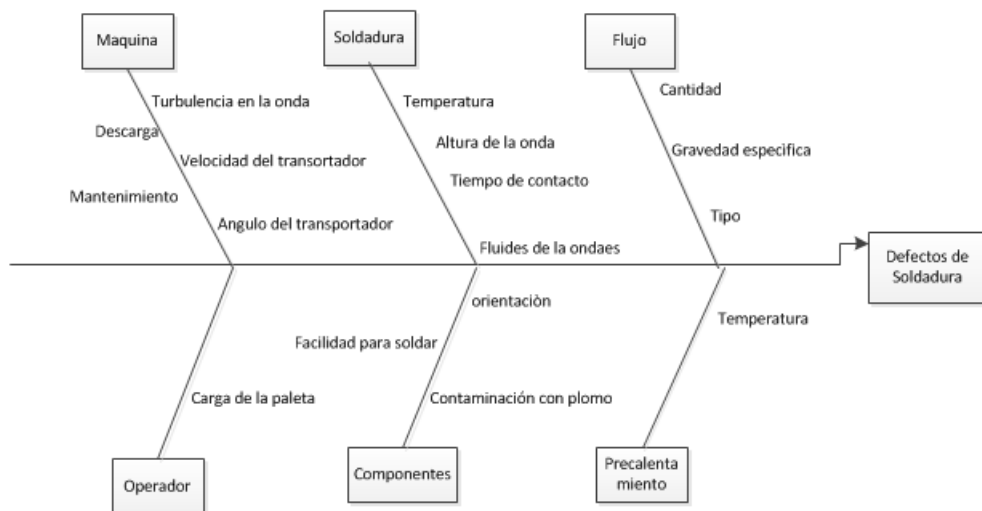
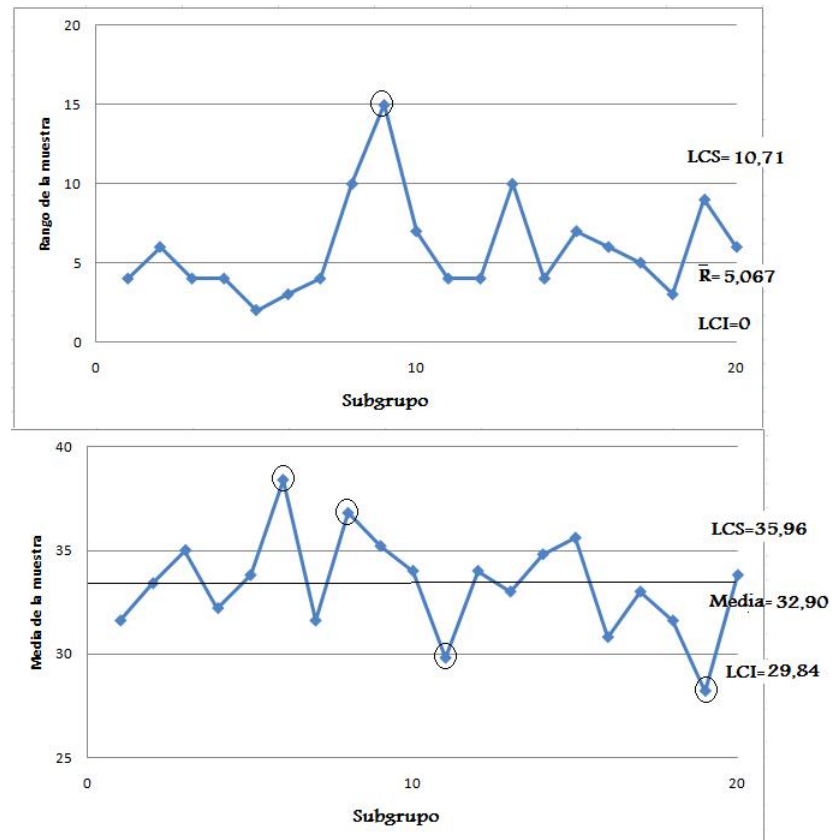


Figura 114: Diagramas de control  $\bar{X}$  y  $R$  con límites revisados.



De lo anterior, es posible clasificar un numero muy pequeño de causas, las cuales se puede descartar por medio de un experimento diseñado estadísticamente para investigar el efecto de las variables causales sobre los defectos de las unidades. Otra herramienta utilizada es el diagrama de concentración de defectos, visualizando en general los lugares donde se presenta con mayor frecuencia los defectos, lo que podría indicar una pista de la causa de los defectos ocasionados a las unidades.

## 8.10.6 Calidad Six sigma

### 8.10.6.1 Historia

El mercado norteamericano desde hace tiempo se ha destacado como una fuente de productos y servicios al consumidor, donde el sentido del capitalismo se ha desarrollado continuamente, lo cual en su origen tiene como objetivo general el beneficio económico, por ello la reducción de defectos en la manufactura era la prioridad, ya que de lo contrario aumentaría el costo de la producción. Pero después de la Segunda Guerra Mundial,

Japón en su expectativa de supervivencia, notó que la manera de competir ante la expectativa del occidente, era mejorar la calidad de los productos y servicios, que significa un mejoramiento óptimo de los procesos que se llevan a cabo para la satisfacción del cliente.

Por ello en la década de los cincuenta y sesenta los japoneses se dieron a la tarea de llevar a cabo cualquier proceso con calidad para obtener productos y servicios que llenaran las expectativas de la demanda y se adentrara en el mercado mundial; meta que fue alcanzada cuando los norteamericanos se dieron cuenta de la importancia del concepto de calidad propuesto por Japón.

A mediados de los años ochenta Motorola propuso el concepto de “six sigmas”, ya que la inventiva tecnológica del momento necesitaba llevar un control más confiable en la construcción de equipos complejos. Esta compañía causo impacto cuando pronosticó que solo obtendría una tasa de defecto de tan solo 3.4 partes por millón en un periodo de 5 años<sup>119</sup>.

#### **8.10.6.2 La calidad**

Mientras se presentaban los grandes avances en el mercado y la tecnología, fue necesario replantear las definiciones relacionadas con las características de un buen producto o servicio.

Calidad: Definido por muchos expertos en el área como la cualidad de satisfacer o exceder las necesidades del cliente.

Defecto: Producto o servicio que no satisface las necesidades del cliente en cualquier aspecto, ya sean características físicas o detalles en todos los procesos que se llevan a cabo para cumplir con la finalidad del mismo causado por un error o equivocación.

Debido a lo anterior las empresas se han dado cuenta el desperdicio que se ha generado por mucho tiempo, por ello el objetivo claro es buscar gran productividad en cualquier aspecto de negocio, y de esta manera llevar a cabo el tan anhelado control de la calidad de sus productos.

La letra griega  $\sigma$  (sigma), representa la desviación estándar en el área de la estadística, la cual es una representación numérica de la dispersión de una muestra de datos; con respecto a un valor medio, representado por la letra griega  $\mu$ . Se utiliza  $s$ , para denotar la desviación estándar de una muestra; y  $\sigma$ , para una población de datos. La fórmula matemática está dada por la ecuación 236.

---

<sup>119</sup>KUMAR, Dharendra. SIX SIGMAS Las mejores prácticas. 1 ed. Colombia.: 3R editores, 2009. p. 18.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}} \quad (236)$$

donde;

s: Desviación estándar de la muestra.

$X_i$ : Dato de la muestra correspondiente a  $i=1,2,3,\dots,n$

$\bar{X}$ : Valor medio de la muestra.

n: Numero de datos de la muestra.

### 8.10.6.3 Six Sigma

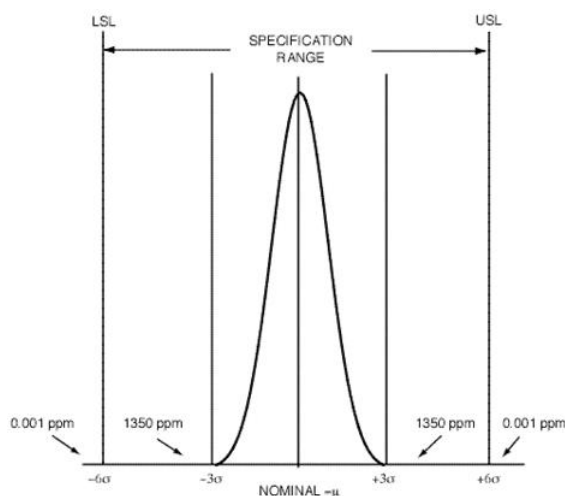
Desde el primer momento que fue pronunciado ésta expresión ha venido conceptualizándose para un enfoque íntegro en lo que se refiere a cumplir con las especificaciones y necesidades del cliente teniendo en cuenta la prioridad de las mismas, con el fin de obtener un producto o servicio “perfecto”.

Para la estadística, “six sigma” representa un valor de seis veces la desviación estándar de la muestra de datos como intervalo, o sea,  $\pm 6\sigma$  con respecto a un valor medio ubicado en la zona central en una distribución probabilística, que en general indica establecer los procesos para llevar a cabo un producto muy cerca de “cero defectos” en el concepto de calidad.

La expresión “cero defectos” es una aproximación al verdadero valor del numero de defectos que se puede establecer para un número dado de producción, ésta magnitud corresponde a 0.002 partes defectuosas por millón.

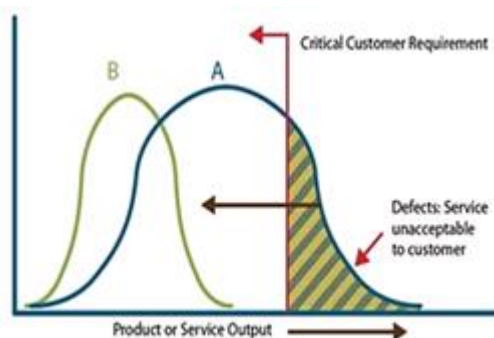
En instituciones académicas, six sigma comenzó como un intervalo de valores que podría tomar los datos correspondientes a una media muestral, en este caso  $\pm 3\sigma$ . Para éstas condiciones el área bajo la curva que corresponde a este intervalo es de 99.73 % de probabilidad que la producción sea un elemento de calidad, lo que hace referencia a un resultado deseable. Para los académicos también tiene sentido calcular el índice de potencial y el índice de capacidad del proceso. Motorola con el ingeniero Bill Smith, en 1987 propuso el concepto de “six sigma”, como el intervalo de especificaciones de diseño de un producto en  $\pm 3\sigma$  que debía estar dentro del intervalo de  $\pm 6\sigma$ , correspondiente a las expectativas de cliente como se observa en la figura 115, de esta manera las especificaciones de diseño corresponde a las necesidades del cliente que se deben cumplir a tiempo y asegurar un bajo número de posibles defectos relativo al tamaño de la muestra. La satisfacción del cliente aumenta si la medida de la variación disminuye como se puede ver en la Ilustración 116.

Figura 115: Six sigma



Fuente: KUMAR, Dharendra. *SIX SIGMAS Las mejores prácticas*. 1 ed. Colombia.: 3R editores, 2009. p. 24.

Figura 116: Medida de la variación



El objetivo anhelado de alcanzar productos casi perfectos de six sigma, solo se puede llevar a cabo con una aplicación del método altamente exigente, partiendo de la base que los defectos son cuantificables y con gran posibilidad de reducción mediante descubrimientos de errores sistemáticos a tiempo.

#### 8.10.6.4 Implementación

La ruta que se debe llevar a cabo en la implementación de una estrategia es dividida en dos fases, la primera fomenta la calidad en el diseño de un producto y la segunda en la producción, ventas y servicio del producto.

1. Calidad en el Diseño del producto Proceso DMADV (Diseño six sigmas o metodología DFSS):

Definido por sus siglas como una serie de pasos a seguir: Definir, Medir, Analizar, Diseñar, Verificar, enfocado a mejorar la rentabilidad. Se utiliza en el caso que un nuevo producto es lanzado al mercado o la optimización de uno ya existente en busca de una mejor acogida.

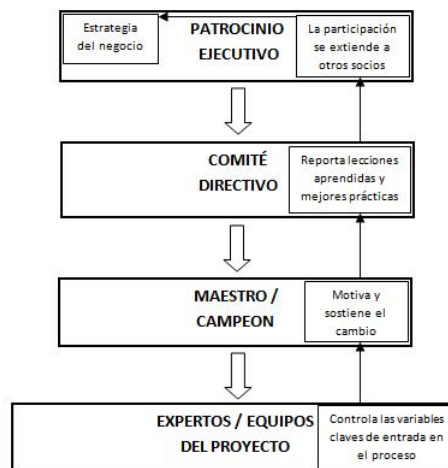
2. Calidad en la producción, ventas y servicio del producto:

En busca del método más reactivo para implementar una estrategia y como evaluador de procesos ya existentes se lleva a cabo los siguientes pasos, proceso conocido como DMAMC: Definir, Medir, Analizar, Mejorar, Controlar.

Aunque los encargados de llevar a cabo el método six sigmas son los directivos, los empleados deben ser parte del reto de imponer la estrategia, ya que teniendo en cuenta la ubicación de la empresa en cuanto a calidad por comparación pueden definir sus actividades como apoyo para alcanzar los ideales impuestos por el cliente.

En el gran equipo formado dentro de cada empresa se debe presentar una estructura organizacional para que cada persona, dependiendo del rol de trabajo tenga claro sus actividades y cómo influye en la obtención de la excelencia. En la figura 117 es posible observar el esquema que describe dicha organización.

Figura 117: Estructura organizacional six sigma.



Fuente: KUMAR, Dhirendra. *SIX SIGMAS Las mejores prácticas*. 1 ed. Colombia.: 3R editores, 2009. p. 35.

La estrategia six sigma como una aplicación de la estadística en busca de reducir la variabilidad, y al mismo tiempo satisfacer las necesidades del cliente, requiere de una explicación matemática para su comprensión.

En el caso de la evaluación de una característica, siguiendo el “concepto antiguo”, si los límites de especificación son referidos a una variación límite de  $\pm 3\sigma$ , el porcentaje de los productos que cumplen con la condición de calidad es de 99.73 %, y solo un 0.27 % presentarían defectos. Pero en el caso de evaluar la presencia de varias características independientes en un mismo producto el porcentaje de unidades que estarían en la zona de calidad se reduciría al valor de  $0.9973^m$ , donde  $m$ , representa el número de variables o características a evaluar, por ello para un caso complejo si el número de factores a tener en cuenta es muy alto, la fracción de las unidades que estarán en la zona de calidad será muy baja, lo que conduciría a un gran desperdicio en unidades que resultarían con al menos un defecto.

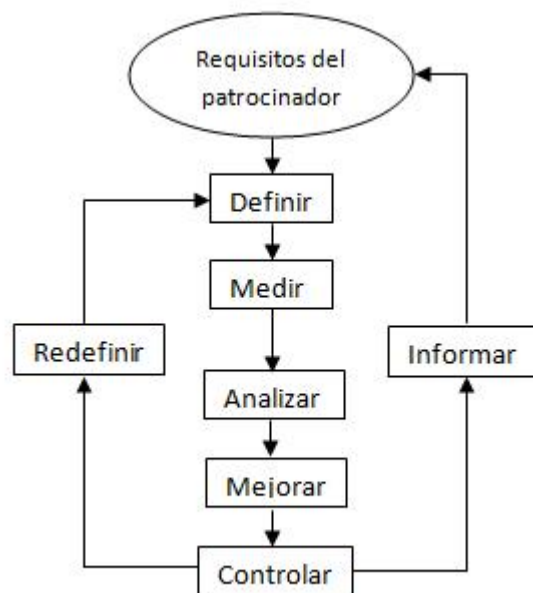
Debido al análisis anteriormente descrito la zona de calidad debe estar en un intervalo de  $\pm 6\sigma$ , lo que implica que una fracción de 99.9999998 % de unidades no presentarían defectos y el valor dado por  $0.99999998^m$ , no se verá tan reducido en el caso de que  $m$  sea muy grande. Por ello, la condición six sigma para todas las características es viable para mejorar o implementar un proyecto.

Se debe escoger razonablemente un proyecto para la ejecución de la estrategia six sigma, donde se debe tener como prioridad aquellos que impactarían con mejores resultados a la empresa, los cuales muy probablemente pueden ser las dificultades presentes para la época y que de alguna manera ha sido motivo de parálisis del progreso. Para ello se debe clasificar el ahorro como resultado en la ejecución de un proyecto como en duros y blandos; donde el primero se refiere a la obtención de reducción de costos, aumento de ingresos, o la combinación de ambos; y blandos, como la reducción en cuanto a requisitos o presupuesto para crear. Un orden para establecer el proyecto a desarrollar puede ser descrito así:

1. Identificar los problemas potenciales: El equipo six sigma debe ser consciente de las variables que intervienen en el proceso para llevar un debido control, y de esa manera encontrar las posibles causas que hacen variar las condiciones de calidad del sistema.
2. Obtener datos e información: Algunas de las fuentes de información están presente en los clientes, organismos de evaluación de proceso, empleados, entre otros; una manera para realizar una debida recolección, puede ser por medio de actividades como es el caso de sesiones para la obtención de lluvia de ideas, la cual genera un compendio de deficiencias, de las cuales puede partirse por medio de un diagrama de causa y efecto, para encontrar la raíz, a la cual se debe implementar la debida estrategia para mejorar la calidad.

3. Establecer prioridades: Puede ser hecha estableciendo valores según criterios establecidos por el objetivo común, a las posibles causas que afectan la debida calidad.
4. Buscar características de los problemas: Proyectar el comportamiento de las soluciones que pueden establecer a las causas ya encontradas.
5. Evaluar y seleccionar el proyecto: Seleccionar lo que sera la mejor solución, como proyecto six sigma.
6. Preparar la declaración de la misión: Establecer objetivos claros para la implementación de la estrategia. En la aplicación del proyecto se realiza las actividades especificadas en la figura 118, que describe el proceso a llevar a cabo en la aplicación de la debida solución a la causa que afecta la calidad.

Figura 118: Actividades y su proceso para el proyecto.



*Fuente: KUMAR, Dhirendra. SIX SIGMAS Las mejores prácticas. 1 ed. Colombia.: 3R editores, 2009. p. 63.*

Para la verificación de la correcta ejecución de la estrategia six sigma se debe acudir al paso de Medir en el proceso DMAMC, donde es importante tener en cuenta la debida clasificación de los datos a tomar, ya que se identifica las variables y su dependencia con respecto a la salida que se espera, como la independencia entre sí.

Algunas herramientas que se utilizan para la comprensión de los procesos e identificación de variables o factores es el diagrama de flujo; para encontrar causas de las fallas presentes en los procesos, el diagrama de causa y efecto; así como también las metodologías llamadas FMEA y FMECA, que por sus siglas significan Análisis de la Moda de Falla y sus Efectos y Análisis Crítico de la Moda de Falla y sus Efectos correspondientemente, que ayudan a identificar las posibles causas globales más significativas en la reducción de la calidad.

Al identificar el factor a medir se plantea un método para la recolección de los datos, ya que de una correcta medición depende la confiabilidad y veracidad de estos últimos. Algunos pasos a tener en cuenta es definir los objetivos, cuestionar la relación con la variable a controlar, coherencia entre las muestras recopiladas en cuanto su tendencia, precisión, exactitud, repetitividad y estabilidad de los mismos; finalizando con la evaluación del comportamiento presentado según criterios de sentido común. A estos valores se aplica una debida estadística descriptiva, representándolos por medio de tablas, histogramas y cuadros; caracterizándolos según los parámetros estadísticos correspondientes; y aplicando la debida distribución probabilística del comportamiento de la frecuencia de los valores arrojados por los datos.

Partiendo de la información organizada es posible calcular el valor sigma para indicar el nivel de calidad difiriendo en las variables discretas y aleatorias.

- Variables discretas:

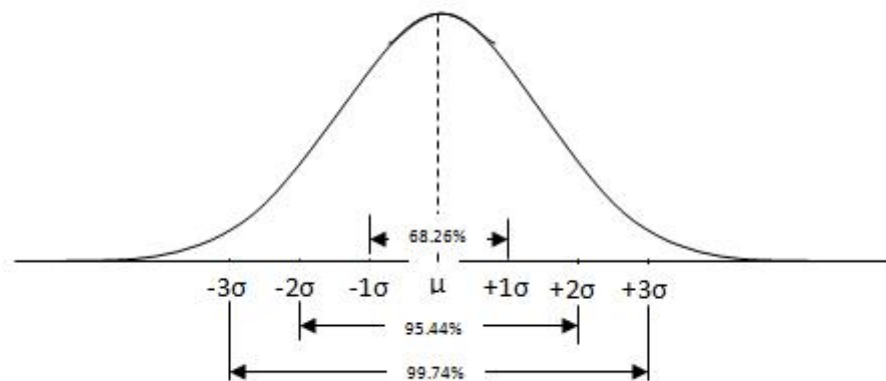
Se parte con el cálculo de la tasa de defecto, el cual está dado por el número de defectos por cada cien, mil, diez mil, cien mil o un millón de unidades, y según este valor ubicar el sigma correspondiente debido a valores estandarizados ya tabulados.

Dentro del cálculo de la tasa de defecto se puede identificar dos tipos: Defectos por millón de oportunidades (DPMO), y errores por millón de oportunidades (EPMO).

- Variables continuas

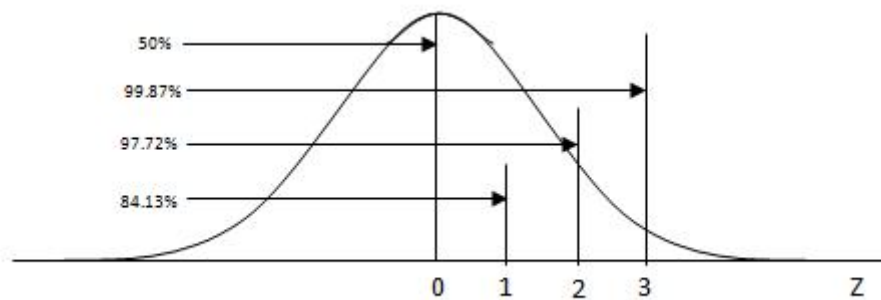
Se identifica la distribución de probabilidad que mejor representa el comportamiento de los datos, se plantea los límites de defectos presentados por los datos, calculando el rendimiento que esto representa en la grafica y se ubica en términos de sigma como muestra la figura 89.

Figura 119: Distribución de probabilidad normal con valores sigma



Fuente: KUMAR, Dhirendra. *SIX SIGMAS Las mejores prácticas*. 1 ed. Colombia.: 3R editores, 2009. p. 204.

Figura 120: Distribución de probabilidad normal con valores de Z.

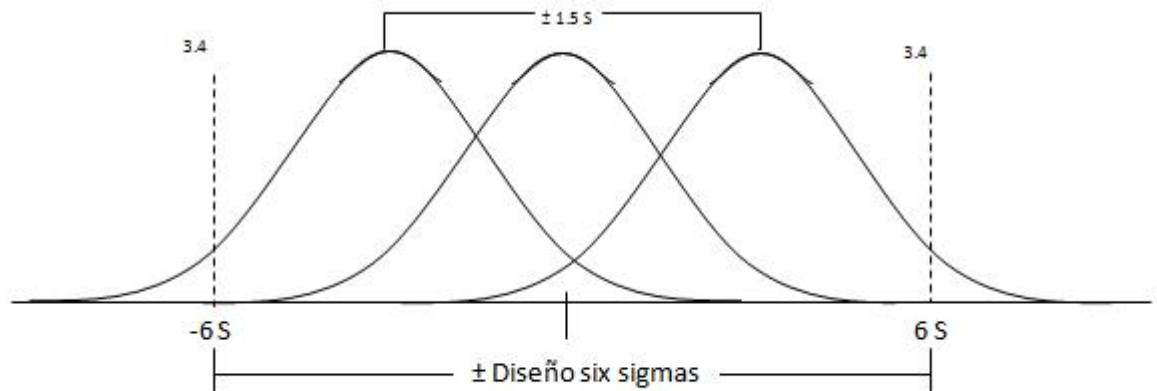


Fuente: KUMAR, Dhirendra. *SIX SIGMAS Las mejores prácticas*. 1 ed. Colombia.: 3R editores, 2009. p. 204.

### Cambio en 1.5 sigma

- Según Motorola un cambio de máximo 1.5 veces sigma en el comportamiento de la distribución de probabilidad de los datos, representa la variación permitida que establece la condición six sigma en la evaluación de la calidad, lo cual está representado en la figura 121.

Figura 121: Cambio en sigma para los datos



Fuente: KUMAR, Dhirendra. *SIX SIGMAS Las mejores prácticas*. 1 ed. Colombia.: 3R editores, 2009. p. 212.

Esta variación hará notar una diferencia de cero a 3.4 partes por millón de defectos presentes en el total de unidades; lo cual establece que para el cálculo del máximo valor de la variable estará dado por: la media + 4.5 (desviación estándar), donde los parámetros estadísticos son los calculados con los datos adquiridos, y con éste último valor se puede establecer el valor para el sigma de la meta.

Después de establecer el valor meta para la variable se debe realizar la debida prueba de hipótesis, análisis de la varianza, regresión y correlación de las variables de entrada con respecto a las de salida y en el caso para mejorar el proceso se lleva un debido control con las herramientas estadísticas como la implementación de cuadros de control.

## 8.11 INGENIERIA DE CONFIABILIDAD

La nueva tecnología y equipos complejos, que sugiere un gran costo en la producción tanto de sus partes como ensamblaje, han conllevado a la necesidad de certificar su tiempo de vida útil asegurando rentabilidad por su adquisición que beneficia tanto a su inventor como al demandante del producto, lo cual sugiere la inexistencia de una falla repentina que podría traer fatales consecuencias por el tipo de aplicación del equipo, disminución en el costoso y constante mantenimiento o cambio de componentes, entre otros, lo cual es medido como un grado de confiabilidad, que es tan importante como la alta calidad del producto como tal.

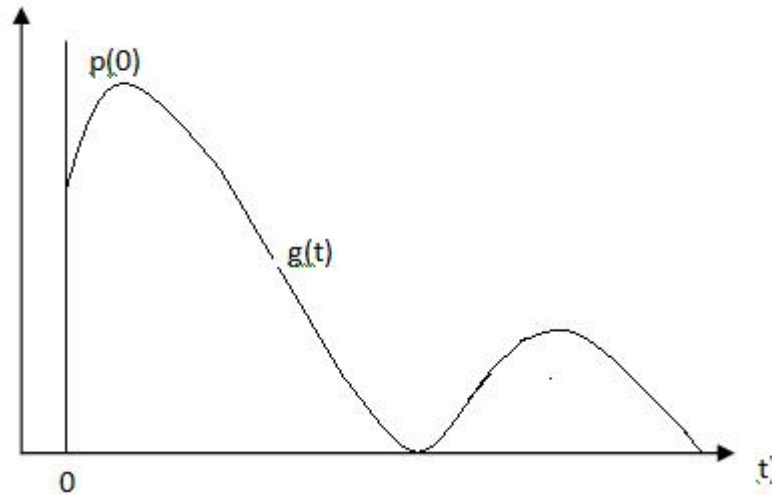
Figura 122: Algunas aplicaciones de la Ingeniería de Confiabilidad.

METODOLOGÍA	CONCEPTO	APLICACIÓN
Mantenimiento Centralizado en la Confiabilidad (RCM)	Se desarrolló inicialmente para la industria de la aviación civil hace más de 30 años.  RCM se basa en el tiempo que probablemente los equipos funcionarían sin presencia de falla, teniendo en cuenta factores que intervienen en el comportamiento o funcionamiento de los mismos.	El RCM ha sido utilizado en miles de empresas de todo el mundo: desde grandes empresas petroquímicas hasta las principales fuerzas armadas del mundo utilizan RCM para determinar las tareas de mantenimiento de sus equipos, incluyendo la gran minería, generación eléctrica, petróleo y derivados, metalmecánica, etc.
Mantenimiento Productivo Total (TPM)	TPM es una evolución de la Manufactura de Calidad Total, derivada de los conceptos de calidad con que el Dr. W. Edwards Deming's influyó tan positivamente en la industria Japonesa.  El TPM tiene como objetivo principal realizar el mantenimiento de los equipos con la participación del personal de producción, dentro de un proceso de mejora continua y una gestión de calidad total.	El TPM afronta 6 condiciones que perjudican la obtención del rendimiento óptimo del equipo: (1) Las fallas. (2) Los ajustes ó calibraciones necesarios luego de las fallas y previo a la puesta en marcha. (3) El funcionamiento sin producción. (4) Las pequeñas detenciones sin motivo. (5) Menor ritmo de producción del equipo. (6) Defectos internos en el proceso ó método de producción y controles periódicos innecesarios.
Metodología de la evaluación de desempeño (Balanced Scorecard)	El <i>Balanced Scorecard</i> , es una metodología que logra integrar la Estrategia y la Evaluación del Desempeño del Negocio. Su aplicación en el mantenimiento está obteniendo excelentes resultados.	Desde su divulgación en 1992 por sus dos autores Robert Kaplan y David Norton. Ha sido incorporada a los procesos de gerencia estratégica en otras áreas del negocio con unos resultados extraordinarios en empresas de EU, USA, asiáticas e Iberoamérica.
Data Mining (Minería de Datos)	Reúne las ventajas de varias áreas como la Estadística, la Inteligencia Artificial, la Computación Gráfica, las Bases de Datos y el Procesamiento Masivo, principalmente usando como materia prima las bases de datos. A principios de los años ochenta, empezaron a consolidar los términos de data mining y Descubrimiento de Conocimiento en Bases de Datos (KDD). A finales de los años ochenta sólo existían un par de empresas dedicadas a esta tecnología.	Data Mining está listo para su aplicación en la comunidad de negocios porque está soportado por tres tecnologías que ya están suficientemente maduras: • Recolección masiva de datos. • Potentes computadoras con multiprocesadores. • Algoritmos de Data Mining.

En este aspecto se realizan actividades como un modelado de confiabilidad. La probabilidad de supervivencia del sistema depende de la garantía de sus componentes o subsistemas en el tiempo, lo cual hace al equipo vulnerable a posibles circunstancias que podrían afectar de forma significativa la unidad.

Un producto durante su trabajo se debe someter a un nivel de esfuerzo, donde se establece el rango de valores para variables importantes en el proceso y de los cuales dependen dicho nivel. Se define el tiempo previo a la falla como la variable aleatoria  $T$ , y la confiabilidad del componente (subsistema, o sistema) dependiente del tiempo  $t$  como  $R(t) = P[T > t]$ . Un proceso de falla se compone de tres fases, ya que su descripción puede llegar a ser muy compleja y variable para cada tipo de producto, en general estas fases son: iniciales, de desgaste y sus intermedias; en la figura 123, se presenta una gráfica con el comportamiento de la distribución de probabilidad de falla en función del tiempo y se representa matemáticamente en la ecuación 237.

Figura 123: Distribución de fallas compuestas



$$p(0) + \int_0^{\infty} g(t)dt = 1 \quad (237)$$

La variable aleatoria cumple la condición  $T > 0$ , ya que las fallas para un tiempo cero serán descartadas en el momento de prueba, la ecuación 238 representa la densidad de falla, la ecuación 239 proporciona la confiabilidad, y la función de riesgo como una tasa de falla esta dada por la ecuación 240. El tiempo medio de falla (TMDF) se da en la ecuación 241.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{g(t)}{(1-p(0))} & t > 0 \\ f(t) &= 0 & \text{en otro caso} \end{aligned} \quad (238)$$

$$C(t) = 1 - F(t) = \int_0^{\infty} f(x)dx \quad (239)$$

$$h(t) = \lim_{(\Delta t \rightarrow 0)} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)} \frac{1}{\Delta t} = -\lim_{(\Delta t \rightarrow 0)} \frac{(R(t + \Delta t) - R(t))}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (240)$$

Donde:

$$R(t) = 1 - F(t) \text{ y } R'(t) = f(t)$$

$$E[T] = \int_0^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_0^{\infty} R(t)dt \quad (241)$$

La ecuación 241 es una constante si se tiene en cuenta el haber eliminado todas las fallas de primera etapa durante un intervalo inicial y el tiempo de falla por desgaste del producto analizado mas significativo.

Generalmente, la distribución normal se utiliza para modelar las fallas por desgaste, tomando como variable aleatoria de estudio el nivel del esfuerzo, que es adecuado en

productos donde estos hechos sean las principales causas de falla; por experiencia se ha demostrado que la distribución lognormal describe mejor el tiempo de falla de algunos tipos de componentes. En caso que el sistema o subsistema de estudio contenga varios componente y dependa de varias causales de falla la distribución de Weibull es apropiada en estos casos; y la distribución gamma describe mejor el tiempo de falla para componentes sometidos al modelado de la redundancia en espera.

## 8.11.1 Configuración de los equipos

### 8.11.1.1 Sistemas simples en serie

Se distingue porque es necesario que todos los componentes (suponiendo independencia entre ellos) operen para que el sistema funcionen. Para un tiempo de falla de cada componente,  $T_j$ , y el tiempo de falla del sistema,  $T$ , el modelo de confiabilidad sería se describe en la tabla .

$$P(T_j > t) = C_1(t)$$

### 8.11.1.2 Redundancia activa simple

Para el funcionamiento del sistema debe funcionar  $k$  o mas componentes ( $k \leq n$ ). Se supone independencia cuando todos los componentes tienen la misma función de confiabilidad, sea  $C_j(t) = r(t)$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ , por lo tanto, basándose en la definición de confiabilidad<sup>120</sup>  $C$  es función del tiempo,  $t$ .

### 8.11.1.3 Redundancia en espera

En esta configuración existe un controlador que proporciona activación al siguiente componente cuando falla el que se encuentre funcionando, por tal razón el tiempo de falla del ensamble se da en la ecuación 242.

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_n \quad (242)$$

Donde  $T_i$ , es el tiempo de falla para el componente  $i$ -ésimo, la cual es una variable aleatoria independiente. En la práctica es común que  $n = 2$ , por lo tanto es poco aplicable el teorema del límite central, sin embargo, según la propiedad de combinaciones lineales se cumplen las ecuaciones 243 y 244.

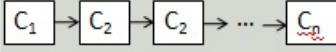
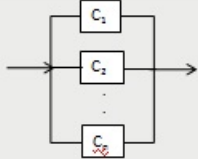
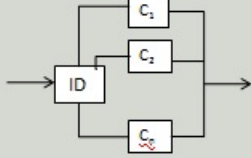
---

<sup>120</sup>HINES.Op. cit., p. 653.

$$E[T] = \sum_{i=1}^n E(T_i) \quad (243)$$

$$V[T] = \sum_{i=1}^n V(T_i) \quad (244)$$

Tabla 42: Confiabilidad para configuraciones de equipos

SISTEMAS	CONFIABILIDAD	ESQUEMA
<b>SIMPLES EN SERIE</b>	$C(t) = P[T > t] = P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t) \dots P(T_n > t)$ $C(t) = C_1(t) \cdot C_2(t) \dots R_n(t)$	
<b>REDUNDANCIA ACTIVA SIMPLE</b>	$C(t) = \sum_{x=k}^n \binom{n}{x} [r(t)]^x [1-r(t)]^{n-x}$	
<b>REDUNDANCIA EN ESPERA</b>	$C(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t, \lambda_k)$	

#### 8.11.1.4 Prueba de duración o vida útil

Una forma de realizar esta prueba, es colocar una o mas unidades a envejecer artificialmente, hasta que todas o la mayor parte de ellas fallen, con el objetivo de probar alguna hipótesis respecto a la densidad de falla bajo ciertas condiciones de los elementos, realizando las pruebas estadísticas formales y graficación de probabilidad. Al tiempo se puede estimar la confiabilidad del sistema para un tiempo dado, por ejemplo se coloca en funcionamiento  $n$  unidades y antes de un tiempo dado contar el numero de fallas,  $r$ , de esta manera se estima la falta de confiabilidad con  $\hat{p} = r/n$ , lo cual conduce la una estimación de confiabilidad.

La tabla 43 describe los limites de confiabilidad, donde los valores de falla en el tiempo describen una distribucion chi cuadrado.

Tabla 43: Limites de confianza

Limite	Numero fijo de fallas, $r^*$	Tiempo fijo del fin, $t^*$
Limite de dos lados	$\left[ \frac{2Q}{\chi_{\alpha/2, 2r}^2}, \frac{2Q}{\chi_{1-\alpha/2, 2r+2}^2} \right]$	$\left[ \frac{2Q}{\chi_{\alpha/2, 2r}^2}, \frac{2Q}{\chi_{1-\alpha/2, 2r+2}^2} \right]$
Limite de una lado superior	$\left[ \frac{2Q}{\chi_{\alpha/2, 2r}^2}, \infty \right]$	$\left[ \frac{2Q}{\chi_{\alpha/2, 2r+2}^2}, \infty \right]$

## 8.12 PROCESOS ESTOCASTICOS

Los procesos estocasticos pueden describir los posibles comportamientos de variables aleatorias en funcion de periodos de secuencias o tiempo.

Un tipo de proceso estocastico es regido por la propiedad markoviana dada en la ecuación 245, en el caso de variables discretas para  $t = 0, 1, 2, \dots$ ; donde se percibe la independencia de la probabilidad para un evento futuro del historial del mismo, solo teniendo en cuenta el actual.

$$P\{X_{t+1} = j | X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i, X_{t-1} = i_1, X_{t-2} = i_2, \dots, X_0 = i_0\} \quad (245)$$

La distribucion de markov se representa por el valor de la probabilidad en una matriz con n pasos dado en la ecuación 246<sup>121</sup>.

$$P^{(n)} = [P_{ij}^{(n)}] = [P\{X_{t+n} = j | X_t = i\}] \quad (246)$$

Para un conjunto inicial de probabilidades,  $A = [a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_m^{(0)}]$ , donde  $a_i^{(0)} = P\{X_0 = i\}$ . Para el calculo de probabilidades de transicion en n pasos se puede obtener por medio de las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov dadas en la ecuacion 247.

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=0}^m p_{il}^{(v)} \cdot p_{lj}^{(n-v)} \quad (247)$$

Donde,

$$i = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$0 \leq v \leq n$$

---

<sup>121</sup>ibid., p. 668.

$i, j$  son estados;  $n$ , representa los pasos y  $l$ , el estado actual.

## 8.13 ESTADÍSTICA NO PARAMETRICA

Muchas veces cuando se aplican los métodos estadísticos suele pasar que las suposiciones que parecían razonables no se cumplen, en estas ocasiones es conveniente disponer de procedimientos que sean válidos, la estadística no paramétrica se encarga de este tipo de procedimientos.

Este tipo de procedimientos tienen entre sus ventajas que los datos no necesitan ser cuantitativos, sino que también podrían ser datos categóricos o de rango. Otra ventaja es que los procedimientos pueden ser muy rápidos y se realizan con facilidad. En la tabla 44 se puede observar las diferentes pruebas.

Tabla 44: Pruebas de estadística no paramétrica

Aplicación	Prueba Paramétrica	Prueba No paramétrica
Pares pareados de datos de la muestra	Prueba $t$ o Prueba $z$	Prueba del signo Prueba de Wilcoxon de rangos con signo
Dos muestras independientes	Prueba $t$ o Prueba $z$	Prueba de Wilcoxon de rangos sumados
Varias muestras independientes	Análisis de varianzas (Prueba $F$ )	Prueba Kruskal-Wallis
Correlación	Correlación lineal	Prueba de correlación de rangos
Aleatorio	Ninguna	Prueba "Runs"

### 8.13.1 Prueba de signo

La prueba de signo se emplea para probar hipótesis en torno a la mediana  $\tilde{\mu}$  de una distribución continua.

Puesto que la distribución normal es simétrica, la media de una distribución normal es igual a la mediana. En consecuencia, la prueba de signo se puede emplear para probar

la hipótesis en torno a la media de una distribución normal<sup>122</sup>.

Suponga que las hipótesis son:

$$H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$$

$$H_1 : \tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}_0$$

El procedimiento de prueba es el siguiente:

Suponga que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es una muestra aleatoria de  $n$  observaciones de la población de interés.

Forme las diferencias  $(X_i - \tilde{\mu}_0), i = 1, 2, \dots, n$ . Luego, si  $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$  es verdadera, cualquier diferencia  $X_i - \tilde{\mu}_0$  tiene las mismas probabilidades de ser positiva que de ser negativa.

$R^+$  Denota el número de diferencias  $(X_i - \tilde{\mu}_0)$  que son positivas .

$R^-$  Denota el número de diferencias  $(X_i - \tilde{\mu}_0)$  que son negativas.

$$R = \min(R^+, R^-)$$

Cuando la hipótesis nula es verdadera,  $R$  tiene una distribución binomial con parámetros  $n$  y  $p=0.5$ .

Por tanto, encontraríamos un valor crítico, digamos que  $R_\alpha^*$  de la distribución binomial que asegure que:

$$P(\text{error tipo I}) = P(\text{se rechace } H_0 \text{ cuando } H \text{ es verdadera}) = \alpha.$$

Si la estadística de prueba  $R \leq R_\alpha^*$ , la hipótesis nula  $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$  debe rechazarse.

### Ejemplo 8.27

Niveles de significación exactos: Cuando una estadística de prueba tiene una distribución discreta, es difícil elegir un valor crítico  $R_\alpha^*$  que sea exactamente igual a  $\alpha$ , de tal manera se debe elegir el  $R_\alpha^*$  lo más cercano posible.

Igualación en la prueba de signos: Cuando encontremos  $X$  exactamente igual a  $\tilde{\mu}_0$ , debe dejarse a un lado este dato y aplicar la prueba de signo al resto de datos.

Hipótesis alternativa de un solo lado: Si la alternativa es:

$$H_1 : \tilde{\mu} \geq \tilde{\mu}_0, \text{ Se rechaza } H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0 \text{ si } R^- \leq R_\alpha^*$$

$$H_1 : \tilde{\mu} \leq \tilde{\mu}_0, \text{ Se rechaza } H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0 \text{ si } R^+ \leq R_\alpha^*$$

La aproximación normal

---

<sup>122</sup>MONTGOMERY. Probabilidad y estadística aplicada a la ingeniería. Op. cit., p. 803.

Cuando  $p=0.5$ , la distribución binomial se aproxima bien mediante una distribución normal cuando  $n$  es por lo menos 10. De tal manera la media de la binomial es  $np$  y la varianza  $0,25n$  y la hipótesis puede probarse con la estadística

$$Z_0 = \frac{R-0,5n}{0,5\sqrt{n}}$$

### 8.13.1.1 Comparación entre la prueba de signo y la prueba t.

Si la población base es normal, tanto la prueba signo como la prueba t se pueden utilizar para probar  $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$ .

- La prueba t tiene el valor más pequeño posible de  $\beta$ .entre todas las pruebas que tienen un nivel de significación  $\alpha$ , por lo que es superior a la prueba de signo en el caso de distribución normal.
- Cuando la distribución de la población es simétrica y no normal (pero con media finita  $\mu = \tilde{\mu}$ ) la prueba t tendrá un error  $\beta$  más pequeño que la  $\beta$  para la prueba de signo.

La prueba de signo se considera mas un procedimiento de prueba para la mediana, más que un competidor serio de la prueba t.

### 8.13.2 Prueba de Wilcoxon del rango con signo

Estamos interesados en probar  $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$  contra las alternativas usuales. Suponga que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es una muestra aleatoria de una distribución continua y simétrica con media y mediana  $\mu$ . Se calculan las diferencias  $(X_i - \tilde{\mu}_0), i = 1, 2, \dots, n$ . Se clasifican las diferencias absolutas  $|X_i - \tilde{\mu}_0|, i = 1, 2, \dots, n$ , en forma ascendente y luego se asignan los signos de los rangos correspondientes.

$R^+$  Suma de los rangos positivos .

$R^-$  Valor absoluto de la suma de los rangos Negativos.

$$R = \min(R^+, R^-)$$

La tabla x tiene los valores críticos de  $R$ , y si  $R \leq R_{\alpha}^*$ , la hipótesis nula  $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$  debe rechazarse.

### 8.13.2.1 Comparación con la prueba t.

Si la población base es normal, tanto la prueba Wilcoxon de rango con signo como la prueba t se pueden utilizar para probar la hipótesis acerca  $\mu$ .

La prueba  $t$  es la mejor en tales situaciones ya que produce el valor mínimo de  $\beta$  en todas las pruebas con nivel de significación  $\mu$ .

Se han desarrollado una serie de medidas de comparación como son:

La eficiencia relativa asintótica (ERA): Es el cociente límite de los tamaños de muestra necesarios para obtener probabilidades de error idénticas para los dos procedimientos.

- Para poblaciones normales, la ERA de la prueba de Wilcoxon de rango con signo relacionada a la prueba t es aproximadamente 0,95.
- Para poblaciones no normales, la ERA es al menos 0,86 y en muchos casos excederá la unidad. Cuando excede la unidad, la prueba de Wilcoxon de rango con signo requiere un tamaño de muestra más pequeño que el de la prueba t.

Y la prueba de Wilcoxon de rango con signo resulta una alternativa de la prueba t.

### 8.14.3 Prueba de Wilcoxon de la suma de rango

Si se tienen dos poblaciones continuas independientes  $X_1$  y  $X_2$  con medias  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . Las distribuciones de  $X_1$  y  $X_2$  tienen la misma forma y dispersión, y difieren sólo en sus medias. La prueba de Wilcoxon de la Suma de Rango puede utilizarse para probar la hipótesis  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ , este procedimiento también recibe el nombre de Mann-Whitney.

Sean  $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n}$ , y  $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n}$ , dos muestras aleatorias independientes de las poblaciones continuas  $X_1$  y  $X_2$  descritas antes. Suponemos  $n_1 \leq n_2$ . Se deben organizar las observaciones  $n_1 + n_2$  en orden de magnitud ascendente, y asignarles rangos. Si dos o más observaciones se unen o igualan se emplea la media de los rangos que habría asignado si las observaciones hubieran diferido. Sea  $R_1$  la suma de los rangos que habría asignado en la muestra  $x_1$ , mas pequeña.

Y defina :

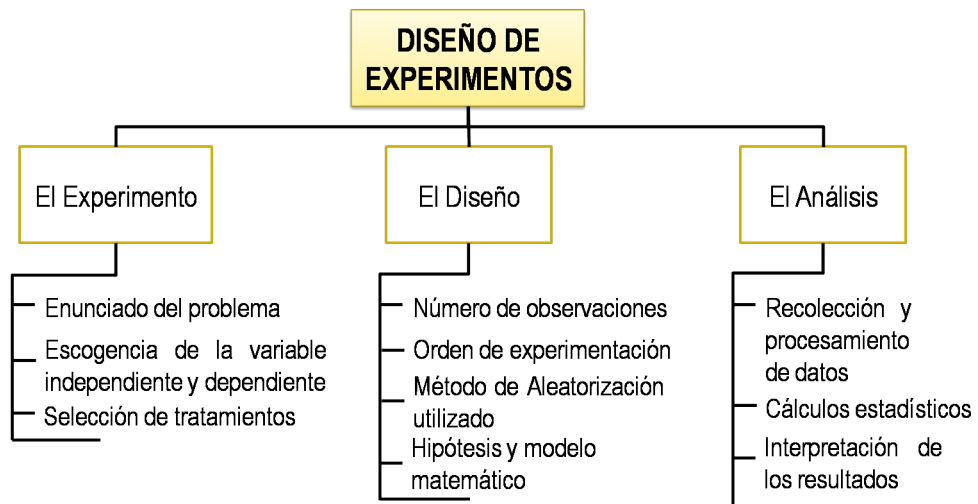
$$R_2 = n_1(n_1 + n_2 + 1) - R_1$$

Si las medias muestrales no difieren entre si, entonces se espera que la suma de los rangos sea casi igual para las dos muestras después de ajustar el tamaño de muestra. En consecuencia, si las sumas de los rangos son muy diferentes, se concluye que las medias no son iguales.

## 9. ESTUDIO Y ANÁLISIS DEL DISEÑO DE EXPERIMENTOS

En el diseño de experimentos a menudo el investigador tiene como objetivo obtener información, optimizarla empleando el diseño estadístico todo en relación con los objetivos planteados para este, el diseño de experimentos se ha consolidado como conjunto de técnicas estadísticas y de ingeniería, que permite lograr máxima eficiencia en los proceso con un mínimo coste<sup>123</sup>. Para llevar a cabo esto se deben tener en cuenta 3 fases en el diseño de experimentos: el experimento, el diseño y el análisis. En la figura 124 se ilustra un esquema general de estas fases.

Figura 124: Fases del Diseño de Experimentos



Diseñar un experimento significa planificarlo de modo que reúna información referente al problema bajo investigación. Muy a menudo se seleccionan datos que tienen muy poco o nada que ver con la solución del problema, es por esto que el diseño de un experimento consta de una secuencia de pasos, para asegurar que los datos obtenidos sean apropiados, para ser sometidos a un análisis que conduzca a deducciones válidas con respecto al problema planteado.

Una vez definido el tipo de estudio a realizar y establecer las hipótesis de investigación, el investigador debe concebir la manera práctica y concreta de responder a las preguntas de investigación. Esto implica seleccionar o desarrollar un diseño de investigación y aplicarlo al contexto particular de su estudio<sup>124</sup>. El diseño señala al investigador lo que debe hacer

<sup>123</sup>GUTIERREZ. Op. cit.,p. 9.

<sup>124</sup>KUEHL, Robert O. Diseño de Experimentos, Principios estadísticos para el diseño y análisis de investigaciones. 2 ed. THOMSON, 2001.

para alcanzar sus objetivos de estudio, contestar las interrogantes que se ha planteado y analizar la certeza de las hipótesis formuladas en un contexto en particular. Si el diseño está concebido, el producto final de un estudio tendrá mayores posibilidades de ser válido. Cada tipo de diseño tiene características propias. La precisión de la información obtenida puede variar en función del diseño o estrategia elegida.

Es una función del diseño experimental estadístico, proveer los patrones de observación para ser recolectados con el fin de obtener estimaciones más precisas y/o para tener la capacidad de probar las distintas hipótesis.

## 9.1 ETAPAS FUNDAMENTALES DE LA EXPERIMENTACIÓN

La experimentación forma parte natural de la mayoría de las investigaciones científicas e industriales, en muchas de las cuales, los resultados del proceso de interés se ven afectados por la presencia de distintos factores, cuya influencia puede estar oculta por la variabilidad de los resultados muestrales.

En todo proceso experimental intervienen distintos tipos de variables o factores como los que se definen a continuación:

- Variable respuesta: Es la característica del producto cuyo valor interés mejorar.
- Factores controlables: Son variables del proceso que se pueden fijar en un punto o en un nivel de operación.
- Factores no controlables: Son variables que no se pueden controlar durante la operación normal de un proceso.
- Factores estudiados: Son las variables que se investigan en el experimento para observar cómo afectan o influyen en la variable de respuesta.
- Niveles: Diferentes valores que se asignan a cada factor estudiado en un diseño experimental.
- Tratamientos: Combinación de niveles de todos los factores.

Es fundamental conocer los factores que influyen realmente y estimar esta influencia. Para conseguir esto es necesario experimentar, variar las condiciones que afectan a las unidades experimentales y observar la variable respuesta. A continuación se enumeran

las etapas que deben seguirse para una correcta planificación de un diseño experimental, las cuales deben ser ejecutadas de forma secuencial como se observa en la figura 125:

Figura 125: Etapas de la experimentación



### 9.1.1 Conocimiento del material experimental

Un experimento debe limitarse a investigaciones que establecen un conjunto de circunstancias, bajo un protocolo específico para observar y evaluar las implicaciones de las observaciones resultantes. El investigador determina y controla los protocolos de un experimento para evaluar y probar algo que en la mayoría de los casos no se conoce hasta ese momento. debido a esto, en esta etapa se debe determinar los antecedentes, importancia, objetivos e hipótesis a probar.

### 9.1.2 Escoger factores y niveles

Identificación de los factores que influyen; cuáles varían y cuales permanecen constantes. Es decir, el experimentador debe seleccionar las variables independientes o factores a ser estudiados, estos pueden ser cuantitativos o cualitativos. En el caso cualitativo hay que tener en cuenta como se controlarán estos valores en los valores de referencia y como van a ser medidos. Es importante seleccionar los rangos de variación de los factores y el número de niveles a considerar, los cuales pueden ser predeterminados o escogidos aleatoriamente del conjunto de los posibles niveles.

### 9.1.3 Selección de las variables respuesta según los objetivos.

En la selección de la variable respuesta o variable dependiente, el experimentador ha de estar seguro que la respuesta a medir realmente provee información sobre el problema

de interés. Es necesario suministrar la forma como se mide esta variable y de ser posible la probabilidad de ocurrencia de estas medidas.

#### **9.1.4 Planeación del experimento (materiales y métodos)**

En esta etapa se debe tener en cuenta: Lugar de ejecución del experimento, unidad experimental, número de repeticiones por tratamiento, equipos e instrumentos a utilizar y métodos de evaluación de los resultados (Prueba de hipótesis, nivel de significación).

#### **9.1.5 Selección del diseño experimental**

Este paso es de primordial importancia en el proceso de investigación. Se debe indicar la diferencia a la respuesta verdadera (que tan lejos se admite la realidad de lo observado), que se desea detectar y la magnitud de los riesgos tolerados (grado de confiabilidad), en el orden a escoger un tamaño de muestra apropiado (replicaciones); es procedente señalar también el orden de recolección de los datos y el método de aleatorización a emplearse. Siempre es necesario mantener un equilibrio entre la exactitud y los costos. Se deben recomendar planes que sean eficientes estadísticamente y económicamente viables. En la conducción de un estudio experimental es de esencial importancia la escogencia del diseño según las siguientes dos características<sup>125</sup>.

##### **9.1.5.1 Reducción del ruido diseños.**

La reducción de ruido en un diseño experimental, es decir, la eliminación de la variación experimental extraña, se puede lograr por una asignación adecuada de los tratamientos para la unidad experimental. El más empleado para esto es el diseño completamente aleatorizado, donde este, es un diseño en el cual los tratamientos son asignados completamente al azar a las unidades experimentales o viceversa. Otro diseño es el diseño en bloques al azar y utiliza la idea de comparar los tratamientos dentro de bloques de unidades experimentales relativamente homogéneos. El diseño de bloque seleccionado al azar representa uno de los tipos más simples de diseños de reducción de ruido.

Otros, más complejos, los diseños que utilizan el principio de bloqueo están disponibles para eliminar las tendencias o la variación en dos o más direcciones. El diseño en cuadrado latino es útil cuando se quieren eliminar dos fuentes de variación, es decir, cuando se desea

---

<sup>125</sup>MENDENHALL, William y SINICICH, Terry. STATISTICS for Engineering and the Sciences. Pearson Prentice Hall, 2007.

bloquear en dos direcciones. Los diseños del cubo latino permiten que usted bloquee en tres direcciones.

#### 9.1.5.2 Diseño de mayor volumen

La elección correcta de los tratamientos asociados a dos o más factores pueden aumentar el volumen de la información de la prueba. Los diseños cada vez de mayor volumen, son comúnmente conocidos como **diseños factoriales** porque implican una cuidadosa selección de las combinaciones de niveles de los factores (es decir, los tratamientos) en el experimento.

Un diseño factorial es un método de selección de los tratamientos (es decir, las combinaciones de nivel de factores) que se incluirán en un experimento. Un **experimento factorial completo** es aquel en el que los tratamientos consisten en todas las combinaciones de nivel de factor.

#### 9.1.6 Ejecución del experimento.

Es el proceso de muestreo de recolección de datos. Se entenderá que en el proceso haya un ajuste al plan (control). La mayoría de veces, la realización de un experimento no es lo suficientemente referente al proyecto de investigación, porque surgen situaciones no consideradas previamente, como el agotamiento producido sobre una unidad experimental que se esta evaluando, o la aparición de una característica no determinada. Y se deben tener en cuenta si estos imprevistos alteran los propósitos del ensayo; de otra forma hay que tenerlos en cuenta en el análisis de los resultados.

#### 9.1.7 Análisis de datos (Análisis de la varianza ANOVA)

Las variables que intervienen, o mejor, que se procura sean considerados en un ensayo, pueden relacionarse matemáticamente de alguna forma. El problema no está en la consecución de una expresión matemática sino en que tanto explica la realidad dicha expresión. En esta etapa se busca una fórmula matemática que explique el comportamiento de una(s) variable(s) a través del comportamiento de otras. Existen técnicas estadísticas, como el análisis de regresión que suministran estas relaciones. Se debe buscar que el modelo se analice junto con el especialista que lo está investigando.

Una vez se ha seleccionado el diseño experimental, se establece la matriz de diseño, el vector de parámetros  $\beta$  y se asocia a un modelo  $Y = X\beta + \epsilon$  el cual generalmente resulta

ser de rango incompleto y estimado por el método denominado mínimos cuadrados a través de una matriz inversa generalizada de  $X$ . Para la estimación del modelo y análisis estadístico de los datos, se debe tener en cuenta:

- **Estimación del modelo.** Estimar mediante los métodos de mínimos cuadrados los parámetros asociados al modelo, en este último método, se tiene en cuenta la distribución de la variable respuesta; por este motivo la mayoría de los desarrollos realizados se hacen asumiendo que la variable respuesta sigue una distribución normal multivariada. Cuando el modelo es de rango incompleto, se realizan cálculos muy similares al caso de rango completo, con lo cual simplemente los estimadores son adaptados a este modelo.
- **La teoría de estimabilidad.** Conocer los principales criterios para caracterizar las funciones estimables.
- **Pruebas de hipótesis.** Conocer la estructura distribucional de los estadísticos de prueba para las hipótesis de interés.

### 9.1.8 Conclusiones y recomendaciones

Hecho el análisis de los datos, el experimentador puede extraer conclusiones (inferencia) sobre los resultados. Las inferencias estadísticas deben ser físicamente interpretadas y su significado práctica evaluada.

Las recomendaciones deben de hacerse con base en los resultados. En la presentación de estos se deben evitar el empleo de terminología estadística seca y en lo posible presentar los resultados de manera simple. La elaboración de gráficos y tablas evita la redacción de resultados y recomendaciones extensas y confusas.

## 9.2 PRINCIPIOS BÁSICOS DEL DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Para que un experimento se realice en la forma más eficiente es necesario emplear métodos científicos en su planificación. El diseño estadístico de experimentos es el proceso de planificar un experimento para obtener datos apropiados, que pueden ser analizados mediante métodos estadísticos con el objetivo de producir conclusiones válidas y objetivas<sup>126</sup>. La metodología estadística es un enfoque objetivo para analizar un problema

<sup>126</sup>HERNÁNDEZ SAMPIERI, Roberto. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN. 3 ed. McGraw-Hill, 2003.

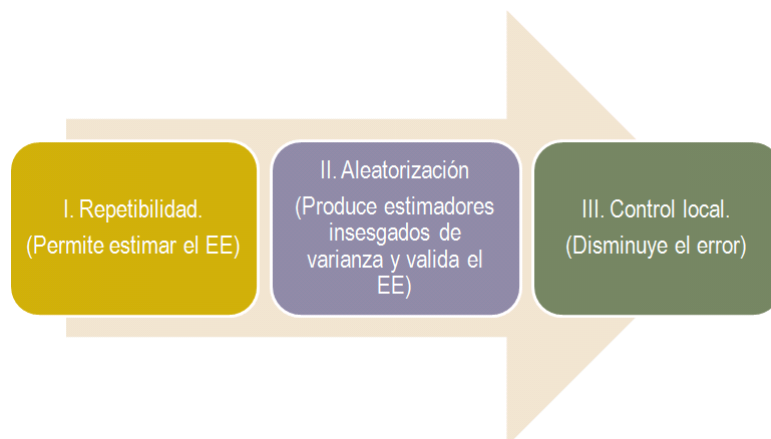
que involucre datos sujetos a errores experimentales. Así hay dos aspectos en cualquier problema experimental:

- Diseño del experimento.
- Análisis estadístico de los datos.

Estos dos temas están relacionados, ya que el método de análisis utilizado depende directamente del diseño empleado. Los tres principios básicos del diseño de experimentos son:

- Repetición de algunos o todos los tratamientos para estimar la magnitud del error experimental
- Aleatorización de los tratamientos a las unidades experimentales para tener así una estimación válida del error experimental así como estimaciones insesgadas de los efectos de los tratamientos.
- El uso del control local de fuentes de variación extrañas conocidas a través del uso de subgrupos homogéneos de unidades experimentales.

Figura 126: Diagrama de Fisher “Principios de la experimentación”



De la figura 126, según las condiciones del experimento, se escoge el diseño experimental, se formula un modelo lineal apropiado y se lleva a cabo el análisis estadístico basado en la escogencia del diseño y del modelo.

### **9.2.1 Repetibilidad.**

Se refiere a una repetición del experimento básico. A pesar de que el incremento en el número de repeticiones da precisión a las estimaciones, éstas no se pueden incrementar indefinidamente. Un punto para su disminución se alcanza cuando el incremento en los costos de la experimentación no es compensado con una reducción en la varianza. Cuando el número de replicas se torna demasiado grande, y las diferencias entre tratamientos detectadas son demasiado pequeñas, la importancia práctica que resulta es una pérdida de recursos valiosos.

### **9.2.2 Aleatorización.**

La aleatorización es fundamental para que el diseño de un experimento sea válido. Es el procedimiento que permite que cada unidad experimental tenga iguales condiciones para recibir cualquier tratamiento. Esto no significa que el experimentador podrá escribir como quiera la identificación de tratamientos (nombres o símbolos) en el orden que se le ocurra. La aleatorización es un proceso físico que asegura que cada tratamiento tenga igual probabilidad de ser asignado a cualquier unidad experimental<sup>127</sup>.

### **9.2.3 Control Local.**

El Control Local o Control del error Experimental, consiste en tomar medidas dentro del diseño experimental para hacerlo más eficiente, de tal manera que pueda permitir la reducción del error experimental y así hacerla más sensible a cualquier prueba de significación.

Es una técnica que se usa para aumentar la precisión del experimento. Un bloque es una porción del material experimental tan homogéneo como sea posible. Si para realizar el experimento no se cuenta con la totalidad de unidades experimentales similares, se realiza una partición de las unidades experimentales disponibles en subconjuntos homogéneos<sup>128</sup>. La aplicación de control local (bloqueo) no remueve el requisito de aleatorización, solo impone restricciones al tope de aleatorización que se llevará a cabo. Para todos los diseños, la asignación aleatoria de tratamientos a las unidades experimentales dentro de los límites impuestos por el control local es esencial para poder tener así una interpretación válida de los resultados.

---

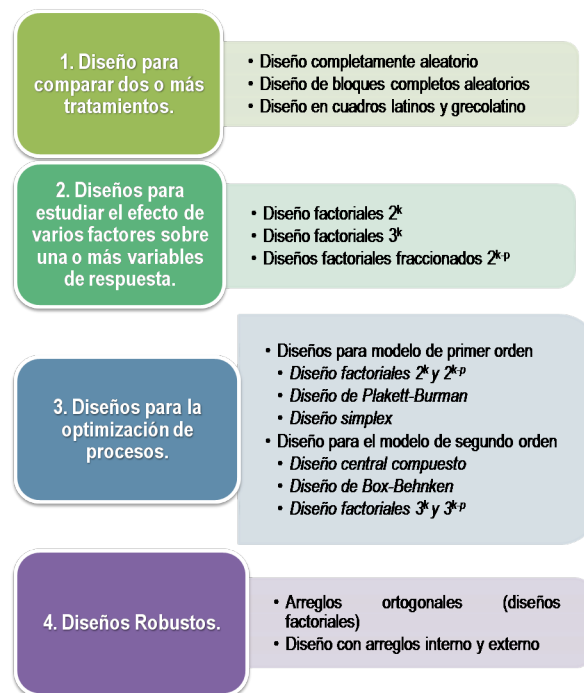
<sup>127</sup>KUEHL. Op. cit. p. 14

<sup>128</sup>Ibid.p.16

## 9.3 CLASIFICACIÓN DEL DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Existen diferentes clases de diseños de experimentos, y una forma de clasificarlos es la que se observa en la figura 127.

Figura 127: Clasificación del diseño de experimentos



El análisis de varianza (ANOVA) es una técnica estadística que sirve para analizar la variación total de los resultados experimentales de un diseño en particular, descomponiéndolo en fuentes de variación independientes atribuibles a cada uno de los efectos en que constituye el diseño experimental. Esta técnica tiene como objetivo identificar la importancia de los diferentes factores ó tratamientos en estudio y determinar como interactúan entre sí. A continuación se definiran de manera más detallada los experimentos.

### 9.3.1 Diseño completamente aleatorio

Este modelo es el más sencillo del diseño de experimentos, en el cual la variable respuesta puede depender de la influencia de un único factor. Este diseño tiene algunas características principales:

1. Aplicable sólo cuando las unidades experimentales son homogéneas (verificar si existe tal homogeneidad).
2. Los tratamientos pueden tener igual o diferente número de unidades experimentales.
3. La distribución de los tratamientos es al azar en las unidades experimentales.

### 9.3.1.1 Modelo estadístico.

Supóngase que se tiene  $k$  tratamientos o niveles diferentes de un solo factor que quieren compararse. La respuesta observada de cada uno de los  $k$  tratamientos es una variable aleatoria. Los datos se aprecian en la tabla 45, y son el caso general para cualquier caso de un diseño completamente aleatorio <sup>129</sup>.

Tabla 45: Datos típicos de un experimento con un solo factor

Tratamiento	Observaciones					Totales	Promedios	
1	$y_{11}$	$y_{12}$	·	·	·	$y_{1n}$	$y_{1.}$	$\bar{y}_1.$
2	$y_{21}$	$y_{22}$	·	·	·	$y_{2n}$	$y_{2.}$	$\bar{y}_2.$
·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·
$a$	$y_{k1}$	$y_{k2}$	·	·	·	$y_{kn}$	$y_{k.}$	$\bar{y}_k.$
						$y_{..}$	$y_{..}$	$\bar{y}_{..}$

Fuente. *Probabilidad y Estadística para ingeniería. HINES, William W. Pág. 388.*

Donde  $y_{ij}$ , representa la  $j$ -ésima observación tomada bajo el tratamiento  $i$ .

Entonces las observaciones de la tabla 45 se pueden describir como:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, k \\ j = 1, 2, \dots, b \end{cases} \quad (248)$$

Donde  $y_{ij}$  es una variable que denota la  $(j)$ -ésima observación,  $\mu$  es un parámetro común a todos los tratamientos denominado **media global**,  $\tau_i$  es un parámetro asociado con el  $i$ -ésimo tratamiento denominado **efecto del  $i$ -ésimo tratamiento**, y  $\varepsilon_{ij}$  es un componente de error aleatorio.

Los  $a$  niveles del factor en el experimento pueden elegirse de dos maneras diferentes<sup>130</sup>:

<sup>129</sup>MONTGOMERY. Probabilidad y estadística aplicada a la ingeniería. Op. cit., p.629

<sup>130</sup>Ibid., p.630.

1. El experimentador puede seleccionar de manera específica los tratamientos  $k$ . Ya que en esta situación se desea probar hipótesis sobre las medias de los tratamientos, y las conclusiones no pueden extenderse a tratamientos similares que no fueran considerados; de esta manera, tal vez se desee estimar los efectos de los tratamientos. Esto se le conoce como modelo de efectos fijos.
2. El experimentador también puede seleccionar los tratamientos  $k$  de una muestra aleatoria muy grande de tratamientos. En esta situación, lo que se desea es estar en posibilidad de extender las conclusiones a todos los tratamientos contenidos en la población, ya sea que hayan sido o no considerados en el experimento. En este caso, los efectos de los tratamientos  $\tau_i$  y se hacen intentos por estimar esta variabilidad. Esto se conoce como modelo de **efectos aleatorios** o de **componentes de varianza**.

### 9.3.1.2 Hipótesis a probar.

Para el efectos de un desarrollo matemático mas adsequible y simple, el análisis de varianza se apoyará del modelo de efectos fijos, ya que para este estudio es el experimentador quien hace la selección de los tratamientos.

El interés de la ANOVA recae en probar la igualdad de las medias  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  de los  $k$  tratamientos. Entonces las hipótesis apropiadas son<sup>131</sup>,

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = \mu \\ H_1 : \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j \end{aligned} \quad (249)$$

### 9.3.1.4 Análisis de varianza.

Una definición sencilla de la ANOVA es la técnica estadística fundamental para el análisis de todo tipo de diseños experimentales. Para el DCA se observa la siguiente tabla que es una síntesis del desarrollo adecuado para comprobar las hipótesis planteadas<sup>132</sup>.

---

<sup>131</sup>MONTGOMERY, Douglas. DISEÑO Y ANÁLISIS DE EXPERIMENTOS. 2 ed. Limusa S.A., 2007.  
<sup>132</sup>GUITIÉRREZ PULIDO, Humberto. ANÁLISIS Y DISEÑO DE EXPERIMENTOS. McGraw-Hill, 2004.

Tabla 46: Tabla de ANOVA para el DCA

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Media de cuadrados	$F_0$	Valor P
Tratamientos	$SS_{TRAT}$	$k - 1$	$CM_{TRAT}$	$\frac{CM_{TRAT}}{CM_E}$	$p(F > F_0)$
Error	$SS_E$	$N - k$	$CM_E$		
<b>Total</b>	$SS_T$	$N - 1$			

Fuente: GUITIÉRREZ, Humbertp. *Análisis y diseño de experimentos*. Pág. 84.

El estadístico de prueba denotada por la letra mayúscula  $F$ , es el cociente entre  $CM_{TRAT}$  y  $CM_E$ , y es el que probará la hipótesis nula. Esta definida por la ecuación 250.

$$F = \frac{CM_{TRAT}}{CM_E} \quad (250)$$

Entonces cuando  $H_0$  es verdadera, el numerador y el denominador de  $F$  son, en promedio del mismo valor, por lo que  $F$  tiende a 1. Y cuando  $H_0$  es falsa, los  $CM_{TRAT}$  tiende a ser mayor, pero los  $CM_E$  no, por lo que  $F$  tiende a ser mayor que 1.

Para hallar el valor p se consulta en la tabla  $F^{133}$ .

### 9.3.2 Diseño de bloques al azar

El objetivo es tener comparaciones precisas entre los tratamientos de los estudios de investigación. El diseño de bloques es un medio para reducir y controlar la varianza del error experimental con el fin de lograr una mayor precisión.

Para el caso de los diseños de experimentos que se mencionaran mas adelante, estos se concentrarán en los diseños de tratamientos y sus métodos estadísticos asociados para realizar una análisis eficiente de las hipótesis de investigación. En todas las situaciones se utilizan diseños totalmente aleatorizados. Pero estos diseños aleatorizados, fuera de la selección de la unidad experimental apropiada y las buenas técnicas de investigación, no controla la varianza del error experimental.

A diferencia de estos modelos, el diseño de bloques tiene en cuenta cualquier factor que afecta la variable respuesta y que varía entre las unidades experimentales, aumenta la varianza del error experimental y disminuye la precisión de los resultados del experimento. Es una extensión de la prueba  $t$  pareada para situaciones donde el factor de interés tiene más de dos niveles ; es decir cuando es necesario comparar más de dos tratamientos.

<sup>133</sup>NAVIDI. Op. cit., p. 778. Tabla A.7.

El uso de bloques estratifica las unidades experimentales en grupos homogéneos, o unidades parecidas. Una buena elección de los criterios de bloques disminuye la variación entre las unidades dentro de los bloques en comparación con las unidades de diferentes bloques, las categorías generales de buenos criterios son:

1. Proximidad.
2. Características físicas.
3. Tiempo.
4. Administración de tareas en el experimento.

Un equipo de mejora investiga el efecto de cuatro *métodos de ensamble*, A, B, C y D, sobre el *tiempo de ensamble* en minutos. Si los experimentadores se dan cuenta que hay cuatro operadores y consideran que esto puede afectar de manera significativa los tiempos de ensamble, y por ende, la comparación de los métodos, entonces debe utilizar el llamado *diseño en bloques completamente al azar*. Los datos para este diseño se pueden observar en la tabla 47. Como se aprecia en esta tabla, cada operador utiliza los cuatro métodos en orden aleatorio, de aquí que los métodos se encuentran en igualdad de circunstancias. El nombre de bloques completamente al azar es porque en cada bloque (operador) se prueban todos los tratamientos (Método de ensamble) en orden aleatorio.

Tabla 47: Diseño en bloques completos al azar

		Método de ensamble			
		A	B	C	D
Operador	1	6	7	10	10
	2	9	10	16	13
	3	7	11	11	11
	4	8	8	14	9

Fuente. GUTIERREZ, Humberto. *Análisis y diseño de experimentos*. 2 ed. Universidad de Guadalajara, México.: Mc Graw Hill. 2008. p. 75.

### 9.3.2.1 Modelo estadístico.

El modelo lineal para un experimento en un diseño de bloques completos aleatorizado requiere un término que represente la variación identificable en las observaciones como consecuencia de los bloques. La respuesta de la unidad con el  $i$ -ésimo tratamiento en el  $j$ -ésimo bloque se escribe como:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \varepsilon_{ij}; \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, k \\ j = 1, 2, \dots, b \end{array} \right\} \quad (251)$$

Donde  $y_{ij}$  es la medición que corresponde al tratamiento  $i$  y al bloque  $j$ ;  $\mu$  es la media global poblacional;  $\tau_i$  es el efecto debido al tratamiento  $i$ ,  $\gamma_j$  es el efecto debido el bloque  $j$ , y  $\varepsilon_{ij}$  es el error aleatorio atribuible a la medición  $y_{ij}$ . Se supone que los errores se distribuyen de manera normal con media cero y varianza constante  $\sigma^2$ , y que son independientes entre sí.

### 9.3.2.2 Hipótesis a probar.

Como ya se ha mencionado, la hipótesis de interés es la misma para todos los diseños comparativos, y está dada por

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k = \mu \quad (252)$$

$$H_A : \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j,$$

que también se puede expresar como

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \dots = \tau_k = 0 \quad (253)$$

$$H_A : \tau_i \neq 0 \text{ para algún } i$$

En cualquier de estas hipótesis la afirmación a probar es que la respuesta media poblacional lograda con cada tratamiento es la misma para los  $k$  tratamientos, y que por tanto cada repuesta media  $\mu_i$  es igual a la media global poblacional,  $\mu$ . De manera alternativa, se puede afirmar que *todos los efectos de tratamiento sobre la variable de respuesta son nulos*, porque cuando el efecto  $\tau_1 = \mu_i - \mu = 0$ , entonces necesariamente la respuesta media del tratamiento es igual a la media global ( $\mu_i = \mu$ ).

### 9.3.2.3 Análisis de varianza.

La hipótesis dada por las ecuaciones (4) y (5), se prueba con un *análisis de varianza con dos criterios de clasificación*; se utilización los dos criterios porque se controlan dos fuentes de variación: el factor de tratamientos y el factor de bloque. En la tabla 48 se muestra el aspecto del ANOVA para diseño en bloque completamente aleatoria .

Tabla 48: ANOVA para un diseño en bloques completos a azar

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados Libertad	Cuadrado de las Medias	$F_0$	p-value
Tratamientos	$SC_{TRAT}$	$k - 1$	$CM_{TRAT}$	$F_0 = \frac{CM_{TRAT}}{CM_E}$	$P(F > F_0)$
Bloques	$SC_B$	$b - 1$	$CM_B$	$F_0 = \frac{CM_B}{CM_E}$	$P(F > F_0)$
Error	$SC_E$	$(k - 1)(b - 1)$	$CM_E$		
Total	$SC_T$	$N - 1$			

Fuente. GUTIERREZ, Humberto. *Análisis y diseño de experimentos. 2 ed. Universidad de Guadalajara, México.: Mc Graw Hill. 2008. p. 126.*

Las formulas prácticas para calcular las sumas de cuadrados se observan en la ecuación 254.

$$\begin{aligned}
 SC_T &= \sum_{j=1}^b \sum_{i=1}^k y_{ij}^2 - \frac{y^2_{..}}{n} \\
 SC_{TRAT} &= \sum_{i=1}^k \frac{y_i^2}{b} - \frac{y^2_{..}}{n} \\
 SC_B &= \sum_{j=1}^b \frac{y_j^2}{k} - \frac{y^2_{..}}{n}
 \end{aligned} \tag{254}$$

y la del error se obtiene como,

$$SC_E = SC_T - SC_{TRAT} - SC_B$$

### 9.3.3 Diseño en cuadro latino

El diseño en bloques aleatorios es adecuado cuando una fuente de variabilidad extraña se elimina comparando un conjunto de medias muestrales. Una Característica importante de este tipo de diseño es su balance, que se logra asignando el mismo número de observaciones a cada tratamiento de cada bloque. La misma clase de balance puede lograrse en otros tipos de diseño mas complicados, en los cuales es conveniente eliminar el efecto de varias fuentes extrañas de variabilidad.

En este diseño se tienen cuatro fuentes de variabilidad que pueden afectar la respuesta observada, éstas son: los tratamientos, el factor de bloque I (columnas), el factor de bloques II (filas) y el error aleatorio. El diseño en cuadrado latino (DCL) se usa para eliminar estas fuentes de variabilidad, es decir, permite hacer la formación de bloques sistemática en dos direcciones. Por lo tanto, las filas y las columnas representan en realidad dos restricciones sobre la aleatorización.

Se llama diseño *cuadrado latino* por dos razones; es un *cuadrado* debido a que tiene la restricción adicional de que los tres factores involucrados se prueban en la misma cantidad de niveles, y es *latino* por que se utilizan letras latinas para denotar a los tratamientos o niveles del factor de interés. Sean  $A, B, C, \dots, K$ , los  $k$  tratamientos a comparar, por tanto ambos factores de bloques tienen también  $k$  bloques cada uno. El modelo o aspecto de los datos se muestra en la tabla 49.

Tabla 49: Aspectos de los datos en un diseño en Cuadrado Latino

		Bloque II (columnas)				
		1	2	3	...	k
Bloque I (filas)	1	$A = y_{111}$	$B = y_{221}$	$C = y_{331}$	...	$K = y_{kk1}$
	2	$B = y_{212}$	$C = y_{322}$	$D = y_{432}$	...	$A = y_{1k2}$
	3	$C = y_{313}$	$D = y_{423}$	$E = y_{533}$	...	$B = y_{2k3}$
	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	k	$K = y_{k1k}$	$A = y_{12k}$	$B = y_{23k}$	...	$J = y_{jkk}$

Fuente. GUTIERREZ, Humberto. *Análisis y diseño de experimentos. 2 ed. Universidad de Guadalajara, México.: Mc Graw Hill. 2008. p. 131.*

Una de las ventajas del diseño cuadrado latino es que al hacer el control local en dos direcciones, se tiene un mayor control en la variación que cuando se usa un diseño completamente aleatorio o diseño en bloques completamente aleatorio.

Sin embargo, esta clase de experimento presenta algunas desventajas, como son:

- El número de tratamientos se limita al número de filas y al número de columnas.
- Si  $k \geq 10$  no es recomendable el uso de cuadrados latinos, pues el número de unidades experimentales se incrementa notablemente a medida que  $t$  aumenta.

### 9.3.3.1 Modelo estadístico.

En el análisis del diseño el modelo estadístico que se supone describe el comportamiento de las observaciones está dada por

$$y_{ijl} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \delta_l + \varepsilon_{ijl} \quad (255)$$

donde  $y_{ijl}$  es la observación del tratamiento  $i$ , en el nivel de  $j$  del factor columna y en el nivel  $l$  del factor fila;  $\varepsilon_{ijl}$  es el error atribuible a dicha observación. De acuerdo con este

modelo, la variabilidad total presente en los datos se puede descomponer como

$$SC_T = SC_{TRAT} + SC_{B1} + SC_{B2} + SC_E \quad (256)$$

Y los grados de libertad correspondientes son

$$k^2 - 1 = (k - 1) + (k - 1) + (k - 1) + (k - 2)(k - 1)$$

### 9.3.3.1 Análisis de varianza.

El ANOVA para el diseño en cuadrado latino se muestra en la tabla 51.

Tabla 51: ANOVA para el diseño en cuadrados latino

Fuentes de Variación	Suma de Cuadros	Grados de Libertad	Cuadrados de las Medias	$F_0$	p-value
Tratamientos	$SC_{TRAT}$	$k - 1$	$CM_{TRAT}$	$F_0 = \frac{CM_{TRAT}}{CM_E}$	$P(F > F_0)$
Filas	$SC_{B1}$	$k - 1$	$CM_{B1}$	$F_0 = \frac{CM_{B1}}{CM_E}$	$P(F > F_0)$
Columnas	$SC_{B2}$	$k - 1$	$CM_{B2}$	$F_0 = \frac{CM_{B2}}{CM_E}$	$P(F > F_0)$
Error	$SC_E$	$(k - 2)(k - 1)$	$CM_E$		
Total	$SC_T$	$k^2 - 1$			

Fuente. GUTIERREZ, Humberto. *Análisis y diseño de experimentos. 2 ed. Universidad de Guadalajara, México.: Mc Graw Hill. 2008. p. 132.*

En el se prueba la hipótesis sobre los efectos de tratamiento, del factor fila y del factor columna. Otra vez, la hipótesis fundamental es la de los tratamientos; las otras dos proporcionan un adicional al objetivo inicial y permiten comprobar la relevancia de controlar los factores de bloque.

### 9.3.4 Diseños factoriales

El término experimento factorial o arreglo factorial hace referencia a la constitución de los tratamientos o combinaciones de tratamientos que se desean comparar. Este término no afecta lo que se conoce como diseño de tratamientos, pues este se refiere a la selección

de factores que se desean estudiar los niveles de los factores a ensayar y combinación de éstos.

De esta forma se debe dejar en claro que el diseño de tratamientos es independiente del diseño experimental, el cual hace referencia a la manera en que los tratamientos se aleatorizan a las diferentes unidades experimentales y la forma como se controla la variabilidad natural de las mismas. Así el diseño experimental puede ser completamente aleatorizado, bloques completamente aleatorizados, cuadros latinos, etc., y para cada uno de éstos diseños se puede tener un arreglo factorial.

En muchos experimentos el éxito o fracaso del ensayo depende mas de la selección de los tratamientos que se desea comparar que de la elección del diseño. Sin embargo, la selección de ambos (del diseño y de los tratamientos) es importante por tanto ninguno de los dos debe descuidarse en la planeación del experimento.

Los *factores* pueden ser de tipo *cualitativo* (máquinas, tipos de materiales, operador, la presencia o ausencia de una operación previa, etc.) o de tipo *cuantitativo* (temperatura, humedad, velocidad, presión, etc.). Para poder estudiar la manera en que influye cada factor sobre la variable de respuesta, es necesario elegir al menos dos niveles de prueba para cada uno de ellos (tres máquinas, dos operadores, tres velocidades, dos temperaturas).

En un experimento factorial se investigan simultáneamente los efectos de cierto número de diferentes factores. La necesidad de estudiar conjuntamente varios factores obedece principalmente a dos razones:

- a. Encontrar un modelo que describa el comportamiento general del fenómeno en estudio. Esto se restringe al rango de variación de los niveles de los factores.
- b. Optimizar la respuesta o variable independiente, es decir, encontrar la combinación de niveles de los factores que optimizan esa respuesta.

Los tratamientos en el análisis factorial consisten en todas las combinaciones se forman de los distintos niveles de los factores. Por ello, la característica esencial que hace necesario el estudio conjunto de factores es la posibilidad de que el efecto de un factor cambie en presencia de los niveles de otro factor, es decir, que los factores interactúen, lo cual conlleva al concepto de interacción entre ellos. Si se estudia un factor en forma separada el resultado puede ser diferente al que daría con un estudio conjunto, y es mas difícil describir el comportamiento general o encontrar el óptimo.

Algunas de las ventajas de esta clase de experimentos son:

- Al obtener información sobre varios factores sin aumentar el tamaño del experimento hay economía en el material experimental.
- Se amplía la base de la inferencia en relación a un factor ya que se estudia en las diferentes condiciones representadas por los niveles de otros factores.
- Se puede obtener una estimación de la interacción de los efectos, o sea, se determina el grado y la forma en la cual se modifica el efecto de un factor en presencia de los niveles de los otros factores.
- El conjunto de los tratamientos en el diseño factorial es óptimo para estudiar efectos principales e interacciones.

Y entre las desventajas más importantes se destacan:

1. El gran número de combinaciones de tratamientos cuando se estudian muchos factores a muchos niveles. Esto tiene dos efectos:
  - a) Si se desea usar bloques completos es difícil encontrar grupos de unidades experimentales homogéneos para asignar todos los tratamientos, esto se puede eliminar usando el principio de confusión.
  - b) Se aumenta el costo del experimento al tener muchas unidades experimentales, problema que se minimiza usando experimentos factoriales fraccionados, en este caso, se prueba solo una parte de los tratamientos posibles.
2. Difícil interpretación principalmente de las interacciones de orden superior (interacciones de más de tres efectos).

#### 9.3.4.1 Diseños factoriales con dos factores.

Considere los factores  $A$  y  $B$  con  $a$  y  $b$  ( $a, b \geq 2$ ) niveles de prueba, respectivamente. Con ellos se puede construir el arreglo o diseño factorial  $axb$ , que consiste de  $axb$  tratamientos<sup>134</sup>.

#### 9.3.4.2 Modelo estadístico.

Con un diseño factorial  $axb$  se pueden estudiar los dos efectos individuales y el efecto de interacción de ambos factores. En términos estadísticos lo que se afirma es que el

<sup>134</sup>MONTGOMERY, Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería. Op.cit., p. 689.

comportamiento de la respuesta  $y$  en el experimento con  $k$  réplicas se podrá describir mediante el modelo de efectos

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (257)$$

$$i = 1, 2, \dots, a; \quad j = 1, 2, \dots, b; \quad k = 1, 2, \dots, an;$$

Donde  $\mu$  es la media general;  $\tau_i$  es el efecto debido al  $i$ -ésimo tratamiento del factor  $A$ ,  $\gamma_j$  es el efecto del  $j$ -ésimo nivel del factor  $B$ ,  $(\tau\gamma)_{ij}$  representa al efecto de interacción en la combinación  $ij$  y  $\varepsilon_{ij}$  es el error aleatorio que supone una distribución con media cero y varianza constante  $\sigma^2 [N(0, \sigma^2)]$  y son independientes entre sí.

### 9.3.4.3 Hipótesis a evaluar y ANOVA.

Con un diseño factorial  $axb$  interesa estudiar los tres efectos  $A$ ,  $B$  y  $AB$ . Así, en primera instancia se pueden plantear los tres pares de hipótesis siguientes:

$$H_0 : \text{Efecto } A = 0$$

$$H_A : \text{Efecto } A \neq 0,$$

$$H_0 : \text{Efecto } B = 0$$

$$H_A : \text{Efecto } B \neq 0,$$

$$H_0 : \text{Efecto } AB = 0$$

$$H_A : \text{Efecto } AB \neq 0,$$

El ANOVA para un diseño factorial  $axb$  con  $n$  replicas resulta de descomponer la variación total como

$$SC_T = SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_E$$

donde los respectivos grados de libertad de cada una de ellas son

$$nab - 1 = (a - 1) + (b - 1) + (a - 1)(b - 1) + ab(n - 1)$$

El factor  $(n - 1)$  en los grados de libertad de la suma de cuadrados del error  $SC_E$  señala que se necesitan al menos dos replicas del experimento para poder calcular este componente, y por ende poder construir una tabla de ANOVA.

Tabla 52: ANOVA para el diseño factorial axb

FV	SC	GL	CM	$F_0$	p-value
Tratamientos	$SC_A$	$a - 1$	$CM_A$	$F_0 = \frac{CM_A}{CM_E}$	$P(F > F_0^A)$
Filas	$SC_B$	$b - 1$	$CM_B$	$F_0 = \frac{CM_B}{CM_E}$	$P(F > F_0^B)$
Columnas	$SC_{AB}$	$(a - 1)(b - 1)$	$CM_B$	$F_0 = \frac{CM_B}{CM_E}$	$P(F > F_0^{AB})$
Error	$SC_E$	$ab(n - 1)$	$CM_E$		
Total	$SC_T$	$abn - 1$			

Fuente: GUTIERREZ, Humberto. *Análisis y diseño de experimentos. 2 ed. Universidad de Guadalajara, México.: Mc Graw Hill. 2008. p. 160.*

#### 9.3.4.4 Diseño Factorial General $2^k$ .

Los diseños factoriales se usan ampliamente en experimentos que incluyen varios factores cuando es necesario estudiar el efecto conjunto de los factores sobre la respuesta. Hay varios casos especiales del diseño factorial que son importantes debido a su uso generalizado en el trabajo de investigación y porque constituyen las bases de otros diseños de gran valor práctico.

El más importante de estos casos especiales es el de  $k$  factores, cada uno con sólo dos niveles. Si todos los factores se estudian con dos niveles, se dice que es un experimento factorial  $2^k$ . Los niveles de éstos factores pueden ser cuantitativos o bien cualitativos.

La selección de únicamente dos niveles puede conducir a inferencias erróneas. Así cuando la respuesta se afecta en forma cuadrática, los niveles estudiados pueden indicar que no efecto del factor. Este es un riesgo que se corre al usar dos niveles por factor<sup>135</sup>.

En el caso de  $k = 2$ , se tiene el factorial más sencillo  $2^2$ , el modelo estadístico para este modelo sería:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (258)$$

#### 9.3.4.5 ANOVA de diseño factorial $2^k$ .

La suma de cuadrados totales ( $SC_T$ ) en este diseño factorial, se calcula como:

$$SC_T = \sum_{i=1}^{n2^k} y_i^2 - \frac{y_{\cdot}^2}{n2^k} \quad (259)$$

y tiene  $n2^k - 1$  grados de libertad, donde el subíndice  $i$  corre sobre el total de observaciones. La suma de cuadrados del error  $SC_E$  se obtiene por diferencia y tiene  $2^k(n - 1)$  grados de libertad.

<sup>135</sup>GUTIÉRREZ. Op. cit., p. 236.

### 9.3.5 Metodología Taguchi

La propuesta de Taguchi también es conocida como Diseño Robusto de Parámetros. El término parámetro se refiere a los parámetros del sistema (son los factores o variables del proceso). Un procedimiento es robusto cuando su funcionamiento sea consistente al exponerse las condiciones cambiantes del medio.

El objetivo de este método es lograr productos y procesos robustos frente a las causas de variabilidad (ruidos) que hacen que las características funcionales del producto se desvíen de sus valores óptimos provocando costos de calidad.

La metodología Taguchi establece tres metas<sup>136</sup>:

1. Diseños robustos (insensibles) ante el medio ambiente para productos y procesos.
2. Diseño y desarrollo de productos de modo que sean robustos a la variación de componentes.
3. Minimización de las variaciones respecto a un valor objetivo.

Las tres metas de la filosofía Taguchi se expresan en tres etapas en el desarrollo del producto.

1. Diseño del sistema: el ingeniero utiliza principios científicos y de ingeniería para determinar la configuración básica.
2. Diseño de parámetros: se determinan los valores específicos para los parámetros del sistema, minimizando la variabilidad aportada por las variables de ruido.
3. Diseño de tolerancia: se determinan las mejores tolerancias para los parámetros

Taguchi establece que pueden emplearse métodos de diseños experimentales para hallar un mejor diseño del producto y/o del proceso. La función de pérdida establece una medida financiera del impacto negativo a la sociedad, por el impacto negativo de la sociedad por el desempeño de un producto cuando se desvía de un valor designado como meta  $t = target$ . Las características de calidad y de un proceso o producto debe estar cada vez más cerca de valor ideal,  $t$ , y todo lo que se desvíe del ideal es considerado como una pérdida de la sociedad. Tal concepción la encarna la función de pérdida Taguchi, la cual se define por la ecuación 260.

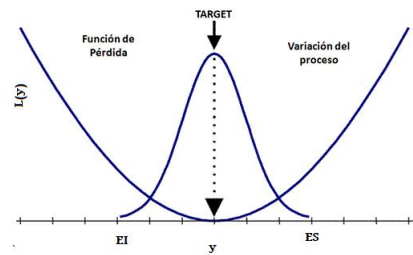
$$L(y) = k(y - t)^2 \quad (260)$$

---

<sup>136</sup>GUTIERREZ, Op.cit. p. 363.

Aquí  $k$  es una constante que depende de tolerancias y de los costos de reparación del producto, ambos vistos desde los puntos de vista del consumidor y del fabricante (Taguchi, 1986). En la figura 128 se muestra la función de pérdida de Taguchi. Con esto la función de pérdida evalúa la calidad con base en: la desviación respecto al valor objetivo, las tolerancias del fabricante y del consumidor y los costos de reparación de un producto.

Figura 128: Función de pérdida de Taguchi



## 9.4 COMPARACIÓN ENTRE MEDIAS

Una vez que se utiliza la prueba  $F$  de la ANOVA, para corroborar la  $H_0$ , y como en no siempre es aprobada, es decir, que las medias de los tratamientos no son todas iguales, entonces conviene estudiar por qué se rechaza la igualdad entre medias, comparando todos los pares de medias, porque puede ser que se rechace la igualdad de medias porque haya un par de medias diferentes entre sí.

Ahora se mencionaran algunos de los métodos mas empleados para realizar la comparaciones entre medias:

### 9.4.1 LSD de Fisher (Least significant difference).

Este método lo que hace es comparar el valor absoluto de la diferencia de cada par de medias. También es adecuado y puede usarse para construir intervalos de confianza para  $\mu_i - \mu_j$  o para comprobar la hipótesis nula que  $\mu_i - \mu_j = 0$ <sup>137</sup>.

Para probar la hipótesis nula  $H_0 : \mu_i - \mu_j = 0$ , el estadístico de prueba esta dado por la ecuación 261.

$$\frac{\bar{y}_i - \bar{y}_j}{\sqrt{CM_E \left( \frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j} \right)}} \quad (261)$$

<sup>137</sup>NAVIDI. Op. cit., p. 648.

Si  $H_0$  es verdadera, este estadístico tiene una distribución  $t$  Student con  $N - 1$  grados de libertad.

$$|\bar{y}_i - \bar{y}_j| > t_{N-I, \alpha/2} \sqrt{CM_E \left( \frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j} \right)} \quad (262)$$

La razón de que la cantidad  $t_{N-I, \alpha/2} \sqrt{CM_E \left( \frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j} \right)}$  se llame la diferencia significativa mínima es que la hipótesis nula de las medias iguales se rechazó con un nivel de  $\alpha$  siempre que la diferencia en las medias muestrales  $|\bar{y}_i - \bar{y}_j|$  supere este valor. Cuando el diseño es balanceado, con todos los tamaños muestrales iguales a  $J$ , la diferencia significativa mínima es igual a  $t_{N-I, \alpha/2} \sqrt{2CM_E/J}$  para todos los pares de medias.

En otras ocasiones, el experimentador tal vez desee determinar todos los pares de medias que se pueda concluir que difieren de otro, en este caso, se debe utilizar otro tipo de procedimiento que se llaman *métodos de comparaciones múltiples*. Algunos de ellos se mencionaran a continuación.

#### 9.4.2 Método de Tukey.

También conocido como Tukey's HSD (Honestly Significant Difference) o método de Tukey-Kramer. Este método esta basado en la *distribución de rango studentizado*, en lugar de la distribución  $t$  de student. No requiere la prueba de  $F$ . Los valores son más altos que LSD de T-student, la prueba es más rigurosa, porque requiere que la diferencia sea más grande para alcanzar una significación.

Se utiliza un solo valor para todas las comparaciones. La conclusión esta referida al experimento en si y no a la comparación como es el caso de LSD. Si el nivel de significación es 0.05, significa que de 100 experimentos similares en 95 de ellos se espera tener las mismas conclusiones y en 5 experimentos conclusiones diferentes; es por esto que en Tukey-Kramer necesita un solo valor y esto hace suponer igual repeticiones por tratamiento, aunque es posible con diferente repetición.

La distribución de rango studentizado tiene dos grados de libertad como valores, que para el método de Tukey-Kramer son  $I$  y  $N - I$ . El método de Tukey-Kramer utiliza un cuantil  $1 - \alpha$  de dicha distribución con sus grados de libertad; esta cantidad se denota por,

$$q_{I, N-I, \alpha} \sqrt{(CM_E/2) \left( \frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j} \right)} \quad (263)$$

La tablas del Anexo I<sup>138</sup>, presenta valores de  $q_{I, N-I, \alpha}$  para diferentes valores de  $I$ ,  $N$  y

<sup>138</sup>ibid., p. 784-785

$\alpha$ .

Con el fin de probar todas las hipótesis nulas simultaneas  $H_0 : \mu_i - \mu_j = 0$ , los estadísticos de prueba son:

$$\frac{\bar{y}_i. - \bar{y}_j.}{\sqrt{\frac{CM_E}{2} \left( \frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j} \right)}} \quad (264)$$

El  $p$ -value para cada prueba se encuentra al consultar la tabla de la distribución de rango studentizado<sup>139</sup> anexo III) con  $I$  y  $N - 1$  grados de libertad.

Para cada par de niveles  $i$  y  $j$  para los cuales

$$|\bar{y}_i. - \bar{y}_j.| > q_{I, N-I, \alpha} \sqrt{\frac{CM_E}{2} \left( \frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j} \right)} \quad (265)$$

*Nota: Cuando el diseño es balanceado, con todos los tamaños de muestra iguales a  $J$ , la cantidad  $\sqrt{\frac{CM_E}{2} \left( \frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j} \right)}$  es igual a  $\sqrt{\frac{CM_E}{J}}$  para todos los pares de niveles, y en este caso el método sólo se llama método Tukey.*

### 9.4.3 Método de Bonferroni.

Este método proporciona una manera de ajustar  $p$ -value hacia arriba cuando se realizan algunas pruebas de hipótesis. Si un  $p$ -value permanece pequeño después del ajuste, la hipótesis nula puede ser rechazada. Para hacer el ajuste de Bonferroni, sólo multiplique el  $p$ -value por el número de pruebas realizadas.

La aplicación del método es muy simple; sea  $C$  el número de pares de las diferencias que van a compararse, entonces  $C = I(I - 1)/2$ . El método Bonferroni es el mismo que el método de LSD, excepto que  $\alpha$  se sustituye con  $\alpha/C$ .

Con el fin de probar  $C$  hipótesis nulas de la forma  $H_0 : \mu_i - \mu_j = 0$ , los estadísticos de prueba son:

$$\frac{\bar{y}_i. - \bar{y}_j.}{\sqrt{CM_E \left( \frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j} \right)}} \quad (266)$$

Determine el valor  $p$  para cada prueba consultando la tabla  $t$  de student con  $N - 1$  grados de libertad y multiplique el  $p$ -value encontrado por  $C$ . Específicamente, si

$$|\bar{y}_i. - \bar{y}_j.| > t_{N-I, \alpha/(2C)} \sqrt{CM_E \left( \frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j} \right)} \quad (267)$$

<sup>139</sup>Montgomery. Op. cit., Tabla A.8.

*Nota: Aunque es fácil de utilizar, el método de Bonferroni tiene la desventaja que cuando  $C$  se hace grande, los intervalos de confianza resultan muy anchos, y las pruebas de hipótesis tiene una potencia baja.*

#### 9.4.4 Método de Ducan.

Un procedimiento muy utilizado para comparar todos los pares de medias es la *prueba del rango múltiple* desarrollada por Duncan<sup>140</sup>.

Si las  $k$  muestras son de igual tamaño se acomodan los  $k$  promedios en orden ascendente y el error estándar de cada promedio se estima con la ecuación 268.

$$S_{\bar{y}_i} = \sqrt{CM_E/n} \quad (268)$$

Si algunas o todas las muestras tiene tamaños diferentes se reemplazan  $n$  por la media armónica de las  $n_i$  al calcular el error estándar de los promedios. La media armónica de las  $n_i$  está dada por la ecuación 269.

$$n_{AR} = \frac{k}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i}} \quad (269)$$

Observe que cuando  $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ , ocurre que  $n_{AR} = n$ . De la tabla de rangos múltiples de Duncan dada en el Anexo III<sup>141</sup>, se obtiene los valores críticos  $r_\alpha(p, l)$ ,  $p = 2, 3, \dots, k$ , donde  $\alpha$  es el nivel de significancia prefijado,  $l$  son los grados de libertad para el error. Con estos  $k - 1$  valores se obtiene los rangos de significancia mínima dados por la ecuación 270.

$$R_p = r_\alpha(p, l)S_{\bar{y}_i}; p = 2, 3, \dots, k \quad (270)$$

Entonces, se prueban las diferencias observadas entre las medias, empezando con la mas grande contra la menor, la cual se compararía con el rango mínimo de significación  $R_k$ . Después se calcula la diferencia de la mayor y la segunda menor y se compara con el rango  $R_{k-1}$ . Estas comparaciones se continúan hasta que todas las medias se han comparado con la media mayor. Por último, se calcula la diferencia entre la segunda media mayor y la menor y se compara con el rango mínimo de significación  $R_{k-1}$ . Este proceso se continua hasta que se han considerado todas las diferencias entre todos los  $k(k - 1)/2$  pares de medias posibles .

<sup>140</sup>MONTGOMERY, Op. cit., 783.

<sup>141</sup>GUITIÉRREZ PULIDO. Op . cit., p. 555-556

# 10. ESTUDIO DE UN SISTEMA DE MEDICIÓN

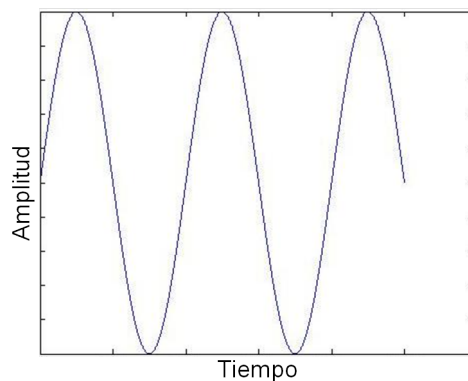
## 10.1 ANÁLISIS CON DISPOSITIVOS ANÁLOGOS Y DIGITALES

Los parámetros que caracterizan un fenómeno pueden clasificarse en Analógicos y Digitales, se dice que un parámetro es analógico cuando puede tomar todos los valores posibles en forma continua, por ejemplo: el voltaje de una batería, la intensidad de luz, la velocidad de un vehículo, la inclinación de un plano, etc.

Por otra parte se dice que un parámetro es digital cuando solo puede tomar valores discretos, por ejemplo: el número de partículas emitidas por un material radioactivo en un segundo, el número de moléculas, en un volumen dado de cierto material, el número de revoluciones de un motor en un minuto, etc.

Para comprender mejor los métodos de medición, es importante definir una señal análoga y digital. Las señales analógicas son por ende señales eléctricas de variación continua en intensidad o amplitud en el tiempo, como se puede apreciar en la figura 129. La gran desventaja de ese tipo de transmisión es que el ambiente genera también señales del tipo analógico, conocidas como ruido, que generalmente interfieren con las que acarrean información y crean complicaciones resultando en una señal de menor calidad.

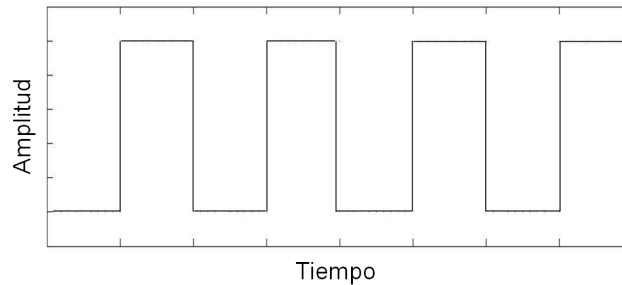
Figura 129: Señal Analoga



Por otro lado, las señales digitales adquieren uno de dos valores a través del tiempo, como se puede apreciar en la figura 130. Su comportamiento se puede equiparar al de un interruptor (o switch) que tiene uno de dos estados: encendido o apagado. Las ventajas

de este tipo de transmisión es, primero, su inmunidad a las interferencias ya que al digitalizar una señal se elimina el “ruido” producido por el medio ambiente, produciendo una señal más pura y de mayor resolución; y, segundo, que puede codificarse usando el sistema binario, este se definirá en la sesión siguiente referente al sistema de adquisición de datos.

Figura 130: Señal digital



Desde un punto de vista de utilización en la rama de mediciones en ingeniería, se puede realizar una división general entre instrumentos de índice o analógicos e instrumentos numéricos o digitales, definidos a continuación:

- Un aparato analógico involucra un proceso analógico, es decir ante una señal de entrada cuya variación sea continua, proporciona una salida también continua, la cual puede tomar cualquiera de los valores entre los límites especificados.
- Un aparato digital involucra, a partir de alguna etapa, un proceso digital es decir, ante una señal de entrada cuya variación sea continua, proporciona una salida un número finito o discreto de valores.

### 10.1.1 Medidas analógicas.

La cantidad que está siendo medida se controla continuamente y el instrumento utilizado da una respuesta análoga a la cantidad, es decir, la magnitud de la salida del instrumento representa el tamaño de la cantidad que está siendo medida. Un movimiento de un galvanómetro de aguja es un ejemplo de esta clase de instrumentos, la amplitud de la deflexión del ángulo de la aguja está relacionada con la magnitud de la corriente que atraviesa el medidor. Debido a lo mencionado anteriormente, a continuación se mencionará algunos de los instrumentos medidores de señales analógicas.

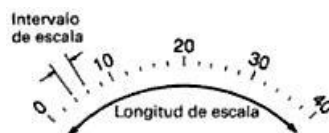
### 10.1.2 Instrumentos Analógicos.

La característica de los instrumentos de medida analógicos es el indicador del valor a medir por una aguja o una marca luminosa en una escala numerada, dotada de rayas divisorias. La desviación de la aguja, por desplazamiento, promovido por la magnitud a medir desde su punto de reposo (cero en la escala), es análoga a dicha magnitud. Estos instrumentos tiene las siguientes ventajas y desventajas:

- a) Bajo Costo.
- b) En algunos casos no requieren de energía de alimentación.
- c) No requieren gran sofisticación.
- d) Presentan con facilidad las variaciones cualitativas de los parámetros para visualizar rápidamente si el valor aumenta o disminuye.
- e) Es sencillo adaptarlos a diferentes tipos de escalas no lineales.
- f) Tienen poca resolución, típicamente no proporcionan más de 3 cifras.
- g) Las lecturas se presentan a errores graves cuando el instrumento tiene varias escalas.
- h) La rapidez de lectura es baja, típicamente 1 lectura/segundo.
- i) No pueden emplearse como parte de un sistema de procesamiento de datos de tipo digital.

El dispositivo de medición se compone de piezas fijas que provocan el movimiento, y de un elemento móvil, cuya posición depende del valor de la magnitud a medir. Las partes fijas suelen soportar la escala, mientras que la parte móvil lleva la aguja o el espejo giratorio para el dispositivo del indicador luminoso. La escala es provista de una serie de rayas divisorias, rotuladas con las unidades de la magnitud a medir (ver figura 131). La graduación de la escala se fija mediante calibración previa.

Figura 131: Escala.



### 10.1.3 Medidas digitales.

Con los instrumentos digitales la cantidad que está siendo medida se muestra en intervalos regulares de tiempo y el valor de la muestra se convierte en un número, es decir,

una secuencia de dígitos. Como es el caso del voltímetro digital. Se caracteriza por su número de cifras y su resolución es la unidad de cifra menos significativa.

#### 10.1.4 Instrumentos digitales.

Al contrario de los instrumentos de medición analógica, los instrumentos digitales indican los valores de medida en cifras numéricas. Esto es más ventajoso para la observación visual, así de este modo se puede prescindir de la lectura de rayas y de la interpolación de valores intermedios. Esto evita agregar un error de visualización a los errores propios del instrumento.

La escala clásica de indicación continua, es reemplazada por la escala numérica de indicación discontinua (ver figura 132), en la cual las cifras alineadas a leer indican directamente el valor numérico de la magnitud medida; la indicación numérica se presenta a lo largo del tiempo con un ritmo predeterminado.

Figura 132: Instrumento digital



Estos instrumentos tiene las siguientes ventajas y desventajas:

1. Tienen alta resolución alcanzando en algunos casos mas de 9 cifras en lecturas.
2. No están sujetos al error de paralelaje.
3. Pueden eliminar la posibilidad de errores por confusión de escalas.

4. Tienen una rapidez de lectura que puede superar las 1000 lecturas por segundo.
5. Puede entregar información digital para procesamiento inmediato en computadora.
6. El costo es elevado.
7. Son complejos en su construcción.
8. Las escalas no lineales son difíciles de introducir.
9. En todos los casos requieren de fuente de alimentación.

De las ventajas y desventajas anteriores puede observarse que para cada aplicación hay que evaluar en función de las necesidades específicas, cual tipo de instrumentos es el más adecuado, con esto se enfatiza que no siempre el instrumento digital es el más adecuado siendo en algunos casos contraproducente el uso del mismo.

### **10.1.5 Dispositivos análogos y digitales**

Teniendo en cuenta que la adquisición, transmisión y procesamiento de datos se realiza mediante dispositivos electrónicos<sup>142</sup>. Y en base en las diferentes formas de medición, como las analógicas y digitales es preciso iniciar con el estudio de las mediciones analógicas.

La utilización de instrumentos análogos en la actualidad está muy extendido, a pesar que los instrumentos digitales crecen de manera exponencial en número, versatilidad y en aplicaciones. Es lógico todavía pensar en que los instrumentos analógicos se sigan utilizando durante los próximos años y que para algunas aplicaciones no puedan ser sustituidos.

#### **10.1.5.1 Medición de presión**

La mayoría de las técnicas para medir la presión involucran la precepción de un desplazamiento o desviación y la relación con la presión a través de calibración o relaciones teoricas.

La tabla 53 ilustrará los instrumentos para medir presión.

---

<sup>142</sup>FIGLIOLA. Op.cit., p. 407.

Tabla 53: Instrumento de referencia de presión

INSTRUMENTO DE REFERENCIA DE PRESIÓN		
Instrumento	Características	Medición
Medidor McLeod	Instrumento de medición de presión y estándar de referencia de laboratorio que establece las presiones de gas en el intervalo subatmosférico de 1 mmHg abs a 0.1 mmHg abs.	El vástago de referencia compensa las fuerzas capilares que actúan en el capilar de medición. La incertidumbre será del orden de 0.5 % (95%) a 1 mm Hg abs y se incrementa a 3% (95%) a 0.1 mm Hg abs. No necesita corrección.
Barómetro	Instrumento que consta de un tubo invertido que contiene un fluido y se utiliza para medir presión atmosférica.	Se usan con estándares locales para medir la presión atmosférica. En condiciones estándares de presión, temperatura y gravedad el mercurio se elevará a 760 mm por arriba de la superficie del depósito.
Manómetro	Este es utilizado para medir la presión diferencial basada en la relación entre la presión y la carga hidrostática equivalente del fluido.	La incertidumbre del instrumento en la medición de presión pueden ser tan baja como 0,02- 02% de la lectura.
Probador de peso muerto	El probador de peso muerto utiliza la definición fundamental de la presión como fuerza por unidad de área para crear y determinar la presión dentro de una cámara sellada.	Éstos se utilizan como estándares de laboratorio para la calibración de dispositivos de medición de presión sobre el rango 0.01 hasta 10000 Psi.
Transductor de Presión	Convierte una presión medida en una señal mecánica o eléctrica. El transductor es un tipo de sensor que se deforma o se deflexiona con la presión. Hay diferentes tipos de sensores como de Tubo bourdon, fuelles, diafragma, capsula.	En la salida del transductor se puede insertar un seguidor de voltaje para aislar la carga del transductor.

### 10.1.5.2 Medición de temperatura

La temperatura es una importante variable en muchos sistemas de ingeniería. Algunos dispositivos comunes que se usan para medir la temperatura se pueden observar en la tabla 54.

Tabla 54: Instrumentos para medición de temperatura

INSTRUMENTO DE REFERENCIA DE TEMPERATURA		
Instrumento	Características	Medición
Termómetros de líquido de vidrio	Mide la temperatura en virtud de la expansión térmica de un líquido. El líquido está dentro de una estructura de vidrio que consta de un bulbo y un vástago. La diferencia de la expansión térmica entre el líquido y el vidrio produce de hecho un cambio en el nivel del líquido en el capilar.	Las mediciones de temperatura que usan termómetro de líquido en vidrio proporcionan exactitudes hasta $\pm 0,01$ °C en condiciones muy bien controladas. Las mediciones prácticas en termómetros de vidrio en general producen una incertidumbre total que varía de $\pm 0,2$ a $\pm 0,2$ °C, según el instrumento específico.
Termómetros Bimetálicos	El fenómeno físico que emplea un de temperatura bimetálico es la expansión térmica diferencial de dos metales (Bandas metálicas). Las bandas bimetálicas emplean un metal con alto coeficiente de expansión térmica y otro con coeficiente bajo.	Los termómetros de caratula que usan una banda bimetálica como elemento sensor proporcionan mediciones de temperatura con incertidumbre de $\pm 1$ °C.
Termistores	Son dispositivos semiconductores que presentan un decremento muy grande en la resistencia conforme la temperatura se incrementa.	Los termistores se usan cuando se requiere alta sensibilidad, o rápidos tiempos de respuesta. La resistencia de potencia cero de un termistor es el valor de resistencia del termistor sin flujo de corriente.
Termopares	Método de medición y control de temperatura. Consta de dos conductores eléctricos de materiales no similares que tienen al menos una conexión eléctrica, conocida como unión o junta.	

### 10.1.5.3 Medición de Flujo

El equipo de medición de flujo seleccionado y diseñado de manera adecuada es de alta prioridad para la ingeniería, ya que las mediciones de flujo están enlazadas con la economía de manera vital.

Algunos métodos usados para la medición de flujo se pueden observar en la figura 133.

Figura 133: Dispositivos de medición de flujo

Instrumento	Características	Medición
Medidor de Orificio	Es una placa circular con un hueco que se inserta en una tubería de modo que el orificio quede concéntrico con el diámetro de la tubería .	La incertidumbre sistemática relativa del instrumento para el factor de expansión son aproximadamente $\pm[4(p1-p2)/p1]$ % de Y.
Medidor Venturi	Un medidor venturi consta de una contracción de suave convergencia a una garganta angosta seguida por una sección divergente.	La incertidumbre sistemática relativa del instrumento para el factor de expansión son aproximadamente $\pm\{[4 + 100\beta^2](p1-p2)/p2\}$ % de Y.
Toberas de Flujo	La tobera de flujo consta de una contracción gradual a una garganta angosta . Esta requiere menos espacio de instalación que un medidor venturi.	La incertidumbre sistemática relativa del instrumento para el coeficiente son aproximadamente 2%.
Rotámetros	El rotámetro es un medidor de inserción ampliamente usado para la indicación del gasto . Consta de un flotador dentro de un tubo vertical, cónico y con un área de sección transversal incrementada en su salida.	Los flotadores con bordes afilados son menos sensibles a cambios de viscosidad del fluido con la temperatura. Un medidor típico cuenta con un intervalo de operación de 10:1 con una incertidumbre sistemática de $\pm 2\%$ del gasto.
Medidores de turbina	Los medidores de turbina toman los principios de la cantidad de movimiento angular para medir el gasto. Son excepcionalmente repetibles, buenos candidatos para estándares locales de gasto.	Ofrecen una caída de baja presión y muy buena exactitud. Una típica incertidumbre sistemática del instrumento en el gasto es aproximadamente $\pm 0.25\%$ con un margen de 20 a 1.
Medidores de flujo másico	El gasto másico requiere la medición de momento por unidad de volumen . Si la densidad del fluido es conocida bajo condiciones exactas de la medición, entonces un calculo directo puede ser realizado con base en las mediciones del gasto volumétrico.	No es posible usar dispositivos de medición de densidad justo aguas arriba de la medición de flujo volumétrico para mejorar la incertidumbre al determinar el flujo másico en aplicaciones críticas. Se desea la medición directa del gasto másico ya que elimina la incertidumbre asociada con la medición de la densidad real.

#### 10.1.5.4 Medición de deformación

La medición de pequeños desplazamiento en un material u objeto que esta sujeto a una carga mecánica determina la deformación, la cual se mide con métodos como la observación del cambio en la distancia entre dos marcas sobre la superficie de un miembro que soporta carga.

Un sensor ideal para la medición de deformación debe tener:

- Buena resolución espacial, lo cual implica que el sensor mediría la deformación en un punto.
- No estar afectado por cambios en las condiciones ambientales.
- Tener alta respuesta a la frecuencia para mediciones dinámicas (basadas en tiempo).

Un sensor con estas características es el medidor de deformación por resistencias.

Las mediciones de resistencia eléctrica tiene muchas aplicaciones importantes que van desde la simple determinación de continuidad en un circuito eléctrico hasta la medición

precisa de los cambios de resistencia del orden de  $10^{-6}\Omega$  y de niveles absolutos de  $10^{-5}\Omega$  a  $10^{15}\Omega$ <sup>143</sup>.

Estos sistemas incluyen las protecciones necesarias para instrumentos delicados, permiten la compensación por cambios en las condiciones ambientales o consideran los cambios en los puntos de referencia de transductores. El principio de funcionamiento de muchos transductores es el cambio de resistencia respecto a un cambio en la variable medida. La medición de resistencia se analizara con técnicas básicas de medición de voltaje y corriente, así como la ley de Ohm.

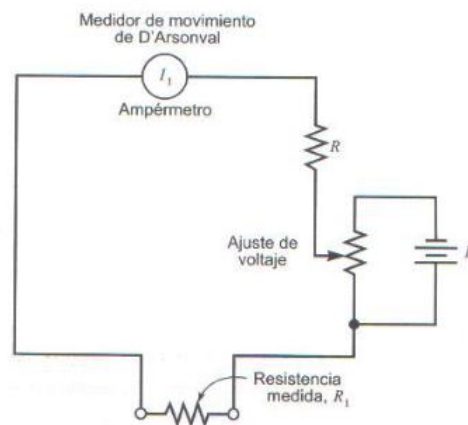
Los métodos utilizados para la medida de resistencias son generalmente:

- El método de óhmetro
- Método de puente
- Método amperímetro-voltímetro,

#### 10.1.5.5 Circuitos del Óhmetro

La determinación de la resistencia puede lograrse al aplicar un voltaje a través de una resistencia desconocida y medir el flujo de corriente con un galvanómetro. Aplicando la ley de ohm se calcula el valor de la resistencia<sup>144</sup>.

Figura 134: Óhmetro Analógico básico.



FIGLIOLA, Richard. y BEASLEY, Donald. *Mediciones mecánicas: Teoría y Diseño*. 4 ed. México.: Alfaomega, 2008.p.242.

<sup>143</sup>FIGLIOLA.Op.cit.,p.241.

<sup>144</sup>ibid.,p.242.

### 10.1.5.6 Ohmetro

El óhmetro es otro dispositivo de medición muy importante, ya que ayuda a localizar circuitos abiertos o cortocircuitos midiendo la resistencia del componente o circuito bajo prueba.

Es un instrumento que mide la resistencia o simplemente continuidad, de un circuito o parte de el, directamente en ohmios sin necesidad de cálculos, su principio de funcionamiento se basa en el método del voltímetro para medir resistencias y se configura habitualmente en circuitos tipo serie y/o derivación.

Los ohmímetros más comunes son 'multímetros' esto es, instrumentos que por medio de un dial pueden utilizarse para medir la diferencia de potencial, la intensidad de corriente o la resistencia; normalmente pueden preseleccionarse en una gran variedad de rangos de modo que se pueden utilizar ohmímetros de laboratorio relativamente baratos para medir resistencias desde fracciones de ohmio hasta varios millones de ohmios (megaohmios). Los ohmímetros se utilizan mucho para detección de fallos en circuitos eléctricos.

### 10.1.5.7 Circuitos Puente

Se han desarrollado diversos circuitos puente para medir la capacitancia e inductancia y, con mayor frecuencia, para medir la resistencia. Siendo mas utilizado el puente de Wheatstone.

**Puente de Wheatstone:** Permite medir con exactitud la resistencia y detectar sus pequeños cambios , su principio de operación se basa en la compensación de las tensiones de salida de dos divisores de tensión ( $R_3+R_4$ ) y ( $R_1+R_x$ ) alimentados a la misma fuente. Tres de las resistencias  $R_1, R_2, R_3$  son de valor conocido con gran precisión. Las tensiones de vacío de cada una de las dos salidas A y B respecto al punto común O son:

$$V_{A0} = V_p \frac{R_4}{R_3 + R_4} \quad (271)$$

$$V_{B0} = V_p \frac{R_x}{R_1 + R_x} \quad (272)$$

Luego en ambas salidas se conecta un elemento detector de cero, constituido por un galvanómetro sensible, cuya función consiste en informar de la igualdad del valor de ambas tensiones de salida, en vacío por medio de una desviación nula correspondiente a una intensidad nula. cuando las dos expresiones coinciden, resulta:

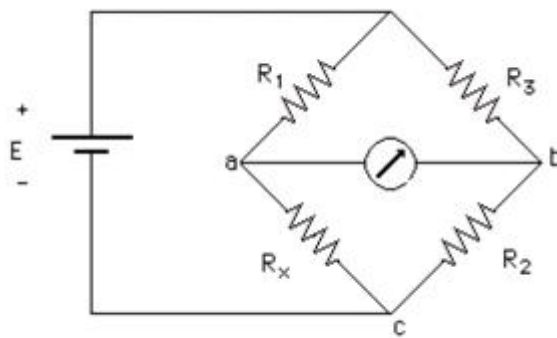
$$\frac{R_4}{R_3 + R_4} = \frac{R_X}{R_1 + R_X} \quad (273)$$

$$R_X = \frac{R_1 R_4}{R_3}$$

Esta proporciona el valor de la resistencia desconocida.

Existen variaciones del puente wheatstone para medir resistencias muy altas y muy bajas. Hay una amplia variedad de puentes de CA para medir inductancia, capacitancia, admittancia, conductancia y cualquier parametro de impedancia. La medición de resistencia con este circuito puente puede realizarse con dos métodos.

Figura 135: Puente de Wheatstone



**Método de ajuste a cero:** En que consiste:

En el método cero se determina una cantidad a partir de otras magnitudes conocidas cuando un instrumento marca cero. Precisa que la sensibilidad del instrumento sea adecuada, pero sin requerir calibración, por tanto se encuentra libre de errores de calibración.

Ventajas:

- No es necesario conocer el voltaje de entrada.
- Los cambios en el voltaje de entrada no afectan la exactitud de las mediciones.
- El galvanómetro sólo se requiere para detectar si existe un flujo de corriente, no para medir su valor.

**Método de deflexión:** En condiciones de desequilibrio la magnitud de la corriente, o la caída de voltaje, en la porción del medidor o galvanómetro de un circuito puente es indicación directa del cambio de resistencia en uno o más de los brazos del puente<sup>145</sup>. Este requiere un medidor capaz de indicar con exactitud el voltaje de salida, así como de entrada conocido y estable.

Ventajas:

- permite observaciones y registro de señales con respuestas muy altas
- Se usa para medir señales que varían con el tiempo.
- Rápidos y cómodos

#### 10.1.5.8 Medición de desplazamiento

Los dispositivos más comunes para medir el desplazamiento lineal y angular son los siguientes:

**Potenciometro:**

El potenciómetro lineal es un dispositivo en el que la resistencia varía como una función de la posición del deslizador, es un divisor de voltaje variable. Los potenciómetros son muy comunes en la experiencia diaria. Los potenciómetros angulares, como se muestra se usan en dispositivos comunes como radios y televisores como controles de volumen y tono. Para el potenciómetro lineal, la salida es una función lineal simple de la posición del deslizador vista en la ecuación 274:

$$V_0 = \frac{x}{L} V_s \quad (274)$$

Pueden ser usados para medir desplazamientos tan pequeños como 0.1 a 0.2 *in* a desplazamientos de más de 1 *ft* los potenciómetros angulares pueden ser diseñados para medir desplazamientos angulares de 3500° (rotaciones múltiples). Los potenciómetros son muy económicos, fácilmente disponibles, y no requieren acondicionamiento especial de la señal<sup>146</sup>.

Algunas limitaciones significantes son causadas debido al contacto del deslizador, están sujetos al desgaste y su tiempo de vida es de solo unos pocos millones de ciclos. Además, la salida tiende a ser algo ruidosa eléctricamente ya que el punto de contacto

---

<sup>145</sup>FIGLIOLA. Op.cit., p.245.

<sup>146</sup>WHEELER. Op. cit., p. 232.

del deslizador tiene una resistencia, y esto puede afectar la salida de una manera algo aleatoria. Este efecto a menudo se hace peor con la edad del dispositivo debido a la contaminación de la superficie de contacto.

### **Transformadores diferenciales variables y rotativos:**

Los transformadores diferenciales variables (LVDT) son dispositivos usados para medir el desplazamiento modificando la distribución espacial de un campo magnético alterno. Son usados para medir desplazamientos directamente y como elemento sensor en un número de transductores, que crean un desplazamiento en respuesta a una magnitud<sup>147</sup>.

Los LVDT's tienen algunas limitaciones en las mediciones dinámicas. Normalmente no son adecuados para frecuencias mayores que 1/10 la frecuencia de excitación, y la masa del núcleo puede introducir un error de carga mecánica significativa en dispositivos dinámicos.

### **Sensor capacitivo de desplazamiento**

Los sensores capacitivos de desplazamiento son más apropiados para medir desplazamientos muy pequeños (0.00001 a 0.01 in), aunque algunas veces son apropiados rangos mayores. Estos dispositivos se basan en el principio que la capacitancia de un capacitor es una función de la distancia entre las placas y el área de las placas; esto es:

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (275)$$

Donde

$K$  = Coeficiente dieléctrico de la sustancia entre las placas ( $K=1$  para el aire).

$\epsilon_0$  = es la permitividad del vacío con un valor de  $8.85 * 10^{-12} \text{C}^2/\text{N-m}^2$

$A$  = Area de solapamiento de las placas.

$d$  = es la distancia entre placas.

Hay dos maneras de usar un transductor capacitivo para mediciones de desplazamiento. En el primer caso, la capacitancia es una función no lineal del desplazamiento, mientras que en el segundo, la capacitancia es aproximadamente una función lineal del desplazamiento. Ya que la salida del sensor capacitivo no es un voltaje, se requiere condicionamiento de la señal. Para este propósito puede usarse un puente de Wheatstone alimentado con *ac*. Si el capacitor de referencia tiene el mismo valor que el capacitor sensor inicial y las dos resistencias son iguales, el voltaje de salida será una función del

---

<sup>147</sup>Ibid., p. 233.

cambio en la capacitancia. Los acondicionadores de señal comerciales están disponibles para medir capacitancia<sup>148</sup>.

### **Codificadores digitales**

Los codificadores digitales son dispositivos que convierten un desplazamiento directamente en una señal digital. Dispositivos similares también pueden ser usados para medir la posición lineal. Ya que la salida de cada uno de los fotodetectores es *on* u *off*, la señal está en forma digital. En un dispositivo típico, las fuentes de luz son diodos emisores de luz (LED's) y los detectores son elementos fotoresistivos. Los elementos fotoresistivos son dispositivos semiconductores que muestran un cambio brusco en la resistencia cuando son iluminados. Los codificadores tienen una resolución bien definida, que depende del número de bits usado para representar cada posición. Un dispositivo de 4 bits tiene solo 16 posibles posiciones. En los dispositivos comerciales se emplea un mayor número de bits.

## **10.2 MUESTREO CON INSTRUMENTOS ANÁLOGOS, DIGITALES Y ADQUISICIÓN DE DATOS**

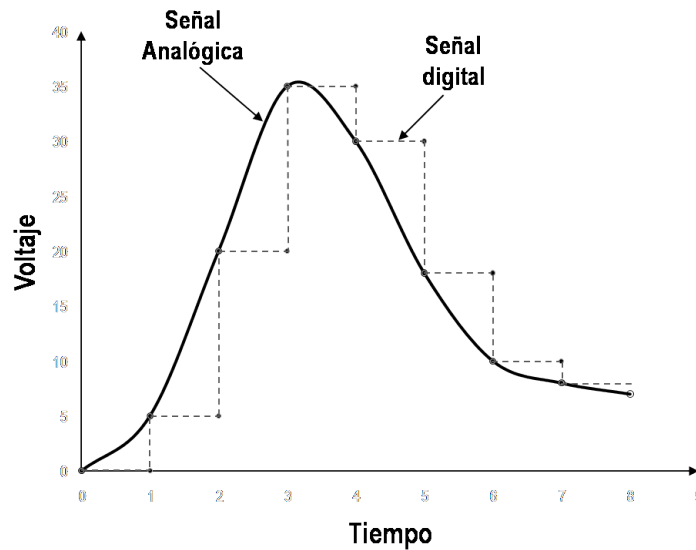
### **10.2.1 Sistemas análogos y digitales: bits y palabras**

Existen diferencias fundamentales entre sistemas analógicos y digitales, como se puede observar en la figura 136, los cuales imponen limitaciones y responsabilidades, por lo que el ingeniero debe ser cuidadoso. La diferencia más importante es que las señales analógicas son continuas en amplitud y tiempo, mientras que las digitales son discretas (no continuas).

---

<sup>148</sup>Ibid., p. 238.

Figura 136: Señal analógica y digital.



Fuente. ALCIATORE, David G. & HISTAND, Michael B. *Introducción a la Mecatrónica y los sistemas de medición*. Editorial Mc Graw Hill. 2008. Pág. 318.

En las representaciones analógicas existen varios ejemplos, como en el velocímetro de un auto la velocidad dependerá del ángulo de inclinación de la aguja al marcar, es decir posee una lectura continua. Pero todas las cantidades analógicas tienen una característica en común, pueden variar gradualmente sobre un intervalo continuo de valores.

En las representaciones Digitales, las cantidades no se denotan por valores proporcionales, se denotan por símbolos llamados dígitos. Por ejemplo un reloj digital que da la hora a manera de dígitos por horas, por minutos y segundos. En otras palabras ofrece una lectura paso a paso.

El término digital también se usa cuando nos referimos a dispositivos binarios tales como los circuitos que hacen funcionar una calculadora, el microprocesador de una computadora, o microcontroladores. Todos son dispositivos digitales. El sistema binario es un tipo de sistema digital que usa dos dígitos, 0 y 1<sup>149</sup>.

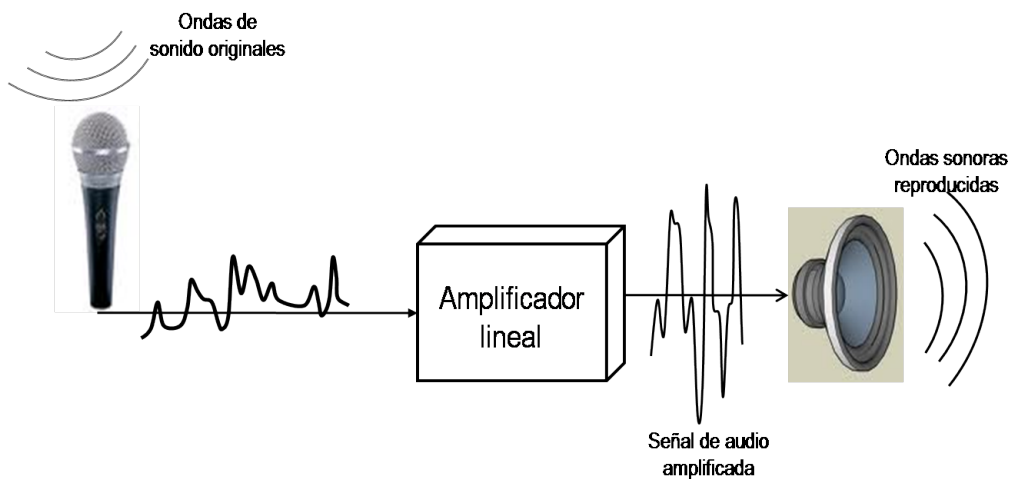
El sistema binario es bueno para describir estados y números. En términos de estados, los dos dígitos del sistema binario (0 y 1) pueden ser usados para representar encendido/apagado, abierto/cerrado, no/sí, alto/bajo, etc. Combinaciones de dígitos binarios pueden ser usadas para describir números. Por ejemplo, los números binarios 101, 110 y 111 representan a los números decimales 5, 6 y 7. Estos números pueden ser usados para describir información analógica, como la posición de una puerta a medida que se abre o cierra.

<sup>149</sup>DE ALVAREZ, Ana Luis. *Analógico y Digital Básicos - Guía del Estudiante*. PARALLAX.

### 10.2.1.1 Sistema Analógico

En la naturaleza, el conjunto de señales que percibimos son analógicas, así la luz, el sonido, la energía, etc. son señales que tienen una variación continua. Incluso, la descomposición de la luz en el arco iris vemos como se realiza de una forma suave y continua. Una señal analógica es un voltaje o corriente que varía suave y continuamente. Una onda senoidal es una señal analógica de una sola frecuencia. Los voltajes de la voz y del video son también señales analógicas que varían de acuerdo con el sonido o variaciones de la luz que corresponden a la información que se está transmitiendo. La figura 137 ilustra los instrumentos empleados para observar el comportamiento de la señal.

Figura 137: Ejemplo de un Sistema Análogo.



### 10.2.1.2 Sistemas digitales: Bits y Palabras

Dentro de los sistemas digitales cabe distinguir dos grupos: los que trabajan con variables de un solo bit, denominados habitualmente *automatismos lógicos* y aquellos que procesan señales de varios bits, para representar, por ejemplo, valores numéricos de variables o contenido de temporizadores, contadores, etc., y a estos se les denominan *automatismos digitales*.

Casi todos los sistemas de medición digitales usarán alguna variación de un sistema de numeración binario para representar y transmitir la información de la señal en forma digital. Un sistema binario es un sistema numérico que usa la base 2.

Los sistemas binarios usan el dígito binario o bit como la unidad de información más pequeña. Un bit consta de un solo dígito, ya sea 1 o 0. Los bits son como los interruptores eléctricos y transportan información lógica y numérica. Desde un punto de vista lógico, el 1 o el 0 se representan por la posición del interruptor en encendido o apagado. Mediante

la acción apropiada un bit puede restablecer a cualesquiera de posiciones de encendido o apagado con lo que se tiene un valor de 1 o 0. Al combinar los bits se posible definir números enteros mayores que 1 o 0, de manera que una colección de bits se usa para expresar una información numérica, llamada *palabra*. En general, la longitud de la palabra puede variar desde cuatro bits para un pequeño dispositivo digital dedicado hasta 32 bits o más para una microcomputadora grande. Una palabra formada por 8 bits se define como *byte*. Una ubicación física particular para almacenar una palabra se conoce como *registro*.

El número de bits que definen una palabra determina el tamaño del número, máximo que la palabra puede representar. Por ejemplo, dado que un bit puede representar un 1 o un 0, una combinación de dos bits puede representar  $2^2$  o cuatro posibles combinaciones de arreglos de bit: 0 0, 0 1, 1 0 o 1 1. De manera alterna se restablece esta palabra de 2 bits para producir cuatro diferentes arreglos, los cuales representan el decimal, es decir, los números enteros base 10 de 0, 1, 2 o 3, respectivamente. Por consiguiente los  $M$  bits en una palabra de  $M$  bits pueden combinarse para representar cualesquiera de  $2^M$  enteros. Una palabra de 8 bits representa los números de 0 a 255; una palabra de 16 bits representa de 0 a 65535.

El valor numérico para una palabra se calcula moviendo un bit de derecha a izquierda. A partir del lado derecho, cada bit sucesivo incrementará el valor de la palabra en una unidad, en dos, en cuatro, en ocho, y así hasta  $2^{M-1}$ , siempre que el bit esté en su posición de encendido (valor de 1); de lo contrario, el bit particular incrementa el valor de la palabra con cero. Un esquema ponderado de una palabra de  $M$  bits se tiene en la tabla 55.

Cuadro 55: Palabra

Bit $M - 1$	...	Bit 3	Bit 2	Bit 1	Bit 0
$2^{M-1}$	...	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
$2^{M-1}$	...	8	4	2	1

Con este esquema, el bit  $M - 1$  se conoce como el bit mas significativo, ya que su contribución al nivel numérico de la palabra es el más grande en relación con los demás bits. El bit 0 se conoce como el bit menos significativo. Este esquema se conoce como *código binario directo*.

Varios códigos binarios son de uso común. El código binario directo es el más sencillo. Considere una palabra de 4 bits. En el binario de 4 bits, 0 0 0 0 equivale a un cero analógico y 1 1 1 1 a  $15^{150}$ .

<sup>150</sup>FLIGLIOLA, Richard. Mediciones Mecánicas Teoría y Diseño. 4 ed. México.: Alfaomega, 2009.

**Ejemplo 10.1.** Convertir el número binario 16-bits a número decimal 0101110001011100.

**Solución.** La representación de los bits se hace de izquierda a derecha:  $2^7$ ,  $2^6$ ,  $2^5$ ,  $2^4$ ,  $2^3$ ,  $2^2$ ,  $2^1$  y  $2^0$ . Por tanto para tener el decimal equivalente, simplemente hace que añadir las contribuciones de cada bit.

$$\begin{aligned} N_{10} &= 0(2^{15}) + 1(2^{14}) + 0(2^{13}) + 1(2^{12}) + 1(2^{11}) + 1(2^{10}) + 0(2^9) + 0(2^8) + 0(2^7) + \dots \\ &\quad + 1(2^6) + 0(2^5) + 1(2^4) + 1(2^3) + 1(2^2) + 0(2^1) + 0(2^0) \\ &= 0 + 16384 + 0 + 4096 + 2048 + 1024 + 0 + 0 + 0 + 64 + 0 + 16 + 8 + 4 + 0 + 0 \\ &= 23644 \end{aligned}$$

Ahora, se desea encontrar el número binario de 16-bits con el mismo valor que el de el número decimal 92.

Cuadro 56: Conversión de desimal a binario

	Residuo
2/23644	
2/11822	0
2/5911	0
2/2955	1
2/1477	1
2/738	1
2/369	0
2/184	1
2/92	0
2/46	0
2/23	0
2/11	1
2/5	1
2/2	1
2/1	0
0	1

La respuesta está contenida en los residuos. El número más alto es el bit menos significativo, y el número de abajo es el bit más significativo. La respuesta es, por tanto, 0101110001011100. Sin embargo, se nos pide un número de 8 bits, por lo que el bit más significativo es 0 y es la respuesta

$$N_2 = 0101110001011100$$

## 10.2.2 Convertidores análogo-digital

Para tener posibilidad de ingresar datos analógicos en un sistema digital, dichos datos se deben transformar en valores digitales codificados. El primer paso es evaluar numéricamente la señal en instantes discretos en el tiempo. Este proceso se llama muestreo y el resultado es una señal digitalizada compuesta de valores discretos correspondientes a cada muestra<sup>151</sup>. Para que dicho proceso tenga utilidad práctica es necesario elegir la tasa de muestreo adecuadamente de modo que esa secuencia de números identifique de forma única a la señal analógica original. Esta es la esencia del teorema de muestreo.

La colección de puntos de datos muestreados forma un arreglo de datos y, aunque esta representación ya no es continua, puede describir con precisión la señal analógica original ver figura 136.

El teorema de muestreo desarrollado por H. Nyquist, quien afirmaba que *“una señal analógica puede ser reconstruída, sin error, de muestras tomadas en iguales intervalos de tiempo. La razón de muestreo debe ser igual, o mayor, al doble de su ancho de banda de la señal analógica”*<sup>152</sup>.

Este teorema afirma que es necesario muestrear una señal a una tasa de mas de dos veces la componente de frecuencia máxima para abarcar todos los componentes de la frecuencia de muestreo, es decir, para representar fielmente la señal analógica, las muestras digitales se deben tomar a una frecuencia  $f_s$  según la ecuación 276.

$$f_s > 2f_{m\acute{a}x} \quad (276)$$

Donde  $f_{m\acute{a}x}$  es el componente de máxima frecuencia en la señal analógica de entrada. El término  $f_s$  se conoce como tasa de muestreo y el límite en la tasa mínima requerida ( $2f_{m\acute{a}x}$ ) se llama frecuencia Nyquist.

Ahora bien, si una señal se muestrea a una velocidad menor que  $2f_{m\acute{a}x}$ , puede resultar aliasing. El aliasing es el efecto que causa que señales continuas distintas se tornen indistinguibles cuando se les muestrea digitalmente. Cuando esto sucede, la señal original no puede ser reconstruida de forma única a partir de la señal digital. Este es un fenómeno propio de la conversión A/D que se definirá mas adelante, en el cual la frecuencia de la señal reconstruida es menor que el de la señal original, lo cual ocurre cuando la frecuencia de muestreo es demasiado baja; estos efectos pueden reducirse utilizando filtros paso bajo antialiasing para atenuar las componentes a alta frecuencia de la señal<sup>153</sup>.

<sup>151</sup>ALCIATORE, David G. & HISTAND, Michael B. Introducción a la Mecatrónica y los sistemas de medición. 3 ed. Mc Graw Hill, 2008.

<sup>152</sup>Ibid., 319.

<sup>153</sup>CORTÉS OSORIO, Jimmy A. FUNDAMENTOS Y APLICACIÓN DEL MUESTREO EN SEÑALES

Ahora, es importante involucrar tres conceptos básicos para entender el proceso de conversión analógico digital: Cuantización, Codificación y la Resolución. La cuantización se define como la transformación de una señal analógica continua, en una señal analógica discreta. El valor de cada muestra de la señal se representa mediante un valor seleccionado de un conjunto finito de valores posible. La codificación es la asignación de un código de representación binario a cada elemento de la señal analógica ya discretizada. Y la resolución determina la precisión con la que se reproduce la señal original. Se pueden utilizar 8, 16, 24, 32 bits por muestra. Mayor precisión a mayor número de bits. La resolución de un convertidor A/D se define en términos del incremento de voltaje más pequeño que causará el cambio de un bit<sup>154</sup>, es decir, es el número de bits usados para aproximar digitalmente el valor analógico. La resolución se especifica en volts y se determina por

$$Q = E_{FSR}/2^M \quad (277)$$

donde  $Q$  es el valor detectable mínimo de voltaje,  $E_{FSR}$  es el lado analógico del convertidos A/D y se especifica en términos de un intervalo de voltaje a escala total, este también es el que define el intervalo de voltaje sobre el cual operará el dispositivo. Y  $2^M$  esta definido por el lado digital en términos del número de bits de su registro.

El término *tiempo de conversión* se utiliza para especificar el tiempo que tarda el convertidor en generar una palabra digital completa cuando se ha suministrado una entrada analógica. Típicamente, el tiempo de conversión es del orden de los microsegundos<sup>155</sup>. Este depende del diseño del convertidor, el método usado para la conversión y la velocidad de los componentes empleados en el diseño de cualquier experimento.

Estas características descritas anteriormente son claves para la precisión y la confiabilidad de las aplicaciones de control computacional.

### 10.2.2.1 Tipos convertidores A/D

Estos dispositivos en conjunto con el proceso de filtración, son la etapa principal en un sistema de procesamiento de señales. Luego, el mejoramiento e innovación en esta etapa conlleva al desarrollo de sistemas de procesamiento de mayor capacidad, resolución y aplicabilidad<sup>156</sup>. La resolución de un convertidor A/D es el número de bits usados para

UBICADAS EN LAS BANDAS ALTAS DEL ESPECTRO. En: ciencia et Technica Año XIV, No 39, Septiembre de 2008. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-170. p. 3.

<sup>154</sup>FLIGLIOLA, Beasly. Mediciones Mecánicas Teoría y Diseño. 4 ed. México.: Alfaomega, 2009. p. 290.

<sup>155</sup>BOLTON, Bill. MEDICIONES Y PRUEBAS ELÉCTRICAS Y ELECTRÓNICAS. ALFAOMEGA, 1995.

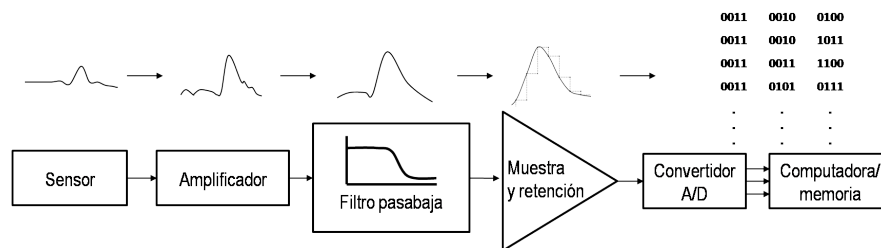
<sup>156</sup>JARAMILLO J., Iván y GARCÍA R., Antonio. DISEÑO DE UN CONVERTIDOR ANÁLOGO-DIGITAL INTEGRADO TIPO PARALELO.

aproximar digitalmente el valor analógico de la entrada.

En ingeniería y ciencias, tratamos constantemente con señales analógicas, como la fuerza aplicada sobre un viga, la tensión de la red eléctrica, la velocidad de un flujo hidrodinámico, etc. Estas señales que varían continuamente en el tiempo son analizadas y medidas a través de diversos instrumentos, que pueden ser analógicos o digitales. Los primeros hacen medidas en base a respuestas obtenidas a partir de la señal eléctrica original, como el movimiento de una aguja en un amperímetro como respuesta al campo magnético producido por una corriente directa. Los instrumentos digitales por otro lado, tales como el multímetro y el osciloscopio digital, transforman las señales eléctricas a un conjunto finito de datos para que estos sean procesados<sup>157</sup>.

En la figura 138 se muestran los componentes requeridos para la conversión A/D junto con una ilustración respectiva de sus salidas. Estos componentes deben seleccionarse apropiadamente y aplicarse en esta secuencia para adquirir adecuadamente un señal de voltaje analógico para un procesamiento digital.

Figura 138: Componentes usados en la conversión A/D.



Fuente. ALCIATORE, David G. & HISTAND, Michael B. *Introducción a la Mecatrónica y los sistemas de medición*. Editorial Mc Graw Hill. 2008. Pág. 323.

Se usan un gran número de métodos para convertir señales analógicas a la forma digital, los cuales pueden ser clasificados como:

### 10.2.2.2 No Integradores

También llamados convertidores A/D de muestreo y estos proporcionan el valor digital equivalente a la tensión en el instante en el que la señal es muestreada<sup>158</sup> y son:

<sup>157</sup> CRIADO, D., ESPINOZA, R., MUJICA, N. y MUÑOZ, R. *GUIA DE LABORATORIO: Circuitos de corriente alterna: conversión analógica-digital*. Universidad de Chile: Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Física, 2009.

<sup>158</sup> BOLTON, Bill. *MEDICIONES Y PRUEBAS ELÉCTRICAS Y ELECTRÓNICAS*. ALFAOMEGA, 1995.

- Potenciométricos.  
De aproximaciones sucesivas.  
Paralelo (flash converter).
- De conversión de tensión en tiempo (simple rampa).

### 10.2.2.3 Integradores

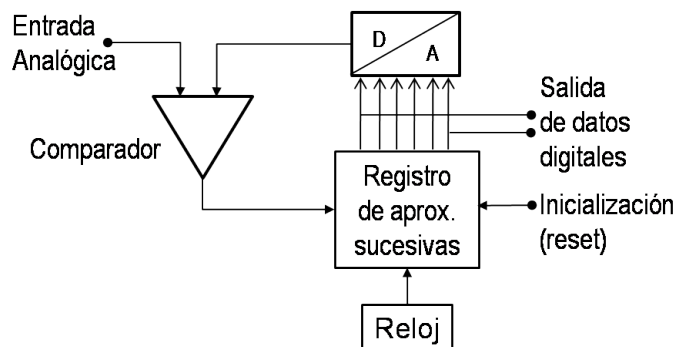
Estos son los que promedian el valor de tensión sobre un tiempo de medida fijo. Los convertidores de este tipo tardan más tiempo para dar una medida, pero tiene mejor rechazo al ruido y estos son:

- De conversión de tensión en tiempo (doble rampa).
- De conversión de tensión en frecuencia.

### 10.2.2.4 Convertidor A/D de aproximaciones sucesivas

Es una de las técnica de conversión más efectiva. Se utiliza ampliamente debido a su combinación de alta resolución y velocidad. El esquema consta de un contador dentro del registro y no es un contador secuencial de uno en uno, sino un contador programable que se incrementa o decrementa de acuerdo a la influencia del bit de mayor peso. El esquema de la figura 139, muestra este convertidor.

Figura 139: Esquema del Convertidor A/D de aproximaciones sucesivas.

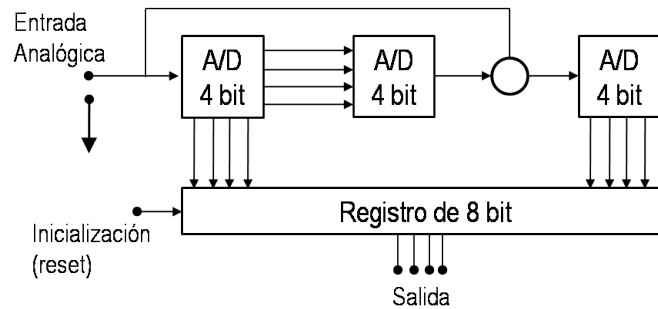


### 10.2.2.5 Convertidor Paralelo (flash converter)

Para conversiones ultrarrápidas como las requeridas en aplicaciones de procesamiento de señales de video o radar se utilizan los conversores tipo paralelo (flash o simultáneos).

Estos conversores en general no superan los 8 bits de resolución. Para una conversión de  $N$  bits, se utilizan  $2^{N-1}$  comparadores, uno para cada dígito. Tales convertidores A/D pueden tener un tiempo de conversión del orden de 10 ns. La figura 140 muestra el circuito que implementa este método de conversión.

Figura 140: Esquema de un Conversor A/D tipo paralelo.



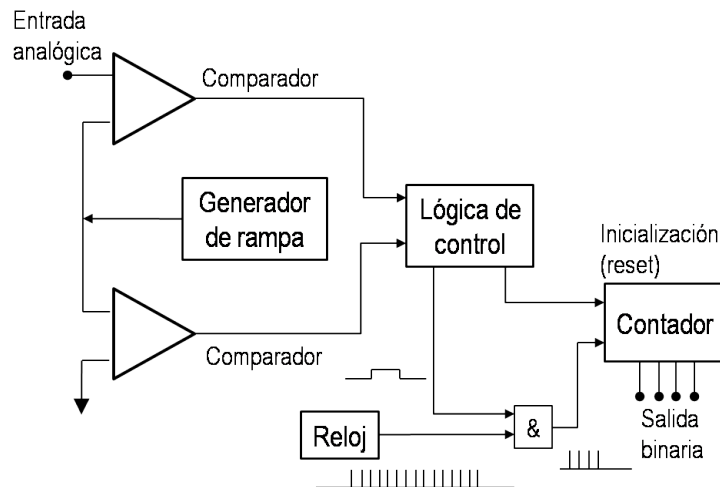
#### 10.2.2.6 Convertidor de tensión en tiempo (simple rampa)

El convertidor A/D de rampa es el más simple y el más económico de los voltímetros digitales. Este tipo de conversores utilizan métodos indirectos para transformar la señal analógica en su representación digital. Básicamente, la tensión desconocida es convertida en un tren de pulsos cuya duración se mide con un contador y un reloj (transformación del voltaje de entrada en un intervalo temporal, durante cuyo transcurso se genera proporcionalmente un número de pulsos de período constante).

Debido a la no linealidad en la forma de la rampa y su falta de rechazo al ruido, la precisión está, normalmente, limitada a  $\pm 0,05\%$ . La frecuencia de muestreo puede ser alrededor de 1000 veces por segundo<sup>159</sup>. El esquema se muestra en en la figura 141.

<sup>159</sup>BOLTON, Bill. MEDICIONES Y PRUEBAS ELÉCTRICAS Y ELECTRÓNICAS. ALFAOMEGA, 1995.

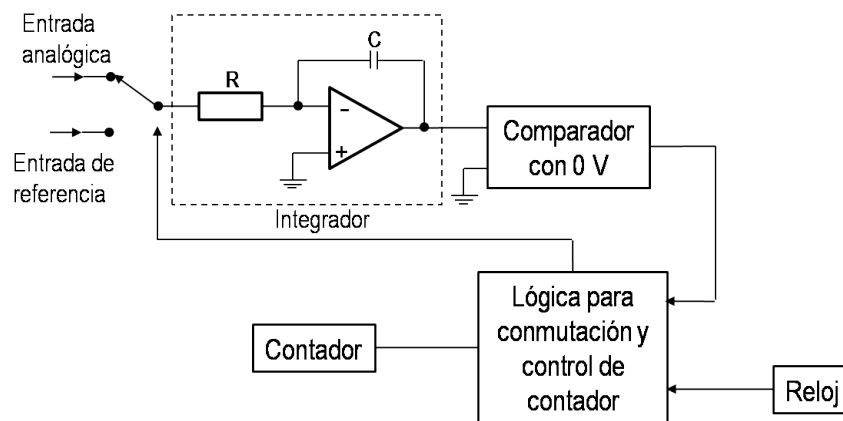
Figura 141: Esquema de un Conversor de rampa simple.



### 10.2.2.7 Convertidor de tensión en tiempo (doble rampa)

Este tipo de conversores también utilizan métodos indirectos para transformar la señal analógica en su representación digital, es decir la tensión desconocida es convertida en un pulso cuya duración se mide con un contador y un reloj. Basadas en este principio, existen diversas variantes; por ejemplo, los métodos de doble rampa, y triple rampa. De los métodos mencionados el más popular es el de doble rampa (Ver figura 142).

Figura 142: Esquema del Conversor doble rampa.



Los de tipo rampa tienen como punto fuerte la precisión, y al mismo tiempo, sólo pueden aplicarse a señales cuyo nivel oscile de forma muy lenta (un valor típico de velocidad de muestreo es de 10 muestras por segundo). Este dispositivo consiste en un integrador basado en un amplificador operacional.

Para dos entradas, la señal analógica que se va a digitalizar y una señal de referencia de valor constante. Un interruptor se encarga de que una de las dos esté conectada en todo momento al amplificador integrador. Otro interruptor se halla en paralelo con el condensador, el que permite la intervención que éste o no. El resultado de la actuación coordinada de ambos interruptores es que en la salida se obtenga una señal de doble rampa. Una de subida (la carga del condensador con la tensión analógica en la entrada) y la de bajada (con la tensión de referencia a la entrada). El cálculo de la señal digitalizada se fundamenta en la relación entre los tiempos de subida y bajada, de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\frac{t_s}{t_m} = \frac{V_{ref}}{V_a} \quad (278)$$

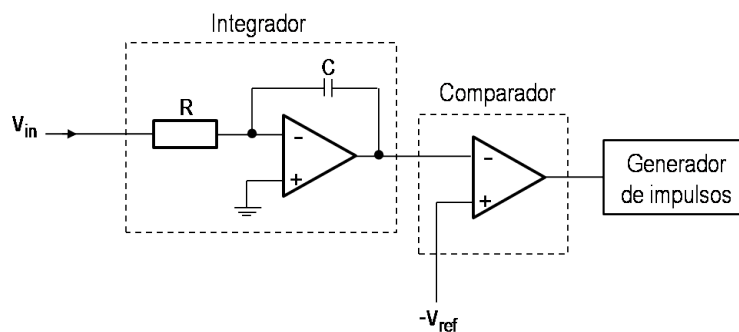
Donde  $t_s$ , es el tiempo de subida o de muestreo y  $t_m$  el de bajada o de medida,  $V_{ref}$  es la tensión de referencia y  $V_a$  es la tensión analógica. Los tiempos de muestreo y de medida son detectados por un contador que se encuentra a la salida del integrador y dependen de la resistencia, el condensador y la tensión de entrada.

Dada sus especiales características, los conversores A/D de doble rampa se utilizan, por ejemplo, en los voltímetros digitales, por su exactitud e inmunidad al ruido. Pueden alcanzar una resolución de hasta 18 o 20 bits.

### 10.2.2.8 Convertidor de tensión en frecuencia

Con el convertidor A/D de tensión-frecuencia, la tensión analógica de entrada se convierte en una colección de impulsos cuya frecuencia es proporcional al tamaño de la tensión de entrada. La frecuencia se determina entonces contando el número de impulsos existentes en un intervalo de tiempo fijo. La figura 143 muestra la forma que puede tener el elemento de tensión frecuencia.

Figura 143: *Esquema de un Conversor tensión-frecuencia.*



Se utiliza un integrador para integrar la tensión analógica de entrada  $v_{in}$ , sobre el tiempo

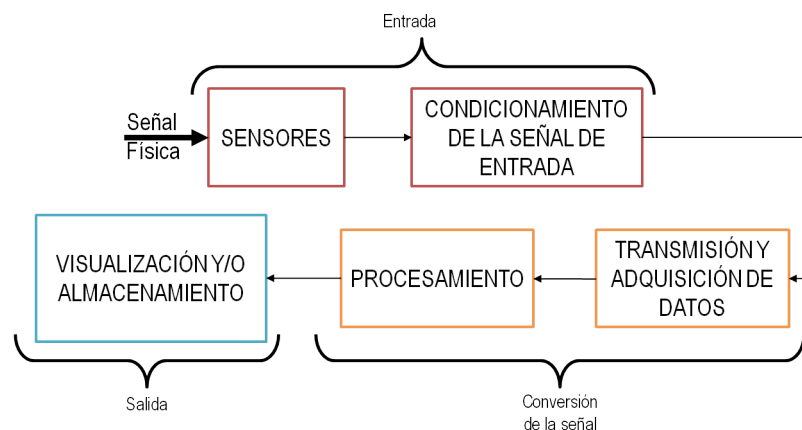
que tarda la salida del integrador para ir de 0 a  $-v_{ref}$ . Este tiempo es  $RCv_{ref}/v_{in}$ . Al final del tiempo, un generador de impulso emite un impulso simple. Como la entrada al integrador todavía presente, el proceso se repite de nuevo obteniéndose finalmente una secuencia de impulsos con una frecuencia determinada por  $v_{in}$ <sup>160</sup>.

Para concluir, una de las principales ventajas que presenta este convertidor es que posee una alta capacidad de aislamiento. También es interesante para el caso de transmisión de información a larga distancia dado que la salida ya se encuentra digitalizada.

### 10.3 SISTEMAS DE ADQUISICIÓN DE DATOS

En la actualidad se tienen diversos medios los cuales permiten medir o sensor diversas variables, como lo son temperatura, humedad, presión, luminosidad, velocidad, entre otras, por ello se necesita de elementos eficientes que permitan transmitir de forma rápida y segura estas mediciones. Los *sistemas de adquisición de datos* son la parte de un sistema de medición que cuantifica y almacena datos, y existen muchas forma para hacerlo. Estos nos ayudan a analizar información presentada en forma digital o analógica, la cual implica que con solo un cable logremos transmitir tanto datos como sea posible. La figura 144 ilustra la secuencia de los componentes que lo constituyen.

Figura 144: Sistema General de Adquisición de Datos

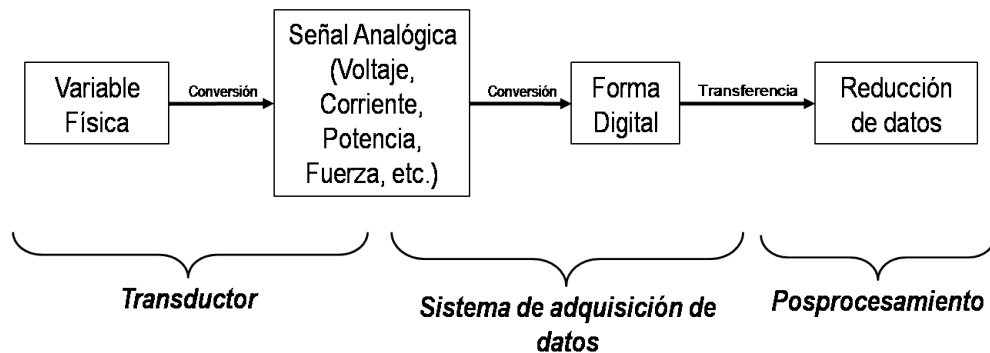


Los SAD son una herramienta de la cual se podrá valer el investigador para lograr obtener la medición de temperatura, presión, etc., y ser enviada por un *instrumento virtual*, para que estos valores sean procesados, con la interfase apropiada.

<sup>160</sup>BOLTON, Bill. MEDICIONES Y PRUEBAS ELÉCTRICAS Y ELECTRÓNICAS. Editorial ALFAOMEGA. 1995.

Un instrumento virtual consiste de una computadora personal equipada con hardware de adquisición de datos y software para realizar las funciones de los instrumentos tradicionales, las cuales realizan la digitalización y almacenamiento de datos, ofreciendo así la capacidad de interacción con el ser humano. El siguiente esquema ilustra (ver figura 145) como un SAD puede ajustarse en el esquema general de medición entre la medición real y la subsiguiente reducción de datos<sup>161</sup>.

Figura 145: Esquema de medición típico de una señal analógica.



Fuente. FLIGLIOLA, Beasley. *Mediciones Mecánicas Teoría y Diseño*. Tercera edición. Editorial Alfaomega. Pag. 279.

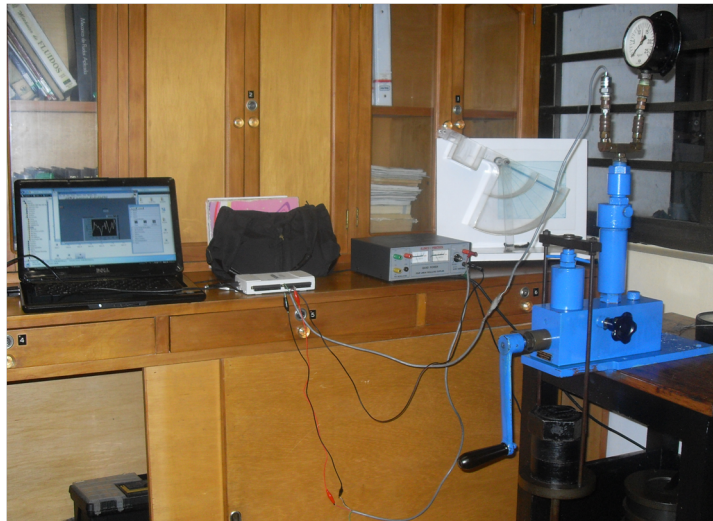
El software es el componente más importante de un instrumento virtual. Se puede usar para crear aplicaciones personalizadas al diseñar e integrar las rutinas que requiere un proceso en particular. El software también le permite crear una interfaz de usuario adecuado que se ajuste mejor al propósito de la aplicación y a los usuarios que interactuarán con ella.

El software LabVIEW de National Instrument, es un ejemplo de un entorno de desarrollo de aplicación, fácil de usar, diseñado específicamente para crear instrumentos virtuales. Éste ofrece características que facilitan la conexión a una amplia variedad de hardware y otra software. Otra característica es su entorno gráfico de programación.

Un ejemplo claro de la utilización de este software es en el experimento de Caracterización de un Transductor de Presión. El montaje para el desarrollo del experimento se puede observar en la figura 146, donde los elementos empleados para este son: Un PC portátil, tarjeta de adquisición de datos DAQ USB-6216, fuente de alimentación y el banco de pesos muertos.

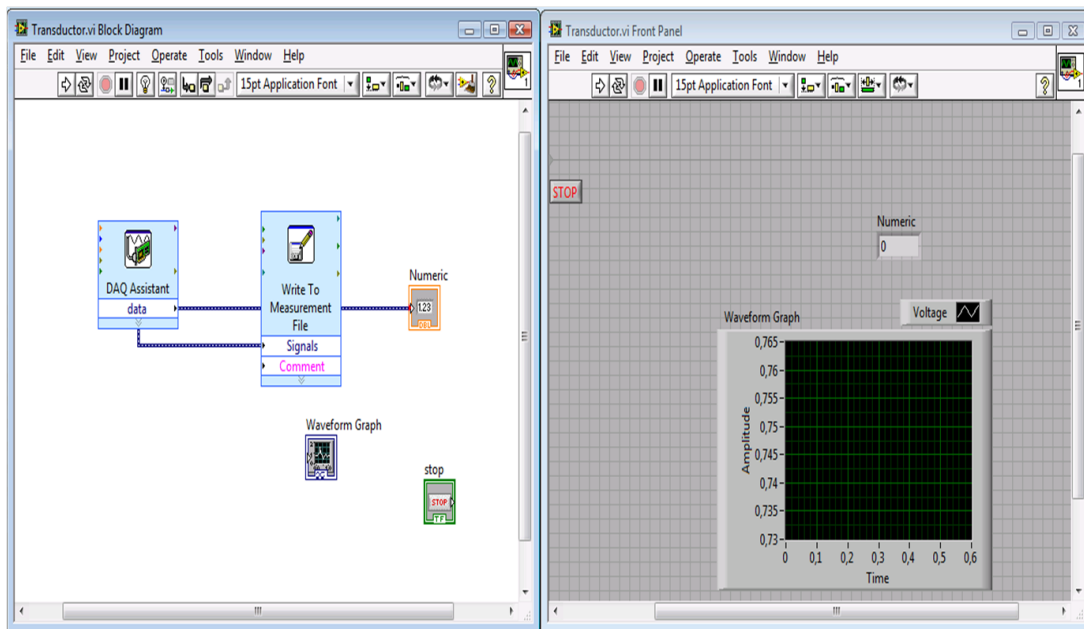
<sup>161</sup>BOLTON, Bill. *MEDICIONES Y PRUEBAS ELÉCTRICAS Y ELECTRÓNICAS*. ALFAOMEGA, 1995.

Figura 146: Banco de prueba para la Calibración de un Transductor de Presión.



En la figura 147 se muestra el programa y la interfaz gráfica que permite la conexión entre hardware y software. Este programa facilita la adquisición y almacenamiento de los datos, para el respectivo procesamiento de los datos, que se observarán en el siguiente capítulo.

Figura 147: Programa e interfaz gráfica en LabVIEW.



Otro ejemplo, es el Software Data Studio. Este permite adquirir y manipular datos tomados con las interfaces y sensores. También permite mostrar las mediciones de maneras diferentes, analiza los datos con poderosas herramientas computacionales, da la opción

de redactar informes incluyendo los datos experimentales de manera automática. Permite crear libros o apuntes electrónicos o tomar algunos de los de la librería que ofrece el software.

### **10.3.1 Características técnicas de las Tarjetas de Adquisición de Datos**

Por otra parte, para la construcción de los anteriormente mencionados instrumentos virtuales también hace parte primordial el hardware. Este está compuesto por una tarjeta de adquisición de datos, quien es la que permite la adquisición de ellos y su posterior análisis. Esto se logra a partir de una conexión al bus PCI en una computadora, estas tarjetas se diferencian por el número de muestras por segundo que pueden realizar, por el número de bits (resolución) y por el número de canales que manejan.

Las entradas a cualquier tarjeta tienen terminales ajustables con tornillos para conectar fácilmente la señal, teniendo flexibilidad adicional al manejar configuraciones múltiples de cableado. El uso común es para proyectos donde sean esenciales la economía, el tamaño pequeño, y la simplicidad, como por ejemplo, el registro de datos y el uso académico en el laboratorio.

Un ejemplo, es la tarjeta DAQ USB-6216 que tiene como características: Resolución 16 bits; Velocidad de entradas analógicas 400 K/muestras por segundo; la tarjeta trae un contador que permite contar pulsos con una velocidad máxima de 1.5 Mhz; el rango máximo de entrada está entre  $\pm 10.4$  V; se dispone de 16 canales de entrada y dos canales de salida analógicas, así como de 16 canales de entrada/salida digital. Para una descripción más detallada de las características de esta tarjeta ver Anexo A.

En general y para concluir, cuando se habla de un sistema de DAS basado en un PC, se pueden identificar 5 partes principales: El PC, el Software, Hardware de adquisición de datos, acondicionamiento de señales y los sensores. Las características de cada uno de estos componentes son parte importante del desempeño adecuado del sistema.

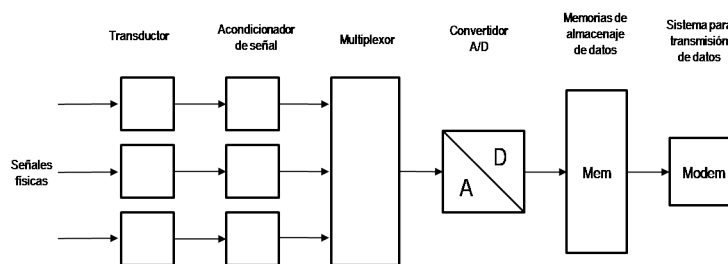
## **10.4 COMPONENTES DE UN SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE DATOS**

Evidentemente, cada experimento tiene sus particularidades, pero en general, la medición de una variable de un sistema cualquiera involucra los siguientes elementos integrantes de un Sistema de Adquisición de Datos:

- Sensores.
- Acondicionamiento de la señal.
- Filtros.
- Multiplexores.

El siguiente esquema muestra la estructura de un Sistema de Adquisición de Datos utilizado para el muestreo simultaneo de señales.

Figura 148: Esquema de flujo de la señal para un SAD automatizado



Fuente. FLIGLIOLA, Beasley. *Mediciones Mecánicas Teoría y Diseño. Tercera edición. Editorial Alfaomega. Pag. 310.*

Las señales físicas de entrada pasan por distintas etapas, hasta llegar al punto de medición del SAD. Estas se convierten en señales eléctricas de formato apropiado a través del transductor. Posteriormente se le "impone" a la magnitud transformada, es decir a la señal de salida del transductor, que cumpla con determinadas condiciones, en particular de estandarización, mediante el sistema acondicionador de señal; así se filtra y adecua (atenuando o amplificando) la señal para que los valores analógicos de fondo de escala sean similares. Si se utiliza un solo conversor A/D para todas las señales (cuando la frecuencia de muestreo lo permite), se intercala un circuito multiplexor analógico. Luego, de convertido cada valor analógico muestreado en un valor digital mediante el conversor A/D, se almacena en el grupo de memorias de almacenaje de datos (Mem). Los datos almacenados se procesan por medio del sistema administrador del SAD para obtener los parámetros deseados y visualizarlos con el sistema local de medición de señales asociado. El sistema de transmisión de datos permite monitorear o controlar desde un sistema remoto de medición de señales utilizando, por ejemplo, un PC.

### 10.4.1 Sensores

Este es un elemento en un sistema de medición que detecta la magnitud de un parámetro físico y lo cambia por una señal que puede procesar el sistema, es decir, realizan la

transición entre el mundo físico y el eléctrico. Al elemento activo de un sensor se le conoce comúnmente como transductor. Las señales de entrada pueden representar fuerza, temperatura, flujo, desplazamiento, velocidad, nivel, etc., y su equivalente eléctrico a la salida de los transductores están por lo general en la forma de tensión, corriente, resistencia o capacidad.

Los sensores mas empleados, dependiendo del experimento a desarrollar, son: Sensores de temperatura, de desplazamiento, Transductores de fuerza y presión, Detectores de luz, etc.

### 10.4.2 Acondicionamiento de la señal

La salida que proporciona el sensor no siempre se puede conectar directamente al aparato de medida. Los motivos son variados: ya sea porque la salida del sensor es débil y el instrumento no es capaz de detectarla, ya porque interesa convertir la señal de intensidad o frecuencia en voltaje, o por otras razones. Es necesario entonces “preprocesar” la señal antes de que llegue al instrumento. Los circuitos de acondicionamiento de señales mejoran la calidad de la señal generada por el transductor antes de que sean convertidas a señales digitales.

Algunos ejemplos de acondicionamiento de señal son: Amplificación, Aislamiento, Filtros y Circuitos electronicos simple (amplificador inverso y no inverso, sumador, restador, intragrador, etc.).

### 10.4.3 Amplificador.

Si la señal que entrega el transductor debe ser simplemente amplificada para llevarla de algunos milivolts al rango de fondo de escala del conversor, por ejemplo  $\pm 10$  V, basta con utilizar un *amplificador* con la ganancia adecuada. La idea de un amplificador es que aumente la amplitud de una señal sin afectar las relaciones de fase de los diferentes componentes de la señal. Cuando se elige un amplificador, se debe considerar el tamaño, costo, consumo de potencia, impedancia de entrada y salida, ganancia y ancho de banda.

Por lo general, un amplificador se modela como un dispositivo de dos puertos, con voltaje de entrada y salida referidos a tierra, como se ilustra en la figura 149.

Figura 149: Modelo de amplificador.



Fuente. ALCIATORE, David G. & HISTAND, Michael B. *Introducción a la Mecatrónica y los sistemas de medición*. Editorial Mc Graw Hill. 2008. Pág. 145.

La ganancia de voltaje de un amplificador se define como la razón de las amplitudes del voltaje de salida y de entrada:

$$A_V = \frac{V_{sal}}{V_{ent}} \quad (279)$$

La impedancia de entrada y salida de un amplificador,  $Z_{ent}$  y  $Z_{sal}$ , encuentran al medir la razón de sus respectivos voltaje y corriente:

$$Z_{ent} = V_{ent}/I_{ent} \quad (280)$$

$$Z_{sal} = V_{sal}/I_{sal} \quad (281)$$

Siempre debe tenerse en cuenta la posibilidad de utilizar otros amplificadores especiales, como los operacionales, de instrumentación y de aislación, ya que además de proveer ganancia para la señal proporcionan otras ventajas y pueden ser la opción mas adecuada desde el punto de vista económico.

#### 10.4.4 Aislamiento.

Otro acondicionamiento útil es aislar el transductor de la computadora por razones de seguridad. El equipo que se monitorea puede manejar altos voltajes que podrían dañar el sistema. Otra razón para aislar eléctricamente, es asegurar que las lecturas del transductor no se vean afectadas por las diferencias de potencial de las tierras.

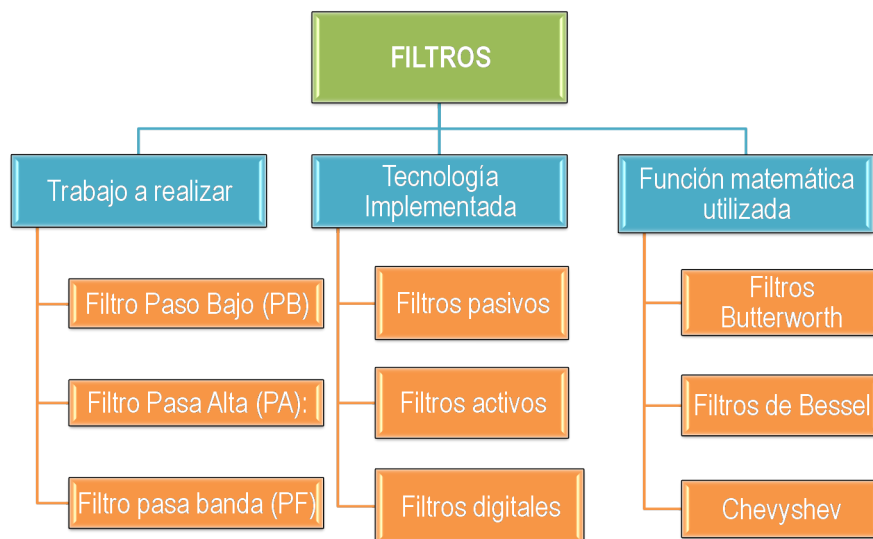
#### 10.4.5 Filtros.

Después de la etapa de amplificación de la señal, es común encontrar un filtro. Tiene como función atenuar determinadas frecuencias del espectro de la señal de entrada y permitir el paso de las demás. Las ventajas de los filtros activos son:

- Facilitan el diseño de filtros complejos mediante la asociación de etapas simples.
- Permiten eliminar las inductancias voluminosas, presentes en bajas frecuencias. Permiten agilizar y flexibilizar proyectos.
- Proporcionan una ganancia.
- Además pueden tener algunos inconvenientes como el requerir alimentación para la polarización de los amplificadores, su respuesta en frecuencia puede estar limitada al tipo de amplificador utilizado, además su utilización esta limitada a circuitos de baja potencia.

Los filtros se pueden clasificar de la siguiente manera:

Figura 150: Clases de Filtros.



#### 10.4.5.1 De acuerdo a la función o trabajo a realizar<sup>162</sup>:

**Filtro Paso Bajo (PB):** Es aquel que permite el paso de frecuencias bajas, desde frecuencia 0 o continua directa hasta una de valor determinado. Presentan ceros a alta frecuencia y polos a bajas frecuencia.

<sup>162</sup>CORTÉS O., Jimmy A. FUNDAMENTOS Y APLICACIÓN DEL MUESTREO EN SEÑALES UBICADAS EN LAS BANDAS ALTAS DEL ESPECTRO. *En: Scientia et Technica* Año XIV, No 39, Septiembre de 2008. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-170. p. 4.

**Filtro Pasa Alta (PA):** Es el que permite el paso de frecuencias desde una frecuencia de corte determinada hacia arriba, sin que exista un límite superior especificado. Presentan ceros a bajas frecuencias y polos a altas frecuencias.

**Filtro pasa banda (PF)** Es aquel que permite el paso de componentes frecuenciales contenidos en un determinado rango de frecuencias, comprendido entre una frecuencia de corte superior y otra inferior.

**Filtro elimina banda** También llamado filtro rechaza banda, es el que dificulta el paso de componentes frecuenciales contenidos en un determinado rango de frecuencias, comprendido entre una frecuencia de corte superior y otra inferior.

**Filtro multibanda** Es que presenta varios rangos de frecuencias en los cuales hay un comportamiento diferente.

**Filtro variable** Es aquel que puede cambiar sus márgenes de frecuencia.

#### 10.4.5.2 De acuerdo a su tecnología :

**Filtros pasivos:** Están contruidos por elementos pasivos como resistencias, inductancias y capacitancias, cuentan con muchas ventajas para el filtrado de señales de potencia, pero pueden ser demasiado voluminosas en el manejo de bajas frecuencias.

**Filtros activos:** Cuentan con elementos activos como los amplificadores operacionales y sus ventajas de operación permiten la construcción de filtros con muy buenas calidades.

**Filtros digitales:** Los filtros digitales convierten las señales a filtrar a señales digitales a través de conversores A/D, la señal es entonces pasada por el filtro correspondiente y finalmente se reconvierte a una señal análoga a través de un convertidor D/A<sup>163</sup>.

---

<sup>163</sup>Gonzales,J; Orozco, A . Medidas e instrumentación. <http://www.virtual.unal.edu.co>

### 10.4.5.3 De acuerdo a la función matemática utilizada para obtener una curva específica

Los filtros realizan una operación matemática bien definida, que especifica su función de transferencia en la señal de entrada.

Cada uno de ellos cuenta con una función matemática que permite aproximar la curva de respuesta a la ideal de cada tipo de filtro.

**Filtro Butterworth:** La función de transferencia del filtro en función de la ganancia  $K_{pb}$  a  $w = 0$ , la frecuencia de corte y el orden del filtro  $n$  es:

$$|H(jw)| = \frac{K_{pb}}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{w_c}\right)^{2n}}} \quad (282)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

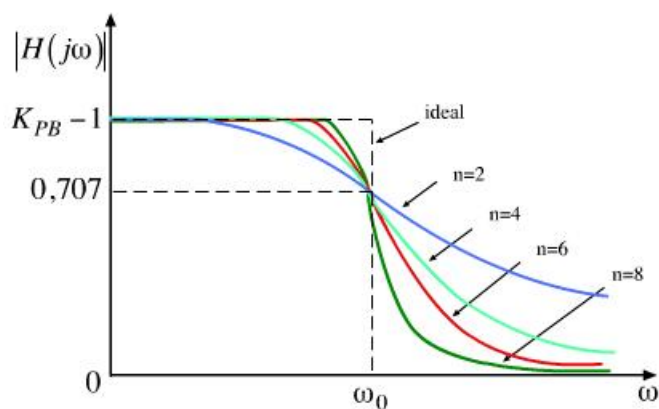
El orden del filtro tiene que ver con el número de polos de la función de transferencia o con el número de redes presentes en la estructura. Mientras mayor sea el orden del filtro más aproximada será su respuesta a la respuesta ideal del filtro (figura 151).

Si la frecuencia  $w$  es mucho mayor que la frecuencia de corte, puede demostrarse que la atenuación del filtro viene dada por:

$$\text{Atenuación} = -20 * n * \log\left(\frac{w}{w_c}\right) \quad (283)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Figura 151: Filtro Butterworth.



Fuente: Gonzales, J. y Orozco, A . Medidas e instrumentación.

**Filtro Chebyshev:** Como pudo observarse para frecuencias de cercanas a las de corte la respuesta del filtro Butterworth no es aceptable, especialmente si el filtro es de orden bajo. Los filtros Chebyshev poseen mejor respuesta para este tipo de frecuencias pero presentan un rizado (*RIPPLES*) en la banda pasante<sup>164</sup>. La función de transferencia dada por Chebyshev es:

$$|H(jw)| = \frac{K_{Pb}}{\sqrt{1 + E^2 C_n^2 \left(\frac{w}{wc}\right)}} \quad (284)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$0 < E \leq 1$$

Donde

$K_{pb}$ : es la ganancia del filtro cuando la frecuencia es cero.

$wc$ : es la frecuencia de corte

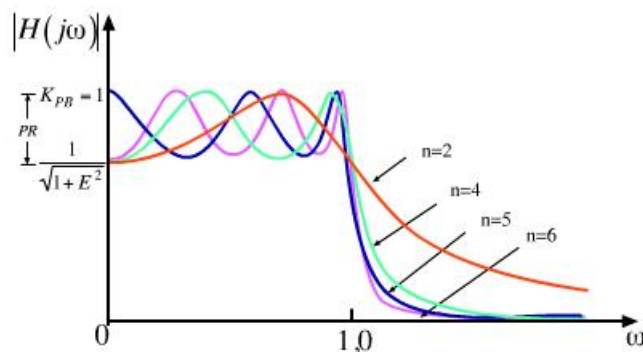
$E$ : Constante que determina la amplitud del rizado

$C_n$ : Polinomio de Chebyshev

El Polinomio de Chebyshev esta dado por:

$$C_n(w) = \cos(n * \arccos * \cos w) \quad (285)$$

Figura 152: Filtro de Chebyshev



El número de rizados presentes en la banda de paso es igual al orden del filtro y su amplitud depende del parámetro E.

$$E = \sqrt{10^{PR/10} - 1} \quad (286)$$

<sup>164</sup>Gonzales,J; Orozco, A . Medidas e instrumentación. <http://www.virtual.unal.edu.co>

El porcentaje de atenuación del filtro Chebyshev puede encontrarse a partir de la siguiente expresión.

$$AT = -20\log E - 6(n - 1) - 20\log\left(\frac{w}{w_c}\right) \quad (287)$$

Donde:

n: Orden del filtro. E: Constante que determina la amplitud del rizado.  $w_c$ : Frecuencia de corte.

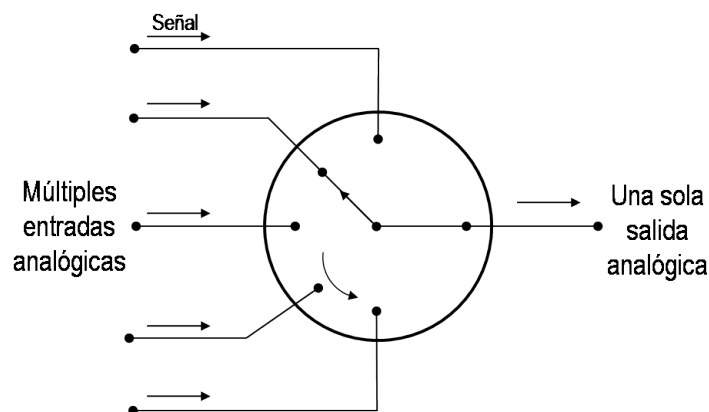
Y donde la amplitud de los rizados está dada por:

$$PR(dB) = 20\log\sqrt{1 + E^2} \quad (288)$$

### 10.4.6 Multiplexores.

El multiplexor es un interruptor de múltiples puertos que permite que varias líneas de entrada analógica se conecten a un línea de salida común. Los multiplexores analógicos (ver figura 153) son circuitos que permiten compartir un convertor A/D entre varios canales analógicos. Dado que el convertor A/D es en la mayoría de los casos el componente más costoso del sistema de adquisición, la opción de multiplexar las entradas analógicas al convertor es una de las soluciones más económicas.

Figura 153: *Multiplexor.*



Fuente. FLIGLIOLA, Beasley. *Mediciones Mecánicas Teoría y Diseño. Tercera edición. Editorial Alfaomega. Pag. 282.*

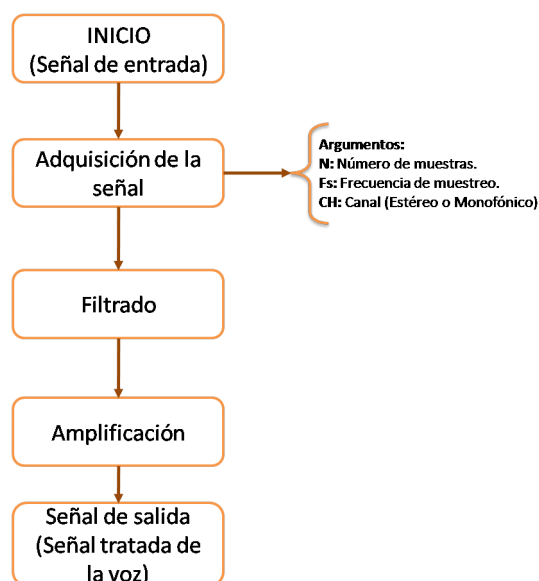
## 10.5 CASO DE ESTUDIO: PROCESO DE ADQUISICIÓN DIGITAL Y ANÁLISIS DE DATOS. MEDICIÓN Y ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE UN SONIDO.

Los beneficios proporcionados por los sistemas de adquisición de datos en este experimento son la obtención de datos precisos y fiables a la hora de adquirir la señal (sonido). En este experimento el uso del sistema de adquisición de datos como una herramienta de trabajo permite mejorar la calidad de la información adquirida, ya que mediante el uso de amplificadores, filtros y aislamientos se puede procesar y analizar la señal de interés. Para este caso, la señal de interés es el sonido de la voz.

Actualmente, la integración de hardware y software permite mayor control sobre el experimento bajo prueba y mayor precisión en la toma de datos (las lecturas al ser realizadas a criterio del ojo humano pueden conducir a errores en los resultados), y la unión adicional a un computador ofrece ventajas anexas como alta capacidad de almacenamiento y de procesamiento de datos<sup>165</sup>.

A continuación, en la figura 154 se ilustrará el procedimiento empleado para la adquisición, procesamiento y análisis de la voz, como señal de interés para este caso de estudio.

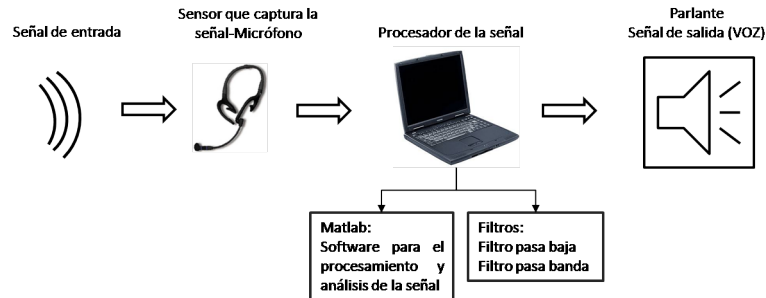
Figura 154: Diagrama de flujo para la Adquisición de la señal



<sup>165</sup>TOVAR, E. & QUIÑONES, C. Un Instrumento Virtual Sencillo de Adquisición de Datos y Control de Temperatura para la Determinación Experimental de Calores de Vaporización. En: Revista Colombiana de Física. 2008.

Existen elementos importantes para el Sistema de Adquisición de Datos. En la figura 155 se muestra el proceso y los elementos que componen este caso de estudio.

Figura 155: Sistema de adquisición de datos para una señal de voz.



El procedimiento empleado para la adquisición y procesamiento de un sonido usando como herramienta computacional Matlab comprende los siguientes items:

1. Entrar al entorno de MATLAB para utilizar las herramientas que esta ofrece, para este caso, el procesamiento de la voz. Las funciones empleadas son: *WAVRECORD*, *WAVPLAY* y *SPTOOL*.

- **WAVRECORD** es una función usada para la grabación de sonido empleando el dispositivo de entrada de audio de Windows. En la ventana de comando se escribe la función de la siguiente manera:

$$Y = WAVRECORD(N, FS, CH)$$

donde N es el tiempo de duración de la voz multiplicado por la frecuencia de muestreo (FS), y CH el número de canales de entrada del dispositivo de audio de Windows WAVE. Los valores estandares de audio FS son: 8000, 11025, 22050 y 44100 Hz. Y para el CH pueden ser 1 o 2, es decir, monofonico o estéreo, respectivamente.

- **wavplay** es un comando que permite escuchar el sonido usando el dispositivo de salida de audio de Windows. La función para este es:

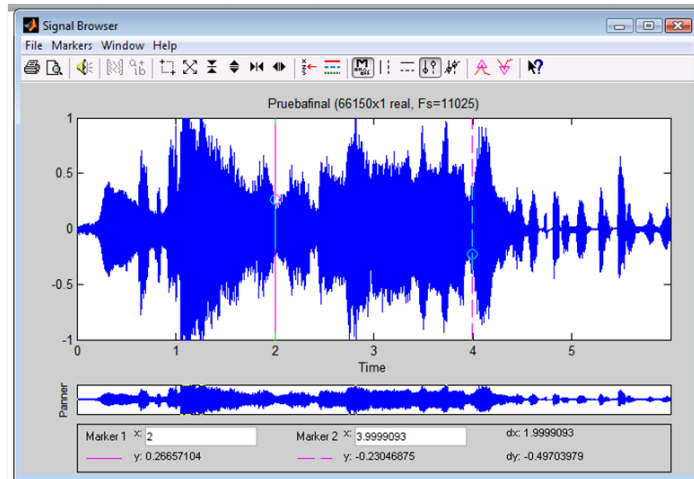
$$WAVPLAY(Y, FS)$$

- Y **sptool** es empleado como una herramienta para el procesamiento de Señales - Interfaz gráfica de usuario. Este comando abre la ventana que permite importar, analizar y manipular señales, filtros y espectros.

2. Grabar la voz usando *WAVRECORD* y reproducción de la misma con *WAVPLAY*.

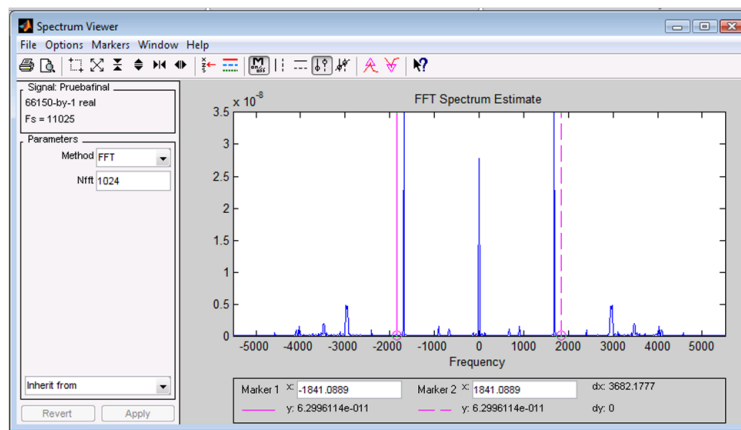
3. Comenzar el procesamiento de la señal usando filtros para lograr el objetivo: “eliminar ruido”.

Figura 156: Adquisición y reproducción del sonido. Señal sin tratamiento.



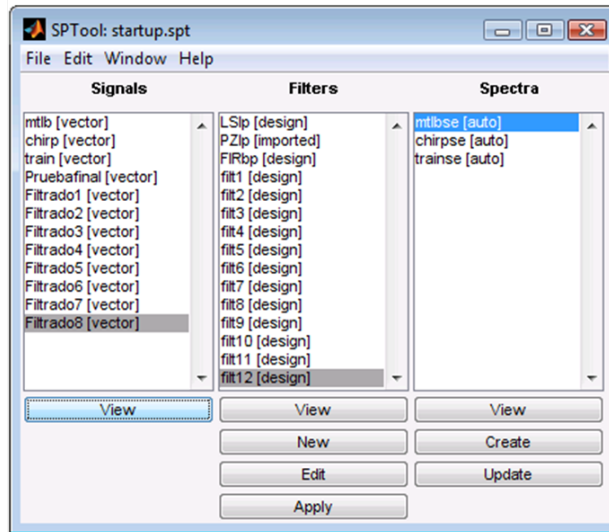
Para una eficaz eliminación del ruido se debe observar el comportamiento de la señal figura 156, este se puede lograr teniendo el espectro de la misma como se ve en la figura 157 .

Figura 157: Espectro de la señal sin tratamiento.



4. Diseño del filtro o filtros necesarios para la eliminación del ruido. Esto se logra en la interfaz gráfica del comando Sptool como se observa en la figura 158.

Figura 158: Interfaz Gráfica

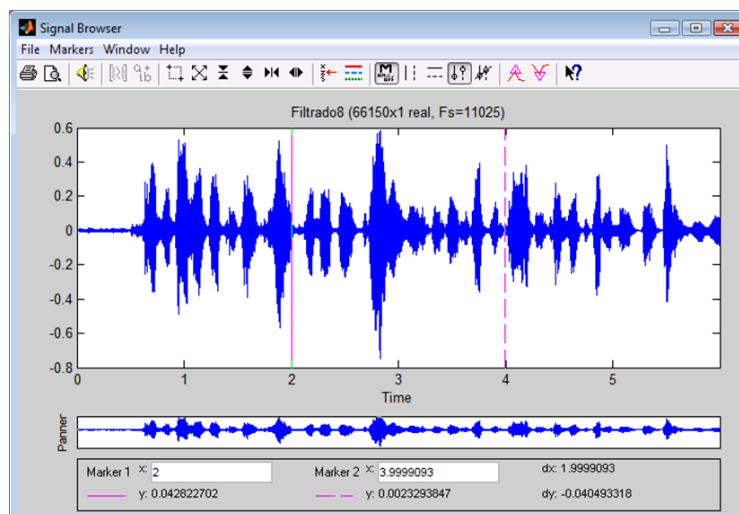


Para el diseño del filtro se debe tener un conocimiento previo de la frecuencia a la que se encuentra el ruido. Para este ejemplo, una de las frecuencias que se filtraran y que puede ocasionar la distorsión de la voz, son aproximadamente: 0 a  $\pm 70$  y  $\pm 1860$  Hz.

Los filtros empleados para cumplir con el objetivo son: Pasabanda y pasabajas.

5. Finalmente, despues de aplicados los filtros a la señal adquirida inicialmente, se obtiene otra señal, mas nitida, que cumple con el requisito u objetivo, que es el de un sonido de voz mas clara y limpia. La figura ilustra 159 como finalmente queda la señal de la voz despues de haber sido tratada.

Figura 159: Señal de una voz



Como conclusión de esta experiencia, se puede decir que la adquisición de datos a través de tarjetas incorporadas en un CP portátil usando Matlab, permite conectarnos en tiempo real con procesos analógicos en forma simple. Sólo se requiere que las tarjetas del PC sean reconocida por Matlab.

Matlab reconoce los sistemas de adquisición de datos de la mayoría de fabricantes conocidos.

## 10.6 ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRE

### 10.6.1 Incertidumbre

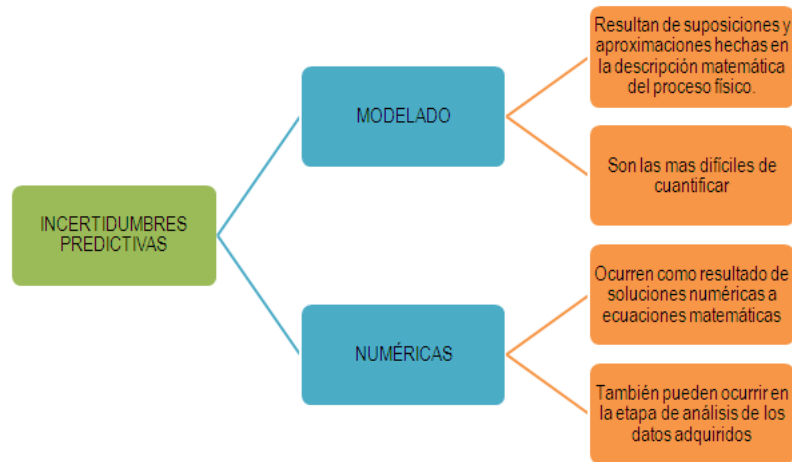
Aristóteles abordó por primera vez el concepto de incertidumbre hace cerca de 2300 años cuando ponderó la certeza de un resultado. Sin embargo, no fue sino hasta finales del siglo XVIII que los científicos consideraron los efectos cuantificables de los errores en las medidas. Desde entonces se han presentado avances continuos en la caracterización de la incertidumbre. La ANSI/ASME, NCSL, AIAA han desarrollado nuevos estandares en base a el estandar Internacional de Incertidumbre Experimental realizado por la ISO, que difiere de los demas en la nomenclatura usada, en el estandar ISO se denominan errores Tipo A y Tipo B en vez de errores aleatorios y sistematicos, respectivamente.

Cuando un proceso físico es cuantificado, se pueden presentar incertidumbres asociadas con el modelado y simulación y/o con las mediciones. Las incertidumbres de modelado y simulación ocurren durante las fases de modelado conceptual del sistema físico, modelado matemático del modelo conceptual, discretización y selección del algoritmo para el modelo matemático, programación del modelo discreto, solución numérica del modelo programado, y representación de la solución numérica<sup>166</sup>. Las incertidumbres predictivas (modelado y simulación) pueden subdividirse en incertidumbres de modelado y numéricas. La figura 160 da una idea general de la clasificación de las incertidumbres predictivas y la causa por la que se presenta cada una de ellas.

---

<sup>166</sup>DUNN, Patrick. Measurement & Data Analysis for Engineering & Science. 1 ed. University of Notre Dame, Indiana, USA.: McGraw-Hill, 2005

Figura 160: Tipos de incertidumbre



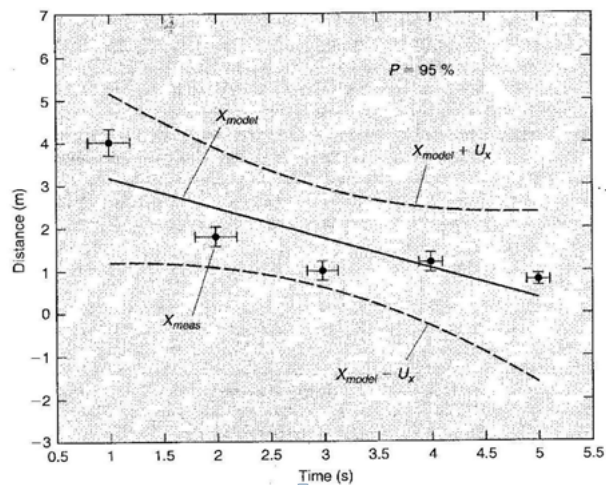
Por convención, el valor reportado de  $x$  es expresado con la misma precisión que su incertidumbre  $u_x$ , tal como  $1.25 \pm 0.05$ . La magnitud de  $u_x$  depende de la confianza asumida, las incertidumbres que contribuyen a  $u_x$ , y cómo se combinan dichas incertidumbres.

### 10.6.2 Comparación entre teoría y mediciones

Convencionalmente, la incertidumbre experimental es denotada en una presentación gráfica por barras de error centradas en los valores de medición y la incertidumbre de modelado por curvas punteadas a ambos lados de la curva teórica. Ambas incertidumbres deben ser estimadas con la misma confianza estadística.

La figura 160 permite tener una idea más clara de lo dicho anteriormente, cuando todos los puntos de datos y sus barras de error están dentro de las curvas de incertidumbre del modelo, se dice que el experimento y la teoría están completamente de acuerdo dentro de la confianza asumida, si algunos puntos de datos y parte o todas sus barras de error están dentro de las curvas de incertidumbre predictiva, se dice que el experimento y la teoría están parcialmente de acuerdo dentro de la confianza asumida; no hay acuerdo cuando todos los puntos de datos y sus barras de error están por fuera de las curvas de incertidumbre predictiva.

Figura 161: Presentación gráfica de una comparación entre resultados predictivos y experimentales



Fuente: Shedd, T. Measurements Lab, pag. 269

Se debe resaltar que el acuerdo entre teoría y experimento no implica exactitud necesariamente, pues se puede presentar que una mala teoría puede concordar con malos datos, también se puede presentar que una teoría equivocada puede estar de acuerdo con un buen experimento por simple coincidencia; otra posibilidad puede suceder cuando una teoría correcta no concuerda con el experimento debido a la presencia de variables imprevistas no consideradas o no controladas durante el experimento. Es muy importante escoger muy bien los argumentos, debido a que la mayoría de experimentos se hacen con el fin de comprobar o rechazar una hipótesis en particular mientras se ignoran otras hipótesis, así que se pueden estar despreciando factores y detalles importantes que podrían llevar a una conclusión diferente.

### 10.6.3 Error en el proceso de medición

El proceso de medición experimental introduce por sí mismo errores sistemáticos y aleatorios<sup>167</sup>. El error aleatorio arrojado de una serie de mediciones repetidas en un experimento en el tiempo que se hace bajo condiciones estables, es el resultado de factores pequeños incontrolables que de alguna manera influyen en los valores de medición debido a que varían durante el experimento, aunque existen algunos factores que no varían en tiempos cortos, si lo hacen sobre periodos largos; razón suficiente para considerar el efecto del intervalo de tiempo de medición.

<sup>167</sup>DUNN. Op. cit., p. 269.

Figura 162: Errores derivados del proceso experimental



En el experimento análogo muestra-a-muestra, el error aleatorio resulta por la variabilidad del sistema de medición muestra-a-muestra como de las variaciones debidas a factores pequeños incontrolables durante el proceso de medición. Los errores que no se relacionan directamente con los errores del sistema de medición pueden identificarse repitiendo y replicando un experimento. Los diferentes niveles de replicación en un experimento permiten identificar varios tipos de errores, por ejemplo: en el nivel de replicación de orden cero, solo se encuentran los errores inherentes al sistema, lo cual equivale a condiciones absolutamente estables en un experimento en el tiempo o a una única muestra fija en un experimento muestra-a-muestra; en el nivel de replicación de orden  $n$ , se consideran errores sistemáticos más allá del nivel de primer orden.

#### 10.6.3.1 Fuentes de error.

Las fuentes de error se agrupan de acuerdo a los tres fases fundamentales en un sistema de medición, de ahí que se tengan: Errores de calibración, errores en la adquisición de datos y errores en la reducción de datos.

**Errores de Calibración.** La calibración no elimina, reduce a valores aceptables los errores del sistema de medición, los tipos de errores que se presentan en esta fase pueden

ser sistemáticos o aleatorios. Estos tipo de errores entran mediante dos fuentes: la primera son los errores de sesgo y precisión en el estándar usado en la calibración y la segunda es la manera en que se aplica el estándar al sistema de medición o componentes del sistema.

La incertidumbre propagada de la calibración contra un estándar más preciso aún refleja la incertidumbre de ese estándar. El orden de los estándares en términos del aumento de los errores de calibración procede del estándar principal a través de estándares entre laboratorios, de transferencia y funcionales. Típicamente, la incertidumbre de un estándar usado en una calibración es tratada como un error sistemático fijo en esa calibración y en cualquier cálculo de incertidumbre posterior.

En la tabla 163 se citan algunos errores elementales comunes que hacen parte de este fase de medición.

Figura 163: Error elementales de calibración

Elemento	Fuente de error
1	Del estándar primario al de interlaboratorio
2	Del estándar de interlaboratorio al de transferencia
3	Del estandar de transferencia al de laboratorio
4	Del estandar de laboratorio al sistema de medición
5	Técnica de calibración

**Errores en la reducción de datos.** Los errores de reducción de datos salen de métodos computacionales, tales como un análisis de regresión de los datos, y de usar diferencias finitas para aproximar derivadas e integrales; también son consecuencia de las técnicas y métodos usados en el experimento, éstas pueden incluir incertidumbres de efectos ambientales no controlados, ubicación inexacta del sensor, perturbación del proceso bajo investigación debido a los instrumentos, variabilidad operacional, ajuste de la curva de calibración, etc.

### 10.6.3.2 Errores de Sesgo y Errores de Precisión.

Para un análisis completo de errores, se deben tener en cuenta los elementos que contribuyen al error en una medición particular, por lo tanto se pueden hacer ciertas generalizaciones de fuente de error para ayudar a su identificación. Existen dos categorías que agrupan los errores de medición: Errores de sesgo y errores de precisión, las mediciones mal hechas no se consideran, de ahí que dichos datos se deben descartar. Debido a los errores, la exactitud de una medición nunca puede ser certera, por lo tanto el mejor

estimado del valor verdadero en una medición es el que proporciona el valor medio de la muestra y la incertidumbre:

$$x = \bar{x} \pm u_x \quad (289)$$

El método por el cual se cuantifica el término  $u_x$  es llamado *Análisis de Incertidumbre*.

**Errores sistemáticos (de sesgo):** Los errores sistemáticos algunas veces son difíciles de detectar y pueden ser encontrados y minimizados a través de una cuidadosa calibración, que involucra la comparación con un valor verdadero conocido. Determinan la precisión de la medición, además, carecen de cualquier información estadística. El error sistemático es la diferencia entre el valor medio real y el valor medio de la muestra. En otras palabras, si la estimación de una cantidad no es igual al valor actual de la cantidad, entonces la cantidad es sesgada. La incertidumbre sistemática puede ser tratada asumiendo que los errores sistemáticos permanecen constantes, su estimación involucra el uso de estadística. Se asume que los errores sistemáticos siguen una distribución Gaussiana. La incertidumbre sistemática (límite de parcialidad) en el valor de  $x$  es denotada por  $B_x$ . El valor de  $B_x$  tiene una confiabilidad de  $\Delta B_x$ . Típicamente, un fabricante proporciona un valor para la precisión de un instrumento. Este número se asume como  $B_x$ . El valor de la confiabilidad es una estimación de la precisión y es expresado en unidades de  $B_x$ . Por lo tanto, entre menor sea su valor, mayor confianza en el valor reportado de la precisión. Formalmente, la incertidumbre sistemática en el valor de  $x$  es:

$$B_x = t_{v_{B_x}, C} \cdot S_{B_x} \quad (290)$$

Donde  $S_{B_x}$  es la desviación estándar del error sistemático. Los grados de libertad para la incertidumbre sistemática en  $x$  son:

$$v_{B_x} \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta B_x}{B_x} \right)^{-2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta S_{B_x}}{S_{B_x}} \right)^{-2} \quad (291)$$

La cantidad  $\frac{\Delta B_x}{B_x}$  es determinada la incertidumbre sistemática relativa de  $B_x$ . Mayor certeza en la estimación de  $B_x$  implica un  $\Delta B_x$  menor y, por lo tanto, un mayor  $v_{B_x}$ . Una certeza del 100 % corresponde a  $v_{B_x} = \infty$ . Esto significa efectivamente que se necesita un número infinito de mediciones para asumir una certeza del 100 % en el valor declarado de  $B_x$ .

**Errores aleatorios (de precisión):** Resultan de un gran número de efectos muy pequeños incontrolables que son independientes uno del otro y con cada uno influenciando a la magnitud a medir. Los errores aleatorios están relacionados con la dispersión en

los datos obtenidos bajo condiciones fijas. Determinan la precisión, o repetibilidad, de la medición. El error aleatorio es la diferencia entre un límite de confianza (superior o inferior) y el valor medio de la muestra. Este límite de confianza es determinado de la desviación estándar de los valores medidos, el número de mediciones, y el porcentaje de confianza asumido. Los errores aleatorios son estadísticamente cuantificables. Pueden reducirse repitiendo las medidas y controlando cuidadosamente las condiciones. Es razonable asumir que los errores aleatorios resultantes seguirán una distribución Gaussiana. Esta distribución se caracteriza a través de la media y la desviación estándar del error aleatorio. Debido a que la incertidumbre es una estimación del error en una medición, puede ser caracterizada por la desviación estándar del error aleatorio. Formalmente, la incertidumbre aleatoria (límite de precisión) en el valor de  $x$  es:

$$P_x = t_{v_{P_x}, C} \cdot S_{P_x} \quad (292)$$

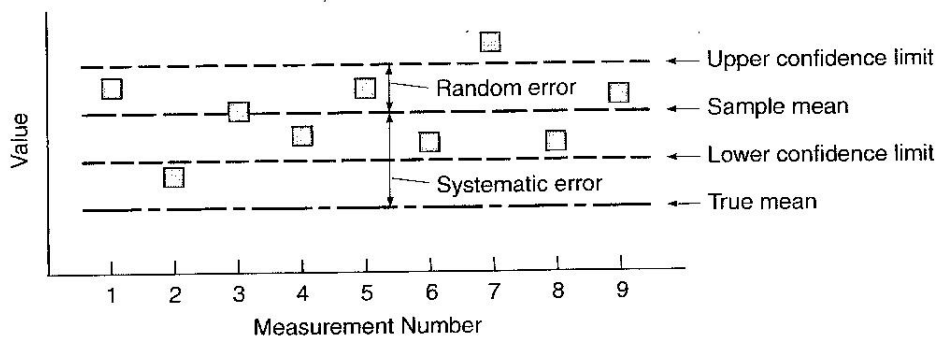
Donde  $S_{P_x}$  es la desviación estándar del error aleatorio,  $t_{v_{P_x}, C}$  es la variable Estudiante  $t$  basada en  $v_{P_x}$  grados de libertad, y  $C$  es el porcentaje de confianza. De la misma manera, la incertidumbre aleatoria en el valor promedio de  $x$  determinada de  $N$  mediciones es:

$$P_{\bar{x}} = t_{v_{P_x}, C} \cdot S_{P_{\bar{x}}} = t_{v_{P_x}, C} \cdot \frac{S_{P_x}}{\sqrt{N}} \quad (293)$$

Usualmente la ecuación para  $P_x$  es usada para experimentos que involucran una única medición de la magnitud de interés, y la ecuación de  $P_{\bar{x}}$  para múltiples mediciones. Los grados de libertad para la incertidumbre aleatoria en  $x$  son:

$$v_{P_x} = N - 1 \quad (294)$$

Figura 164: Experimento con nueve valores registrados



#### 10.6.4 Análisis de Incertidumbre en la etapa de diseño

El análisis de incertidumbre en la etapa de diseño se refiere al análisis que se realiza antes de la medición, es útil para la selección de instrumentos y técnicas de medición, así como para obtener una estimación aproximada de la incertidumbre probable en los datos medidos. En esta etapa, es difícil distinguir entre errores de sesgo o precisión, pero se deben considerar como fuente de incertidumbre.

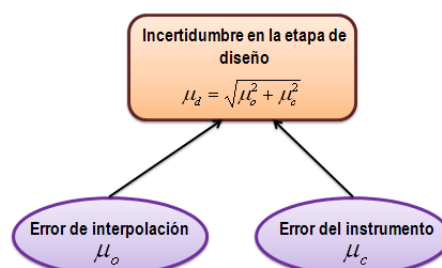
En un sistema de medición, se cuentan con sensores e instrumentos que hacen una contribución individual a la incertidumbre del sistema que no pueden pasar inadvertidas, por lo tanto lo primero que se debe hacer en un análisis de la etapa de diseño es determinar la mínima incertidumbre como resultado de la medición en el valor medido.

Aun cuando todos los errores fueran diferentes que cero, el valor del mesurando debe afectarse por la habilidad para discriminar o resolver la información que proporciona el instrumento, esto se llama *Incertidumbre de orden cero del instrumento*,  $u_0$ . Sin embargo, se debe establecer un medio que permita estimar los efectos de más de un error, el método de raíz de la suma de los cuadrados (RSS) por sus siglas en inglés root-sum-squares, es la forma más aceptada de combinar dichos errores.

El método RSS de la combinación de errores, se basa en la consideración de que las posibles variaciones en los valores de un error en mediciones repetidas tenderán a seguir una distribución gaussiana. Como tal, la estimación RSS de todos los errores que contribuyen debería dar una media probable del error en cualquier medición .

Aunque una buena forma de estimar el error en la medición es mediante una simple suma de los errores elementales lo cual proporcionaría un estimado mayor del posible error, el método RSS asume que todos los errores pueden ocurrir de la peor manera posible para cada una y todas las mediciones. En la figura 165 se puede observar los dos parámetros que influyen en el análisis de incertidumbre en la etapa de diseño como lo son el error de interpolación y el error del instrumento.

Figura 165: Procedimiento de la incertidumbre en la etapa de diseño.



Fuente: *Mediciones mecánicas teoría y diseño*. Figliola-Beasley, pag.165.

**Ejemplo 10.1** (*Ejemplo 5.2 Figliola. Mediciones mecánicas*) El voltímetro se emplea para medir la salida de un transductor de presión que genera una señal eléctrica. La presión nominal esperada será  $\sim 3\text{psi}$  ( $3\text{ lb/pulg}^2$ ). Estime la incertidumbre de la etapa de diseño en esta combinación. Se dispone de la siguiente información:

- Voltímetro: Resolución:  $10\ \mu\text{V}$       Exactitud: dentro de  $0.001\%$  de la lectura.
- Transductor: Intervalo:  $\pm 5\text{psi}$       Sensibilidad:  $1\text{V/psi}$       Voltaje de entrada:  $10\text{V}$  cd  $\pm 1\%$       Salida:  $\pm 5\text{V}$       Linealidad: dentro de  $2.5\text{mV/psi}$  sobre el intervalo      Repetibilidad: dentro de  $2\text{mV/psi}$  sobre el intervalo.      Resolución despreciable.
- Consideración: Valores representativos del instrumento a la probabilidad del  $95\%$

**Solución:**

- Para el voltímetro se tiene:

$$(u_0)_V = \pm 1/2 \times 10 = \pm 5\ \mu\text{V}$$

$$(u_c)_V = \pm (3\text{V} \times 0,00001) = \pm 30\ \mu\text{V}$$

$$(u_d)_V = \pm \sqrt{u_0^2 + u_c^2} = \pm 30,4\ \mu\text{V} = \pm 0,030\text{mV}$$

- Para el transductor se tiene:  $(u_d)_t = \pm \sqrt{(2,5\text{mV/psi} \times 3\text{psi})^2 + (2\text{mV/psi} \times 3\text{psi})^2} = \pm 9,61\text{mV}$
- La incertidumbre en la etapa de diseño está dado por:  $u_d = \pm \sqrt{(u_d)_V^2 + (u_d)_t^2} = \pm \sqrt{(0,030)^2 + (9,61)^2} = \pm 9,61\text{mV}$

En esencia la incertidumbre se debe al transductor, un mejor voltímetro no mejoraría la incertidumbre en la medición, por lo tanto si se desean mejores resultados de presión se debe encontrar un mejor transductor.

### 10.6.5 Análisis de incertidumbre en la medición.

Este análisis incluye la identificación de todos los errores que se presentan en cada una de las etapas del experimento y como se extienden dichos errores en la incertidumbre total de un resultado deseado. El objetivo específico del análisis de incertidumbre es obtener

un valor de la incertidumbre total,  $u_x$ , de la variable,  $x$ . Para el caso de una única medida o resultado basado en  $x$ , esto es expresado como:

$$x_{next} = x \pm u_x(\%C) \quad (295)$$

En la que la estimación es obtenida con un porcentaje de confianza. Para el caso de una medición múltiple o resultado basado en  $x$ , esto se convierte en:

$$x_{true} = \bar{x} \pm u_x \quad (296)$$

En donde  $\bar{x}$  denota el promedio de la muestra de  $x$ . Para cualquier caso, la incertidumbre total,  $U_x$ , puede expresarse como:

$$u_x = k \times u_c \quad (297)$$

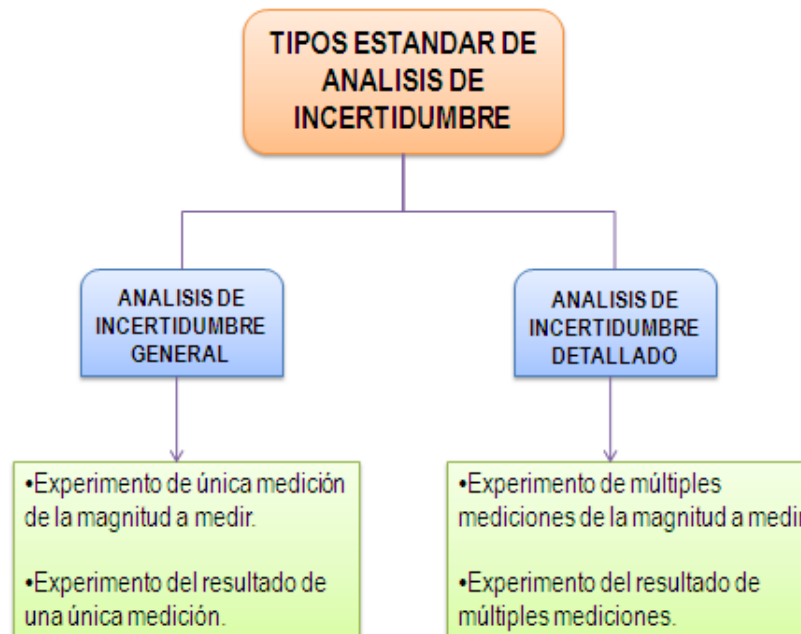
Donde  $k$  es el factor de cobertura y  $u_c$  la incertidumbre estándar combinada. De acuerdo a las directrices ISO, el factor de cobertura es representado por la variable de Estudiante  $t$  que está basada en el número de grados de libertad efectivos, quedando la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$u_x = t_v \times u_c \quad (298)$$

Lo anterior asume un error en la medición normalmente distribuido con varianza  $\sigma^2$  y media cero lo que implica que todos los errores sistemáticos significativos han sido identificados y eliminados del sistema de medición antes de adquirir los datos. Cómo estas incertidumbres contribuyen a la incertidumbre estándar combinada y cómo determinan  $v_{eff}$  depende del tipo de situación experimental encontrada. El valor de  $v_{eff}$  es determinado conociendo los valores de  $v_{p_x}$  y  $v_{B_x}$  dados por las ecuaciones 9.12 y 9.14, respectivamente.

### 10.6.6 Tipos estandar de análisis de incertidumbre.

Figura 166: Tipos de análisis de incertidumbre



**10.6.6.1 Análisis de incertidumbre general:** Es un enfoque simplificado que considera cada incertidumbre total de la magnitud a medir y su propagación en el resultado final. No considera los errores sistemáticos y aleatorios específicos que contribuyen a la incertidumbre total. Ayuda a identificar fuentes de error y su contribución a la incertidumbre total; también ayuda en determinar si un sistema de medición en particular es apropiado para un experimento planeado o no.

**10.6.6.2 Análisis de incertidumbre detallado:** Es un acercamiento más completo que identifica los errores sistemáticos y aleatorios que contribuyen a la incertidumbre total de cada magnitud a medir, la propagación de los errores sistemáticos y aleatorios en el resultado final es calculada en paralelo. Este tipo de análisis de incertidumbre sigue las fases de calibración, adquisición de datos, y reducción de datos de un experimento.

#### 10.6.7 Experimento de única medición de la magnitud a medir (mensurando).

En la mayoría de los casos se desea estimar la incertidumbre de un solo valor medido usando cierto instrumento. Los errores contribuyentes se consideran sistemáticos. La incertidumbre en la etapa de diseño es usualmente calculada para una confiabilidad del

95 % y esta dada por:

$$u_d = \sqrt{u_0^2 + u_c^2} \quad (299)$$

Donde:

$u_d$  = Incertidumbre en la etapa de diseño

$u_0$  = Incertidumbre de orden cero del instrumento.

$u_c$  = Incertidumbre del instrumento.

La incertidumbre de orden cero del instrumento  $u_0$  se establece arbitrariamente igual a la mitad de la resolución, basado en la confianza del 95 %. Como se puede comprobar en base a la ecuación anterior, la incertidumbre de etapa de diseño nunca puede ser menor que  $u_0$ , es decir, aunque el instrumento sea perfecto y no tenga errores, su salida debe leerse con una resolución finita y, por lo tanto, con una incertidumbre.

Usualmente la incertidumbre del instrumento es declarada por el fabricante y resulta de un número posible de incertidumbres elementales del instrumento,  $e_i$ , algunos ejemplos de estas son los errores de histéresis, linealidad, sensibilidad, cero desplazamiento, repetibilidad, estabilidad y deriva termica<sup>168</sup>. Por lo tanto la incertidumbre del instrumento sera:

$$u_I = \sqrt{\sum_{i=1}^N e_i^2} \quad (300)$$

Los errores de instrumento o errores elementales son identificados a través de la calibración, usualmente están relacionados con la salida a plena escala (FSO) del instrumento, la cual es su valor de salida máxima. Los errores más comunes en instrumentos son:

- **Error de Histéresis:** Está relacionado con la mayor desviación entre dos valores de salida para un valor de entrada dado que ocurre cuando se realiza una calibración escala ascendente, escala descendente ( $e_{H,max}$ ). Esta es una calibración simple que procede de los valores mínimos a los valores máximos de la entrada, luego de vuelta a los mínimos. Usualmente el error de histéresis surge de tener un cambio físico en parte del sistema de medición en la inversión de la entrada del sistema.

$$\tilde{e}_H = \frac{e_{H,max}}{FSO} = \frac{|y_{up} - y_{down}|_{max}}{FSO} \quad (301)$$

- **Error de Linealidad:** Es una medida de cuán lineal es el mejor ajuste de los datos de calibración del instrumento. Está definido en términos de su máxima distancia

<sup>168</sup>RUIZ, R. El Método científico y sus etapas. México.2007.

de desviación,  $|y - y_L|_{max}$ .

$$\tilde{e}_L = \frac{e_{L,max}}{FSO} = \frac{|y - y_L|_{max}}{FSO} \quad (302)$$

- **Error de Sensibilidad:** Se caracteriza por el mayor cambio en la pendiente (sensibilidad estática) del ajuste de calibración.

$$\tilde{e}_K = \frac{e_{K,max}}{FSO} = \frac{|y - y_{nom}|_{max}}{FSO} \quad (303)$$

- **Error de Cero desplazamiento:** Se refiere al mayor desplazamiento posible que puede ocurrir en el intercepto del ajuste de calibración.

$$\tilde{e}_Z = \frac{e_{Z,max}}{FSO} = \frac{|y_{shift} - y_{nom}|_{max}}{FSO} \quad (304)$$

- **Error de Repetibilidad:** Está relacionado con la precisión de la calibración. Esta es determinada repitiendo la calibración muchas veces para los mismos valores de entrada.  $S_x$  representa el intervalo de precisión de los datos para un valor particular de  $x$ .

$$\tilde{e}_R = \frac{2S_x}{FSO} \quad (305)$$

- **Error de Estabilidad:** Está relacionado con  $e_{S,max}$ , que es la mayor desviación en el valor de salida para un valor de entrada fija que pudo ocurrir durante la operación. Esta desviación es expresada en unidades de  $\frac{FSO}{\Delta t}$ , siendo  $\Delta t$  el tiempo desde la compra o calibración del instrumento. El error de estabilidad es una medida de cuánto la salida puede desviarse sobre un periodo de tiempo para la misma entrada.

$$\tilde{e}_S = \frac{e_{S,max} \cdot \Delta t}{FSO} \quad (306)$$

- **Error de Deriva térmica:** Se caracteriza por la mayor desviación en el valor de salida para un valor de entrada fijo,  $e_{T,max}$ , que puede ocurrir durante operación por las variaciones en la temperatura ambiental. Los errores de estabilidad y deriva térmica son similares en comportamiento al error de cero desplazamiento.

$$\tilde{e}_T = \frac{e_{T,max}}{FSO} \quad (307)$$

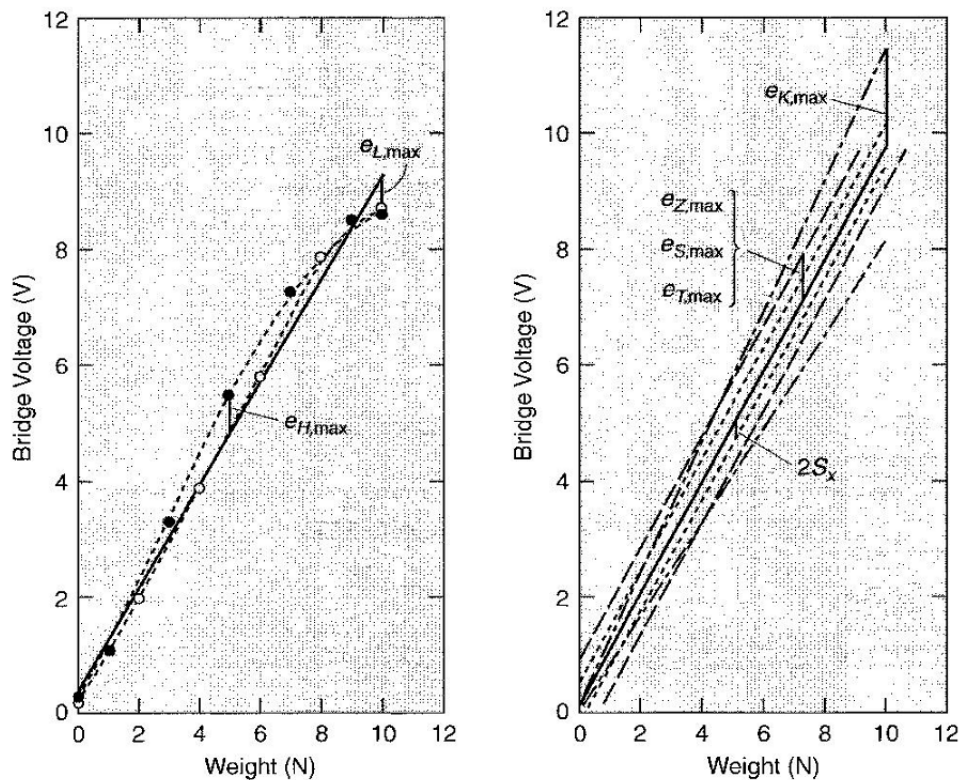
La incertidumbre del instrumento,  $u_I$ , combina todos los errores de instrumento conocidos:

$$u_I = \sqrt{\sum e_i^2} = FSO \cdot \sqrt{\tilde{e}_H^2 + \tilde{e}_L^2 + \tilde{e}_K^2 + \tilde{e}_Z^2 + \tilde{e}_R^2 + \tilde{e}_S^2 + \tilde{e}_T^2 + \tilde{e}_{other}^2} \quad (308)$$

Donde  $\tilde{e}_{other}$  denota cualquier otro error en el instrumento. Todos los errores expresados en la anterior ecuación son adimensionales.

Típicamente, los errores de histéresis y linealidad son determinados realizando una única calibración escala ascendente, escala descendente. Los resultados de este tipo de calibración son mostrados en la gráfica izquierda de la figura 167.

Figura 167: Errores elementales comprobados por calibración



Fuente: FIGLIOLA, Richard. y BEASLEY, Donald. *Mediciones mecánicas: Teoría y Diseño*. 4 ed. México.: Alfaomega, 2008.

En la figura 167 los resultados de escala ascendente son graficados como círculos abiertos y los resultados de escala descendente como círculos oscuros. Las líneas punteadas son interpolaciones lineales entre los datos. La histéresis es debida a los puntos en la escala descendente que son mayores que sus contrapartes de escala ascendente. La curva que mejor se ajusta a los datos está indicada por una línea sólida. Los errores de histéresis y linealidad son evaluados con respecto a dicha curva.

Los errores de sensibilidad, repetibilidad, cero desplazamiento, estabilidad, y deriva térmica son comprobados realizando una serie de calibraciones y luego determinando cada

error particular comparando las calibraciones. Los resultados de una serie de calibraciones son mostrados en la gráfica derecha de la figura 167. La curva sólida representa el mejor ajuste de los datos de todas las calibraciones; las curvas punteadas indican los límites dentro de los cuales una calibración es repetible con 95 % de confianza. El error de repetibilidad es determinado de la diferencia entre cualquier curva punteada y la curva de mejor ajuste. Las curvas guión-punto identifican las curvas de calibración que tienen pendiente máxima y mínima. El error de sensibilidad es evaluado en términos de la mayor diferencia entre la curva de sensibilidad mínima o máxima y la curva de mejor ajuste. Las curvas discontinuas denotan cambios que ocurren en la calibración por el cero desplazamiento, estabilidad, y deriva térmica. Cada error puede tener un valor diferente y es determinado de la curva de calibración de mayor diferencia que ocurre con cada efecto, con respecto a la curva de mejor ajuste.

#### 10.6.8 Experimento del resultado de una única medición.

De la siguiente ecuación:

$$u_r^2 \approx \sum_{i=1}^J (\theta_i u_{x_i})^2 \quad (309)$$

Donde:

$u_{x_i}$  : incertidumbre absoluta.

$\theta_i$ : coeficiente absoluto de sensibilidad.

Se pueden derivar expresiones de incertidumbre de un resultado para relaciones analíticas específicas:

1. Si  $r = B_x$  donde  $B$  es una constante, entonces:

$$u_r = | B | u_x \quad (310)$$

Si  $r$  es directamente proporcional a la cantidad que se pretende medir, con una constante de proporcionalidad  $B$ , entonces, la incertidumbre en  $r$  es el producto del valor absoluto de  $B$  y la incertidumbre de  $x$  ( $u_x$ ).

2. Si  $r = x + \dots + z - (u + \dots + w)$ , entonces:

$$u_r = \sqrt{(u_x)^2 + \dots + (u_z)^2 + (u_u)^2 + \dots + (u_w)^2} \quad (311)$$

Si  $r$  está relacionado directamente con todas las magnitudes de interés, entonces la incertidumbre en  $r$  es la combinación en cuadratura de las incertidumbres de dichas magnitudes.

3. Si  $r = (x \dots z) / (u \dots w)$ , entonces

$$\frac{u_r}{|r|} = \sqrt{\left(\frac{u_x}{x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{u_z}{z}\right)^2 + \left(\frac{u_u}{u}\right)^2 + \dots + \left(\frac{u_w}{w}\right)^2} \quad (312)$$

Si  $r$  está relacionado directamente con todas las magnitudes de interés, entonces la incertidumbre en  $r$  es la combinación en de las incertidumbres de dichas magnitudes.

4. Si  $r = x^n$ , entonces:

$$\frac{u_r}{|r|} = |n| \frac{u_x}{|x|} \quad (313)$$

### 10.6.9 Análisis de incertidumbre de mediciones múltiples.

Este análisis desarrolla un método para estimar la incertidumbre en el valor asignado a una variable medida con base en un conjunto de mediciones obtenidas en condiciones de operación fijas. En el análisis de múltiples mediciones es posible dividir las estimaciones de los errores en precisión y sesgo. La estadística se usa para estimar la precisión en cada error.

Al considerar la medición de la variable  $x$ , la cual esta sujeta a errores de precisión elementales  $P_{ij}$ , y de sesgo  $B_{ij}$ , en cada uno de los tres grupos de fuente de error. El subíndice  $i$  toma los valores de 1, 2 o 3 haciendo referencia al grupo de fuente de error:

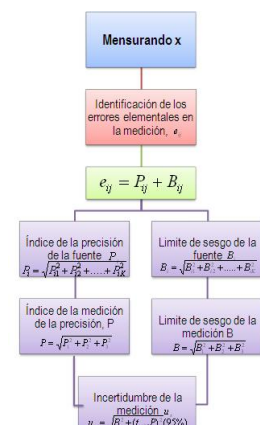
$i = 1$  Error de calibración

$i = 2$  Error de adquisición de datos.

$i = 3$  Error de reducción de datos.

El subíndice  $j$  que toma valores desde 1 hasta  $K$ , hace referencia a cada uno de los  $K$  elementos de error, entonces:  $e_{ij} = P_{ij} + B_{ij}$ . La siguiente figura describe un método para estimar la incertidumbre en  $x$  basado en errores de sesgo y precisión elementales.

Figura 168: Procedimiento de las incertidumbre de múltiples mediciones



Fuente: *Mediciones mecánicas teoría y diseño*. Figliola-Beasley, pag.184

El índice de precisión de la medición P, representa una medida básica de los errores elementales que afectan la precisión para los grupos de error de medición..

El limite de sesgo B, representa una medición básica de los errores elementales que afectan el sesgo total en la medición de la variable x.

La estimación de los grados de libertad  $v$ , en el índice de precisión se determina mediante el uso de la formula de Welch-Satterthwaire<sup>169</sup>.

$$v = \frac{\left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^K P_{ij}^2 \right)^2}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^K (P_{ij}^4 / v_{ij})} \quad (314)$$

Donde  $i$  hace referencia a los tres rupos de fuente de errores y  $j$  a cada uno de los errores elementales en cada grupo fuente con  $v_{ij} = N_{ij} - 1$ .

**Ejemplo 10.2** (*Ejemplo 5.8 tomado de Mediciones Mecánicas, teoría y diseño. Tercera edición. Figliola - Beasley*) En condiciones de operación fijas se realizan diez mediciones repetidas de fuerza,  $F$ . Los datos son los que se listan a continuación. Estime el error elemental en el valor medio de la fuerza que se presenta en los datos medidos a través de la dispersión de los mismos.

<sup>169</sup>KUHN,T. La Estructura de las Revoluciones Científicas. Santa fe de Bogotá.: Fondo de Cultura Económico, 1992.

Cuadro 57: Mediciones repetidas de la fuerza  $F$

$n$	$F$ [N]	$n$	$F$ [N]
1	123.2	6	119.8
2	115.6	7	117.5
3	117.1	8	120.6
4	125.7	9	118.8
5	121.1	10	121.9

SE CONOCE

El conjunto de datos medidos

$$N = 10$$

CONSIDERACIÓN

Error causado por la dispersión de los datos (precisión)

DETERMINE

Estime  $P_{ij}$

SOLUCIÓN

El valor medio de la fuerza con base en este conjunto de datos finito se calcula con la ecuación  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  como  $\bar{F} = 120,1N$ . Al estimar el valor medio se presenta un error de precisión debido a la dispersión de los datos. Puesto que este error entra en la medición durante la adquisición de datos, se lista bajo los errores de fuente de adquisición de datos ( $i = 2$ ). Este error de precisión se etiqueta como  $P_{2j}$  para el  $j$ -ésimo error elemental en el grupo de fuente 2. Entonces, se calcula  $P_{2j}$  mediante la desviación estándar de las medias:

$$\begin{aligned}
 P_{2j} &= \frac{S_F}{N^{1/2}} \\
 &= \frac{3,2}{10^{1/2}} = 1,01N
 \end{aligned}$$

#### 10.6.10 Análisis de incertidumbre detallado

Este análisis es apropiado para situaciones de medida que involucran múltiples mediciones. Identifica los errores sistemáticos y aleatorios. Sus contribuciones a la incertidumbre total son tratadas separadamente en el análisis hasta que al final se combinan. El análisis de incertidumbre detallado es realizado después de que se ha obtenido un conjunto estadísticamente viable de valores de la variable a medir bajo condiciones de

operación fijas. Se realizan múltiples mediciones para evaluar la incertidumbre presente en un experimento debida a variaciones incontrolables en las magnitudes a medir y para obtener suficientes datos tal que el valor promedio de la variable medida pueda ser estimado.

### 10.6.11 Aproximación integral

Se pueden emplear diferentes métodos numéricos para determinar la integral de una función. El método escogido depende de la precisión requerida, si los valores de la función son conocidos en sus puntos finales, si la integración numérica es realizada usando intervalos equiespaciados, etc. La regla trapezoidal es usada comúnmente para situaciones en las que los intervalos están equiespaciados y los valores de la función son conocidos en sus puntos finales.

La regla trapezoidal aproxima el área bajo la curva  $f(x)$  sobre el intervalo entre  $a$  y  $b$  al área de un trapecoide,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(b) + f(a)] + E \quad (315)$$

Donde  $E = (\Delta x)^3 f''/24$ , con  $f''$  evaluada en algún punto en el intervalo entre  $a$  y  $b$ . Esta regla puede extenderse a  $N$  puntos,

$$\int_{a=x_1}^{b=x_N} f(x) dx = \Delta x \left[ \frac{1}{2} f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{1}{2} f(x_N) \right] + \sum_{i=1}^N E_i = \Delta x \left\{ \sum_{i=1}^N f(x_i) - \left[ \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_N) \right] \right\} + \sum_{i=1}^N E_i \quad (316)$$

Donde  $\Delta x = (b-a)/N$ . El error total de discretización,  $e_d$ , se convierte en

$$e_d = \sum_{i=1}^N E_i \simeq \frac{1}{24} \sum_{i=1}^N (\Delta x)^3 f'' = \frac{N}{24} (\Delta x)^3 f'' = \frac{(b-a)^3}{24N^2} f'' \quad (317)$$

Así, la incertidumbre en aplicar la regla trapezoidal extendida para aproximar una integral es

$$u_{f f(x)} \simeq C_{f f(x)} N (\Delta x)^3 \quad (318)$$

Donde  $C_{f f(x)}$  es una constante con las mismas unidades de  $f''$ .  $C_{f f(x)}$  puede ser asumida de orden uno como primera aproximación.

### 10.6.12 Aproximación de la estimación de la incertidumbre

En algunas ocasiones, el acercamiento directo a la aproximación de la incertidumbre en un resultado puede ser complicado si la expresión matemática que relaciona el resultado con

las magnitudes a medir es algebraicamente compleja. Un enfoque alternativo es aproximar numéricamente las derivadas parciales en la expresión de incertidumbre, obteniendo así una expresión más manejable.

El término de derivada parcial,  $\partial q/\partial x_i$ , puede aproximarse numéricamente por la expresión de diferencia finita

$$\frac{\partial q}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta q}{\Delta x_i} = \frac{q|_{x_i+\Delta x_i} - q|_{x_i}}{\Delta x_i} \quad (319)$$

Esta aproximación es precisa y de primer orden. Así, su error de discretización es de orden  $\Delta x f''(x)$ . El uso de la anterior ecuación lleva a la aproximación por diferencia finita:

$$u_q \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta q}{\Delta x_1} u_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta q}{\Delta x_2} u_{x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta q}{\Delta x_k} u_{x_k}\right)^2} \quad (320)$$

El valor de  $\Delta x_i$  es escogido lo suficientemente pequeño para que la expresión de diferencia finita se aproxime muy cerca a la derivada actual. Típicamente,  $\Delta x_i = 0,01x_1$  es un buen valor para empezar. El valor de  $\Delta x_i$  debe ser luego disminuido hasta que se obtenga una convergencia apropiada en el valor de  $u_q$ .

### 10.6.13 Propagación del error

Los errores en una variable medida se propagan a través de una variable resultante de manera predecible. En general, este análisis se aplica a los errores que contribuyen a la incertidumbre en  $x$ , escrito como  $u_x$ . Se considera un resultado  $R$ , el cual se determina a través de alguna relación funcional entre las variables independientes  $x_1, x_2, \dots, x_L$ , definida por la ecuación 321:

$$R = f_1 \{x_1, x_2, \dots, x_L\} \quad (321)$$

Donde  $L$  es el número de variables independientes involucradas. Cada variable contiene alguna medida de incertidumbre que afecta el resultado. La mejor estimación del valor medio verdadero,  $R'$  se establecerá según la ecuación 322:

$$R' = \bar{R} \pm u_R \quad (322)$$

donde la media de la muestra de  $R$  se determina a partir de 323:

$$\bar{R} = f_1 \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_L\} \quad (323)$$

y la incertidumbre en  $\bar{R}$  se encuentra mediante 324:

$$u_R = f_1 \{u_{\bar{x}_1}, u_{\bar{x}_2}, \dots, u_{\bar{x}_L}\} \quad (324)$$

El valor  $u_R$  refleja las contribuciones individuales de las incertidumbres individuales conforme se propagan al resultado. La estimación más probable de  $u_R$  en general se acepta como el valor dado por la relación de la segunda potencia, la cual es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (RSS). La RSS se deriva de la aproximación linealizada de la expansión de la serie de Taylor de la función multivariable que define la ecuación 321. Un índice general de sensibilidad,  $\theta_i$ , resulta de la expansión de la serie de Taylor y está dada por

$$\theta_i = \frac{\delta R}{\delta x_{i,x=\bar{x}}} \quad (325)$$

Donde:  $i = 1, 2, \dots, L$

El índice de sensibilidad relaciona cuánto cambio en cada  $x_i$  afecta  $R$ . Es necesario el uso de la derivada parcial cuando el resultado  $R$  es una función de más de una variable. Este índice se evalúa con los valores medios o, en ausencia de ellos, con los valores nominales esperados de las variables. La propagación de la incertidumbre en las variables al resultado conducirá a un estimado de la incertidumbre dado por 326:

$$u_R = \pm \left[ \sum_{i=1}^L (\theta_i u_{x_i})^2 \right]^{1/2} \quad (326)$$

#### 10.6.14 Análisis de incertidumbre en la etapa avanzada

En el análisis de incertidumbre en la etapa de diseño, sólo se consideran los errores debidos a la resolución del sistema de medición y a los errores de calibración estimados del instrumento. Un análisis de incertidumbre en la etapa avanzada permite llevar el análisis del diseño mas allá considerando los errores de procedimiento y control de pruebas que afectan la medición. El análisis de incertidumbre en la etapa avanzada se considerará un método para un análisis de incertidumbre cuidadoso cuando no se dispone de un conjunto de datos grande; este es el caso de pruebas donde no son posibles mediciones repetitivas. Esencialmente, el método determina diferentes aspectos de la prueba para cuantificar errores potenciales.

El objetivo de este análisis es estimar la incertidumbre en un valor medido o en un resultado general, a través de la estimación de la incertidumbre en cada uno de los factores que pueden afectar el valor o resultado. Si todos los factores que influyen una medición se mantuvieran constantes, se podría esperar que el valor medido permanezca constante en mediciones repetidas. Sin embargo, los errores de medición se reproducirán, es decir, afectarán el valor medido de manera diferente en cada medición.

Para identificar y estimar los errores se presenta una técnica que usa una aproximación paso por paso y se busca el valor combinado de la estimación en cada paso.

### **Incertidumbre de orden cero.**

En este orden, todas las variables y parámetros que afectan el resultado de la medición, inclusive el tiempo se consideran fijas, excepto el acto mismo de la observación en sí mismo; debido a esto, cualquier dispersión de datos presentada con observaciones repetidas del valor de salida será solo el resultado de la resolución del instrumento. Una estimación de  $u_0$  estaría dado por:

$$u_0 = \pm(1/2) \times \text{resolución} \quad (327)$$

En este nivel, el valor de incertidumbre calculado sería el mínimo posible, ya que el uso del análisis de orden cero sólo proporciona una estimación del efecto de la resolución del instrumento en la medición. Se debe tener claro que este tipo de incertidumbre es inadecuado para el reporte de resultados de prueba.

### **Incertidumbre de orden superior.**

Este tipo de incertidumbre considera el control de las condiciones de operación de la prueba. La incertidumbre de primer orden de un mensurado se estima como:

$$u_1 = \pm t_{v,C} \times S_x \quad (328)$$

Sólo cuando  $u_1 = u_0$  el tiempo no es factor de la prueba. La incertidumbre de primer orden también es inadecuada para reportar los resultados de prueba. En el siguiente orden, cada factor identificado que afecta el valor medido se tiene en cuenta, dando una estimación mayor pero más realista.

### **Incertidumbre de n-ésimo orden.**

En la estimación de n-ésimo orden, se considera las características de la calibración del instrumento a través de la incertidumbre del instrumento  $u_c$ . Una estimación práctica de la incertidumbre de n-ésimo está dada por:

$$u_N = \sqrt{(u_c)^2 + \sum_{i=1}^{N-1} u_i^2} \quad (329)$$

La estimación de la incertidumbre de este orden, permite la comparación directa entre el resultado de pruebas similares que se obtienen con diferentes instrumentos o diversas

instalaciones de prueba. Solo cuando  $u_N = u_d$  las condiciones de prueba están bajo completo control. Como tal, el estimado de la incertidumbre de n-ésimo orden proporciona el valor de la incertidumbre que se busca en la etapa de diseño avanzado o en el análisis de una sola medición. Es el valor apropiado que se usa en el reporte de resultados a partir de una sola medición<sup>170</sup>.

**Example. 10.3** (*Ejemplo 7.14 tomado de Introduction to Engineering Experimentation. Second edition. Wheeler - Ganji*). En el control de un proceso, es necesario medir la temperatura del vapor en una línea de vapor. Para este propósito se usa un dispositivo medidor de temperatura llamado termocupla. El sistema de medición de temperatura se calibró y se encontró que tiene una incertidumbre sistemática de  $0.5^\circ\text{C}$  y una incertidumbre aleatoria de  $0.4^\circ\text{C}$ . Manteniendo constantes las condiciones de la línea de vapor, se ejecutaron varias pruebas de ensayo ( $n > 30$ ) del sistema de medición instalado, y los datos mostraron una desviación estándar de  $1^\circ\text{C}$ . No se esperan otras incertidumbres en las mediciones en este sistema. Estime las incertidumbres de orden cero, superior y n-ésimo para un nivel de confianza del 95 %.

**Solución:**

Análisis de orden cero: incertidumbre del sistema de medición

$$B_0 = 0,5^\circ\text{C}$$

$$P_0 = 0,4^\circ\text{C}$$

$$\omega_0 = (0,5^2 + 0,4^2)^{1/2} = 0,64^\circ\text{C}$$

Análisis de primer orden: dispersión en los datos medidos

Esta incertidumbre es causada por la dispersión en las pruebas del sistema de línea de vapor ( $S = 1^\circ\text{C}$ ). Para  $n > 30$  y un nivel de confianza del 95 %,  $t = 2,0$ , y

$$P_1 = tS = 2 * 1 = 2,0^\circ\text{C}$$

Análisis de orden n-ésimo: incertidumbre total de la medición

Aquí incluimos todas las incertidumbres sistemáticas y la incertidumbre aleatoria de primer orden. Entonces tenemos:

$$B_0 = 0,5^\circ\text{C}$$

$$B_L = 1,0^\circ\text{C}$$

---

<sup>170</sup>KUHN, T. La Estructura de las Revoluciones Científicas. Santa fe de Bogotá.: Fondo de Cultura Económico, 1992.

$$P_1 = 2,0^\circ C$$

$$B_N = (B_0^2 + B_L^2)^{1/2} = (0,5^2 + 1,0^2)^{1/2} = 1,12^\circ C$$

$$\omega_N = (B_N^2 + P_1^2)^{1/2} = (1,12^2 + 2,0^2)^{1/2} = 2,3^\circ C$$

Luego, la incertidumbre estimada en la medición es  $\pm 2,3^\circ C$

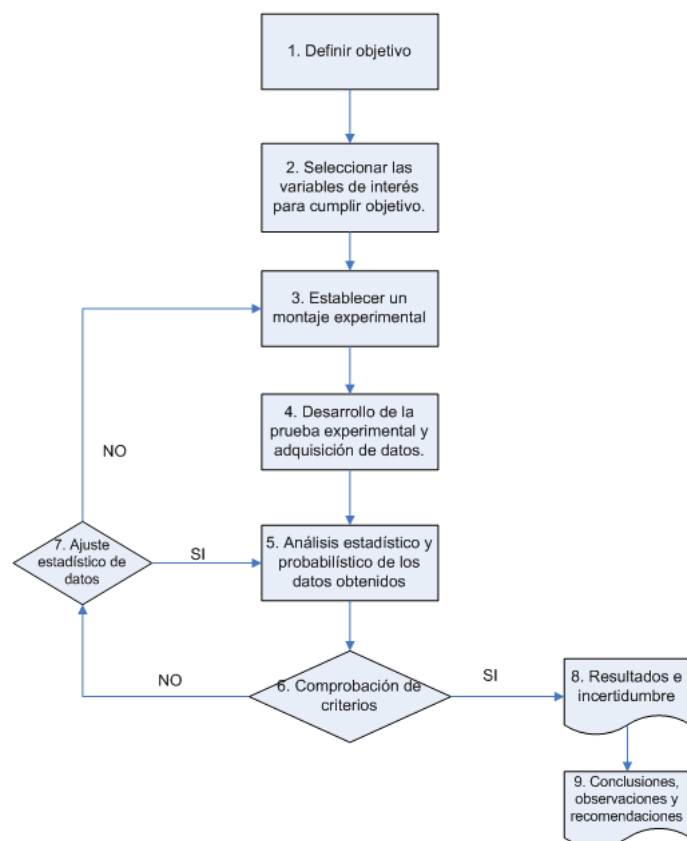
#### Comentarios

1. El análisis muestra que, con el sistema de medición usado, no se puede alcanzar una incertidumbre menor que  $\pm 0,64^\circ C$ , sin importar cómo se instale la termocupla o cuán estable sea el proceso.
2. La incertidumbre en esta medición es causada primordialmente por la inestabilidad y los efectos de carga en la instalación de la línea de vapor.

# 11. ESTUDIO Y DESARROLLO DE MEDICIONES DE PARÁMETROS FÍSICOS EXPERIMENTALES APLICANDO MÉTODOS PROBABILÍSTICOS.

El desarrollo de mediciones en la ciencia e ingeniería son la base fundamental para el estudio, entendimiento y mejoramiento de teorías, procesos o sistemas. El proceso de medición requiere de pruebas experimentales que permiten obtener datos reales para su posterior análisis. En la figura 169 se observa un proceso general para el desarrollo de diseños experimentales con análisis probabilístico que será aplicado a los casos de estudio de interés para los autores.

Figura 169: Diagrama general para el desarrollo de un procedimiento experimental con análisis probabilístico.



## 11.1 PROCEDIMIENTO DE CALIBRACIÓN DE UN TRANSDUCTOR DE PRESIÓN

La presión presenta una fuerza de contacto por unidad de área, que actúa hacia el interior y normal a la superficie de toda frontera física en contacto con un fluido. La presión puede ser medida de tres formas; presión absoluta, presión manométrica y la diferencia de presión, también encontramos las escala de presión relativas. La medición de presión en los laboratorios es muy común y existen diferentes instrumentos para realizarla, estos se emplean para establecer la presión con propósito de calibración por comparación, así como para mediciones generales.

El desarrollo de esta sesión permite estudiar algunos métodos usados en la medición de presión y se muestra el desarrollo de la caracterización de un transductor de presión como caso de estudio, igualmente se estudian algunas características de los transductores de presión y fuentes comunes de error para mediciones de presión, finalmente se desarrolla un análisis estadísticos buscando mayor fiabilidad en la caracterización.

Los instrumentos de referencia de presión se describen en el capítulo 10, y el instrumento de referencia de presión utilizado en la experimentación es el probador de pesos muerto:

- Medidor de McLeod
- Barómetro
- Manómetro
- Probador de Pesos Muertos

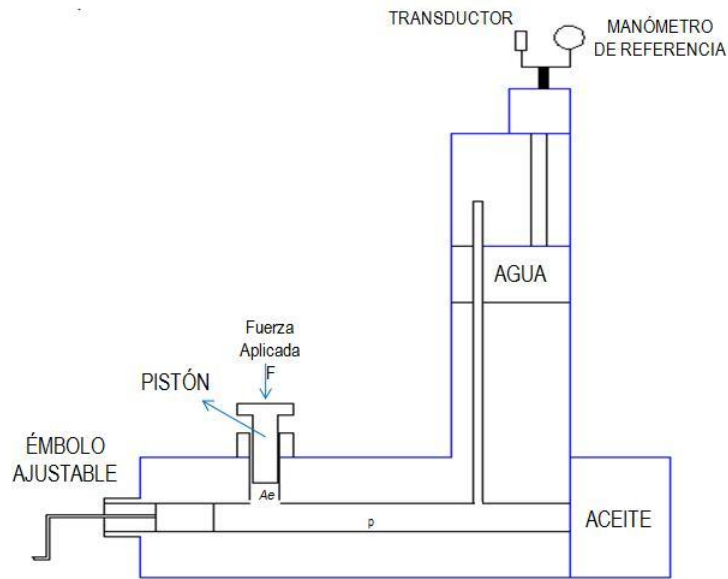
### 11.1.1 Probador de Peso muerto

El probador de peso muerto es un dispositivo usado para calibrar la presión de un fluido partiendo de un peso conocido<sup>171</sup>. Es un estándar de laboratorio para calibrar dispositivos de medición de presión en el intervalo de presión de 70 a  $7 \times 10^7 \text{ N/m}^2$  (0,01 a 1000 psi). Típicamente es usado para calibración estática de medidores de presión. En la figura 170 podemos ver un probador de peso muerto.

---

<sup>171</sup>HOLMAN, Jack Philips . Experimental Methods for Engineers. Mc Graw Hill, México, 1994. p. 239.

Figura 170: Probador de Peso Muerto



- **Características**

Determina la presión en forma directa a través de su definición de fuerza por unidad de área. Y esta compuesta por las siguientes partes:

- Cámara Interna llena de líquido
- Pistón y cilindro muy ajustado

La presión de la cámara se produce por la compresión de líquido (aceite), debida a su vez al émbolo ajustable. Esta presión actúa en el extremo del pistón maquinado con cuidado. Existirá un equilibrio estático cuando la presión externa que ejerce el pistón en el fluido esté en balance con la presión de la cámara. Esta presión externa sobre el pistón se crea por una fuerza hacia abajo que actúa sobre el área equivalente,  $A_e$ , del pistón<sup>172</sup>.

El peso del pistón más el peso adicional de la masa calibrada se usa para proporcionar una fuerza externa,  $F$ . En equilibrio estático el pistón flotará y la presión de la cámara puede deducirse como:

$$p = \frac{F}{A_e} + \sum \text{errores} \quad (330)$$

Un dispositivo de medición de presión, como un transductor de presión, se puede conectar al puerto de referencia y calibrar por comparación con la cámara de presión. Para una calibración aproximada, se pueden ignorar los errores.

<sup>172</sup>KUHN, T. La Estructura de las Revoluciones Científicas. Santa fe de Bogotá.: Fondo de Cultura Económico, 1992.

## ■ Funcionamiento

1. La presión es producida por un pistón vertical perfectamente ajustado, el cual se desliza y gira sin fricción dentro de un cilindro lleno de aceite.
2. El cilindro con aceite está en comunicación con una bomba de tornillo y con un transformador de la presión de aceite a agua. En el cual se fija el instrumento a calibrar.
3. Cuando se opera la bomba de tornillo, el aceite es empujado dentro del cilindro y el pistón es forzado a subir.
4. El aumento de presión es balanceado por pesos.
5. El área  $A_e$  de la sección del pistón y la carga aplicada encima determina la presión del fluido que está actuando sobre el instrumento medidor de presión.
6. El instrumento a calibrar es roscado a un transformador de aceite-agua, que es un cilindro ocupado con agua. Lo que da la posibilidad de probar el manómetro bajo la presión del agua sin penetración de aceite, ya que el agua obliga a subir el nivel, mediante la presión producida por el aceite.

## ■ Errores elementales en el probador de pesos muertos

Cuando se consideran los errores la incertidumbre del instrumento en la presión de la cámara con un probador de peso muerto puede ser ajustada tan baja como 0,05-0,01 % de la lectura<sup>173</sup>. Algunos errores elementales contribuyen con estos errores de la ecuación 330 con los que vemos a continuación. Y una presión indicada puede corregirse por efectos de la gravedad,  $e_1$  y los efectos de flotabilidad del aire  $e_2$  mediante.

$$p = p_i(1 + e_1 + e_2) \quad (331)$$

- Variaciones de la gravedad local: Para corregir los efectos de error de la gravedad, se puede usar la corrección adimensional:

$$e_1 = -(2,637 \times 10^{-3} \cos \phi + 9,6 \times 10^{-8} z [ft] + 5 \times 10^{-5}) \quad (332)$$

$$e_1 = -(2,637 \times 10^{-3} \cos \phi + 2,9 \times 10^{-8} z [m] + 5 \times 10^{-5}) \quad (333)$$

donde  $\phi$  está en grados latitud y  $z$  en pies.

---

<sup>173</sup>Fligliola, B. Mediciones Mecánicas Teorías y Diseño. Alfaomega. México.

- Efectos de la flotabilidad del aire: Podemos hallar el error de flotabilidad del aire con:

$$e_2 = -(\gamma_{aire}/\gamma_{masa}) \quad (334)$$

- Incertidumbre en las masas conocidas del pistón y las masas adicionadas.
- Efectos del esfuerzo cortante: El fluido probador lubrica el pistón y a éste lo apoyan en forma parcial las fuerzas de corte del aceite entre el cilindro y el pistón. El error se presenta y varía de manera inversa con la viscosidad del fluido del probador. Por lo tanto se prefiere aceites de alta viscosidad. En un probador típico, este error es menor que 0.01 % de la lectura<sup>174</sup>.
- Expansión térmica del área del pistón y deformación elástica del pistón: A altas presiones, la deformación elástica del pistón afectará el área real del pistón. Por las razones anteriores, el área efectiva se basa en el promedio de los diámetros del pistón y del cilindro, otra fuente de incertidumbre en la medición.

### 11.1.1.1 Caso de estudio: Procedimiento de caracterización de un transductor de presión

Un transductor de presión convierte una señal de salida en una señal de entrada mecánica o eléctrica. Es en realidad un sensor-transductor de híbrido

- Elemento sensor primario:
  - Elemento elástico que se deforma o deflexiona con la presión. Se usan diversos elementos elásticos comunes.
    - Tubo bourdon
    - Fuelles
    - Cápsula
    - Diafragma

**Elemento transductor secundario:** Convierte la deflexión del elemento elástico en una señal que se puede medir con facilidad, como un voltaje eléctrico o la rotación mecánica de una aguja. Los transductores eléctricos requieren equipo acondicionamiento adicional externo a la señal, así como fuentes externas de alimentación para manejar las señales eléctricas de salida.

<sup>174</sup>Fligliola, B. Mediciones Mecánicas Teorías y Diseño. Alfaomega. México.

## Objetivo de experimento

Realizar el procedimiento de calibración de un transductor de presión usando un probador de pesos muertos, mediante la aplicación de los métodos probabilísticos estudiados durante el desarrollo del seminario de investigación.

## Selección de las variables de interes

1. Variable independiente controlada: Presión [ $Psi$ ]
2. Variable dependiente de la calibración: Voltaje de salida medido por el sensor del transductor [ $V$ ]
3. Area Pistón =  $2cm^2$ .
4. Tabla de datos obtenidos de anexo H.1.

## Montaje experimental

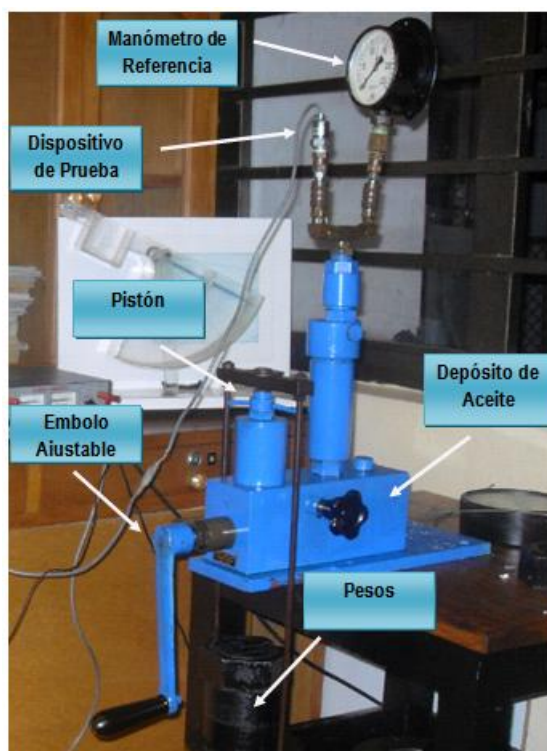
1. Descripción del banco de calibración:

El banco utilizado para la calibración del transductor de presión es un probador de pesos muertos que se encuentra en el laboratorio de mecánica de fluidos de la escuela de Ingeniería Mecánica en la Universidad Industrial de Santander.

El probador es de marca AMSLER y consta de las siguientes partes ver figura 170:

- Placa Base
- Mango de Manivela
- Bomba de tornillo de doble acción
- Manivela de la bomba
- Válvula de alivio
- Válvula de seguridad
- Válvula de Purga
- Manifold Intercambiador agua-aceite
- Base intercambiador agua aceite

Figura 171: Probador de Pesos Muertos Marca AMSLER



## Desarrollo de la prueba experimental y adquisición de datos

### 1. Procedimiento de medición

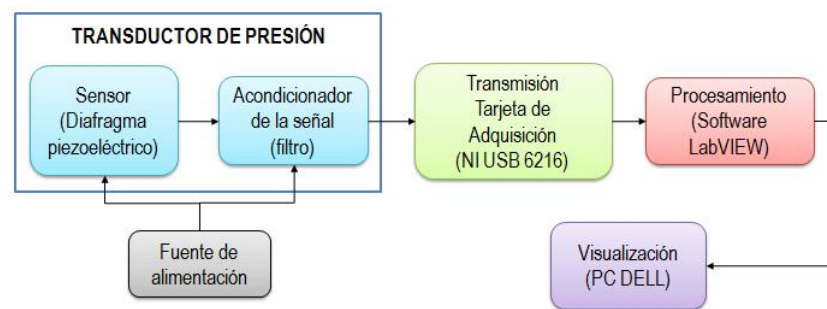
- a) Primero se debe verificar que el sistema no se encuentre presurizado y si es así, se debe ventear.
- b) Hacer las conexiones según especificaciones del instrumento, con los diferentes elementos como tarjeta de adquisición de datos, fuente, computador, transductor de presión.
- c) Se toma los valores del voltaje sin colocar ninguna presión, para hallar el *of - set*.
- d) Agregar peso sobre el pistón, aleatoriamente o valor sugerido por el experimentador.
- e) Girar la manivela de tal manera que el aceite sea empujado dentro del cilindro y el pistón es forzado a subir. El aumento de presión es balanceado por pesos.
- f) Cuando es notorio que el pistón se encuentra afuera se debe dejar de girar la manivela, y tomar los valores de voltajes.

g) Los valores de las mediciones serán obtenidos mediante un programa de adquisición de datos labView que permite de una manera rápida y muy precisa la toma de datos.

h) A los datos obtenidos se les aplica el respectivo análisis y procesamiento que permita la adecuada caracterización del transductor de presión.

2. Adquisición de datos : El procedimiento de recolección de datos se realizó de acuerdo a la gráfica de la figura 172. Los elementos que constituyeron dicha recolección facilitaron el análisis de la información entregada por el instrumento a calibrar.

Figura 172: Sistemas de adquisición de datos



a) Transductor de presión

Especificaciones técnicas

- Acero inoxidable
- Rangos arriba de los 10k psi o 700Bar
- Salida en mV o Amplificada
- Excelente precisión
- Amplio rango de temperatura de operación

Figura 173: Transductor de Presión MSP 300



## Análisis probabilístico de los resultados

El análisis probabilístico se realizó usando como herramienta matlab para facilitar el proceso de cálculo y realización de gráficas, las variables experimentales las encontramos a continuación:

- Variable independiente controlada: Presión [Psi]
- Variable dependiente de la calibración: Voltaje de salida medida [V]
- Area Pistón =  $2\text{cm}^2$ .
- Tabla de datos obtenidos ver anexo H
- número de datos = 30
- numero de muestras = 19

## Comprobación de parametros

### 1. Planteamiento de la hipótesis.

Los instrumentos de medición generalmente tienen una tendencia lineal, ya que se puede observar la precisión y exactitud que estos generan, en este caso de estudio en particular se busca conocer el rango lineal del transductor de presión partiendo de datos reales obtenidos experimentalmente, empleando métodos estadísticos como la regresión lineal estudiado en el capítulo 8, la hipótesis a probar inicialmente permitirá determinar si existe una relación matemática entre las variables independiente y dependiente de la curva de regresión, si la pendiente de la curva de regresión es igual a cero quiere decir que no existe ninguna relación entre las variables, y la hipótesis nula no se rechaza.

Hipótesis Nula:  $\beta = 0$

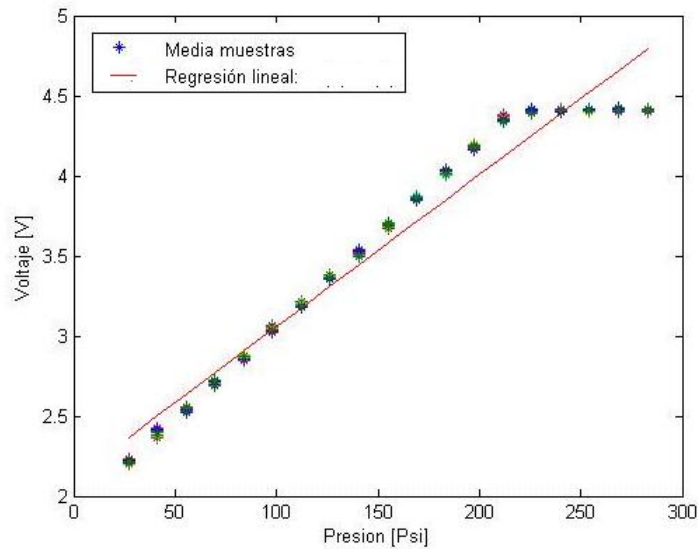
Hipótesis Nula:  $\beta \neq 0$

La hipótesis completa es asumir que los errores están distribuidos de manera normal e independiente con media cero y varianza  $\sigma^2$ , para aplicar el método de mínimos cuadrados.

### 2. Curva de caracterización:

Permite observar el comportamiento de las variables gráficamente como se observa en la figura 174.

Figura 174: Curva de caracterización Transductor de presión



3. Ecuación de Correlación: La ecuación de correlación se halla usando el método de mínimos cuadrados, para este caso de estudio la ecuación de regresión se observa a continuación:

$$y_o = 0,0095x + 0,6454 \quad (335)$$

El coeficiente de correlación  $R^2 = 0,9568$  una relación lineal perfecta es cuando el coeficiente de correlación es igual a 1. Para nuestro caso asumimos que un valor inferior de 0,99 no es confiable y es necesario evaluar los datos para hallar la curva que mas se ajuste al modelo.

4. Prueba de Hipótesis

Se probara la hipótesis usando el método de análisis de varianza para la regresión estudiada en el capítulo 8.

#### **Análisis de varianza para la prueba de significancia de la regresión.**

Para probar la significancia de la regresión puede usarse un método conocido como análisis de varianza para la regresión estudiado en el capítulo 8. El procedimiento particiona la variabilidad total en la variable de respuesta en componentes más manejables los cuales se observan en la tabla 58.

Cuadro 58: Anova para la regresión

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media cuadrática	Fo
Regresión	10,3453	1	10,3453	376,1691
Erros	0,4675	17	0,0275	
Total	10,8129	18		

Si la hipótesis nula  $H_0: \beta_1 = 0$  es verdadera, el estadístico sigue a la distribución  $F_{1,n-2}$ , con lo que  $H_0$  debe rechazarse si  $f_0 > f_{\alpha,1,n-2}$  donde  $f_0$  esta dado por la ecuación 181. Usando como herramienta matlab y con una significancia del  $100(1-\alpha) \%$  hallamos el valor de  $f_{\alpha,1,n-2}$

De donde  $f_{\alpha,1,n-2} = 4,45$

Y probamos que  $f_0 > f_{\alpha,1,n-2}$  y se rechaza la hipótesis por tanto se concluye que las variables si tienen algún tipo de relación.

#### 5. Evaluación del modelo de regresión

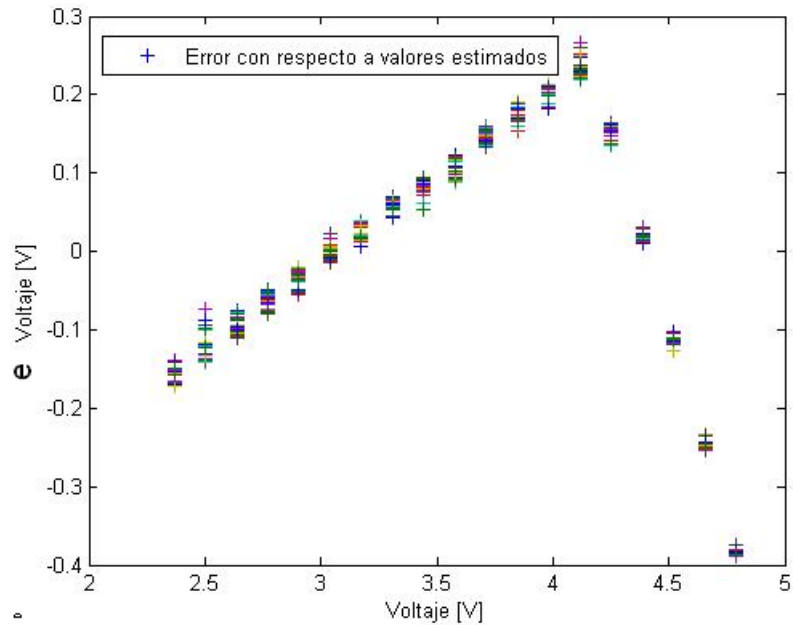
La validez de estas suposiciones deben ser estudiadas para determinar que tan adecuado es el modelo lineal, para ello existen diferentes métodos :

- El análisis residual
- Coeficiente de determinación ( $R^2$ ).
- Prueba de falta de ajuste

a) Analisis residual.

Para verificar que los errores se distribuyen de manera normal con varianza constante se emplea este método, donde el experimentador puede construir un histograma de frecuencias o una gráfica de probabilidad normal de los residuos. La grafica de probabilidad de los residuos se observa en la figura175

Figura 175: Grafica de probabilidad de los residuos



### 1. Prueba de falta de ajuste

Para ello se plantean dos hipótesis:

Ho: El modelo de regresión lineal simple es el adecuado para la caracterización del transductor de presión.

H1: El modelo de regresión lineal simple no es el adecuado para la caracterización del transductor de presión.

- Se debe dividir la suma de los errores en los siguientes componentes como se observa en la tabla 59:

$$SSE = SSPE + SSLOF \quad (336)$$

Cuadro 59: Análisis de varianza final

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media cuadrática	Fo
Regresión	10.3453	1	10.3453	376,169
Error	0.4675	17	0,027	
(Falta Ajuste)	0.4142			229
(Error puro)	0.0053			
Total	6,1464	18		

El estadístico de prueba para la falta de ajuste sera  $F_0=5.0264$

De donde  $f_{\alpha,m-2,m-n} = 1.7$  de tabla de la distribución  $f$  tenemos  $m = 19$  y  $n = 521$ .

Y probamos que  $f_0 > f_{\alpha,m-2,n-m}$

$5,0264_0 > 2,692$  Entonces la hipótesis nula se rechaza y se debe entrar a analizar las posibles causas de la no linealidad de la grafica.

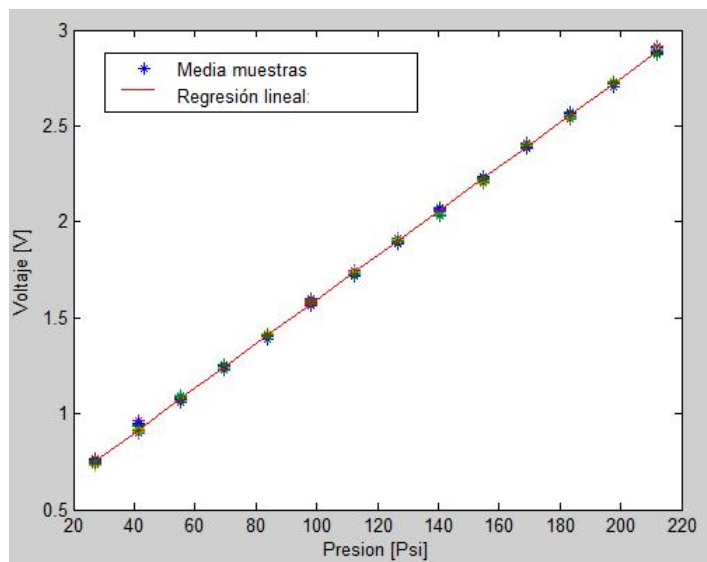
Debido a que la hipótesis se rechazo se debe entrar a analizar las posibles causas para ello se acude a la grafica 174, la cual nos muestra que los ultimos datos no son lineales, ya que a partir de cierto punto el instrumento se satura de tal manera que los datos confiables deben ser analizados nuevamente siguiendo el mismo proceso mostrados en el diagrama de flujo de la figura de análisis de la regresión simple.

### Analisis de la adecuación de los datos

Debido a que en el anterior analisis no se comprueba la linealidad de la curva, se debe hallar el rango lineal de la misma, para con ello definir en que rango el instrumento tienen su funcionamiento adecuado y se sigue el procedimiento anterior donde la hipótesis  $H : \beta_1 = 0$  se probara nuevamente.

1. La curva de caracterización permite observar el comportamiento de las variables graficamente como se ve en la figura 176.

Figura 176: Curva de caracterización Transductor de presión



2. Ecuación de Correlación: La ecuación de correlación se halla usando el metodo de minimos cuadrados para este caso de estudio la ecuación de regresión se observa

a continuación:

$$y_0 = 0,0116x + 0,295 \quad (337)$$

El coeficiente de correlación  $R^2 = 1$  es decir comprende una relación lineal perfecta. Al contrario que en el análisis anterior esta medición estos resultados son mas confiables.

3. Analisis de varianza para la regresión: Esta dado por la tabla 60.

Cuadro 60: ANOVA para la regresión

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media cuadrática	Fo
Regresión	6,1463	1	6,1463	5,459e5
Erros	1.35e-4	12	1,259e-5	
Total	6,1464	16		

Si la hipótesis nula  $H_0: \beta_1 = 0$  es verdadera, el estadístico sigue a la distribución  $F_{1,n-2}$ , con lo que  $H_0$  debe rechazarse si  $f_0 > f_{\alpha,1,n-2}$  donde  $f_0$  esta dado por la ecuación 181. Usando como herramienta matlab y con una significancia del  $100(1-\alpha) \%$  hallamos el valor de  $f_{\alpha,1,n-2}$  en tablas.

De donde  $f_{\alpha,1,n-2} = 4,75$

Y probamos que  $f_0 > f_{\alpha,1,n-2}$  y se rechaza la hipótesis por tanto se concluye que las variables si tienen algún tipo de relación.

4. Evaluación del modelo de regresión

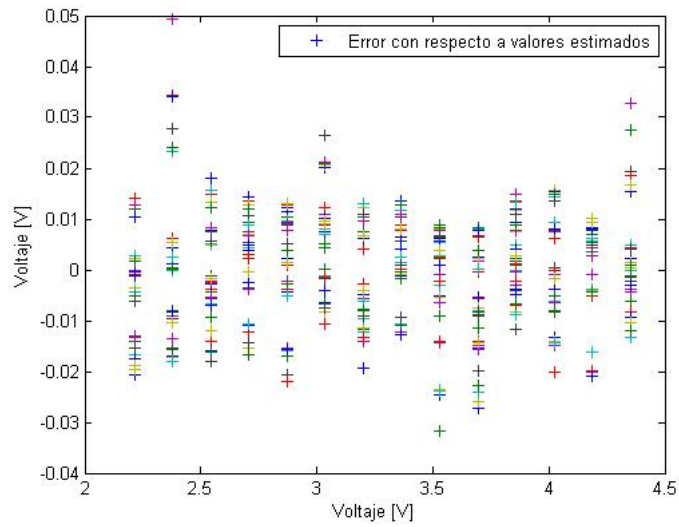
La validez de estas suposiciones deben ser estudiadas para determinar que tan adecuado es el modelo lineal, para ello existen diferentes métodos :

- El análisis residual
- Coeficiente de determinación ( $R^2$ ).
- Prueba de falta de ajuste

a) Analisis residual.

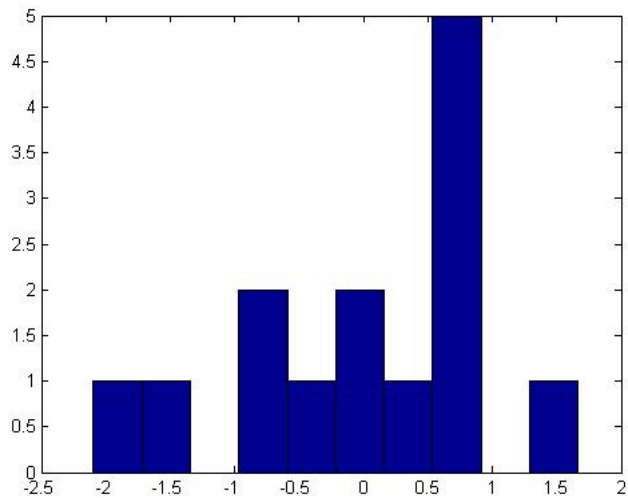
Para verificar que los errores se distribuyen de manera normal con varianza constante se emplea este método, donde el experimentador puede construir un histograma de frecuencias o una gráfica de probabilidad normal de los residuos.

Figura 177: Grafica de probabilidad de los residuos



El histograma de los errores que se observa en la figura 189 nos permite comprobar el comportamiento normal estandar de los errores del experimento.

Figura 178: Histograma de los errores



*b)* Prueba de falta de ajuste

Para ello se plantean dos hipótesis:

Ho: El modelo de regresión lineal simple es el adecuado para la caracterización del transductor de presión.

H1: El modelo de regresión lineal simple no es el adecuado para la caracterización del transductor de presión.

- Se debe dividir la suma de los errores en los siguientes componentes como se observa en la tabla 61:

$$SSE = SSPE + SSLOF \quad (338)$$

Cuadro 61: Análisis de varianza final

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media cuadrática	Fo
Regresión	6,1463	1	6,1463	5,45e5
Error	1,3511e-4	12	1,259e-5	
(Falta Ajuste)	-0.0478			-33,783
(Error puro)	0.0479			
Total	6,1464	14		

De donde  $f_{\alpha,1,n-2} = 1,72$  de tabla

Y probamos que  $f_0 < f_{\alpha,m-2,n-m}$

$1,72 > -33,783$  Entonces la hipótesis nula se acepta, lo que quiere decir que el modelo de regresión lineal simple es correcto

### Incertidumbre

Se hallan los intervalos de confianza para cada muestra como se observa en la tabla 82.

Tabla 62: Intervalos de confianza

Presión [Psi]	Voltaje	Desviación	Intervalo de confianza	Intervalo %	Incertidumbre
26,999	0,3418	0,0111	$\pm 2,11E-6$	$6,17e-4$	0,0035
41,209	0,5061	0,0173	$\pm 1,60e-6$	$3,17e-4$	0,0054
55,419	0,6705	0,0104	$\pm 1,18e-6$	$1,76e-4$	0,0032
69,629	0,8349	0,0095	$\pm 8,40e-6$	$1,01e-4$	0,003
83,839	0,999	0,0011	$\pm 5,86e-7$	$5,86e-4$	0,0034
98,049	1,1636	0,01	$\pm 4,16E-7$	$3,58e-5$	0,0031
112,259	13280	0,0098	$\pm 3,32e-7$	$2,50e-5$	0,0031
126,469	1,4923	0,0082	$\pm 3,32E-7$	$2,22E-5$	0,0026
140,679	1,6567	0,0111	$\pm 4,16e-7$	$2,51e-5$	0,0035
154,889	1,8211	0,011	$\pm 5,86e-7$	$3,22e-5$	0,0034
169,099	1,9855	0,0075	$\pm 8,4 e-7$	$4,23e-5$	0,0023
183,309	2,1498	0,0104	$\pm 1,18e-6$	$5,48e-5$	0,0033
197,519	2,3142	0,0104	$\pm 1,60e-6$	$6,92e-5$	0,0033
211,729	2,4786	0,0103	$\pm 2,11e-6$	$8,51e-6$	0,0035

## Tabla de conclusiones

El resumen de los resultados se observa en la tabla 63.

Tabla 63: Resultados Finales

Ecuación de regresión	$y_o = 0,0116x + 0,295$
Coefficiente de determinación	$R^2=1$
promedio de los errores	2,574 e -3
Rango de operación de entrada definido desde: $x_{mín}$ hasta $x_{máx}$ .	$r_i = x_{máx} - x_{mín} \quad (339)$ $r_i = 210psi - 27psi$ $r_i = 183psi$
Rango de salida o intervalo de operación a máxima escala (FSO, full-scale operating range) definido desde: $y_{mín}$ hasta $y_{máx}$ .	$r_o = y_{máx} - y_{mín} \quad (340)$ $r_i = 2,4811 - 0,3375$ $r_i = 2,1426V$
Media del intervalo	1,0091e-6
Media de la incertidumbre	0,0033

## 11.2 ANALISIS DE UNA VIGA EN VOLADIZO PORTATIL INSTRUMENTADA CON STRAIN GAGE

### 11.2.1 Esfuerzo y deformación

El análisis experimental del esfuerzo se realiza al medir la deformación de una parte bajo carga e inferir el estado de esfuerzo que existe a partir de las deflexiones medidas. Se entiende por esfuerzo la intensidad de las fuerzas componentes internas distribuidas que resisten un cambio en la forma de un cuerpo, éste se define en términos de fuerza por unidad de área. Existen tres clases básicas de esfuerzos: tensivo, compresivo y corte.

La deformación se define como el cambio de forma de un cuerpo, el cual se debe al esfuerzo, al cambio térmico, al cambio de humedad o a otras causas. Esta generalmente se expresa como un cambio de longitud por la longitud original, si bien es adimensional, en muchos casos se suele expresar en unidades de mm/mm. En la mayoría de las estructuras los valores de deformación son usualmente muy pequeños; por ejemplo, un acero de baja resistencia tendrá una deformación permanente a una deformación cerca de sólo 0.0014. Como un resultado es común hablar acerca de la deformación en unidades de microdeformación ( $\mu$  deformacion). La microdeformación es la deformación actual multiplicada por  $10^6$ . Así, una deformación de 1400  $\mu$ deformacion es una deformación de 0.0014.

Para materiales elásticos tensionados en una dirección (tensión uniaxial), la deformación está relacionada con la tensión por la Ley de Hooke,

$$\sigma = E\epsilon$$

donde  $\sigma$  es la tensión normal y E es una propiedad del material llamada el módulo de elasticidad (también llamado módulo de Young). La ecuación es algo más complicada si el material es tensionado en más de una dirección. Los diagramas de esfuerzo-deformación son muy importantes para entender el comportamiento de un material bajo carga. Para cargas menores a las requeridas para deformar de manera permanente el material, la mayoría de los materiales de ingeniería presentan una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación.

Los diferentes materiales responden de diversas maneras para cargas que van más allá del intervalo lineal, dependiendo de gran medida si el material es dúctil o quebradizo, sin embargo generalmente en ingeniería, los niveles de esfuerzo se diseñan para permanecer por debajo del límite elástico del material; por lo tanto, entre el esfuerzo y la deformación se establece una relación lineal directa. Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, la ley de Hooke forma la base para el análisis de esfuerzo experimental a través de la medición de la deformación.

#### 11.2.1.1 Relación de Poisson

En el intervalo elástico, hay una tasa constante de cambio en la deformación lateral, conforme la deformación axial se incrementa, por lo tanto, cuando una barra esta sometida a una carga de tracción simple, se produce en ella un aumento de longitud en la dirección de la carga, así como una disminución de las dimensiones laterales perpendiculares a esta. Las deformaciones laterales que se producen tienen una relación constante con las deformaciones axiales; mientras que el material se mantenga dentro del rango elástico de esfuerzos, esta relación es constante.

La relación entre la deformación en la dirección lateral (transversal) y la de la dirección axial se define como relación de Poisson., está representada por  $\nu_p$  y la ecuación [eq : *poisson*] :  $\nu_p = \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_a}$ .

Donde:

$\varepsilon_L$  : *Deformación lateral (transversal)*

$\varepsilon_a$  : *Deformación axial (longitudinal)*

Del mismo modo que el módulo de elasticidad es una propiedad de determinado material, la razón de Poisson también lo es. Para la mayoría de los metales dicha relación está entre 0.25 y 0.35. Aunque las deformaciones laterales se producen en todos los cuerpos sometidos a esfuerzos, generalmente no afectan los esfuerzos longitudinales.

## 11.2.2 Medición de deformación

Cuando una fuerza se aplica a una estructura, los componentes de la estructura cambian levemente en sus dimensiones y se dice que están deformados. Los dispositivos que miden estos pequeños cambios en las dimensiones se llaman medidores de deformación o galgas.

### 11.2.2.1 Galga de resistencia eléctrica

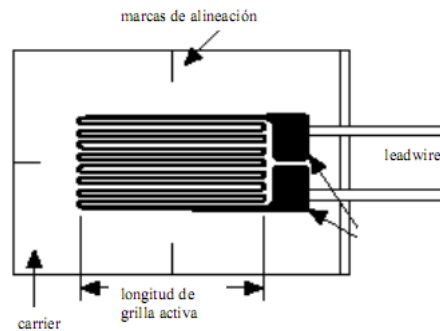
La galga de resistencia eléctrica es un dispositivo extremadamente común usado para medir la deformación en estructuras y también como elemento sensor en una amplia variedad de transductores, incluyendo aquellos usados para medir fuerza, aceleración, y presión. Las galgas de resistencia eléctrica y los acondicionadores de señal asociados son simples, económicos y bastante confiables.

En el proceso de diseño en ingeniería, se conocen varios métodos para medir el esfuerzo, pero el más utilizado es mediante un strain gage, dispositivo cuya resistencia eléctrica varía de forma proporcional al esfuerzo a que éste es sometido. Es difícil medir la tensión directamente, pero una galga puede ser usada para medir la deformación, y luego las propiedades del material pueden ser usadas para determinar la tensión; el parámetro strain puede ser positivo (tensión) o negativo (compresión).

Como se observa en la figura 179 el strain gage más ampliamente utilizado es el confinado en papel metálico, este consiste en un cable muy fino o papel aluminio dispuesto en forma de grilla. Esta grilla, maximiza la cantidad de metal sujeto al esfuerzo en la dirección paralela. La grilla está pegada a un fino respaldo llamado "carrier", el cual está sujeto directamente a la pieza bajo medida. Por lo tanto, el esfuerzo experimentado por la

pieza es transferido directamente al strain gage, el cual responde con cambios lineales de resistencia eléctrica.

Figure 179: Strain gage metálico



Es de suma importancia que el strain gage sea apropiadamente montado sobre la pieza para que el esfuerzo sea transferido adecuadamente desde la pieza a través del adhesivo y el material de respaldo hasta la misma grilla metálica.

Un parámetro fundamental de los strain gages es la sensibilidad al esfuerzo, expresado cuantitativamente como el factor de galga (GF). El factor de galga está dado por la ecuación 341

$$GF = \frac{\Delta R/R}{\Delta L/L} = \frac{\Delta R/R}{\epsilon} \quad (341)$$

El factor de galga típico para un strain gage metálico está entre los valores de 2 a 3. Si la temperatura se mantiene constante, el cambio en la resistividad es aproximadamente proporcional a la deformación; siendo esto así, se puede ver al examinar la ecuación 341 que el factor de galga es una constante.

Aunque algunas galgas son construidas con forma de cables rectos, es más común grabarlas de delgadas hojas de papel metálico que están unidas a un soporte plástico, este soporte puede, a su vez, estar pegado a la estructura para la que se desea medir la deformación. Los factores de galga, que dependen del metal, son usualmente aproximadamente 2 pero pueden ser tan altos como 6. Deformaciones del orden de  $40.000\mu\epsilon$  pueden medirse rutinariamente, y deformaciones tan altas como  $200.000\mu\epsilon$  (20 % de elongación) pueden medirse con galgas especiales (Norton, 1982).

### 11.2.2.2 Selección del strain gage

El paso inicial para preparar la instalación de cualquier strain gage es la elección de la galga apropiada para la tarea específica. Una selección racional y cuidadosa de las

características y parámetros del strain gage puede ser muy importante en lo que respecta a la obtención de una medida de esfuerzo confiable y precisa, y a la facilidad y costo de instalación. Muchos factores, como la duración en el tiempo, el rango de esfuerzo requerido, y la temperatura de operación deben ser considerados para elegir la mejor combinación de strain gage/adhesivo para una prueba determinada.

### **11.2.2.3 Parámetros del strain gage**

La instalación y las características de operación del strain gage están afectadas por los siguientes parámetros:

- Sensibilidad al esfuerzo de la aleación
- Autocompensación de la temperatura
- Material de respaldo (carrier)
- Resistencia de la grilla
- Longitud de la galga
- Patrón de galga

### **11.2.2.4 Parámetros a evaluar**

Basicamente, el proceso de selección de la galga consiste en determinar una combinación particular de parámetros que sea lo más compatible con las condiciones ambientales y de operación, y al mismo tiempo, que mejor satisfaga la instalación y requerimientos. Estos requerimientos pueden ser:

- Precisión
- Durabilidad
- Estabilidad
- Temperatura
- Facilidad de instalación
- Elongación

### **11.2.3 Tipos de aleaciones para strain gages**

Para el estudio de este parámetro, se tratarán los modelos de strain gage de Vishay Micro-Measurements puesto que son los que se utilizarán para la medición.

El componente principal que determina las características de operación de un strain gage es la aleación sensible al esfuerzo que compone la grilla de papel metálico. Sin embargo, la aleación no es en todos los casos un parámetro independiente. En la tabla 64 se puede observar las variedades de aleaciones de strain gage dadas por Micro-Measurements.

Table 64: Aleaciones de Strain Gages

TIPO	COMPONENTES	VENTAJAS
<b>ALEACIÓN A</b>	Constantan, una aleación de cobre y níquel, autocompensado por temperatura.	Cumple con un amplio rango de coeficientes de expansión de materiales.
<b>ALEACIÓN P</b>	Constantan templado	Medición de esfuerzos muy grandes, (50000 microstrain) o más.
<b>ALEACIÓN D</b>	Aleación isoelástica de cromo y níquel	Larga vida útil soportando la fatiga comparada con las aleaciones A, y un alto factor de galga ( $\approx 3.2$ ). Mediciones de esfuerzo puramente dinámicas.
<b>ALEACIÓN K</b>	Aleación de cromo y níquel; Karma autocompensado por temperatura.	Buena vida útil y excelente estabilidad; es muy recomendada para mediciones estáticas de esfuerzo de alta precisión durante largos periodos de tiempo (meses o años) a temperatura ambiente.

## 11.2.4 Características de un strain gage.

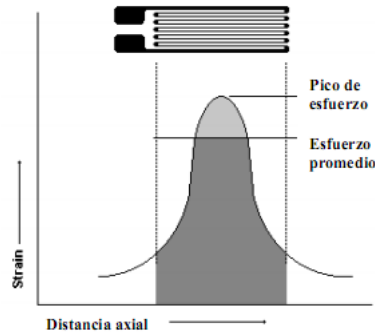
### 11.2.4.1 Longitud

Es la región activa o longitud de la grilla sensible al esfuerzo de una galga. Para satisfacer las amplias necesidades de análisis de esfuerzos se ofrecen longitudes de galgas que van de 0.2 mm a 100 mm.

La longitud de la galga es usualmente un factor muy importante a la hora de determinar su rendimiento bajo ciertas circunstancias. Los strain gage tienden a integrar, o promediar, el área cubierta por la grilla, la figura 180 ilustra de forma representativa la distribución de esfuerzo en la vecindad de la concentración de esfuerzo, y demuestra el error en el

esfuerzo indicado para un strain gage demasiado largo con respecto a la zona de máximo esfuerzo.

Figure 180: Distribución del esfuerzo sobre un strain gage



Como regla general, en lo posible, la longitud de la galga no debe ser mayor a la dimensión de la causa del esfuerzo para que la medición sea aceptable. Cuando la causa del esfuerzo es pequeña, del orden de 13 mm, la regla general conduciría a longitudes de galgas muy pequeñas.

Cuando se justifica su empleo, las galgas largas ofrecen ciertas ventajas como su fácil manipulación en los aspectos de instalación y cableado que las galgas en miniatura, proveen una mejor disipación de calor porque debido a su resistencia nominal tienen menor potencia por unida de área de grilla.

Otra aplicación de los strain gage largos (en este caso, muy largos) es la medición de esfuerzos sobre los materiales no homogéneos, en otras palabras, cuando se mide esfuerzo sobre estructuras formadas por distintos compuestos de cualquier clase, la longitud de la galga debe ser mayor a la de las partículas del material no homogéneo.

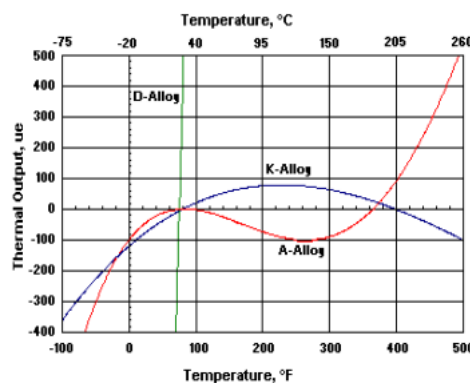
En algunas ocasiones, la única diferencia entre dos galgas disponibles de la misma serie, es la resistencia eléctrica, típicamente  $120\Omega$  contra  $350\Omega$ . Cuando existen estas opciones, la galga con mayor resistencia se prefiere pues reduce la generación de calor en un factor de tres aplicando el mismo voltaje sobre la galga. Si las direcciones de los esfuerzos se conocen de antemano, una roseta de elementos de dos elementos,  $90^\circ$  puede ser empleada con las direcciones de los ejes alineadas con los esfuerzos.

#### 11.2.4.2 Autocompensación de temperatura

Una importante propiedad compartida tanto por los strain gage de aleación *A* y aleación *K* es su respuesta a procesos especiales gracias a su autocompensación de temperatura.

Las galgas autocompensadas son diseñadas para producir una salida térmica mínima debido a que la temperatura induce esfuerzos aparentes, dicha salida esta sobre un rango de temperatura que va desde los  $-45^{\circ}\text{C}$  a los  $+200^{\circ}\text{C}$ . Cuando se elige un strain gage compuesto tanto de constantan (aleación *A*) o Karma modificado (aleación *K*), se debe especificar el número STC. Este número es una aproximación al coeficiente de expansión térmico en  $\text{ppm}/^{\circ}\text{F}$  del material estructural sobre el cual la galga mostrará una mínima salida térmica. En la figura 181 se ilustra las características térmicas típicas de salida para aleaciones de tipo *A*, *K* y *D* esfuerzo.

Figure 181: Curvas de salida en función de la temperatura



Si el número STC es incorrecto, las curvas de salida térmica para aleaciones tipo *A* y *K* suministradas con cada paquete de strain gages, no son aplicables, y será necesario calibrar la salida térmica de la instalación como una función de la temperatura.

### 11.2.5 Parámetros que afectan la precisión de un strain gage.

En las pruebas y mediciones mecánicas, es importante entender como un objeto reacciona a varias fuerzas. Cuando se mide esfuerzo, se mide la cantidad de deformación que un cuerpo sufre debido a las fuerzas aplicadas usando un strain gage. Lo primero que se hace es colocar el strain gage sobre la pieza de prueba, aplicar la fuerza y medir el esfuerzo detectando cambios en la resistencia. Idealmente, se espera que la resistencia del strain gage varíe sólo con la fuerza aplicada, sin embargo, los materiales del strain gage, las pistas de cobre y la pieza de prueba a la que la galga se encuentra sujeta también responden a cambios de temperatura.

El rendimiento de un strain gage para cualquier aplicación se ve afectado por cualquier elemento que interviene en el diseño y manufactura de la galga. Micro-Measurements ofrece una gran variedad de tipos de galgas para cumplir con un amplio rango de medidas

de esfuerzo. A pesar del gran número de variables en juego, el proceso de selección de una galga se puede resumir a sólo unos pocos pasos:

1. Longitud de la galga:

Como una buena medida inicial, se puede elegir una galga de 3 mm de longitud. Esta medida ofrece una amplia gama de posibilidades dentro de las cuales se puede elegir los restantes parámetros de galgas como el patrón, serie y resistencia. Las galgas de esta longitud proveen rendimientos comparables a las de mayores longitudes. Las principales razones para seleccionar una galga de mayor longitud normalmente son:

- Una mayor área de grilla para mejorar la disipación de calor.
- Mejorar el promedio del esfuerzo sobre materiales no homogéneos como puede ser compuestos de fibra reforzados.
- Un menor manejo e instalación.

Por otro lado, una galga de menor longitud puede ser necesaria cuando el objeto a medir registra picos de esfuerzo, esto sucede cuando las dimensiones para instalar la galga son restringidas.

2. Patrón de grilla:

Cuando se selecciona el patrón de grilla, la primera consideración es si se elige una simple o si se necesita una roseta. Las grillas simples cuentan con diferentes relaciones longitud-amplitud y varios tipos de almohadillas para adaptarse a las distintas relaciones.

3. Serie de la galga:

Esta selección permite determinar la combinación entre el papel metálico y el papel de respaldo. Todo esto se realiza haciendo referencia a una tabla que recomienda a una serie en particular para ciertos requerimientos específicos.

4. Resistencia de la galga:

Existen ciertas ventajas al seleccionar una galga de  $350\Omega$  de resistencia si ésta es compatible con los instrumentos utilizados para realizar la medición. Esta decisión puede ser influenciada por consideraciones del costo, particularmente en el caso de galgas pequeñas. Se debe tener en cuenta que se reduce la vida útil por fatiga para galgas de pequeñas dimensiones y altas resistencias.

5. Número STC:

Este número se escoge entre todos los disponibles utilizados en la tabla “Standard Gage Series” en conjunto del catálogo 500, de “Micro-Measurements Precision Strain Gages”

#### 6. Temperatura:

Los cambios de temperatura producen dilatación o contracción del material, con lo cual se generan deformaciones térmicas o esfuerzos térmicos. En la mayoría de los materiales estructurales la deformación térmica es proporcional al cambio de temperatura. Los efectos relacionados con la temperatura son los principales causantes de errores de medición de esfuerzos.

### 11.2.6 Acondicionamiento de la señal de la galga.

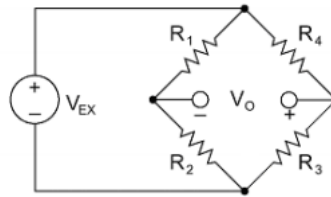
Un circuito simple que realiza esta función, llamado el puente de Wheatstone, es mostrado en la Figura 8.5. Si las cuatro resistencias de la Figura 8.5 tienen el mismo valor (esta restricción se cambiará en breve), por simetría, el voltaje en los puntos B y D deben ser iguales, entonces  $V_0$  debe ser cero. Entonces se dice que el puente está balanceado.

En la práctica, las mediciones con strain gages raramente involucran cantidades mayores que unos pocos milistrain ( $m\varepsilon$ ), consecuentemente, simplemente medir la resistencia de la galga antes y después de aplicar la carga no funcionará muy bien ya que el cambio en la resistencia puede estar en el orden de la resolución del dispositivo de medición. Lo que se necesita es un dispositivo que mida el cambio en la resistencia en vez de la resistencia misma. Por lo tanto, para calcular el esfuerzo se requiere de máxima precisión sobre pequeños cambios de resistencia. Para medir cambios tan pequeños de resistencia y compensar la sensibilidad térmica, los strain gage son utilizados en configuración de puente con excitación externa.

En la figura 182 se muestra el circuito general de puente de Wheatstone, que consta de cuatro brazos resistivos con una excitación de voltaje  $V_{EX}$ , aplicada a través del puente. El voltaje de salida del puente,  $V_O$ , está dado por la ecuación 342.

$$V_O = \left[ \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right] \quad (342)$$

Figure 182: Puente de Wheatstone



Cuando:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}$$

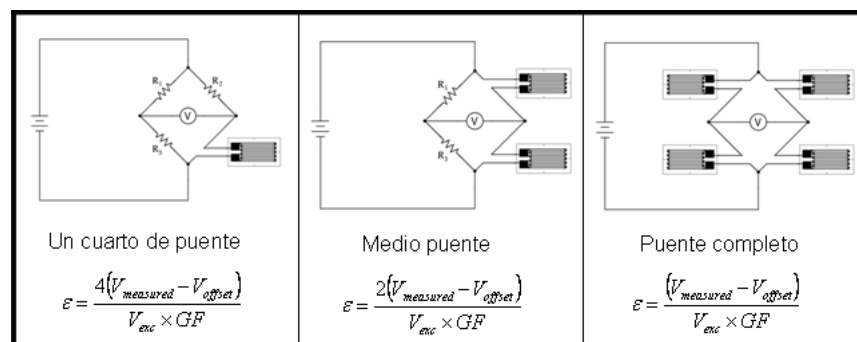
El voltaje de salida  $V_o$  es nulo y se dice que el puente está balanceado. Cualquier cambio de resistencia sobre cualquier brazo del puente, resultará en una salida de voltaje no nula. Por lo que si se reemplaza  $R_4$  con un strain gage activo, cualquier cambio en la resistencia del strain gage causa el desbalance del puente y produce una salida de voltaje no nula proporcional al esfuerzo.

### 11.2.6.1 Configuraciones de puente de wheatstone

La manera mas facil para corregir las variaciones causadas por la temperatura es mediante la utilización de configuraciones de medio puente y puente completo. Al usar dos o cuatro galgas sobre un puente de Wheatstone, se puede minimizar los efectos de la temperatura. Con todos los strain gages sobre el puente a la misma temperatura y montados sobre el mismo material, cualquier cambio en la temperatura afectará a todas las galgas de la misma manera. Puesto que los cambios de la temperatura son idénticos en todas las galgas, la relación de sus resistencias no varía, y el voltaje de salida de cada galga tampoco.

En la figura 183 se muestran las distintas configuraciones del puente de Wheatstone cuando se usan uno, dos y cuatro strain gages.

Figure 183: Configuraciones de Puente de Wheatstone



El incluir más de una galga en el puente provee un beneficio de compensación de temperatura. La resistividad de la mayoría de los metales es una función bastante fuerte de la temperatura, y la resistividad afecta el factor de galga GF. Además, hay una expansión diferencial térmica entre la galga y la estructura a la que está unida. Consecuentemente, un cambio en la temperatura de una galga instalada produce una deformación aparente en ausencia de cualquier carga estructural real. El cambio total en la resistencia es causado por los dos efectos, la deformación actual y la deformación aparente causada por los efectos de la temperatura, lo dicho anteriormente está expresado en la ecuación 343.

$$\Delta R_{total} = \Delta R_{deformacion} + \Delta R_{temperatura} \quad (343)$$

En un experimento, un cambio en la temperatura podría confundirse con un cambio en la deformación. Este problema puede solucionarse si se ubican dos galgas en la estructura de interés y conectándolas en el puente como  $R_2$  y  $R_3$ . La resistencia de  $R_2$  y  $R_3$  cambiará la misma cantidad en la misma dirección. Como resultado, el voltaje de salida no cambiará pues los efectos de la temperatura se cancelan. En la aplicación más simple de este concepto, la galga  $R_3$  es la galga activa y la galga  $R_2$  está unida a la misma estructura pero en una región con la misma temperatura que no estará sujeta a deformación. De esta manera se puede medir la deformación, pero se cancelarán los efectos de la temperatura. La galga  $R_2$  se conoce como galga de prueba o de compensación.

### 11.2.7 Caso de estudio: Modulo de elasticidad a la flexión de una viga en voladizo portatil instrumentada con strain gage.

El módulo de Young o módulo elástico longitudinal es un parámetro que caracteriza el comportamiento de un material elástico, según la dirección en la que se aplica una fuerza.

Tanto el módulo de Young como el límite elástico son distintos para los diversos materiales. El módulo de elasticidad es una constante elástica que, al igual que el límite elástico, puede encontrarse empíricamente con base al ensayo de tracción del material.

Para un material elástico lineal el módulo de elasticidad longitudinal es una constante para valores de tensión dentro del rango de reversibilidad completa de deformaciones. En este caso su valor se define mediante el coeficiente de la tensión y de la deformación que aparecen en una viga recta estirada que esté fabricada en el material para el cual se desea estimar el módulo de elasticidad, y está dado por la ecuación 344:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (344)$$

Donde:

$\sigma$  :Presión ejercida sobre el área de sección transversal del objeto

$\epsilon$  :Deformación unitaria en cualquier punto de la viga.

$E$  :Modulo de elasticidad

### **11.2.7.1 Objetivo de experimento**

Hallar la deformación de una viga cantilever experimentalmente y comparar con un modelo teórico calculado matematicamente

### **11.2.7.2 Selección de las variables de interes**

Variable independiente controlada: Peso [gra]

Variable dependiente de la calibración: Voltaje de salida medida [V]

$V_i$ =Voltaje de entrada=10 voltios

$fg$ =Factor de Galga=2,3

### **11.2.7.3 Montaje experimental**

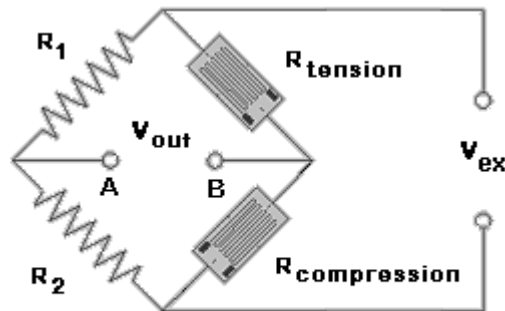
Para garantizar buenos resultados se debe asegurar un buen manejo de los strain gages por tal razon es importante realizar un buen pegado y preparación de la superficie, a continuación se mostrara de forma grafica como pegar los strain gage a las superficies.

Figura 184: Procedimiento de montaje



El puente de Wheatstone que se uso fue medio puente como se observa en la figura.

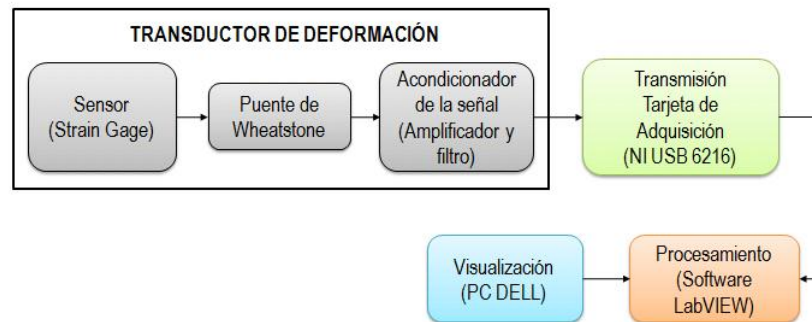
Figura 185: Medio puente



#### 11.2.7.4 Desarrollo de la prueba experimental y adquisición de datos

1. Adquisición de datos : El procedimiento de recolección de datos se realizo de acuerdo a la gráfica de la figura 186.

Figura 186: Sistemas de adquisición de datos



### 11.2.7.5 Análisis probabilístico de los resultados

El análisis probabilístico se realizó usando como herramienta matlab para facilitar el proceso de cálculo y realización de graficas, los parametros experimentales los encontramos a continuación:

- Variable independiente controlada: Pesos [Gr]
- Variable dependiente de la calibración: Voltaje de salida medida [V]
- Tabla de datos obtenidos ver anexo H.2

### 11.2.7.6 Comprobación de parametros

#### 1. Planteamiento de la hipótesis.

Siguiendo el procedimiento de caracterizar instrumentos, se pretende comprobar la linealidad del sensor strain, empleando métodos estadísticos como la regresión lineal estudiado en el capítulo 8, la hipótesis a probar inicialmente permitirá determinar si existe una relación matemática entre las variables independiente y dependiente de la curva de regresión, si la pendiente de la curva de regresión es igual a cero quiere decir que no existe ninguna relación entre las variables, y la hipótesis nula no se rechaza.

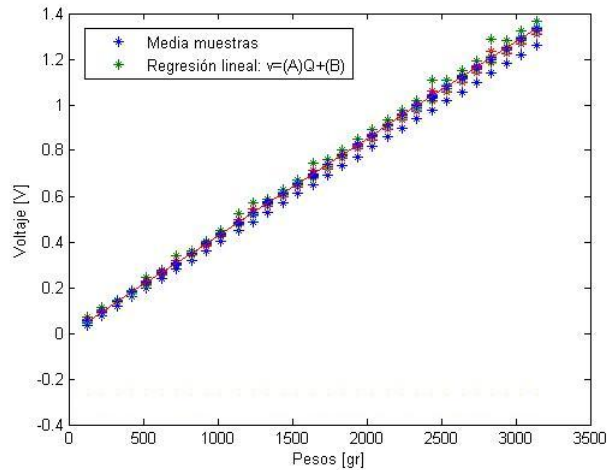
Hipótesis Nula:  $\beta = 0$

Hipótesis Nula:  $\beta \neq 0$

La hipótesis completa es asumir que los errores están distribuidos de manera normal e independiente con media cero y varianza  $\sigma^2$ , para aplicar el método de mínimos cuadrados.

- Curva de caracterización: Permite observar el comportamiento de las variables gálicamente como se observa en la figura 187.

Figura 187: Curva de caracterización Straing



- Ecuación de Correlación: La ecuación de correlación se halla usando el método de mínimos cuadrados, para este caso de estudio la ecuación de regresión se observa a continuación:

$$y_o = 4,2589e - 4 * x + 5,1368e - 5 \quad (345)$$

El coeficiente de correlación  $R^2 = 1$ , una relación lineal perfecta es cuando el coeficiente de correlación es igual a 1. Es decir en nuestro primer análisis la relación entre las variables es demasiado fuertes.

- Prueba de Hipótesis

Se probara la hipótesis usando el método de análisis de varianza para la regresión estudiada en el capítulo 8.

#### 11.2.7.7 Análisis de varianza para la prueba de significancia de la regresión.

Para probar la significancia de la regresión puede usarse un método conocido como análisis de varianza para la regresión estudiado en el capítulo 8. El procedimiento particiona la variabilidad total en la variable de respuesta en componentes más manejables los cuales se observan en la tabla 65.

Tabla 65: Anova para la regresión

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media cuadrática	Fo
Regresión(SSR)	4,9087	1	4,9087	3.2336 e6
Error(SSE)	4,554e-5	30	1,518e-6	
Total	4,9087	31		

Si la hipótesis nula  $H_0: \beta_1 = 0$  es verdadera, el estadístico sigue a la distribución  $F_{1,n-2}$ , con lo que  $H_0$  debe rechazarse si  $f_0 > f_{\alpha,1,n-2}$  donde  $f_0$  esta dado por la ecuación 181. Usando como herramienta matlab y con una significancia del  $\alpha=0,05$  hallamos el valor de  $f_{\alpha,1,n-2}$

De donde  $f_{\alpha,1,n-2} = 4,18$

Y probamos que  $f_0 > f_{\alpha,1,n-2}$  y se rechaza la hipótesis por tanto se concluye que las variables si tienen algún tipo de relación.

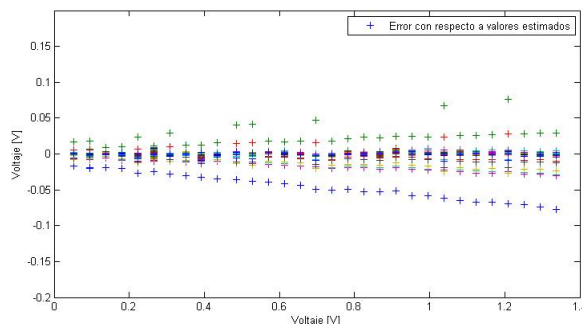
#### 5. Evaluación del modelo de regresión

La validez de estas suposiciones deben ser estudiadas para determinar que tan adecuado es el modelo lineal, para ello existen diferentes métodos :

- El análisis residual
- Coeficiente de determinación ( $R^2$ ).
- Prueba de falta de ajuste

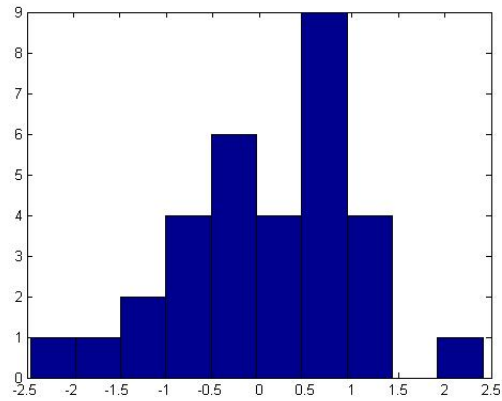
a) Analisis residual: Para verificar que los errores se distribuyen de manera normal con varianza constante se emplea este método, donde el experimentador puede construir un histograma de frecuencias o una gráfica de probabilidad normal de los residuos. La grafica de probabilidad de los residuos se observa en la figura 188.

Figura 188: Grafica de probabilidad de los residuos



El histograma que se observa en la figura permite comprobar la normalidad de los errores.

Figura 189: Histograma de los errores



b) Prueba de falta de ajuste

Se plantean dos hipótesis:

Ho: El modelo de regresión lineal simple es el adecuado para la caracterización del transductor de presión.

H1: El modelo de regresión lineal simple no es el adecuado para la caracterización del transductor de presión.

- Se debe dividir la suma de los errores en los siguientes componentes como se observa en la tabla 66:

$$SSE = SSPE + SSLOF \tag{346}$$

Tabla 66: Análisis de varianza final

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media cuadrática	Fo
Regresión	4,9087	1	4,9087	3.2336 e6
Error	4,554e-5	30	1,518e-6	
Falta Ajuste	0.1687			-1,056e3
Error puro(SSPE)	0.1687			
Total	4,9087	31		

El estadístico de prueba para la falta de ajuste será  $F_0 = -1.056e3$

De donde  $f_{\alpha, m-2, m-n} = 1,5018$  de tabla de la distribución  $f$  tenemos  $m=32$  y  $n=31721$ .

Y probamos que  $f_0 < f_{\alpha, m-2, n-m}$

$-1,056e3 > 1,5018$  Entonces la hipótesis se acepta lo que quiere decir que el modelo de regresión lineal simple es correcto

#### 11.2.7.8 Incertidumbre e intervalos de confianza

Se hallan los intervalos de confianza para cada muestra como se observa en la tabla 67.

La incertidumbre se halla con la ecuación 347.

$$incertidumbre = z * \frac{S}{n} \quad (347)$$

Donde:  $z$  = estadístico hallado por tabla.

$S$  = desviación estándar

$n$  = tamaño muestral

Tabla 67: Intervalos de confianza

Pesos[gr]	Voltaje	Desviación	Intervalo de confianza	Incertidumbre
123,33	0,05236	0,0013	$\pm 1,0037e-7$	0,0001784
221,36	0,094003	0,0012	$\pm 8,7556e-8$	0,0001415
222,18	0,09353	0,0013	$\pm 8,7453e-8$	0,0001465
323,21	0,1389	0,0012	$\pm 7,528e-8$	0,001476
441,24	0,1795	0,0012	$\pm 6,4175e-8$	0,0001992
522,1	0,2206	0,0016	$\pm 5,3776E-8$	0,0001536
623,13	0,2668	0,0019	$\pm 4,43e-8$	0,0001556
721,98	0,3069	0,0017	$\pm 3,594E-8$	0,000166
823,01	0,3511	0,0016	$\pm 2,8329e-8$	0,0002211
921,04	0,3911	0,0031	$\pm 2,1843e-8$	0,0004246
1022,07	0,4355	0,0017	$\pm 1,60e-8$	0,0002263
1138,48	0,4857	0,0020	$\pm 1,0621e-8$	0,0002774
1238,48	0,5282	0,0022	$\pm 6,9252e-9$	0,0002994
1338,48	0,5713	0,0017	$\pm 4,1517e-9$	0,0002354
1438,48	0,6132	0,0018	$\pm 2,3009e-9$	0,0002482
1538,48	0,6549	0,0018	$\pm 1,3729e-9$	0,0002515
1638,48	0,6956	0,0025	$\pm 1,3675e-9$	0,0003412
1738,48	0,7374	0,0020	$\pm 2,2849e-9$	0,0002759
1838,48	0,7834	0,0021	$\pm 4,125e-9$	0,000286
1938,48	0,8262	0,0023	$\pm 6,8878e-9$	0,0003106
2038,48	0,8678	0,0023	$\pm 1,057e-8$	0,0003206
2138,48	0,9137	0,0024	$\pm 1,518e-8$	0,0003267
2239,51	0,9544	0,0025	$\pm 2,0774e-8$	0,0003444
2337,54	0,9968	0,0026	$\pm 2,7101e-8$	0,0003538
2438,57	1,03923	0,0034	$\pm 3,45e-8$	0,0004684
2537,42	1,08141	0,0027	$\pm 4,2749e-8$	0,0003715
2638,45	1,1229	0,0028	$\pm 5,20e-8$	0,0003845
2739,31	1,1667	0,0028	$\pm 6,2296e-8$	0,0003873
2837,34	1,2094	0,0038	$\pm 7,144e-8$	0,000523
2938,37	1,2508	0,0029	$\pm 8,5251e-8$	0,0004033
3037,22	1,2937	0,0030	$\pm 9,8009e-8$	0,0004085
3138,25	1,3349	0,032	$\pm 1,1198e-7$	0,0004357

### 11.2.7.9 Tabla de Resultados

El resumen de los resultados se observa en la tabla 68.

Tabla 68: Resultados Finales

Ecuación de regresión	$y_o = 4,2589e - 4 * x + 5,1368e - 5$
Coficiente de determinación	$R^2 = 1$
promedio de los errores	2,574 e -3
Media del intervalo	1,0571e-7
Media de la incertidumbre	0,0002942

Partiendo de los voltajes obtenidos experimentalmente con una incertidumbre de  $\pm 0,0002942$ , se halla el valor de la deformación unitaria experimental de la viga usando la ecuación de deformación 348.

$$\varepsilon = \frac{2 * (V_o - off)}{V_i * fg} \quad (348)$$

Donde:

$V_o$ =voltaje salida

$off$ =Valor Ofset=0,296

$V_i$ =Voltaje de entrada=10 voltios

$fg$ =Factor de Galga=2,3

El esfuerzo se halla usando la ecuación 349. Ahora se calcula el modulo de Young de la ecuación 344, los resultados se encuentran en la tabla 69.

$$\sigma_l = \frac{6PL}{bt^2} \quad (349)$$

Donde:

P= Carga aplicada

L=Distancia del punto de aplicación de la carga a la linea=19,1cm

b=Largo de la platina=29,9 cm

t=Espesor de la platina = 5mm

Tabla 69: Tabla de resultados deformaciones

Deformación experimental.	Esfuerzo teorico[Mpas].	Modulo Young [Mpa]	Deformación teorica.	%error de las deformaciones
4,554E-11	2,857954252	62758257024	4,566E-11	2,736E-01
8,174E-11	5,129625827	62754039669	8,196E-11	2,669E-01
8,134E-11	5,148627874	63298753960	8,226E-11	1,125E+00
1,209E-10	7,489819134	61967928969	1,197E-10	9,983E-01
1,561E-10	9,761490709	62527725928	1,560E-10	9,405E-02
1,919E-10	12,09874252	63055047542	1,933E-10	7,430E-01
2,321E-10	14,43993378	62223631644	2,307E-10	5,832E-01
2,669E-10	16,7306074	62687506113	2,673E-10	1,611E-01
3,053E-10	19,07179866	62461528620	3,047E-10	2,001E-01
3,402E-10	21,34347024	62745926468	3,410E-10	2,540E-01
3,787E-10	23,6846615	62535561648	3,784E-10	8,151E-02
4,224E-10	26,38225701	62460576844	4,215E-10	2,017E-01
4,594E-10	28,69957984	62478494822	4,586E-10	1,729E-01
4,968E-10	31,01690268	62427438110	4,956E-10	2,549E-01
5,333E-10	33,33422551	62510551785	5,326E-10	1,216E-01
5,695E-10	35,65154835	62599143483	5,696E-10	2,014E-02
6,049E-10	37,96887118	62768377703	6,067E-10	2,897E-01
6,413E-10	40,28619402	62822545281	6,437E-10	3,757E-01
6,812E-10	42,60351685	62539009330	6,807E-10	7,600E-02
7,184E-10	44,92083969	62524698237	7,177E-10	9,890E-02
7,547E-10	47,23816252	62593855271	7,548E-10	1,169E-02
7,945E-10	49,55548535	62369791843	7,918E-10	3,475E-01
8,299E-10	51,89667661	62530314135	8,292E-10	8,991E-02
8,668E-10	54,16834819	62493124379	8,655E-10	1,495E-01
9,037E-10	56,50953945	62532636030	9,029E-10	8,620E-02
9,404E-10	58,80021307	62529486691	9,395E-10	9,124E-02
9,764E-10	61,14140433	62616250118	9,769E-10	4,745E-02
1,015E-09	63,47865614	62564927667	1,014E-09	3,454E-02
1,052E-09	65,75032772	62516126495	1,051E-09	1,126E-01
1,088E-09	68,09151898	62600232008	1,088E-09	2,188E-02
1,124E-09	70,3821926	62628736842	1,125E-09	6,738E-02
1,161E-09	72,72338386	62646937439	1,162E-09	9,642E-02

El modulo de Young experimental esta dado por la media de los modulos encontrados en la tabla 69, que es  $6,258 \times 10^{10}$  Pascales. El modulo de Young estandarizado para el aluminio es de  $6,3 \times 10^{10}$  Pascales. Hallando el porcentaje de error tenemos.

$$\%Error = \frac{6,3 \times 10^{10} - 6,1258 \times 10^{10}}{6,3 \times 10^{10}} \times 100 \quad (350)$$

$$\%Error = 0,6562$$

### 11.2.8 Caso de estudio: Analisis de esfuerzo en una viga con un concentrador de esfuerzo.

El propósito de este experimento es demostrar la existencia de concentraciones de tensiones y deformaciones en los alrededores de una discontinuidad geométrica en una viga cantilever, y obtener una medida aproximada de el factor de concentración de tensiones  $Kt$ , En este caso la discontinuidad es un simple agujero circular, taladrado a lo largo del espesor de la viga en su eje longitudinal.

La presencia de alguna irregularidad en el contorno de una elemento mecánico o en una parte de una estructura impide la normal propagación de las tensiones, de modo que se incrementa localmente la tensión por encima del valor nominal de la tensión calculada

por el método tradicional. Tales irregularidades y discontinuidades se les conoce como "concentradores de tensión", En el esquema que se muestra a continuación, se pueden ver las distribuciones de tensiones de dos secciones de una viga cantilever.

#### **11.2.8.1 Objetivo de experimento**

Hallar mediante la experimentación el factor de concentración de tensiones  $K_t$ , mediante la aplicación de técnicas estadísticas.

#### **11.2.8.2 Selección de las variables de interés**

1. Variable independiente controlada: Peso [gra]
2. Variable dependiente de la calibración: Voltaje de salida medida [V]

#### **11.2.8.3 Desarrollo de la prueba experimental y adquisición de datos**

1. Adquisición de datos: El procedimiento de recolección de datos se realizó de acuerdo a la gráfica de la figura 186.

#### **11.2.8.4 Análisis probabilístico de los resultados**

El análisis probabilístico se realizó usando como herramienta matlab para facilitar el proceso de cálculo y realización de gráficas, los parámetros experimentales los encontramos a continuación:

- Variable independiente controlada: Pesos [Gr]
- Variable dependiente de la calibración: Voltaje de salida medida [V]
- Tabla de datos obtenidos ver anexo H.3

#### **11.2.8.5 Comprobación de parámetros**

1. Planteamiento de la hipótesis.

Siguiendo el procedimiento de caracterizar instrumentos, se pretende comprobar la linealidad del sensor strain, empleando métodos estadísticos como la regresión lineal estudiado en el capítulo 8, la hipótesis a probar inicialmente permitirá determinar si existe una relación matemática entre las variables independiente y

dependiente de la curva de regresión, si la pendiente de la curva de regresión es igual a cero quiere decir que no existe ninguna relación entre las variables, y la hipótesis nula no se rechaza.

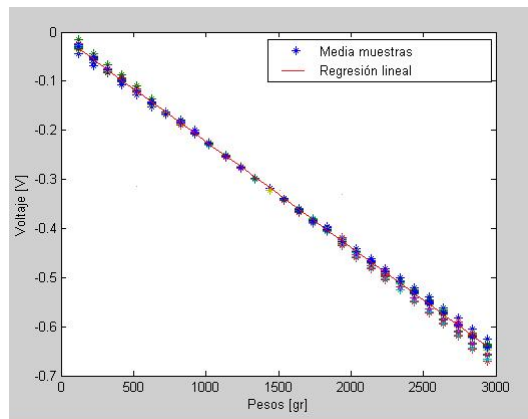
Hipótesis Nula:  $\beta = 0$

Hipótesis Nula:  $\beta \neq 0$

La hipótesis completa es asumir que los errores están distribuidos de manera normal e independiente con media cero y varianza  $\sigma^2$ , para aplicar el método de mínimos cuadrados.

2. Curva de caracterización: Permite observar el comportamiento de las variables gráficamente como se observa en la figura 190.

Figura 190: Curva de caracterización Straing



3. Ecuación de Correlación: La ecuación de correlación se halla usando el método de mínimos cuadrados, para este caso de estudio la ecuación de regresión se observa a continuación:

$$y_o = 0,0002 * x + 0,0076 \quad (351)$$

El coeficiente de correlación  $R^2 = 0,999$ , una relación lineal perfecta es cuando el coeficiente de correlación es igual a 1. Es decir en nuestro primer análisis la relación entre las variables es demasiado fuertes.

4. Prueba de Hipótesis

Se proba la hipótesis usando el método de análisis de varianza para la regresión estudiada en el capítulo 8.

### 11.2.8.6 Análisis de varianza para la prueba de significancia de la regresión.

Para probar la significancia de la regresión puede usarse un método conocido como análisis de varianza para la regresión estudiado en el capítulo 8. El procedimiento particiona la variabilidad total en la variable de respuesta en componentes más manejables los cuales se observan en la tabla 70.

Tabla 70: Anova para la regresión

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media cuadrática	Fo
Regresión(SSR)	1,0312	1	1,0312	2,2657 e5
Error(SSE)	1,27e-4	28	4,55e-6	
Total	4,9087	29		

Si la hipótesis nula  $H_0: \beta_1 = 0$  es verdadera, el estadístico sigue a la distribución  $F_{1,n-2}$ , con lo que  $H_0$  debe rechazarse si  $f_0 > f_{\alpha,1,n-2}$  donde  $f_0$  está dado por la ecuación 181. Usando como herramienta matlab y con una significancia del  $\alpha=0,05$  hallamos el valor de  $f_{\alpha,1,n-2}$

De donde  $f_{\alpha,1,n-2} = 4,20$

Y probamos que  $f_0 > f_{\alpha,1,n-2}$  y se rechaza la hipótesis por tanto se concluye que las variables si tienen algún tipo de relación.

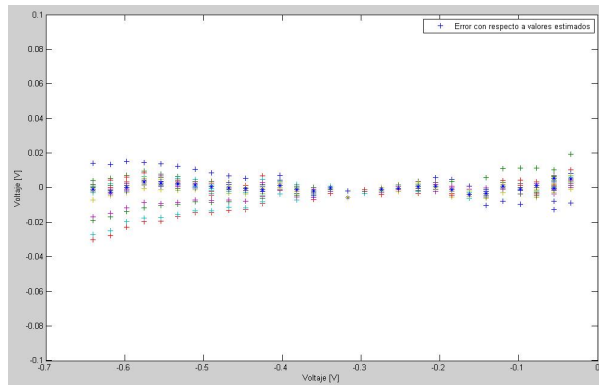
#### 5. Evaluación del modelo de regresión

La validez de estas suposiciones deben ser estudiadas para determinar que tan adecuado es el modelo lineal, para ello existen diferentes métodos :

- El análisis residual
- Coeficiente de determinación ( $R^2$ ).
- Prueba de falta de ajuste

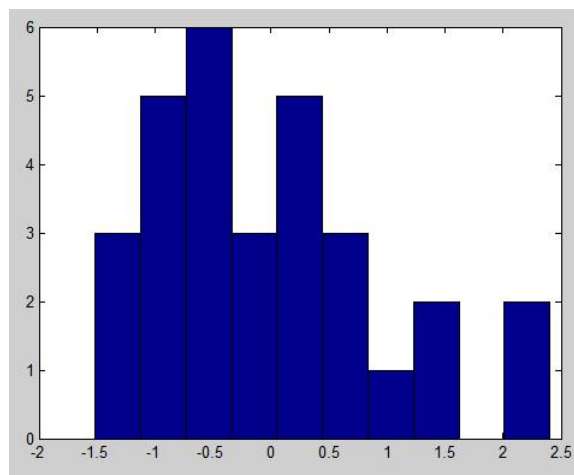
a) Analisis residual: Para verificar que los errores se distribuyen de manera normal con varianza constante se emplea este método, donde el experimentador puede construir un histograma de frecuencias o una gráfica de probabilidad normal de los residuos. La grafica de probabilidad de los residuos se observa en la figura 191.

Figura 191: Grafica de probabilidad de los residuos



El histograma que se observa en la figura permite comprobar la normalidad de los errores.

Figura 192: Histograma de los errores



b) Prueba de falta de ajuste

Se plantean dos hipótesis:

Ho: El modelo de regresión lineal simple es el adecuado para la caracterización del transductor de presión.

H1: El modelo de regresión lineal simple no es el adecuado para la caracterización del transductor de presión.

- Se debe dividir la suma de los errores en los siguientes componentes como se observa en la tabla 71:

$$SSE = SSPE + SSLOF \quad (352)$$

Tabla 71: Análisis de varianza final

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media cuadrática	Fo
Regresión	1,0312	1	1,0312	2,2657 e5
Error	1,27e-4	28	4,55e-6	
Falta Ajuste	-0.0364			0
Error puro(SSPE)	0.0365			
Total	1,0314	29		

El estadístico de prueba para la falta de ajuste sera  $F_0=0$

De donde  $f_{\alpha,m-2,m-n} = 1,5018$  de tabla de la distribución  $f$  tenemos  $m=29$  y  $n=31721$ .

Y probamos que  $f_0 < f_{\alpha,m-2,n-m}$

$-1,056e3 > 1,5018$  Entonces la hipótesis se acepta lo que quiere decir que el modelo de regresión lineal simple es correcto

### 11.2.8.7 Incertidumbre

Se hallan los intervalos de confianza para cada muestra como se observa en la tabla .

Figura 193: Tabla de resultados

Esf. exp.	Esf. teor.	Kt	%error	Desviacion	intervalo	incertidumbre
3,176E+00	1,96251496	1,61832296	1,145E+00	0,00117895	8,33E-07	6,16E-05
5,520E+00	3,51474362	1,570621248	1,836E+00	0,00093922	7,19E-07	4,91E-05
6,013E+00	3,52744598	1,704554366	6,535E+00	0,00104873	7,18E-07	5,48E-05
8,515E+00	5,13159555	1,659236614	3,702E+00	0,00134804	6,10E-07	7,04E-05
1,065E+01	6,68922272	1,591439864	5,350E-01	0,00084122	5,13E-07	4,39E-05
1,296E+01	8,29146693	1,563387141	2,288E+00	0,00091332	4,23E-07	4,77E-05
1,569E+01	9,8956165	1,585714991	8,928E-01	0,00085643	3,41E-07	4,47E-05
1,809E+01	11,4651521	1,577779728	1,389E+00	0,00078118	2,70E-07	4,08E-05
2,031E+01	13,0693017	1,553909796	2,881E+00	0,00098622	2,06E-07	5,15E-05
2,238E+01	14,6258174	1,530363864	4,352E+00	0,0007974	1,52E-07	4,17E-05
2,466E+01	16,229967	1,519671306	5,021E+00	0,00098203	1,06E-07	5,13E-05
2,755E+01	18,0767317	1,524006401	4,750E+00	0,00075937	6,42E-08	3,97E-05
3,002E+01	19,6645269	1,526435982	4,598E+00	0,00081611	3,76E-08	4,27E-05
3,239E+01	21,2523222	1,52392703	4,755E+00	0,00049817	1,99E-08	2,84E-05
3,472E+01	22,8401175	1,520227694	4,986E+00	2,61E-18	2,37E-08	2,05E-19
3,703E+01	24,4279128	1,51590931	5,256E+00	0,00086361	1,09E-08	4,50E-05
3,954E+01	26,015708	1,519691104	5,019E+00	0,00097608	1,97E-08	5,09E-05
4,168E+01	27,6035033	1,509773518	5,639E+00	0,00093396	3,73E-08	4,87E-05
4,375E+01	29,1912986	1,498738795	6,329E+00	0,00091962	6,37E-08	4,80E-05
4,641E+01	30,7790939	1,507725835	5,767E+00	0,00108542	9,90E-08	5,66E-05
4,873E+01	32,3668891	1,505573413	5,902E+00	0,00104292	1,43E-07	5,44E-05
5,092E+01	33,9546844	1,499736849	6,266E+00	0,00116233	1,96E-07	6,06E-05
5,330E+01	35,558834	1,498918212	6,318E+00	0,00124462	2,58E-07	6,49E-05
5,541E+01	37,1153497	1,492812913	6,699E+00	0,0011843	3,28E-07	6,18E-05
5,769E+01	38,7194993	1,489873004	6,883E+00	0,00138319	4,08E-07	7,21E-05
5,993E+01	40,2890349	1,487467207	7,033E+00	0,00147851	4,95E-07	7,71E-05
6,229E+01	41,8931844	1,486829593	7,073E+00	0,0014925	5,93E-07	7,78E-05
6,493E+01	43,4954287	1,492808079	6,699E+00	0,00155966	7,00E-07	8,13E-05
6,741E+01	45,0519444	1,496179652	6,489E+00	0,00166353	8,12E-07	8,68E-05
6,976E+01	46,6570466	1,495204358	6,550E+00	0,00178753	9,37E-07	9,32E-05

### 11.2.8.8 Tabla de Resultados

El resumen de los resultados se observa en la tabla 72.

Tabla 72: Resultados Finales

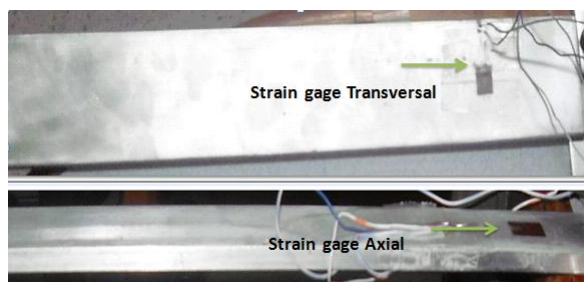
Ecuación de regresión	$y_0 = 0,0002 * x + 0,0076$
Coefficiente de determinación	$R^2=0,99$
promedio de los errores	2,574 e -3
Media del intervalo	1,0091e-6
Media de la incertidumbre	0,0033

### 11.2.9 Caso de estudio: Determinación de la relación de poisson

Para la determinación de la relación de poisson se realizaron dos pruebas experimentales debido a que esta relación esta dada por la deformación en la dirección lateral  $\varepsilon_l$ (transversal) y la deformación en la dirección axial  $\varepsilon_a$ , está representada por  $\nu_p$  y por la ecuación 353, el montaje en la de las galgas se puede observar en la figura 194.

$$\nu_p = \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_a} \quad (353)$$

Figura 194: Montaje de galgas



Del mismo modo que el módulo de elasticidad es una propiedad de determinado material, la razón de Poisson tambien lo es. Para la mayoría de los metales dicha relación esta entre 0.25 y 0.35. Aunque las deformaciones laterales se producen en todos los cuerpos sometidos a esfuerzos, generalmente no afectan los esfuerzos longitudinales.

#### 11.2.9.1 Objetivo de experimento

Determinar la deformación en la dirección lateral  $\varepsilon_l$ (transversal) para una viga cantilever.

### 11.2.9.2 Selección de las variables de interes

1. Variable independiente controlada: Peso [gra]
2. Variable dependiente de la calibración: Voltaje de salida medida [V]

### 11.2.9.3 Desarrollo de la prueba experimental y adquisición de datos

1. Adquisición de datos: El procedimiento de recolección de datos se realizo de acuerdo a la gráfica de la figura 186.

### 11.2.9.4 Análisis probabilistico de los resultados

El análisis probabilistico se realizo usando como herramienta matlab para facilitar el proceso de cálculo y realización de graficas, los parametros experimentales los encontramos a continuación:

- Variable independiente controlada: Pesos [Gr]
- Variable dependiente de la calibración: Voltaje de salida medida [V]
- Tabla de datos obtenidos ver anexo H.3

### 11.2.9.5 Comprobación de parametros

1. Planteamiento de la hipótesis.

Siguiendo el procedimiento de caracterizar instrumentos, se pretende comprobar la linealidad del sensor strain, empleando métodos estadísticos como la regresión lineal estudiado en el capítulo 8, la hipótesis a probar inicialmente permitirá determinar si existe una relación matemática entre las variables independiente y dependiente de la curva de regresión, si la pendiente de la curva de regresión es igual a cero quiere decir que no existe ninguna relación entre las variables, y la hipótesis nula no se rechaza.

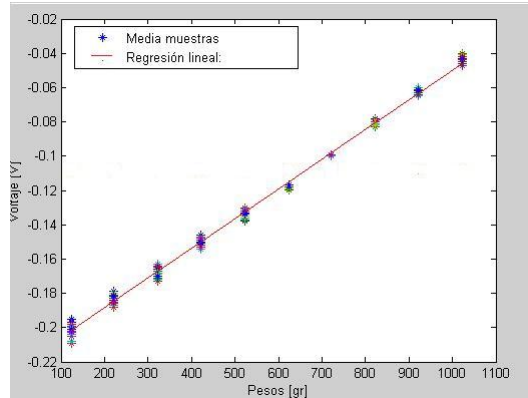
Hipótesis Nula:  $\beta = 0$

Hipótesis Nula:  $\beta \neq 0$

La hipótesis completa es asumir que los errores están distribuidos de manera normal e independiente con media cero y varianza  $\sigma^2$ , para aplicar el método de mínimos cuadrados.

2. Curva de caracterización: Permite observar el comportamiento de las variables gálicamente como se observa en la figura 195.

Figura 195: Curva de caracterización Straing



3. Ecuación de Correlación: La ecuación de correlación se halla usando el método de mínimos cuadrados, para este caso de estudio la ecuación de regresión se observa a continuación:

$$y_o = 1,7317e - 4 * x - 0,2229 \quad (354)$$

El coeficiente de correlación  $R^2 = 0,999$ , una relación lineal perfecta es cuando el coeficiente de correlación es igual a 1. Es decir en nuestro primer análisis la relación entre las variables es demasiado fuertes.

4. Prueba de Hipótesis

Se probara la hipótesis usando el método de análisis de varianza para la regresión estudiada en el capítulo 8.

#### 11.2.9.6 Análisis de varianza para la prueba de significancia de la regresión.

Para probar la significancia de la regresión puede usarse un método conocido como análisis de varianza para la regresión estudiado en el capítulo 8. El procedimiento particiona la variabilidad total en la variable de respuesta en componentes más manejables los cuales se observan en la tabla 73.

Tabla 73: Anova para la regresión

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media cuadrática	Fo
Regresión	0.0026	1	0.0026	2,0569E3
Error	1,0216E-5	8	1,77E-6	
Falta Ajuste	-0,06531			-2,5
Error puro(SSPE)	0,6531			
Total	0,026	9		

Si la hipótesis nula  $H_0: \beta_1 = 0$  es verdadera, el estadístico sigue a la distribución  $F_{1,n-2}$ , con lo que  $H_0$  debe rechazarse si  $f_0 > f_{\alpha,1,n-2}$  donde  $f_0$  esta dado por la ecuación 181. Usando como herramienta matlab y con una significancia del  $\alpha=0,05$  hallamos el valor de  $f_{\alpha,1,n-2}$

De donde  $f_{\alpha,1,n-2} = 5,32$

Y probamos que  $f_0 > f_{\alpha,1,n-2}$  y se rechaza la hipótesis por tanto se concluye que las variables si tienen algún tipo de relación.

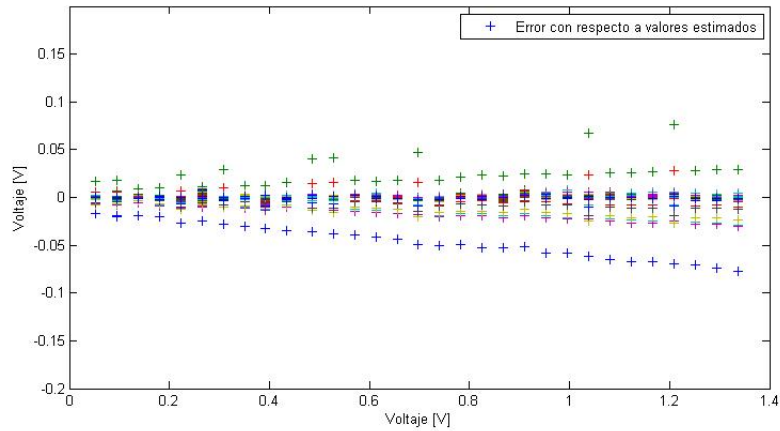
#### 5. Evaluación del modelo de regresión

La validez de estas suposiciones deben ser estudiadas para determinar que tan adecuado es el modelo lineal, para ello existen diferentes métodos :

- El análisis residual
- Coeficiente de determinación ( $R^2$ ).
- Prueba de falta de ajuste

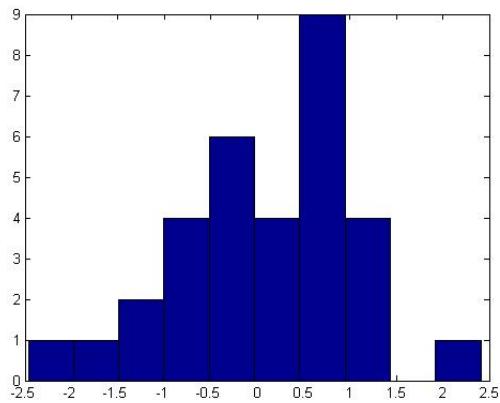
a) Análisis residual: Para verificar que los errores se distribuyen de manera normal con varianza constante se emplea este método, donde el experimentador puede construir un histograma de frecuencias o una gráfica de probabilidad normal de los residuos. La grafica de probabilidad de los residuos se observa en la figura 196.

Figura 196: Grafica de probabilidad de los residuos



b) El histograma que se observa en la figura permite comprobar la normalidad de los errores.

Figura 197: Histograma de los errores



c) Prueba de falta de ajuste

Se plantean dos hipótesis:

$H_0$ : El modelo de regresión lineal simple es el adecuado para la caracterización del transductor de presión.

$H_1$ : El modelo de regresión lineal simple no es el adecuado para la caracterización del transductor de presión.

- Se debe dividir la suma de los errores en los siguientes componentes como se observa en la tabla 74:

$$SSE = SSPE + SSLOF \quad (355)$$

El estadístico de prueba para la falta de ajuste sera  $F_0$

De donde  $f_{\alpha, m-2, m-n} = 1,5018$

Y probamos que  $f_0 < f_{\alpha, m-2, n-m}$

$-2,5 > 1,5018$  Entonces la hipótesis se acepta lo que quiere decir que el modelo de regresión lineal simple es correcto

#### 11.2.9.7 Objetivo de experimento

Determinar la deformación en la dirección  $\varepsilon_l$ (longitudinal) para una viga cantilever.

#### 11.2.9.8 Selección de las variables de interés

1. Variable independiente controlada: Peso [gra]
2. Variable dependiente de la calibración: Voltaje de salida medida [V]

#### 11.2.9.9 Análisis probabilístico de los resultados

El análisis probabilístico se realizó usando como herramienta matlab para facilitar el proceso de cálculo y realización de gráficas, los parámetros experimentales los encontramos a continuación:

- Variable independiente controlada: Pesos [Gr]
- Variable dependiente de la calibración: Voltaje de salida medida [V]
- Tabla de datos obtenidos ver anexo H.3

#### 11.2.9.10 Comprobación de parámetros

1. Planteamiento de la hipótesis.

Siguiendo el procedimiento de caracterizar instrumentos, se pretende comprobar la linealidad del sensor strain, empleando métodos estadísticos como la regresión lineal estudiado en el capítulo 8, la hipótesis a probar inicialmente permitirá determinar si existe una relación matemática entre las variables independiente y

dependiente de la curva de regresión, si la pendiente de la curva de regresión es igual a cero quiere decir que no existe ninguna relación entre las variables, y la hipótesis nula no se rechaza.

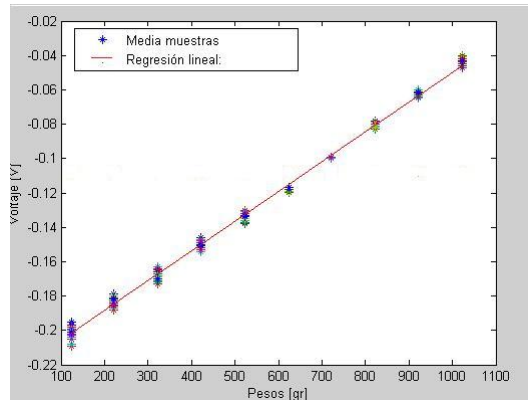
Hipótesis Nula:  $\beta = 0$

Hipótesis Nula:  $\beta \neq 0$

La hipótesis completa es asumir que los errores están distribuidos de manera normal e independiente con media cero y varianza  $\sigma^2$ , para aplicar el método de mínimos cuadrados.

2. Curva de caracterización: Permite observar el comportamiento de las variables gráficamente como se observa en la figura 198.

Figura 198: Curva de caracterización Straing



3. Ecuación de Correlación: La ecuación de correlación se halla usando el método de mínimos cuadrados, para este caso de estudio la ecuación de regresión se observa a continuación:

$$y_o = 1,7317e - 4 * x - 0,2229 \quad (356)$$

El coeficiente de correlación  $R^2 = 0,999$ , una relación lineal perfecta es cuando el coeficiente de correlación es igual a 1. Es decir en nuestro primer análisis la relación entre las variables es demasiado fuertes.

4. Prueba de Hipótesis

Se probara la hipótesis usando el método de análisis de varianza para la regresión estudiada en el capítulo 8.

### 11.2.9.11 Análisis de varianza para la prueba de significancia de la regresión.

Para probar la significancia de la regresión puede usarse un método conocido como análisis de varianza para la regresión estudiado en el capítulo 8. El procedimiento particiona la variabilidad total en la variable de respuesta en componentes más manejables los cuales se observan en la tabla 74.

Tabla 74: Anova para la regresión

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media cuadrática	Fo
Regresión(SSR)	0,0247	1	0,0247	8,52 e3
Error(SSE)	2,317e-5	8	2,8969e-6	
Total	0,0248	9		

Si la hipótesis nula  $H_0: \beta_1 = 0$  es verdadera, el estadístico sigue a la distribución  $F_{1,n-2}$ , con lo que  $H_0$  debe rechazarse si  $f_0 > f_{\alpha,1,n-2}$  donde  $f_0$  está dado por la ecuación 181. Usando como herramienta matlab y con una significancia del  $\alpha=0,05$  hallamos el valor de  $f_{\alpha,1,n-2}$

De donde  $f_{\alpha,1,n-2} = 5,32$

Y probamos que  $f_0 > f_{\alpha,1,n-2}$  y se rechaza la hipótesis por tanto se concluye que las variables si tienen algún tipo de relación.

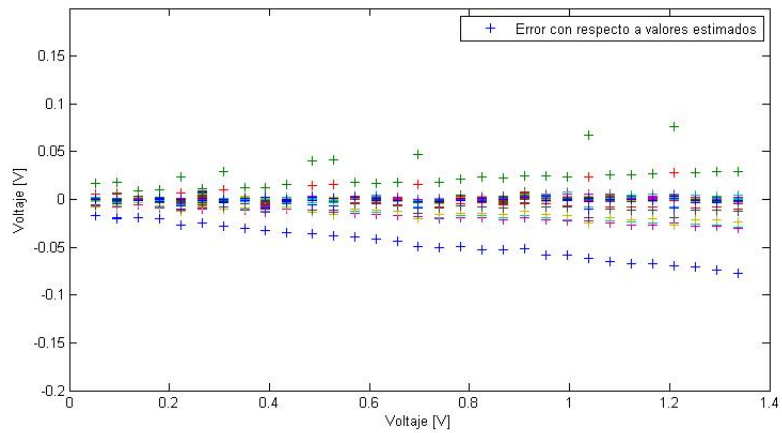
#### 5. Evaluación del modelo de regresión

La validez de estas suposiciones deben ser estudiadas para determinar que tan adecuado es el modelo lineal, para ello existen diferentes métodos :

- El análisis residual
- Coeficiente de determinación ( $R^2$ ).
- Prueba de falta de ajuste

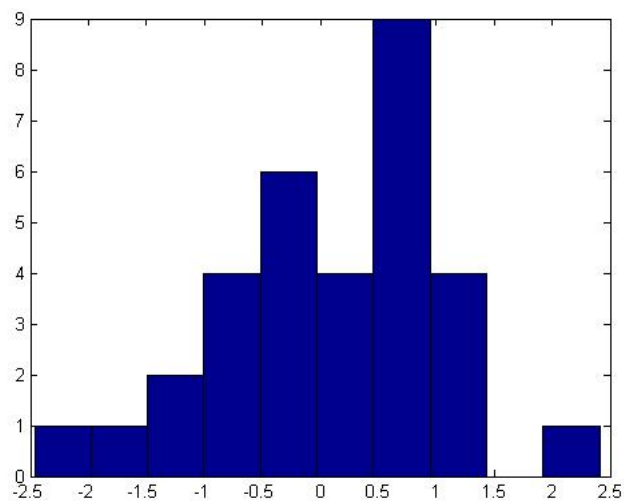
a) Análisis residual: Para verificar que los errores se distribuyen de manera normal con varianza constante se emplea este método, donde el experimentador puede construir un histograma de frecuencias o una gráfica de probabilidad normal de los residuos. La grafica de probabilidad de los residuos se observa en la figura 199.

Figura 199: Grafica de probabilidad de los residuos



b) El histograma que se observa en la figura permite comprobar la normalidad de los errores.

Figura 200: Histograma de los errores



c) Prueba de falta de ajuste

Se plantean dos hipótesis:

Ho: El modelo de regresión lineal simple es el adecuado para la caracterización del transductor de presión.

H1: El modelo de regresión lineal simple no es el adecuado para la caracterización del transductor de presión.

- Se debe dividir la suma de los errores en los siguientes componentes como se observa en la tabla 75:

$$SSE = SSPE + SSLOF \quad (357)$$

Tabla 75: Análisis de varianza final

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media cuadrática	Fo
Regresión	0.0247	1	0,0247	8,527e3
Error	2,3175E-5	8	2,8969E-6	
Falta Ajuste	-0,0124			-2,4954
Error puro(SSPE)	0,0124			
Total	0,0247	9		

El estadístico de prueba para la falta de ajuste sera  $F_0 = -2,4954$

De donde  $f_{\alpha, m-2, m-n} = 1,5018$  de tabla de la distribución

Y probamos que  $f_0 < f_{\alpha, m-2, n-m}$

$-2,4954 > 1,5018$  Entonces la hipótesis se acepta lo que quiere decir que el modelo de regresión lineal simple es correcto

Los resultados que se obtuvieron se observan en la tabla.

Tabla 76: Resultados

gramos	Desviac transversal	Desviacion long	Incertidumbre transv	Incertidumbre
123,38	0,008027892	0,00123986	0,00041865	2,557E-06
221,41	0,007872561	0,00116616	0,00041055	2,405E-06
322,44	0,008114314	0,0014895	0,00042316	3,072E-06
421,29	0,008078061	0,00115261	0,00042127	2,377E-06
522,32	0,008134129	0,00133885	0,00042419	2,761E-06
623,23	0,008192163	0,00088044	0,00042722	2,017E-06
721,26	0,008091183	0,00050036	0,00042196	1,299E-06
822,29	0,008345764	0,00095185	0,00043523	2,064E-06
921,14	0,008067999	0,00112555	0,00042075	2,332E-06
1022,17	0,008125628	0,00120325	0,00042375	2,484E-06

Y la relación de poisson se observa en la figura. Hallado por diferenciales de los valores de voltaje tomados experimentalmente definiendo como criterio que entre los datos se presentara una deformación apreciable.

Tabla 77: Relación de poisson

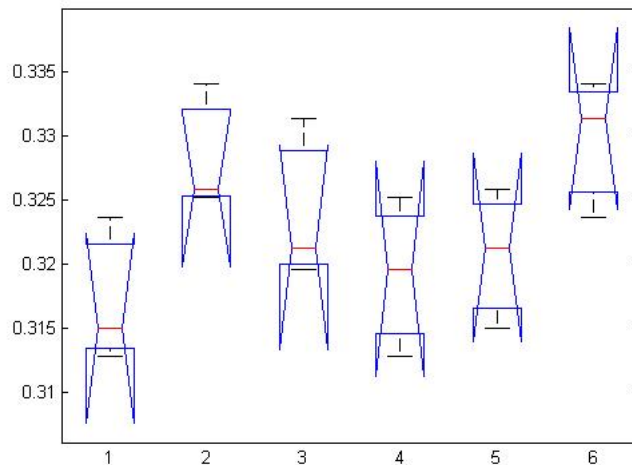
Relacion de Poisson					
0,312856509	0,325176425	0,3196109	0,31285651	0,3150038	0,32368723
0,315003842	0,325815036	0,32129026	0,32517643	0,325815	0,33410675
0,323687234	0,334106752	0,33132239	0,3196109	0,3212903	0,33132239

Se aplica el ANOVA a la matriz y obtenemos la tabla 78 y figura 201:

Tabla 78: Tabla de anova

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	0.00038	5	7.68611e-005	2.37	0.1023
Error	0.00039	12	3.24088e-005		
Total	0.00077	17			

Figura 201: Grafica de bloques



Por lo tanto la hipótesis es aprobada.

## 11.3 PROCEDIMIENTO DE CALIBRACIÓN DE UN FLUJÓMETRO DE TURBINA AXIAL

### 11.3.1 Conceptos básicos relacionados con la medición de flujo

Muchos de los equipos utilizados en la industria utilizan un fluido en movimiento para su funcionamiento, el cual debe ser controlado en su magnitud; tal es el caso de un intercambiador de calor, o la inyección de un motor de combustión interna, sin contar con circuitos de potencia hidráulica o de transporte que están diariamente en funcionamiento como aporte a globalización y desarrollo sostenible mundial.

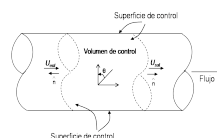
Acoplar un dispositivo de medición de flujo al proceso que se requiere medir es importante y se basa tanto en condiciones de diseño de los dos sistemas como en parámetros de presión y temperatura de éste último y el ambiente para garantizar la correcta medición y por ende control del flujo ya sea en volumen o masa. Existe gran variedad de herramientas para la toma de datos, y según su estructura es aplicable a un cierto rango de valores numéricos de flujo, por ello es necesario un conocimiento básico en cuanto al principio de funcionamiento de susodichos dispositivos.

Al implementar un volumen de referencia o establecer una superficie de control en el espacio (ver figura 202), se puede describir el flujo como la cantidad de fluido en unidades de volumen o masa que pasa por allí, por unidad de tiempo<sup>175</sup>. La velocidad en un punto es representada por un vector de tres dimensiones en coordenadas cilíndricas:

$$U = U(x, r, \theta) = u\hat{e}_x + v\hat{e}_r + w\hat{e}_\theta \quad (358)$$

Donde  $u, v, w$  son magnitudes y  $\hat{e}_x, \hat{e}_r, \hat{e}_\theta$  representan los vectores unitarios de cada una de las componentes en las direcciones  $x, r, \theta$  respectivamente.

Figura 202: Concepto de Superficie de Control.



Fuente. FIGLIOLA, Richard. *Mediciones Mecánicas: Teoría y Diseño*. 4 ed. México.: Alfaomega, 2008. p. 459.

Se implementa el concepto de conservación de la masa que entra (ent), sale (sal) y permanece (perm) dentro del volumen de control en términos de rapidez, se establece:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho dV + \oiint_{CS} \rho \mathbf{U} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (359)$$

Donde:

$\hat{n}$ : Vector normal a la superficie de control.

$A$ : Área de la superficie de control.

$\rho$ : Densidad del fluido.

$V$ : Magnitud del volumen de control.

En condiciones estables se cumple que:

$$\dot{m}_{ent} = \dot{m}_{sal} + \dot{m}_{perm} \quad (360)$$

Donde:

$\dot{m}$ : Gasto másico a través de un área  $A$ .

$$\dot{m} = \iint_A \rho \mathbf{U} \cdot \hat{n} dA \quad (361)$$

En términos de flujo de masa promedio,  $\rho \bar{U}$ , donde  $\bar{U}$  es la velocidad promedio sobre la superficie de control, el gasto másico sería:

$$\dot{m} = (\rho \bar{U}) A \quad (362)$$

Para flujo incompresible, como aquellos en estado isotérmico, se atribuye una densidad constante; por tal motivo se cumple que para el gasto volumétrico,  $Q$ , suponiendo que no permanece nada dentro del volumen de control:

$$Q_{ent} = Q_{sal} \quad (363)$$

$$Q = \iint_A \mathbf{U} \cdot \hat{n} dA \quad (364)$$

Para el caso de una tubería, donde su área transversal es definida como parte de la superficie de control, el gasto volumétrico estará dado por:

$$Q = \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} u(r, \theta) r d\theta dr \quad (365)$$

Donde:

$r_1$ : Radio de la tubería

$u(r, \theta)$ : Velocidad normal al área transversal de la tubería.

En términos más generales, si se es conocido la velocidad promedio,  $\bar{U}$ , normal a la superficie de control, entonces el gasto volumétrico queda determinado en condiciones estables por:

$$Q = \bar{U}A$$

El comportamiento del fluido también influirá en la manera de calcular su magnitud, ya que se puede presentar en estado laminar, turbulento, o en transición, el cual se encuentra intermedio entre los dos primeros estados. Una forma para determinar en que estado se encuentra un flujo es calculando el número de Reynolds:

$$Re_{d_1} = \frac{\bar{U}d_1}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d_1 \nu}$$

Donde:

$\nu$ : Viscosidad cinemática del fluido.

$d_1$ : Diámetro hidráulico de tubería,  $4r_H$ .

$r_H$ : Área mojada dividida por el perímetro húmedo.

Los valores de referencia para el número de Reynolds:

Flujo laminar,  $Re_{d_1} < 2000$

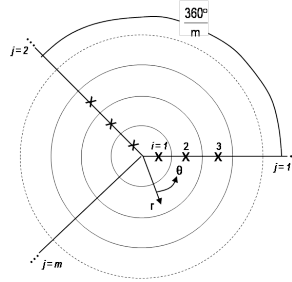
Flujo turbulento,  $Re_{d_1} > 4000$

Para los demás valores se considera que el flujo se encuentra en estado de transición, lo cual es poco recomendable llevarse a cabo en operación.

### 11.3.1.1 Determinación gasto volumétrico

Una forma muy utilizada para determinar el gasto volumétrico en situaciones donde el fluido pasa normal a un área transversal de perímetro finito y cerrado, como es el caso de la tubería es determinar la velocidad localizada discretamente sobre dicha área. Una forma sencilla de distribuir las áreas y ubicar los puntos de medición se puede observar en la 203, ya que existen otras técnicas para lograr este objetivo.

Figura 203: Ubicación de puntos de medición discretos para toma de velocidad.



Fuente. FIGLIOLA, Richard. *Mediciones Mecánicas: Teoría y Diseño*. 4 ed. México.: Alfaomega, 2008. p. 461.

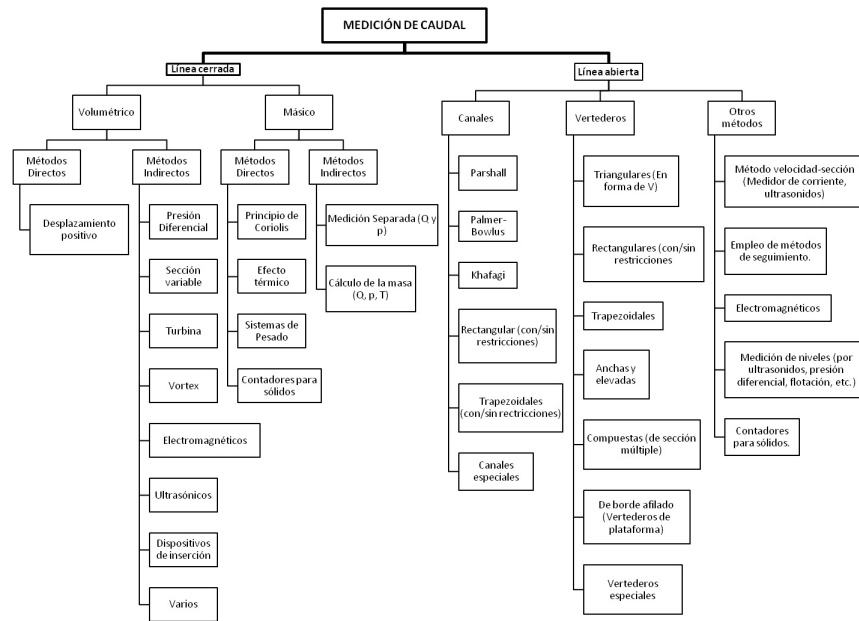
La velocidad, que debe permanecer constante para las mediciones en todos los puntos, se estima mediante la 365 en cada sección de área  $m$ , y la media de los  $m$  valores será la velocidad total del tubo, para este caso en particular; éste método se puede acomodar para otras formas de sección transversal<sup>176</sup>.

En otros casos se presenta la necesidad de la lectura de éste parámetro para situaciones donde el flujo transcurre en canales abiertos, o sea, el perímetro donde se encuentra contenido el fluido no tiene un perímetro de área transversal cerrado y para ello es necesario otro tipo de procedimiento para el cálculo.

El método o herramienta que se utiliza para la medición de flujo depende de las condiciones de operación y las propiedades del fluido; algunas tecnologías empleadas para la medición de caudal que se utilizan habitualmente son mostradas en la figura 204.

<sup>176</sup>ibid., p. 460

Figura 204: Métodos de medición de caudal según condiciones de volumen de control.



*Fuente. ALTENDORF, M. y BERRIE, P. Medición de caudal. Endress+Hauser Flowtec AG, 2005.*

### 11.3.1.2 Naturaleza de un caudal

Las leyes básicas que se pueden aplicar al comportamiento de los fluidos son:

- Ecuación de continuidad: Establece que el volumen que pasa por una superficie de control es constante para varios perfiles o secciones transversales de la misma.

$$Q = A_1 \bar{v}_1 = A_2 \bar{v}_2 \quad (366)$$

- Ecuación de Bernoulli: Describe la conservación de la energía total del fluido para diferentes estados en que se pueda presentar:
  - Energía potencial, compuesta por aquella que depende de un nivel de referencia en términos de posición; y por la energía que depende de las condiciones del ambiente como la presión atmosférica
  - Energía cinética, la cual depende del movimiento que las partículas que el fluido experimenta.
- Conservación de la masa: Donde establece que la materia no se crea ni se destruye, la masa que entra a una superficie de control debe salir de éste si no se contempla

la posibilidad de acumulación dentro de dicha superficie se encuentre el fluido en cualquier fase.

### 11.3.2 Medidores de caudal

La medición de caudal en la industria es de suma importancia, en gran parte de los procesos existe la necesidad de controlar caudal, pero para mantener este control lo primero que se debe hacer es medirlo. Existen diferentes técnicas e instrumentos para medir el caudal, la técnica a utilizar dependerá de la necesidad y condiciones en las cuales se esté.

El caudal es una indicación de que tanto fluido en peso o volumen se está moviendo, o sea es que tanta cantidad de fluido esta pasando por un determinado punto dentro de un período específico de tiempo. Para realizar esta medición se utilizan los *flujómetros*.

Los flujómetros se usan para el monitoreo y control de los procesos y operaciones, y además en el análisis de ingeniería experimental es muy importante la medición de los caudales de líquidos o gases. Existen varios sistemas para medir el caudal según sea el tipo de caudal volumétrico o másico. En la tabla 79<sup>177</sup>, se detalla sistema, elemento y transmisor de algunos medidores de caudal.

---

<sup>177</sup>CÓRDOVA LASCANO, Marco Rolando y VELÁSQUEZ PÉREZ, Diego Javier. Instalación y Montaje de un Banco de Pruebas de Caudal, para el Laboratorio de Instrumentación de la Facultad de MECÁNICA. Trabajo de grado Ingeniero Mecánico. Quito.: Escuela Superior Politecnica de Chimborazo. Facultad de Mecánica. Escuela de Ingeniería Mecánica, 2010, 6 p.

Tabla 79: Métodos de medición de caudal.

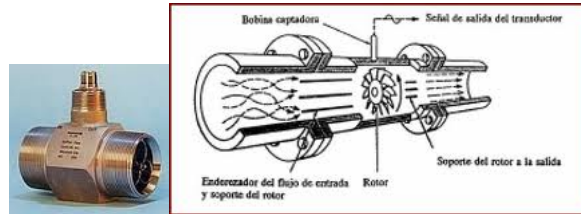
MEDIDORES VOLUMÉTRICOS		
Sistema	Elemento	Transmisor
Presión Diferencial	Placa Orificio. Tobera. Tubo Venturi. Tubo Pitot. Tubo Annubar.	Equilibrio de fuerza. Silicio fundido.
Área Variable	Rotámetro	Equilibrio de movimientos. Potenciométrico. Puente de impedancias.
Velocidad	Vertedero con flotador en canales abiertos. Turbina. Transductores ultrasónicos.	Potenciométrico. Piezoeléctrico.
Fuerza	Placa de Impacto.	Equilibrio de fuerzas. Galgas extensiométricas.
Tensión Inducida	Medidor Magnético.	Convertidor. Potenciométricos.
Desplazamiento Positivo	Disco Giratorio. Pistón Oscilante. Pistón Alternativo. Medidor Rotativo.	Generador tacométrico o transductor de impulsos.
Torbellino	Medidor de frecuencia de termistancia o condensador de ultrasonidos	Transductor de resistencias

MEDIDORES DE CAUDAL DE MASA		
Sistema	Elemento	Transmisor
Térmico	Diferencia de temperatura en dos sondas de resistencia.	Puente Wheastone
Momento	Medidor Axial Medidos Axial de Doble Turbina	Convertidor de par
Par Giroscopio	Tubo Giroscopio	Convertidor de par
Presión Diferencial	Puente Hidráulico	Equilibrio de fuerzas

Para este caso de estudio solo se definirá el flujometro de turbina axial.

### 11.3.2.1 Flujómetros de Turbina

Figura 205: Flujómetro de turbina.



Los flujómetros de turbina (ver figura 205) es un rotor que se coloca en la trayectoria del flujo y gira en función de la fuerza que se le imparte por medio del propio fluido que pasa a través de él con una velocidad que es directamente proporcional al caudal. La velocidad del fluido produce una fuerza de arrastre en el rotor que es equilibrada con la fuerza producida por la diferencia de presiones debido al cambio de área entre el rotor y el cono posterior, el rotor está equilibrado hidrodinámicamente y gira contra el cono anterior y posterior sin necesidad de rodamientos axiales<sup>178</sup>.

La relación matemática que rige el comportamiento del flujómetro de turbina está dada por la ecuación 367.

$$Q_v = v_m \cdot A = 2\pi \cdot n \cdot r_m \cdot \cot(\beta) \cdot \quad (367)$$

Donde:

$Q_v$  : Caudal volumétrico

$v_m$  : Velocidad media del caudal

$A$  : Sección transversal del caudal

$n$ : Número de revoluciones del rotor

$r_m$  : Radio del rotor

$\beta$  : Inclinación de las aspas

Como la velocidad del fluido es representado por un perfil, las fuerzas que experimenta el rotor divergen un poco entre el centro, donde se presenta una magnitud mayor de la velocidad y el extremo de las aspas, donde se presenta un cierto arrastre. El equilibrio entre la fuerza impulsora y la fuerza de arrastre mantiene el rotor a una velocidad

---

<sup>178</sup>CÓRDOVA. Op. cit., p. 13.

constante para un caudal fijo<sup>179</sup>. Se ha concluido una expresión general que relaciona el numero de impulsos ( $n$ ) generados, y el caudal ( $Q$ ):

$$n/Q = A + B/Q - C/Q^2 \quad (368)$$

Donde:

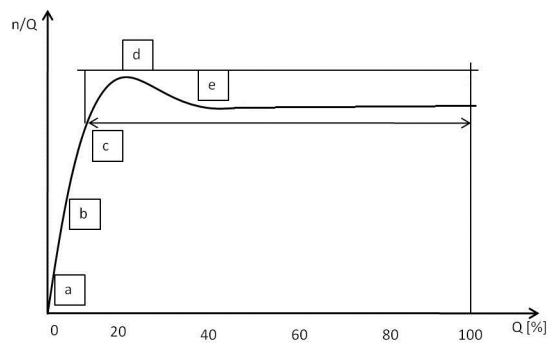
$A$ : Depende de la cantidad de movimiento (termino dominante en velocidades altas)

$B/Q$ : Relaciona efectos de viscosidad y flujo en los extremos de las aspas

$C/Q^2$ : Da cuenta respecto a las fuerzas de arrase mecánicas, aerodinámicas y de los pivotes sobre el sensor (termino dominante en velocidades bajas).

La figura 206, muestra curva característica del caudalimetro de turbina:

Figura 206: Curva característica de factor k de caudalimetro de turbina



Donde:

a: Rotor no gira, ya que no hay suficiente fuerza impulsora

b: Después de este valor se puede alcanzar buena repetibilidad

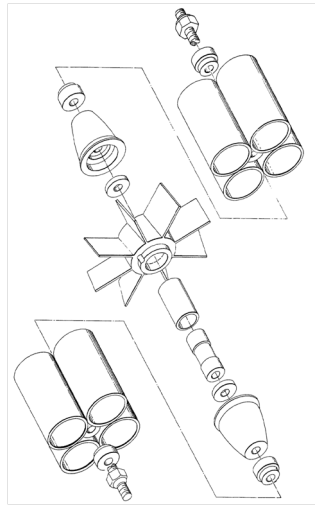
e: Pasado este valor se alcanza la zona de linealidad. Donde el recuento de caudal puede estar en 20:1 o superior, según el tamaño y el fabricante.

En la figura 207 se visualiza el grupo de aspas giratorias fijado con pivotes a un eje central, que se encuentra ubicado en el centro del cuerpo del flujómetro paralelo a la dirección de flujo, la rueda de la turbina (rotor o molinete) y un sensor que capta el tiempo que un aspa pase generando un impulso al circular el volumen conocido.

179

ALTENDORF, M. y BERRIE, P. Medición de caudal. Endress+Hauser Flowtec AG, 2005.

Figura 207: Despiece del flujómetro de turbina.



La turbina esta limitada por la viscosidad, debido al aumento de la viscosidad produce un cambio en la velocidad del perfil del líquido a través de la tubería. En las paredes del fluido se mueve mas lento que en el medio lo que hace difícil girar las puntas del rotor, se reduce el intervalo de medida para viscosidades superiores a 3 - 5 Cs.

La precisión es  $\pm 0,3\%$ , la máxima precisión se produce con fluido laminar por lo que la ubicación de él es de 15 diámetros aguas arriba y 6 diámetros aguas abajo, el campo de medida llega hasta 15 a 1 máximo y mínimo, los líquidos deben ser limpios o filtrados.

### 11.3.3 Celdas de Carga

Virtualmente cualquier estructura metálica simple se deformará cuando es sometida a una fuerza, y mientras que los esfuerzos resultantes estén por debajo del límite de elasticidad del material, la deflexión ( $\delta$ ) y las deformaciones resultantes ( $\epsilon$ ) serán funciones lineales de la fuerza aplicada:

$$F = C_1 \delta = C_2 \epsilon$$

En estas ecuaciones, las C's son constantes determinadas de análisis o calibración. Los dispositivos de medición de fuerza más comunes son las celdas de carga con galgas.

La celda de carga de cilindro hueco también usa cuatro galgas y también compensa la temperatura. A medida que el cilindro es comprimido, no solamente se vuelve levemente más pequeño sino que también aumenta levemente su diámetro. Como resultado, dos de las galgas miden la compresión axial; las otras dos son montadas transversalmente y miden la deformación diametral de tensión. Ya que la deformación transversal es solamente la relación de Poisson por la deformación axial, la salida es menor que cuatro veces la

salida de una galga axial. Para un valor de la relación de Poisson de 0.3, la salida será cerca de 2.6 veces la salida de una galga axial. Las celdas de carga comerciales están disponibles con rangos de onzas hasta varios cientos de miles de libras. Debido a su diseño simple, cualquier rango puede ser prontamente fabricado.

A diferencia de los acelerómetros, no es útil especificar la respuesta en frecuencia de las celdas de carga comerciales. Esto es porque la masa y flexibilidad del sistema instrumentado controla la respuesta dinámica. Además, una celda de carga instalada añadirá flexibilidad al sistema y también afectará la respuesta dinámica. Si la flexibilidad de las celdas de carga con galgas es muy alta, están disponibles comercialmente celdas de carga que usan sensores piezoeléctricos, que son más rígidas<sup>180</sup>.

#### **11.3.4 Caso de estudio: procedimiento de calibración de un flujómetro de turbina axial.**

La calibración de un instrumento se realiza para garantizar las cualidades del mismo en cuanto su rango, precisión y exactitud de medida, y de esta manera atribuirle al sistema de medición una correcta aplicación.

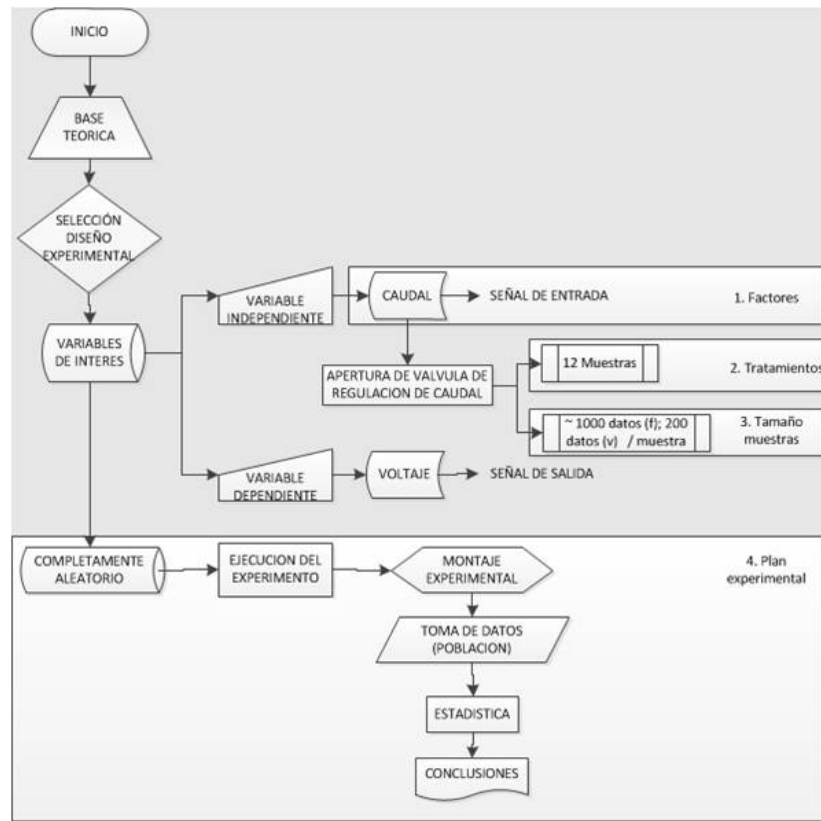
Para este caso, la calibración de un instrumento de medición de flujo, empleando un flujómetro de turbina axial, es necesario realizar una prueba experimental de toma de datos y graficar dichos valores, de esta manera se comprobará el comportamiento estándar del sistema.

Según los capítulos desarrollados anteriormente, siendo estos la herramienta teórica que facilitó la óptima ejecución de este experimento, se estableció un procedimiento que permitió demostrar y entender las características de como se calibra un flujómetro de turbina axial modelo HO (Fabricante: HOFFER). Este procedimiento se observa en la figura 208. También se visualizó el apoyo de los criterios probabilísticos que simplificaron el análisis de la datos adquiridos.

---

<sup>180</sup>WHEELER, Op. Cit., p. 248.

Figura 208: Proceso para la caracterización de un sensor



#### 11.3.4.1 Objetivo y campo de aplicación

La experimentación, para este caso de estudio ingenieril, es una área de estudio practica, que implica estar en contacto y a la vanguardia con el mundo actual para comprender mejor el funcionamiento de los dispositivos de medición.

Es justamente esta, una de las razones por la cual se llevó a cabo realizar el montaje e instalación de un sistema de medición de caudal para poder conocer el procedimiento de calibración de un flujómetro, ya que sirve de ayuda para aterrizar los conceptos teóricos expuestos a lo largo del pregrado. Sin dejar a un lado la estadística y la probabilidad que son la base fundamental para hacer el análisis de los datos de esta tesis de grado para optar al título de Ingeniero Mecánico.

#### 11.3.4.2 Procedimiento

#### 11.3.4.3 Patrones

Para el procedimiento de calibración del flujómetro se debió utilizar como patrón una balanza de resolución adecuada para observar el volumen que pasa por este.

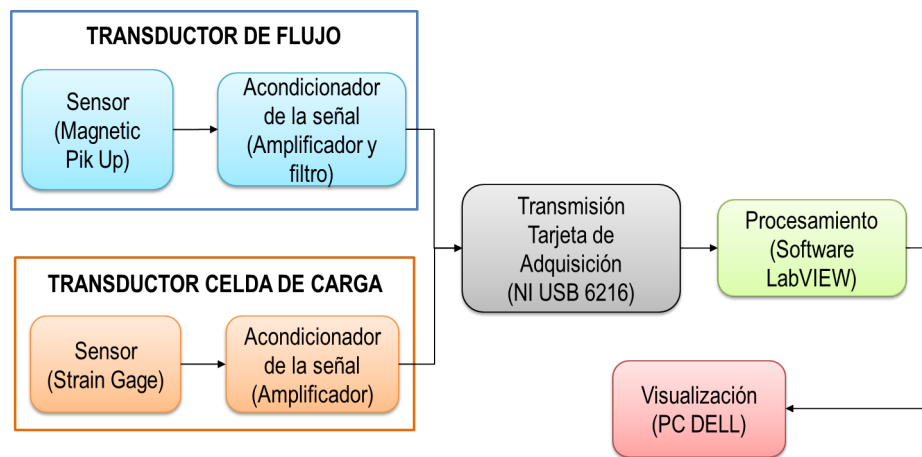
La balanza esta constituida por un celda de carga, que es la que sensa los cambios de masa a medida que el flujo circule por el flujómetro. Dicho instrumento, no cuenta con un certificado de calibración, puesto que la Escuela Ingeniería Mecánica de la Universidad Industrial de Santander, no tiene un instrumento patrón certificado por algún laboratorio o instituto nacional de metrologia y es por esto, que es importante resaltar que para este caso de estudio lo que se desea es conocer el procedimiento de calibración, y emplear las herramientas estadísticas y métodos probabilísticos para analizar y concluir cual es el rango de linealidad del instrumento (Flujómetro de turbina axial).

#### 11.3.4.4 Condiciones ambientales

Dedió evitarse situaciones ambientales extremas, procurando que el procedimiento de calibración que se realizó estuvo bajo condiciones similares a las de uso del flujómetro de turbina axial. Evitar ruidos y vibraciones que perturbaran a la hora de adquirir los datos, para hacer su respectivo análisis, y poder concluir y recomendar en base al objetivo.

#### 11.3.4.5 Sistema de adquisición de datos

Figura 209: SAD para el procedimiento de calibración de un flujómetro de turbina axial.



La figura 209 ilustra el sistema de adquisición de datos para la ejecución de este experimento. Aquí se observa cada instrumento y su función dentro de la experimentación, para la optima adquisición y análisis de los datos.

#### 11.3.4.6 Selección de las variables de interes

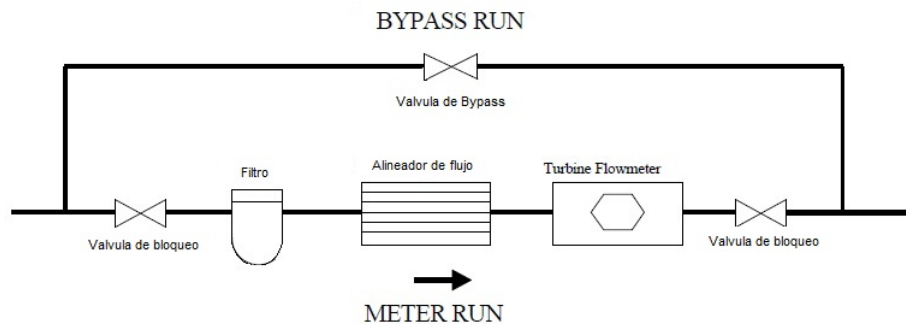
1. Variable independiente controlada: Caudal[*GPM*]

2. Variable dependiente de la calibración: Voltaje de salida medido por el sensor del flujómetro [V]

#### 11.3.4.7 Montaje experimental

El montaje adecuado para la toma de datos, en la cual la variable independiente será el caudal; y la variable dependiente, es el valor de la señal enviada por el sensor, en este caso la frecuencia o el voltaje. Se recomienda para el caso de un flujómetro, que la instalación conste de una adecuada tubería, filtro, válvulas de estrangulación para la variación del flujo, regulador de flujo laminar y el flujómetro como se muestra en la figura 210.

Figura 210: Instalación típica de un flujómetro



Debido al principio de funcionamiento del flujómetro de turbina es necesario evitar en la corriente remolinos o perfiles de velocidad complejos, ya que esto ocasionaría que el fluido no hiciera el debido trabajo en las aspas del rotor manteniendo la estabilidad del mismo o un flujo controlado, lo que incurriría en errores de medición; para ello, se debe habilitar una longitud de tubería de diez (10) veces el diámetro aguas arriba del dispositivo de medición y cinco (5) veces de diámetro de tubería aguas abajo del mismo, en caso de no contar con un regulador de flujo lamina.

Para una correcta instalación, se recomienda:

- Verificar el tamaño, tipo de material y el rango de presión que soporta el sensor a calibrar
- Escoger los accesorios adecuados como juntas y pernos.
- La posición del sensor sera horizontal o vertical, según el tipo de flujo en servicio.
- No instalar cerca a dispositivos eléctricos que envíen señales y causen interferencia en los datos de salida del sensor, como motores, solenoides, transformadores, entre otros.

- Las líneas de flujo deben ser purgadas antes de colocar el sensor, la tubería debe ser limpia y libre de partículas.

#### 11.3.4.8 Especificaciones Técnicas

Flujómetro de turbina axial (Fabricante: TURBINE FLOWMETERS BY HOFFER).

- Rango Lineal: 0.35 - 3.5 [GPM]
- Rango de repetitividad: 0.25 - 4.5 [GPM]
- Rango de máxima capacidad: 1.5 de flujo máximo.

#### 11.3.4.9 Análisis probabilístico

Este análisis inicialmente muestra el procedimiento pasos a paso de cómo se tratan los datos estadísticamente para el sistema de medición sin optimización del mismo. Lo que se espera de este análisis es determinar el rango de comportamiento lineal del instrumento para así compararlo con el rango dado por el fabricante.

#### 11.3.4.10 Método empírico.

Este método se realizó mediante el uso de un medidor de volumen con capacidad de hasta 4000 ml, y medición de tiempo de forma manual. Dicho procedimiento arrojó errores debido a factores que afectaban el proceso de medición, para resaltar el error humano debido a la falta de sincronización para calcular el flujo volumétrico.

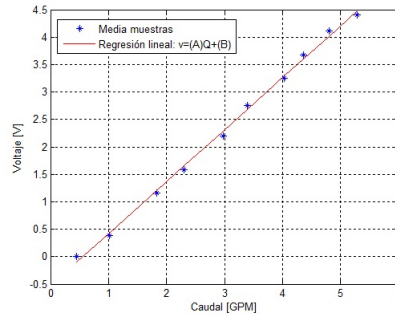
**Planteamiento de la hipótesis** Se desea comprobar la linealidad del flujómetro empleando la regresión lineal y la hipótesis a probar inicialmente permitirá determinar si existe una relación matemática entre las variables independiente y dependiente de la curva de regresión. Si la pendiente de la curva de regresión es igual a cero, quiere decir que no existe ninguna relación entre las variables, y la hipótesis nula no se rechaza.

- Hipótesis Nula:  $\beta_1 = 0$
- Hipótesis Nula:  $\beta_1 \neq 0$

La hipótesis completa es asumir que los errores están distribuidos de manera normal e independiente con media cero y varianza  $\sigma^2$ , para aplicar el método de mínimos cuadrados.

**Curva de regresión** Esta permite observar el comportamiento de las variables como se observa en la figura 211.

Figura 211: Curva de Regresión del Flujómetro



**Ecuación de Regresión** Se usó el método de mínimos cuadrados para determinar la ecuación característica de la curva.

$$y_0 = 0,9473 * x - 0,5347 \quad (369)$$

**Coefficiente de Determinación** En particular, interesa cuantificar la intensidad de la relación lineal entre las variables. El parámetro que nos da tal cuantificación es el coeficiente de correlación lineal, dado por la ecuación ??:

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}SS_{yy}}} = \quad (370)$$

Ahora bien, para calcular el coeficiente de determinación se debe conocer la suma de los cuadrados de la regresión y la suma total de los cuadrados corregidos, expresado esto en la ecuación ?? es:

$$R^2 = \frac{SS_R}{S_{yy}} = 0,9974 \quad (371)$$

Lo cual indica que una relación lineal no es suficientemente adecuada, y observando la grafica 211, el rango lineal no es el recomendado según las especificaciones técnicas dadas por el fabricante, entonces se procede a optimizar el sistema y montaje de la experimentación.

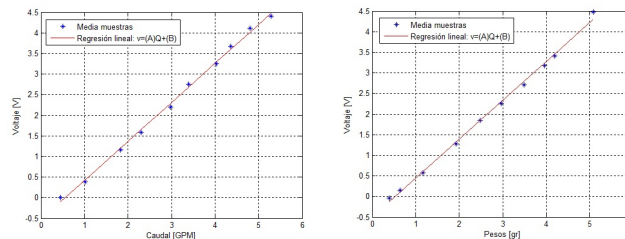
**Proceso de Optimización** El análisis estadístico realizado con anterioridad ilustra el comportamiento del instrumento en condiciones no fiables en la obtención de datos precisos que conlleven a cumplir con los requerimientos de uso del flujómetro establecidos por el fabricante. Debido a esto, se propone la optimización del procedimiento de calibración mediante la implementación de la celda de carga tipo S como se observa en la figura que permite medir el diferencial de voltaje con el cambio de peso que llega el medidor de flujo ubicado en la estructura que se le adhiere a la celda de carga asegurando datos mas limpios y confiables, permitiendo así, un análisis estadístico claro y sencillo.

Figura 212: Balanza con celda de carga tipo S. Capacidad de 0 a 10 Kg.



Las figura 213 muestra las curva de la regresión lineal del instrumento en ambos procesos. En base a las graficas de las regresiones a) y b) se observa que el rango lineal del flujómetro en el proceso b) cumple con los requerimientos del fabricante, entonces, para comparar dichos procesos el diseño de experimentos estadístico que mas se ajusta es el ***Diseño de Bloques Completamente Aleatorios***.

Figura 213: Sin celda de carga y con celda de carga



Al incorporar una celda de carga en el desarrollo del diseño experimental, se necesita caracterizar dicho sensor para conocer cual es la ecuación que representa el comportamiento y así asegurar una respuesta lineal por parte del instrumento.

La caracterización de la balanza se realizo con el uso de pesas calibradas desde 1 gr a 2000 gr. La tabla 80 permite observar la caracterización de la balanza, observando una respuesta lineal estable.

Tabla 80: Caracterización de la balanza con celda de carga

Peso	Voltaje	Error regresión	Desviación estándar	Incertidumbre	Inervalo
1	-0,0004159	0,000346	0,029726309	0,002819	1,69E-07
5	0,000933333	0,00329	0,024084356	0,002284	1,67E-07
20	-0,009300442	-0,0009899	0,025192624	0,002393	1,58E-07
50	-0,0214732	-0,001245	0,004756616	0,0004510	1,41E-07
100	-0,0413719	-0,001281	0,004788666	0,0004540	1,16E-07
200	-0,0800681	-0,0002518	0,019079041	0,001809	7,23E-08
500	-0,200229833	-0,001237	0,005194774	0,0004925	9,44E-09
1000	-0,395558933	0,002061	0,032076746	0,003041	1,28E-07
1500	-0,5966007	-0,0003541	0,008671082	0,0008222	5,26E-07
2000	-0,795207233	-0,0003336	0,006998558	0,0006636	1,20E-06
	Máximo error		Desviación total	Máxima Incertidumbre	Máximo Intervalo
	0,00329		0,019204206	0,003041	1,20E-06

Las pesas usadas para dicha calibración son las existentes en el Laboratorio de Mecánica de Fluidos de la Escuela de Ingeniería Mecánica, las cuales están calibradas, garantizando a su vez el proceso de calibración. En la figura 214 se observan dichas pesas que van desde 1 gr a 2000 gr.

Figura 214: Pesas calibradas



**Prueba de Hipótesis** Este tipo de diseño estadístico ofrece a esta experimentación un solo análisis matemático para ambos procesos, siendo estos, factores que influyen en los resultados y por ende en las conclusiones. Para poder plantear la hipótesis es necesario crear una matriz con el valor de las pendientes con las posibles combinaciones entre las medias muestrales para cada proceso. En la tabla 81 se encuentra la matriz de las pendientes.

Tabla 81: Pendientes de las posibles combinaciones entre las medias muestrales.

(a) Sin Celda de Carga

0.66846781	0.66846781	0.48252251	0.6188495	0.62492372	0.74160269	0.76405991	0.82833089
0.48252251	0.35502194	0.35502194	0.59723484	0.61242081	0.758904	0.7818631	0.85515487
0.6188495	0.59723484	1.01916646	1.01916646	0.79785876	0.97164186	0.94102986	1.01719351
0.62492372	0.61242081	0.79785876	0.64178633	0.64178633	0.95104307	0.91974808	1.01674272
0.74160269	0.758904	0.97164186	0.95104307	1.44421978	1.44421978	1.09464783	1.19644552
0.76405991	0.7818631	0.94102986	0.91974808	1.09464783	0.86682813	0.86682813	1.08998734
0.82833089	0.85515487	1.01719351	1.01674272	1.19644552	1.08998734	1.52178674	1.52178674

(b) Con celda de Carga

0.74734235	0.74734235	0.53238484	0.40377905	0.63063064	0.7353313	0.74209544	0.77170972
0.53238484	0.42791035	0.42791035	0.33546895	0.61446057	0.73401316	0.74162733	0.77358002
0.40377905	0.33546895	0.27147089	0.27147089	0.68884246	0.82328968	0.81216114	0.83840664
0.63063064	0.61446057	0.68884246	1.25567964	1.25567964	1.22498496	1.07220562	1.04904245
0.7353313	0.73401316	0.82328968	1.22498496	1.18952732	1.18952732	0.97160664	0.97122527
0.74209544	0.74162733	0.81216114	1.07220562	0.97160664	0.77471791	0.77471791	0.8656361
0.77170972	0.77358002	0.83840664	1.04904245	0.97122527	0.8656361	0.97038888	0.97038888

La hipótesis a plantear es:

- La hipótesis nula:  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_8 = cte$ , lo que significa que las medias de la matriz de las pendientes para ambos procesos en donde el rango lineal parte 0.35 hasta 4.5 [GPM]. La tabla 82 muestra estos valores, para probar dicha hipótesis.
- La hipótesis alternativa:  $H_0 : \mu_1 \neq \mu_2$ .

Tabla 82: Tabla de las medias de la matriz de las pendientes.

DISEÑO DE EXPERIMENTOS: COMPARACIÓN DEL PROCESO PARA DETERMINAR EL RANGO LINEAL								
VALORES DE CAUDAL	PROCESO							
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
1	0.6755367	0.6612953	0.7977764	0.8235101	0.9160432	0.9748895	0.9842805	1.0750916
2	0.65189619	0.62491468	0.62778086	0.80180451	0.90313893	0.90678578	0.86925757	0.89142701

Para probar la hipótesis se calculó lo siguiente (ver tabla 83):

Tabla 83: ANOVA para el Diseño de Bloques.

ANOVA					
FUENTE DE VARIACIÓN	SUMA DE CUADRADOS	GRADOS DE LIBERTAD	MEDIA CUADRÁTICA	F CALCULADO	F TABLA
TRATAMIENTO	0.024918	1	0.024918	10.513	4.6
ERROR	0.0166	7	0.00237		
BLOQUES	0.2556	7	0.03652		
TOTAL	0.2971	15	0.01981		

Entonces, como  $F_{Calculado} > F_{tabla}$  la hipótesis se rechaza, por consiguiente se emplean el método de Duncan siendo este método es el más utilizado para comparar todos los pares de medias. Para realizar estas comparaciones se debe conocer las medias de cada tratamiento, y estas son:

TRATAMIENTO	MEDIA
1	0.86
2	0.78

Ahora bien, de la tabla de Duncan y calculando la desviación estándar del error, se ajusta el valor de Duncan.

- De tabla  $r_{0,05,7} = 3,344$
- $\sigma = \sqrt{\frac{MSE}{No.de\ bloques}} = \sqrt{\frac{0,0237}{8}} = 0,0172$
- El valor ajusta de Duncan es:  $R = \sigma * 3,344 = 0,06$

**Resultados** Entonces, en la tabla 84 se resumen los rangos mínimos de significancia. Estos rangos se comparan con las diferencias de medias para cada tratamiento.

Tabla 84: Análisis de Duncan para la comparación entre los procesos.

ANÁLISIS DE DUNCAN		
	DIFERENCIA DE MEDIAS	VALOR DUNCAN
S2-S1	0.08	0.057560

Tabla 85: Caracterización del Fluómetro

Ecuación de Regresión	$y_0 = 0,9136x - 0,4474$
Coefficiente de determinación	0.9988
Máximo error	0.046
Máximo intervalo	$4,5587x10^{-4}$
Máximo incertidumbre	0.0059
Rango de linealidad	0.5 - 4.2 GPM

# CONCLUSIONES

## CONCLUSIONES EXPERIMENTALES

- Se conocieron y desarrollaron los procedimientos de calibración para los dos instrumentos (manómetro análogo y transductor de presión).
- Se determinó el intervalo de linealidad comprobando la hipótesis establecidas de regresión del transductor de presión MSP 300 en un nuevo rango de operación de 27 a 210 Psi.
- El Modulo de Young calculado con datos experimentales fue de  $6.25 \times 10^{10}$  [Pa] y en comparación con un valor de  $6.3 \times 10^{10}$  [Pa] según la bibliografía, el porcentaje de error fue de 0.65 %, lo cual indica que se obtuvieron datos precisos, dando un coeficiente de correlación igual a 1.
- El porcentaje de error en la determinación del coeficiente de sensibilidad es de 4.0274 % de un valor experimental de 1.53 respecto a 1.6; Esto se debe a que el strain gage no se encuentra ubicado exactamente en forma tangencial al agujero que genera el máximo esfuerzo.
- Los valores calculados de la relación de Poisson con los datos experimentales presentan un porcentaje de error de 2.06 %, con valor medio de 0.3232 respecto a 0.33; éste valor de porcentaje de error es debido a la ubicación del punto de medición.
- Por medio de ANOVA se comprobó el grado de significancia en la diferencia de los dos métodos experimentales, debido a la optimización del sistema de medición, hallando un flujo másico en forma diferencial, mediante la incorporación de una celda de carga.
- Se comprobó el rango de linealidad dado por el fabricante (0.35 - 3.5 GPM) con un factor de seguridad de 1.5, es decir, el flujo alcanza un rango de linealidad de 4.5 GPM.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- Se desarrolló un Seminario de Investigación en Métodos Probabilísticos Aplicados al diseño de Experimentos para Ingenieros donde se trataron temáticas de interés como lo

es la probabilidad y estadística dándole un enfoque práctico con aplicaciones al diseño de experimentos.

- Se realizó un estudio sobre temáticas propuestas con anterioridad en el plan de proyecto de grado como lo son: exploración en el método científico y el diseño experimental, calibración y características dinámicas de señales, análisis de incertidumbre, probabilidad y estadística de experimentos, diseño de experimentos y aplicación de métodos probabilísticos al diseño experimental para ingenieros, mediante mediciones de parámetros físicos como: presión, flujo, esfuerzo y deformación.
- Se elaboró un documento síntesis que servirá como base para el grupo de Investigación DIcBOT con el objetivo de continuar con estudios avanzados a nivel de Maestría y Doctorado sobre la temática tratada en el Seminario de Investigación desarrollado.
- Se desarrollaron pruebas experimentales como complemento y aplicación de la fundamentación teórica estudiada a lo largo del Seminario de Investigación, obteniendo datos reales para su posterior análisis mediante el uso de métodos probabilísticos.
- Se realizaron presentaciones en Power Point para la socialización de los temas tratados en cada sesión del Seminario de Investigación.
- Se elaboraron documentos que respaldan el desarrollo de talleres prácticos como profundización, aplicación de conceptos y objetos de investigación.
- Se utilizaron diferentes herramientas computacionales como: Latex para la elaboración del documento síntesis, LabVIEW como software para la adquisición de datos, y Matlab como software facilitador en el análisis estadístico y probabilístico de datos reales obtenidos de forma experimental.
- La experimentación necesita del método científico y de un diseño experimental para obtener datos reales de interés en particular, y poderlos entender, analizar e interpretar mediante el uso de herramientas como la estadística y los métodos probabilísticos, con el fin de sacar conclusiones acerca de un sistema o proceso ya sea para optimizarlo o para verificar teorías ya existentes.

# BIBLIOGRAFIA

ARTIGAS, M. Filosofía de la ciencia experimental: la objetividad y la verdad en las ciencias. 2 ed. Editorial EUNSA, España 1992.

BELLIDO, J. Sistemas de medición del ozono: Instrumentación asociada y Calibración. Revista ACAM - Asociación Catalana de Meteorologia. Tethys, 3, 59–62, 2006.

BENTLEY, Jhon P. Sisistemas de Medición. Principios y Aplicaciones. 2 ed. CECSA. 1999.

BOLTON, Bill. Mediciones y Pruebas Eléctricas y Electrónicas .Alfaomega, 1995.

CASTILLO,I. & GUIJARRRO, M. Estadística Descriptiva y cálculo de la probabilidades. Pearson,España, 2006.

CREUS, Antonio. Instrumentación Industrial, 7a ed., Edit. Alfaomega, España, 2006.

CREUS, Antonio. Instrumentos Industriales su ajuste y Calibración. 3 ed. México.: Alfaomega, 2009.

DOEBELIN, Ernest. Sistemas de Medición e Instrumentación: Diseño y Aplicación. 5 ed. México.: McGraw-Hill. 2005.

DONALD, R. Process systems analysis and control. 2 ed. McGraw-Hill, 1991.

DORF R.; Bishop R., Sistemas de control moderno, Decima edición. Editorial Pearson, 2005.

DUNN, Patrick. Measurement & Data Analysis for Engineering & Science. 1 ed. University of Notre Dame, Indiana, USA.: McGraw-Hill, 2005.

FIGLIOLA, Richard. y BEASLEY, Donald. Mediciones mecánicas: Teoría y Diseño. 4 ed. México.: Alfaomega, 2008.

GUTIERREZ, Humberto. Análisis y diseño de experimentos. 2 ed. Universidad de Guadalajara, México.: Mc Graw Hill. 2008.

KUO, B., Sistemas de control automático, 7 ed. Editorial Prentice hall, 1996.

KUHN, T. La Estructura de las Revoluciones Científicas. Santa fe de Bogotá.: Fondo de Cultura Económico, 1992.

HINES, William y MONTGOMERY, Douglas. Probabilidad y Estadística para Ingeniería. 4 ed. México.: Ceca, 2006.

HOLMAN, Jack P. Experimental methods for engineers. 6 ed. USA.: McGraw-Hill, 1994.

INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TÉCNICAS Y CERTIFICACIÓN. Sistema de gestión de Calidad. Requisitos. NTC-ISO 9001. Bogota.: El Instituto, 2000.

MENDENHALL, William. y SINCICH, Terry. Statistics for Engineering and the Sciences. 5 ed. New York, USA.: Pearson Prentice-Hall, Inc, 2007.

MONTGOMERY, Douglas. & RUNGER, George. Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería. 2 ed.: McGraw-Hill, 1996.

MCGHEE, J & I. A. Henderson & P. H. Sydenham. Sensor Science-essentials for Instrumentation and Measurement Technology. En: Elsevier. 1998.

NAVIDI, William. Estadística para ingenieros y científicos. 4 ed. México.: McGraw-Hill, 2006.

NISE N. S., Control Systems engineering, Quinta edición. Editorial John Wiley & Sons, 2008.

NORMA TÉCNICA COLOMBIANA NTC-ISO 14001.

NTC-ISO/IEC 17025 : Requisitos generales para la competencia de los laboratorios y ensayos de calibración.

NORMA TÉCNICA COLOMBIANA NTC-ISO 10012.

NORMA TÉCNICA COLOMBIANA NTC-ISO 14001.

OGATA, Katsuhiko. Ingeniería de Control Moderna. 3 Ed. México.: Pearson Prentice Hall, 1995.

PEACH, Robert. MANUAL DE ISO 9000. 3 ed. Mc Graw Hill.

PÉREZ, César. Técnicas de muestreo estadístico: Teoría práctica y aplicaciones informáticas. 1 ed. México.: Alfaomega, 2000.

RAMIREZ, Alberto. Metodología de la investigación científica. Pontificia Universidad Javeriana.

ROSS,S. Probabilidad Y Estadística Para Ingenieros. 2da Ed, Mc Graw Hill, México, 2002.

RUIZ, R. El Método científico y sus etapas. México. 2007.

SOISSON, Harold. Instrumentación Industrial. 6 ed. México.: Limusa Noriega Editores, 2007.

SILVA, Fredy Alberto. Manual de Pasantía de Presión Y Manometría-Laboratorio de presión de PROGEN S.A. 2002.

SMITH C.; CORRIPIO A., Control automático de procesos, teoría y práctica, 1 ed. Editorial John Wiley & Sons, 1991.

SPIEGEL, M. & SCILLER ,J. Probabilidad y Estadística. 2 ed.: Mc Graw-Hill, Colombia. 2006.

WHEELER, Anthony J. y GANJI, Ahmad R. Introduction to Engineering Experimentation. 2 ed. New Jersey, USA.: Pearson Education, Inc, 2004.

Parte III

**ANEXOS**

## A. SEMINARIO ALEMAN

Es una actividad académica que tuvo origen a finales del siglo XVIII, surge como una propuesta pedagógica para complementar la investigación y la docencia. Su metodología está basada en el encuentro de personas para discutir y compartir sobre la investigación de un tema específico, contribuyendo al desarrollo de cualidades como percibir y reconocer lo esencial, comparar, valorar, ordenar, definir, fundamentar, probar, refutar, concluir, aplicar, analizar, sintetizar, incluir, deducir e identificar problemas.

Bajo la dirección de alguien, se desarrolla el seminario en torno a un tema escogido, mediante la exposición, complementación, aporte de todos los participantes, sacando conclusiones y nuevos interrogantes que quedaran plasmados en la memoria escrita denominada protocolo.

Las ventajas del Seminario de Investigación son:

- Reflexión didáctica. Es el único medio de asegurarse de que los participantes van directamente a leer en las fuentes.
- Es un instrumento aplicable a todas las áreas del conocimiento humano y no sólo a algunas como equivocadamente pudiera pensarse.
- Proporciona una experiencia de aprendizaje en grupo a través de la comunicación, la cual posibilita un mayor aprendizaje de cada miembro en particular y a una retroalimentación durante el ejercicio.
- Ofrece un control abierto de la realización en base a lo planificado, del rendimiento y capacidades de los participantes; así como una amplitud de exigencias y posibilidades con respecto a gráficos, uso de diapositivas, materiales y diversas clases de medios.

Por lo anterior, puede decirse que aunque el Seminario de Investigación permite una mayor profundización en los temas elegidos, no es este su principal objetivo, su verdadera meta es que los estudiantes entren en contacto con los marcos teóricos existente y luego sobre esa base realicen sus propias producciones de saber.

## B. PROCEDIMIENTO DE CALIBRACIÓN. MANÓMETRO TUBO BURDON TIPO C.

Pasos para la determinación del rango o clase en el que se encuentra el instrumento comparándolo con un patrón de un laboratorio certificado. Prueba preliminar.

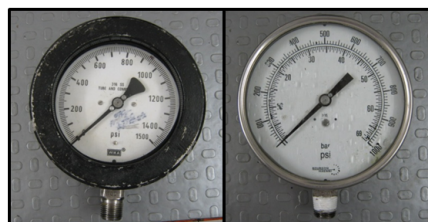
- a. Instalar los manómetros patrón y a calibrar en el equipo de calibración.

Figura 215: Descripción de un manómetro digital-patrón.



Fuente: Empresa REYMOM LTDA.

Figura 216: Manómetros análogos-calibrar.



Fuente: Empresa REYMOM LTDA.

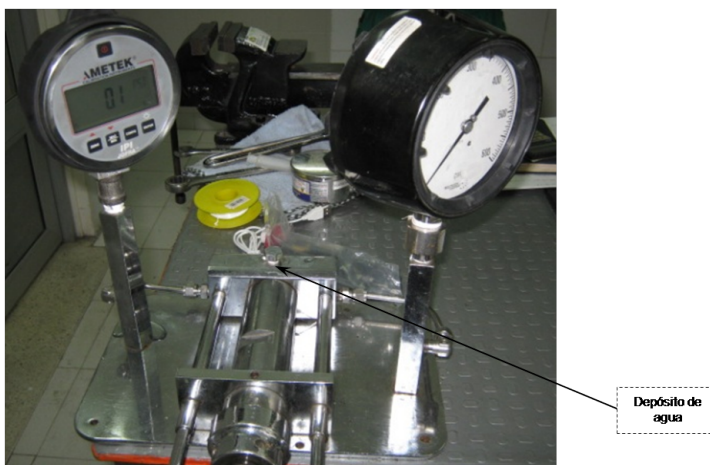
Figura 217: Calibradores de presión de precisión portátil.



Fuente: Empresa REYMOM LTDA.

- b. Llenar de agua el sistema cilindro-pistón.

Figura 218: Cilindro-piston



- c. Inicializamos el manómetro patrón a cero.
- d. Determinar la incertidumbre por apreciación en el manómetro a calibrar.


$\Delta PR =$  INCERTIDUMBRE POR APRECIACIÓN. Se define como el número de veces que puede haber la aguja en el rango, por ejemplo: si vamos a medir una presión entre 0 y 1000 psi, y cada división mide 100 psi, entonces:

El número de veces que cupo la aguja en la escala más pequeña, haciendo el experimento, fue 4 veces.

Para el manómetro de tubo Bourdon al que se le está realizando el procedimiento que mide presiones hasta de 600 psi, en la escala más pequeña cabe 4 veces la aguja.

- e. Toma de datos llenando el *Registro de calibración de Manómetros* tabla 86, este formato es propio de cada laboratorio.

Tabla 86: Registro de calibración expedido por REYMOM LTDA.

 <b>REPARACION Y MONTAJES "MORENO"</b> <b>REGISTRO</b> <b>CALIBRACIÓN DE MANOMETROS</b>		APROBO: Comité de Calidad FECHA: Enero 05 de 2010 CODIGO: ET-K-16 ACTUALIZACIÓN: 1 PAGINA: 1 de 1		
EMPRESA:		CODIGO:		
SISTEMA Y/O SERVICIO:		FECHA:		
DESCRIPCIÓN:				
INFORMACION GENERAL:				
TAG:		MARCA:		
MODELO:		SERIE:		
RANGO DE MEDIDA:		UNIDADES DE	PSI X Bar MG/CM2	
DIVISION ESCALA:		INGENIERIA:	IN H20 INHG	
ELEMENTO DE PRESION: Bourdon Helicoidal Diafragma		Tamaño Caratula:		
MATERIAL DE CAJA: Fosfatica Acero Inox Acero Negro		Material partes Internas:		
MONTAJE:		Superficie	Local Yate	
ACCESORIOS:		Coleta/Sólim	Diafragma Amortiguador Límitador	
TIPO DE CONEXIÓN:		1/4NPT 1/2NPT	ABAJO ATRÁS Macho Hembra	
SISTEMA DE LLENADO:		SI	NO	
EQUIPO Y/O INSTRUMENTO PATRON UTILIZADO:				
NUMERO DEL CERTIFICADO DE CALIBRACION:		FECHA		
NOTA 1:				
NOTA 2:				
REGISTRO DE CALIBRACION				
SEÑAL APLICADA PATRON (PSI)	LECTURA MANOMETRO ASCENDENTE (PSI)	LECTURA MANOMETRO DESCENDENTE (PSI)	ERROR MÁXIMO	% DE ERROR
OBSERVACIONES:				
CLASE DE EXACTITUD:			INCERTIDUMBRE DE MEDICIÓN:	
Manometro dentro de clase de Exactitud.				
FIRMAS AUTORIZADAS				
EDWIN CARO ECHAVARRIA Calibra.		JUAN CARLOS MORENO M. Revisó (CALIDAD)		

Es muy importante tener en cuenta que a los instrumentos, en este caso a los manómetros, les afecta la presión atmosférica, entonces según la norma ICONTEC ISO 9001-NTC 1420 que establece definiciones, condiciones generales, escalas, dimensiones, tolerancias, plan de muestreo, ensayos y rotulado para Manómetros de Tubo Bourdon para Uso Industrial, se debe esperar 20 min como mínimo para que se establezca las propiedades mecánicas de los materiales del tubo Bourdon cuando se han tomado muestras de forma ascendente y se pasa a tomar datos de forma descendente.

- f. Determinar el máximo error que se da en las lecturas y se procede a calcular el % de error.

$$\%error = \frac{\text{máx}_{error}}{\text{rango}} * 100$$

Donde el rango es la máxima presión a la que puede llegar el manómetro a calibrar.

Según la norma ICONTEC ISO 9001- NTC 2263 que establece definiciones, unidades de medición, características metrológicas, requisitos de los dispositivos, inscripción, designaciones y controles metrológicos, dice que en los procesos industriales se deben trabajar con manómetros del doble de la presión de operación del proceso. Ejemplo: si se realiza una prueba de hermeticidad en una válvula de compuerta que maneja una presión de 300 Psi, el manómetro instalado para tomar las lecturas de ser de 600 Psi.

g. Según el manual de PROGEN S.A.<sup>181</sup> se define la clase (CL) en la que se encuentra el instrumento según el % de error, y se define la CL que está por encima de este % de error ver tabla 87.


Donde la clase (CL) está definida por el Centro de Control y Calidad de la Superintendencia de Industria y Comercio, y la define como el grupo de instrumentos de medida que satisfacen determinadas exigencias metrológicas destinadas a conservar los errores dentro de los límites especificados.

h. Ya definido la clase y el instrumentista da sus observaciones al cliente, este decide si se ajusta aun más el manómetro.

---

<sup>181</sup>SILVA, Fredy Alberto. Manual de Pasantía de Presión Y Manometría-Laboratorio de presión de PROGEN S.A. 2002.

Tabla 87: Registro de calibración expedido por REYMOM LTDA.

	REPARACION Y MONTAJES "MORENO"	APROBO: Comité de Calidad
	REGISTRO	FECHA: Enero 05 de 2010
	CALIBRACIÓN DE MANOMETROS	CODIGO: FTR.16
		ACTUALIZACION: 1
		PAGINA: 1 de 1

EMPRESA: CONSORCIO VASCONIA	CODIGO: RMCV 004			
SISTEMA Y/O SERVICIO: TOVA #4	FECHA: 10/03/15 (A/M/D)			
DESCRIPCIÓN: MANÓMETRO DE CARATULA				
INFORMACION GENERAL:				
TAG: NO TIENE	MARCA: BOURDON HAENNI			
MODELO: NO TIENE	SERIE: NO TIENE			
RANGO DE MEDIDA: 0-160 PSI	UNIDADES DE: PSI X Bar kgf/cm2			
DIVISION ESCALA: 20 PSI	INGENIERIA: IN RED INRG			
ELEMENTO DE PRESION: Bourdon X Helicoidal Diafragma	Tamaño Caratula: 6 PULGADAS			
MATERIAL DE CAJA: Fesbica Acero Inox X Acero Negro	Materiales partes Internas: ACERO INOX.			
MONTAJE: Superficie Local X Yoke				
ACCESORIOS: Coleta/Sello Diafragma Amortiguador Limitador				
TIPO DE CONEXIÓN: 1/4NPT 1/2NPT X ABAJO X ATRÁS Macho X Hembra				
SISTEMA DE LLENADO: SI X NO				
EQUIPO Y/O INSTRUMENTO PATRÓN UTILIZADO: MANOMETRO DIGITAL AMETEK 0-5.000 PSI				
NUMERO DEL CERTIFICADO DE CALIBRACION: N° 3071	FECHA: 09/04/17			
NOTA 1: CERTIFICADO DE CALIBRACION EMITIDO POR EL LABORATORIO DE PROGENSA, ACREDITADO POR IAS I.C.				
NOTA 2: TOTAL DE HORAS CON ANEXOS: CINCO (5)				
REGISTRO DE CALIBRACION				
SEÑAL APLICADA PATRÓN (PSI)	LECTURA MANOMETRO ASCENDENTE (PSI)	LECTURA MANOMETRO DESCENDENTE (PSI)	ERROR MÁXIMO	% DE ERROR
0	0	0	0	0
20	19.8	20.5	0.5	0.31
40	39.7	40.6	0.6	0.37
60	59.8	60.7	0.7	0.43
80	80	80.5	0.5	0.31
100	99.5	100.2	0.5	0.31
120	119.7	120	0.3	0.18
140	139.4	140	0.6	0.37
160	159.6	160	0.4	0.25
OBSERVACIONES:				
CLASE DE EXACTITUD: +/- 0.6 %		INCERTIDUMBRE DE MEDICIÓN:		
Manómetro dentro de clase de Exactitud.				
FIRMAS AUTORIZADAS				
EDWIN CARO ECHAVARRIA Calibra.		JUAN CARLOS MORENO M. Reviso (CALIDAD)		

Registro de calibración expedido por REYMOM LTDA.

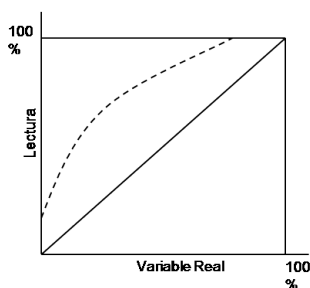
## Determinar el tipo de error y realizar la respectiva corrección o ajuste del instrumento

En la práctica, los instrumentos de medición y control indican unos valores inexactos que se apartan en mayor o menor grado del valor real de la señal de entrada, debido a las condiciones del proceso. Las causas de estas variaciones pueden ser causadas por vibraciones, temperatura, golpes, derivadas eléctricas, cambios en el proceso con variables fuera de los límites especificados, etc., de modo que será necesario establecer unos intervalos de calibración que vuelvan a poner al instrumento en mejores condiciones.

En condiciones de funcionamiento estático, las desviaciones de la curva variable real-lectura de un instrumento típico figura 219 con relación a la recta ideal representan los errores de medida. Esta curva puede descomponerse en tres que representan individualmente los tres tipos de errores que pueden hallarse en forma aislada o combinada<sup>182</sup>.

<sup>182</sup>CREUS, Antonio. Instrumentación Industrial, 7a ed., Edit. Alfaomega, España, 2006.

Figura 219: Curva variable real-lectura

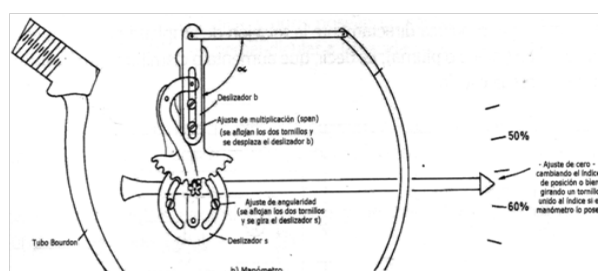


Fuente. *Instrumentos Industriales. CREUS, Antonio. Edit. Alfaomega. Pág. 41*

Con base a los errores definidos en el Capítulo 6 y con todos los conceptos definidos, se procede a ajustar el instrumento según el o los errores que presente este. Los pasos son los siguientes:

1. Situar la aguja en el valor mínimo del campo de medida, es decir, en la posición inicial de la aguja, y en este valor ajustar el tornillo cero del instrumento hasta que el índice señale el punto base (cero).
2. Situar la aguja en el valor máximo del campo de medida, en este caso a la presión máxima, y en este valor ajustar el tornillo de multiplicación hasta que el índice señale justo el valor máximo del instrumento.
3. Repetir los pasos (1) y (2) hasta que las lecturas sean las correctas en sus valores máximos y mínimos.
4. Si el instrumento tiene un error de angularidad, ajustar el tornillo de angularidad hasta mover el índice en la dirección del error unas cinco veces.
5. Reajustar nuevamente los tornillos cero y de multiplicación hasta conseguir la exactitud deseada.

Figura 220: Esquema de Manómetro Bourdon con los tipos de Ajuste para cada Error



Fuente. *Instrumentos Industriales. CREUS, Antonio. Edit. Alfaomega. Pág. 44.*

## C. NORMA TÉCNICA COLOMBIANA-RESUMEN

Tabla 88: Requisitos Generales para la Competencia de los Laboratorios de Ensayo y Calibración

REQUISITOS	CARACTERÍSTICA
<b>1. Alcance</b>	Esta norma internacional es una herramienta para los laboratorios que están desarrollando sus sistemas técnicos de calidad y de gestión que regulan sus operaciones. Los clientes de los laboratorios, las autoridades reguladoras y los organismos de acreditación también pueden utilizarla para confirmar o reconocer la competencia de los laboratorios.
<b>2. Referencias Normativas</b>	Los siguientes documentos normativos contienen condiciones que, mediante su referencia en este texto, constituyen las disposiciones de esta norma internacional: ISO 9001:1994, Quality systems—Model for quality assurance in design, development, production, installation and servicing. ISO 9002:1994, Quality systems —Model for quality assurance in production, installation and servicing. ISO/IEC Guide 2, General terms and their definitions concerning standardization and related activities VIM, International vocabulary of basic and general terms in metrology.
<b>3. Términos y Definiciones</b>	La guía 2 ISO/IEC se relacionan específicamente con la normalización, certificación y acreditación de laboratorios, por lo que se prefiere usar estas definiciones y las del VIM.
<b>4. Requisitos de gestión</b>	1. Organización: Es responsabilidad del laboratorio llevar a cabo sus actividades de ensayo y calibración de tal manera que cumpla con los requisitos de esta norma internacional y que satisfaga las necesidades del cliente, de las autoridades reguladoras u organizaciones que otorgan el reconocimiento.

Continúa      Pág  
siguiente

REQUISITOS	CARACTERÍSTICA
	<p>2. Sistema de calidad: El laboratorio debe establecer, aplicar y mantener un sistema de calidad apropiado al alcance de sus actividades. De igual forma debe documentar sus políticas, sistemas, programas, procedimientos e instrucciones en el nivel necesario para asegurar la calidad de los resultados de los ensayos y calibraciones. La documentación del sistema debe estar a disposición del personal apropiado para su correspondiente comprensión y aplicación.</p> <p>3. Control de documentos: El laboratorio debe establecer y mantener procedimientos para controlar toda la documentación (generada internamente o proveniente de fuentes externas) que forme parte de su sistema de calidad, como reglamentos, normas, otros documentos normativos, métodos de ensayo y calibración, así como también dibujos, software, especificaciones, instrucciones y manuales.</p> <p>4. Subcontratación de ensayos y calibraciones: El laboratorio debe mantener un registro de todos los subcontratistas que utiliza para los ensayos y calibraciones, así como un registro de las pruebas del cumplimiento de esta norma internacional.</p> <p>5. Compra de servicios y suministros: El laboratorio debe disponer de una política y procedimiento(s) para la selección y adquisición de servicios y suministros que utiliza y que afectan la calidad de los ensayos y calibraciones. De igual forma, deberá establecer procedimientos para la compra, recepción y almacenamiento de reactivos y materiales consumibles relevantes para los ensayos y calibraciones.</p> <p>6. Servicio al cliente: El laboratorio deberá cooperar con los clientes o sus representantes para aclarar sus solicitudes y para que puedan monitorear el desempeño del laboratorio en relación con el trabajo efectuado, siempre que el laboratorio asegure confidencialidad hacia otros clientes.</p>

Continúa      Pág  
siguiente

REQUISITOS	CARACTERÍSTICA
	<p>7. Reclamos: El laboratorio deberá disponer de una política y procedimientos para la resolución de reclamos de los clientes u otras partes. Se deberá mantener registros de todos los reclamos, investigaciones y acciones correctivas tomadas por el laboratorio.</p> <p>8. Control de no conformidades en los ensayos y calibraciones: El laboratorio debe establecer una política y procedimientos que se apliquen cuando algún aspecto de su trabajo de ensayo y calibración, o los resultados de este, no se ajustan a sus propios procedimientos o a los requisitos acordados con el cliente.</p> <p>9. Acciones correctivas: El laboratorio debe establecer una política y procedimiento y debe designar las autoridades apropiadas para implantar las acciones correctivas cuando se identifiquen no conformidades en los ensayos y calibraciones o desviaciones de las políticas y procedimientos del sistema de calidad o de las operaciones técnicas.</p> <p>10. Acciones preventivas: Se deben identificar las mejoras necesarias y las fuentes potenciales de no conformidades, ya sean técnicas o concernientes al sistema de calidad. Si se requiere de acción preventiva, se deberá desarrollar, implementar y monitorear los planes de acción para reducir la probabilidad de ocurrencia de dichas no conformidades y aprovechar las opciones de mejora.</p> <p>11. Control de registros: El laboratorio deberá establecer y mantener procedimientos para la identificación, recolección, indicación, acceso, archivo, almacenamiento, mantenimiento y descarte de registros técnicos y de calidad. Los registros de calidad deberán incluir informes de auditorías internas, revisiones de la dirección, así como registros de las acciones correctivas y preventivas.</p>

Continúa      Pág  
siguiente

REQUISITOS	CARACTERÍSTICA
	<p>12. Auditorías internas: El laboratorio debe conducir auditorías internas de sus actividades, periódicamente y de acuerdo con un calendario y procedimiento predeterminado, a fin de verificar que sus operaciones cumplan los requisitos del sistema de calidad y de esta norma internacional. El programa de auditorías internas debe abordar todos los elementos del sistema de calidad, incluidas las actividades de ensayo y calibración. Es responsabilidad del gerente de calidad planear y organizar auditorías según lo requiera el programa y según lo solicite la dirección. Tales auditorías deberán ser conducidas por personal capacitado y calificado, el cual siempre que los recursos lo permitan, será independiente de la actividad que se va auditar.</p> <p>13. Revisiones de la dirección: La dirección administrativa del laboratorio debe conducir periódicamente una revisión del sistema de calidad del laboratorio y de las actividades de ensayo y calibración para asegurar su idoneidad y efectividad continua y para introducir los cambios o mejoras necesarias.</p>
<p><b>5. Requisitos técnicos</b></p>	<p>1. Generalidades. Factores que influyen en la determinación de la exactitud y fiabilidad de los ensayos y calibraciones efectuadas por un laboratorio: factores humanos, instalaciones y condiciones ambientales, métodos de ensayo y calibración y validación de métodos, equipo, trazabilidad de la medición, muestreo y manejo de los elementos de ensayo y calibración. El laboratorio deberá considerar estos factores al desarrollar los métodos y procedimientos de ensayo y calibración, en la capacitación y calificación del personal y en la selección y calibración del equipo que utiliza.</p> <p>2. Personal: La dirección del laboratorio deberá asegurar la competencia de todos aquellos que operen equipos específicos, realicen ensayos y calibraciones, evalúen resultados y firmen informes de ensayos y certificados de calibración. Cuando el laboratorio contrate personal que esté bajo capacitación, debe proporcionar la supervisión adecuada.</p>

Continúa      Pág  
siguiente

REQUISITOS	CARACTERÍSTICA
	<p>3. Instalaciones y condiciones ambientales: Las instalaciones del laboratorio para ensayo y calibración, incluidas pero no limitadas a las fuentes de energía, iluminación y condiciones ambientales, deben facilitar la correcta ejecución de los ensayos y calibraciones. El laboratorio deberá asegurar que las condiciones ambientales no invaliden los resultados o afecten negativamente la calidad requerida de cualquier medición.</p> <p>4. Métodos de ensayo y calibración y validación del método.</p> <p>5. Equipo: El equipo y el software empleados para el ensayo, calibración y muestreo deben estar en capacidad de lograr la exactitud requerida y deben cumplir con las especificaciones pertinentes para los ensayos y calibraciones.</p> <p>6. Trazabilidad de la medición: Todo equipo usado para ensayos y calibraciones, incluido el equipo para mediciones secundarias, que tenga un efecto significativo sobre la exactitud o validez del resultado del ensayo, calibración o muestreo, deberá calibrarse antes de ponerse en servicio. El laboratorio debe contar con un procedimiento y programa establecido para la calibración de su equipo.</p> <p>7. Muestreo: El laboratorio debe contar con un plan de muestreo y procedimientos cuando realiza el muestreo de sustancias, materiales o productos para subsecuentes ensayos y calibraciones. El plan y procedimientos para el muestreo deberán estar disponibles en el lugar donde se lleve a cabo el muestreo.</p> <p>8. Manejo de las muestras de ensayo y calibración: El laboratorio deberá disponer de un sistema para la identificación de las muestras de ensayo y calibración. La identificación se retendrá durante la permanencia de la muestra en el laboratorio. El sistema debe ser diseñado y operado de tal manera que las muestras no se confundan físicamente o cuando se haga referencia a ellas en los registros u otros documentos.</p>

Continúa      Pág  
siguiente

REQUISITOS	CARACTERÍSTICA
	<p>9. Aseguramiento de la calidad de los resultados del ensayo y calibración: El laboratorio deberá establecer procedimientos de control de calidad para monitorear la validez de los ensayos y calibraciones. Los datos resultantes deben registrarse de tal manera que se detecten las tendencias y, cuando sea factible, se deben aplicar técnicas estadísticas para revisar los resultados.</p> <p>10. Informe de resultados: Los resultados de cada ensayo, calibración o series de ensayos o calibraciones realizadas por el laboratorio se deben reportar de manera precisa, clara, objetiva, sin ambigüedad y de acuerdo con cualquier instrucción especificada en los métodos de ensayo o calibración.</p>

## D. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA Y ESTACIONARIA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

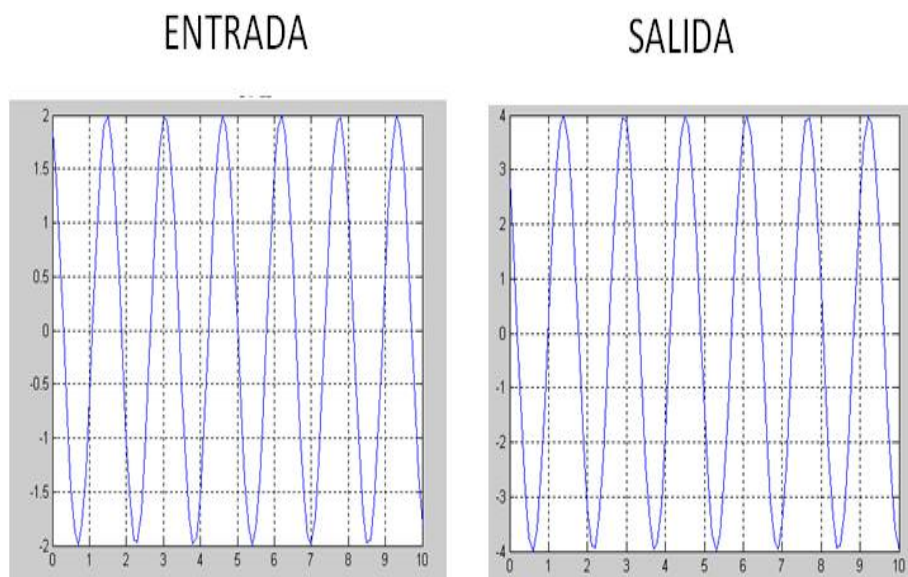
La respuesta en frecuencia de un sistema se define como la respuesta del sistema en estado estacionario a una señal sinusoidal de entrada. La sinusoidal es una señal de entrada única, y la señal de salida resultante para un sistema lineal, al igual que las señales a través del sistema, es sinusoidal en el estado estacionario, difiere de la forma de onda de entrada solamente en amplitud y ángulo de fase <sup>183</sup>.

Para un sistema lineal invariante en el tiempo que tiene una entrada senoidal, su salida, en estado estable será también una función senoidal con la misma frecuencia pero diferente amplitud y fase, es decir, el sistema produce cambios en la amplitud y fase de la función de entrada según figura 221.

Señal de entrada:  $x(t) = X \cos(\omega t + \phi_i)$

Señal de salida:  $y(t) = Y \cos(\omega t + \phi_0)$

Figura 221: Señal de entrada y salida sinusoidal



Con base en lo establecido se tienen la ecuación 183.

<sup>183</sup>DORF, R. y BISHOP, R. Sistemas de Control Moderno. 10 ed. Pearson, 2005.

$$\left| \frac{Y(jw)}{X(jw)} \right| = |G(jw)| \quad (372)$$

$$\phi = \tan^{-1}[(\text{parte imaginaria de } G(jw))/(\text{Parte real de } G(jw))]$$

Donde:

$|G(jw)|$  : Amplitud del cociente entre la señal de salida y la señal de entrada.

$\phi$  : Ángulo de fase de la respuesta en frecuencia.

La amplitud de la señal de salida es el producto de la amplitud de la señal de entrada y la amplitud de la función del sistema ( $|G(jw)|$ ).

El ángulo de fase que representa el corrimiento de la función de salida con respecto a la función de entrada esta dado por  $\phi$ . Un valor negativo de este ángulo representa un atraso de fase y uno positivo es un adelanto de fase.

En síntesis, la respuesta en frecuencia es esencialmente el estudio de la manera en que se comportan la razón de la amplitud de la señal de salida respecto a la amplitud de la señal de entrada y el ángulo de fase de diferentes componentes o sistemas cuando se cambia la frecuencia de entrada .

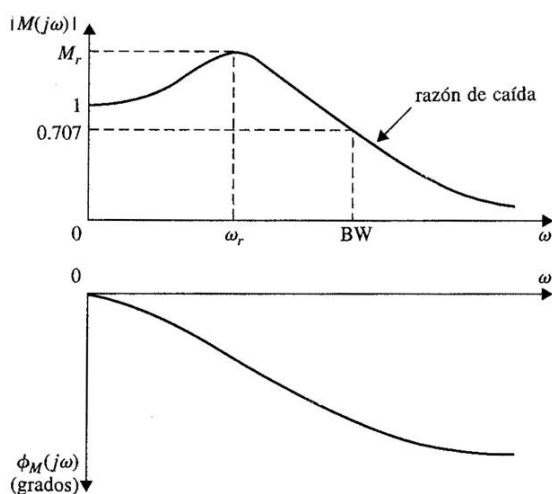
Especificaciones en el dominio de la frecuencia.

Es importante definir algunas especificaciones que permitirá identificar el desempeño de un sistema.

- Pico de Resonancia: Se define como el valor máximo de  $|G(jw)|$ . Esta magnitud permite tener una idea de la estabilidad relativa de un sistema. En la mayoría de los sistemas de control un valor deseado de esta magnitud está entre 1.1 y 1.5.
- Frecuencia de resonancia: Es la frecuencia en la cual se presente el pico de resonancia.
- Ancho de banda: Es la frecuencia para la cual  $|G(jw)|$  cae al 70.7 % o 3 dB debajo de su valor inicial que es el correspondiente cuando la frecuencia es cero. Un ancho de banda grande permite que las señales de alta frecuencia pasen más fácilmente por el sistema lo que ocasiona un tiempo de levantamiento pequeño y la respuesta en el tiempo es más rápida, lo contrario sucede con un ancho de banda pequeño. Cabe mencionar que el ancho de banda permite tener características de filtrado de ruido y la robustez del sistema.

En la figura 222 se especifican gráficamente las características de un sistema de control, lo que permitirá identificar y calcular dichos valores a partir del diagrama de Bode.

Figura 222: Características Típicas de un Sistema en el dominio de la Frecuencia.



Fuente: Kuo, Benjamín. *Sistemas de Control Automático*. p.543.

Este tipo de análisis hace referencia a la respuesta de un sistema en estado estable cuando su entrada es senoidal. Su mayor ventaja es que generalmente es sencillo y pueden llegar a ser muy preciso debido a que se puede diseñar un sistema en el que se desprecien efectos que pueden causar inconvenientes en el momento del análisis como lo es el ruido.

Por medio de este método se puede obtener la función de transferencia que representa el comportamiento sinusoidal en estado estable de un sistema. La mayor desventaja de este método es la inexistencia de un vínculo directo con el dominio del tiempo.

## Aproximaciones Asintóticas: Trazas o Diagrama de Bode

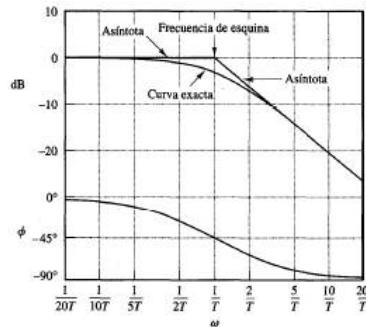
La función de transferencia se puede representar mediante dos gráficas: magnitud (dB) vs frecuencia (rad/s), y ángulo de fase (grados) vs frecuencia (rad/s), cuando solo se necesita una información general sobre la característica de la respuesta en frecuencia, es suficiente usar las aproximaciones asintóticas.

Las aproximaciones asintóticas son una aproximación mediante líneas rectas a la curva real del sistema. Generalmente en la práctica, el interés está en la característica de señales de baja frecuencia es por ello que se recomienda ampliar el rango de frecuencia baja, y aunque no es posible graficar hasta una frecuencia cero, debido a la frecuencia logarítmica, es decir,  $\log(0) = -\infty$ , lo cual no representa un serio problema.

En la Figura 223 se muestran gráficamente la curva de magnitud logarítmica con las asíntotas y la gráfica de fase. El punto de unión de las dos asíntotas se denomina

frecuencia de esquina o corte y es la que divide la curva en dos regiones, una de baja y otra de alta frecuencia.

Figura 223: Aproximación Asintótica del Diagrama de Bode.

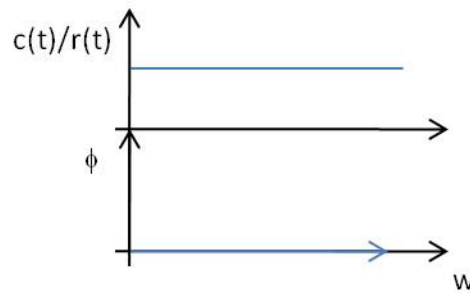


Fuente, Katsuhiko. Ogata. Ingeniería de control moderna. p.477.

## Sistemas De Orden Cero

El diagrama de Bode que representa un sistema de orden cero esta dado por la figura 224, la cual presenta un valor de fase igual a cero ya que la señal de respuesta es completamente proporcional con la señal de entrada de forma ideal.

Figura 224: Respuesta De Un Sistema De Orden Cero En Función De La Frecuencia.

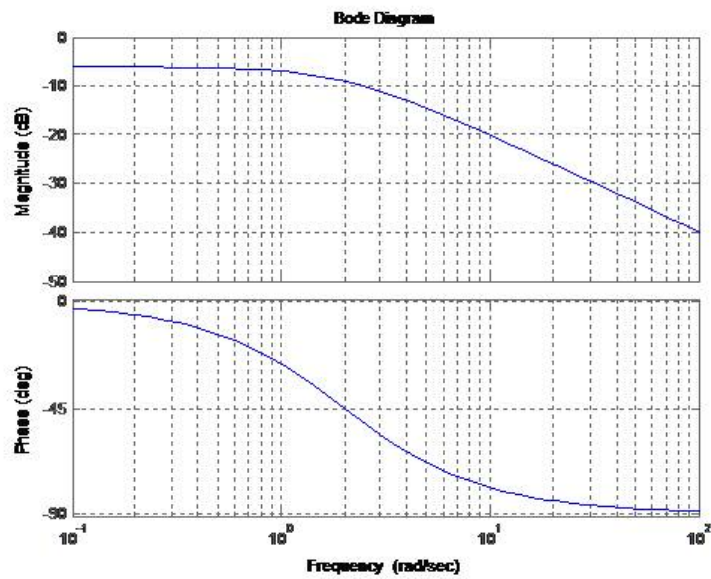


Fuente. OGATA. Katsuhiko.. Ingeniería de control moderna. p.477.

## Sistemas De Primer Orden

La gráfica 43 es el diagrama de Bode para un sistema de primer orden, donde se gráfica magnitud en unidades de decibeles vs frecuencia en rad/seg. y ángulo de fase en grados vs la frecuencia en rad/seg.

Figura 225: Diagrama de Bode Para Sistemas de Primer Orden



Los sistemas más comunes de primer orden son los sistemas masa resorte y los circuitos RC.

## Sistemas De Segundo Orden

Partiendo de la ecuación 373 y observando la figura 226.

$$\frac{1}{w_n^2} \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta/w_n \frac{dy}{dt} + y = kx \quad (373)$$

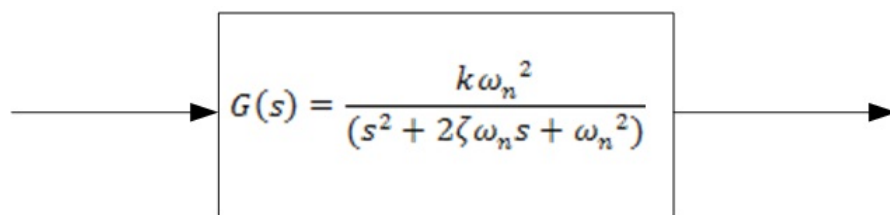
Donde:

$k = b/a_0$ : Es la ganancia de estado estable ó ganancia simple del sistema.

$w_n = \sqrt{(a_0/a_2)}$ : Es la frecuencia natural del sistema

$\zeta = a_0/(2 * \sqrt{(a_0/a_2)})$ : Es el factor de amortiguamiento

Figura 226: Sistema de Segundo Orden



Reemplazando  $s$  por  $jwt$ , se obtiene:

$$G(j\omega) = (k\omega_n^2)/((j\omega^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2))$$

A diferencia del sistema de primer orden, la influencia de los tres parámetros ( $k, \zeta, \omega_n$ ) en la respuesta representada en la figura 25 no es directa, sino que se obtienen a través de las siguientes expresiones:

$$M_r = 1/(2\zeta\sqrt{1 - 2\zeta^2})$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

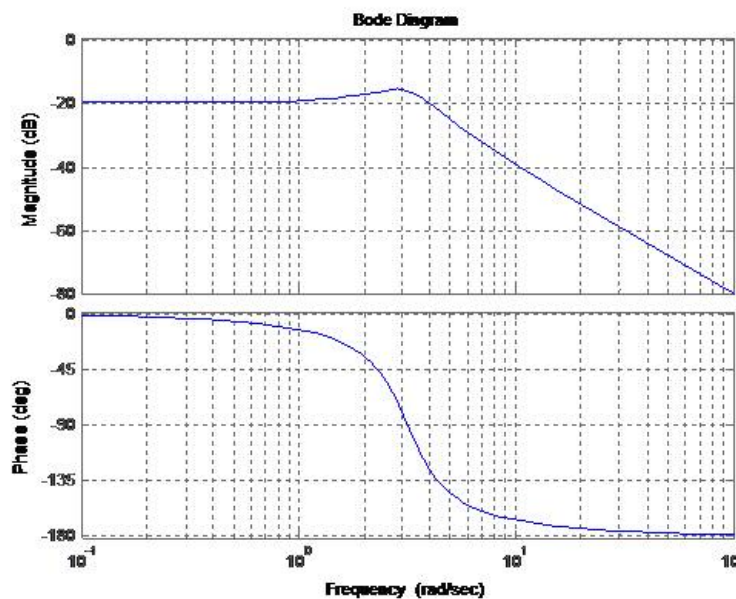
Para valores de  $0 < \zeta < 0,707$

Donde:

$M_r$ : Pico de resonancia

$\omega_r$ : Frecuencia de resonancia.

Figura 227: Diagrama de Bode de Sistemas de Segundo Orden. ( $k=1, \omega_n=3,162, \zeta=0,3162$ )



Los sistemas masa resorte amortiguador y los circuitos RLC, son algunos de los sistemas más representativos de segundo orden.

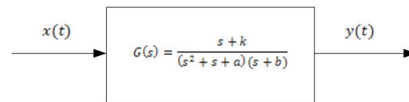
## Sistemas De Orden Superior

Un sistema de orden  $n$  esta dado por la ecuación 374, como se puede observar no existe una caracterización de la ecuación, es decir no se pueden definir variables como se observaba en el caso de los sistemas de primer y segundo orden.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + b_m u \quad (374)$$

Para un sistema de tercer orden se tiene la figura 228, y la ecuación 375 permite mostrar el diagrama de bode para un sistema de tercer orden.

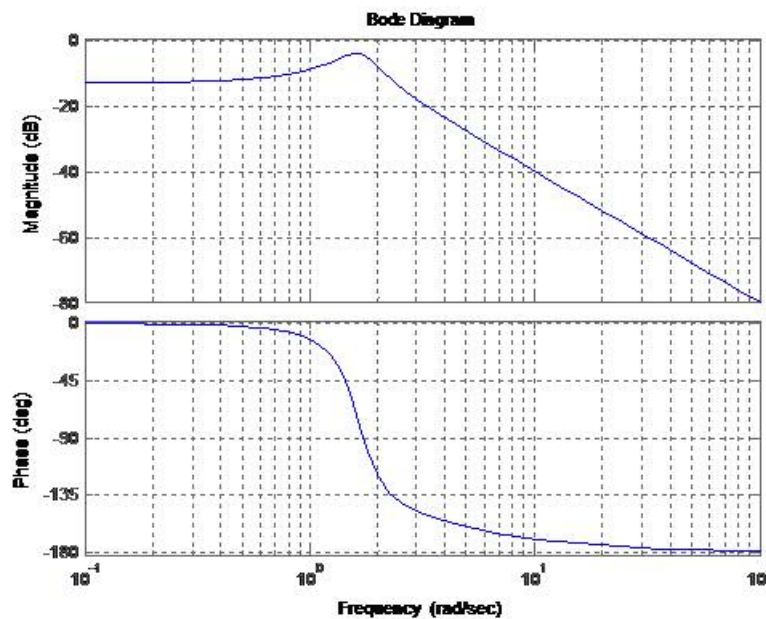
Figura 228: Diagrama de Bloque Para Sistemas de Tercer Orden



$$G(jw) = \frac{jw + 2}{((jw)^3 + 4(jw)^2 + 5(jw) + 9)} \quad (375)$$

Usando como herramienta computacional Matlab, se crea el diagrama de bode para la ecuación 375, y el resultado es un sistema de tercer orden como se observa en la figura 229.

Figura 229: Diagrama de Bode de Orden Superior



# E. MÉTODOS DE MODELADO MATEMÁTICO

## Función de Transferencia

La función de transferencia se puede definir como la relación de la función de salida y la función de entrada en forma de su transformada de Laplace para analizar el comportamiento de un sistema que varía dependiendo la excitación aplicada.

Éste modelo no depende de la naturaleza de la excitación, y aunque contienen los elementos necesarios para hacer la relación no lo describe físicamente, lo que conlleva a que sistemas completamente diferentes, pueden ser descritos por modelos muy similares o idénticos. La ecuación de transferencia se caracteriza porque al multiplicarla por la transformada de la función entrada se halla la transformada de la función de salida.

Para definir la función de transferencia se parte de la ecuación diferencial 376:

$$a_0 \frac{d^n r}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} r}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dr}{dt} + a_n c = b_0 \frac{d^m c}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} c}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dc}{dt} + b_m c \quad m \geq n \quad (376)$$

Sabiendo que la función  $c(t)$  y  $r(t)$  describen funcionalmente la señal salida y entrada correspondientemente, las cuales son función del tiempo, se aplica la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación, bajo la suposición que las condiciones iniciales son cero; despejando se obtiene la ecuación 377, donde  $G(s)$  es la función de transferencia

$$\text{Condiciones iniciales cero} = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m} \quad (377)$$

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{salida}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]}$$

De esta manera se podrán representar las ecuaciones diferenciales de un sistema dinámico en ecuaciones algebraicas relativamente más simples. Se debe tener en cuenta que si la potencia más alta de  $s$  en el denominador es  $n$  entonces el sistema se denomina de  $n$ -ésimo orden; y a su vez, si la potencia máxima  $m$  en el numerador es menor que  $n$ , entonces la ecuación es estrictamente propia, lo cual es necesario.

En la actualidad los sistemas dinámicos a realizarles control se están describiendo no con la función de transferencia que es función de la variable compleja  $s$  por la aplicación de la transformada de Laplace, sino por el modelado de ecuaciones en diferencias que utilizan la transformada  $Z$ , siendo esta última la variable independiente.

## Diagrama De Bloques

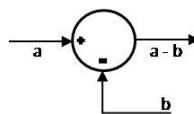
Representación gráfica donde se puede visualizar de forma un poco más realista el flujo de las señales y las relaciones entre los componentes del sistema comprendiendo su funcionamiento. Cualquier sistema lineal puede ser representado por diagramas de bloques.

Los parámetros que describen el sistema que son variables se enlazan mediante bloques funcionales. Los bloques son símbolos que representan la operación que se ejecuta en una señal para producir una salida. Estos bloques son comunicados mediante flechas que infieren en la dirección del flujo de la señal. La representación mediante el diagrama de bloques se realiza de acuerdo al flujo de las señales siendo posible el análisis de la contribución de cada componente al desempeño general del sistema a diferencia de otros métodos. En el diagrama de bloques se puede encontrar información de la dinámica del sistema pero no deduce información de la construcción física del mismo, por ello un mismo diagrama puede representar a varios sistemas sin existir relación entre ellos. La forma del diagrama de bloques depende del punto de vista del análisis que se aplica, por ello diferentes diagramas pueden representar un mismo sistema. Algunos elementos que se utilizan para la construcción de un diagrama de bloques son los siguientes:

### Punto suma:

Es representado por un círculo con una cruz en el centro y los signos que se coloquen en los compartimientos representan si la señal que llega allí es sumada o restada; se debe verificar que las unidades sean compatibles. En la figura 230 se puede observar el punto suma.

Figura 230: Punto Suma



Fuente: *Ingeniería de Control Moderna, Ogata, Pág. 64.*

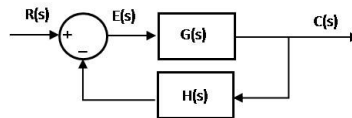
### Punto de ramificación:

A partir de éste, la señal de un bloque va a otros bloques o puntos suma de modo concurrente.

Las anteriores herramientas son necesarias para construir un diagrama de bloques junto con flechas y bloques, el cual puede adquirir la forma en lazo cerrado, donde la salida  $C(s)$  se realimenta al punto suma, allí se compara con la entrada de referencia  $R(s)$ , como se puede interpretar en la figura 231, se nota que la salida  $C(s)$  se obtiene multiplicando la entrada  $E(s)$  por la función de transferencia  $G(s)$ .

Como en el lazo cerrado las señales de salida son comparadas con las de entrada (o iniciales) es necesario convertir sus unidades para que sean compatibles entre sí, para ello es útil que a la salida se le aplique una función de transferencia  $H(s)$  llamado elemento de realimentación que en la mayoría de los casos es un sensor.

Figura 231: Diagrama de Bloques de Lazo Cerrado



Fuente: *Ingeniería de Control Moderna, Ogata, Pág. 65.*

Cuando la función de transferencia  $H(s)$  sea la unidad, la función de transferencia en lazo abierto y de la trayectoria directa llegará al mismo resultado.

Observando el sistema en forma global el objetivo es encontrar la respuesta  $C(s)$  dependiendo de la entrada  $R(s)$ , por esto es necesario encontrar una relación entre ellos como se nota en el diagrama, de forma algebraica se puede interpretar como se observa en las ecuaciones 378 y 379.

$$C(s) = G(s)E(s) \quad (378)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) = H(s)C(s) \quad (379)$$

Si se elimina  $E(s)$  de las ecuaciones 378 y 379, obtenemos la ecuación 380.

$$C(s) = G(s) \{R(s) - H(s)C(s)\} \quad (380)$$

O bien la ecuación 381,

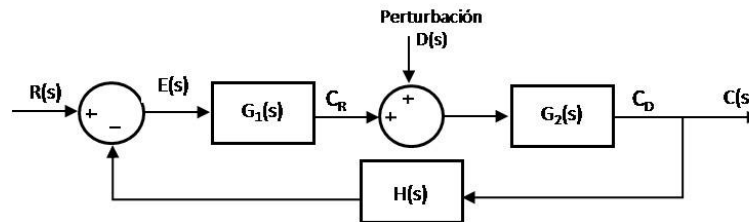
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) * H(s)} \quad (381)$$

La ecuación 381 se denomina de transferencia de lazo cerrado, relacionando la ecuación de trayectoria directa y realimentación que hace parte de la dinámica del sistema en general. Se nota la dependencia de la respuesta de la trayectoria directa como del elemento de realimentación y por supuesto de la entrada del sistema, se debe observar la ubicación de los diferentes elementos en la ecuación, ya que serán implementados posteriormente.

Cuando el sistema está sujeto a una perturbación estando de la forma en lazo cerrado puede presentarse dos entradas: una de referencia y la otra de perturbación, en estos

casos las entradas deben llegar a un punto suma que comunique con la respectiva función de transferencia como se muestra en la figura 232. Éstas entradas se tratan de forma independiente y sus respuestas serán sumadas para hallar la total del sistema en general y completa.

Figura 232: Sistema de Lazo Cerrado sujeto a Perturbación



Fuente: *Ingeniería de Control Moderna, Ogata, Pág. 66.*

Se define la salida total del sistema según la ecuación 382.

$$C(s) = C_D(s) + C_R(s) \quad (382)$$

Para el análisis de la respuesta a la perturbación  $C_D(s)$ , se supone que el sistema se encuentra inicialmente relajado, recordando la ecuación 13 se infiere la relación de la siguiente forma:

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} \quad (383)$$

Por otro lado, suponiendo que la perturbación es cero y denotando la respuesta de la entrada de referencia como  $C_R(s)$ , la relación estará dada por la ecuación 384 :

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s) G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} \quad (384)$$

Por consiguiente encontramos la ecuación 385 :

$$C(s) = C_D(s) + C_R(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} \{G_1(s)R(s) + D(s)\} \quad (385)$$

El procedimiento que se debe llevar para dibujar el diagrama de bloques de un sistema dinámico puede ser:

1. Escribir la ecuación que describe el comportamiento dinámico de cada componente que lo amerita.
2. Sacar la transformada de Laplace, asumiendo condiciones iniciales igual a cero y relacionar en el diagrama de bloques.

En el uso de éste tipo de procedimiento, para hallar un modelo matemático del comportamiento de un sistema, existen unas reglas para simplificar aquellos diagramas que

pueden ser extensos, conllevando una mayor complejidad en la ecuación de transferencia. Estas simplificaciones son llamadas reducción de diagrama de bloques y se puede llevar a cabo por medio del álgebra de los diagramas de bloques mostrados en la tabla 90:

Tabla 90: Álgebra de Bloques

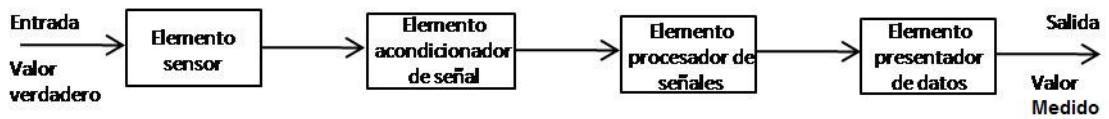
Condición	Diagrama de Bloques
$Y = A - B - C$	
$Y = G_1 G_2 A$	
$Y = G_1(A - B)$	
$Y = (G_1 + G_2)A$	
$Y = G_1 A + G_2 B$	
$Y = \frac{AG_1}{1+G_1G_2}$	

La reducción completa se lleva a cabo cuando toda una cadena de elementos relacionados entre sí, son representados por un solo bloque con una función de transferencia compleja. Se debe tener en cuenta en la simplificación, que el producto de las funciones de transferencia en la dirección de la trayectoria directa, debe ser el mismo que el producto de las funciones de transferencia alrededor del lazo<sup>184</sup>.

Partiendo de la idea que en un sistema de medición la señal de entrada es el valor verdadero de la variable y la señal de salida es el valor medido, se puede identificar cuatro tipos de elementos o bloques que componen éste sistema, aunque frecuentemente se presente la ausencia de uno de ellos como se observa en la figura 233.

<sup>184</sup>Ogata, K. Ingeniería de Control moderna, Tercera edición. Editorial Pearson, 1995.

Figura 233: Estructura General de un Sistema de Medición Representada En un Diagrama de Bloques



En la figura 233 se puede identificar el elemento sensor, el cual está en contacto con el proceso y genera una salida que depende de la variable por medir; el elemento acondicionador de señales, que convierte la señal proveniente del sensor en una forma más adecuada para un procesamiento adicional; el elemento procesado de señales, toma la señal del elemento acondicionador y la convierte en una señal factible de presentación; y, el elemento presentador de datos, que muestra el valor medido de tal forma que un observador lo reconozca.

## Modelado en el Espacio de Estados

Ésta forma de modelado matemático se vuelve útil con herramientas computacionales, ya que en su uso en ocasiones es necesario la solución de sistemas de ecuaciones que lo convierte en un proceso matemático más exacto para hallar la respuesta dinámica de un sistema.

Las ecuaciones del sistema son analizadas en el dominio del tiempo lo que no se lograba con los anteriores métodos, que son desarrollados en el dominio frecuencia; pero la función de transferencia se utiliza en modelos más sencillos, que lo convierte en una mejor interpretación del análisis ya que el modelo matemático podría ser más simple. La ventaja de utilizar este método es que se puede aplicar a sistemas lineales y no lineales, y en los cuales las entradas dependan de la variable independiente. Por otro lado es conveniente utilizar la función de transferencia en el diseño de un sistema dinámico, ya que permite variar los parámetros fácilmente para verificar la respuesta requerida.

El estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables (de estado) mas pequeño, que hacen determinar el comportamiento del sistema (en  $t > t_0$ ) junto con las condiciones iniciales  $t = t_0$ , sin importar la naturaleza del sistema.

Las variables de estado, hacen parte de un conjunto de ecuaciones elementales que determinan el estado del sistema dinámico. No es reglamentario que las variables de estado sean cantidades físicas o aquellas que no se puedan observar, pero en la práctica es ventajoso la utilización de cantidades fácilmente medibles para llevar a cabo una retroalimentación y de esa manera un control sobre el sistema dinámico, si es el caso. Como forma de conjunto para compilar las  $n$  variables de estado, se crea un vector que

sea de  $n$  componentes, el cual es el único que puede describir el sistema en su totalidad, teniendo en cuenta las condiciones iniciales de susodicho sistema.

Es llamado espacio de estados porque al existir  $n$  variables de estado, existen para el mismo espacio  $n$  ejes, los cuales representan la variable independiente de un mismo eje, que es o esta relacionado con la respuesta, por ello cada estado o combinación de valores que pueden tomar el vector de variables de estado puede representarse en este espacio. La ecuación de estado está dada por  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden, que corresponden a  $n$  variables de estado, con el objetivo de resolverlas; la ecuación de salida, corresponde a una ecuación algebraica que despeja las variables de salida relacionándolas con las variables de estado y las condiciones de entrada.

La forma de analizar un sistema dinámico, o de medición en este caso parte de la conformación de la ecuación 386 de estado y la ecuación 387 de salida:

$$\dot{X}(t) = f(x, u, t) \quad (386)$$

$$Y(t) = g(x, u, t) \quad (387)$$

Donde  $x$  corresponde a la variable dependiente del tiempo,  $u$  representa las condiciones iniciales y  $t$  el tiempo. Para el análisis y encontrar la relación entre estas ecuaciones se debe linealizar sus estructuras de la siguiente manera:

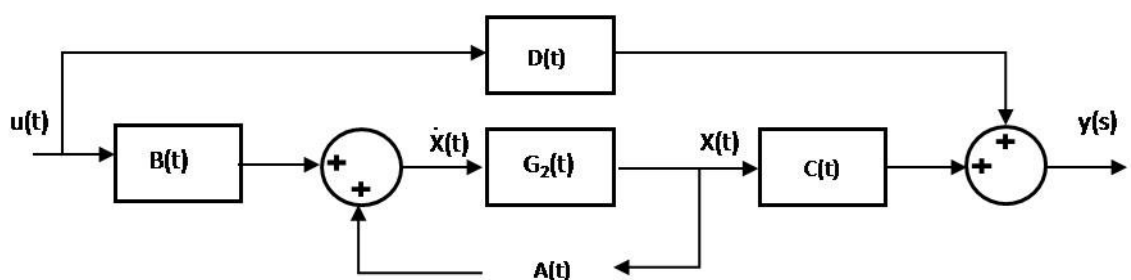
$$\dot{X}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (388)$$

$$Y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (389)$$

Los nuevos elementos incorporados para la linealización de las ecuaciones 388 y 389 se denominan de acuerdo a la posición en donde se encuentran:  $A(t)$  : Matriz de estado,  $B(t)$  : Matriz de entrada,  $C(t)$  : Matriz de salida,  $D(t)$ : Matriz de transmisión directa.

La relación de la ecuación de estado y la ecuación de salida se puede representar mediante un diagrama de bloques, como se observa en la figura 234.

Figura 234: Diagrama de bloques para la relación de ecuación de estado y ecuación de salida.



En general para la representación en el espacio de estados en los sistemas que son representados por ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden, el número de las variables que determinan el estado corresponde a la variable dependiente y sus derivadas:

$$a_0 \frac{d^n c}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dc}{dt} + a_n c = u \quad (390)$$

Entonces las variables de estado quedan definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X_1 &= c \\ X_2 &= \dot{c} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ X_n &= \frac{d^{n-1} c}{dt^{n-1}} \end{aligned} \quad (391)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= X_3 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \dot{X}_{n-1} &= X_n \\ \dot{X}_n &= -a_n X_1 - \dots - a_1 X_n + u \end{aligned} \quad (392)$$

Expresando en forma general como:

$$[\dot{X}] = [A][X] + [B]u \quad (393)$$

Donde:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} \quad (394)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_1 \end{bmatrix} \quad (395)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \quad (396)$$

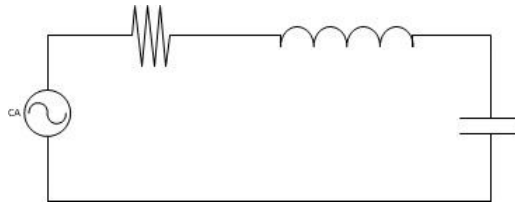
# F. APLICACIÓN DE MODELADO MATEMÁTICO A SISTEMAS DINÁMICOS

## SISTEMAS ELÉCTRICOS

Como se ha explicado anteriormente las ecuaciones diferenciales que describen la respuesta dinámica de los sistemas físicos con respecto a la excitación son originadas por la formulación de leyes, por ello en el caso de los sistemas eléctricos es muy utilizado la aplicación de las leyes de Kirchhoff, que conlleva al método de mallas (conservación del voltaje en una malla) o de nodos (sumatoria de la corriente que entra es igual a la que sale en un nodo).

Lo anterior se aplica a un circuito RLC como se observa en la figura , que contiene los elementos básicos en esta área, y que son fundamento de analogía para otros tipos de sistemas dinámicos (mecánico, hidráulico, neumático, térmico, entre otros):

Figura 235: Sistemas Eléctricos



Las ecuaciones diferenciales que identifican a los elementos de capacitancia (C) e inductancia (L):

Corriente en la capacitancia ecuación 397:

$$C \frac{de_C(t)}{dt} = i(t) \quad (397)$$

Voltaje en L según ecuación :

$$L \frac{di(t)}{dt} = e_L(t) \quad (398)$$

Aplicando las leyes de Kirchoff:

$$e_i = e_R + e_L + e_C \quad (399)$$

Donde  $e_i$  corresponde al potencial de la fuente, reemplazando las ecuaciones en la ecuación , teniendo en cuenta que en un circuito en serie la corriente es igual para todos los elementos, se obtiene:

La ecuación 400 para analizar la corriente  $i$  de respuesta para el sistema con un tipo de entrada de voltaje  $e_i$ :

$$e_i = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (400)$$

Ecuación para analizar voltaje de salida  $e_o$  en el condensador, con un voltaje de entrada  $e_i$ :

$$e_i = C \frac{de_o}{dt} R + L \frac{d(C \frac{de_o}{dt})}{dt} + e_o \quad (401)$$

$$e_i = CL \frac{d^2 e_o}{dt^2} + CR \frac{de_o}{dt} + e_o \quad (402)$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$E_i(s) = RI(s) + LsI(s) + \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) \quad (403)$$

$$E_i(s) = CLs^2 E_o(s) + CRs E_o(s) + E_o(s) \quad (404)$$

Se halla la función de transferencia para conocer la corriente y voltaje de respuesta:

$$\frac{I(s)}{E_i(s)} = \frac{Cs}{CLs^2 + CRs + 1} \quad (405)$$

## SISTEMAS DE NIVEL DE LIQUIDO

En el análisis del flujo de líquidos es necesario tener en cuenta que el comportamiento de los fluidos en dos rangos de velocidad cambia, pasando de régimen laminar a turbulento, y en la fase de cambio existe un rango donde el flujo no tiene las características necesarias para ubicarse en alguno de los dos estados. Para realizar una ubicación aproximada se implemento la valoración del número de Reynolds, del cual infiere:

$Re < 2000$  Flujo Laminar

$Re > 3000-4000$  Flujo Turbulento

En general el flujo laminar se puede describir con ecuaciones diferenciales lineales y el flujo turbulento con ecuaciones diferenciales no lineales; en la práctica, en los procesos industriales los flujos se transportan a través de tuberías y tanques que a menudo es flujo turbulento.

Para el estudio del comportamiento del nivel de líquido es necesario hacer analogía con los conceptos de resistencia y capacitancia eléctricos que simplifican el análisis de estos tipos de sistemas 236.

Figura 236: Visualización de Componentes para la Analogía de Distintos Tipos de Sistemas Dinámicos.

Sistema	Elemento de variable across	Variable through integrada	Elemento de variable across	Variable across integrada
Eléctrica	Corriente, $i$	Carga, $q$	Diferencia de voltaje $v_{21}$	Flujo magnético, $\lambda_{21}$
Mecánica traslacional	Fuerza, $F$	Momento traslacional, $P$	Diferencia de velocidad, $v_{21}$	Diferencia de desplazamiento, $y_{21}$
Mecánica rotacional	Par, $T$	Momento angular, $h$	Diferencia de velocidad angular, $\omega_{21}$	Diferencia de desplazamiento angular, $\theta_{21}$
Fluido	Caudal volumétrico de fluido, $Q$	Volumen, $V$	Diferencia de presión, $P_{21}$	Momento de presión, $\gamma_{21}$
Térmico	Caudal de calor, $q$	Energía calorífica, $H$	Diferencia de temperatura, $\mathcal{T}_{21}$	

Fuente: *Sistemas de control moderno, Dorf. Pag. 39*

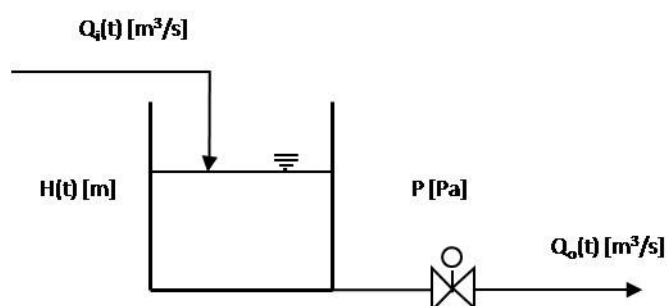
### Resistencia y capacitancia de sistemas de nivel de líquido

En los sistemas hidráulicos el flujo pasa a través de canales cerrados llamados tubos, los cuales condicionan su movimiento, en ellos se presenta una resistencia equivalente, que es definida como el cambio en la diferencia de nivel ( $H(t)$ , de dos tanques conectados por susodicho tubo, que equivale a una diferencia de presión entre dos puntos) necesaria para producir un cambio de una unidad en velocidad del flujo:

$$R = \frac{\Delta H [m]}{\Delta q [m^3/s]} \quad (406)$$

Flujo laminar: Una representación física de un tipo de resistencia se puede representar así:

Figura 237: Sistema De Nivel De Flujo



La relación de la velocidad del flujo ( $Q(t)$ ) y la altura de nivel ( $H(t)$ ) es totalmente proporcional y representa la restricción en flujo laminar, por ello:

$$R_L = \frac{dH}{dQ} = \frac{H}{Q} \quad (407)$$

Flujo turbulento: la velocidad de flujo en estado estable se obtiene mediante,

$$Q = k\sqrt{H} \quad (408)$$

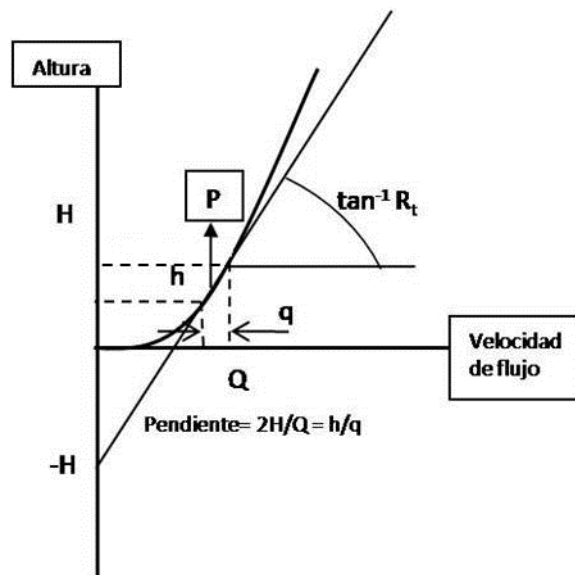
Entonces la resistencia ( $R_T$ ) resolviendo la ecuación , se obtiene:

$$R_T = \frac{2H}{Q} \quad (409)$$

Esta linealización es válida siempre y cuando los cambios en la altura y el flujo, a partir de sus valores respectivos en estado estable, sean pequeños.

En muchos casos se desconoce el valor de  $k$ , que depende del coeficiente de flujo y del área de restricción. En estos casos, la resistencia se determina mediante la grafica de la curva de la altura vs. flujo, que está basada en datos experimentales y se mide la pendiente de la curva en condición de operación, como se puede ver en la grafica de la figura 238:

Figura 238: Linealidad En Sistemas De Nivel De Flujo.



Fuente: *Ingeniería de Control Moderna, Ogata. Pag. 66.*

La línea tangente a la curva en el punto P, es el punto de operación en estado estable; e interseca la ordenada en el punto  $(-H,0)$ . Por tanto, la pendiente de esta línea tangente es  $2H/Q$ .

De esta manera se hace una aproximación lineal que se basa en el hecho que la curva real no difiere mucho de su línea tangente si la condición de operación no varía a una tasa muy alta.

La definición de capacitancia en un sistema hidráulico se puede aplicar en el potencial que almacena un tanque, el cual es representado en forma de nivel del líquido almacenado, por lo tanto:

$$C = \frac{\Delta \text{Volumen en el tanque} [m^3]}{\Delta H [m]} \quad (410)$$

Tomando como referencia la figura 11, y en resumen de lo anterior si un flujo es laminar se puede describir por medio de un sistema lineal, pero si es turbulento el modelo matemático será no lineal teniendo la posibilidad de linealizar con la condición de presentarse pequeñas variaciones en las variables.

Aplicando la ley de continuidad se obtiene:

$$\frac{\Delta \text{Volumen en el tanque}}{\Delta t} = q_i - q_o \quad (411)$$

$$\frac{\Delta H * A}{\Delta t} = q_i - \frac{H}{R} \quad (412)$$

Con la definición de resistencia y la analogía de la capacitancia en un circuito eléctrico, en un circuito hidráulico la capacitancia es el área:

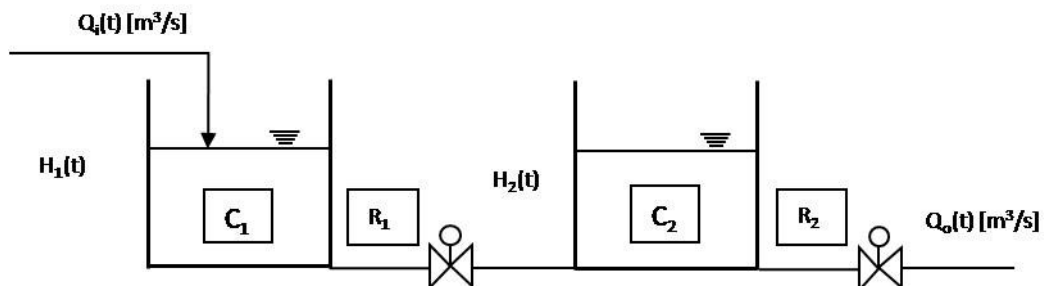
$$RC \frac{dh}{dt} + H = Rq_i \quad (413)$$

Aplicando la transformada de Laplace y suponiendo condiciones iniciales de cero a ambos miembros de la ecuación se obtiene:

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R}{RCs + 1} \quad (414)$$

Sistema de nivel de líquido con interacción, la figura representa este sistema es:

Figura 239: Sistema De Dos Tanques Con Interacción.



Suponiendo variaciones pequeñas en las variables a partir de los valores en estado estable, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1 \quad (415)$$

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q - q_1 \quad (416)$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_2 \quad (417)$$

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2 \quad (418)$$

Si  $q_1$  es la entrada y  $q_2$  la salida:

$$\frac{Q_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (C_1 R_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) s + 1} \quad (419)$$

## SISTEMAS TERMICOS

En estos sistemas existe la presencia de transmisión de energía en forma de calor a través de cuerpos sólidos, líquidos o gaseosos; al igual que lo descrito anteriormente, para el análisis de estos sistemas se realiza la analogía con la resistencia o capacitancia en este caso térmica, aunque los elementos que presenten el comportamiento no serán elementos físicos concentrados, ya que la característica estará distribuida en toda la sustancia definiéndose el elemento característico como resistencia térmica con una capacitancia insignificante y viceversa [?].

La forma de fluir el calor puede presentarse en dos formas principalmente, conducción y convección.

$$q = K \Delta\theta \quad (420)$$

Donde:

$q$ : Flujo de calor [*Julios/seg*]

$\Delta\theta$ : Diferencia de temperatura [ $^{\circ}C$ ]

$K$ : Coeficiente [*Julios/seg. $^{\circ}C$* ]

La resistencia térmica se define como:

$$R = \frac{\text{Cambio en la diferencia de temperatura } [^{\circ}C]}{\text{Cambio de flujo de calor } [Julio/seg.]} \quad (421)$$

Por lo tanto para la transferencia de calor por conducción o por convección se obtiene mediante:

$$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{1}{K} \quad (422)$$

Sabiendo que los coeficientes de conductividad y convección térmica son casi constantes, la resistencia térmica también lo será.

Por otro lado la capacitancia se define como:

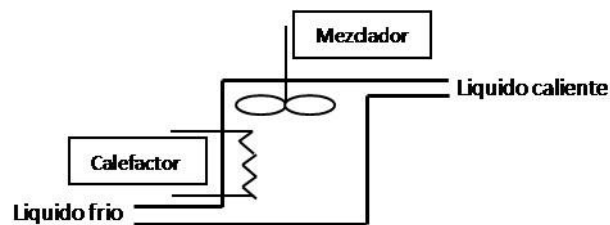
$$C = \frac{\text{Cambiodecaloralmacenado[Julios]}}{\text{Cambiode temperatura[}^{\circ}\text{C]}} \quad (423)$$

Si:

$$C = mc \quad (424)$$

Donde c, representa el calor específico de una sustancia y m la masa de la sustancia a considerar. Un ejemplo del sistema térmico está representado en la fig. 14.

Figura 240: Sistema Térmico



Fuente: *Ingeniería de Control Moderna, Ogata. Pag. 99.*

Contribuir consideraciones como el aislamiento total del sistema; inexistencia de pérdida de calor hacia el exterior; mezclado perfecto del líquido que se encuentra en el tanque generando una temperatura estable en todo el líquido, de ello la definición de una temperatura para el líquido en el tanque, el que entra y el que sale, son necesarias para el análisis del sistema térmico.

Suponiendo que la temperatura del líquido que entra se mantiene constante, el flujo de calor que proporciona el calefactor cambia en  $h_i$ . Entonces el flujo de calor de salida cambia en  $h_o$ ; por lo tanto la temperatura del líquido que sale cambiara de  $\theta_o$  a  $\theta_o + \theta$ , en este caso:

$$h_o = Gc\theta \quad (425)$$

$$R = \frac{\theta}{h_o} = \frac{1}{Gc} \quad (426)$$

Donde G, representa el flujo másico en estado estable [Kg/s], por lo tanto haciendo los cambios algebraicos convenientes la ecuación diferencial que determina este sistema por conservación de energía es

$$C \frac{d\theta}{dt} = h_i - h_o \quad (427)$$

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = Rh_i \quad (428)$$

Relacionando las variables de  $\theta$  con  $h_i$ , los cuales corresponden a la temperatura de salida con el flujo de calor de entrada, se obtiene:

$$\frac{\theta(s)}{H_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1} \quad (429)$$

En la industria es necesario controlar la temperatura de salida, por ello se necesita sensar la temperatura de entrada para restringir el flujo y de esta manera la transferencia de calor, aumentando o disminuyendo la temperatura de salida. Se obtiene la siguiente ecuación:

$$C \frac{d\theta}{dt} = Gc\theta_i - h_o \implies RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i \quad (430)$$

Se deduce la siguiente función de transferencia:

$$\frac{\theta(s)}{\theta_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (431)$$

Como en los anteriores sistemas físicos se puede hacer analogía con los componentes de los sistemas eléctricos, por ello en la tabla adjunta en el apéndice se puede visualizar que se deben tener en cuenta para realizar un modelo matemático.

## G. PROPIEDADES DE LA MEDIA

Tabla 91: Propiedades de la Media Aritmética

Propiedad
<p>1. La suma algebraica de las desviaciones de un conjunto de números respecto de su media aritmética es cero.</p>
<p>2. La suma de los cuadrados de las desviaciones de un conjunto de números con respecto a cualquier otro número es mínima cuando ese otro número es la media aritmética.</p>
<p>3. Si suponemos, antes de calcularla, que la media de un conjunto de números es cualquier número A, resulta que la media aritmética es :</p> $\bar{X} = A + \frac{\sum d}{n} \quad (432)$ <p style="text-align: center;">A=Media Supuesta.</p> <p style="text-align: center;"><math>\sum d</math>=suma de desviación respecto A.</p> <p style="text-align: center;">n=número de elementos</p>
<p>4. Si N1 números tienen una media m1, N2 números una media m2, ..., Nn números una media mn, la media de todos ellos es:</p> $\bar{X} = \frac{(N_1 * m_1 + N_2 * m_2 + \dots + N_n * m_n)}{(N_1 + N_2 + \dots + N_n)} \quad (433)$



# I. CATALOGOS



## MSP 300 Pressure Transducer



- OEM and End User
- One Piece Pressure Port Construction
- No O-Rings
- No Silicon Oil
- No Welds

### DESCRIPTION

The MSP 300 series pressure transducers from the Microfused™ line of MEAS, set a new price performance standard for low cost, high volume, commercial and industrial applications. This series is suitable for measurement of liquid or gas pressure, even for difficult media such as contaminated water, steam, and mildly corrosive fluids.

The transducer pressure cavity is machined from a solid piece of 17-4 PH stainless steel. The standard version includes a 1/4 NPT pipe thread allowing a leak-proof, all metal sealed system. There are no O-rings, welds or organics exposed to the pressure media. The durability is excellent.

MEAS' proprietary Microfused™ technology, derived from demanding aerospace applications, employs micromachined silicon piezoresistive strain gages fused with high temperature glass to a stainless steel diaphragm. This approach achieves media compatibility simply and elegantly while providing an exceptionally stable sensor without the PN junctions of conventional micromachined sensors.

This product is geared to the OEM customer who uses medium to high volumes. The standard version is suitable for many applications, but the dedicated design team at our Transducer Engineering Center stands ready to provide a semi-custom design where the volume and application warrants.

### FEATURES

- One Piece Stainless Steel Construction
- Ranges up to 10k psi or 700 Bar
- mV or Amplified Outputs
- Excellent Accuracy
- Wide Operating Temperature Range

### APPLICATIONS

- Pumps and Compressors
- Hydraulic/Pneumatic Systems
- Automotive Test Systems
- Energy and Water Management
- Agriculture – Sprayers and Dusters
- Refrigeration – Freon and Ammonia Based
- General Pressure Measurements

### STANDARD RANGES

Range	psig	Range	Bar
0 to 100	•	0 to 7	•
0 to 250	•	0 to 17	•
0 to 500	•	0 to 35	•
0 to 1000	•	0 to 70	•
0 to 2500	•	0 to 175	•
0 to 5000	•	0 to 350	•
0 to 10k	•	0 to 700	•

MSP300

www.meas-spec.com  
1/3

1008

## MSP 300 Pressure Transducer

### PERFORMANCE SPECIFICATIONS

Supply Voltage: 5.0V, Ambient Temperature: 25°C (unless otherwise specified)

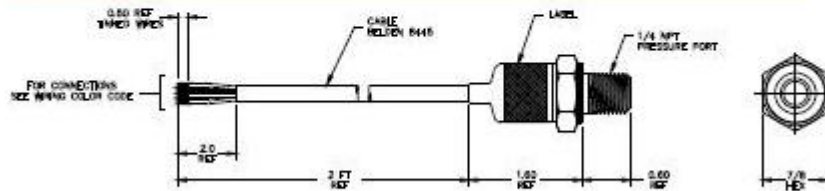
PARAMETERS	MIN	TYP	MAX	UNITS	NOTES
Span Setting	-2		2	%Span	1
Zero Pressure Output (0 – 100mV)	-3		3	%Span	1
Zero Pressure Output (Amplified)	-2		2	%Span	1
Accuracy (combined non linearity, hysteresis, and repeatability)	-1		1	%Span	2
Temperature Error – Zero	-2		2	%Span	
Temperature Error – Span	-2		2	%Span	
Supply Current (0 – 100mW, 0.5 – 4.5V)			10	mA	
Supply Current (1 – 5V)			15	mA	
Long Term Stability (1 year)	-0.25		0.25	%Span	3
Pressure Overload	2X			Rated	
Pressure Cycles (Zero to Full Scale)	10			Million	
Output Load			1	MO	
Compensated Temperature	0		55	°C	
Operating Temperature	-20		+85	°C	4
Storage Temperature	-40		+125	°C	4
Burst Pressure	5X			Rated	
Vibration	±20			g	5
Shock (11ms)	50			g	6
Output Noise			2	mVRMS	
Bandwidth (-3dB)	1			kHz	
Weight		82.55		grams	
Media Compatibility	All Materials Compatible with 17-4 Stainless Steel				

For custom configurations, consult factory.

#### Notes

1. Ratio metric to supply.
2. Best fit straight line.
3. Long term stability over a one year period.
4. Maximum temperature range for product with standard cable is -20°C to +105°C.
5. Per MIL-STD-810C, Procedure 514.2, Figure 514.2-2, Curve L.
6. 1/2 sine per MIL-STD 202F Method 213B condition A.

### DIMENSIONS



## MSP 300 Pressure Transducer

### OUTPUT OPTIONS

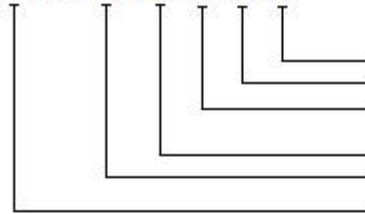
Code	Output	MIN	Supply (V)	
			TYP	MAX
2	0 – 100 mV (ratiometric)	2.5	5	12
3	0.5 – 4.5 V (ratiometric)	4.75	5	5.25
4	1 – 5 V	8		30
5	4 – 20 mA	9		30

#### Wiring Color Code

Code	Output	+Supply	-Supply	+Out	-Out
2	0 – 100 mV (ratiometric)	Red	Black	Green	White
3	0.5 – 4.5 V (ratiometric)	Red	Black	White	N/A
4	1 – 5 V	Red	Black	White	N/A
5	4 – 20 mA	Red	Black	N/A	N/A

### ORDERING INFORMATION

MSP300 - 100 - P - 2 - N - 1



Connection (1 = 2ft Cable)  
 Pressure Port (N = 1/4NPT)  
 Outputs (2 = 0 - 100mVdc, 3 = .5 - 4.5Vdc  
 4 = 1 - 5Vdc fixed, 5 = 4 - 20mA two wire)  
 Units (P = psi, B = Bar)  
 Pressure Range (100 - P = 100psi, 2KS - P = 2500psi,  
 5SK - P = 5000psi)  
 Model

#### NORTH AMERICA

Measurement Specialties  
 45738 Northport Loop West  
 Fremont, CA 94538  
 Tel: 1-800-767-1888  
 Fax: 1-510-498-1578  
 Sales: [pfq.cs.amer@meas-spec.com](mailto:pfq.cs.amer@meas-spec.com)

#### EUROPE

Measurement Specialties  
 (Europe), Ltd.  
 26 Rue des Dames  
 78340 Les Clayes-sous-Bols, France  
 Tel: +33 (0) 130 79 33 00  
 Fax: +33 (0) 134 81 03 59  
 Sales: [pfq.cs.emea@meas-spec.com](mailto:pfq.cs.emea@meas-spec.com)

#### ASIA

Measurement Specialties  
 (China), Ltd.  
 No. 26 Langshan Road  
 Shenzhen High-Tech Park (North)  
 Nanshan District, Shenzhen 518107  
 China  
 Tel: +86 755 3330 5088  
 Fax: +86 755 3330 5099  
 Sales: [pfq.cs.asia@meas-spec.com](mailto:pfq.cs.asia@meas-spec.com)

The information in this sheet has been carefully reviewed and is believed to be accurate; however, no responsibility is assumed for inaccuracies. Furthermore, this information does not convey to the purchaser of such devices any license under the patent rights to the manufacturer. Measurement Specialties, Inc. reserves the right to make changes without further notice to any product herein. Measurement Specialties, Inc. makes no warranty, representation or guarantee regarding the suitability of its product for any particular purpose, nor does Measurement Specialties, Inc. assume any liability arising out of the application or use of any product or circuit and specifically disclaims any and all liability, including without limitation consequential or incidental damages. Typical parameters can and do vary in different applications. All operating parameters must be validated for each customer application by customer's technical experts. Measurement Specialties, Inc. does not convey any license under its patent rights nor the rights of others.