



# Grupos de simetrías de fractales

*(análisis de un artículo)*

Wilson Olaya León

Monografía para optar al título de

Licenciado en Matemáticas

Directora

Sonia Marleni Sabogal Pedraza

Doctora en Ciencias Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2001

DEPOSITO CA UIG

# Dedicatoria

A Carlos, Hermelinda, Mary, Yuly y Claudia.

La otra mitad de mi mundo.

**NOTA DE ACEPTACIÓN**

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

*Gonzalo H. Susoqui P.*  
\_\_\_\_\_  
Presidente del Jurado

*Baldemar Rojas*  
\_\_\_\_\_  
Jurado

\_\_\_\_\_  
Jurado

Bucaramanga, abril de 2001

*El agradecimiento es la voz del corazón.*

Juan Bautista.

## Agradezco a:

Mis papás, Carlos y Hermelinda, por el apoyo económico, moral,... en mi formación profesional, que Dios los bendiga y me los guarde por muchos años.

La profesora Sonia Marleni Sabogal, no tan solo por su importante colaboración en la dirección de este trabajo, sino por lo más valioso, su amistad.

El profesor Bernardo Mayorga por que gracias a sus correcciones y sugerencias este trabajo es más fácil de leer.

Mi novia Claudia por dejar palpitar su corazón cerca al mío.

Muchos otros, amigos y no tan amigos, por sus aportes.

*Después de Dios es a ustedes a quien debo mi corona.*

Luis XVIII.

Título: GRUPOS DE SIMETRÍAS DE FRACTALES (ANÁLISIS DE UN ARTÍCULO)\*

Autor: OLAYA LEÓN Wilson\*\*

Palabras claves:

Matemáticas  
Álgebra  
Geometría  
Grupos  
Fractales  
Simetría

Descripción y contenido:

En este trabajo de monografía se ha querido desarrollar el tema del artículo publicado en la revista *The Mathematical Intelligencer* en el año 1992 por los matemáticos: C. Alexander, I. Gibling y D. Newton, titulado: *Symmetry Groups of Fractals*, en el cual se relacionan dos áreas que han representado un importante papel en las matemáticas y en las ciencias modernas: la geometría y el álgebra.

En el primer capítulo se encuentra el desarrollo de los temas básicos para abordar los resultados presentados en el artículo, al parecer desde el surgimiento de la teoría de grupos solo se han estudiado estas propiedades en objetos de la geometría euclidiana y podemos asegurar que este trabajo representa los primeros hallazgos encontrados en la geometría fractal.

En el segundo capítulo encontraras una pequeña introspección en el campo de la geometría fractal y el análisis de los grupos de simetrías de algunos fractales clásicos como: El conjunto de Cantor, la curva y la isla de Koch y el triángulo y la carpeta de Sierpinski, también una pequeña introducción a la más grande familia de fractales: los conjuntos de Mandelbrot, conjuntos de Mandelbar y conjuntos de Julia.

En el tercer y cuarto capítulo se encuentra la traducción y el análisis del artículo respectivamente donde encontramos los resultados del estudio de los grupos de simetrías de los conjuntos de Mandelbrot, Mandelbar y Julia generalizados.

Esta monografía incluye como anexo las fotocopias del original del artículo. Para un mejor entendimiento de este tema es necesario que el lector posea conocimientos básicos de álgebra y geometría moderna.

---

\* Monografía

\*\* Facultad de ciencias, escuela de matemáticas. Asesor: Sonia Marleni Sabogal Pedraza

Title: SYMMETRY GROUPS OF FRACTALS (ANALYSIS OF AN ARTICLE)\*

Author: OLAYA LEÓN Wilson\*\*

Key words:

Mathematics  
Algebra  
Geometry  
Groups  
Fractals  
Symmetry

Description and content:

This monograph has been worked to develop the topic of the article published in the magazine *The Mathematical Intelligencer* in the year 1992 for the mathematicians: C. Alexander, I. Giblin and D. Newton, titled: *Symmetry Groups of Fractals*, in which are related two areas that have represented an important paper in the mathematics and in the modern sciences: the geometry and the algebra.

In the first part finds the development of the basic topics to approach the results presented in the article, apparently from the beginning of the theory of groups only have been studied these properties in objects of the geometry euclidiana and can be assure that this study presents the first discoveries found in the geometry fractal.

The second chapter presents a small introspection in the field of the geometry fractal and the analysis of the simmetry groups of some classic fractales as: Cantor's set, the curve and the island of Koch and the triangle and the file of Sierpinski, also a small introduction to the biggest fractales family: the Mandelbrot's sets, the Mandelbar's sets and the Julia's sets.

Finally, in the third and fourth chapter the are translation and the analysis of the article respectively, where will find the results of the study of the simmetry groups of the Mandelbrot's sets, Mandelbar's sets and generalized Julia's sets.

This monograph includes the photocopies of the original of the article. It is necessary that the reader possesses basic knowledge of algebra and modern geometry for a better understanding of this topic.

---

\* monografía

\*\* facultad de ciencias, escuela de matemáticas. Asesor: Sonia Marleni Sabogal Pedraza

# Índice General

<b>Introducción</b>	<b>ii</b>
<b>1 Preliminares de la teoría de grupos de simetría</b>	<b>1</b>
<b>2 Grupos de simetrías de algunos fractales</b>	<b>15</b>
2.1 Algo sobre fractales. . . . .	15
2.2 El conjunto de Cantor . . . . .	18
2.3 La curva y la isla de Koch . . . . .	19
2.4 El triángulo y la carpeta de Sierpinski . . . . .	22
2.5 Los conjuntos Mandelbrot, Mandelbar y Julia . . . . .	24
<b>3 Traducción del artículo “Grupos de simetrías de fractales”</b>	<b>27</b>
3.1 La simetría de fractales . . . . .	28
3.2 Isometrías de los conjuntos de Mandelbrot y Mandelbar . . . . .	30
3.3 Isometrías de los conjuntos de Julia . . . . .	33
3.4 Mapas de color usados en la generación de las figuras . . . . .	35
<b>4 Análisis del Artículo</b>	<b>43</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>54</b>
<b>Anexo</b>	<b>55</b>

## Tabla de anexos

Anexo A. Fotocopias del artículo *Simmety Groups of Fractals* de la revista: *The Mathematical Intelligencer*, vol. 14, N° 2, 1992, págs. 32-38.

LIBRARY  
UNIVERSITY OF CALIFORNIA  
LIBRARY

# Introducción

Desde la antigüedad ha existido un gran interés entre los matemáticos por conocer, estudiar y verificar, o en el peor de los casos, refutar resultados obtenidos por otras personas; es de nuestro conocimiento que esta actividad se hacía en la antigüedad muy a menudo, por medio de cartas y en un grupo bastante reducido de personas, por lo general amigos. Hoy día sigue siendo de gran importancia para, la ahora mucho más grande, comunidad matemática y gracias a este interés las publicaciones se hacen a través de revistas especializadas impresas o por medios electrónicos; estos artículos en su mayoría presentan resultados de investigaciones en diferentes áreas de las matemáticas y lógicamente contribuyen a su desarrollo.

Una de las áreas de las matemáticas que más interés y motivación ha despertado entre los matemáticos en el último cuarto de siglo XX es la que corresponde al estudio de la geometría fractal; los temas afines que ésta relaciona y sus aplicaciones han ocupado campos que nunca hubiéramos podido imaginar, y tiene intrigados no solo a científicos sino a muchas otras personas, como artistas, economistas, médicos, etc.

En este trabajo de monografía se ha querido desarrollar el tema del artículo publicado en la revista *The Mathematical Intelligencer* en el año 1992 titulado **SYMMETRY GROUPS OF FRACTALS**<sup>1</sup>, el cual relaciona dos áreas que han representado un importante papel en las matemáticas y en las ciencias modernas: la geometría y el álgebra.

---

<sup>1</sup>ALEXANDER C., GIBLIN I., NEWTON D. "Symmetry Groups of Fractals". *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 14, N°2, 1992, págs. 32-38.

En el capítulo 3 se presentará la traducción del artículo, con el ánimo de facilitar la lectura a personas de nuestro medio y por ende hacer más comprensibles los resultados de la investigación realizada por **C. Alexander, I. Giblin, y D. Newton** sobre los grupos de simetría de los objetos fractales. En los dos primeros capítulos desarrollaremos un breve estudio preliminar de los temas que se relacionan y mostraremos algunos ejemplos de los grupos de simetría de algunos fractales que pueden considerarse como clásicos y que pueden ser presentados a alumnos universitarios en sus cursos de álgebra y geometría moderna. Por último, en el capítulo cuarto encontraremos un pequeño análisis, en lo que está a nuestro alcance, del artículo; por lo tanto se recomienda a los lectores seguir el orden de los capítulos para lograr un mejor entendimiento del tema.

La numeración de definiciones, teoremas, proposiciones, lemas, corolarios e incluso de las figuras, responden al capítulo en el que se encuentran y al orden en que aparece cada una de ellas dentro del capítulo. Por ejemplo, la proposición 3.2 hace referencia a la segunda proposición que se cita en el capítulo tercero.

Se espera que el presente trabajo contribuya de alguna manera a que los estudiantes de licenciatura en matemáticas, o cualquier persona interesada en el tema, puedan profundizar en el estudio de la geometría fractal.

# Capítulo 1

## Preliminares de la teoría de grupos de simetría

En este capítulo empezaremos por abordar el estudio de algunos temas de la teoría de grupos, especialmente aquellos que corresponden a los grupos de simetrías.

Aproximadamente hacia el año 1872 fue el tiempo en el que la teoría de grupos invadía casi todo el dominio de las matemáticas e incluso algunas personas pensaban que todas las matemáticas no eran sino uno u otro aspecto de la teoría de grupos. Esta teoría fue presentada por **Evarist Galois** (1811-1832) como resultado de sus trabajos en la teoría de ecuaciones; a la repentina muerte de Galois y posterior publicación de sus escritos, **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857) emprendió hacia 1844 la osadía de continuar con estos estudios bajo la forma particular de grupos de sustitución; poco tiempo después también lo harían **Betti** en Italia, **Cayley** en Inglaterra, **Serret** y **Jordan** en Francia, **Sylow** en Noruega, **Kronecker** y **Dedekind** en Alemania, entre otros; de esta manera el estudio de los grupos empezó su desarrollo de una forma bastante acelerada y fue adquiriendo su forma abstracta de manera independiente.

El crecimiento de la teoría de grupos alcanza su punto máximo de ebullición hacia 1880 al aparecer ya como grupos abstractos (esbozada por primera vez por Cayley), que confiere a

la teoría de Galois los caracteres de estructura algebraica; ahora ya como una teoría madura desde mediados del siglo XX se ha convertido en un campo muy activo y atractivo de la investigación matemática.

Antes de hablar de grupos de simetrías es necesario hacer referencia a otros temas. Aunque suponemos que el lector conoce la actual definición de grupo y subgrupo, empezaremos por recordar estas definiciones que fácilmente pueden encontrarse en cualquier libro de álgebra moderna (por ejemplo [2], [3] ó [8]).

**Definición 1.1** *Se dice que un conjunto arbitrario no vacío  $G$  forma un **grupo** si en  $G$  está definida una operación binaria, denotada por  $\circ$ , tal que cumple con los siguientes axiomas:*

- i)  $a, b \in G$  implica que  $a \circ b \in G$ ;*
- ii)  $a, b, c \in G$  implica que  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ ;*
- iii) existe un elemento  $e \in G$  tal que para todo  $a \in G$  se cumple  $a \circ e = e \circ a = a$ ;*
- iv)  $\forall a \in G$  existe un elemento  $a^{-1} \in G$  tal que  $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ .*

En general, en este trabajo en vez de  $a \circ b$  para  $a, b \in G$  notaremos sólo  $ab$ .

Si el conjunto  $G$  que forma el grupo es finito, entenderemos por **orden** del grupo el número de elementos del conjunto  $G$ , y lo denotaremos  $|G|$ .

**Definición 1.2** *se dice que un subconjunto  $H$  de un grupo  $G$  es un **subgrupo** de  $G$ , si respecto a la operación binaria en  $G$ ,  $H$  forma un grupo.*

El siguiente lema nos proporciona un método sencillo para identificar con mayor rapidez cuándo un subconjunto de un grupo forma un subgrupo; la prueba la dejaremos a consideración del lector.

**Lema 1.1** *Un subconjunto no vacío  $H$  del grupo  $G$  es un subgrupo de  $G$  si y solo si:*

*i)  $a, b \in H$  implica que  $ab \in H$ ;*

*ii)  $a \in H$  implica que  $a^{-1} \in H$ .*

Un concepto importante que utilizaremos frecuentemente en este trabajo será el de grupo cíclico, y lo definiremos de la siguiente manera:

**Definición 1.3** *Se dice que un grupo  $G$  es **cíclico** si existe al menos un elemento  $a \in G$  tal que  $\langle a \rangle = G$ , donde  $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ ,  $n$  veces, y se llama el grupo cíclico generado por  $a$ .*

En los comienzos de la teoría de grupos no se conocía la definición 1.1, que fue formalizada sólo hasta mucho tiempo después. Originalmente un grupo no era más que un conjunto de permutaciones de las cuales al combinar dos cualesquiera de ellas daba lugar a otra permutación del conjunto. Más tarde se generalizó esta definición al concepto de grupo abstracto que se presentó anteriormente, y en el cual los elementos no son únicamente permutaciones.

A continuación analizaremos el grupo de permutaciones de un conjunto, que fue tal vez el primer grupo en la historia de esta teoría y que es de gran importancia en el desarrollo de la misma; este grupo es conocido como el grupo simétrico de  $X$ .

**Proposición 1.1** *Sea  $X$  un conjunto cualquiera no vacío. Sea  $S_X$  el conjunto de todas las funciones inyectivas de  $X$  sobre  $X$ . Entonces  $S_X$  con la composición de funciones forma un grupo llamado **grupo simétrico de  $X$** .*

**Demostración.**  $S_X$  es el conjunto de todas las biyecciones del conjunto no vacío  $X$  sobre sí mismo. Es evidente que  $S_X$  no es vacío, ya que la función identidad está en  $S_X$ .

Sabemos además que toda función inyectiva de  $X$  sobre  $X$  es también sobreyectiva, y por lo tanto biyectiva.

i) Sean  $\alpha, \omega \in S_X$ ; debemos demostrar que  $\alpha\omega \in S_X$ , es decir que  $\alpha \circ \omega$  es una función inyectiva de  $X$  sobre  $X$ .

Sean  $x, y \in X$ ;  $\alpha\omega(x) = \alpha\omega(y)$ , es decir  $\alpha(\omega(x)) = \alpha(\omega(y))$ ; puesto que  $\alpha$  es una función inyectiva, tenemos  $\omega(x) = \omega(y)$  y dado que  $\omega$  es también una función inyectiva tenemos que  $x = y$ ; por consiguiente,  $\alpha\omega \in S_X$ .

ii) Sean  $\alpha, \omega, \beta \in S_X$ ; entonces:

$$\alpha(\omega\beta)(x) = \alpha(\omega(\beta(x))) = \alpha(\omega(\beta(x)));$$

$$(\alpha\omega)\beta(x) = \alpha\omega(\beta(x)) = \alpha(\omega(\beta(x)));$$

luego  $S_X$  es asociativo bajo la composición de funciones.

iii) Puesto que  $i(x) = x$  para todo  $x$  de  $X$ ,  $i \in S_X$ ;

sea  $\omega \in S_X$ ; entonces  $\omega i(x) = \omega(i(x)) = \omega(x)$  y  $i\omega(x) = i(\omega(x)) = \omega(x)$ ; así pues,  $\omega i = i\omega = \omega$  para todo  $\omega \in S_X$ .

iv) Sea  $\omega \in S_X$ ; como  $\omega$  es biyectiva, entonces  $\omega$  tiene inversa  $\omega^{-1}$  tal que  $\omega\omega^{-1} = \omega^{-1}\omega = i$  y  $\omega^{-1}$  es biyectiva; por tanto  $\omega^{-1} \in S_X$ .

Con esto se ha demostrado que  $S_X$  con la composición de funciones es un grupo.

Todo elemento de  $S_X$  es conocido como una **permutación** de  $X$ . En el caso particular en que  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  se acostumbra escribir  $S_X = S_n$ , y llamaremos a  $S_n$  el **grupo simétrico de grado  $n$** . Es fácil ver que el orden de  $S_n$  ( $|S_n|$ ) es  $n!$ , y resultará un buen ejercicio para el lector comprobarlo.

Un primer subgrupo del grupo simétrico es el que corresponde a las isometrías. Para empezar, tomaremos la recta real y la distancia ordinaria entre dos puntos  $a, b \in \mathbb{R}$  denotada por  $d(a, b)$

como  $|a - b|$ ; definamos el conjunto  $I(\mathbb{R})$  de todos los elementos de  $S_{\mathbb{R}}$  que preservan las distancias; los elementos de este conjunto se llaman isometrías de  $\mathbb{R}$ , más explícitamente un elemento  $\omega \in S_{\mathbb{R}}$  se denomina isometría si y solo si  $d(a, b) = d(\omega(a), \omega(b))$  para todo par de elementos  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.1**  $I(\mathbb{R})$  es subgrupo de  $S_{\mathbb{R}}$ .

**Demostración.** Como la aplicación idéntica  $i \in I(\mathbb{R})$ ,  $I(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ .

i) Sean  $\alpha, \omega \in I(\mathbb{R})$ ; entonces debemos demostrar que  $\alpha\omega \in I(\mathbb{R})$ .

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces  $d(\alpha\omega(a), \alpha\omega(b)) = d(\omega(a), \omega(b)) = d(a, b)$ , ya que  $\alpha$  y  $\omega$  son isometrías; entonces  $\alpha\omega \in I(\mathbb{R})$ .

ii) Sea  $\omega \in I(\mathbb{R})$ ; debemos demostrar que  $\omega^{-1} \in I(\mathbb{R})$ .

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ; entonces  $d(\omega^{-1}(a), \omega^{-1}(b)) = d(\omega\omega^{-1}(a), \omega\omega^{-1}(b)) = d(a, b)$ , ya que  $\omega$  es una isometría; así,  $\omega^{-1} \in I(\mathbb{R})$ .

Así hemos demostrado que  $I(\mathbb{R})$  es subgrupo de  $S_{\mathbb{R}}$  y por tanto grupo por sí mismo.  $I(\mathbb{R})$  recibe el nombre de **grupo de isometrías de  $\mathbb{R}$**  o **grupo de isometrías de la recta**.

Un importante resultado nos expone el siguiente lema, el cual nos proporciona un método para determinar cuándo dos isometrías son iguales.

**Lema 1.2** Si  $\alpha, \omega \in I(\mathbb{R})$  tienen el mismo efecto sobre dos números reales distintos  $a$  y  $b$ , es decir, si  $\alpha(a) = \omega(a)$  y  $\alpha(b) = \omega(b)$ , entonces  $\alpha = \omega$ .

**Demostración.** Sea  $x$  un número cualquiera de  $\mathbb{R}$ ; entonces:  $d(x, a) = d(\alpha(x), \alpha(a)) = |\alpha(x) - \alpha(a)|$  y  $d(x, a) = d(\omega(x), \omega(a)) = |\omega(x) - \omega(a)|$ , y por tanto  $\alpha(x) - \alpha(a) = \pm(\omega(x) - \omega(a))$ .

Supongamos que  $\alpha(x) \neq \omega(x)$  y ya que  $\alpha(a) = \omega(a)$ ; tenemos que:

i)  $\alpha(x) - \alpha(a) = +(\omega(x) - \omega(a))$  implica que  $\alpha(x) = \omega(x)$ , en contra de lo supuesto.

ii)  $\alpha(x) - \alpha(a) = -(\omega(x) - \omega(a))$ , es decir  $\alpha(x) + \omega(x) = 2\alpha(a)$ , y del mismo modo  $\alpha(x) + \omega(x) = 2\alpha(b)$ , de donde  $2\alpha(a) = 2\alpha(b)$  y  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , ya que  $\alpha$  es una isometría; tenemos  $a = b$ , que contradice la hipótesis de que  $a \neq b$ .

Concluimos que  $\alpha(x) = \omega(x)$  y ya que  $x$  es un elemento cualquiera de  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha = \omega$ .

Ahora extenderemos la noción de isometría al plano, es decir sobre el conjunto  $\mathbb{R}^2$ , donde los elementos son parejas ordenadas. Recordemos la distancia ordinaria entre dos puntos  $A = (x_1, y_1)$  y  $B = (x_2, y_2)$ , denotada por  $d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ . Entonces definimos el conjunto  $I(\mathbb{R}^2)$  de todos los elementos de  $S_{\mathbb{R}^2}$  que preservan las distancias, es decir, un elemento  $\alpha \in S_{\mathbb{R}^2}$  es una isometría de  $\mathbb{R}^2$  si para cualquier par de puntos  $A$  y  $B$ ,  $d(A, B) = d(\alpha(A), \alpha(B))$ ; el conjunto  $I(\mathbb{R}^2)$  se denomina isometrías de  $\mathbb{R}^2$  (o del plano).

**Teorema 1.2**  $I(\mathbb{R}^2)$  es subgrupo de  $S_{\mathbb{R}^2}$ .

**Demostración.** Análoga a la prueba del teorema 1.1;  $I(\mathbb{R}^2)$  no es vacío, ya que la función idéntica es una isometría.

i) Sean  $\alpha, \omega \in I(\mathbb{R}^2)$  y  $A, B \in \mathbb{R}^2$ ; entonces  $d(\alpha\omega(A), \alpha\omega(B)) = d(\omega(A), \omega(B)) = d(A, B)$ , porque  $\alpha$  y  $\omega$  son isometrías, luego  $\alpha\omega \in I(\mathbb{R}^2)$ .

ii) Sean  $\omega \in I(\mathbb{R}^2)$  y  $A, B \in \mathbb{R}^2$ ; entonces  $d(\omega^{-1}(A), \omega^{-1}(B)) = d(\omega\omega^{-1}(A), \omega\omega^{-1}(B)) = d(A, B)$ , porque  $\omega$  es una isometría. Luego  $\omega^{-1} \in I(\mathbb{R}^2)$ .

Así tenemos que  $I(\mathbb{R}^2)$  es subgrupo de  $S_{\mathbb{R}^2}$  y por lo tanto grupo propiamente dicho, llamado el **grupo de isometrías de  $\mathbb{R}^2$** .

Fácilmente podemos identificar tres clases de isometrías en el plano.

1. Una **Traslación**, es una función  $\tau$  definida por  $\tau(x, y) = (x + a, y + b)$  para  $a, b$  números reales. Es decir, sea  $\overline{AB}$  un segmento rectilíneo dirigido del plano: la traslación  $T_{A,B}$  es la transformación que lleva cada punto  $P$  del plano al punto  $P'$  del plano de tal manera que  $\overline{PP'}$  sea igual y paralelo a  $\overline{AB}$ , el segmento dirigido  $\overline{AB}$  vector de la traslación.

2. Una **Rotación** en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj es una función  $\rho(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ . Así, sea  $O$  un punto fijo del plano y  $\theta$  un determinado ángulo: la rotación  $R_{O, \theta}$  es la transformación que lleva cada punto  $P$  del plano al punto  $P'$  del plano de tal manera que  $\overline{OP'} = \overline{OP}$  y  $\angle POP' = \theta$ . El punto  $O$  se llama centro de la rotación y  $\theta$  el ángulo de la rotación.
3. Una **Reflexión** es una transformación, con respecto a una recta  $l$  fija en el plano, que lleva cada punto  $P$  del plano al punto  $P'$  del mismo, de tal manera que  $l$  sea la mediatriz de  $\overline{PP'}$ . La recta  $l$  se llama eje de la reflexión.

Es claro que  $i$  (la función idéntica) puede obtenerse como la composición de dos reflexiones, una traslación nula (donde  $a = b = 0$ ), o una rotación de  $2\pi$ .

Uno de los conceptos más intuitivos e importantes en el desarrollo de las matemáticas y en las ciencias en general es el de **simetría**. Para Hermann Weyl, “Simetría, ya sea que se defina en un sentido amplio o restringido, es una idea por medio de la cual el hombre de todas las épocas ha tratado de comprender y crear la belleza, el orden y la perfección” ([15], pág.4).

La naturaleza nos proporciona innumerables ejemplos de simetría, convirtiéndose este concepto en uno de los que están más constantemente presentes en todo el universo<sup>1</sup>; por otra parte, en casi todas las formas de expresión desarrolladas por el hombre utilizándose también en construcciones más o menos elaboradas.

Es claro que en un sentido no matemático la simetría está asociada con la regularidad de formas, proporciones agradables, periodicidad o disposición armoniosa, y con ello esta simetría nos causa un sentimiento de profunda belleza.

---

<sup>1</sup>En [15] se establecen dos conceptos de simetría. En una primera acepción significa bien proporcionado, con equilibrio de formas, y en este caso la simetría se refiere a ese especie de concordancia de las partes que componen un todo; la segunda acepción es la que se sobreentiende hoy en día, y es la de simetría bilateral, que es la simetría de las manos izquierda y derecha, y de muchas otras partes del cuerpo humano y de la naturaleza; ahora bien, esta simetría bilateral es estrictamente geométrica, y, en contraste con la primera acepción, se trata de un concepto absolutamente preciso.

Los análisis de simetría son particularmente atractivos para una gran cantidad de público, ya que se aplican de manera especial a nivel cualitativo, sin tener que recurrir a métodos matemáticos complicados.

En el sentido geométrico se puede analizar la simetría con más precisión, y las simetrías establecen un extraño y maravilloso parentesco entre objetos, fenómenos y teorías por lo demás totalmente diferentes. Por ejemplo magnetismo terrestre, empalizadas, luz polarizada, teoría de grupos, hábitos laborales de las abejas en la colmena, física cuántica, pétalos de flores, división celular, posiciones de equilibrio de los cristales, catedrales románicas, copos de nieve, música, teoría de la relatividad, entre otros.

Pero la sola noción no es suficientemente precisa para las necesidades de la química y la física<sup>2</sup>; por lo tanto, del estudio de las simetrías surge un grupo de gran importancia, conocido como grupo de simetrías.

En el siguiente teorema definiremos el grupo de simetrías de una figura cualquiera del plano euclidiano (evidentemente una figura cualquiera es un subconjunto del plano euclidiano).

**Teorema 1.3** *Sea  $S$  un subconjunto cualquiera del plano euclidiano. El conjunto, denotado por  $I_S$ , de todas las  $\omega \in I(\mathbb{R}^2)$  tales que:*

1. *Si  $s \in S$  implica que  $\omega(s) \in S$ ;*
2. *Si  $\omega(t) \in S$  implica que  $t \in S$ ,*

*forma un subgrupo de  $I(\mathbb{R}^2)$ , llamado **grupo de simetrías de  $S$** .*

**Demostración.** Dado que la función idéntica pertenece a  $I_S$ , tenemos que  $I_S$  es diferente de vacío.

---

<sup>2</sup>Uno de los problemas químicos que aparecen con mayor frecuencia es el conocimiento de la estructura molecular, es decir, de cómo se relacionan unos con otros los átomos de una molécula y cómo se relacionan entre sí las moléculas individuales de un cristal.

i) Si  $\alpha, \omega \in I_S$ , entonces para  $s \in S$  tenemos que  $\omega(s) \in S$ , y por la condición 1, tenemos que  $\alpha(\omega(s)) \in S$ , luego  $\alpha\omega$  cumple con la condición 1. Falta probar que  $\alpha\omega$  satisface la condición 2.

Sea  $\alpha\omega(s) \in S$ , como  $\alpha \in I_S$ ; o sea cumple con 2. Tenemos que  $\omega(s) \in S$ , y de la misma manera que  $s \in S$ , y por lo tanto  $\alpha\omega$  cumple la condición 2.

En conclusión,  $\alpha\omega \in I_S$ .

ii) Si  $\omega \in I_S$  debemos probar que  $\omega^{-1} \in I_S$ .

1) Si  $s \in S$  debemos ver que  $\omega^{-1}(s) \in S$ . Como  $\omega$  es sobre, existe  $x$  tal que  $s = \omega(x) \in S$ ; como  $\omega$  satisface 2, entonces  $x \in S$  y tenemos  $\omega^{-1}(s) = \omega^{-1}(\omega(x)) = x \in S$ .

2) Si  $\omega^{-1}(t) \in S$  debemos probar que  $t \in S$ . Como  $\omega$  satisface 1, entonces  $\omega(\omega^{-1}(t)) \in S$ , así  $t \in S$ .

De 1) y 2) tenemos que  $\omega^{-1} \in I_S$ .

Así queda demostrado que  $I_S$  es subgrupo de  $I(\mathbb{R}^2)$ .

El anterior teorema nos presenta un resultado muy importante, y es que las funciones que cumplen las condiciones 1 y 2 dejan invariante el conjunto (i.e.,  $\omega \in I_S \Rightarrow \omega(S) = S$ ); es más, para cualquier  $\omega \in I(\mathbb{R}^2)$ , las condiciones 1 y 2 son equivalentes a la condición  $\omega(S) = S$ . En efecto, si  $\omega \in I(\mathbb{R}^2)$  y satisface 1 y 2 veamos que  $\omega(S) = S$ :

i) Sea  $x \in \omega(S)$ ; entonces  $x = \omega(t)$  para algún  $t \in S$ , luego  $\omega(t) \in S$  y entonces  $x \in S$  y  $\omega(S) \subseteq S$ .

ii) Demostremos que  $S \subseteq \omega(S)$ .

Sea  $s \in S$ , y ya que  $\omega$  es sobreyectiva,  $s = \omega(t) \in S$ ; entonces  $t \in S$ , luego  $s \in \omega(S)$ .

Y recíprocamente, si  $\omega(S) = S$ :

i)  $s \in S$  implica que  $\omega(s) \in \omega(S)$ , entonces  $\omega(s) \in S$ .

ii)  $\omega(t) \in S = \omega(S)$ , entonces  $\omega(t) = \omega(s)$  para algún  $s \in S$ , y como  $\omega$  es inyectiva, tenemos que  $t = s$ , luego  $t \in S$ .

Al comparar dos figuras del plano euclidiano es normal pensar que mientras más simétrica sea una figura, mayor será el orden de su grupo de simetría. Además, para aquellas figuras no simétricas hay al menos una única función que es isometría y deja invariante al conjunto, y es la función idéntica; luego el orden del grupo de simetrías de estas figuras es uno.

El grupo cíclico de orden  $n$ , que se denota  $C_n$ , estaría representado por una rotación  $\rho$  a través de  $\frac{360^\circ}{n}$  tal que  $\rho^n = i$ ; así,  $\rho^k$  es una rotación a través de  $k$  veces este ángulo, y los  $n$  elementos de  $C_n$  se determinan por valores de  $k$  desde 1 hasta  $n$  o desde 0 hasta  $n - 1$ ; en particular,  $C_5$  representa en la naturaleza el grupo de simetrías de la margarita.

Hay sin embargo un conjunto particular de figuras llamadas polígonos, y dentro de esta familia unos conocidos como polígonos regulares; la historia nos muestra que sólo hasta después del segundo cuarto del siglo XIX, **William Hamilton** (1821-1899) estudió hacia el año 1856 los grupos de simetrías de los polígonos regulares; llamaremos  $n$ -ágono regular a un polígono regular de  $n$  lados para  $n > 2$ ; su grupo de simetría recibe el nombre de **grupo diédrico**<sup>3</sup> de grado  $n$ , y lo denotaremos por  $D_n$ .

A continuación demostraremos que si  $S$  es un  $n$ -ágono regular, para cualquier isometría de  $I_S$  los vértices son llevados a los vértices, lo cual nos facilitará determinar el orden de  $D_n$ . Para esto daremos por supuesto el siguiente lema geométrico, cuya demostración puede encontrarse en cualquier libro de geometría elemental.

**Lema 1.3** *Todo  $n$ -ágono regular puede inscribirse en una y sólo una circunferencia.*

Por tanto llamaremos centro del  $n$ -ágono regular al centro de la circunferencia circunscrita.

---

<sup>3</sup>El nombre **diédrico** proviene del término griego *diedron*, asiento para dos personas.

**Lema 1.4** *El centro del  $n$ -ágono regular  $S$  es llevado sobre sí mismo por cualquier elemento de  $I_S$ .*

**Demostración.** Como todo punto de  $S$  está a una distancia menor o igual que  $r$  respecto al centro  $O$  (i.e.,  $d(s, O) \leq r$  para todo  $s \in S$ ), si  $\omega$  es una isometría entonces  $d(\omega(s), \omega(O)) \leq r$  para todo  $s \in S$ ; y puesto que existen puntos de  $S$  que están exactamente a una distancia  $r$  de  $O$ , tenemos que hay puntos de  $\omega(S)$  que también están a una distancia  $r$  de  $\omega(O)$ ; además, como  $\omega(S) = S$  la circunferencia de radio  $r$  y centro  $\omega(O)$  está circunscrita a  $S$ , pero según el lema anterior sólo hay una única circunferencia circunscrita a  $S$ ; por tanto,  $\omega(O) = O$ .

**Proposición 1.2** *Si  $S$  es un  $n$ -ágono regular y  $\omega \in I_S$ , entonces los vértices de  $S$  son llevados por  $\omega$  sobre los propios vértices de  $S$ .*

**Demostración.** Sea  $A$  un vértice de  $S$  y  $O$  el centro de  $S$ ; tenemos, por el lema anterior, que  $\omega(O) = O$ , luego  $d(\omega(O), \omega(A)) = d(O, \omega(A)) = d(O, A) = r$ ; por tanto,  $\omega(A)$  está a una distancia  $r$  de  $O$ , es decir está sobre la circunferencia circunscrita de radio  $r$  y centro  $O$ , pero dado que los únicos puntos de  $S$  que están situados sobre la circunferencia son los vértices, tenemos que  $\omega(A)$  es un vértice.

Ahora determinaremos el orden de un grupo diédrico cualquiera.

Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  los vértices (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj) de un  $n$ -ágono regular  $S$  y centro  $O$ .

Supongamos que  $\omega_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , representa una rotación alrededor de  $O$ , en el sentido contrario a las manecillas del reloj, un ángulo  $\frac{2\pi(j-1)}{n}$ , de modo que  $\omega_j(A_1) = A_j$ ,  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  son todos distintos y  $\omega_1 = i$ , ya que representa una rotación de 0 grados alrededor del origen; en efecto,  $\omega_j \neq \omega_k$  para  $j \neq k$ , ya que  $A_j = \omega_j(A_1)$  y  $A_k = \omega_k(A_1)$ , y evidentemente  $A_j \neq A_k$  para  $j \neq k$ .

Ahora sea  $\tau$  la reflexión a través de la recta que pasa por  $A_1$  y  $O$  de tal manera que  $\tau(A_1) = A_1$ ,  $\tau(A_2) = A_n$ . Luego  $\omega_1\tau, \omega_2\tau, \dots, \omega_n\tau$  son todos diferentes, ya que  $\omega_j\tau = \omega_k\tau$  implica que  $\omega_j = \omega_k$ , lo que es falso según lo anterior; veamos que son diferentes de las anteriores: si  $\omega_j\tau = \omega_k$  para  $j \neq k$ , entonces  $\omega_j\tau(A_1) = \omega_j(A_1) = \omega_k(A_1)$ , lo cual implica que  $j = k$ ; pero  $\omega_j\tau = \omega_j$  implica que  $\tau = i$ , la identidad, contra lo supuesto.

Entonces en el grupo diédrico de grado  $n$  existen al menos  $2n$  elementos. Veamos que no son más de  $2n$ .

Si  $\omega \in I_S$ , donde  $S$  es el  $n$ -ágono regular, entonces existen  $n$  posibilidades para  $\omega(A_1)$ , ya que los vértices son llevados a los vértices y  $\omega(A_1)$  es uno de los vértices  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ; ahora bien  $\omega(A_2)$  tiene sólo dos posibilidades una vez que ha quedado determinado  $\omega(A_1)$ , porque  $d(\omega(A_1), \omega(A_2)) = d(A_1, A_2)$  y  $\omega(A_2)$  debe ser también un vértice; después que  $\omega(A_1)$  y  $\omega(A_2)$  han sido determinados,  $\omega(A_i)$  para  $i = 3, 4, \dots, n$  también están determinados; luego hay a lo sumo dos elementos  $\omega \in I_S$  que llevan  $\omega(A_1)$  a  $A_j$ . De esta manera existen a lo sumo  $2n$  elementos en  $I_S$ , luego  $|D_n| = 2n$ . Se ha demostrado así la siguiente proposición:

**Proposición 1.3** *El grupo diédrico de grado  $n$  tiene<sup>4</sup> orden  $2n$ .*

Revisando nuevamente la demostración de la proposición 1.3 podemos afirmar que con tener el grupo cíclico  $C_n$  y una reflexión, obtenemos inmediatamente el grupo diédrico  $D_n$ .

De esta manera, cuando decimos que una figura es “simétrica” entendemos por ello que le podemos aplicar ciertas isometrías que dejan a la figura invariante, mientras se permutan sus partes. Por ejemplo, las letras mayúsculas E y A tienen simetrías reflexionales con respecto

---

<sup>4</sup> Algunos autores muestran que los  $2n$  elementos del grupo diédrico  $D_n$  son  $n$  rotaciones y  $n$  reflexiones, y ya vimos anteriormente que las  $n$  rotaciones son precisamente el grupo cíclico  $C_n$ ; de esta manera,  $D_n$  incluye a  $C_n$ ; en el lenguaje técnico diremos que  $C_n$  es subgrupo de  $D_n$ .

a un eje horizontal y vertical respectivamente, y la letra N simetría de rotación de  $180^\circ$  con respecto al punto medio; así mientras el grupo de simetrías de las letras E y A es  $D_1$ , el de N es  $C_2$ ; sin embargo, ambos grupos son, desde el punto de vista abstracto, idénticos o isomórficos, es decir son diferentes representaciones geométricas de un solo grupo abstracto<sup>5</sup> de orden 2, notado también  $\mathbb{Z}_2 (= \{0, 1\})$ , cuya operación se puede representar en la siguiente tabla:

·	0	1
0	0	1
1	1	0

Pero aunque  $D_2$  y  $C_4$  son ambos de orden 4, no son isomórficos, ya que poseen estructuras diferentes; basta con observar que los elementos de  $C_4$  y  $D_2$  tienen periodos distintos. Por otra parte, el grupo cíclico  $C_1$  implica que no hay simetría alguna salvo la identidad y el grupo diédrico  $D_1$  simetría bilateral (es decir, una reflexión y la identidad), y nada más.

En la arquitectura predominan los grupos  $D_1$  y  $D_2$ , aunque en las pirámides de Egipto se exhibe el grupo  $D_4$ , y el edificio del pentágono en Washinton tiene el grupo de simetría  $D_5$ . En la naturaleza encontramos muchas flores con grupos diédricos como  $D_6$ , aunque la margarita tiene grupo cíclico  $C_5$ .

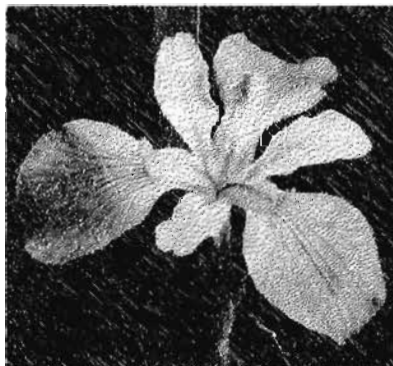


Figura 1.1. Iris de polo triple.

<sup>5</sup>Donde hay una reflexión y la identidad, y una rotación de  $180^\circ$  más la identidad respectivamente.

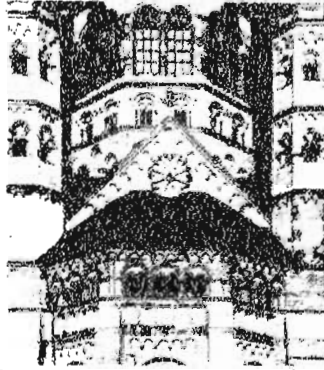


Figura 1.2. Catedral románica de Mainz, Alemania.

Una pregunta interesante que nos surge es: En lugar de haber derivado el grupo diédrico  $D_n$  del  $n$ -ágono regular, ¿podríamos haber derivado el polígono regular a través del grupo diédrico? La respuesta evidentemente es que sí: solo necesitamos de un punto vértice, y ni siquiera de la totalidad del grupo  $D_n$ ; su subgrupo  $C_n$  será suficiente.

## Capítulo 2

# Grupos de simetrías de algunos fractales

“Los matemáticos no estudian los objetos, sino las relaciones entre estos objetos; por lo tanto, es indiferente reemplazar estos objetos por otros, con tal de que no cambien sus relaciones. La materia no les interesa, solo les interesa la forma”.

Henri Poincaré.

Después del desarrollo de la teoría de grupos y hasta finales de siglo XX sólo se conocían trabajos de los grupos de simetrías en la geometría euclidiana, pero según la anterior reflexión de Poincaré, y con la aparición de nuevas geometrías, en especial la geometría fractal, parece ser que hasta hace sólo unos diez años a la fecha se empiezan a estudiar grupos de simetrías de fractales. En este capítulo analizaremos los grupos de simetrías de algunos fractales clásicos, pero antes conozcamos algo sobre estos objetos.

### 2.1 Algo sobre fractales.

El matemático francés Benoit B. Mandelbrot (nacido en Polonia en 1924) formalizó la geometría fractal en los años setenta. Sin embargo, antes de él se conocían ya ejemplos de

objetos matemáticos de este tipo, tal vez desde que se empezaron a hacer acercamientos microscópicos al caos<sup>1</sup>; de esta manera, para tener una noción de la historia de los fractales es necesario dividirla en dos: una que comprende los aportes hechos antes de Mandelbrot, y otra la contribución propiamente dicha de Mandelbrot.

Para empezar con lo que era conocido antes de Mandelbrot, diremos que estos fractales podrían ser clasificados como geométricos o como objetos reales de la naturaleza. Los primeros hallazgos aparecen a finales del siglo XIX y causan una gran expectativa e incertidumbre en las matemáticas de ese entonces. Quizá el más antiguo es el conjunto de Cantor (1883), al cual siguen en 1890 la curva de Peano y en 1891 la curva de Hilbert, esta última menos conocida<sup>2</sup>; años después se publica la curva de Koch (1904) y el triángulo y la carpeta de Sierpinski (1915). Estos fractales se construyen con reglas muy precisas, y por esta característica son conocidos como fractales determinísticos. Quizás los fractales anteriormente mencionados son los más reconocidos por su sencillez: por ejemplo, la curva de Koch puede fácilmente asimilarse con la línea costera de un país, como lo veremos en su representación más adelante.

Grandes problemas desataron estas ideas en el mundo matemático. Quizás el más polémico fue el problema de la dimensión de estas figura. Sabemos muy bien que un punto tiene dimensión 0, una línea dimensión 1, una superficie dimensión 2 y un sólido dimensión 3, y a estas dimensiones las llaman dimensiones euclidianas o topológicas; pero una de las peculiaridades de estos objetos fractales es que no tienen una dimensión de las mencionadas anteriormente, sino que su dimensión es fraccionaria no entera; de esta manera se hizo necesaria la creación de métodos sofisticados que permitieran la determinación de la dimensión de estos objetos de una manera sencilla y rápida; en este sentido el trabajo más importante fue el hecho por Felix Hausdorff (1919) y desarrollado por Besicovitch (1935); así, se habla hoy

---

<sup>1</sup>Se suele decir que la teoría general del caos tiene que ver con la reingeniería de la mente humana, y los fractales son la quintaesencia de esta “nueva” filosofía.

<sup>2</sup>En [6] se puede encontrar una ampliación de estos temas; nuestro propósito en este trabajo no es profundizar en estos aspectos.

día de la dimensión Hausdorff-Besicovitch. Para calcular la dimensión de estos objetos se utiliza la fórmula  $D_H = \frac{\log n}{\log \frac{1}{r}}$ , donde  $n$  simboliza el número de copias reducidas de la figura de la cual hace parte y  $r$  representa el factor de escala que indica qué tan reducida está la copia con respecto a la figura total.

La segunda parte de esta historia tiene que ver directamente con las contribuciones de Mandelbrot. Quizás hasta él el estudio de estos objetos se había dado de una manera aislada, y fue hacia 1975 cuando Mandelbrot logró reunir y desarrollar completamente un “nuevo” dominio matemático, aunque el objetivo principal probablemente no era crear un campo matemático sino más bien el de describir algunos objetos o fenómenos naturales y artificiales de nuestro mundo caótico, por ejemplo, uno de los tantos citados en la introducción de [13], que es el problema de determinar la longitud de la costa de Gran Bretaña.

Para Mandelbrot ninguna definición abstracta del término fractal es del todo satisfactoria. Insiste en su libro que él sólo presentará una definición empírica de fractal; por ejemplo, se dice que los fractales son objetos con dimensión fraccionaria<sup>3</sup>, pero Mandelbrot está de acuerdo en que esta definición es equívoca, ya que la dimensión puede ser un número irracional o en ciertas ocasiones entera; tal vez la forma más precisa de definir los fractales es decir que son objetos cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es mayor que su dimensión topológica (ó euclidiana), pero según Mandelbrot mismo esto deja por fuera objetos que también son fractales. De una u otra manera la noción de fractal no es más que la noción de autosimilitud o autosemejanza, es decir estos objetos poseen una propiedad importante, y es que cada pequeña porción del fractal puede ser visualizada como una réplica a menor escala de todo el fractal.

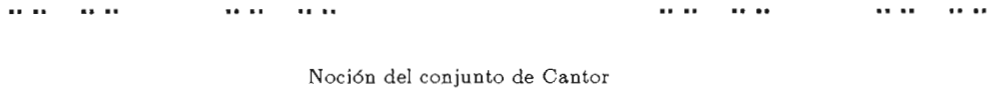
De esta manera, teniendo una breve reseña de estos objetos matemáticos, analizaremos los grupos de simetrías de los que hemos llamado fractales clásicos y los cuales definiremos de

---

<sup>3</sup>El propio Mandelbrot ha usado esta definición en un cierto momento, y asegura que el término fractal fue escogido precisamente porque venía de fraccionario.

forma recursiva para tener mayor claridad acerca de ellos.

## 2.2 El conjunto de Cantor



También conocido como el Polvo de Cantor, porque su forma se asemeja a los diminutos e innumerables granos de tierra que conforman el polvo, fue estudiado por el alemán Georg Cantor (1945-1918). El proceso de construcción es relativamente sencillo y muy variado, bien podríamos tomar como semilla un intervalo cerrado cualquiera, un cuadrado o cualquier otro conjunto compacto. Para facilitar su comprensión utilizaremos como semilla el intervalo cerrado  $[0, 1]$ ; dividimos en tres partes iguales el intervalo y quitamos el tercio medio sin incluir los extremos, de forma que en el primer paso quedarán los intervalos  $[0, \frac{1}{3}]$  y  $[\frac{2}{3}, 1]$  como lo muestra la figura 2.1; en la siguiente etapa hacemos la misma actividad con cada uno de los intervalos y obtenemos los intervalos  $([0, \frac{1}{9}], [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$  y  $[\frac{8}{9}, 1])$ , y así continuamos indefinidamente este proceso. El conjunto de Cantor es el conjunto de puntos que quedan al final del proceso. De otra manera el conjunto de Cantor puede verse como el resultado de aplicar consecutivamente las contracciones:  $f_1(x) = \frac{1}{3}x$  y  $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ , primero al intervalo  $[0, 1]$  y luego a cada conjunto que se va obteniendo en cada paso.



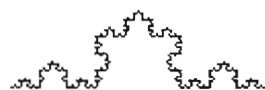
Fig. 2.1 El conjunto de Cantor en construcción

Podemos identificar dos copias reducidas de la figura con un factor de contracción de  $\frac{1}{3}$ ; por lo tanto, la dimensión de Hausdorff-Besicovitch es  $D_H = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,6309297$ .

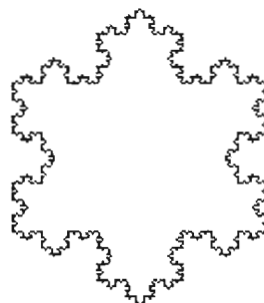
De esta manera podemos ver que el conjunto de Cantor está entre los conjuntos de puntos y las líneas, sin ser ninguno de ellos.

Ahora analicemos el grupo de simetrías del conjunto de Cantor. Es claro que, además de la identidad, podemos identificar una simetría reflexional a través del eje que pasa por el punto medio de la distancia de sus extremos (es decir, pasa por  $\frac{1}{2}$  y perpendicular al intervalo), por lo cual el grupo de simetrías del conjunto de Cantor es  $D_1$ .

## 2.3 La curva y la isla de Koch



Noción de la curva de Koch



Noción de la isla de Koch

Estos trabajos fueron presentados por Helge Von Koch (1870-1924, de Estocolmo) hacia 1904.

Iniciemos con la curva de Koch. Nuevamente, para facilitar su comprensión tomaremos como semilla el intervalo cerrado  $[0, 1]$ ; en la primera etapa también se divide en tres partes iguales, cada una de  $\frac{1}{3}$  de longitud, y el tercio medio se reemplaza por un triángulo equilátero de lado  $\frac{1}{3}$ , sin base; luego el segmento queda convertido en una curva conformada por 4 segmentos de longitud  $\frac{1}{3}$ , como lo muestra la figura 2.2; así se repite el mismo proceso con cada segmento y la curva de Koch es lo que podríamos llamar el límite de esta sucesión de curvas.

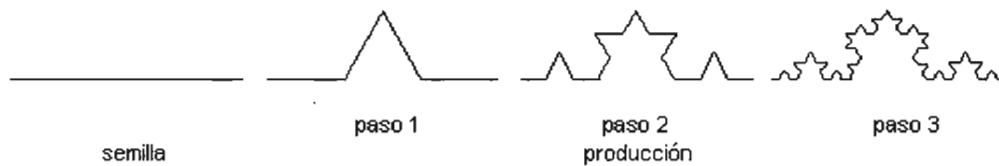


Fig. 2.2 La cura de Koch en construcción

De esta manera, en cada etapa la curva es una versión reducida proporcionalmente (por un factor de escala de  $\frac{1}{3}$ ) de la curva completa en la etapa inmediatamente anterior. La dimensión de Hausdorff-Besicovitch es por tanto  $D_H = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,261859507$ ; de aquí que la curva de Koch podría considerarse como un conjunto que está entre las líneas y las superficies, sin ser ninguna de ellas.

El grupo de simetrías de la curva de Koch resulta ser el mismo que el del conjunto de Cantor, ya que la única simetría diferente de la identidad es la reflexión con eje en el punto medio de los extremos (es decir, el eje que pasa por  $\frac{1}{2}$  y perpendicular al intervalo).

Ahora bien si tomamos un triángulo equilátero y sobre cada lado generamos la curva de Koch, obtendremos lo que se ha llamado la isla de Koch o lo que popularmente se conoce como copo de nieve. El proceso de definirlo recursivamente es más extenso que el de los anteriores, pero en la siguiente figura (fig. 2.3) representaremos su construcción geométrica.

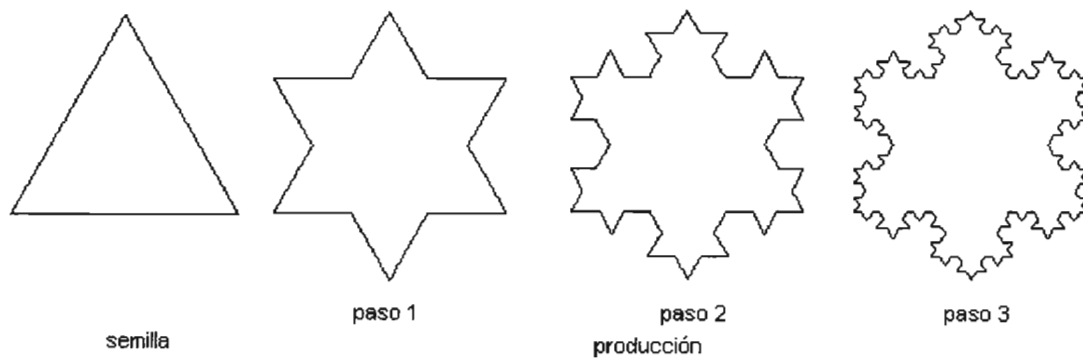


Fig. 2.3 La isla de Koch en construcción

El grupo de simetrías de la isla de Koch es  $D_6$ . Para comprobarlo, tomemos el primer paso de la construcción e identifiquemos cada uno de sus puntos de la siguiente manera:

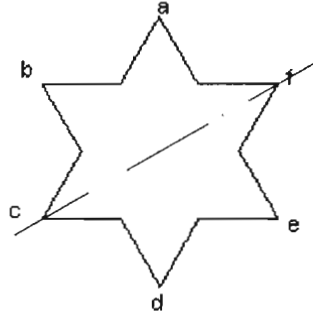


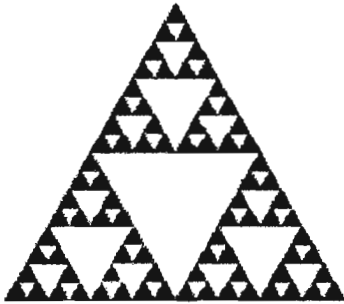
Figura 2.4

Tomemos como origen el centro del triángulo equilátero según la conclusión del lema 1.3. Así podemos identificar 6 curvas de Koch diferentes, a saber las curvas abc, bcd, cde, def, efa y fab; luego las simetrías de la isla de Koch son las rotaciones de  $\frac{\pi}{3}$  alrededor del origen y con respecto a cualquiera de los ejes que pasa por el origen y une a un vértice saliente (puntas de la estrella), por ejemplo el eje que pasa por f, representado en línea punteada en la figura 2.4 ; de esta manera existen 6 simetrías rotacionales; además, las reflexiones a través de los ejes que pasan por el origen y unen dos vértices; de esta manera también existen 6 simetrías reflexionales distintas, luego su grupo de simetrías es  $D_6$ .

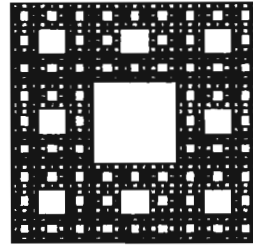
Otra forma de determinar el grupo de simetrías de la isla de Koch es uniendo los vértices de la figura 2.4, ya que estos son los únicos puntos que se encuentran más lejos del origen a través de toda la construcción. Así obtenemos un hexágono regular, cuyo grupo de simetrías es precisamente el grupo diédrico  $D_6$ .

Estos dos objetos fractales presentados por Von Koch se asemejan bastante al caos de la naturaleza. Fácilmente podríamos identificar la curva de Koch como la línea costera de un país y la isla de Koch con un copo de nieve o una isla propiamente dicha.

## 2.4 El triángulo y la carpeta de Sierpinski



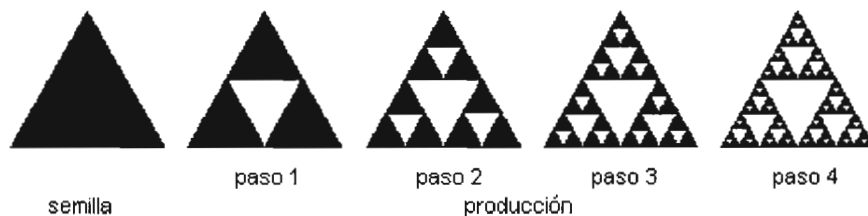
Noción del Triángulo de Sierpinski



Noción de la Carpeta de Sierpinski

Estos trabajos fueron presentados por el polaco Waclaw Sierpinski (1882-1969).

Para construir el triángulo de Sierpinski, tomamos como semilla la superficie de un triángulo (para esta construcción tomaremos un triángulo equilátero). Para el primer paso de la producción marcamos los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo y los conectamos por medio de rectas, lo que da origen a cuatro triángulos congruentes, y eliminamos el triángulo central, como lo muestra la figura 2.5; para las etapas siguientes se aplica el mismo procedimiento a cada uno de los triángulos obtenidos, y el triángulo de Sierpinski es el conjunto de puntos en el plano que se obtiene al realizar este proceso infinitamente, es decir es la intersección de todos los conjuntos obtenidos.



Fíg. 2.5 El triángulo de Sierpinski en construcción

En el proceso de construcción se originan 3, 9, 27, 81, 243, ... triángulos sucesivamente en cada una de las etapas, cada una de las cuales es una unión de tres versiones exactas pero reducidas proporcionalmente un factor de  $\frac{1}{2}$  de la etapa inmediatamente anterior.

La dimensión de Hausdorff-Besicovitch del triángulo de Sierpinski es  $D_H = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,5849625$  que podría interpretarse como un conjunto que esta entre las líneas y las superficies sin ser exactamente ninguna de las anteriores.

El grupo de simetrías del triángulo de Sierpinski es  $D_3$ , exactamente el mismo de la semilla, que son las 3 rotaciones de  $\frac{2\pi}{3}$  alrededor del origen y a partir del eje que une un vértice del triángulo semilla con el punto medio del lado opuesto y las 3 reflexiones a través de estos mismos ejes.

Si el triángulo semilla es un triángulo isósceles, el grupo de simetrías del triángulo de Sierpinski generado es  $D_3$ . Y si es un triángulo escaleno, el grupo de simetrías es  $C_1$ .

Una variación del triángulo de Sierpinski es la que presentaremos a continuación; para este caso no tomaremos como semilla un triángulo sino un cuadrado relleno. Para seguir un procedimiento parecido, éste es dividido en 9 pequeños cuadrados congruentes, de los cuales se quita el cuadrado central, como lo muestra la figura 2.6; en la siguiente etapa se aplica el mismo procedimiento a los 8 cuadrados obtenidos, en la tercera a los 64, en la cuarta a los 512, etc; el proceso se repite indefinidamente y la intersección de todos estos conjuntos es un cierto conjunto de puntos en el plano conocido precisamente como la carpeta de Sierpinski.

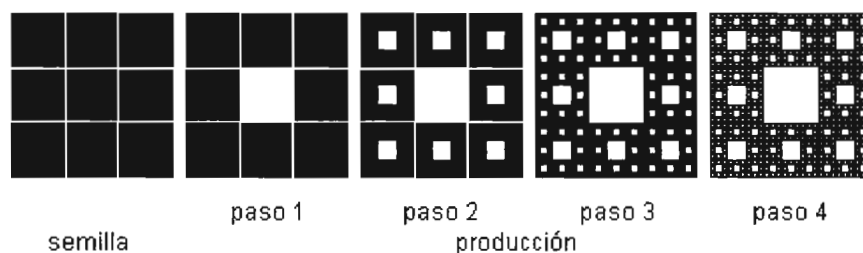


Fig. 2.6 La Carpeta de Sierpinski en construcción

Para este caso el número de copias maximales es 8, reducidas proporcionalmente un factor de  $\frac{1}{3}$ , por lo que su dimensión es  $D_H = \frac{\log 8}{\log 3} \approx 1,892789261$ .

El grupo de simetrías de la carpeta de Sierpinski es  $D_4$ , precisamente el mismo de la semilla; y las simetrías son 4 rotaciones de  $\frac{\pi}{2}$  alrededor del origen a partir de un eje que pase por un vértice y el centro del cuadrado, y las 4 reflexiones a través de los ejes medios (son los que unen los lados medios de los lados paralelos) y de las dos diagonales del cuadrado.

Si hubiéramos tomado como semilla un rectángulo el grupo de simetrías sería el grupo diédrico  $D_2$ . El lector puede identificar fácilmente las dos rotaciones y las dos reflexiones que dejan invariante este fractal.

## 2.5 Los conjuntos Mandelbrot, Mandelbar y Julia

Esta es una gran familia dentro del mundo de los fractales. Su característica común es, obviamente aparte de su belleza, que son creados a través de iteraciones de polinomios complejos.

Cronológicamente los más antiguos de estos conjuntos son los conjuntos de Julia, que fueron trabajados por Gaston Julia (1893-1978) hacia 1918 y por el también matemático francés Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929) entre 1919 y 1920; debemos maravillarnos y dar un reconocimiento a los trabajos de estos franceses, ya que sin la ayuda de gráficos de computadora lograron determinar varias propiedades de estos conjuntos.

Los polinomios que generan esos conjuntos son de la forma  $z^2 + c$ ,  $z^3 + c$ , etc., donde  $z$  es una variable compleja y  $c$  una constante compleja arbitraria.

Por ejemplo, iterar  $z^2 + c$  significa que para algún valor arbitrario y fijo de  $c$  se genera la sucesión de números complejos  $\{z, z^2 + c, (z^2 + c)^2 + c, \dots\}$ .

Este tipo de sucesión puede escribirse en forma general como

$$W(z) = \{f^{on}(z)\}_{n=0}^{\infty} = \{z, f(z), f^{o2}(z), \dots, f^{on}(z), \dots\},$$

donde  $f^{on}$  denota la composición de  $f$  consigo misma  $n$  veces.

$W(z)$  es comúnmente llamado la **órbita** de  $z$ , y en particular nos interesa que  $W(z)$  sea acotado (es decir, que todos los puntos de la sucesión estén contenidos en alguna bola, o sea en el interior de alguna circunferencia).

De esta manera el **conjunto lleno de Julia** asociado a  $f$  es el conjunto de los complejos cuya órbita es acotada; la frontera de este conjunto es lo que se conoce como **conjunto de Julia** asociado a  $f$ .

Para continuar casi setenta años más tarde, y ya con los adelantos de la computación en uno de los más grandes laboratorios de este tiempo como lo es la IBM, se conoce el conjunto de Mandelbrot, y desde entonces su estructura despierta sentimientos de profunda belleza y admiración dentro de la geometría fractal. Mandelbrot lo descubrió cuando experimentaba con los conjuntos de Julia; él deseaba conocer el resultado de fijar  $z = 0$  y variar  $c$  en la iteración del polinomio  $z^2 + c$ . Al conjunto de todos los complejos  $c$  para los cuales la órbita del cero  $W(0)$  es acotada (bajo la iteración de  $f(z) = z^2 + c$ ), lo llama el conjunto clásico de Mandelbrot; y los obtenidos de la misma manera para  $z^p + c$  con  $p > 2$  los identificaremos como los conjuntos de Mandelbrot generalizados.

Por último podríamos llamar, en esta tónica de familiaridad, a los conjuntos de Mandelbar como hermanos mellizos de los conjuntos de Mandelbrot; la diferencia está en el polinomio que se itera: en este caso los polinomios son de la forma  $\bar{z}^p + c$  con  $p \geq 2$ , y se determinan de igual forma que los conjuntos de Mandelbrot.

De esta forma, si  $f(z) = z^p + c$  entonces los conjuntos generalizados de Mandelbrot (denotados por  $M(p)$  para  $p \geq 2$ ) están determinados por:

$$M(p) = \{c \in \mathbb{C} \mid W(0) \rightarrow \infty\}.$$

Si  $f(z) = \bar{z}^p + c$ , obtenemos los conjuntos generalizados de Mandelbar (denotados  $\overline{M}(p)$ , para  $p \geq 2$ ) de la siguiente manera:

$$\overline{M}(p) = \{c \in \mathbb{C} \mid W(0) \rightarrow \infty\}.$$

El tratamiento para determinar los conjuntos de Julia es un poco distinto; primero hay que tomar un  $c$  fijo, que llamaremos el punto semilla, y el conjunto al que pertenece el conjunto padre.

De esta manera, si  $f(z) = z^p + c$  y el punto semilla es tomado del conjunto padre Mandelbrot, es decir  $c \in M(p)$ , se define el conjunto de lleno de Julia asociado a  $f$  como  $Jul(p, c) = \{z \in \mathbb{C} \mid W(z) \rightarrow \infty\}$ , y su frontera es el conjunto de Julia asociado a  $f$ , es decir,  $J(p, c) = \partial Jul(p, c)$ .

Ahora, si  $f(z) = \bar{z}^p + c$  y el punto semilla es tomado del conjunto padre Mandelbar, es decir  $c \in \overline{M}(p)$ , se define de la misma forma el conjunto lleno de Julia asociado a  $f$  como  $Jul(p, c) = \{z \in \mathbb{C} \mid W(z) \rightarrow \infty\}$ , y para este caso  $\overline{J}(p, c) = \partial Jul(p, c)$  como el conjunto de Julia asociado a  $f$ .

En la traducción del artículo que se presenta en el capítulo siguiente encontraremos resultados importantes sobre los grupos de simetría de esta gran familia.

## Capítulo 3

# Traducción del artículo “Grupos de simetrías de fractales”<sup>1</sup>

Este artículo contiene gráficos de computador de conjuntos de Mandelbrot y Mandelbar generalizados, y sus conjuntos de Julia asociados, para los que es evidente que sus grupos de simetrías poseen una elegante y sencilla estructura.

Nosotros mostramos que:

1. El conjunto de Mandelbrot  $M(p)$  generado por la iteración  $z_{t+1} = z_t^p + c$  permanece invariante bajo las transformaciones de simetría del grupo diédrico  $D_{p-1}$  (i.e., éstas son isometrías de  $M(p)$ ).
2. El conjunto de Mandelbar  $\overline{M}(p)$  es invariante bajo las isometrías en  $D_{p+1}$ .
3. Los conjuntos de Julia de puntos interiores de  $M(p)$  (ó  $\overline{M}(p)$ ) son invariantes bajo las isometrías en cada  $D_p$  o precisamente el grupo cíclico  $C_p$ , dependiendo de si el punto semilla está sobre o fuera de un eje de simetría del conjunto padre Mandelbrot (o Mandelbar).

---

<sup>1</sup>ALEXANDER C., GIBLIN I., NEWTON D. “Symmetry Groups of Fractals”. *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 14, N°2, 1992, págs. 32-38.

Las demostraciones son relativamente sencillas, excepto las de que no hay otras isometrías de estos conjuntos, las cuales no son de manera directa. Como es caso frecuente en la teoría del caos, lo que es trivial geoméricamente es difícil de probar analíticamente. Para los conjuntos generalizados de Mandelbrot y Mandelbar y para  $p$  par hemos demostrado en efecto que las transformaciones diedrales simétricas son las únicas isometrías de estos conjuntos, pero el método utilizado no parece que fuera aplicable a  $p$  impar o a los conjuntos de Julia.

### 3.1 La simetría de fractales

Los fractales determinísticos poseen una increíble cantidad de simetrías. Además, una de sus propiedades fundamentales son las de “autosimilitud” o “escala-invariante”. Esto significaría que un fractal determinístico es un punto fijo de cierto tipo de contracciones (Barnsley, 1988), por ejemplo, una similitud (una transformación afín que conserva los ángulos pero no las distancias). Pero la simetría de algunos fractales determinísticos puede también ser descrita por otro tipo de invarianza, bajo las transformaciones afines que conserven tanto distancias como ángulos, i.e., isometrías. El conjunto de todas aquellas isometrías forman el grupo simétrico del objeto fractal.

Para distinguir entre los dos tipos de invarianza nosotros construimos un fractal determinístico usando la iteración producida gráficamente en la figura 1. En cada paso siempre el cuadrado es reemplazado por cinco pequeños cuadrados como se muestran, y la estructura se transforma en un fractal de dimensión  $\frac{\log 5}{\log 3}$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . La autosimilitud de este objeto en  $\mathbb{R}^2$  es capturada por la similitud  $f(x, y) = \frac{1}{3}(-y, x)$ , i.e., rotación de  $90^\circ$ , además de contracción por un factor de escala de  $\frac{1}{3}$ . El fractal es una unión de cinco translaciones de su imagen bajo  $f$ , en una correspondencia 1-1 con su imagen bajo  $f$ . Por otra parte, el fractal es invariante bajo dos tipos de transformaciones ortogonales de  $\mathbb{R}^2$ ; la primera es rotación de  $90n^\circ$  ( $n = 1, \dots, 4$ ) y la segunda reflexión a través de sus cuatro ejes de simetría. El conjunto completo de tales transformaciones es por supuesto el grupo diédrico de orden 8

$$D_4 = \{a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1\},$$

donde  $a$  denota una rotación de  $90^\circ$  y  $b$  es cualquier reflexión.



Fig.3.1 Un fractal determinístico de dimensión  $\frac{\log 5}{\log 3}$ .

El fractal de la figura 3.1 tiene una estructura geométrica muy simple, a diferencia de la más famosa familia de fractales, el conjunto de Mandelbrot y sus parientes. La autosemejanza en la familia de Mandelbrot no es fácil de captar. ¿Cómo podría uno intentar especificar una función de contracción (sobre el espacio de subconjuntos compactos diferentes de vacío de  $\mathbb{C}$  con la métrica de Hausdorff) que tenga el conjunto de Mandelbrot como punto fijo? En contraste, parece bastante fácil escribir su grupo de simetrías: la reflexión del eje real es aparentemente la única isometría del conjunto clásico de Mandelbrot (además de la idéntica, por supuesto).

Para un entero positivo  $m$  denotamos por  $C_m$  el grupo cíclico de orden  $m$ , y sea

$$D_m = \{a, b \mid a^m = b^2 = (ab)^2 = 1\};$$

así, para  $m \geq 3$ ,  $D_m$  es el grupo de simetrías de rotación y reflexión de un  $m$ -ágono regular plano,  $D_2 \cong C_2 \times C_2$  el grupo cuarto de Klein, y  $D_1 \cong C_2$ .

Ahora para cualquier entero positivo  $p$  fijo y números complejos  $z$  y  $c$ , sean  $P(z, c; p) = z^p + c$  y  $Q(z, c; p) = \bar{z}^p + c$ . Si  $F^n$  denota la  $n$ -ésima composición de la función  $F$ , entonces

$$M(p) = \{c \in \mathbb{C} \mid F^n(0, c; p) \rightarrow \infty\}$$

y 
$$\bar{M}(p) = \{c \in \mathbb{C} \mid Q^n(0, c; p) \rightarrow \infty\}$$

denotan los conjuntos generalizados de Mandelbrot y Mandelbar respectivamente.

Estos están ilustrados en las figuras 2 a la 7 para los casos  $p = 2, 3$  y  $4$ . Para puntos  $c \in M(p)$ , se denota el correspondiente conjunto de Julia (definido en la próxima sección) por  $J(p, c)$ , e igualmente  $\bar{J}(p, c)$  denota los conjuntos de Julia para puntos  $c \in \bar{M}(p)$ . Algunos de estos se enseñan en las figuras 3.8 a la 3.13.

La geometría de estas gráficas de los conjuntos de Mandelbrot, Mandelbar y de Julia, motivó las siguientes observaciones sobre la estructura de sus grupos de simetrías:

1. Para todo entero  $p \geq 2$ ,  $M(p)$  tiene grupo de simetría  $D_{p-1}$  y  $\bar{M}(p)$  tiene grupo de simetría  $D_{p+1}$ .
2. Denotemos por  $S(p)$  los ejes de simetría de  $M(p)$ . Entonces  $J(p, c)$  tiene grupo de simetría  $C_p$  si y solo si  $c \notin S(p)$ , y un grupo de simetría  $D_p$  si y solo si  $c \in S(p)$ .
3. Los grupos de simetrías de los conjuntos de Mandelbar Julia tienen la misma estructura que los de los conjuntos Mandelbrot-Julia, según  $c$  sea tomado por fuera o sobre un eje de simetría de  $\bar{M}(p)$ .

### 3.2 Isometrías de los conjuntos de Mandelbrot y Mandelbar

Considérese la primera observación hecha anteriormente. Se deduce a partir de la figura que  $M(p)$  no puede ser invariante bajo una isimetría del plano complejo que no está en  $D_{p-1}$ ; pero, ¿dejan, en efecto, las transformaciones de  $D_{p-1}$  invariante a  $M(p)$ ? Similarmente, ¿es  $\bar{M}(p)$  realmente invariante bajo las rotaciones y reflexiones de  $D_{p+1}$ , o hay alguna isla, alguna copia distorsionada de  $M(p)$  en  $\bar{M}(p)$  que introduce una asimetría? La figura 14 muestra una copia distorsionada de  $M(2)$  en  $\bar{M}(2)$ , pero sabemos que ésta no introduce una asimetría en  $\bar{M}(2)$  porque Crower y otros (1989) han mostrado que  $\bar{M}(2)$ , es invariante bajo rotaciones alrededor del origen a través de  $\frac{2\pi}{3}$  y reflexiones a través de sus ejes de simetría.

Para hallar las isometrías de  $M(p)$  y  $\overline{M}(p)$ , introduciremos el conjunto de Mandel,  $Man(f)$ , de una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Sea  $c \in \mathbb{C}$  y definamos  $\{z_n\}$  como la **sucesión iterativa (IS) asociada con  $c$** , por

$$z_0 = 0,$$

y para  $n > 0$ ,

$$z_{n+1} = f(z_n) + c.$$

Entonces

$$Man(f) = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{el IS asociado con } c \text{ es acotada}\}.$$

Ahora consideremos una función continua  $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Decimos que  $s$  **conmuta iterativamente** con  $f$  si para todo  $z \in \mathbb{C}$  y  $c \in \mathbb{C}$

$$f(s(z)) + s(c) = s(f(z) + c).$$

Ahora demostraremos que los homeomorfismos iterativamente conmutativos con punto fijo en el origen dejan  $Man(f)$  invariante.

**Proposición 3.1** *Si  $s$  conmuta iterativamente con  $f$  y  $s(0) = 0$ , entonces  $s(Man(f)) \subseteq Man(f)$ . Si además  $s$  es un homeomorfismo, entonces  $s(Man(f)) = Man(f)$ .*

**Demostración.** Para  $c \in Man(f)$ , sea  $\{z_n\}$  la IS asociada con  $c$ , y sea  $\{w_n\}$  la IS asociada con  $s(c)$ . Puesto que  $s(0) = 0$  y  $f(s(z)) + s(c) = s(f(z) + c)$ , entonces una inducción simple muestra que  $w_n = s(z_n)$ . Puesto que  $s$  es continua y  $\{z_n\}$  es acotado,  $\{w_n\}$  también debe ser acotado, luego  $s(c) \in Man(f)$ .

Ahora, si  $s$  es un homeomorfismo, entonces  $\{z_n\}$  es acotado si y solo si  $\{w_n\}$  es acotado, así  $c \in Man(f) \Leftrightarrow s(c) \in Man(f)$ .

De esta proposición general deducimos tres corolarios sobre isometrías de los conjuntos de Mandelbrot y Mandelbar.

Sean  $f(z) = z^p$  y  $g(z) = \bar{z}^p$ ,  $p$  un entero mayor o igual que 2, así que  $Man(f) = M(p)$  y  $Man(g) = \overline{M}(p)$ .

**Corolario 3.1** *La reflexión en el eje real es una isometría tanto de  $M(p)$  como de  $\overline{M}(p)$ .*

**Demostración.** Definimos  $s(z) = \bar{z}$ , así  $s(0) = 0$  y claramente  $s$  es un homeomorfismo. Además,  $\overline{z^p + c} = \overline{z^p} + \bar{c}$  y  $z^p + \bar{c} = \overline{\overline{z^p} + c}$ , así que de acuerdo con la proposición  $s(M(p)) = \overline{M(p)}$  y  $s(\overline{M}(p)) = M(p)$ . Dado que  $s$  también preserva la distancia, esta es una isometría de  $M(p)$  y  $\overline{M}(p)$ .

**Corolario 3.2** *Las rotaciones de orden  $p - 1$  alrededor del origen son isometrías de  $M(p)$ .*

**Demostración.** Sea  $s$  una rotación  $s(z) = az$ , donde  $a = e^{\frac{2\pi i}{k}}$ . Claramente  $s$  es un homeomorfismo y  $s(0) = 0$ . Para cumplir con la condición conmutativa necesitamos  $(az)^p + ac = a(z^p + c)$ , lo cual es verdadero si y solo si  $a^p = a$ , i.e.,  $a^{p-1} = 1$ . Nuevamente la rotación preserva distancias, por tanto el hecho de que  $s(M(p)) = M(p)$  significa que ellas son isometrías de  $M(p)$ .

**Corolario 3.3** *Las rotaciones alrededor del origen de orden  $p + 1$  son isometrías de  $\overline{M}(p)$ .*

**Demostración.** Sea  $s$  como en el corolario 2. En este caso la condición conmutativa se transforma en  $(\overline{az})^p + ac = a(\overline{z^p} + c)$ , así que necesitamos  $\overline{a^p} = a$ , i.e.,  $a^{p+1} = 1$ .

Hemos demostrado que el grupo de simetrías de  $M(p)$  tiene a  $D_{p-1}$  como un subgrupo y que el de  $\overline{M}(p)$  tiene el subgrupo  $D_{p+1}$ , pero para probar nuestra primera observación necesitamos probar que no hay otras isometrías.

El siguiente método funciona para  $p$  par:

Considere primero  $M(p)$ . Ahora los números complejos  $c$  tales que  $|c|^{p-1} > 2$  no están en  $M(p)$ , pero cuando  $p$  es par algunos  $c$  tales que  $|c|^{p-1} = 2$  están en  $M(p)$ , precisamente, aquellos para los cuales  $|c^{p-1} + 1| = 1$ . Hay exactamente  $p - 1$  de estos puntos (precisamente, los números complejos  $c$ , tales que  $c^{p-1} = -2$ ). Puesto que estos son los puntos en  $M(p)$

que están más lejos del origen, no hay otras simetrías rotacionales de  $M(p)$  (y por lo tanto no hay otras simetrías reflexionales) distintas de las obvias. Para el conjunto de Mandelbar  $\overline{M}(p)$  son los  $p + 1$  puntos que satisfacen  $\frac{c^p}{c} = -2$  los cuales marcan el final de los brazos de Mandelbar, pero nuevamente solo para  $p$  par.

Cuando  $p$  es impar estos puntos están por fuera de los conjuntos de Mandelbrot y Mandelbar. Además, para  $p$  impar no es fácil localizar los puntos que están más lejos del origen ya que los conjuntos de Mandelbrot y Mandelbar no tienen “picos” obvios, como sí ocurre para  $p$  par. De la figura 4 el punto más lejano en  $M(3)$  parece ser aproximadamente  $c = 0,32779878 + 1,2290829i$ , pero este no parece tener ninguna propiedad numérica especial y la iteración  $z_{n+1} = z_n^3 + c$  no converge en la manera directa que es característica de los puntos más lejanos cuando  $p$  es par.

En conclusión, hemos probado solamente que toda simetría rotacional de  $M(p)$  tiene orden  $p - 1$  y toda simetría rotacional de  $\overline{M}(p)$  tiene orden  $p + 1$  para  $p$  par. La prueba para  $p$  impar  $p > 1$  permanece como un problema abierto.

### 3.3 Isometrías de los conjuntos de Julia

Ahora analizaremos nuestra segunda y tercera observación sobre las gráficas de los grupos de simetrías de los conjuntos de Julia.

Sea  $c \in M(p)$  y consideremos la IS  $\{z_n\}$  asociada con la función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida como  $z_{n+1} = f(z_n) + c$ . El conjunto lleno de Julia asociado con  $c$  y  $f$  es :

$$Jul(f, c) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid \text{la IS asociada con } f \text{ es acotada}\}.$$

Finalmente,

$$J(p, c) = \partial Jul(f, c) \text{ para } f(z) = z^p \text{ y } \overline{J}(p, c) = \partial Jul(f, c) \text{ para } f(z) = \overline{z}^p.$$



**Proposición 3.2** *Los conjuntos de Julia  $J(p, c)$  son invariantes bajo rotaciones de orden  $p$  para todo  $c \in M(p)$ . Si  $c$  está sobre un eje de simetría de  $M(p)$ , entonces  $J(p, c)$  tiene también simetría de reflexión.*

**Demostración.** Supongamos que  $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es un homeomorfismo tal que  $f(s(z)) = f(z)$ . Entonces claramente  $z_0 \in Jul(f, c) \Leftrightarrow s(z_0) \in Jul(f, c)$ , así que  $s$  es una simetría de  $Jul(f, c)$ . Ahora sea  $f(z) = z^p$  y considérese una rotación de orden  $p$ ,  $s(z) = az$  cuando  $a^p = 1$ . Claramente  $s$  es un homeomorfismo y  $f(s(z)) = f(z)$ , así  $s$  es una simetría de  $Jul(f, c)$ . Si  $c$  está sobre un eje de simetría de  $M(p)$  entonces existe una reflexión  $s$  en el grupo simétrico de  $M(p)$  tal que  $s(c) = c$ . Afirmamos que tal  $s$  es también una isometría de  $J(p, c)$ . Sea  $z_0 \in Jul(f, c)$ , empecemos la IS  $\{z_n\}$  con  $f(z) = z^p$  y  $s(c) = c$ . Sea  $w_0 = s(z_0)$  y considérese la IS  $\{w_n\}$  definida por

$$w_{n+1} = w_n^p + c.$$

Ahora,

$$w_n = s(z_n) \Rightarrow w_{n+1} = s(z_n)^p + c = s(z_n^p + c) = s(z_{n+1}),$$

así, puesto que  $s$  es también un homeomorfismo,  $\{w_n\}$  es acotado si y solo si  $\{z_n\}$  es acotado, i.e.,  $z_0 \in Jul(f, c) \Leftrightarrow s(z_0) \in Jul(f, c)$ .

Finalmente, estas isometrías de  $Jul(f, c)$  deben ser isometrías de  $J(p, c)$ , puesto que ellas son transformaciones ortogonales y  $J(p, c) = \partial Jul(f, c)$  para  $f(z) = z^p$ . En vista de que las rotaciones de orden  $p$  forman el grupo cíclico  $C_p$ , y agregando una reflexión a esta produce el grupo diédrico  $D_p$ , hemos demostrado que las isometrías de  $J(p, c)$  incluyen estos grupos.

**Proposición 3.3** *Los conjuntos de Julia  $\bar{J}(p, c)$  son invariantes bajo rotaciones de orden  $p$  para todo  $c \in \bar{M}(p)$ . Si  $c$  está sobre un eje de simetría de  $\bar{M}(p)$ , entonces también  $\bar{J}(p, c)$  tiene simetría de reflexión.*

**Demostración.** Tomemos  $f(z) = \bar{z}^p$  y sea  $s$  una rotación  $s(z) = az$  con  $\bar{a}^p = 1$  en la demostración de la proposición 2.

La prueba de la simetría de reflexión cuando  $c$  está sobre un eje de simetría de  $\overline{M}(p)$  se hace por inducción sobre las sucesiones iterativas  $\{z_n\}$  y  $\{w_n\}$  definidas por:

$$z_{n+1} = \overline{z_n^p} + c, \quad w_{n+1} = \overline{w_n^p} + c,$$

de la misma forma como en la proposición 2.

Como antes, la parte difícil es probar lo que geoméricamente es obvio (que los conjuntos de Julia no son invariantes bajo otras rotaciones distintas de aquellas de orden  $p$ ). En ausencia de “picos” obvios, como se tiene para  $M(p)$  y  $\overline{M}(p)$  cuando  $p$  es par, nuestro método de prueba no tiene éxito. Puede ser que se necesite una aproximación diferente.

### 3.4 Mapas de color usados en la generación de las figuras

Las figuras 3.2 a 3.13 usan una versión modificada de un gráfico propuesto por Clifford Pickover (1990). El método consiste en examinar el tamaño de los puntos en la sucesión  $P^n(0, c; p)$  (para los conjuntos de Mandelbar generalizados la sucesión es  $Q^n(0, c; p)$ ). Primero escoja un tamaño límite  $d > 2$ , un máximo  $m$  de iteraciones y un conjunto de colores  $\{C(i)\}$ , donde  $i$  denota el número de iteraciones requeridas antes de que el tamaño límite sea superado, si es que lo es, y  $1 < i \leq m$ .

Calcúlese la sucesión  $P^n(0, c; p)$  para  $n = 1, 2, \dots$  hasta que una iteración  $i$  sea alcanzada tal que  $|P^i(0, c; p)| > d$  ó  $i = m$ . En el segundo caso la sucesión es acotada y  $c$  es coloreado de negro. Si  $i < m$  ó  $|\operatorname{Im} P^i(0, c; p)| < d$  ó  $|\operatorname{Re} P^i(0, c; p)| < d$ , entonces se colorea el punto  $c$  con  $C(i)$ , de otro modo se colorea  $C(i - 1)$ .

Un máximo de 500 iteraciones es usado para generar las figuras 3.2 a la 3.13, las cuales están todas igualmente proporcionadas en el plano complejo (i.e., no son contraídas en las direcciones real o imaginaria) centradas en el origen y de “altura” aproximadamente 4. Los tamaños límites utilizados fueron 1500 para  $p = 2$ , 80 para  $p = 3$  y 25 para  $p = 4$ .

La figura 3.14 fue obtenida usando un mapa de color estándar, donde el tamaño límite  $d = 4$  y  $c$  es coloreado por  $C(i)$  siempre que la sucesión no es acotada. Una iteración máxima de 8192 es usada, pero el programa atrapa órbitas de longitud menor o igual que 64. Así, la imagen toma solo unos minutos en generarse. Esta es centrada sobre el punto  $-1,19085 + 0,206607i$ , con una altura de aproximadamente  $6 \times 10^{-4}$ .

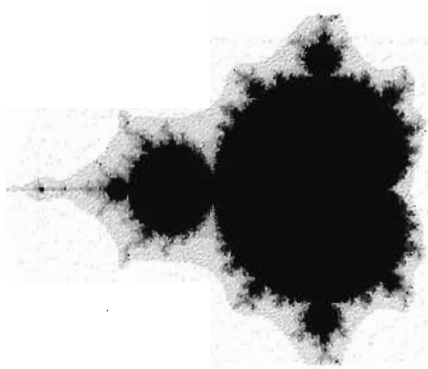


Figura 3.2 El conjunto de Mandelbrot  $M(2)$ . El eje real es el único eje de simetría, así  $M(2)$  tiene grupo de simetría  $D_1$ , el grupo diédrico de orden 2 ( $\cong C_2$ , el grupo cíclico de orden 2).

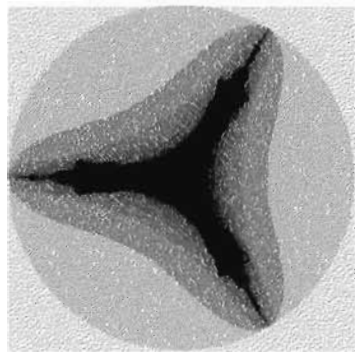


Figura 3.3 El conjunto de Mandelbar  $\overline{M}(2)$ . Este tiene tres ejes de simetría, todos pasan por el origen, con ángulos  $0, \frac{2\pi}{3}$  y  $\frac{4\pi}{3}$  desde el eje real. Tienen grupo de simetría  $D_3$ , el grupo diédrico de orden 6.

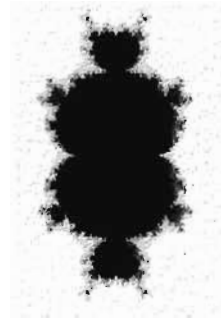


Figura 3.4 El conjunto generalizado de Mandelbrot  $M(3)$ . Estos son los números complejos  $c$  para los que la iteración  $z_{n+1} = z_n^3 + c$  es acotada para variables complejas  $z$  iniciando con  $z_0 = 0$ . Tiene dos ejes de simetría -el eje real y el eje imaginario- y su grupo de simetría es  $D_2$  (isomorfo con el cuarto grupo de Klein,  $C_2 \times C_2$ ).

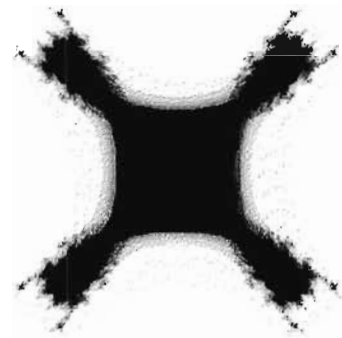


Figura 3.5 El conjunto generalizado de Mandelbar  $\overline{M}(3)$ . La iteración  $z_{n+1} = z_n^3 + c$  es acotada para  $c \in \overline{M}(3)$  (nuevamente, con variable compleja  $z$  iniciando con  $z_0 = 0$ ). Tiene cuatro ejes de simetría, son el eje real y el eje imaginario, y líneas que pasan por el origen con ángulos  $\frac{\pi}{4}$  a los otros ejes de simetría; así, el grupo de simetría es  $D_4$ .

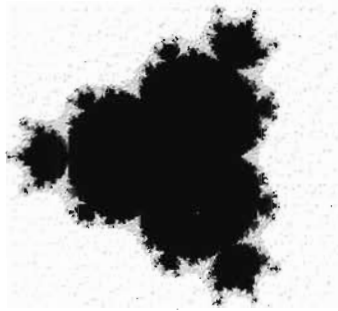


Figura 3.6 El conjunto generalizado de Mandelbrot  $M(4)$ . Estos son los números complejos  $c$  para los que la iteración  $z_{n+1} = z_n^4 + c$  es acotada, su grupo de simetría es el mismo que el de  $\overline{M}(2)$ .

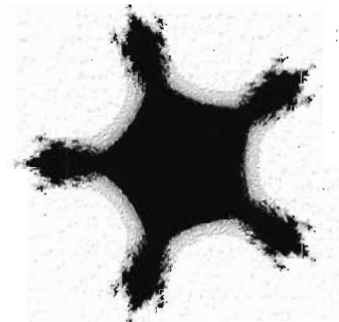


Figura 3.7 El conjunto generalizado de Mandelbar  $\overline{M}(4)$ . Para  $c \in \overline{M}(4)$ , la iteración  $z_{n+1} = z_n^4 + c$  es acotada, tiene cinco ejes de simetría, el eje real (como siempre) y las líneas que pasan por el origen con ángulos  $\frac{\pi}{5}$ ,  $\frac{3\pi}{5}$ ,  $\frac{7\pi}{5}$  y  $\frac{9\pi}{5}$  al eje real. De aquí que tiene grupo de simetría  $D_5$ .

CAUIS



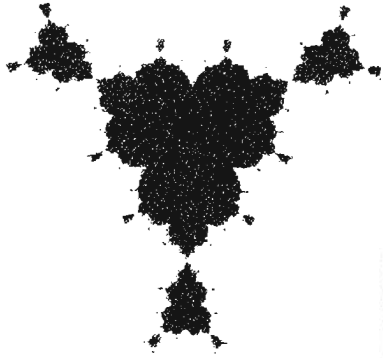


Figura 3.10 El conjunto de Julia  $J(3, c)$ , donde  $c = 1,0867i$ . Siendo puramente imaginaria,  $c$  está sobre un eje de simetría de  $M(3)$ , y así sus simetrías incluyen reflexión sobre el eje imaginario, así como también rotaciones de orden 3. Por el axioma de clausura para grupos, el grupo de simetría también contiene reflexiones a través de ejes obtenidos por rotaciones del eje imaginario  $\frac{2\pi}{3}$  y  $\frac{4\pi}{3}$ , y tiene grupo de simetría diédrica  $D_3$ .

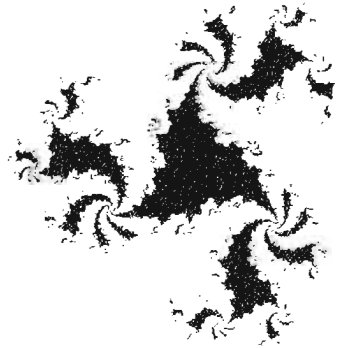


Figura 3.11 El conjunto de Julia  $J(3, c)$ , donde  $c = -0,0539041 + 0,13427i$ . Ahora  $c$  está por fuera del eje de simetría de  $M(3)$ , y así el conjunto de Julia tiene solamente simetría de rotación de orden 3, i.e., grupo de simetría  $C_3$ .

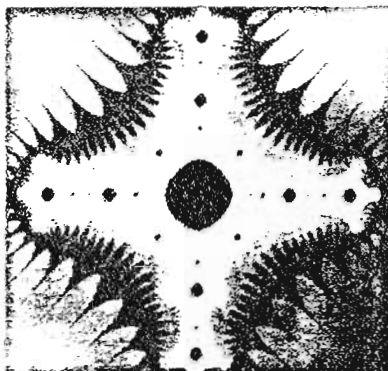


Figura 3.12 El conjunto de Julia  $J(4, c)$  donde  $c = -1, 2$ . El grupo de simetría es  $D_4$ , porque  $c$  está sobre un eje de simetría de  $M(4)$ .

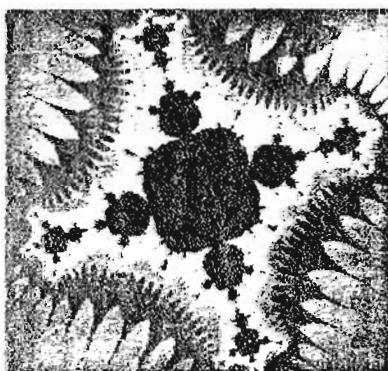


Figura 3.13 El conjunto de Julia  $\bar{J}(4, c)$ , donde  $c = -0,3461 + 1,0651i$ . En coordenadas polares  $c = (1.1, \frac{3\pi}{5})$ , así que este está sobre el eje de simetría  $s(\frac{3\pi}{5})$  de  $\bar{M}(4)$ . En consecuencia, además de simetría rotacional de orden 4, el conjunto de Julia tiene simetría reflexional alrededor de  $s(\frac{3\pi}{5})$ . La clausura del grupo implica que los otros tres ejes de simetría del conjunto de Julia son rotaciones de estos ejes alrededor de  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{3\pi}{4}$ . Nótese que estos tres no son ejes de simetría de  $\bar{M}(4)$ , así que los únicos ejes de simetría que ellos tienen en común es el eje de simetría del cual el conjunto de Julia fue generado.





Figura 3.14 Una copia distorsionada de  $M(2)$  en  $\overline{M}(2)$ . Hasta donde sabemos, no se ha demostrado que el conjunto de Mandelbar es conexo. Si lo es, los experimentos muestran que los filamentos que conectan son infinitamente finos (como en el conjunto de Mandelbrot) y todos contienen una infinidad de pequeñas islas, como este. Pero el orden de los ciclos atractores en estas islas se incrementa si se hacen muy pequeñas, y las imprecisiones de la máquina hacen que las pruebas rigurosas de acotamiento sean difíciles de aplicar; sin embargo, nuestros resultados muestran que estas islas no introducen ninguna asimetría global en los conjuntos de Mandelbrot y Mandelbar.

#### Referencias

- Barnsley M. *Fractals Everywhere*. San Diego: Academic Press (1988).
- Crowe W. D., R. Hasson, P. J. Rippon, and P. E. D. Strain-Clark, "On the Structure of the Mandelbar set", *Nonlinearity* 2, (1989), 341-553.
- Pickover C. *Computers, Pattern, Chaos and Beauty*. New York: St. Martin's Press (1990).

Escuela de Ciencias Matemáticas y Física

Universidad de Sussex

Brighton, Sussex BN19QH

Reino Unido

## Capítulo 4

# Análisis del Artículo

Los capítulos 1 y 2 de este trabajo presentan un compendio mínimo de temas con los cuales puede abordarse el desarrollo de la investigación presentada en el artículo (capítulo 3).

Después de haber hecho la traducción, leído y entendido los resultados presentados en el artículo, queremos exponer a los lectores algunas notas importantes que se desprenden de este análisis. Pensamos que al hacer algunas demostraciones que probablemente por falta de espacio en la publicación no se hicieron y se dejaron a consideración de los lectores, se tiene una mayor certeza de la sustentación de las observaciones hechas por los autores.

Para empezar, señalaremos como fe de erratas dos errores -muy posiblemente de tipo mecanográfico- que encontramos, uno en la sección titulada *La simetría de fractales* (pág. 33) donde se hace el análisis de un fractal determinístico de dimensión  $\frac{\log 5}{\log 3}$ , y aunque se expresa en la transformación que su factor de escala es  $\frac{1}{3}$ , más adelante se dice que este factor de escala es  $\frac{1}{9}$ , lo cual es falso; aunque este valor de  $\frac{1}{9}$  no es del todo aislado, ya que si hacemos referencia al área del cuadrado, ésta en realidad sí ha sido disminuida en  $\frac{1}{9}$  en la transformación con relación al área del cuadrado semilla. Igualmente podríamos señalar de una vez, como se hizo en el capítulo 2, que este fractal posee el mismo grupo de simetría que el del conjunto semilla, es decir  $D_4$ .

Un segundo error del mismo tipo lo encontramos al final de esta misma sección, cuando se hace la segunda observación sobre los grupos de simetría de los conjuntos de Mandelbrot, Mandelbar y Julia, y que textualmente dice:

“Denotaremos por  $S(p)$  los ejes de simetría de  $M(p)$ . Entonces  $J(p, c)$  [que denota el conjunto de Julia asociado] tiene grupo de simetría  $C_p \Leftrightarrow c \notin S(p)$ , y tiene grupo de simetría  $D_p \Leftrightarrow c \in S(p)$ ”.

En la última doble implicación de esta observación debería decir  $D_p \Leftrightarrow c \in S(p)$ , que es lo que realmente se demuestra más adelante.

Para la proposición 3.1 y los tres corolarios de la sección *Isometrías de los conjuntos de Mandelbrot y Mandelbar*, a continuación plantearemos como proposiciones aquellos apartes de las demostraciones que se utilizan como evidentes. Antes de cada proposición se definirán los términos que se involucran.

**Definición 4.1** Sean  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $c \in \mathbb{C}$ . La **sucesión iterativa**  $\{z_n\}$  asociada con  $c$  es  $z_{n+1} = f(z_n) + c$  para  $n > 0$  y  $z_0 = 0$ . Notaremos  $IS$  como la sucesión iterativa.

**Definición 4.2** Una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una **función continua** en un punto  $p$  si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$  siempre que  $|x - p| < \delta$ . Se dice que una función es continua si lo es en todos los puntos de su dominio.

**Definición 4.3**  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es un **homeomorfismo** si  $f$  es biyectiva y bicontinua (i.e., tanto  $f$  como  $f^{-1}$  son continuas).

**Definición 4.4** Si  $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua, diremos que  $S$  **conmuta iterativamente** con  $f$  ( $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ), si para todo  $z \in \mathbb{C}$  y  $c \in \mathbb{C}$ ,  $f(S(z)) + S(c) = S(f(z) + c)$ .

**Proposición 4.1** Sean  $\{z_n\}$  la sucesión iterativa asociada a  $C$  y  $\{\omega_n\}$  la sucesión iterativa asociada a  $S(c)$ . Si  $f$  es una función que conmuta iterativamente con  $S$  y  $S(0) = 0$ , entonces  $\omega_n = S(z_n)$ .

**Demostración.** lo haremos con la ayuda del principio de inducción matemática; para esto determinaremos antes las sucesiones iterativas de  $f$  asociadas con  $c$  y  $S(c)$ :

$$z_{n+1} = f(z_n) + c \text{ y } \omega_{n+1} = f(\omega_n) + S(c) \text{ con } z_0 = 0 \text{ y } \omega_0 = 0;$$

$$\{z_n\} = \{z_0, z_1, z_2, \dots\} = \{0, f(0) + c, f(f(0) + c) + c, \dots\};$$

$$\{\omega_n\} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots\} = \{0, f(0) + S(c), f(f(0) + S(c)) + S(c), \dots\}.$$

Veamos que en realidad  $\omega_n = S(z_n)$ .

i) Para  $n = 0$ :

$$\omega_0 = 0 \text{ y } S(z_0) = S(0) = 0, \text{ luego } \omega_0 = S(z_0).$$

Para  $n = 1$ :

$$\omega_1 = f(0) + S(c) \text{ y } S(z_1) = S(f(0) + c) = f(S(0)) + S(c) = f(0) + S(c), \text{ luego } \omega_1 = S(z_1).$$

ii) Supongamos cierto para  $n = k$ :

$$\omega_k = S(z_k), \text{ esto es } f(\omega_{k-1}) + S(c) = S(f(z_{k-1}) + c);$$

veamos que se cumple para  $n = k + 1$ , esto es  $\omega_{k+1} = S(z_{k+1})$ . Partiendo de la hipótesis de inducción matemática, tenemos:

$$f(\omega_{k-1}) + S(c) = S(f(z_{k-1}) + c);$$

$$f(f(\omega_{k-1}) + S(c)) = f(S(f(z_{k-1}) + c));$$

$$f(f(\omega_{k-1}) + S(c)) + S(c) = f(S(f(z_{k-1}) + c)) + S(c); \tag{1}$$

como  $S$  conmuta iterativamente con  $f$  tenemos que

$$f(S(f(z_{k-1}) + c)) + S(c) = S(f(f(z_{k-1}) + c) + c), \text{ y reemplazándolo en (1),}$$

$$f(f(\omega_{k-1}) + S(c)) + S(c) = S(f(f(z_{k-1}) + c) + c), \text{ y como } z_k = f(z_{k-1}) + c \text{ y } \omega_k = f(\omega_{k-1}) + S(c), \text{ tenemos } f(\omega_k) + S(c) = S(f(z_k) + c), \text{ por lo tanto}$$

BIBLIOTECA UIS

$$\omega_{k+1} = S(z_{k+1}).$$

Como i y ii se cumple, la proposición es verdadera.

**Definición 4.5** Sea  $\{z_n\}$  una sucesión; diremos que es una **sucesión acotada** si existen  $z \in \mathbb{C}$  y  $r > 0$  tales que  $\{z_n\} \subseteq B(z; r)$ , es decir,  $|z - z_i| < r, \forall z_i \in \{z_n\}$ .

**Proposición 4.2** Sea  $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua. Si  $\{z_n\}$  es acotada, entonces  $S(\{z_n\})$  es acotada.

**Demostración.** Puesto que  $\{z_n\}$  es acotado, tenemos que para algunos  $a \in \mathbb{C}$  y  $r > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{z_n\} \subseteq B(a, r)$ , y esta bola está contenida en su adherencia; así,  $\{z_n\} \subseteq B(a, r) \subseteq \overline{B(a, r)}$ , pero  $\overline{B(a, r)}$  es un conjunto compacto (ya que es cerrado y acotado), y como  $S$  es continua,  $S(\overline{B(a, r)})$  es un compacto (ya que es la imagen continua de un compacto) y tenemos  $S(\{z_n\}) \subseteq S(B(a, r)) \subseteq S(\overline{B(a, r)})$ ;  $S(\overline{B(a, r)})$  es cerrado y acotado, y por tanto tenemos como consecuencia que  $S(\{z_n\})$  es acotado.

Puesto que  $\omega_n = S(z_n)$  según la proposición 4.1, dado que  $S$  es continua y  $z_n$  acotada entonces, aplicando la anterior proposición,  $\omega_n$  es acotada. Si además  $S$  es un homeomorfismo, entonces existe la función  $S^{-1}$  que es también continua, luego  $S^{-1}(\omega_n) = S^{-1}(S(z_n)) = z_n$ , y como  $\omega_n$  es acotada, aplicando la proposición anterior se tiene que  $S^{-1}(\{\omega_n\})$  es acotado, lo cual implica que  $\{z_n\}$  tiene que ser acotada, y en este caso tenemos que  $z_n$  es acotada si y solo si  $\omega_n$  es acotada, lo cual se utiliza en la demostración de la proposición 3.1.

Para el corolario 3.1, como se observó en el capítulo anterior, se definió la función  $S(z) = \bar{z}$ , que representa la reflexión en el eje real. Veamos que en realidad  $S$  es un homeomorfismo.

**Proposición 4.3**  $S(z) = \bar{z}$  es un homeomorfismo.

**Demostración.** Dado que  $S$  es una isometría y, según el teorema 1.2,  $S$  es una función biyectiva, para demostrar que  $S$  es un homeomorfismo bastaría con demostrar que  $S$  es bicontinua.

i) Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \varepsilon$  tal que si

$|z_0 - z_1| < \delta$  entonces  $|z_0 - z_1| = |\overline{z_0 - z_1}| = |\overline{z_0} - \overline{z_1}| = |S(z_0) - S(z_1)| < \varepsilon$  y  $S$  es continua.

ii) Como  $S$  es biyectiva, existe  $S^{-1}$ , y puesto que  $S$  es una reflexión, al componer  $S$  dos veces obtendremos la identidad, es decir  $S(S(z)) = \bar{z}$ , lo cual implica que  $S^{-1}(z) = S(z)$  y por lo tanto  $S^{-1}$  es continua.

Ahora para los axiomas 3.2 y 3.3 tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 4.4** Si  $S$  es una rotación,  $S(z) = az$ , donde  $a = e^{\frac{2\pi i}{k}}$ , entonces  $S$  es un homeomorfismo.

**Demostración.** Análogamente a la anterior proposición,  $S$  es una isometría y por lo tanto es una función biyectiva, así que necesitamos demostrar únicamente que  $S$  es bicontinua.

i) Veamos que  $S$  es continua, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $|S(z_0) - S(z_1)| < \varepsilon$ ,

$$\left| e^{\frac{2\pi i}{k}}(z_0 - z_1) \right| < \varepsilon;$$

$$\left| e^{\frac{2\pi i}{k}} \right| |z_0 - z_1| < \varepsilon;$$

$$|z_0 - z_1| < \frac{\varepsilon}{\left| e^{\frac{2\pi i}{k}} \right|}.$$

De esta manera, sea  $\delta = \frac{\varepsilon}{\left| e^{\frac{2\pi i}{k}} \right|}$ ; obviamente  $\delta > 0$  para todo  $\varepsilon > 0$ , y así  $S$  es continua.

SIN RESERVA DE DERECHOS

ii) Puesto que  $S$  es biyectiva, existe  $S^{-1}$ , y como  $S$  es una rotación en el sentido contrario a las manecillas del reloj, tenemos

$$S^{-1}(z) = ze^{-\frac{2\pi i}{k}}; \text{ veamos que } S^{-1} \text{ también es continua:}$$

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \quad |S^{-1}(z_0) - S^{-1}(z_1)| < \varepsilon;$$

$$\left| e^{-\frac{2\pi i}{k}}(z_0 - z_1) \right| < \varepsilon;$$

$$\left| e^{-\frac{2\pi i}{k}} \right| |z_0 - z_1| < \varepsilon;$$

$$|z_0 - z_1| < \frac{\varepsilon}{\left| e^{-\frac{2\pi i}{k}} \right|}.$$

Con lo cual basta tomar  $\delta = \frac{\varepsilon}{\left| e^{-\frac{2\pi i}{k}} \right|}$ , y así  $S^{-1}$  es continua.

A continuación analizaremos un resultado muy importante sobre la estructura del conjunto clásico de Mandelbrot, el cual es aprovechado por los autores para plantear el método que completa la prueba de la primera observación del artículo. Antes se recuerdan dos definiciones.

**Definición 4.6** La sucesión  $\{z_n\}$  se dice **convergente** y converge a  $L$ , si  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $\forall n > N, \quad |z_n - L| < \varepsilon$ .

Si una sucesión no converge se dice, como es lo más natural, que **diverge**. Veamos la siguiente definición que nos presentará un caso de una sucesión divergente.

**Definición 4.7** Una sucesión  $\{z_n\}$ , **diverge hacia el infinito** (denotado como  $\{z_n\} \rightarrow \infty$ ) si para todo número positivo  $M$  existe  $N \in \mathbb{Z}^+$  tal que:  $n > N$  implica  $|z_n| > M$ .

Hay que tener en cuenta que si una sucesión diverge, no necesariamente diverge hacia el infinito, lo que sucedería con  $\{z_n\} = (-1)^n$  pues la magnitud de sus términos nunca es mayor que 1; de esta manera, cuando una sucesión no converge ni diverge al infinito, diremos que es una sucesión **oscilante**.

Con los conceptos anteriores recordaremos la definición del conjunto clásico de Mandelbrot que se presentó en la sección 2.5.

Sea  $f(z) = z^2 + c$  donde  $z, c \in \mathbb{C}$ , y definamos la sucesión  $\{z_n\}$  donde  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = f(z_0)$ ,  $z_2 = f(z_1)$ , etcétera.

Así, cada elemento de la sucesión se determina por

$$z_n = z_{n-1}^2 + c \quad (\text{donde } z_0 = 0),$$

y el conjunto de Mandelbrot se genera al considerar todos los valores de  $c$  para los cuales la sucesión  $\{z_n\}$  no diverge hacia el infinito<sup>1</sup>.

La siguiente proposición nos permitirá establecer un acotamiento para el conjunto clásico de Mandelbrot, donde haremos uso de la desigualdad

$$|u + v| \geq |u| - |v| \geq 0 \quad (\text{siempre que } |u| \geq |v|)^2. \quad (*)$$

**Proposición 4.5** *El conjunto clásico de Mandelbrot está contenido en un círculo de centro en el origen y de radio 2 en el plano complejo.*

**Demostración.** Basta ver que los puntos que están por fuera del círculo de radio 2 no pertenecen al conjunto clásico de Mandelbrot.

Supongamos que  $|c| > 2$ ; podemos entonces comprobar que la sucesión  $z_n = z_{n-1}^2 + c$  diverge hacia el infinito; puesto que  $z_0 = 0$ , tenemos que  $z_1 = f(z_0) = c$ , así que  $|z_1| = |c| > 2$ ; como  $z_2 = f(z_1) = z_1^2 + c$ , así  $|z_2| = |z_1^2 + c| = |z_1| \left| z_1 + \frac{c}{z_1} \right|$ , y aplicando la desigualdad (\*), tenemos que

---

<sup>1</sup>Una manera equivalente de definir el conjunto clásico de Mandelbrot es:  $M(2)$  es el conjunto de los  $c \in \mathbb{C}$  tales que la órbita del cero no escapa al infinito, según la sucesión  $z_n = z_{n-1}^2 + c$ .

<sup>2</sup>La demostración de ésta desigualdad la podemos revisar en [7]

$|z_2| \geq |z_1| \left( |z_1| - \frac{|c|}{|z_1|} \right)$  y como  $z_1 = c$ ,

$|z_2| \geq |c| (|c| - 1) > |c|$  ya que  $(|c| - 1) > 1$ ;

continuando tenemos que

$|z_3| = |z_2^2 + c| = |z_2| \left| z_2 + \frac{c}{z_2} \right| \geq |z_2| \left( |z_2| - \frac{|c|}{|z_2|} \right)$ ,

y puesto que  $|z_2| > |c|$  tenemos que  $\frac{|c|}{|z_2|} < 1$  y  $|z_2| - \frac{|c|}{|z_2|} > |c| - 1$ , luego

$|z_3| > |z_2| (|c| - 1) > |c| (|c| - 1)(|c| - 1) = |c| (|c| - 1)^2$ ;

prosiguiendo de esta manera podemos mostrar que

$|z_4| > |c| (|c| - 1)^3$ ,

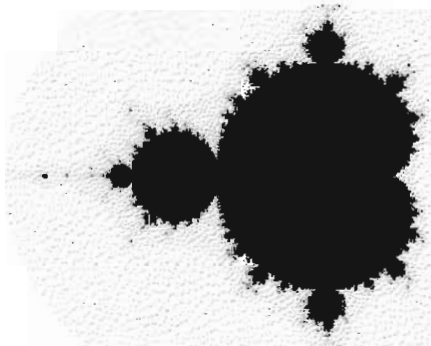
y en general, para  $n \geq 3$  obtenemos

$|z_n| > |c| (|c| - 1)^{n-1}$ ;

y dado que el lado derecho de esta desigualdad tiende hacia infinito cuando  $n \rightarrow \infty$ , la norma de los términos de la sucesión  $\{z_n\}$  aumenta arbitrariamente, y por tanto la sucesión diverge hacia infinito.

De esta manera, el conjunto clásico de Mandelbrot no contiene puntos tales que  $|c| > 2$ .

Veamos que para  $|c| = 2$  existe un punto que pertenece al conjunto clásico de Mandelbrot. Sea  $c = -2$ ; se tiene  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = -2$ ,  $z_2 = 2$ ,  $z_3 = 2$ , y en general  $z_n = 2$  para  $n \geq 2$ ; luego la sucesión converge a 2, de modo que  $c = -2$  pertenece al conjunto clásico de Mandelbrot. Si observamos la gráfica del conjunto fácilmente reconoceremos que éste es el único punto que está más lejos del origen.



El conjunto clásico de Mandelbrot

El método utilizado por los autores del artículo para demostrar que no existen otras isometrías de los conjuntos de Mandelbrot y Mandelbar emplea el resultado de una regularidad en sus conjuntos generalizados, y es que sólo para  $p$  par se pueden hallar los puntos más alejados con respecto al origen y que son precisamente  $p - 1$  puntos para  $M(p)$  tales que  $|c|^{p-1} = 2$ ; por lo tanto podemos afirmar que los números  $c$  tales que  $|c|^{p-1} > 2$  no están en  $M(p)$ , como en la proposición anterior para  $p = 2$ . Para  $\overline{M}(p)$  son los  $p + 1$  puntos que cumplen  $\frac{\overline{c}^p}{c} = -2$  los que están más alejados del origen<sup>3</sup>.

Además, estos puntos en cada conjunto están en una circunferencia, por consiguiente estos puntos los podemos llamar “vértices” para hacer una analogía con el método utilizado para los polígonos regulares, que es el mismo presentado en el capítulo 1 con las proposiciones 1.2 y 1.3; de esta forma, el método no presenta mayor dificultad y tiene éxito para demostrar que las únicas isometrías que dejan invariantes los conjuntos  $M(p)$  y  $\overline{M}(p)$  son  $p - 1$  y  $p + 1$ , respectivamente. Pero, valga nuevamente la aclaración, sólo para  $p$  par.

Para  $p$  impar no se ha encontrado ningún método que garantice, lo que fácilmente se puede comprobar con la gráfica de estos conjuntos: que no hay más isometrías que los dejen invariantes, ya que para  $p$  impar no se tiene las mismas características que para  $p$  par, es decir, no se pueden ubicar con facilidad los puntos más alejados. Por lo tanto, el método de demostración utilizado no tiene éxito en este caso. Algo similar ocurre con los conjuntos de Julia y hasta hoy no se conoce método de demostración y permanece como un problema abierto.

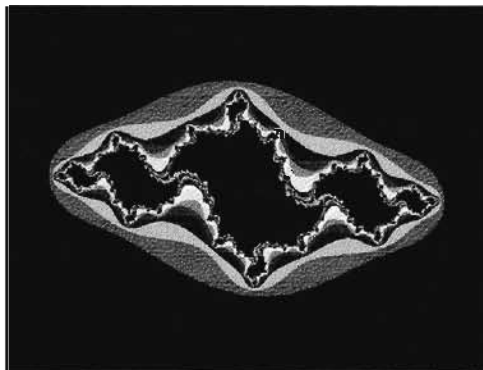
Para las proposiciones 3.2 y 3.3 de la sección *Isometrías de los conjuntos de Julia* se utilizan las mismas proposiciones que ya hemos visto en este capítulo, por lo que sus demostraciones resultan bastante sencillas.

Utilizando la versión 18.21 para Windows del programa **Fractint** se comprobaron

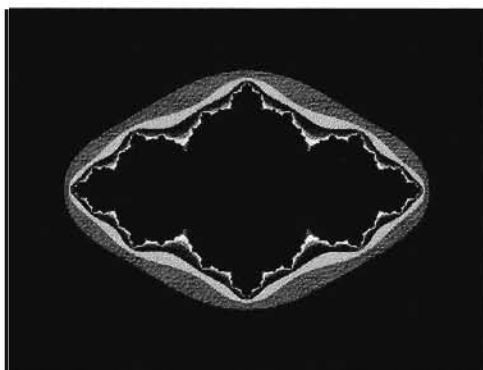
---

<sup>3</sup>El desarrollo de estos temas bien podría ser material para otra monografía.

gráficamente los resultados para algunos conjuntos de Julia asociados al conjunto clásico de Mandelbrot.



El conjunto de Julia  $J(2, c)$ , donde  $c = -0,95 + 0,2i$ ; el grupo de simetría es  $C_1$ , porque  $c$  no está sobre un eje de simetría de  $M(2)$ .



El conjunto de Julia  $J(2, c)$ , donde  $c = -0,65$ , tiene grupo de simetría  $D_2$ , ya que  $c$  está sobre el único eje de simetría de  $M(2)$ .

# Conclusiones

1. Los conjuntos generalizados de Mandelbrot  $M(p)$  generados por la iteración  $z_{n+1} = z_n^p + c$  tienen grupos de simetrías  $D_{p-1}$ .
2. Los conjuntos generalizados de Mandelbar  $\overline{M}(p)$  generados por la iteración  $z_{n+1} = \overline{z}_n^p + c$  tienen grupos de simetrías  $D_{p+1}$ .
3. Los conjuntos de Julia de puntos interiores de  $M(p)$  (ó  $\overline{M}(p)$ ) tienen grupos de simetrías  $C_p$  ó  $D_p$ , dependiendo de si el punto semilla está sobre o fuera de un eje de simetría del conjunto padre Mandelbrot (o Mandelbar).
4. El conjunto de Cantor y la curva de Koch tienen grupo de simetrías  $D_1$ , y el triángulo de Sierpinski grupo de simetrías  $D_3$ ; en general, los fractales determinísticos poseen una gran cantidad de simetrías, luego esto explica el sentimiento de belleza que nos producen a primera vista.
5. Este tema de los grupos de simetrías establece un problema abierto, que es el de demostrar que no existen otras isometrías de  $\mathbb{R}^2$  diferentes de las ya encontradas y que dejen invariantes los conjuntos generalizados de Mandelbrot y Mandelbar cuando  $p$  es impar y en general para los conjuntos de Julia.
6. Aunque los fractales se pueden ver como una representación matemática del caos, el estudio de sus simetrías nos presenta estos objetos como formas armoniosas y bien proporcionadas, lo cual parece contradictorio y aumenta su misterio.

# Bibliografía

- [ 1 ] ALEXANDER C., GIBLIN I., NEWTON D. *Symmetry Groups of Fractals. The Mathematical Inteligencer*, Vol. 14, N<sup>o</sup>2, 1992, págs. 32-38.
- [ 2 ] BAUMSLAG Benjamín, CHANDLER Bruce. *Teoría de grupos*. McGraw-Hill, 1972.
- [ 3 ] BURTON David M. *Abstract and Linear Algebra*. Addinson-Wesley, 1972.
- [ 4 ] COXETER H. *Fundamentos de geometría*. Limusa-Willey, México,1971.
- [ 5 ] EVES Howard. *Estudio de las geometrías*, tomo 1. Hispano-Americana, México, 1969.
- [ 6 ] FLÓREZ Esperanza. *Una reseña histórica de la geometría fractal*. Monografía, Lic. matemáticas, UIS, 1995.
- [ 7 ] HAUSER Arthur. *Variable compleja*. Fondo educativo interamericano, 1973.
- [ 8 ] HERSTEIN I. *Álgebra moderna*. Editorial Trillas, México, 1988.
- [ 9 ] <http://Spanky.triumf.ca/>
- [ 10 ] <http://www.swin.edu.au/astronomy/pbourke/fractals/>
- [ 11 ] ISAACS Rafael, SABOGAL Sonia. *Cursillo taller de fractales*. UIS, 1998.
- [ 12 ] JAFFE H., ORCHIN Milton, *Simetría en química*. Alhambra, Madrid, 1967.
- [ 13 ] MANDELBROT Benoit. *Los objetos Fractales*. Tusquets Editores, Barcelona, 1988.
- [ 14 ] TATON René y otros. *Historia general de las ciencias*, volumen 3. Ediciones Destino, Barcelona, 1973.
- [ 15 ] WEYL Hermann. *Simetría*. McGraw-Hill, Madrid, 1990.

# Anexo

# Symmetry Groups of Fractals

C. Alexander, I. GIBLIN, and D. Newton

This paper contains computer pictures of generalised Mandelbrot and Mandelbar sets, and their associated Julia sets, from which it is evident that their symmetry groups possess an elegant and simple structure. We show that (i) the Mandelbrot set  $M(p)$  generated by the iteration  $z_{i+1} = z_i^p + c$  remains invariant under the symmetry transforms of the dihedral group  $D_{p-1}$  (i.e., these are isometries of  $M(p)$ ); (ii) the Mandelbar set  $\bar{M}(p)$  is invariant under the isometries in  $D_{p-1}$ ; and (iii) the Julia sets of points inside  $M(p)$  (or  $\bar{M}(p)$ ) are invariant under the isometries in either  $D_p$  or just the cyclic

group  $C_p$ , depending on whether the seed point is on or off a symmetry axis of the parent Mandelbrot (or Mandelbar) set. The proofs are relatively easy, but showing that there are *no other* isometries of these sets is not so straightforward. As is often the case in the theory of chaos, what is obvious geometrically is difficult to prove analytically. For the generalised Mandelbrot and Mandelbar sets with *even*  $p$  we have in fact proved that the dihedral symmetry transforms are the only isometries of these sets, but the method does not appear to be applicable to *odd*  $p$ , or to the Julia sets.



David Newton    Carol Alexander    Ian Giblin

Carol Alexander obtained her Ph.D. from the University of Sussex in 1980 and, five years later, an M.Sc. from the London School of Economics. She has been a Leverhulme scholar at the University of Amsterdam and stockbroker in the city of London. Now she lectures in mathematics and economics at the University of Sussex, edits the *Handbook of Applicable Mathematics*, and consults for a City bank. Research interests are in algebra, applied econometrics, and game theory; hobbies include skiing and piano playing.

Ian Giblin graduated from the University of Sussex in 1990. Since then he has been working as a research assistant with the Space and Plasma Physics group at Sussex, studying hypervelocity impacts and the outcomes of catastrophic collisions between asteroid-type bodies. As well as his fascination with computer graphics and (not surprisingly) video games, he particularly enjoys clay pigeon shooting and reading comics.

David Newton gained his Ph.D. from the University of Birmingham in 1966 and has been a member of the Mathematics Division at the University of Sussex since 1965. His mathematical interests are in ergodic theory and dynamical systems, and his main hobby is playing contract bridge.

## The Symmetry of Fractals

Deterministic fractals possess an incredible amount of symmetry. Indeed, one of their fundamental properties is that of "self-similarity" or "scale-invariance." This could be taken to mean that a deterministic fractal is a fixed point of certain types of contraction mapping (Barnsley, 1988), for example, a similitude (an affine transformation which preserves angles but not distances). But the symmetry of some deterministic fractals may also be described by another type of invariance, under affine transformations that preserve distances as well as angles, i.e., isometries. The set of all such isometries forms the symmetry group of the fractal object.

To distinguish between the two types of invariance we construct a deterministic fractal using the iterative procedure illustrated in Figure 1. At each step every square is replaced by five smaller squares as shown, and the structure becomes a fractal of dimension  $\log_3 5 / \log 3$  as  $k \rightarrow \infty$ . The self-similarity of this object in  $\mathbb{R}^2$  is captured by the similitude  $f(x,y) = \frac{1}{3}(-y, x)$ , i.e., rotation through  $90^\circ$  plus contraction by a scale factor of  $\frac{1}{3}$ . The fractal is a union of five translations of its image under  $f$ , in one-to-one correspondence with its image under  $f$ . On the other hand, the fractal is invariant under two types of orthogonal transformations of  $\mathbb{R}^2$ : rotations through  $90n^\circ$  ( $n = 1, \dots, 4$ ) and reflections through its four axes of symmetry. The complete set of such transformations is of course the dihedral group of order 8

$$D_4 = \{a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1\},$$

where  $a$  denotes a rotation through  $90^\circ$  and  $b$  is any reflection.

The fractal in Figure 1 has a very simple geometric structure, unlike the most famous family of fractals, the Mandelbrot set and its relatives. Self-similarity in the Mandelbrot family is not easy to capture—how could one even attempt to specify a contraction mapping (on the space of non-empty compact subsets of  $\mathbb{C}$  with the Hausdorff metric) which has the Mandelbrot set as fixed point? By contrast, it seems easy enough to

write down its symmetry group: Reflection through the real axis is the only apparent isometry of the Mandelbrot set (in addition to the identity, of course).

For positive integer  $m$  denote by  $C_m$  the cyclic group of order  $m$ , and let

$$D_m = \{a, b \mid a^m = b^2 = (ab)^2 = 1\}.$$

So for  $m \geq 3$ ,  $D_m$  is the symmetry group of rotations and reflections of a regular plane  $m$ -gon,  $D_2 \cong C_2 \times C_2$  the Klein four group, and  $D_1 \cong C_2$ .

Now for a fixed positive integer  $p$  and complex numbers  $z$  and  $c$ , let  $P(z,c;p) = z^p + c$  and  $Q(z,c;p) = \bar{z}^p + c$ . If  $F^n$  denotes  $n$ -fold composition of the function  $F$ , then

$$M(p) = \{c \in \mathbb{C} \mid P^n(0,c;p) \rightarrow \infty\}$$

and

$$\bar{M}(p) = \{c \in \mathbb{C} \mid Q^n(0,c;p) \rightarrow \infty\}$$

denote the *generalised Mandelbrot* and *Mandelbar sets*, respectively. These are illustrated in Figures 2 to 7 for the cases  $p = 2, 3$  and 4. For points  $c \in M(p)$ , denote the corresponding Julia set (defined in the next section) by  $J(p,c)$  and, similarly,  $\bar{J}(p,c)$  denotes the Julia sets for points  $c \in \bar{M}(p)$ . Several of these are shown in figures 8 to 13.

The geometry of these pictures of Mandelbrot, Mandelbar and Julia sets promotes the following observations on the structure of their symmetry groups:

1. For every integer  $p \geq 2$ ,  $M(p)$  has symmetry group  $D_{p-1}$  and  $\bar{M}(p)$  has symmetry group  $D_{p+1}$ .
2. Let  $S(p)$  denote the symmetry axes of  $M(p)$ . Then  $J(p,c)$  has symmetry group  $C_p \Leftrightarrow c \notin S(p)$  and symmetry group  $D_p \Leftrightarrow c \in S(p)$ .
3. The symmetry groups of the Mandelbar Julia sets have the same structure as those of the Mandelbrot Julia sets, according as  $c$  is taken off or on a symmetry axis of  $\bar{M}(p)$ .

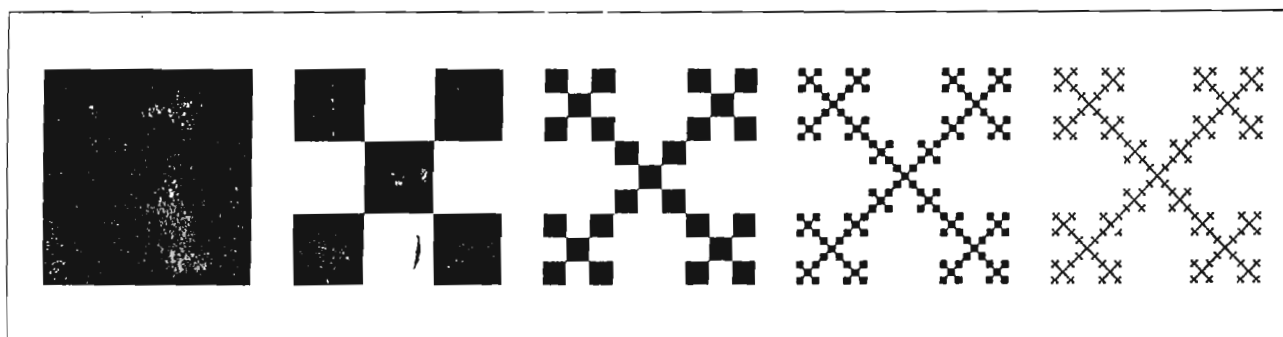


Figure 1. A deterministic fractal of dimension  $\log_3 5 / \log 3$ .

Mandelbar sets do not have obvious "spikes," as they do for even  $p$ . From Figure 4 the farthest point in  $M(3)$  seems to be approximately  $c = 0.32779878 + 1.290829i$ , but this does not appear to have any special numerical properties, and iteration  $z_{n+1} = z_n^3 + c$  does not converge in the straightforward manner that is characteristic of the farthest points when  $p$  is even. In short, we have only proved that every rotational symmetry of  $M(p)$  has order  $p-1$  and every rotational symmetry of  $\bar{M}(p)$  has order  $p+1$  for even  $p$ . The proof for odd  $p > 1$  remains an open problem.

### Isometries of Julia Sets

Now let's look at our second and third observations on the pictures about symmetry groups of Julia sets.

Let  $c \in M(p)$  and consider the IS  $\{z_n\}$  associated with a function  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  defined by

$$z_{n+1} = f(z_n) + c.$$

The filled-in Julia set associated with  $c$  and  $f$  is

$$\text{Jul}(f,c) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid \text{the IS associated with } f \text{ is bounded}\}.$$

Finally,  $J(p,c) = \partial \text{Jul}(f,c)$  for  $f(z) = z^p$  and  $\bar{J}(p,c) = \partial \text{Jul}(f,c)$  for  $f(z) = \bar{z}^p$ .

**PROPOSITION 2:** *The Julia sets  $J(p,c)$  are invariant under rotations of order  $p$  for all  $c \in M(p)$ . If  $c$  lies on a symmetry axis of  $M(p)$ , then  $J(p,c)$  have reflectional symmetry also.*

*Proof:* Suppose that  $s: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  is a homeomorphism such that  $f(s(z)) = f(z)$ . Then clearly  $z_0 \in \text{Jul}(f,c)$  if and only if  $s(z_0) \in \text{Jul}(f,c)$ , so  $s$  is a symmetry of  $\text{Jul}(f,c)$ . Now let  $f(z) = z^p$  and consider a rotation of order  $p$ ,  $s(z) = az$  where  $a^p = 1$ . Clearly  $s$  is a homeomorphism and  $f(s(z)) = f(z)$ , so  $s$  is a symmetry of  $\text{Jul}(f,c)$ .

If  $c$  lies on a symmetry axis of  $M(p)$  there exists a reflection  $s$  in the symmetry group of  $M(p)$  such that  $s(c) = c$ . We claim that such an  $s$  is also an isometry of  $J(p,c)$ . Let  $z_0 \in \text{Jul}(f,c)$  begin the IS  $\{z_n\}$  with  $f(z) = z^p$  and  $s(c) = c$ . Let  $w_0 = s(z_0)$  and consider the IS  $\{w_n\}$  defined by

$$w_{n+1} = w_n^p + c.$$

Now

$$w_n = s(z_n) \Rightarrow w_{n+1} = s(z_n)^p + c = s(z_n^p) + c = s(z_{n+1})$$

so, since also  $s$  is a homeomorphism,  $\{w_n\}$  is bounded if and only  $\{z_n\}$  is bounded, i.e.,  $z_0 \in \text{Jul}(f,c) \Leftrightarrow s(z_0) \in \text{Jul}(f,c)$ .

Finally, these symmetries of  $\text{Jul}(f,c)$  must be isometries of  $J(p,c)$  since they are orthogonal transformations and  $J(p,c) = \partial \text{Jul}(f,c)$  for  $f(z) = z^p$ . Since the rotations of

order  $p$  form the cyclic group  $C_p$ , and adding a reflection to this yields the dihedral group  $D_p$ , we have shown that the isometries of  $J(p,c)$  include these groups.

**PROPOSITION 3:** *The Julia sets  $\bar{J}(p,c)$  are invariant under rotations of order  $p$  for all  $c \in \bar{M}(p)$ . If  $c$  lies on a symmetry axis of  $\bar{M}(p)$ , then also  $\bar{J}(p,c)$  has reflectional symmetry.*

*Proof:* Take  $f(z) = \bar{z}^p$  and  $s$  to be a rotation  $s(z) = az$  with  $a^p = 1$  in the proof of proposition 2. The proof of reflectional symmetry when  $c$  lies on a symmetry axis of  $\bar{M}(p)$  proceeds by induction on the iterative sequences  $\{z_n\}$  and  $\{w_n\}$  defined by

$$z_{n+1} = \bar{z}_n^p + c \quad w_{n+1} = \bar{w}_n^p + c$$

just as in proposition 2.

As before, the difficult part is to prove what is obvious geometrically—that the Julia sets are *not* invariant under rotations other than those of order  $p$ . In the absence of obvious "spikes," as we have for  $M(p)$  and  $\bar{M}(p)$  when  $p$  is even, our method of proof has not succeeded. It may be that a different approach is called for!

### Colour Maps used in the Generation of the Figures

Figures 2 to 13 (also shown in color on the cover) use a modified version of a map suggested by Clifford Pickover (1990). The method consists of examining the size of points in the sequence  $P^n(0,c;p)$  (for the

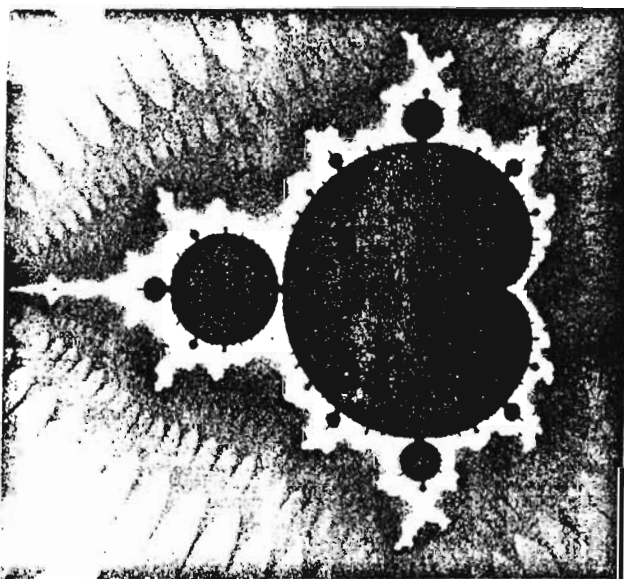


Figure 2. The Mandelbrot set  $M(2)$ . The real axis is its only axis of symmetry, so  $M(2)$  has symmetry group  $D_1$ , the dihedral group of order 2 ( $\cong C_2$ , the cyclic group of order 2).

## Isometries of Mandelbrot and Mandelbar Sets

Consider the first observation above. It appears from the figures that  $M(p)$  cannot be invariant under an isometry of the complex plane which is not in  $D_{p-1}$ , but do the transforms of  $D_{p-1}$  in fact leave  $M(p)$  invariant? Similarly, is  $\overline{M}(p)$  really invariant under the rotations and reflections of  $D_{p+1}$ , or is there some isand, some distorted copy of  $M(p)$  in  $\overline{M}(p)$  that introduces an asymmetry? Figure 14 shows a distorted copy of  $M(2)$  in  $\overline{M}(2)$ , but we know that this does not introduce an asymmetry into  $\overline{M}(2)$  because Crowe *et al.* (1989) have shown that  $\overline{M}(2)$  is invariant under rotations about the origin through  $2\pi/3$  and reflections through its symmetry axes.

To find isometries of  $M(p)$  and  $\overline{M}(p)$ , we introduce the Mandel set  $\text{Man}(f)$  of a function  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Let  $c \in \mathbb{C}$  and define  $\{z_n\}$ , the iterative sequence (IS) associated with  $c$ , by

$$z_0 = 0$$

and for  $n > 0$

$$z_{n+1} = f(z_n) + c.$$

Then

$$\text{Man}(f) = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{the IS associated with } c \text{ is bounded}\}.$$

Now consider a continuous function  $s: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . We say that  $s$  iteratively-commutes with  $f$  if for all  $z \in \mathbb{C}$  and  $c \in \mathbb{C}$

$$f(s(z)) + s(c) = s(f(z) + c).$$

We now show that iteratively-commutative homeomorphisms with fixed-point at the origin leave  $\text{Man}(f)$  invariant:

**PROPOSITION 1:** *If  $s$  iteratively-commutes with  $f$  and  $s(0) = 0$ , then  $s(\text{Man}(f)) \subseteq \text{Man}(f)$ . If also  $s$  is a homeomorphism, then  $s(\text{Man}(f)) = \text{Man}(f)$ .*

*Proof:* For  $c \in \text{Man}(f)$  let  $\{z_n\}$  be the IS associated with  $c$  and let  $\{w_n\}$  be the IS associated with  $s(c)$ . Since  $s(0) = 0$  and  $f(s(z)) + s(c) = s(f(z) + c)$ , then a simple induction shows that  $w_n = s(z_n)$ . Since  $s$  is continuous and  $\{z_n\}$  is bounded,  $\{w_n\}$  must also be bounded, so  $s(c) \in \text{Man}(f)$ . Now if  $s$  is homeomorphism, then  $\{z_n\}$  is bounded if and only if  $\{w_n\}$  is bounded, so  $c \in \text{Man}(f)$  if and only if  $s(c) \in \text{Man}(f)$ .

From this general proposition we deduce three corollaries about isometries of the Mandelbrot and Mandelbar sets: let  $f(z) = z^p$  and  $g(z) = \overline{z}^p$ .  $p$  an integer  $\geq 2$ , so that  $\text{Man}(f) = M(p)$  and  $\text{Man}(g) = \overline{M}(p)$ .

**COROLLARY 1:** *Reflection in the real axis is an isometry of both  $M(p)$  and  $\overline{M}(p)$ .*

*Proof:* Define  $s(z) = \overline{z}$ , so  $s(0) = 0$  and clearly  $s$  is a homeomorphism. Furthermore,

$$\overline{z^p} + \overline{c} = (\overline{z^p + c})$$

and

$$z^p + \overline{c} = \overline{(\overline{z^p} + c)},$$

so by the proposition  $s(M(p)) = M(p)$  and  $s(\overline{M}(p)) = \overline{M}(p)$ . Since  $s$  also preserves distance, it is an isometry of  $M(p)$ , and of  $\overline{M}(p)$ .

**COROLLARY 2:** *Rotations about the origin of order  $p-1$  are isometries of  $M(p)$ .*

*Proof:* Let  $s$  be a rotation  $s(z) = az$ , where  $a = \exp(2\pi i/k)$ . Clearly  $s$  is a homeomorphism and  $s(0) = 0$ . To satisfy the commutation condition we need

$$(az)^p + ac = a(z^p + c),$$

which is true if and only if  $a^p = a$ , i.e.,  $a^{p-1} = 1$ . Again, rotations preserve distances, so the fact that  $s(M(p)) = M(p)$  means they are isometries of  $M(p)$ .

**COROLLARY 3:** *Rotations about the origin of order  $p+1$  are isometries of  $\overline{M}(p)$ .*

*Proof:* Let  $s$  be as in corollary 2. In this case the commutation condition becomes

$$(\overline{az})^p + ac = a(\overline{z^p} + c)$$

so we need  $\overline{a}^p = a$ , i.e.,  $a^{p-1} = 1$ .

We have shown that the symmetry group of  $M(p)$  contains  $D_{p-1}$  as a subgroup and that of  $\overline{M}(p)$  has the subgroup  $\overline{D}_{p-1}$ , but to prove our first observation we need to prove that there are no other isometries. The following method works for even  $p$ :

Consider first  $M(p)$ . Now complex numbers  $c$  such that  $|c|^{p-1} > 2$  are not in  $M(p)$ , but when  $p$  is even some  $c$  such that  $|c|^{p-1} = 2$  are in  $M(p)$ , viz., those for which  $|c|^{p-1} + 1 = 1$ . There are exactly  $p-1$  of these points (viz., the complex numbers  $c$  such that  $c^{p-1} = -2$ ). Since these are the points in  $M(p)$  that lie farthest from the origin, there are no other rotational symmetries of  $M(p)$  (and hence no other reflectional symmetries) other than the obvious ones. For the Mandelbar set  $\overline{M}(p)$  it is the  $p+1$  points satisfying  $\overline{c}^p = -2$  which mark the end of the Mandelbar arms, but again only for even  $p$ .

When  $p$  is odd these points are outside the Mandelbrot and Mandelbar sets. Indeed, for odd  $p$  it is no longer an easy matter to locate the points which lie farthest from the origin, since the Mandelbrot and

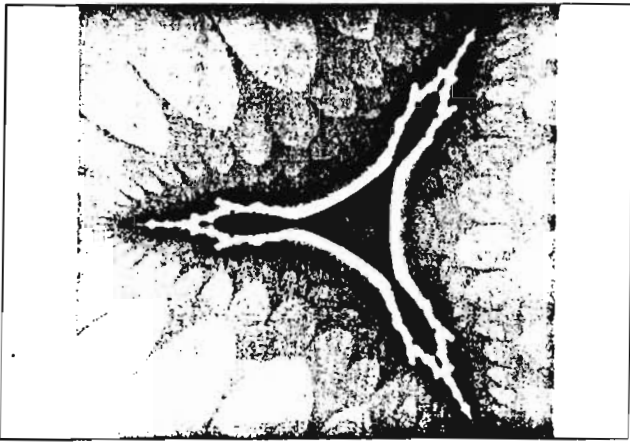


Figure 3. The Mandelbar Set  $\overline{M}(2)$ . This has three symmetry axes, all through the origin, at angles  $0, 2\pi/3$  and  $4\pi/3$  from the real axis. Its symmetry group is  $D_3$ , the dihedral group of order 6.

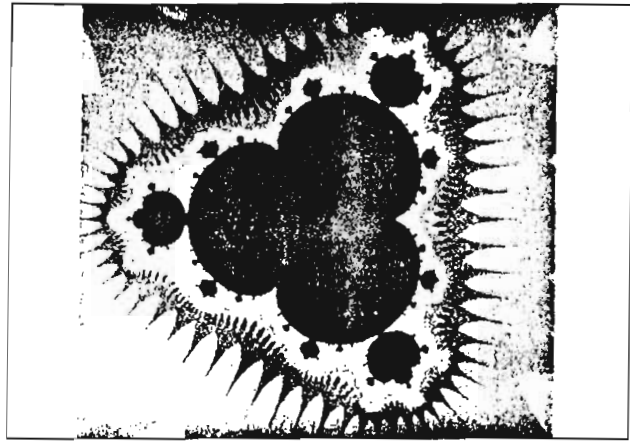


Figure 6. The Generalised Mandelbrot Set  $M(4)$ . These are the complex numbers  $c$  for which the iteration  $z_{n+1} = z_n^4 + c$  is bounded. Its symmetry group is the same as that of  $M(2)$ .

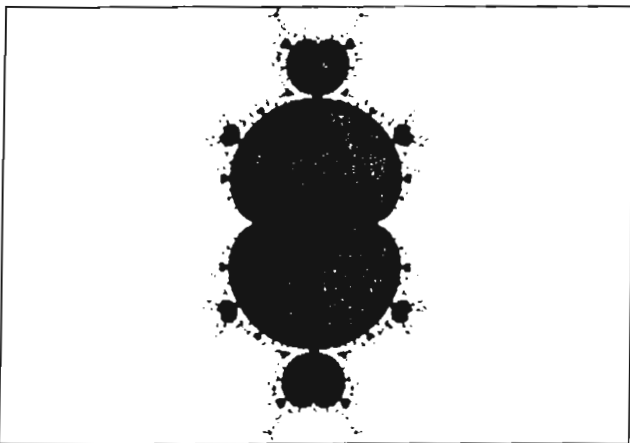


Figure 4. The Generalised Mandelbrot Set  $M(3)$ . These are the complex numbers  $c$  for which the iteration  $z_{n+1} = z_n^3 + c$  is bounded for complex variable  $z$  starting with  $z_0 = 0$ . It has two axes of symmetry—the real axis and the imaginary axis—and its symmetry group is  $D_2$  (isomorphic with the Klein four group,  $C_2 \times C_2$ ).

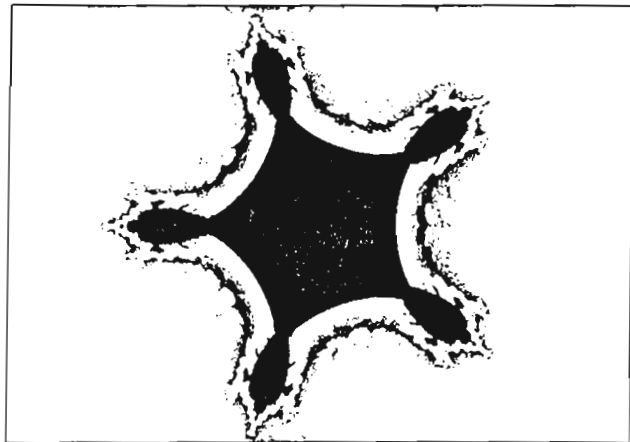


Figure 7. The Generalised Mandelbar Set  $\overline{M}(4)$ . For  $c \in \overline{M}(4)$  the iteration  $z_{n+1} = z_n^4 + c$  is bounded. It has five symmetry axes: the real axis (as usual) and lines through the origin at angles  $\pi/5, 3\pi/5, 7\pi/5$  and  $9\pi/5$  to the real axis. Hence it has symmetry group  $D_5$ .

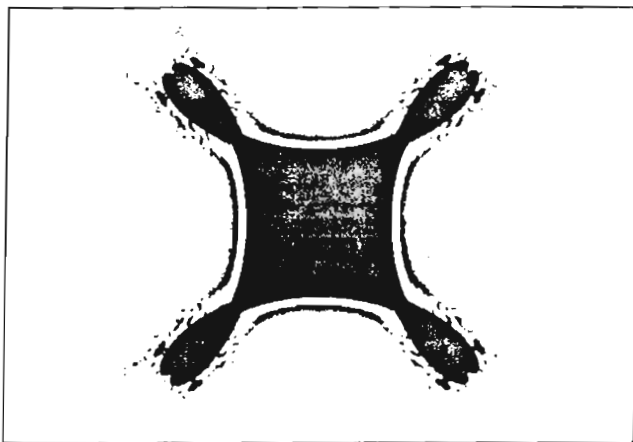


Figure 5. The Generalised Mandelbar Set  $\overline{M}(3)$ . The iteration  $z_{n+1} = \bar{z}_n^3 + c$  is bounded for  $c \in \overline{M}(3)$  (again with complex variable  $z$  starting with  $z_0 = 0$ ). Its four symmetry axes are the real and imaginary axes and lines through the origin at angle  $\pi/4$  to the other symmetry axes, so its symmetry group is  $D_4$ .

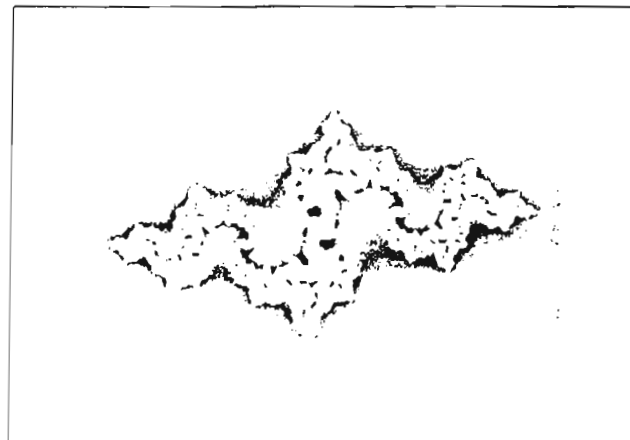


Figure 8. The Julia Set  $J(2, c)$  where  $c = -.874247 - 0.25365i$ . Since  $c$  is not on the symmetry axis of  $M(2)$ , this Julia set has only one rotational symmetry of order 2, i.e., symmetry group  $C_2$ .

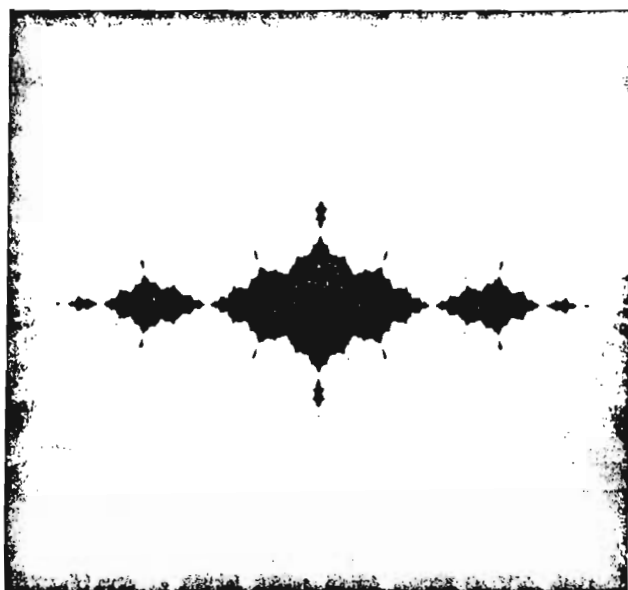


Figure 9. The Julia Set  $J(2, c)$  where  $c = -1.2$ . This time  $c$  does lie on a symmetry axis so it has an extra reflectional symmetry through the axis from which it was seeded, and therefore  $D_2$  is its symmetry group. Had  $c$  been taken from another symmetry axis of  $M(2)$ , the Julia set would have reflectional symmetry through that axis.

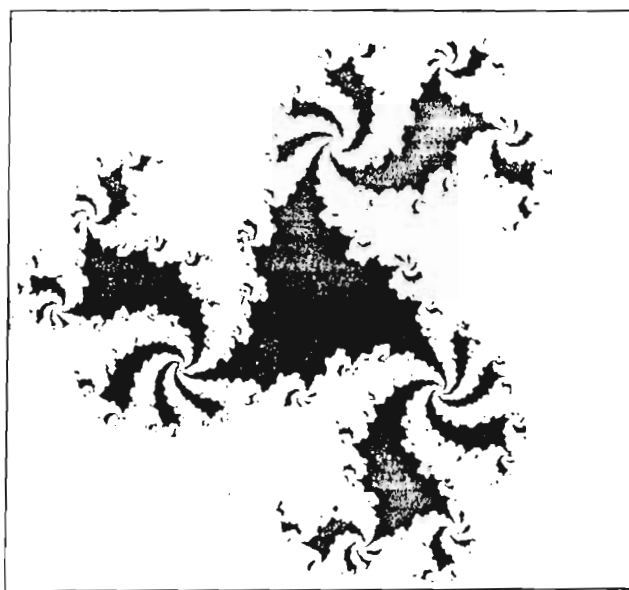


Figure 11. The Julia Set  $J(3, c)$  where  $c = -0.0539041 + 0.13427i$ . Now  $c$  lies off the symmetry axes of  $M(3)$  and so the Julia set has only rotational symmetry of order 3, i.e., symmetry group  $C_3$ .

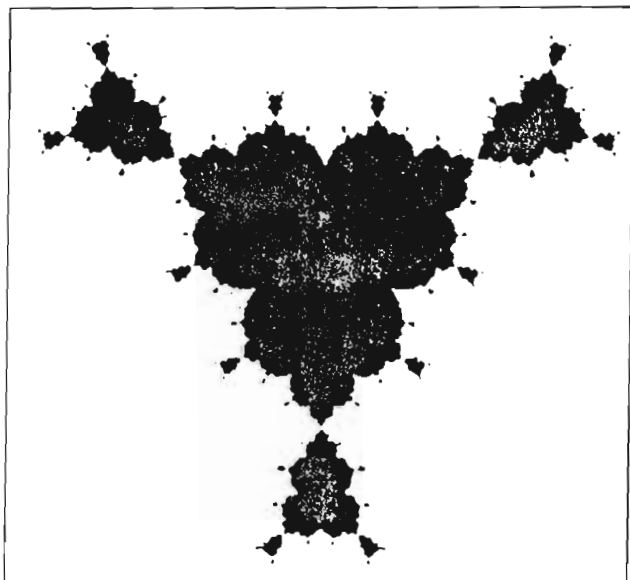


Figure 10. The Julia Set  $J(3, c)$  where  $c = 1.0877i$ . Being purely imaginary,  $c$  lies on a symmetry axis of  $M(3)$  and so its symmetries include reflection through the imaginary axis as well as rotations of order 3. By the closure axiom for groups, the symmetry group also contains reflections through axes obtained by rotating the imaginary axis through  $2\pi/3$  and  $4\pi/3$ , and it has dihedral symmetry group  $D_3$ .

generalised Mandelbar sets the sequence is  $Q^n(0, c; p)$ . First pick a size limit  $d > 2$ , an iteration maximum  $m$ , and a set of colours  $\{C(i)\}$ , where  $i$  denotes the number of iterations required before the size limit is exceeded,

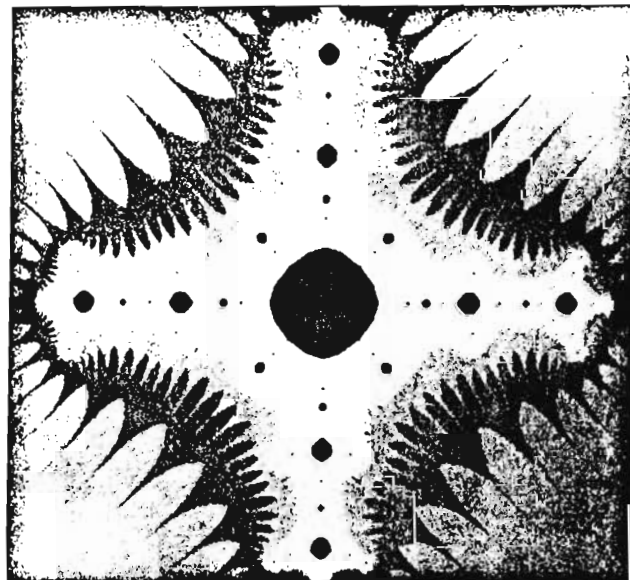


Figure 12. The Julia Set  $J(4, c)$  where  $c = -1.2$ . The symmetry is  $D_4$  because  $c$  lies on a symmetry axis of  $M(4)$ .

if ever, and  $1 < i \leq m$ . Calculate successive  $P^n(0, c; p)$  for  $n = 1, 2, \dots$  until an iteration  $i$  is reached such that either  $|P^i(0, c; p)| > d$  or  $i = m$ . In the latter case the sequence is bounded and  $c$  is coloured black. If  $i < m$  and either  $|\operatorname{Im} P^i(0, c; p)| < d$  or  $|\operatorname{Re} P^i(0, c; p)| < d$ , then colour the point  $c$  with  $C(i)$ . Otherwise colour it  $C(i-1)$ .

An iteration maximum of 500 is used to generate figures 2 to 13, which are all squarely proportioned in

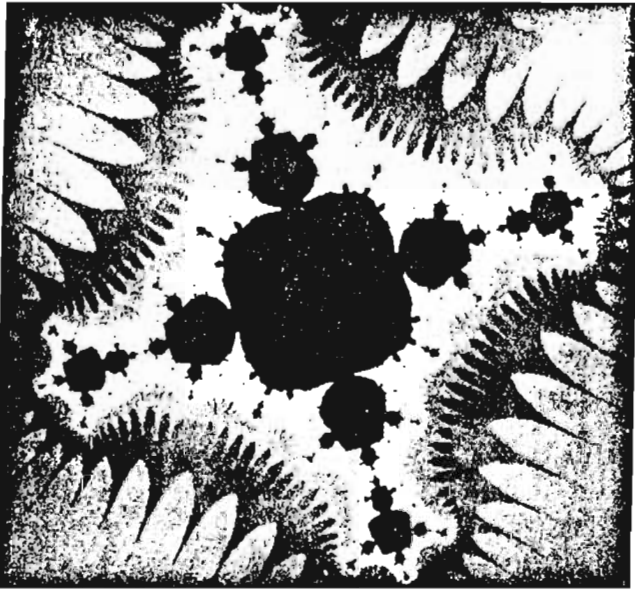


Figure 13. The Julia Set  $\bar{J}(4, c)$  where  $c = -0.3461 + 1.0651i$ . In polar coordinates  $c = (1.1, 3\pi/5)$ , so it lies on the symmetry axis  $S(3\pi/5)$  of  $\bar{M}(4)$ . Hence in addition to rotational symmetry of order 4, the Julia set has reflectional symmetry about  $S(3\pi/5)$ . Group closure implies the other three symmetry axes of the Julia set are rotations of this axis through  $\pi/4$ ,  $\pi/2$ , and  $3\pi/4$ . Notice that these three are *not* symmetry axes of  $\bar{M}(4)$ , so the only symmetry axes they have in common is the symmetry axis from which the Julia set was seeded.

the complex plane (i.e., not stretched in real or imaginary directions), centred at the origin, and of "height" approximately 4. The size limits used were 1500 for  $p = 2$ , 80 for  $p = 3$  and 25 for  $p = 4$ .

Figure 14 was generated using a standard colour map, where the size limit  $d = 4$  and  $c$  is coloured  $C(i)$  whenever the sequence is not bounded. An iteration maximum of 8192 is used, but the program traps orbits of length 64 or less so the image took only a few minutes to generate. It is centred on the point  $-1.19085 + 0.206607i$ , with a height of approximately  $6 \times 10^{-4}$ .

## References

- Barnsley, M., *Fractals Everywhere*, San Diego: Academic Press (1988).
- Crowe, W. D., R. Hasson, P. J. Rippon, and P. E. D. Strain-Clark, "On the Structure of the Mandelbar Set," *Nonlinearity* 2, (1989), 541-553.
- Pickover, C., *Computers, Pattern, Chaos and Beauty*, New York: St. Martin's Press (1990).

School of Mathematical and Physical Sciences  
University of Sussex  
Brighton, Sussex BN1 9QH  
United Kingdom

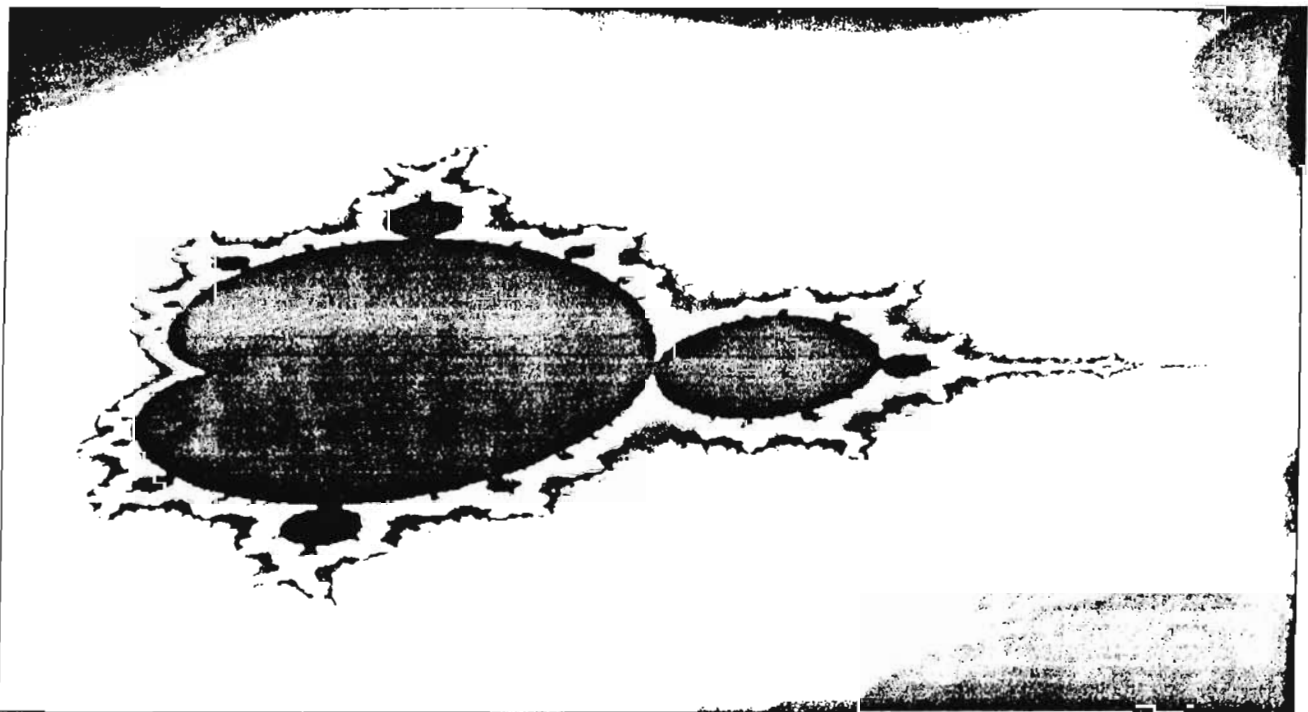


Figure 14. A Distorted Copy of  $M(2)$  in  $\bar{M}(2)$ . To our knowledge it has not been shown that the Mandelbar set is connected. If it is, experiments show that the connecting filaments are infinitely thin (as in the Mandelbrot set) and all contain an infinity of small "islands" such as this. But the order of the attracting cycles in these islands increases as they become smaller, and machine inaccuracies make rigorous boundedness tests very difficult to apply. However, our results show that these islands do not introduce any global asymmetries into the Mandelbrot and Mandelbar sets.