

SEMIGRUPOS NUMÉRICOS IRREDUCIBLES EN \mathbb{N}^d

LUIS ALEJANDRO FORERO ARGEL

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

SEMIGRUPOS NUMÉRICOS IRREDUCIBLES EN \mathbb{N}^d

LUIS ALEJANDRO FORERO ARGEL

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director

Wilson Olaya León

Doctor en Matemáticas

Codirector

Alonso Sepúlveda Castellanos

Doctor en Matemáticas

Universidade Federal de Uberlândia

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2024

DEDICATORIA

A Dios, mi madre, mi abuela, mi padre y a mi hermano.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero expresar mi agradecimiento a Dios por ser mi fortaleza y guiarme en cada etapa de mi vida.

Agradezco profundamente a mi familia por su constante apoyo y motivación a lo largo de toda mi carrera.

Agradezco a mis compañeros y hermanos de carrera, especialmente a Jhonnier, Jamir, Javier, Andrés y otros, por hacer este camino más ameno, y a mis profesores y a la universidad por formarme en esta hermosa área del conocimiento.

Gracias a mis amigos, tanto personales como virtuales de todo el mundo, por sus valiosos consejos, cariño y compañía; los llevo en el corazón.

Quiero también agradecer a mi director de tesis, el profesor Wilson Olaya, por su orientación, apoyo, paciencia y motivación continua. Asimismo, agradezco al codirector de este proyecto, el profesor Alonso Sepúlveda Castellanos, por su inconmensurable apoyo y por enriquecer este trabajo con su colaboración.

Tabla de Contenido

	pág.
Introducción	11
1. Semigrupos Numéricos	13
1.1. Semigrupos y Monoides	13
1.2. Definición, multiplicidad y dimensión	16
1.3. Número de Frobenius y Género	21
1.4. Números Pseudo-Frobenius	31
2. Familias de Semigrupos Numéricos	38
2.1. Semigrupos Numéricos con Dimensión Máxima	38
2.1.1. Semigrupos Numéricos Arf	46
2.1.2. Semigrupos Numéricos Saturados	52
2.2. Semigrupos Numéricos Irreducibles	56
2.2.1. Semigrupos Numéricos Simétricos y Pseudo-simétricos	57
2.2.2. Extensiones Unitarias de un Semigrupo Numérico	62
2.2.3. Descomposición de un Semigrupo Numérico en Irreducibles	67
2.2.4. Lagunas Fundamentales de un Semigrupo Numérico	71
3. Semigrupos Numéricos Generalizados	74
3.1. Preliminares	74
3.2. Semigrupos Numéricos Generalizados Irreducibles	78
3.3. Descomposición de un SNG en SNGs irreducibles	82
3.4. Unicidad del elemento de Frobenius	86
3.5. Fórmulas para SNGs irreducibles y SNGs Frobenius	91
Bibliografía	96
Apéndices	98

Lista de Figuras

	pág.
1.1. $\text{Ap}(S, 11)$ ordenado por \leq_S	34
1.2. Comparación entre $t(S)$ y $f(n) = 2n + 3$	36
2.1. $\mathcal{O}(\langle 6, 7, 9 \rangle)$	64
3.1. SNG en \mathbb{N}^2 y sus lagunas	76
3.2. SNG en \mathbb{N}^3 y sus lagunas	77
3.3. $\mathcal{O}(\mathbb{N}^3 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\})$	83
3.4. SNG en \mathbb{N}^2 con sus lagunas maximales respecto a \leq	91
3.5. $\pi((5, 5))$ en \mathbb{N}^2	93

Lista de Tablas

	pág.
1.1. Número de semigrupos numéricos con número de Frobenius fijo	25
1.2. Sistemas de generadores para semigrupos numéricos con Frobenius fijo . . .	25
1.3. Número de semigrupos numéricos con género fijo	26
1.4. Sistemas de generadores para semigrupos numéricos con género fijo	28
1.5. Elementos de S hasta $r + 1$ generadores.	35

Lista de Apéndices

	pág.
A. Código en SageMath y GAP	98
A.1. Semigrupos numéricos con número de Frobenius y género fijo	98
A.2. Computación del número de Frobenius y género con reducción	101
A.3. Computación de números pseudofrobenius a partir de $\text{Ap}(S, n)$	102
A.4. Tipo de $\langle s, s + 3, s + 3n + 1, s + 3n + 2 \rangle$	104
A.5. Semigrupos numéricos Arf y saturados	106
A.6. Construcción de $\mathcal{O}(S)$	107
A.7. Descomposición de semigrupos en irreducibles y lagunas fundamentales . . .	110
A.8. SNGs Irreducibles	111
A.9. Descomposición de un SNG en SNGs Irreducibles	112

RESUMEN

TÍTULO: SEMIGRUPOS NUMÉRICOS IRREDUCIBLES EN \mathbb{N}^d *

AUTOR: LUIS ALEJANDRO FORERO ARGEL **

PALABRAS CLAVE: SEMIGRUPOS NUMÉRICOS, TEORÍA DE MONOIDES, NÚMERO DE FROBENIUS, PROBLEMA DE FROBENIUS, SEMIGRUPOS NUMÉRICOS IRREDUCIBLES, SEMIGRUPOS NUMÉRICOS GENERALIZADOS, SNG, ALGORITMOS, GAP, SAGEMATH, ÁLGEBRA ABSTRACTA.

DESCRIPCIÓN:

Sea \mathbb{N} el conjunto de los enteros no negativos. Un semigrupo numérico S es un submonoide de \mathbb{N} cuyo complemento es un conjunto finito. En este trabajo se examinan propiedades e invariantes de los semigrupos numéricos y se estudian clases específicas de estos, como los semigrupos numéricos irreducibles y semigrupos numéricos con dimensión máxima. Finalmente, se definen los semigrupos numéricos en \mathbb{N}^d , donde d es un entero mayor a cero, y se extiende el concepto de irreducibilidad a estos, utilizando herramientas computacionales como GAP y SageMath para la construcción y análisis de ejemplos.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Wilson Olaya León, Doctor en Matemáticas. Codirector: Alonso Sepúlveda Castellanos, Doctor en Matemáticas. Universidade Federal de Uberlândia.

ABSTRACT

TITLE: IRREDUCIBLE NUMERICAL SEMIGROUPS ON \mathbb{N}^d *

AUTHOR: LUIS ALEJANDRO FORERO ARGEL **

KEYWORDS: NUMERICAL SEMIGROUPS, MONOID THEORY, FROBENIUS NUMBER, FROBENIUS PROBLEM, IRREDUCIBLE NUMERICAL SEMIGROUPS, GENERALIZED NUMERICAL SEMIGROUPS, GNS, ALGORITHMS, GAP, SAGEMATH, ABSTRACT ALGEBRA.

DESCRIPTION:

Let \mathbb{N} be the set of non-negative integers. A numerical semigroup S is a submonoid of \mathbb{N} whose complement is a finite set. We examine properties and invariants of numerical semigroups and study specific classes, such as irreducible numerical semigroups and numerical semigroups with maximal embedding dimension. Finally, numerical semigroups in \mathbb{N}^d , where d is an integer greater than zero, are defined and the concept of irreducibility is extended to these, using computational tools like GAP and SageMath for the construction and analysis of examples.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Wilson Olaya León, Doctor en Matemáticas. Codirector: Alonso Sepúlveda Castellanos, Doctor en Matemáticas. Universidade Federal de Uberlândia.

Introducción

Sea \mathbb{N} el conjunto de los enteros no negativos y S un subconjunto no vacío de \mathbb{N} . Se dice que S es un *semigrupo numérico* si S es cerrado bajo la suma de \mathbb{N} , tiene el elemento identidad y su complemento respecto a \mathbb{N} es finito.

El estudio de los semigrupos numéricos fue inicialmente motivado por algunas situaciones cotidianas. Para ilustrar esto, considere el problema de pagar sin cambio (también conocido como problema de la moneda). Suponga que desea pagar 7 dólares, sin recibir vuelto, con billetes de 3 y 5 dólares. Claramente, esto no es posible. Luego, además de 7, ¿qué otros valores no se pueden pagar utilizando billetes de 3 y 5 dólares? Una inspección rápida da el siguiente conjunto: $\{1, 2, 4, 7\}$. Observe que en este caso, solo hay un número finito de valores que no se pueden pagar. Sin embargo, si cambia la condición a billetes de 2 y 4 dólares, por ejemplo, no se podría pagar ninguna cantidad impar sin recibir cambio. Esta situación atrajo a matemáticos como Frobenius y Sylvester al final del siglo XIX (ver Ramírez Alfonsín (2005) y Brauer (1942)). De esa manera, surge el problema de Frobenius, que consiste en encontrar una fórmula dependiendo de a_1, \dots, a_n para el mayor entero que no puede escribirse como combinación lineal de a_1, \dots, a_n .

Los semigrupos numéricos se manifiestan en diversos campos de la matemática, como la teoría de códigos (ver Munuera et al. (2000) y Bras-Amorós (2003)) y la teoría de anillos (ver Delgado and Nunez (1987)). Más recientemente, Bras-Amorós (2019) relaciona la teoría de semigrupos numéricos con la música, a través de una conexión entre las escalas musicales ordenadas como ω -monoides (un tipo específico de submonoides de \mathbb{R}) y mostró que cada ω -monoide se puede ver como un múltiplo escalar de un semigrupo numérico con un monoide especial, y Eaton et al. (2020) relacionan uno de los juegos del famoso matemático John Horton Conway, llamado «Acuñaición de Sylver», con varios conceptos y herramientas modernas de los semigrupos numéricos como una manera de aproximar incógnitas dentro de este campo.

Failla et al. (2015) generalizan el concepto de semigrupo numérico para submonoides de \mathbb{N}^d con $d \geq 1$, bajo el nombre de *semigrupos numéricos generalizados*. Desde entonces, diversos autores han generalizado conceptos adyacentes a los semigrupos numéricos y algunas formas de contar estos semigrupos numéricos respecto a invariantes fijos (ver Bernardini et al. (2022), Cisto et al. (2020) y Cisto et al. (2019)).

El objetivo principal de este trabajo es estudiar los semigrupos numéricos y su

respectiva generalización en \mathbb{N}^d a partir de los trabajos de Rosales and García-Sánchez (2009), Failla et al. (2015) y Silva (2022). Para ello, el primer objetivo específico es examinar las propiedades algebraicas y estructurales de los semigrupos numéricos, junto a los invariantes asociados como el conjunto de Ápery, la multiplicidad y el número de Frobenius.

El segundo objetivo es revisar y estudiar un par de clases particulares de semigrupos numéricos: los semigrupos numéricos con dimensión máxima y los semigrupos numéricos irreducibles. El tercer objetivo es extender la noción de semigrupos numéricos irreducibles a los semigrupos numéricos generalizados a partir de Failla et al. (2015) y lo estudiado anteriormente. Finalmente, el cuarto objetivo es utilizar el software computacional **GAP** a través de **SageMath** para la construcción y análisis de ejemplos de semigrupos numéricos y semigrupos numéricos generalizados, haciendo uso de la Librería **Numericalsgps**.

En el primer capítulo de este trabajo se proporciona la teoría preliminar sobre semigrupos y monoides e introduce el concepto de semigrupo numérico y sus invariantes. En el segundo capítulo, se introduce las nociones de semigrupo numérico con dimensión máxima y semigrupo numérico irreducible y algunos ejemplos particulares. En el tercer capítulo, se introduce el concepto de semigrupo numérico generalizado, la clase de semigrupos numéricos generalizados irreducibles como una generalización natural de la sección anterior, junto a otros ejemplos, utilizando el software computacional **GAP** a través de **SageMath**. Finalmente, en el apéndice se muestra el uso de SageMath y GAP para la construcción de ejemplos de dichos conceptos y algunas de sus propiedades.

1. Semigrupos Numéricos

En este capítulo se revisan algunos conceptos de la teoría de semigrupos y monoides, y se introduce la noción de *semigrupo numérico*, junto a varios de sus invariantes y caracterizaciones.

1.1. Semigrupos y Monoides

En esta sección se repasan algunas definiciones y resultados básicos de la teoría de semigrupos y monoides.

Definición 1.1.1. Un semigrupo es un par (S, \star) tal que S es un conjunto y \star es una operación binaria sobre S que es asociativa, esto es,

$$(\forall a, b, c \in S) [(a \star b) \star c = a \star (b \star c)].$$

Ejemplo 1.1.2. Claramente $(\mathbb{N}, +)$ es un semigrupo. Sea

$$2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

el conjunto de los naturales pares. Observe que $(2\mathbb{N}, +)$ también es un semigrupo.

A partir de ahora, se supone que todos los semigrupos con los que se trabaja son *conmutativos*, es decir, $(\forall a, b \in S) (a \star b = b \star a)$.

Observe en el ejemplo anterior que $2\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ y $2\mathbb{N}$ es un semigrupo por si mismo. Esto nos da un ejemplo de la noción de *subsemigrupo*.

Definición 1.1.3. Un subsemigrupo de (S, \star) es un conjunto $T \subseteq S$ tal que (T, \star) es un semigrupo.

Ejemplo 1.1.4. Por definición, \emptyset es un subsemigrupo de cada semigrupo. Como se dijo antes, $2\mathbb{N}$ es un subsemigrupo de \mathbb{N} con la suma usual. Sea $2\mathbb{N} + 1 = \{1, 3, 5, \dots\}$ el conjunto de los naturales impares y observe que $2\mathbb{N} + 1$ con la suma usual de \mathbb{N} **no** es un subsemigrupo, ya que la operación $+$ no es binaria en este conjunto, por ejemplo, se tiene que $3 \in 2\mathbb{N} + 1$ pero $3 + 3 = 6 \notin 2\mathbb{N} + 1$.

Observación. Se puede reducir la condición para que $T \subseteq S$ sea un subsemigrupo, pues basta que T sea cerrado bajo la operación de (S, \star) , ya que la restricción de \star en T va a seguir siendo asociativa.

Proposición 1.1.5. *La intersección de subsemigrupos es un subsemigrupo.*

Demostración. Es inmediato de la definición de subsemigrupo. \square

Ahora sea $A \subseteq S$, considere la intersección de todos los subsemigrupos de S que contienen a A , se denota por $\langle A \rangle$ a este subsemigrupo, es decir:

$$\langle A \rangle = \bigcap \{X \subseteq S \mid X \text{ es un subsemigrupo de } S \text{ y } A \subseteq X\} \quad (1.1)$$

Proposición 1.1.6. *Sea $A \subseteq S$ con S un semigrupo, entonces:*

1) $\langle A \rangle$ es el subsemigrupo de S más pequeño que contiene a A .

$$2) \langle A \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \lambda_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a_i \in A \right\}.$$

Demostración. Para probar 1), se tiene por la Proposición 1.1.5 que $\langle A \rangle$ es un subsemigrupo de S . Luego considere T un subsemigrupo de S tal que $A \subseteq T$ y $T \subseteq \langle A \rangle$. Sin embargo, observe que por la igualdad 1.1 se tiene que $\langle A \rangle \subseteq T$, luego $T = \langle A \rangle$ y $\langle A \rangle$ es el subsemigrupo más pequeño que contiene a A .

Para probar 2), sea

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \lambda_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a_i \in A \right\},$$

se quiere probar que $\langle A \rangle = B$.

Sea $b \in B$. Luego $b = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ para algunos $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \lambda_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a_i \in A$. Observe que para cada X subsemigrupo de S con $A \subseteq X$, se tiene que $a_i \in X$, luego $\gamma a_i \in X$ para cada $\gamma \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pues cada X es cerrado bajo la operación de S , por tanto, $b \in X$ para todo X y así $b \in \langle A \rangle$ y $B \subseteq \langle A \rangle$.

Para la otra inclusión, basta mostrar que B es cerrado bajo la operación de S (y por tanto es subsemigrupo) y $A \subseteq B$.

Es claro que $A \subseteq B$ (Tome $n = 1$ y $\lambda = 1$). Ahora se muestra la clausura, sean $b_1, b_2 \in B$, luego $b_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ y $b_2 = \sum_{j=1}^m \gamma_j c_j$. Observe que

$$b_1 + b_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^m \gamma_j c_j = \sum_{k=1}^t \alpha_k d_k \in B$$

donde $t \leq n + m$, $\alpha_k = \lambda_k + \gamma_k$ si $a_k = c_k$ o el coeficiente correspondiente si no hay término en común y d_k es una organización de los a_i y c_j , luego B es un subsemigrupo que contiene a A y por el ítem 1), $\langle A \rangle \subseteq B$. \square

Definición 1.1.7. Sea A un conjunto, se llamará a $\langle A \rangle$ como **semigrupo generado** por A . Se dirá que un semigrupo S es **generado** por $A \subseteq S$ si $S = \langle A \rangle$, o equivalentemente, se dirá que A es un **sistema de generadores** de S . Si se tiene que para cada $X \subset A$, $\langle X \rangle \neq S$, entonces se dice que A es un **sistema minimal de generadores** de S . Si A es finito, se dirá que S es **finitamente generado**.

Ejemplo 1.1.8. Considere $S = \langle 8, 12, 13, 15 \rangle$. Claramente S es finitamente generado y $S = \{0, 8, 12, 13, 15, 16, 20, 21, 23, \rightarrow\}$ (La notación \rightarrow significa que cada entero mayor al inmediatamente anterior pertenece al conjunto).

Teniendo estos conceptos a mano, se pueden definir con facilidad los monoides y por consiguiente los *semigrupos numéricos*, quienes son nuestro objeto de interés.

Definición 1.1.9. Un semigrupo M es un **monoide** si existe un elemento $0 \in M$ tal que $0 + m = m$ para todo $m \in M$. Se llama a este elemento, el elemento identidad o simplemente identidad. Un conjunto $N \subseteq M$ es un **submonoide** si N es subsemigrupo de M y $0 \in N$.

Ejemplo 1.1.10. Es claro que $(\mathbb{N}, +)$ es un monoide. Considere $S = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow\}$ y note que S es un submonoide de \mathbb{N} pues $0 \in S$ y S es cerrado con la suma usual de \mathbb{N} .

De manera similar a lo que se hizo antes, se puede extender el concepto de semigrupo generado por $A \subseteq M$ a los monoides, considerando la intersección de todos los submonoides de M que contienen a A , en particular,

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{N}, a_i \in A \right\}.$$

Consecuentemente, se dice que M **es generado por** A (o A es un sistema de generadores de M) si $M = \langle A \rangle$ y si A es finito, entonces se dice que M es finitamente generado.

Ahora, considere $(X, +_X), (Y, +_Y)$ dos semigrupos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Se dice que f es un **homomorfismo de semigrupo** si $f(a +_X b) = f(a) +_Y f(b)$ para todo $a, b \in X$.

Definición 1.1.11. Sean X, Y semigrupos y $f : X \rightarrow Y$ un homomorfismo de semigrupo. Entonces f es un **monomorfismo** si f es inyectiva, f es un **epimorfismo** si f es sobreyectiva y f es un **isomorfismo** si f es biyectiva (esto es, que f es inyectiva y sobreyectiva).

A partir de esto, se define la noción de semigrupos *isomorfos*.

Definición 1.1.12. Sean X, Y semigrupos. Se dice que X y Y son **isomorfos** si existe un isomorfismo $f : X \rightarrow Y$. Se denota por $X \cong Y$ para indicar que X y Y son isomorfos

Como se hizo anteriormente, se puede extender la noción de homomorfismo a los monoides, además de los conceptos de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo de monoides.

1.2. Definición, multiplicidad y dimensión

En esta sección, se introduce el concepto de **semigrupo numérico** junto a los invariantes de **multiplicidad, dimensión y conjunto de Apéry**. Además, se demuestra que los submonoides de \mathbb{N} pueden clasificarse, bajo isomorfismo, con los semigrupos numéricos.

Definición 1.2.1. Sea $S \subseteq \mathbb{N}$. Se dice que S es un **semigrupo numérico** si S es un submonoide de \mathbb{N} tal que $|\mathbb{N} \setminus S| < \infty$.

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ un conjunto no vacío, entonces se denota por $\text{mcd}(A)$ al **máximo común divisor** de los elementos de A .

Lema 1.2.2. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ un conjunto no vacío, entonces $\langle A \rangle$ es un semigrupo numérico si y solo si $\text{mcd}(A) = 1$.

Demostración. Suponga que $\langle A \rangle$ es un semigrupo numérico y sea $d = \text{mcd}(A)$. Observe que si $s \in \langle A \rangle$, entonces $d \mid s$ pues s es combinación lineal de elementos de A . Como $\langle A \rangle$ es un semigrupo numérico, esto significa que $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ es finito, por lo tanto existe un $x \in \mathbb{N}$ tal que $d \mid x$ y $d \mid (x + 1)$. En consecuencia, $d \mid x + 1 - x = 1$ y d debe ser 1.

Recíprocamente, basta probar que $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ es finito, pues se sabe que $\langle A \rangle$ es un submonoide de \mathbb{N} . Ahora, como $\text{mcd}(A) = 1$, se tiene que existen enteros z_1, z_2, \dots, z_n y $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ tales que $z_1 a_1 + \dots + z_n a_n = 1$. Moviendo los términos donde $z_i < 0$ al lado derecho de la igualdad, se puede encontrar $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_l \in \{1, \dots, n\}$ tales que $z_{i_1} a_{i_1} + \dots + z_{i_k} a_{i_k} = 1 - z_{j_1} a_{j_1} - \dots - z_{j_l} a_{j_l}$. Si se llama a $s = -z_{j_1} a_{j_1} - \dots - z_{j_l} a_{j_l}$, se tiene que $s \in \langle A \rangle$ y $s + 1 \in \langle A \rangle$. A continuación, se mostrará que si $n \geq (s - 1)s + (s - 1)$, entonces $n \in \langle A \rangle$. Por el algoritmo de la división, sean $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $n = qs + r$ con $0 \leq r < s$. Como $n \geq (s - 1)s + (s - 1)$, se tiene que $q \geq s - 1 \geq r$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} n &= qs - rs + rs + r \\ &= (q - r)s + r(s + 1), \end{aligned}$$

lo cual pertenece a $\langle A \rangle$ pues $s, s+1 \in \langle A \rangle$ y $r, q-r \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ es finito y $\langle A \rangle$ es un semigrupo numérico. \square

Proposición 1.2.3. *Sea M un submonoide no trivial de \mathbb{N} , entonces M es isomorfo a un semigrupo numérico.*

Demostración. Sea $d = \text{mcd}(M)$. Por el Lema 1.2.2, se tiene que $S = \left\langle \left\{ \frac{m}{d} \mid m \in M \right\} \right\rangle$ es un semigrupo numérico. Considere la función $f : M \rightarrow S$ definida como $f(m) = \frac{m}{d}$. Observe que

- Si $x, y \in M$, entonces $f(x+y) = \frac{x+y}{d} = \frac{x}{d} + \frac{y}{d} = f(x) + f(y)$, luego f es un homomorfismo de monoides.
- Si $x, y \in M$ con $f(x) = f(y)$, entonces $\frac{x}{d} = \frac{y}{d}$, lo cual implica que $x = y$. Por lo tanto, f es inyectiva.
- Sea $z \in S$. Por definición de S , existe $m' \in M$ tal que $z = \frac{m'}{d}$, lo cual equivale a que $f(m') = z$. Así, f es sobreyectiva.

De esta manera, f es un isomorfismo de monoides, y se tiene el resultado. \square

Si $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, se escribe

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Para un semigrupo numérico S , si $S^* = S \setminus \{0\}$, entonces el conjunto $S^* + S^*$ es el conjunto de todos los elementos de S que son suma de elementos no nulos de S .

Lema 1.2.4. *Sea S un submonoide de \mathbb{N} . Entonces $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es un sistema de generadores de S . Además, cada sistema de generadores de S contiene a $S^* \setminus (S^* + S^*)$.*

Demostración. Sea $s \in S^*$. Si $s \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$, entonces esto implica que $s \in (S^* + S^*)$, por lo que existen $x, y \in S^*$ tales que $s = x + y$. Ahora, si $x, y \in S^* \setminus (S^* + S^*)$, se finaliza, pero si no, se puede repetir el proceso anterior para x o y . Además, este proceso es finito pues $x, y < s$. Finalmente, se encuentra una colección $s_1, s_2, \dots, s_n \in S^* \setminus (S^* + S^*)$ tales que $s = s_1 + s_2 + \dots + s_n$. Esto demuestra que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es un sistema de generadores de S .

Ahora, sea A un sistema de generadores de S arbitrario. Sea $x \in S^* \setminus (S^* + S^*)$. Por definición de A , existen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ tales que $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$. Ahora, como $x \notin (S^* + S^*)$, necesariamente se tiene que $x = a_i$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto $S^* \setminus (S^* + S^*) \subseteq A$. \square

Esta propiedad también es válida para cualquier submonoide de \mathbb{N}^d con $d \geq 1$. Se representan en negrilla los elementos de \mathbb{N}^d , así $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$. La idea es que siempre que $\mathbf{s} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ con \mathbf{x}, \mathbf{y} distintos de $\mathbf{0}$, entonces \mathbf{x} es estrictamente menor que \mathbf{s} en el orden parcial natural de \mathbb{N}^d , el cual es definido como $\mathbf{x} < \mathbf{s}$ si y solo si $x^{(i)} < s^{(i)}$ para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, donde $x^{(i)}$ representa la i -ésima coordenada del vector $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$. Y solo existe una cantidad finita de elementos $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$ con $\mathbf{x} \leq \mathbf{s}$. Sin embargo, se tiene que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ no es finito para submonoides de \mathbb{N}^d con $d > 1$, como se puede ver a continuación.

Ejemplo 1.2.5. Sea $M = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x > 5\} \cup \{(0, 0) = \mathbf{0}\}$. Se tiene que:

1) M es un submonoide de \mathbb{N}^2 .

Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in M$. Si $\mathbf{x} = \mathbf{0} \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$. Suponga entonces que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Luego $x_1, y_1 > 5$. Por lo tanto, $x_1 + y_1 > 10 > 5$ y $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$.

2) M no es finitamente generado.

Observe que $M^* \setminus (M^* + M^*)$ no puede ser finito ya que:

$$M^* \setminus (M^* + M^*) = \{(6, 0), (7, 0), \dots, (11, 0), (6, 1), (7, 1), \dots\}$$

En particular, $(6, n) \in M^* \setminus (M^* + M^*)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pues no se pueden escribir como suma de elementos (distintos de $\mathbf{0}$) de M , la cual es una colección infinita, por lo que, necesariamente, $M^* \setminus (M^* + M^*)$ es infinito y como $M^* \setminus (M^* + M^*)$ está contenido en cada sistema de generadores de M (Cisto et al., 2019, Lema 2.1), no existe un sistema de generadores finito para M .

Sea S un semigrupo numérico y $n \in S^*$. Se define el **conjunto de Apéry** de n en S como

$$\text{Ap}(S, n) = \{s \in S \mid s - n \notin S\}$$

Lema 1.2.6. Sea S un semigrupo numérico y sea n un elemento de S^* , entonces:

$$\text{Ap}(S, n) = \{0 = w(0), w(1), \dots, w(n-1)\}$$

donde $w(i)$ es el menor elemento de S congruente con i módulo n para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Demostración. Primero, note que para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $i + kn \in S$, por lo que tiene sentido hablar de los $w(i)$. Para la primera inclusión, tome

un $w(i)$ y suponga que no está contenido en $\text{Ap}(S, n)$, lo cual implica que $w(i) - n \in S$. Por definición, $w(i)$ es el menor elemento de S con $w(i) \equiv i \pmod{n}$, pero se tiene que $w(i) - n \equiv i - n \equiv i \pmod{n}$ por propiedades de aritmética modular, lo cual contradice la definición de $w(i)$. Por lo tanto, $w(i) \in \text{Ap}(S, n)$ y se obtiene que $\{0 = w(0), w(1), \dots, w(n-1)\} \subseteq \text{Ap}(S, n)$.

Para la otra inclusión, considere un $w \in \text{Ap}(S, n)$ arbitrario, se tiene que $w \equiv m \pmod{n}$ para algún $m \in 0, \dots, n-1$ y $w \in S$. Se quiere mostrar que w es el menor elemento en S con $w \equiv m \pmod{n}$, luego suponga que existe un $j \in S$ con $j < w$ y $j \equiv m \pmod{n}$, pero esto implica que $w \equiv m \equiv j \pmod{n}$, lo cual deriva en que $w = j + zn$ para algún $z \in \mathbb{N}$ (pues ambos elementos están en S) y $z > 0$ puesto que $j < w$. Luego, $w - n = j + (z-1)n \in S$, lo cual contradice el hecho de que $w - n \notin S$, por lo tanto w es el menor elemento en S con $w \equiv m \pmod{n}$ y se obtiene la igualdad de conjuntos. \square

Ejemplo 1.2.7. Sea $S = \langle 5, 7, 9 \rangle$, entonces $S = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, \dots\}$ y $\text{Ap}(S, 5) = \{0, 7, 9, 16, 18\}$ pues $0 \equiv 0 \pmod{5}$, $16 \equiv 1 \pmod{5}$, $7 \equiv 2 \pmod{5}$, $18 \equiv 3 \pmod{5}$ y $9 \equiv 4 \pmod{5}$.

Observe que una consecuencia del lema anterior es que la cardinalidad de $\text{Ap}(S, n)$ es exactamente n . Considerando esto, se puede deducir el siguiente resultado.

Lema 1.2.8. Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S^*$, entonces para todo $s \in S$, existe un único par ordenado $(k, w) \in \mathbb{N} \times \text{Ap}(S, n)$ tal que

$$s = kn + w.$$

Demostración. Para cada $s \in S$, se sabe que $s \equiv j \pmod{n}$ para algún $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Ahora, por el Lema 1.2.6, se tiene que existe un elemento $w(j) \in \text{Ap}(S, n)$ tal que $w(j) \equiv j \pmod{n}$, luego, por transitividad, se deduce que $s \equiv w(j) \pmod{n}$. Por definición de congruencia, se tiene que $s \equiv w(j) \pmod{n}$ es equivalente a $s - w(j) = kn$ para algún $k \in \mathbb{N}$ (Se tiene esto último por definición de los $w(j)$), lo cual se puede reescribir como $s = kn + w(j) = kn + w$. La unicidad se debe a que no hay dos elementos de $\text{Ap}(S, n)$ congruentes al mismo entero por definición. \square

Este lema no es cierto para submonoides de \mathbb{N}^d en general. Sin embargo, hay algunas familias de submonoides de \mathbb{N}^d para los cuales se tiene una propiedad similar. Además, este resultado hace posible traducir ciertos resultados conocidos para semigrupos numéricos a una escala más general (ver Rosales and García-Sánchez (1998)).

Definición 1.2.9. Sea S un semigrupo numérico y A un sistema de generadores de S . Se dice que A es un **sistema minimal de generadores** si para cada $P \subsetneq A$ se tiene que $\langle P \rangle \neq S$.

Teorema 1.2.10. *Cada semigrupo numérico admite un único sistema minimal de generadores. Este sistema minimal de generadores es finito.*

Demostración. El Lema 1.2.4 muestra que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es el sistema minimal de generadores de S . Por el Lema 1.2.8, se tiene que para cualquier $n \in S^*$, se cumple que $S = \langle \text{Ap}(S, n) \cup \{n\} \rangle$. Puesto que $\text{Ap}(S, n) \cup \{n\}$ es finito, necesariamente $S^* \setminus (S^* + S^*)$ debe ser finito por encontrarse contenido en cada sistema de generadores de S . La unicidad se hereda del hecho que el conjunto $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es único para cada semigrupo numérico S . \square

Como cada submonoide de \mathbb{N} es isomorfo a un semigrupo numérico (Proposición 1.2.3), esta propiedad también se tiene para submonoides de \mathbb{N} .

Corolario 1.2.11. *Sea M un submonoide de \mathbb{N} . Entonces M tiene un único sistema minimal de generadores, que además es finito.*

Demostración. Sea $d = \text{mcd}(M)$, entonces $T = \langle \frac{x}{d} \mid x \in M \rangle$ es un submonoide de \mathbb{N} tal que $\text{mcd}(T) = 1$, por lo que T es un semigrupo numérico por el Lema 1.2.2. Si A es el sistema minimal de generadores de T , entonces $dA = \{da \mid a \in A\}$ es sistema minimal de generadores de M . \square

Definición 1.2.12. Sea S es un semigrupo numérico y sea $\{n_1, \dots, n_e \mid n_i < n_{i+1}\}$ su sistema minimal de generadores. Entonces n_1 es llamada la **multiplicidad** de S , y la se va a denotar por $m(S)$. La cardinalidad del sistema minimal de generadores, e , es llamada la **dimensión de inmersión** y se denotara por $e(S)$.

Proposición 1.2.13. *Sea S un semigrupo numérico, entonces:*

- 1) $m(S) = \text{mín}(S^*)$
- 2) $e(S) \leq m(S)$

Demostración. La primera parte es clara. Para la segunda parte, observe que el conjunto $\{m(S)\} \cup \text{Ap}(S, m(S)) \setminus \{0\}$ constituye un sistema de generadores de S con cardinalidad $m(S)$. \square

Observe que $e(S) = 1$ si y solo si $S = \mathbb{N}$. Si m es un entero positivo, entonces claramente $S = \{0, m, \rightarrow\}$ es un semigrupo numérico con multiplicidad m y un sistema mínimo de generadores de S es $\{m, m+1, \dots, 2m-1\}$. Los semigrupos numéricos que tienen la forma de S se llaman *semigrupos numéricos ordinarios*. Note que lo anterior implica que $e(S) = m = m(S)$, más adelante se van a estudiar otros ejemplos de semigrupos donde esto último ocurre, los cuales se llaman *semigrupos numéricos de dimensión máxima*.

1.3. Número de Frobenius y Género

En esta sección, se introducen los conceptos de **conjunto de lagunas**, **género** y **número de Frobenius** de un semigrupo numérico, además de varias caracterizaciones y formas de computar estos invariantes.

Como se menciona en la introducción, Ferdinand Georg Frobenius (Berlín, 1849 - 1917) propuso en sus trabajos el problema de encontrar una fórmula para el mayor entero que no puede ser representado como una combinación lineal de un conjunto de enteros positivos dados con máximo común divisor de 1. También propuso el problema de encontrar cuántos enteros positivos no pueden ser representados por dicho conjunto. Usando la terminología moderna, el primer problema es equivalente a dar con una fórmula, en términos del sistema mínimo de generadores de un semigrupo numérico S , para el mayor entero que no pertenece a S . Este elemento en particular es usualmente conocido en la literatura como *número de Frobenius* en honor al mencionado matemático. En cuanto al segundo problema, el conjunto de elementos no representables será conocido como el *conjunto de lagunas* de S .

Definición 1.3.1. Sea S un semigrupo numérico, se definen

- 1) El **número de Frobenius** como el mayor elemento $x \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin S$ y se denota por $F(S)$.
- 2) El **conductor** de S como el menor entero x tal que $x + n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y se denota por $cond(S)$. Es equivalente al número de Frobenius más 1, por lo que se puede trabajar con cualquiera de los dos.
- 3) El **conjunto de lagunas** como el conjunto de los elementos que no están en S y se denota por $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$.
- 4) El **género** de S como la cardinalidad del conjunto de lagunas y se denota por $g = g(S) = |G(S)|$. En algunas ocasiones es mencionado como el grado de singularidad

de S .

Ejemplo 1.3.2. Sea $S = \langle 4, 6, 9 \rangle$, se tiene que $S = \{0, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \rightarrow\}$, luego $G(S) = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$, $F(S) = 11$ y $g(S) = 6$.

No existe una fórmula general para el número de Frobenius o para el género de un semigrupo numérico cuando la dimensión es mayor a dos. Sin embargo, si se conoce el conjunto de Apéry de algún elemento no nulo del semigrupo numérico en cuestión, se pueden computar ambos invariantes de manera sencilla.

Proposición 1.3.3. Sea S un semigrupo numérico y $n \in S^*$. Entonces,

$$1) F(S) = [\text{máx}(\text{Ap}(S, n))] - n,$$

$$2) g(S) = \frac{1}{n} \left(\sum_{w \in \text{Ap}(S, n)} w \right) - \frac{n-1}{2}.$$

Demostración.

1) Se demuestra que $\text{máx}(\text{Ap}(S, n)) - n$ cumple la hipótesis para ser el número de Frobenius de S : El mayor elemento de $\mathbb{N} \setminus S$. Primero, se tiene por definición de $\text{Ap}(S, n)$ que $[\text{máx}(\text{Ap}(S, n))] - n \notin S$. Por lo tanto, solo resta probar que es el mayor elemento con esta propiedad, en efecto, sea $x > [\text{máx}(\text{Ap}(S, n))] - n$, luego $x + n > [\text{máx}(\text{Ap}(S, n))]$ y considere $w \in \text{Ap}(S, n)$ tal que $w \equiv x + n \pmod{n}$, esto implica que $x + n = w + mn$ para algún $m \in \mathbb{Z}$, luego $x = w + (m-1)n$. Ahora, como $w < x + n$, se tiene que $(m-1) = k$ no puede ser ni 0 ni negativo, por lo que necesariamente se tiene que $x = w + kn$ para algún $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; por el Lema 1.2.8, se puede concluir que $x \in S$ y por tanto $x \neq F(S)$ y por lo tanto, $F(S) = [\text{máx}(\text{Ap}(S, n))] - n$.

2) Observe que para todo $w \in \text{Ap}(S, n)$, si $w \equiv i \pmod{n}$ con $i \in \{0, \dots, n-1\}$, entonces existe un entero no negativo k_i tal que $w = k_i n + i$, por lo tanto, utilizando el Lema 1.2.6,

$$\text{Ap}(S, n) = \{0, w(1) = k_1 n + 1, w(2) = k_2 n + 2, \dots, w(n-1) = k_{n-1} n + (n-1)\}.$$

Ahora, se tiene que $x \equiv w(i)$ pertenece a S si y solo si $w(i) \leq x$. Esto es simple de ver al considerar la definición de $w(i)$. Por lo tanto, como los elementos congruentes a i módulo n , menores que $w(i)$ pertenecen al conjunto $\{i, n+i, \dots, (k_i-1)n+i\}$ y este conjunto tiene cardinalidad k_i para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
g(S) &= k_1 + \cdots + k_{n-1}, \\
&= \frac{1}{n}(k_1 n + \cdots + k_{n-1} n), \\
&= \frac{1}{n}(0 + (k_1 n + 1) + \cdots + (k_{n-1} n + n - 1)) - \frac{1}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} \right), \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{w \in \text{Ap}(S, n)} w \right) - \frac{n-1}{2}.
\end{aligned}$$

□

Observe que para un semigrupo numérico S , mínimamente generado por $\langle a, b \rangle$, entonces:

$$\text{Ap}(S, a) = \{0, b, 2b, \dots, (a-1)b\}.$$

Para probar esto, suponga por contradicción que $(kb - a) \in S$ para $k \in \{0, \dots, a-1\}$. Observe que $a-1-k \geq 0$ para todo $k \in \{0, \dots, a-1\}$ y como $b \in S$, se tiene lo siguiente,

$$kb - a + (a-1-k)b = ab - a - b.$$

Finalmente, se puede probar que $ab - a - b = F(S)$ de la siguiente manera, descrita en Skupién (1993): Para cada $n \geq ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1)$ existen $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tales que $\alpha < a$ y $n = \alpha a + \beta b \in S$, o equivalentemente, $(a-1)(b-1)$ es el conductor de S .

Sea $n \geq (a-1)(b-1)$. Como $\text{mcd}(a, b) = 1$, se tiene que los elementos $n - jb$ con $j \in \{0, \dots, a-1\}$ son todos distintos módulo a (Es decir, forman un sistema completo de residuos módulo a). Por lo tanto, para cada $m \in \mathbb{Z}$, este debe ser congruente para alguno de estos elementos. En particular, si $m = a$, se tiene que existen únicos $j = \beta \geq 0$ y $t \in \mathbb{Z}$ tales que $a = n - \beta b + ta$. Reorganizando términos, se tienen enteros no negativos $\alpha = 1 - t$ y β tales que $n = \alpha a + \beta b$. Observe que $\alpha \geq 0$ pues:

$$\alpha a = n - \beta b \geq (a-1)(b-1) - (a-1)b = -a + 1 > (-1)a.$$

Por lo tanto, $ab - a - b = F(S)$ y se tiene nuestra contradicción.

Así, se tiene el siguiente resultado (cuyas fórmulas son atribuidas a James Joseph Sylvester).

Proposición 1.3.4. Sean a y b enteros positivos con $\text{mcd}(a, b) = 1$, entonces:

$$1) F(\langle a, b \rangle) = ab - a - b,$$

$$2) g(\langle a, b \rangle) = \frac{ab - a - b + 1}{2}.$$

Demostración. Inmediato a partir de la Proposición 1.3.3 y el cómputo de $\text{Ap}(S, a)$ realizado anteriormente. \square

Note que para los semigrupos numéricos con dimensión dos, $g(S) = \frac{F(S) + 1}{2}$, lo cual implica que $F(S)$ siempre es impar. Esto no es necesariamente cierto para semigrupos con dimensión mayor a 2, pero nos da una caracterización interesante sobre algunas clases de semigrupos numéricos.

Si S es un semigrupo numérico y $s \in S^*$, entonces $F(S) - s \notin S$. Para probar esto, suponga por contradicción que no es así, luego $F(S) - s = x \in S$. Por tanto, $x + s \in S$, pero esto implica que $x + s = F(S) - s + s = F(S) \in S$, una clara contradicción a la definición de $F(S)$. Con esto, se deduce que la igualdad de arriba es una desigualdad en general, lo cual se muestra en el siguiente lema.

Lema 1.3.5. *Sea S un semigrupo numérico. Entonces $g(S) \geq \frac{F(S) + 1}{2}$.*

Demostración. Sea $F(S) = t$ y suponga que $g(S) < \frac{t + 1}{2}$.

Observe que entre 0 y t existen $t + 1$ enteros, por lo tanto, $g(S) < \frac{t + 1}{2}$ significa que la cantidad de lagunas de S es menor que la mitad de la cantidad de enteros entre 0 y t , o sea, entre 0 y t existen más elementos dentro de S que lagunas. Ahora, por definición, se tiene que el conjunto de lagunas de S , $G(S)$ está completamente contenido en el intervalo de 0 a t . Pero se tiene que si S es un semigrupo numérico y $s \in S^*$, entonces $F(S) - s \notin S$, por lo tanto, para cada elemento en S que está entre 0 y t , existe un elemento en $G(S)$ que le corresponde, por lo que se tiene una contradicción, pues se supuso que habían más elementos en S que lagunas en el intervalo de 0 a t . Por lo tanto, $g(S) \geq \frac{F(S) + 1}{2}$. \square

Los semigrupos numéricos para los cuales se tiene la igualdad en la desigualdad anterior, cumplen con que $F(S)$ es **impar** y también son los semigrupos numéricos con la *menor* cantidad de lagunas posibles.

Observación. Si se fija un entero positivo f , entonces no es cierto (en general) que hay más semigrupos numéricos con número de Frobenius $f + 1$ que semigrupos numéricos con número de Frobenius f . Se puede observar esto con la siguiente tabla, la cual se puede encontrar en Rosales et al. (2004) ($ns(F)$ significa el número de semigrupos numéricos con número de Frobenius F).

Tabla 1.1: Número de semigrupos numéricos con número de Frobenius fijo hasta 39

F	$ns(F)$	F	$ns(F)$	F	$ns(F)$
1	1	14	103	27	16132
2	1	15	200	28	16267
3	2	16	205	29	34903
4	2	17	465	30	31822
5	5	18	405	31	70854
6	4	19	961	32	68681
7	11	20	900	33	137391
8	10	21	1828	34	140661
9	21	22	1913	35	292081
10	22	23	4096	36	270258
11	51	24	3578	37	591443
12	40	25	8273	38	582453
13	106	26	8175	39	1156012

En la siguiente tabla, se muestra los sistemas minimales de generadores para cada semigrupo numérico con número de Frobenius fijo, con $F(S) \in \{1, \dots, 8\}$.

Tabla 1.2: Sistemas de generadores para semigrupos numéricos con Frobenius fijo

F	Sistema de generadores
1	{2,3}
2	{3, 4, 5}
3	{2, 5} {4, 5, 6, 7}
4	{3, 5, 7} {5, 6, 7, 8, 9}
5	{2, 7} {3, 4} {3, 7, 8} {4, 6, 7, 9} {6, 7, 8, 9, 10, 11}
6	{4, 5, 7} {4, 7, 9, 10} {5, 7, 8, 9, 11}

	{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}
7	{2, 9} {3, 5} {3, 8, 10} {4, 5, 6} {4, 5, 11} {4, 6, 9, 11} {4, 9, 10, 11} {5, 6, 8, 9} {5, 8, 9, 11, 12} {6, 8, 9, 10, 11, 13} {8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}
8	{3, 7, 11} {3, 10, 11} {5, 6, 7, 9} {5, 6, 9, 13} {5, 7, 9, 11, 13} {5, 9, 11, 12, 13} {6, 7, 9, 10, 11} {6, 9, 10, 11, 13, 14} {7, 9, 10, 11, 12, 13, 15} {9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17}

María Bras-Amorós también en Rosales et al. (2004) computó el número de semigrupos numéricos para un género fijo g con $g \in \{0, \dots, 50\}$, y sus cálculos muestran un comportamiento similar a la sucesión de Fibonacci en el número de semigrupos numéricos con género fijo menor o igual a 50. Sin embargo, no se sabe si, en general, para un entero positivo g , hay más semigrupos numéricos con género $g + 1$ que semigrupos numéricos con género g . Se ilustra en la tabla 1.3 los resultados obtenidos por María Bras-Amorós, ver Rosales and García-Sánchez (2009) (donde n_g significa el número de semigrupos numéricos con género g).

Tabla 1.3: Número de semigrupos numéricos con género fijo hasta 50

g	n_g	$n_{g-1} + n_{g-2}$	$(n_{g-1} + n_{g-2})/n_g$	n_g/n_{g-1}
0	1			
1	1	1		

2	2	2	1	2
3	4	3	0.75	2
4	7	6	0.857143	1.75
5	12	11	0.916667	1.71429
6	23	19	0.826087	1.91667
7	39	35	0.897436	1.69565
8	67	62	0.925373	1.71795
9	118	106	0.898305	1.76119
10	204	185	0.906863	1.72881
11	343	322	0.938776	1.68137
12	592	547	0.923986	1.72595
13	1001	935	0.934066	1.69088
14	1693	1593	0.940933	1.69131
15	2857	2694	0.942947	1.68754
16	4806	4550	0.946733	1.68218
17	8045	7663	0.952517	1.67395
18	13467	12851	0.954259	1.67396
19	22464	21512	0.957621	1.66808
20	37396	35931	0.960825	1.66471
21	62194	59860	0.962472	1.66312
22	103246	99590	0.964589	1.66006
23	170963	165440	0.967695	1.65588
24	282828	274209	0.969526	1.65432
25	467224	453791	0.971249	1.65197
26	770832	750052	0.973042	1.64981
27	1270267	1238056	0.974642	1.64792
28	2091030	2041099	0.976121	1.64613
29	3437839	3361297	0.977735	1.64409
30	5646773	5528869	0.97912	1.64254
31	9266788	9084612	0.980341	1.64108
32	15195070	14913561	0.981474	1.63973
33	24896206	24461858	0.982554	1.63844
34	40761087	40091276	0.983567	1.63724
35	66687201	65657293	0.984556	1.63605
36	109032500	107448288	0.98547	1.63498
37	178158289	175719701	0.986312	1.63399

38	290939807	287190789	0.987114	1.63304
39	474851445	469098096	0.987884	1.63213
40	774614284	765791252	0.98861	1.63128
41	1262992840	1249465729	0.98929	1.63048
42	2058356522	2037607124	0.989919	1.62975
43	3353191846	3321349362	0.990504	1.62906
44	5460401576	5411548368	0.991053	1.62842
45	8888486816	8813593422	0.991574	1.62781
46	14463633648	14348888392	0.992067	1.62723
47	23527845502	23352120464	0.992531	1.62669
48	38260496374	37991479150	0.992969	1.62618
49	62200036752	61788341876	0.993381	1.6257
50	101090300128	100460533126	0.99377	1.62525

En la siguiente tabla, se muestran los sistemas minimales de generadores para cada semigrupo numérico con género fijo, con $g(S) \in \{0, \dots, 5\}$.

Tabla 1.4: Sistemas de generadores para semigrupos numéricos con género fijo

$g(S)$	Sistema de generadores
0	{1}(N)
1	{2, 3}
2	{2, 5} {3, 4, 5}
3	{2, 7} {3, 4} {3, 5, 7} {4, 5, 6, 7}
4	{2, 9} {3, 5} {3, 7, 8} {4, 5, 6} {4, 5, 7} {4, 6, 7, 9} {5, 6, 7, 8, 9}
	{2, 11} {3, 7, 11}

5	{3, 8, 10}
	{4, 5, 11}
	{4, 6, 7}
	{4, 6, 9, 11}
	{4, 7, 9, 10}
	{5, 6, 7, 8}
	{5, 6, 7, 9}
	{5, 6, 8, 9}
	{5, 7, 8, 9, 11}
	{6, 7, 8, 9, 10, 11}

Se pueden computar estos y más ejemplos utilizando SageMath y GAP, ver A.1 del Apéndice A.

Lema 1.3.6. *Sea S un semigrupo numérico generado por $\{n_1, n_2, \dots, n_p\}$, $d = \text{mcd}(n_1, \dots, n_{p-1})$ y $T = \langle n_1/d, \dots, n_{p-1}/d, n_p \rangle$, entonces*

$$\text{Ap}(S, n_p) = d(\text{Ap}(T, n_p)).$$

Demostración. Sea $w \in \text{Ap}(S, n_p)$ y como $w - n_p \notin S$, entonces $w \in \langle n_1, \dots, n_{p-1} \rangle$, por lo tanto $w/d \in \langle n_1/d, \dots, n_{p-1}/d \rangle \subseteq T$, suponga que $w/d - n_p \in T$, pero esto implica que $w - dn_p \in S$. Como S es cerrado, se tiene que $w - dn_p + (d-1)n_p \in S$, lo cual es equivalente a $w - n_p \in S$, lo cual contradice que $w \in \text{Ap}(S, n_p)$, luego $w/d \in \text{Ap}(T, n_p)$, y así $w \in d(\text{Ap}(T, n_p))$. Por lo tanto, $\text{Ap}(S, n_p) \subseteq d(\text{Ap}(T, n_p))$.

Para la otra contención, sea $w \in \text{Ap}(T, n_p)$, luego $w \in \langle n_1/d, \dots, n_{p-1}/d \rangle$ y así $dw \in \langle n_1, n_2, \dots, n_{p-1} \rangle \subseteq S$. Ahora si supone que $dw - n_p \in S$, entonces existen $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} \subseteq \mathbb{N}$ tales que $dw - n_p = \lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_p n_p$, lo cual implica que

$$dw = (\lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_{p-1} n_{p-1}) + (\lambda_p + 1)n_p.$$

Ahora, como S es un semigrupo numérico, se tiene que $\text{mcd}(n_1, n_2, \dots, n_p) = 1$, lo cual implica que $\text{mcd}(n_1, n_2, \dots, n_p) = \text{mcd}(\text{mcd}(n_1, n_2, \dots, n_{p-1}), n_p) = \text{mcd}(d, n_p) = 1$ por la asociatividad del máximo común divisor. Ahora, se tiene que $d \mid n_i$ para $i \in \{1, \dots, p-1\}$, luego $d \mid dw - (\lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_{p-1} n_{p-1}) = (\lambda_p + 1)n_p$, lo anterior, además de que $\text{mcd}(d, n_p) = 1$, nos permite concluir que $d \mid (\lambda_p + 1)$ y

$$w = \frac{\lambda_1 n_1}{d} + \dots + \frac{\lambda_{p-1} n_{p-1}}{d} + \frac{(\lambda_p + 1)}{d} n_p,$$

donde $\frac{(\lambda_p + 1)}{d} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, lo cual contradice el hecho de que $w \in \mathbf{Ap}(T, n_p)$, pues si se renombra $\frac{(\lambda_p + 1)}{d} = k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces $k - 1 \in \mathbb{N}$, por lo que

$$w - n_p = \frac{\lambda_1 n_1}{d} + \cdots + \frac{\lambda_{p-1} n_{p-1}}{d} + (k - 1)n_p \in T.$$

Así, $dw \in \mathbf{Ap}(S, n_p)$ y por lo tanto, $d(\mathbf{Ap}(T, n_p)) \subseteq \mathbf{Ap}(S, n_p)$, por lo que concluye que

$$\mathbf{Ap}(S, n_p) = d(\mathbf{Ap}(T, n_p)).$$

□

Combinando la Proposición 1.3.3 y el Lema 1.3.6, se obtiene la siguiente propiedad.

Proposición 1.3.7. *Sea S un semigrupo numérico generado por $\{n_1, n_2, \dots, n_p\}$. Sea $d = \text{mcd}(n_1, \dots, n_{p-1})$ y sea $T = \langle n_1/d, \dots, n_{p-1}/d, n_p \rangle$, entonces*

- 1) $F(S) = dF(T) + (d - 1)n_p$,
- 2) $g(S) = dg(T) + \frac{(d - 1)(n_p - 1)}{2}$.

Demostración.

- 1) Se sabe que $F(S) = [\text{máx}(\mathbf{Ap}(S, n_p))] - n_p$ y $F(T) = [\text{máx}(\mathbf{Ap}(T, n_p))] - n_p$, además, se tiene que

$$\text{máx} \mathbf{Ap}(S, n_p) = d(\text{máx} \mathbf{Ap}(T, n_p)).$$

Luego,

$$\begin{aligned} F(S) &= [\text{máx}(\mathbf{Ap}(S, n_p))] - n_p, \\ &= d[\text{máx}(\mathbf{Ap}(T, n_p))] - dn_p + dn_p - n_p, \\ &= d[\text{máx}(\mathbf{Ap}(T, n_p)) - n_p] + dn_p - n_p, \\ &= dF(T) + dn_p - n_p = dF(T) + (d - 1)n_p. \end{aligned}$$

- 2) Se sabe que $g(S) = \frac{1}{n_p} \left(\sum_{w \in \mathbf{Ap}(S, n_p)} w \right) - \frac{n_p - 1}{2}$ y $g(T) = \frac{1}{n_p} \left(\sum_{w \in \mathbf{Ap}(T, n_p)} w \right) - \frac{n_p - 1}{2}$,

donde

$$\frac{1}{n_p} \left(\sum_{w \in \mathbf{Ap}(S, n_p)} w \right) = \frac{1}{n_p} \left(\sum_{w \in \mathbf{Ap}(T, n_p)} dw \right).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 g(S) &= \frac{1}{n_p} \left(\sum_{w \in Ap(S, n_p)} w \right) - \frac{n_p - 1}{2}, \\
 &= \frac{1}{n_p} \left(\sum_{w \in Ap(T, n_p)} dw \right) - \frac{dn_p - d}{2} + \frac{dn_p - d}{2} - \frac{n_p - 1}{2}, \\
 &= d \left(\frac{1}{n_p} \left(\sum_{w \in Ap(T, n_p)} w \right) - \frac{n_p - 1}{2} \right) + \frac{dn_p - d}{2} - \frac{n_p - 1}{2}, \\
 &= dg(T) + \frac{dn_p - d}{2} - \frac{n_p - 1}{2} = dg(T) + \frac{(d - 1)(n_p - 1)}{2}.
 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.3.8. Sea $S = \langle 32, 48, 27 \rangle$. Como $\text{mcd}(32, 48) = 16$, $T = \langle 2, 3, 27 \rangle = \langle 2, 3 \rangle$, $F(T) = 1$ y $g(T) = 1$. Así, $F(S) = 16F(T) + 15 \cdot 27 = 16 + 405 = 421$ y $g(S) = 16g(T) + \frac{(15)(26)}{2} = 16 + 195 = 211$.

Se puede comprobar esto rápidamente utilizando GAP y SageMath, ver A.2 del Apéndice A.

1.4. Números Pseudo-Frobenius

En esta sección se introduce el concepto de **números pseudo-Frobenius**, **tipo** y **elementos pequeños** de un semigrupo numérico y se revisan algunas caracterizaciones de estos invariantes.

Definición 1.4.1. Sea S un semigrupo numérico. Se dice que un entero positivo x es un número **pseudo-Frobenius** si $x \notin S$ y $x + s \in S$ para todo $s \in S^*$. Se denota por $PF(S)$ el conjunto de todos los números pseudo-Frobenius de S , y su cardinalidad se llama el **tipo** de S , denotado como $t(S)$.

Definición 1.4.2. Sea S un semigrupo numérico y defina sobre \mathbb{Z} la relación \leq_S de la siguiente manera:

$$a \leq_S b \text{ si y solo si } b - a \in S$$

Es claro que la relación es una relación de orden en \mathbb{Z} , puesto que

- 1) La relación \leq_S es reflexiva, pues $a - a = 0 \in S$, lo cual implica que $a \leq_S a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$.

- 2) La relación \leq_S es antisimétrica, pues si $x \leq_S y$ y $y \leq_S x$ entonces $y - x \in S \subseteq \mathbb{N}$ y $x - y \in S \subseteq \mathbb{N}$, es decir, $y - x \geq 0$ y $x - y \geq 0$. Por tanto $x = y$.
- 3) La relación \leq_S es transitiva, pues si $x \leq_S y$ y $y \leq_S z$, entonces $y - x \in S$ y $z - y \in S$. Como S es un semigrupo numérico, entonces $(z - y) + (y - x) = z - x \in S$. Por tanto, $x \leq_S z$.

Por la definición de números pseudo-Frobenius, se tiene que estos son los elementos maximales de $\mathbb{Z} \setminus S$ con respecto al orden \leq_S .

Proposición 1.4.3. *Sea S un semigrupo numérico. Entonces:*

- 1) $PF(S) = \text{Max}_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$.
- 2) $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ si y solo si $f - x \in S$ para algún $f \in PF(S)$.

Demostración.

- 1) Si $x \in PF(S)$, entonces $x \notin S$ y $x + s \in S$ para todo $s \in S^*$. Suponga que existe $y \in \mathbb{Z} \setminus S$, $y \neq x$ tal que $x \leq_S y$, luego $y - x \in S$ y esto implica que $x + (y - x) = y \in S$ pues $x \in PF(S)$, pero esto contradice la elección de y . Por lo tanto, $PF(S) \subseteq \text{Max}_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$.

Ahora, si $x \in \text{Max}_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$, entonces $x \notin S$ y para todo $y \in \mathbb{Z} \setminus S$ comparable con x , $y \leq_S x$ y para cada $s \in S^*$ se tiene que $x + s \in S$, pues si no, se tiene que $x \leq_S x + s$ pues $(x + s) - x = s \in S$, lo cual contradice el hecho de que x sea maximal en $\mathbb{Z} \setminus S$, por lo tanto, $PF(S) = \text{Max}_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$.

- 2) Sea $x \in \mathbb{Z} \setminus S$. Se tiene que $x \leq_S f$ para algún $f \in \text{Max}_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S) = PF(S)$ por el item anterior y de este modo, $f - x \in S$ por la definición de \leq_S .

Ahora, si supone que $x \in S$ y $f - x \in S$ para algún $f \in PF(S)$, entonces como S es un semigrupo numérico, se tiene que $(f - x) + x = f \in S$, lo cual contradice que $f \in PF(S)$ por lo que no existe ningún $f \in PF(S)$ con esta propiedad y así $x \in \mathbb{Z} \setminus S$.

□

La Proposición anterior establece una dualidad entre los generadores minimales de S y sus números pseudo-Frobenius, ya que $\text{Min}_{\leq_S}(S \setminus \{0\})$ es el sistema minimal de generadores de S .

Proposición 1.4.4. *Sea S un semigrupo numérico. Entonces $\text{Min}_{\leq_S}(S \setminus \{0\})$ es el sistema minimal de generadores de S .*

Demostración. Basta con probar que $S^* \setminus (S^* + S^*) = \text{Min}_{\leq_S}(S \setminus \{0\})$. Para la primera contención, sea $s \in S^* \setminus (S^* + S^*)$ y suponer que existe $x \in S^*$, $x \neq s$ tal que $x \leq_S s$, luego esto implica que $s - x \in S^*$, pero esto a su vez implica que $s = (s - x) + x \in (S^* + S^*)$, lo cual contradice la elección de s , por lo tanto, $S^* \setminus (S^* + S^*) \subseteq \text{Min}_{\leq_S}(S \setminus \{0\})$.

Para la segunda contención, sea $m \in \text{Min}_{\leq_S}(S \setminus \{0\})$ y suponga que $m \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$. Como claramente $m \in S^*$, se tienen que existen $x, y \in S^*$ tales que $m = x + y$. Sin embargo, note que $m - x = y \in S^*$ y $m - x \leq_S m$ pues $m - (m - x) = x \in S^*$, lo cual contradice la elección de m , por lo que se concluye que $S^* \setminus (S^* + S^*) = \text{Min}_{\leq_S}(S \setminus \{0\})$ y se tiene la proposición. \square

Una caracterización en términos del conjunto de Apéry aparece en Fröberg et al. (1986), la cual se reescribe a continuación para que se ajuste a la notación moderna.

Proposición 1.4.5. *Sea S un semigrupo numérico y $n \in S^*$, entonces*

$$PF(S) = \{w - n \mid w \in \text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, n)\}.$$

Demostración. Sea $x \in PF(S)$. Como $x \notin S$ y $x + n \in S$, se tiene que $x + n \in \text{Ap}(S, n)$. Se va a demostrar que $x + n \in \text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, n)$. Sea $w \in \text{Ap}(S, n)$ tal que $x + n \leq_S w$, luego $w - (x + n) = w - n - x \in S$. Esto necesariamente implica que $w - n = x + s$ para algún $s \in S$. Como $w - n \notin S$ y $x \in PF(S)$. Se tiene que $s = 0$ y $w - n = x$, es decir, $w = x + n$, lo cual prueba que $x + n \in \text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, n)$ y como $w - n = x$, se tiene que $PF(S) \subseteq \{w - n \mid w \in \text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, n)\}$.

Ahora sea $w \in \text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, n)$. Por definición del conjunto de Apéry, $w - n \notin S$. Si $w - n + s \notin S$ para algún $s \in S^*$, esto contradeciría la maximalidad de w (pues entonces $w + s \in \text{Ap}(S, n)$). Por lo tanto, $w \in PF(S)$ y $PF(S) = \{w - n \mid w \in \text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, n)\}$. \square

Ejemplo 1.4.6. Sea $S = \langle 5, 7, 9 \rangle$. Entonces $\text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, 5) = \{16, 18\}$. Por tanto $PF(S) = \{11, 13\}$.

Ejemplo 1.4.7. Sea $S = \langle 11, 12, 13, 32, 53 \rangle$. Entonces $\text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, 11) = \{32, 51, 52, 53\}$ y por tanto $PF(S) = \{21, 40, 41, 42\}$.

Se pueden comprobar esto y otros ejemplos utilizando SageMath y GAP, ver A.3 del Apéndice A. Parte del código nos permite generar la siguiente figura.

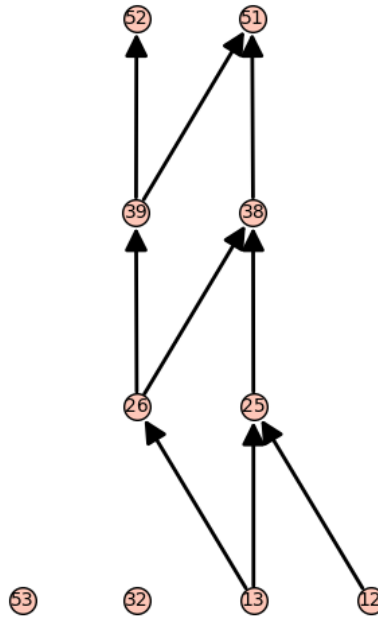


Figura 1.1: $\text{Ap}(S, 11)$ ordenado por \leq_S

Ejemplo 1.4.8. Sea S un semigrupo numérico mínimamente generado por $\{a, b\}$. Se ha establecido previamente que:

$$\text{Ap}(S, a) = \{0, b, 2b, \dots, (a-1)b\}.$$

Lo cual implica que

$$\text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, a) = \{(a-1)b\}$$

y por tanto,

$$PF(S) = \{ab - a - b\}.$$

De esta manera, los semigrupos numéricos de dimensión 2 tienen tipo 1.

Como la cardinalidad de $\text{Ap}(S, n)$ es n y 0 nunca es un elemento maximal, se obtiene la siguiente cota para el tipo de un semigrupo numérico.

Corolario 1.4.9. Sea S un semigrupo numérico. Entonces

$$t(S) \leq m(S) - 1.$$

Se recuerda que la dimensión de un semigrupo numérico no puede exceder la multiplicidad. Además de esto, se sabe que los semigrupos numéricos de dimensión 2 poseen tipo 1. Se puede demostrar que para semigrupos con dimensión 3, poseen tipo 1

o 2. Sin embargo, para dimensiones mayores a 3, el tipo no está limitado por la dimensión, como se puede observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.10. Sean $n \geq 2$ y $r \geq 3n + 2$ dados, $s = r(3n + 2) + 3$ y defina $S = \langle s, s + 3, s + 3n + 1, s + 3n + 2 \rangle$. Se va a mostrar que $t(S) \geq 2n + 2$.

Sea $M = \{(r + 1)s + i \mid -2 \leq i \leq 3n - 1 \text{ donde } 3 \nmid i\}$. Se quiere mostrar que $M \subseteq PF(S)$. Primero, se construye una tabla de los elementos de S como combinación de $r + 1$ generadores minimales:

Número de generadores	Elementos de S
1	$s, s + 3, s + 3n + 1, s + 3n + 2$
2	$2s, 2s + 3, 2s + 6, 2s + 3n + 1,$ $2s + 3n + 2, 2s + 3n + 4, 2s + 3n + 5,$ $2s + 6n + 2, 2s + 6n + 3, 2s + 6n + 4$
\vdots	\vdots
r	$rs, (r - 1)s + s + 3, \dots, r(s + 3n + 2) = (r + 1)s - 3$
$r + 1$	$(r + 1)s, \dots, (r + 1)(s + 3n + 2) = (r + 2)s + 3n - 1$

Tabla 1.5: Elementos de S hasta $r + 1$ generadores.

De este modo, observe que si $x \in S$ con $x < (r + 2)s$, entonces x debe ser la suma de exactamente $\lceil x/s \rceil$ generadores, y por lo tanto, $M \cap S = \emptyset$. Ahora, se va a probar que $M + l \subseteq S$ para cada generador l de S . Para $l = s$, se debe ver que $(r + 1)s + s + i \in S$ con $-2 \leq i \leq 3n - 1$. Ahora, observe que $(r + 1)(s + 3n + 1) < (r + 2)s - 2 < (r + 2)s + 3n - 1 = (r + 1)(s + 3n + 2)$. Ya que el intervalo $[(r + 1)(s + 3n + 1), (r + 1)(s + 3n + 2)] \subseteq S$, se tiene que $M + l \subseteq S$. Además, note que $(r + 2)s + 3n + k \in S$ para cada $k \in \mathbb{N}$, ya que $(r + 2)s + 3n$ es una combinación lineal de s y $s + 3$, $(r + 2)s + 3n + 1 = (r + 1)s + (s + 3n + 1)$, $(r + 2)s + 3n + 2 = (r + 1)s + (s + 3n + 2)$, $(r + 2)s + 3n + 3$ es una combinación lineal de s y $s + 3$, $(r + 2)s + 3n + 4 = rs + (s + 3) + (s + 3n + 1)$, etc, por lo tanto, $M + l \subseteq S$ para cada generador l de S , por lo que se concluye que $M \subseteq PF(S)$; finalmente, $|M| = 2n + 2$, por lo que se tiene que $t(S) \geq 2n + 2$.

El Ejemplo 2.24 de Rosales and García-Sánchez (2009) (que a su vez, cita a Fröberg et al. (1986) como la fuente del ejemplo) concluye que $t(S) = 2n + 3$. Sin embargo, esta conclusión es errónea, pues se puede comprobar que si $n = 2$, $r = 8$ (y por tanto $s = 67$), se tiene que en realidad $t(S) = 8$ en lugar de $2n + 3 = 7$, como se puede ver utilizando SageMath y GAP en la sección A.4 del Apéndice A.

Con esto en mente, se puede hacer una conjetura sobre el tipo de S a partir de su valor para n pequeño, como se puede ver en la siguiente figura. Ver A.4 del Apéndice A.

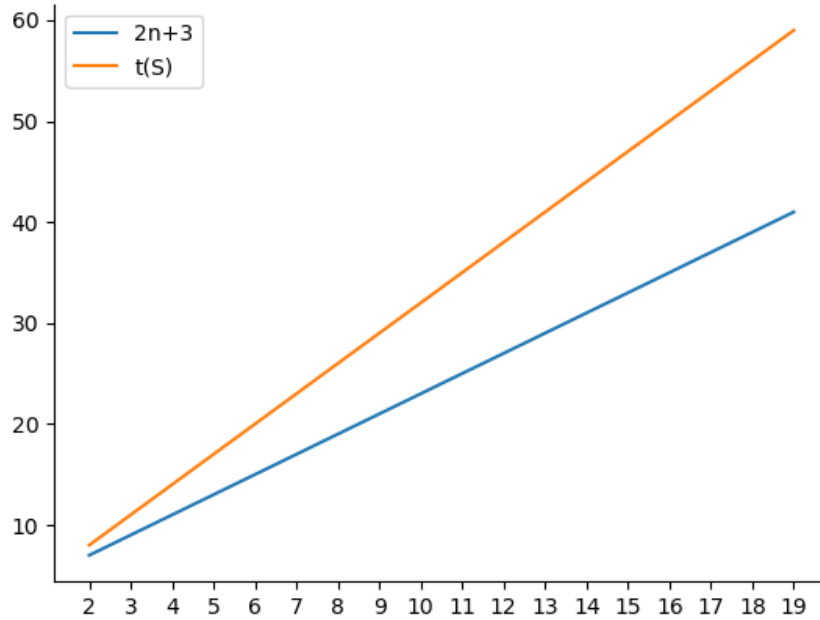


Figura 1.2: Comparación entre $t(S)$ y $f(n) = 2n + 3$

Conjetura 1.4.11. $t(S) = 3n + 2$.

Ejemplo 1.4.12. Sea $m \in \mathbb{N}$ con $m > 1$. Observe que para $S = \{0, m, \rightarrow\}$, $PF(S) = \{1, 2, \dots, m-1\}$. Estos semigrupos numéricos hacen cierta la igualdad del Corolario 1.4.9.

Definición 1.4.13. Sea S un semigrupo numérico. Se definen los **elementos pequeños** de S por

$$N(S) = \{x \in S \mid x < F(S)\}.$$

Se denota su cardinalidad por $n(S)$.

Este conjunto determina a S por completo, ya que todos los elementos mayores que $F(S)$ pertenecen a S . Además, es claro que

$$g(S) + n(S) = F(S) + 1.$$

Se sabe que si x es tal que $x \notin S$, entonces existe $f \in PF(S)$ tal que $x \leq_S f$. Defina

$$f_x = \min\{f \in PF(S) \mid f - x \in S\}$$

, entonces la función

$$\begin{aligned} G(S) &\longrightarrow PF(S) \times N(S) \\ x &\longmapsto (f_x, f_x - x) \end{aligned}$$

prueba el siguiente resultado.

Proposición 1.4.14. *Sea S un semigrupo numérico, entonces*

$$g(S) \leq t(S)n(S).$$

Demostración. Basta ver que la función anterior es inyectiva. En efecto, si $x, y \in G(S)$ con $(f_x, f_x - x) = (f_y, f_y - y)$, esto implica que $f_x = f_y$ y $f_x - x = f_y - y$. Al reemplazar $f_x = f_y$ en la segunda ecuación, se tiene que $x = y$ al despejar, por tanto, la función es inyectiva y $g(S) = |G(S)| \leq |PF(S) \times N(S)| = t(S)n(S)$. \square

Esta desigualdad es equivalente a $F(S) + 1 \leq (t(S) + 1)n(S)$. Wilf (1978) conjeturó que $F(S) + 1 \leq e(S)n(S)$, lo cual es verdadero para algunas familias de semigrupos numéricos, más para el caso general aún no ha sido probado. Este problema, usualmente llamado *conjetura de Wilf*, es uno de los problemas más complicados de esta área. Assi and García-Sánchez (2016) presentan el estado del arte de esta conjetura.

2. Familias de Semigrupos Numéricos

2.1. Semigrupos Numéricos con Dimensión Máxima

En esta sección, se introduce el concepto de **semigrupo numérico con dimensión máxima** y se darán varias caracterizaciones de esta propiedad en términos de los invariantes introducidos en la sección anterior, además, se estudian un par de subfamilias asociadas a esta propiedad: los **semigrupos numéricos Arf** y los **semigrupos numéricos saturados**.

Definición 2.1.1. Sea S un semigrupo numérico. Por la parte 2 de la Proposición 1.2.13, se sabe que su dimensión de inmersión, $e(S)$, siempre es menor o igual a su multiplicidad, $m(S)$. Así, se dice que S posee o tiene **dimensión máxima** si $e(S) = m(S)$.

Observe que si x es un generador mínimo de S y $n \in S \setminus \{0, x\}$, entonces $x - n \notin S$, pues caso contrario se tendría que $x = (x - n) + n \in S^* + S^*$, lo cual implica que $x \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$, lo cual contradice que x es un generador mínimo pues el Lema 1.2.4 nos muestra que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es el sistema minimal de generadores de S . Así, se tiene que $x \in \text{Ap}(S, n)$.

Proposición 2.1.2. Sea S un semigrupo numérico, mínimamente generado por $\{n_1 < n_2 < \dots < n_e\}$, entonces S tiene dimensión máxima si y solo si $\text{Ap}(S, n_1) = \{0, n_2, \dots, n_e\}$.

Demostración. Por lo anterior, se tiene que si x es un generador minimal de S , entonces $x \in \text{Ap}(S, n)$ para $n \in S \setminus \{0, x\}$, por tanto $\{n_2, \dots, n_e\} \subseteq \text{Ap}(S, n_1) \setminus \{0\}$ y finalmente, como $|\text{Ap}(S, n_1)| = n_1$, se tiene que $e(S) = n_1 = m(S)$ si y solo si $\text{Ap}(S, n_1) = \{0, n_2, \dots, n_e\}$. \square

Como consecuencia de las Proposiciones 1.3.3, 1.4.5 y 2.1.2, se tiene lo siguiente:

Corolario 2.1.3. Sea S un semigrupo numérico mínimamente generado por $\{n_1 < n_2 < \dots < n_e\}$, entonces:

1) Si S tiene dimensión máxima, entonces $F(S) = n_e - n_1$.

2) S tiene dimensión máxima si y solo si $g(S) = \frac{1}{n_1}(n_2 + \dots + n_e) - \frac{n_1 - 1}{2}$.

3) S tiene dimensión máxima si y solo si $t(S) = n_1 - 1$.

Demostración. La demostración se puede encontrar en (Assi and García-Sánchez, 2016, Sección 1.2, Proposiciones 11 y 12) \square

Ejemplo 2.1.4. El semigrupo numérico $S = \langle 5, 6, 9, 13 \rangle$ tiene $F(S) = 8 = 13 - 5 = n_e - n_1$. Sin embargo, S no tiene dimensión máxima, lo que significa que la recíproca del ítem 1 del corolario anterior no siempre es cierta.

Observación. Sea S un semigrupo numérico mínimamente generado por $\{n_1 < n_2 < \dots < n_e\}$, entonces:

1) Se sabe que $t(S) \leq m(S) - 1$ por el Corolario 1.4.9, por lo que se tiene que los semigrupos numéricos con dimensión máxima también son aquellos que tienen tipo máximo (en términos de su multiplicidad).

2) Por

$$g(S) = \frac{1}{n_1}(n_2 + \dots + n_e) - \frac{n_1 - 1}{2},$$

se tiene que los semigrupos numéricos con dimensión máxima también pueden ser vistos como aquellos que poseen la menor cantidad posible de lagunas (en términos de sus generadores minimales).

El siguiente resultado caracteriza los conjuntos de enteros positivos que pueden ser vistos como conjuntos de Apéry de un semigrupo numérico.

Proposición 2.1.5. Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y sea $C = \{w(0) = 0, w(1), \dots, w(n-1)\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $w(i) \equiv i \pmod{n}$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Sea S el semigrupo numérico $\langle \{n\} \cup C \rangle$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1) $\text{Ap}(S, n) = C$.

2) Para cualquier $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, se tiene que $w(i) + w(j) \geq w((i+j) \pmod{n})$

Demostración. Observe que si se renombra $k = (i+j) \pmod{n}$, entonces se tiene que

$$w(i) + w(j) \equiv i + j \equiv k \equiv w(k) \pmod{n}$$

y esto es válido para todo $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, por lo que la condición 2 es equivalente a

2'. Para todo $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, existe $t \in \mathbb{N}$ con $w(i) + w(j) = tn + w((i+j) \pmod{n})$

Si $\text{Ap}(S, n) = C$, por el Lema 1.2.8, $w(i) + w(j) = tn + c$ para algún $t \in \mathbb{N}$ y $c \in C$. Claramente $w(i) + w(j) \equiv c \pmod{n}$, por lo que se tiene que $c = w((i+j) \pmod{n})$.

Ahora, suponga que la segunda condición es válida. Se va a demostrar que $\text{Ap}(S, n) \subseteq C$. Sea $s \in \text{Ap}(S, n) \subseteq S$, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t \in \mathbb{N}$ y $c_1, c_2, \dots, c_t \in C$ tales que $s = \sum_{i=1}^t \lambda_i c_i$. Aplicando la condición 2' de manera consecutiva, se tiene que

$s = kn + c$, donde $c \in C$ y $k \in \mathbb{N}$. Como $s \in \text{Ap}(S, n)$, entonces k debe ser 0 y por tanto $s = c \in C$.

Finalmente, por el Lema 1.2.6, se tiene que la cardinalidad de $\text{Ap}(S, n)$ es n , como la cardinalidad de C es n y $\text{Ap}(S, n) \subseteq C$, se tiene que $\text{Ap}(S, n) = C$. \square

Como se vió en la Proposición 2.1.2, el conjunto de Apéry de la multiplicidad, en semigrupos numéricos con dimensión máxima, posee formas especiales. Esto, junto a la última caracterización de conjuntos de Apéry, nos da una forma alternativa de distinguir semigrupos numéricos con dimensión máxima, observando el conjunto de Apéry de sus multiplicidades.

Corolario 2.1.6. *Sea S un semigrupo numérico con multiplicidad m y asuma que $\text{Ap}(S, m) = \{w(0) = 0, w(1), \dots, w(m-1)\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $w(i) \equiv i \pmod{n}$ para todo $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Entonces, S posee dimensión máxima si y solo si, para todos $i, j \in \{1, \dots, m-1\}$, se tiene que $w(i) + w(j) > w((i+j) \pmod{m})$.*

Demostración. Si S posee dimensión máxima, entonces la conclusión es inmediata por las Proposiciones 2.1.2 y 2.1.5.

Recíprocamente, por el Lema 1.2.8, se tiene que $S = \langle m, w(1), \dots, w(n-1) \rangle$. Por la condición de que $w(i) + w(j) > w((i+j) \pmod{m})$, se puede deducir que $\{m, w(1), \dots, w(n-1)\}$ es un sistema minimal de generadores de S , por lo que se puede concluir que S tiene dimensión máxima por la Proposición 2.1.2. \square

Corolario 2.1.7. *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S^*$. Entonces $\langle n, w(1) + n, \dots, w(n-1) + n \rangle$ es un semigrupo numérico con dimensión máxima, donde para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $w(i) \in \text{Ap}(S, n)$, $w(i) \equiv i \pmod{n}$.*

Demostración. Sea $H = \langle n, w(1) + n, \dots, w(n-1) + n \rangle$. Como $w(i) > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, se tiene que $w(i) + n > n$, lo cual implica que $m(H) = n$. Se va a mostrar que $\text{Ap}(H, n) = \{0, w(1) + n, \dots, w(n-1) + n\} = \{0, r(1), \dots, r(n-1)\}$, donde $r(i) = w(i) + n$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Para esto, observe que $\text{Ap}(S, n) = \{0, w(1), \dots, w(n-1)\}$,

por lo que por la Proposición 2.1.5 se tiene que:

$$\begin{aligned}
 r(i) + r(j) &= (w(i) + n) + (w(j) + n), \\
 &= (w(i) + w(j)) + 2n, \\
 &\geq w((i + j) \pmod n) + 2n, \\
 &= [w((i + j) \pmod n) + n] + n, \\
 &= r((i + j) \pmod n) + n, \\
 &> r((i + j) \pmod n),
 \end{aligned}$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, n - 1\}$. Por lo tanto, por el Corolario 2.1.6, se tiene que H es un semigrupo numérico de dimensión máxima. \square

Ejemplo 2.1.8. Sea $S = \langle 4, 5, 11 \rangle$. Entonces, $\text{Ap}(S, 5) = \{0, 4, 8, 11, 12\}$ y por el Corolario 2.1.7 se tiene que $T = \langle 5, 9, 13, 16, 17 \rangle$ es un semigrupo numérico de dimensión máxima.

Ejemplo 2.1.9. Sean a y b un par de enteros positivos mayores que 1 con $\text{mcd}(a, b) = 1$. Se sabe que $\text{Ap}(S, a) = \{0, b, 2b, \dots, (a - 1)b\}$ y por el Corolario 2.1.7 se tiene que

$$\langle a, a + b, a + 2b, \dots, a + (a - 1)b \rangle$$

es un semigrupo numérico de dimensión máxima.

Se vió que a partir de un semigrupo numérico S , se puede construir un semigrupo numérico con dimensión máxima H , se va a mostrar que recíprocamente se tiene un resultado similar.

Corolario 2.1.10. *Sea S un semigrupo numérico con dimensión máxima y multiplicidad m . Para todo $i \in \{1, \dots, m - 1\}$, sea $w(i)$ el único elemento de $\text{Ap}(S, m)$ congruente a i módulo m . Defina el conjunto $T = \langle m, w(1) - m, \dots, w(m - 1) - m \rangle$, entonces se tiene que T es un semigrupo numérico y $\text{Ap}(T, m) = \{0, w(1) - m, \dots, w(m - 1) - m\}$.*

Demostración. Primero, note que tiene sentido hablar de $\langle m, w(1) - m, \dots, w(m - 1) - m \rangle$, pues como m es la multiplicidad de S , entonces $m \leq x$ para todo $x \in S^*$, por tanto, $w(i) - m > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m - 1\}$ y T es un submonoide de \mathbb{N} , además, como $w(i) = (w(i) - m) + m \in T$ para todo $i \in \{1, \dots, m - 1\}$, se tiene que $\langle m \cup \text{Ap}(S, m) \rangle \subset T$, esto es, $S \subset T$, por lo que T también tiene complemento finito y T es un semigrupo numérico.

Finalmente, se prueba que $\text{Ap}(T, m) = \{0, w(1) - m, \dots, w(m - 1) - m\}$. Sea $l(i) = w(i) - m$ para todo $i \in \{1, \dots, m - 1\}$. Ahora, como S tiene dimensión máxima, por el

Corolario 2.1.6 se tiene que $w(i) + w(j) > w((i+j) \bmod m)$ para todo $i, j \in \{1, \dots, m-1\}$. En otras palabras, $w(i) + w(j) = km + w((i+j) \bmod m)$ con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y así:

$$\begin{aligned} l(i) + l(j) &= (w(i) - m) + (w(j) - m), \\ &= (w(i) + w(j)) - 2m, \\ &= km + w((i+j) \bmod m) - 2m, \\ &\geq w((i+j) \bmod m) - m, \\ &= l((i+j) \bmod m). \end{aligned}$$

Luego, por la Proposición 2.1.5, vale que $\text{Ap}(T, m) = \{0, w(1) - m, \dots, w(m-1) - m\}$. \square

Se pueden resumir las ideas de los Corolarios 2.1.7 y 2.1.10 en el siguiente resultado.

Corolario 2.1.11. *Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los semigrupos numéricos con multiplicidad m y número de Frobenius f con el conjunto de semigrupos numéricos de dimensión máxima que poseen número de Frobenius $f + m$, multiplicidad m y cuyos generadores minimales distintos de m son mayores que $2m$.*

Demostración. Sea S un semigrupo numérico con $m(S) = m$ y $F(S) = f$, por el Corolario 2.1.7, $T = \langle m, w(1) + m, \dots, w(m-1) + m \rangle$ es un semigrupo numérico con dimensión máxima, donde $m(T) = m$ y como $w(i) > m$ para todo $i \in \{1, \dots, m-1\}$, entonces $w(i) + m > m + m = 2m$; además, $\text{Ap}(T, m) = \{0, w(1) + m, \dots, w(m-1) + m\}$, en consecuencia,

$$\begin{aligned} F(T) &= \text{máx}(\text{Ap}(T, m)) - m, \\ &= [\text{máx}(\text{Ap}(S, m)) + m] - m, \\ &= [\text{máx}(\text{Ap}(S, m)) - m] + m, \\ &= F(S) + m = f + m. \end{aligned}$$

Ahora, sea T un semigrupo numérico de dimensión máxima tal que $m(T) = m$, $F(T) = f + m$ y cuyos generadores minimales distintos de m son mayores que $2m$. Entonces, por el Corolario 2.1.10, se tiene que $S = \langle m, w(1) - m, \dots, w(m-1) - m \rangle$ es un semigrupo numérico con $m(S) = m$ pues $w(i) - m > 2m - m = m$ para todo

$i \in \{1, \dots, m-1\}$ y

$$\begin{aligned} F(S) &= \text{máx}(\mathbf{Ap}(S, m)) - m, \\ &= [\text{máx}(\mathbf{Ap}(T, m) - m)] - m, \\ &= F(T) - m = f + m - m = f. \end{aligned}$$

□

Observación. Si se quisiera construir el conjunto de todos los semigrupos numéricos, según el Corolario 2.1.11, bastaría con construir el conjunto de los semigrupos numéricos con dimensión máxima. Es decir, los semigrupos numéricos de dimensión máxima pueden utilizarse para representar todas las clases de semigrupos numéricos.

Notación. Para un entero z y un conjunto $A \subseteq \mathbb{Z}$, el conjunto $\{z+a \mid a \in A\}$ es denotado por $z+A$.

Proposición 2.1.12. *Sea S un semigrupo numérico. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- 1) S tiene dimensión máxima.
- 2) Para cada $x, y \in S^*$, $x+y-m(S) \in S$.
- 3) $-m(S) + S^*$ es un semigrupo numérico.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) : Note que si $x-m(S) \in S$ o $y-m(S) \in S$, entonces como S es cerrado bajo la suma, se tiene que $x+y-m(S) \in S$. Ahora, suponga que $x-m(S) \notin S$ y $y-m(S) \notin S$, es decir, $x, y \in \mathbf{Ap}(S, m(S))$. Entonces, por el Corolario 2.1.6, se tiene que $x+y > z$, donde z es el único elemento de $\mathbf{Ap}(S, m(S))$ congruente a $x+y$ módulo $m(S)$, lo que significa que $x+y \notin \mathbf{Ap}(S, m(S))$, luego $x+y-m(S) \in S$.

2) \Rightarrow 3) : Observe que si $x \in S^*$, entonces $x-m(S) \geq 0$. Sean $x, y \in -m(S) + S^*$ luego existen $a, b \in S^*$ tales que $x = a - m(S)$ y $y = b - m(S)$. Por tanto

$$\begin{aligned} x+y &= (a-m(S)) + (b-m(S)), \\ &= (a+b-m(S)) - m(S), \end{aligned}$$

donde $a+b-m(S) \in S$ por hipótesis, lo que significa que $a+b-m(S) \in S^*$ o $a+b-m(S) = 0$. Si $a+b-m(S) \in S^*$, entonces $(a+b-m(S)) - m(S) \in -m(S) + S^*$ y este conjunto es cerrado bajo la suma. Ahora, note que $a+b-m(S)$ no puede ser 0, pues esto implicaría que $a+b = m(S)$, lo cual no es posible pues $a, b \in S^*$, lo cual implica que $a \geq m(S)$ y

$b \geq m(S)$, además, se tiene que $0 \in -m(S) + S^*$ pues $0 = m(S) - m(S)$, de esta manera, $-m(S) + S^*$ es un submonoide de \mathbb{N} . Para concluir, sea $w(i) \in \text{Ap}(S, m(S)) \setminus \{0\}$, entonces $w(i) + m(S) \in S^*$, $-m(S) + (w(i) + m(S)) = w(i)$ y $-m(S) + (m(S) + m(S)) = m(S)$, es decir, $\langle \{m(S)\} \cup \text{Ap}(S, m(S)) \rangle \subset -m(S) + S^*$, esto es, $S \subset -m(S) + S^*$, por lo que se concluye que $-m(S) + S^*$ es un semigrupo numérico.

3) \Rightarrow 1) : Sea $w(i)$ el único elemento de $\text{Ap}(S, m(S))$ congruente a i módulo $m(S)$ con $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Si $w(i) + w(j) = w((i+j) \text{ mód } m(S))$ con $i, j \in \{1, \dots, m-1\}$, entonces $w(i) - m(S) + w(j) - m(S) = w((i+j) \text{ mód } m(S)) - 2m(S) \notin \{x - m(S) \mid x \in S^*\}$, lo cual contradice el hecho de que $-m(S) + S^*$ es un semigrupo numérico, por tanto, $w(i) + w(j) > w((i+j) \text{ mód } m(S))$, y por el Corolario 2.1.6 se tiene que S tiene dimensión máxima. \square

Note que si se denota a $-m(S) + S^*$ por T , entonces

$$S = (m(S) + T) \cup \{0\}.$$

A partir de esto, se tiene la siguiente caracterización.

Corolario 2.1.13. *Sea S un semigrupo numérico. entonces S tiene dimensión máxima si y solo si, existe un semigrupo numérico T y $t \in T^*$ tal que $S = (t + T) \cup \{0\}$.*

Demostración. Si S es un semigrupo numérico de dimensión máxima, entonces por la Proposición 2.1.12 se tiene que $-m(S) + S^*$ es un semigrupo numérico con $m(S) \in -m(S) + S^*$. De esta manera, tomando $T = -m(S) + S^*$, se tiene que $S = (m(S) + T) \cup \{0\}$.

Recíprocamente, suponga que existe un semigrupo numérico T y $t \in T^*$ tal que $S = (t + T) \cup \{0\}$. Es claro que $m(S) = t$, por lo que resta mostrar que $e(S) = t$. Para esto, observe que $M = \langle t, t + w(1), \dots, t + w(t-1) \rangle \subset (t + T) \cup \{0\} = S$, donde $w(i) \in \text{Ap}(T, t)$ para todo $i \in \{1, \dots, t-1\}$. Es claro que $0 \in M$, luego si $x \in (t + T)$, existe $a \in T$ tal que $x = a + t$. Por el Lema 1.2.8 sigue que $a = kt + w(i)$, donde $k \in \mathbb{N}$ y $w(i) \in \text{Ap}(T, t)$, por tanto,

$$\begin{aligned} x &= a + t, \\ &= (kt + w(i)) + t, \\ &= (k+1)t + w(i) \in M. \end{aligned}$$

De esta manera, $S \subset M$, lo que significa que estos 2 semigrupos numéricos son iguales. Ahora, se sabe que $M = \langle t, t + w(1), \dots, t + w(t-1) \rangle$ tiene dimensión máxima

por el Corolario 2.1.7, es decir, $m(M) = t = e(M)$, por lo que se concluye que $e(S) = t = m(S)$ y S es un semigrupo numérico de dimensión máxima. \square

Ejemplo 2.1.14. Si $S = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow\}$, entonces $(8 + S) \cup \{0\} = \{0, 8, 11, 13, 14, 16, \rightarrow\}$ es un semigrupo numérico de dimensión máxima, donde $(8 + S) \cup \{0\} = \langle 8, 11, 13, 14, 17, 18, 20, 23 \rangle$.

Lema 2.1.15. Sean S y T semigrupos numéricos, $s \in S^*$ y $t \in T^*$. Entonces $(s+S) \cup \{0\} = (t+T) \cup \{0\}$ si y solo si $S = T$ y $s = t$.

Demostración. Sean $H_1 = (s+S) \cup \{0\}$ y $H_2 = (t+T) \cup \{0\}$ y suponga que $H_1 = H_2$. Se tiene que $s = m(H_1) = m(H_2) = t$, es decir, $s = t$. Ahora, note que

$$S = -s + (s+S) = -s + (t+T) = -t + (t+T) = T.$$

Por lo que se tiene que $S = T$ y $s = t$. La recíproca es trivial, lo que concluye la demostración. \square

Definición 2.1.16. Sea S un semigrupo numérico, se define un **ideal relativo** I de S como un subconjunto de \mathbb{Z} tal que $I + S \subset S$ y $s + I = \{s + i \mid i \in I\} \subset S$ para algún $s \in S$. Un **ideal** de S es un ideal relativo que está contenido en S .

Observe que si S es un semigrupo numérico y $s \in S^*$, entonces $s+S$ es un ideal de S . Este tipo de ideal es llamado **ideal principal** de S . Semigrupos numéricos de la forma $(x+S) \cup \{0\}$, donde S es un semigrupo numérico y $x \in S^*$ son llamados **pi-semigrupos** (pi viene de *principal ideal*). Dado esto, se define el conjunto

$$\mathcal{PI}(S) = \{(x+S) \cup \{0\} \mid x \in S^*\}.$$

Si $x \neq 1$ y $h \neq 0$ no pertenece a $(x+S) \cup \{0\}$, entonces $h \notin (x+S)$, luego $h < x$ o no existe $s \in S$ tal que $h = x+s$, esto es, $h-x \in G(S)$. Note que $h \leq F(S)$ en ambos casos, y como $F(S)+x \in G((x+S) \cup \{0\})$, sigue que $F((x+S) \cup \{0\}) = F(S)+x$. Por otra parte, si $y \in G(S)$, se tiene que $y+x \notin (x+S) \cup \{0\}$, lo cual implica que $m((x+S) \cup \{0\}) = x$ y se concluye que $g((x+S) \cup \{0\}) = g(S) + x - 1$. De lo anterior sigue que si S_1 y S_2 son elementos de $\mathcal{PI}(S)$, entonces $S_1 = S_2$ si y solo si $F(S_1) = F(S_2)$ y $g(S_1) = g(S_2)$.

Proposición 2.1.17. El conjunto $\{\mathcal{PI}(S) \mid S \text{ es un semigrupo numérico}\}$ es una partición del conjunto de los semigrupos numéricos con dimensión máxima.

Demostración. Consecuencia inmediata del Corolario 2.1.13 y el Lema 2.1.15. \square

Esta proposición nos dice que dado un semigrupo numérico fijo es posible construir una cantidad infinita de semigrupos numéricos de dimensión máxima, y que diferentes semigrupos numéricos generan diferentes semigrupos numéricos de dimensión máxima. Además de esto, todo semigrupo numérico de dimensión máxima puede ser escrito de la forma $(x + S) \cup \{0\}$ para algún semigrupo numérico S y $x \in S^*$.

2.1.1. Semigrupos Numéricos Arf En esta subsección se introduce el concepto de **semigrupo numérico Arf** y se muestran algunas caracterizaciones para los mismos, además, se va a mostrar como computar el menor semigrupo numérico Arf que contiene un semigrupo numérico dado.

Definición 2.1.18. Un semigrupo numérico S es llamado **Arf** si posee la propiedad de Arf, esto es, si para todos $x, y, z \in S$ con $x \geq y \geq z$, entonces $x + y - z \in S$.

Note que por la Proposición 2.1.12 un semigrupo numérico Arf tiene dimensión máxima.

Ejemplo 2.1.19. Si m es un entero positivo, entonces el semigrupo numérico ordinario $\{0, m, \rightarrow\}$ es un semigrupo numérico con la propiedad de Arf. Observe que si se considera el semigrupo numérico T del ejemplo 2.1.14, se tiene que T no tiene la propiedad de Arf, pues $14 + 14 - 13 = 15 \notin T$.

Proposición 2.1.20. Sea S un semigrupo numérico y $x \in S^*$. Entonces S es Arf si y solo si $S' = (x + S) \cup \{0\}$ es Arf. En particular, S es Arf si y solo si los elementos de $\mathcal{PI}(S)$ son Arf.

Demostración. Suponga que S es un semigrupo numérico Arf y sean $a, b, c \in S'$ con $a \geq b \geq c$. Note que si $c = 0$, entonces $a + b - c = a + b \in S'$. Sea $c \neq 0$, entonces existen $a_1, b_1, c_1 \in S$ tales que $a = x + a_1$, $b = x + b_1$ y $c = x + c_1$, y como $a \geq b \geq c$ se tiene que $a_1 \geq b_1 \geq c_1$, por tanto,

$$\begin{aligned} a + b - c &= (x + a_1) + (x + b_1) - (x + c_1), \\ &= (a_1 + b_1 - c_1) + x, \end{aligned}$$

luego, como $a_1 + b_1 - c_1 \in S$ por hipótesis, se tiene que $a + b - c \in x + S \subset S'$, por lo que se concluye que S' es Arf.

Recíprocamente, si S' es Arf, se tiene que todo $a, b, c \in S'$ con $a \geq b \geq c$, $a + b - c \in S'$. De esta manera, si $c \neq 0$, entonces $a, b, c \in S(x + S)$ y existen $a_1, b_1, c_1 \in S$ tales que $a = x + a_1$, $b = x + b_1$ y $c = x + c_1$, así,

$$\begin{aligned} a + b - c &= (x + a_1) + (x + b_1) - (x + c_1), \\ &= (a_1 + b_1 - c_1) + x, \end{aligned}$$

por lo que $a_1 + b_1 - c_1 \in S$ ó $(a_1 + b_1 - c_1) + x = 0$. Si se tuviese que $(a_1 + b_1 - c_1) + x = 0$, esto implicaría que $a_1 + b_1 + x = c_1$, lo cual contradice que $a_1 \geq b_1 \geq c_1$, así, S es un semigrupo numérico Arf. \square

Sea S un semigrupo numérico Arf. Entonces, S posee dimensión máxima, y por el Corolario 2.1.13, existe un semigrupo numérico S' y $x \in S' \setminus \{0\}$ tal que $S = (x + S') \cup \{0\}$. Si $S \neq \mathbb{N}$, entonces $S \subsetneq S'$. Además, por la Proposición 2.1.20, S' es Arf. Repitiendo los mismos argumentos para S' , es posible obtener un semigrupo numérico S'' y $y \in S''$ tal que $S' = (y + S'') \cup \{0\}$. Note además que como $\mathbb{N} \setminus S$ es finito, entonces este proceso es finito, por lo que se construye la siguiente cadena descendente finita de semigrupos numéricos Arf:

$$S = S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \cdots \subsetneq S_n = \mathbb{N}$$

donde $S_i = (x_{i+1} + S_{i+1}) \cup \{0\}$, para algún $x_{i+1} \in S_{i+1} \setminus \{0\}$

Corolario 2.1.21. *Sea S un subconjunto propio de \mathbb{N} , entonces, S es un semigrupo numérico Arf si y solo si, existen enteros positivos x_1, \dots, x_n tales que*

$$S = \{0, x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \cdots + x_n, \rightarrow\}$$

y $x_i \in \{x_{i+1}, x_{i+1} + x_{i+2}, \dots, x_{i+1} + \cdots + x_n, \rightarrow\}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración. Suponga que S es un semigrupo numérico Arf, entonces, la construcción anterior para la sucesión $S = S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \cdots \subsetneq S_n = \mathbb{N}$ donde $S_i = (x_{i+1} + S_{i+1}) \cup \{0\}$, para algún $x_{i+1} \in S_{i+1} \setminus \{0\}$ nos dice que $S = \{0, x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \cdots + x_n, \rightarrow\}$.

Recíprocamente, si $S = \{0, x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \cdots + x_n, \rightarrow\}$, entonces se tiene que,

$$S = (x_1 + (x_2 + (\cdots + ((x_n + \mathbb{N}) \cup \{0\}) \cdots)) \cup \{0\},$$

donde \mathbb{N} es Arf, por lo que si se aplica la Proposición 2.1.20 de manera repetida (pero finita), se tiene que S es un semigrupo numérico Arf. \square

Ejemplo 2.1.22. Tomando $x_1 = 14, x_2 = 9, x_3 = 5$ y $x_4 = 3$, se puede ver que esta sucesión de elementos cumplen las condiciones del Corolario 2.1.21, por lo que $S = \{0, 14, 23, 28, 31, \rightarrow\}$ es un semigrupo numérico Arf. Además de esto, por la Proposición

2.1.20 se tiene que $(14+S) \cup \{0\}$, $(23+S) \cup \{0\}$, $(28+S) \cup \{0\}$ y $(31+S) \cup \{0\}$ también son semigrupos numéricos Arf, por lo que por la misma Proposición 2.1.20 se puede concluir que $T = -14 + S^*$ también es un semigrupo numérico Arf pues $S = (14 + T) \cup \{0\}$.

Proposición 2.1.23. *La intersección finita de semigrupos numéricos Arf es un semigrupo numérico Arf.*

Demostración. Sea

$$S = \bigcap_{i=1}^n S_i$$

donde S_i es un semigrupo numérico Arf para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Se tiene por la Proposición 1.1.5 que S es un semigrupo y como $0 \in S_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $0 \in S$ y S es un monoide de \mathbb{N} . Además, $g(S) \leq g(S_1) + \dots + g(S_n) < \infty$, por lo que se tiene que S es un semigrupo numérico. Para concluir, sean $a, b, c \in S$ con $a \geq b \geq c$, entonces $a, b, c \in S_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Como cada S_i es Arf, se tiene que $a + b - c \in S_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, es decir, $a + b - c \in S$ y S es Arf. \square

Sea S un semigrupo numérico. Como el complemento de S en \mathbb{N} es finito, se tiene que la cantidad de semigrupos numéricos Arf que contienen a S también es finita y la Proposición 2.1.23 nos asegura que la intersección de estos semigrupos numéricos también es un semigrupo numérico Arf que contiene a S (en realidad, es uno de estos). Se va a denotar la anterior intersección por $\text{Arf}(S)$ y se llamará la *cerradura Arf de S* . Note además que esto implica que la cerradura Arf de S es el menor semigrupo numérico Arf que contiene a S respecto a la inclusión de conjuntos.

Sea X un subconjunto no vacío de \mathbb{N} con $\text{mcd}(X) = 1$. Por la Proposición 1.2.2, se tiene que $\langle X \rangle$ es un semigrupo numérico. Además, cualquier semigrupo numérico Arf que contenga a X , debe necesariamente contener a $\langle X \rangle$, por lo que tiene sentido hablar de la *cerradura Arf de X* , definida como $\text{Arf}(\langle X \rangle)$. Se denotará $\text{Arf}(X)$ al conjunto $\text{Arf}(\langle X \rangle)$.

Computar el conjunto de semigrupos numéricos que contienen a un semigrupo numérico dado (dígase, S) es bastante complicado. Además, se tendría que determinar cuáles de estos son semigrupos numéricos Arf y luego computar las intersecciones para determinar el menor de todos estos. Por tanto, se va a demostrar una forma más eficiente para computar la cerradura Arf de S .

Lema 2.1.24. *Sea S un submonoide de \mathbb{N} , entonces,*

$$S' = \{x + y - z \mid x, y, z \in S, x \geq y \geq z\}$$

es un submonoide de \mathbb{N} y $S \subseteq S'$.

Demostración. Sea $x \in S$, entonces $x = x + x - x \in S'$, lo cual prueba que $S \subseteq S'$, por lo que se tiene que $S' \subseteq \mathbb{N}$. Ahora, sean $a, b \in S'$, por lo que existen $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in S$ tales que $a = x_1 + y_1 - z_1$ y $b = x_2 + y_2 - z_2$ con $x_1 \geq y_1 \geq z_1$ y $x_2 \geq y_2 \geq z_2$. Así,

$$\begin{aligned} a + b &= (x_1 + y_1 - z_1) + (x_2 + y_2 - z_2), \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2), \end{aligned}$$

donde $x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 \in S$ y $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \geq z_1 + z_2$, por lo que se tiene que $a + b \in S'$ y S' es un submonoide de \mathbb{N} . \square

Para un submonoide $S \subseteq \mathbb{N}$ dado y $n \in \mathbb{N}$, se define de manera recursiva S^n como:

- $S^0 = S$,
- $S^{n+1} = (S^n)'$.

La cadena $\{S^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene la siguiente propiedad.

Proposición 2.1.25. *Sea S un semigrupo numérico, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $S^k = \text{Arf}(S)$.*

Demostración. Note que $S^n \subseteq \text{Arf}(S)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, por inducción sobre n , si $n = 0$, entonces $S^0 = S \subseteq \text{Arf}(S)$. Ahora, se asume que $S^n \subseteq \text{Arf}(S)$ y se va a demostrar que $S^{n+1} \subseteq \text{Arf}(S)$. Sea $x \in S^{n+1}$, entonces existen $a, b, c \in S^n$ con $a \geq b \geq c$ tales que $x = a + b - c$; por hipótesis de inducción, se sabe que $S^n \subseteq \text{Arf}(S)$, luego $a, b, c \in \text{Arf}(S)$ y se tiene que $x = a + b - c \in \text{Arf}(S)$, lo cual implica que $S^{n+1} \subseteq \text{Arf}(S)$. Así, por el Lema 2.1.24, $S^n \subseteq S^{n+1}$, $S \subseteq S^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo que se vió anteriormente, el número de semigrupos numéricos que contienen a S es finito, por lo que $S^k = S^{k+1}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Luego, como S^k es Arf y $\text{Arf}(S)$ es el menor semigrupo numérico Arf que contiene a S , sigue que $\text{Arf}(S) \subseteq S^k$, por lo que se concluye que $S^k = \text{Arf}(S)$. \square

Aunque ésta sea una buena caracterización para la cerradura Arf de un semigrupo numérico S , aún no se ha mostrado como computar S^k . Por tanto, es necesario construir algunas herramientas más para calcular la cerradura Arf de un semigrupo numérico de manera efectiva.

Lema 2.1.26. *Sean $m, r_1, r_2, \dots, r_p, n \in \mathbb{N}$ tales que $\text{mcd}(m, r_1, r_2, \dots, r_p) = 1$. Entonces,*

$$m + \langle m, r_1, \dots, r_p \rangle^n \subseteq \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p).$$

Demostración. Llamando $\langle m, r_1, \dots, r_p \rangle = H$, se va a hacer inducción sobre n . Para $n = 0$, se debe demostrar que $m + H \subseteq \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$. Sean $i, j \in \{1, \dots, p\}$. Entonces $m, m + r_i, m + r_j \in \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$, luego, $(m + r_i) + (m + r_j) - m = m + r_i + r_j \in \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$. Ahora, tome $k \in \{1, \dots, p\}$, luego, $m, m + r_i + r_j, m + r_k \in \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$, por lo que $(m + r_i + r_j) + (m + r_k) - m = m + r_i + r_j + r_k \in \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$. Repitiendo este proceso de manera finita (pues hay finitos elementos en $\{1, \dots, p\}$), se tiene que para todos $a, a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{N}$, $m + (am + a_1r_1 + \dots + a_pr_p) \in \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$, por lo tanto, $m + H \subseteq \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$.

Ahora, suponga que $m + H^n \subseteq \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$ y se mostrará que $m + H^{n+1} \subseteq \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$. Sea $a \in m + H^{n+1}$, luego $a = m + b$ donde $b \in H^{n+1}$. Luego, existen $x, y, z \in H^n$ con $x \geq y \geq z$ tales que $b = x + y - z$. De esta manera, es válido que $a = m + b = m + x + y - z = (m + x) + (m + y) - (m + z)$ y por la hipótesis de inducción, $m + x, m + y, m + z \in \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$, por lo que se concluye que $a \in \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$ y por lo tanto, $m + \langle m, r_1, \dots, r_p \rangle^{n+1} \subseteq \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$. \square

Proposición 2.1.27. Sean $m, r_1, r_2, \dots, r_p, n \in \mathbb{N}$ tales que $\text{mcd}(m, r_1, r_2, \dots, r_p) = 1$, entonces,

$$\text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p) = (m + \text{Arf}(m, r_1, \dots, r_p)) \cup \{0\}.$$

Demostración. Por la Proposición 2.1.25 si $S = \langle m, r_1, \dots, r_p \rangle$, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $S^k = \text{Arf}(S)$. Ahora, el Lema 2.1.26 dice que para todo $n \in \mathbb{N}$, $m + \langle m, r_1, \dots, r_p \rangle^n \subseteq \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$, en particular para $n = k$, por lo que se tiene que $(m + \text{Arf}(S)) \cup \{0\} \subseteq \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$.

Por otro lado, observe que $m, m + r_1, \dots, m + r_p \in (m + \text{Arf}(S)) \cup \{0\}$ y por la Proposición 2.1.20, $(m + \text{Arf}(S)) \cup \{0\}$ es un semigrupo numérico Arf. Con todo esto, como $\text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$ es el menor semigrupo numérico Arf que contiene a $\text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$, sigue que $\text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p) \subseteq (m + \text{Arf}(S)) \cup \{0\}$, por lo que se concluye que la igualdad es verdadera. \square

Corolario 2.1.28. Sean m, r_1, \dots, r_p enteros no negativos tales que $\text{mcd}(m, r_1, r_2, \dots, r_p) = 1$. Entonces,

$$F(\text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)) = m + F(\text{Arf}(m, r_1, \dots, r_p)).$$

Sea $X \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $\text{mcd}(X) = 1$. Defina de manera recursiva la siguiente

sucesión de subconjuntos de \mathbb{N} :

- $A_1 = X$;
- $A_{n+1} = (\{x - \text{mín } A_n \mid x \in A_n\} \setminus \{0\}) \cup \{\text{mín } A_n\}$.

Como consecuencia del algoritmo de Euclides para el cálculo de $\text{mcd}(X)$, se tiene que existe $q = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \in A_k\}$, pues $\text{mcd}(X) = 1$.

Proposición 2.1.29. *Con la notación anterior, sigue que:*

$$\text{Arf}(X) = \{0, \text{mín } A_1, \text{mín } A_1 + \text{mín } A_2, \dots, \text{mín } A_1 + \dots + \text{mín } A_{q-1}, \rightarrow\}.$$

Demostración. Como $1 \in A_q$, $\text{Arf}(A_q) = \mathbb{N}$ y por la Proposición 2.1.27, es válido que $\text{Arf}(A_{q-1}) = (\text{mín } A_{q-1} + \mathbb{N}) \cup \{0\}$, es decir,

$$\text{Arf}(A_{q-1}) = \{0, \text{mín } A_{q-1}, \rightarrow\}.$$

Asuma, como hipótesis de inducción que

$$\text{Arf}(A_{q-i}) = \{0, \text{mín } A_{q-i}, \text{mín } A_{q-i} + \text{mín } A_{q-i+1}, \dots, \text{mín } A_{q-i} + \dots + \text{mín } A_{q-1}, \rightarrow\}.$$

Se debe mostrar que

$$\text{Arf}(A_{q-i-1}) = \{0, \text{mín } A_{q-i-1}, \text{mín } A_{q-i-1} + \text{mín } A_{q-i}, \dots, \text{mín } A_{q-i-1} + \dots + \text{mín } A_{q-1}, \rightarrow\}.$$

Por la Proposición 2.1.27, se tiene que $\text{Arf}(A_{q-i-1}) = (\text{mín } A_{q-i-1} + \text{Arf}(A_{q-i})) \cup \{0\}$, así, por la hipótesis de inducción se obtiene el resultado. \square

Ejemplo 2.1.30. Se computa $\text{Arf}(5, 12, 17)$:

$$A_1 = \{5, 12, 17\}, \text{mín } A_1 = 5,$$

$$A_2 = \{5, 7, 17\}, \text{mín } A_1 = 5,$$

$$A_3 = \{2, 5, 7\}, \text{mín } A_1 = 2,$$

$$A_4 = \{2, 3, 5\}, \text{mín } A_1 = 2,$$

$$A_5 = \{1, 2, 3\}, \text{mín } A_1 = 1.$$

De esta manera $\text{Arf}(5, 12, 17) = \{0, 5, 10, 12, 14, \rightarrow\}$.

Todo esto ya está implementado en GAP y SageMath, ver A.5 del Apéndice A.

2.1.2. Semigrupos Numéricos Saturados En esta subsección se introduce el concepto de **semigrupo numérico saturado** y se muestran algunas caracterizaciones para los mismos, además, se va a mostrar como computar el menor semigrupo numérico saturado que contiene un semigrupo numérico dado.

Definición 2.1.31. Sea S un semigrupo numérico. Se dice que S es un **semigrupo numérico saturado** si para todo $s, s_1, \dots, s_r \in S$ con $s_i \leq s, i \in \{1, \dots, r\}$ y $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{Z}$ con $z_1 s_1 + \dots + z_r s_r \geq 0$ entonces $s + z_1 s_1 + \dots + z_r s_r \in S$.

Lema 2.1.32. *Todo semigrupo numérico saturado tiene la propiedad de Arf.*

Demostración. Sea S un semigrupo numérico saturado y sean $x, y, z \in S$ tales que $x \geq y \geq z$. Esto implica que $y - z \geq 0$ y por la definición de semigrupo numérico saturado, se tiene que $x + y - z \in S$, esto es, S es Arf. \square

Ejemplo 2.1.33. El semigrupo numérico $\{0, m, \rightarrow\}$ es saturado. El semigrupo numérico $S = \langle 7, 11, 13, 15, 16, 17, 19 \rangle$ es un semigrupo numérico Arf pero no es saturado pues note que $7, 11 \in S$ pero $12 = 11 \times 2 - 3 \times 7 \notin S$. Similarmente, el semigrupo numérico $T = \{0, 14, 23, 28, 31, \rightarrow\}$ también es Arf, pero no es saturado pues $23 + 2 \times 23 - 3 \times 14 = 27 \notin T$.

Ahora, se va a describir una caracterización para los semigrupos numéricos saturados. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ y $a \in A$. Se define el número

$$d_A(a) = \text{mcd}(\{x \in A \mid x \leq a\}).$$

Lema 2.1.34. *Sea S un semigrupo numérico saturado y $x \in S$, entonces $x + d_S(x) \in S$.*

Demostración. Sea $\{s_1, \dots, s_r\} = \{a \in S \mid a \leq x\}$. Por la identidad de Bézout, existen enteros z_1, \dots, z_r tales que $z_1 s_1 + \dots + z_r s_r = d_S(x) > 0$. Como S es saturado, se tiene que $x + d_S(x) \in S$. \square

Se va a mostrar que la propiedad anterior caracteriza a los semigrupos numéricos saturados.

Lema 2.1.35. *Sea A un subconjunto no vacío de enteros positivos tal que $\text{mcd}(A) = 1$ y $a + d_A(a) \in A$ para todo $a \in A$, entonces $a + kd_A(a) \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $A \cup \{0\}$ es un semigrupo numérico.*

Demostración. Se hace inducción sobre $d_A(a)$. Primero observe que $d_A(a) > 0$, por lo que primero se va a demostrar que si $d_A(a) = 1$ entonces $a + k \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 0$ es inmediato. Suponga que $a + k \in A$, luego como $0 \neq d_A(a + k) \leq d_A(a) = 1$, sigue que $d_A(a + k) = 1$. De esta manera, se concluye que $a + k + 1 = a + k + d_A(a + k) \in A$.

Asuma ahora que si $a' \in A$ y $d_A(a') < d_A(a)$ entonces $a' + kd_A(a') \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De esta manera, suponga que $d_A(a) \geq 2$ y es válido que $a + kd_A(a) \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Observe que si $d_A(a + kd_A(a)) = d_A(a)$ y $a + kd_A(a) \in A$, entonces $a + kd_A(a) + d_A(a + kd_A(a)) = a + (k + 1)d_A(a) \in A$. Además de esto, como $\text{mcd}(A) = 1$, existe $b \in A$ tal que $d_A(b) = 1$, por lo que para todo $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ con $a + xd_A(a) \geq b$ se obtiene que $d_A(a + xd_A(a)) < d_A(a)$. Sea t el menor entero positivo tal que $a + td_A(a) \in A$ y $d_A(a + td_A(a)) < d_A(a)$. Por la hipótesis de inducción, es válido que $a + td_A(a) + kd_A(a + td_A(a)) \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y es claro que $d_A(a + td_A(a))$ divide a $d_A(a)$, luego $d_A(a) = ld_A(a + td_A(a))$ donde $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, por lo tanto, $a + td_A(a) + \frac{k}{l}d_A(a) \in A$, para todo $k \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $a + (t + n)d_A(a) \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, como $a + kd_A(a) \in A$, para todo $k \in \{0, \dots, t\}$ por la definición de t , sigue que $a + kd_A(a) \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Finalmente, queda ver que $A \cup \{0\}$ es un semigrupo numérico. Como $\text{mcd}(A) = 1$, basta con mostrar que A es cerrado bajo la suma. Sean $a, b \in A$ con $a \leq b$. Entonces $d_A(b)$ divide a $d_A(a)$, por lo que existe $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $d_A(a) = \lambda d_A(b)$. Además de esto, $d_A(a)$ divide a a , por lo que existe $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $a = \mu d_A(a)$. Así, $a + b = \mu d_A(a) + b = \lambda \mu d_A(b) + b \in A$, por lo que se concluye que $A \cup \{0\}$ es un semigrupo numérico. \square

Proposición 2.1.36. *Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{N} tal que $0 \in A$ y $\text{mcd}(A) = 1$. Las siguientes condición son equivalentes:*

- 1) A es un semigrupo numérico saturado.
- 2) $a + d_A(a) \in A$ para todo $a \in A \setminus \{0\}$.
- 3) $a + kd_A(a) \in A$ cualquier $a \in A \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) : Inmediato por el Lema 2.1.34.

2) \Rightarrow 3) : Inmediato del Lema 2.1.35.

3) \Rightarrow 1) : Por el Lema 2.1.35, se tiene que A es un semigrupo numérico, por lo que basta probar que A es saturado. Sean $a, a_1, \dots, a_r \in A$ tales que $a_i \leq a$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$ y $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{Z}$ tales que $z_1 a_1 + \dots + z_r a_r \geq 0$. Como $a_i \leq a$, se tiene que $d_A(a)$ divide a a_i para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, por lo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $z_1 a_1 + \dots + z_r a_r = kd_A(a)$ y así $a + z_1 a_1 + \dots + z_r a_r = a + kd_A(a) \in A$ por hipótesis, por lo que se concluye que A es saturado. \square

Ahora se va a enfocar en obtener caracterizaciones de la propiedad de la saturación de semigrupos numéricos similares a las dadas en la Proposición 2.1.20 y el Corolario 2.1.21 para los semigrupos numéricos Arf. Sin embargo, estas caracterizaciones no son tan generosas como las mencionadas anteriormente.

Proposición 2.1.37. *Sea S un semigrupo numérico. Las siguientes son equivalentes:*

1) S es saturado.

2) Existe $x \in S^*$ tal que $(x + S) \cup \{0\}$ es un semigrupo numérico saturado.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) : Asuma que $S = \{0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < \dots\}$. Se va a probar que $H = (s_1 + S) \cup \{0\} = \{0 < s_1 < s_1 + s_2 < \dots < s_1 + s_n < \dots\}$ es saturado. Por la Proposición 2.1.36, basta mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $s_1 + s_n + d_H(s_1 + s_n) \in H$. Observe que, como S es saturado, entonces $s_n + d_S(s_n) \in S$ y además $d_S(s_n) = d_H(s_1 + s_n)$ ya que si x divide los elementos $\{0, s_1, \dots, s_n\}$, entonces x divide a $\{0, s_1, \dots, s_1 + s_n\}$ y viceversa. De esta manera, $s_1 + s_n + d_H(s_1 + s_n) = s_1 + (s_n + d_S(s_n)) \in (s_1 + S) \cup \{0\}$.

2) \Rightarrow 1) : Si $S = \{0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < \dots\}$ entonces $K = (x + S) \cup \{0\} = \{0 < x < x + s_1 < \dots < x + s_n < \dots\}$. Como $\text{mcd}(0, x, s_1, \dots, s_n) = \text{mcd}(0, x, x + s_1, \dots, x + s_n)$, se tiene que $d_K(x + s_n)$ divide $d_S(s_n)$, esto es, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $ld_K(x + s_n) = d_S(s_n)$. Así, como K es un semigrupo numérico saturado por hipótesis, sigue que $x + s_n + d_S(s_n) = x + s_n + ld_K(x + s_n) \in K = (x + S) \cup \{0\}$, luego $s_n + d_S(s_n) \in S$, por lo que se concluye que S es un semigrupo numérico saturado por la Proposición 2.1.36. \square

Corolario 2.1.38. *Sea S un semigrupo numérico. Entonces S es saturado si y solo si $(m(S) + S) \cup \{0\}$ es saturado.*

Demostración. La primera parte de la demostración de la Proposición 2.1.37 contiene la primera implicación. Recíprocamente, como $(m(S) + S) \cup \{0\}$ es saturado, entonces se tiene la condición 2 de la Proposición 2.1.37, lo cual implica que S es saturado. \square

Corolario 2.1.39. *Sea S un subconjunto propio de \mathbb{N} . Entonces S es un semigrupo numérico saturado si y solo si, existen enteros positivos x_1, \dots, x_n tales que,*

$$S = \{0, x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n, \rightarrow\}$$

y

$$\text{mcd}(x_1, \dots, x_k) \in \{x_{k+1}, x_{k+1} + x_{k+2}, \dots, x_{k+1} + \dots + x_n, \rightarrow\}$$

para todo $k \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración. Suponga que S es un semigrupo numérico saturado, como S es Arf por el Lema 2.1.32, sigue por el Corolario 2.1.21 que existen enteros x_1, \dots, x_n tales que

$$S = \{0, x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n, \rightarrow\}.$$

De esto, como S es saturado, sigue que $(x_1 + \cdots + x_k) + d_S(x_1 + \cdots + x_k) \in S$ donde $d_S(x_1 + \cdots + x_k) = \text{mcd}(x_1, \dots, x_k)$, luego $(x_1 + \cdots + x_k) + \text{mcd}(x_1, \dots, x_k) \in \{0, x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \cdots + x_n, \rightarrow\}$. Ahora, observe que todos los elementos de S mayores a $x_1 + \cdots + x_k$ son de la forma $x_1 + \cdots + x_k + l$ con $l \in \{x_{k+1}, x_{k+1} + x_{k+2}, \dots, x_{k+1} + \cdots + x_n, \rightarrow\}$, por lo que se tiene que $\text{mcd}(x_1, \dots, x_k) \in \{x_{k+1}, x_{k+1} + x_{k+2}, \dots, x_{k+1} + \cdots + x_n, \rightarrow\}$.

Por otro lado, utilizando la Proposición 2.1.36, basta con mostrar que $(x_1 + \cdots + x_k) + d_S(x_1 + \cdots + x_k) \in S$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Por lo que se vió en la parte anterior, esto es equivalente a demostrar que $(x_1 + \cdots + x_k) + \text{mcd}(x_1, \dots, x_k) \in S$, lo cual sigue inmediatamente de la hipótesis. \square

Ejemplo 2.1.40. Por el Corolario 2.1.39, el semigrupo numérico $S = \{0, 14, 23, 24, \rightarrow\}$ es saturado y por el Corolario 2.1.38 sigue que $(14 + S) \cup \{0\}$ y $-14 + S^*$ son saturados.

Tal y como ocurre para los semigrupos numéricos Arf, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.1.41. *La intersección finita de semigrupos numéricos saturados es un semigrupo numérico saturado.*

Demostración. Esto sigue de la definición de semigrupo numérico saturado. \square

En este orden de ideas, tiene sentido hablar de la **cerradura saturada** de un semigrupo numérico (o de un subconjunto de enteros positivos con máximo común divisor igual a 1) de la misma manera que se hizo para semigrupos numéricos Arf. Dado un semigrupo numérico S , se denota por $Sat(S)$ la intersección de todos los semigrupos numéricos saturados que contienen a S o, en otras palabras, el menor (respecto a la inclusión de conjuntos) semigrupo numérico saturado que contiene a S y se llamará a este semigrupo numérico la **cerradura saturada** de S .

La cerradura saturada de un semigrupo numérico (o de un subconjunto de enteros positivos con máximo común divisor igual a 1) puede ser computado de la siguiente manera:

Proposición 2.1.42. *Sean $n_1 < n_2 < \dots < n_e$ enteros positivos tales que $\text{mcd}(n_1, \dots, n_e) = 1$. Para cada $i \in \{1, \dots, e\}$, se toma $d_i = \text{mcd}(n_1, \dots, n_e)$ y para todo $j \in \{1, \dots, e-1\}$, defina $k_j = \text{máx}(\{k \in \mathbb{N} \mid n_j + kd_j < n_{j+1}\})$. Entonces,*

$$Sat(n_1, \dots, n_e) = \{0, n_1, n_1 + d_1, \dots, n_1 + k_1 d_1, n_2, n_2 + d_2, \dots, n_2 + k_2 d_2, \dots, n_{e-1}, n_{e-1} + d_{e-1}, \dots, n_{e-1} + k_{e-1} d_{e-1}, n_e, n_e + 1, \rightarrow\}.$$

Demostración. Sea

$$A = \{0, n_1, n_1 + d_1, \dots, n_1 + k_1 d_1, n_2, n_2 + d_2, \dots, n_2 + k_2 d_2, \dots, n_{e-1}, n_{e-1} + d_{e-1}, \dots, n_{e-1} + k_{e-1} d_{e-1}, n_e, n_e + 1, \rightarrow\}.$$

Note que $A \neq \emptyset$, $0 \in A$ y $\text{mcd}(A) = 1$. Además, se tiene que $d_A(n_i + k_i d_i) = d_i$ para todo $i \in \{1, \dots, e-1\}$, por lo que se puede ver que $(n_i + l d_i) + d_A(n_i + l d_i) \in A$ cuando $l < k_i$ y queda mostrar que $(n_i + k_i d_i) + d_A(n_i + k_i d_i) \in A$. Es válido que $(n_i + k_i d_i) + d_A(n_i + k_i d_i) = n_i + (k_i + 1)d_i \geq n_{i+1}$, luego, si $n_i + (k_i + 1)d_i \geq n_e$ se sabe que $n_i + (k_i + 1)d_i \in A$ y si $n_i + (k_i + 1)d_i < n_e$, existe $j \in \{i+1, \dots, e-1\}$ tal que $n_j \leq n_i + (k_i + 1)d_i < n_{j+1}$, por tanto como d_j divide n_i, d_i y n_j , existe $s \in \{0, 1, \dots, k_j\}$ tal que $n_i + (k_i + 1)d_i = n_j + s d_j$, así, se concluye que $a + d_A(a) \in A$ para todo $a \in A$ y por la Proposición 2.1.36 se tiene que A es un semigrupo numérico saturado con $n_1, \dots, n_e \in A$, esto es, $\text{Sat}(n_1, \dots, n_e) \subseteq A$.

Para la otra inclusión, sea $a \in A$. Entonces existe $i \in \{1, \dots, e\}$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $a = n_i + k d_i$ donde $d_e = 1$ y como $\{n_1, \dots, n_e\} \subset \text{Sat}(n_1, \dots, n_e)$, se tiene que $d_{\text{Sat}(n_1, \dots, n_e)}(n_i)$ divide a d_i , por lo que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $d_i = l d_{\text{Sat}(n_1, \dots, n_e)}(n_i)$. Así, por la Proposición 2.1.36, se sabe que $n_i + t d_{\text{Sat}(n_1, \dots, n_e)}(n_i) \in \text{Sat}(n_1, \dots, n_e)$ para todo $t \in \mathbb{N}$, lo que significa que $a = n_i + k d_i = k l d_{\text{Sat}(n_1, \dots, n_e)}(n_i) \in \text{Sat}(n_1, \dots, n_e)$. \square

Ejemplo 2.1.43. Tomando $n_1 = 6$, $n_2 = 10$ y $n_3 = 15$, se tiene que $d_1 = 6$, $d_2 = 2$ y $d_3 = 3$ y por la Proposición 2.1.42, $\text{Sat}(6, 10, 15) = \{0, 6, 10, 10 + 2, 10 + 4, 15, 15 + 1, \rightarrow\} = \{0, 6, 10, 12, 14, 15, \rightarrow\}$.

Todo esto ya está implementado en GAP y SageMath, ver A.5 del Apéndice A.

2.2. Semigrupos Numéricos Irreducibles

En esta sección se introduce el concepto de **semigrupo numérico irreducible**, se muestran algunas caracterizaciones para esta propiedad, se muestra cómo construir el conjunto de todos los semigrupos numéricos que contienen un semigrupo numérico dado, y cómo computar la descomposición de semigrupo numérico como intersección de semigrupos numéricos irreducibles

Definición 2.2.1. Un semigrupo numérico S es llamado **irreducible** si no puede ser escrito como la intersección de otros dos semigrupos numéricos que lo contienen propiamente, es decir, no existen S_1, S_2 semigrupos numéricos con $S \subsetneq S_1$ y $S \subsetneq S_2$ tales que $S = S_1 \cap S_2$.

Ejemplo 2.2.2. Sea $S = \langle 5, 7, 8, 9, 11 \rangle$, entonces $S = \langle 5, 6, 7, 8, 9 \rangle \cap \langle 4, 5, 7 \rangle$, por lo que se puede concluir que S no es irreducible; por otra parte, se tiene que $T = \langle 4, 5, 7 \rangle$ es irreducible.

Lema 2.2.3. Sea S un semigrupo numérico propio de \mathbb{N} ($S \subsetneq \mathbb{N}$), entonces $S \cup \{F(S)\}$ es un semigrupo numérico.

Demostración. Como S es un semigrupo numérico y $S \subset S \cup \{F(S)\}$, se tiene que el complemento de $S \cup \{F(S)\}$ es finito, por lo que basta con revisar que $F(S) + s \in S \cup \{F(S)\}$ para todo $s \in S \cup \{F(S)\}$. Note que $F(S) + s \geq F(S)$, luego $F(S) + s = F(S)$ o $F(S) + s \in S$, y en ambos casos se concluye que $F(S) + s \in S \cup \{F(S)\}$. \square

Teorema 2.2.4. Sea S un semigrupo numérico, las siguientes son equivalentes:

- 1) S es irreducible.
- 2) S es maximal en el conjunto de los semigrupos numéricos con número de Frobenius $F(S)$.
- 3) S es maximal en el conjunto de los semigrupos numéricos que no contienen a $F(S)$.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) : Sea T un semigrupo numérico tal que $S \subsetneq T$ y $F(T) = F(S)$, entonces $S = (S \cup \{F(S)\}) \cap T$ y como S es irreducible, se tiene necesariamente que $T = S$.

2) \Rightarrow 3) : Sea T un semigrupo numérico tal que $S \subsetneq T$ y $F(S) \notin T$, entonces se tiene que $F(S) = F(T)$ pues en caso contrario, esto contradice el hecho de que $F(S)$ es el mayor elemento de $G(S)$ y $G(T) \subseteq G(S)$, luego, por la hipótesis, se concluye que $S = T$.

3) \Rightarrow 1) : Sean S_1 y S_2 dos semigrupos numéricos que contienen a S propiamente, luego, por la hipótesis, $F(S) \in S_1$ y $F(S) \in S_2$, esto es, $S_1 \cap S_2 \neq S$ y S es irreducible. \square

2.2.1. Semigrupos Numéricos Simétricos y Pseudo-simétricos

Definición 2.2.5. Sea S un semigrupo numérico irreducible. Se dice que S es **simétrico** si $F(S)$ es impar, en caso contrario, es decir, si $F(S)$ es par, se dice que S es **pseudo-simétrico**.

Si S es un semigrupo numérico que no es irreducible, por el Teorema 2.2.4, existe un semigrupo numérico irreducible T que contiene a S y $F(S) = F(T)$. El siguiente resultado nos da una forma de construir este semigrupo numérico.

Lema 2.2.6. *Sea S un semigrupo numérico y asuma que existe*

$$h = \text{máx}\{x \in \mathbb{Z} \setminus S \mid F(S) - x \notin S \text{ y } x \neq F(S)/2\}.$$

Entonces $S \cup \{h\}$ es un semigrupo numérico con número de Frobenius $F(S)$.

Demostración. Es claro que $S \cup \{h\}$ tiene complemento finito en \mathbb{N} y $0 \in S \cup \{h\}$. Sea $H = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S \mid F(S) - x \notin S \text{ y } x \neq F(S)/2\}$ y note que si $x \in H$, entonces $F(S) - x \in H$ pues si no, entonces se tiene que $F(S) - x = F(S)/2 \Rightarrow x = F(S)/2 \Rightarrow x \notin H$ ó $F(S) - (F(S) - x) \in S \Rightarrow x \in S \Rightarrow x \notin H$. De esta manera, sigue que $h > F(S)/2$, pues en caso contrario, entonces $F(S) - h > F(S) - F(S)/2 = F(S)/2 > h$, lo cual contradice la maximalidad de h .

Sea $s \in S \setminus \{0\}$. Si $h + s \notin S$ entonces, por la maximalidad de h , se tiene que $F(S) - (h + s) = t \in S$ pues $h > F(S)/2$ y $s > 0$. Así, $F(S) - h = t + s \in S$, lo que contradice la definición de h , por lo que se concluye que $h + s \in S$ para todo $s \in S \setminus \{0\}$.

Si $2h \notin S$, entonces, otra vez por la maximalidad de h , se tiene que $F(S) - 2h = t \in S$. Por lo visto anteriormente, esto implica que $h + t \in S$ y $h + t = F(S) - h \in S$, lo que contradice la definición de h , así, $2h \in S$ y se concluye que $S \cup \{h\}$ es un semigrupo numérico. \square

Proposición 2.2.7. *Sea S un semigrupo numérico.*

- 1) *S es simétrico si y solo si $F(S)$ es impar y $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ implica que $F(S) - x \in S$.*
- 2) *S es pseudo-simétrico si y solo si $F(S)$ es par y $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ implica que $F(S) - x \in S$ ó $x = F(S)/2$.*

Demostración. Sea S un semigrupo numérico simétrico. Entonces, si existe $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ tal que $F(S) - x \notin S$, entonces, por el Lema 2.2.6, se tiene que h existe y por tanto, $S \cup \{h\}$ es un semigrupo numérico con número de Frobenius $F(S)$, lo que contradice la maximalidad de S dada por el Teorema 2.2.4.

Para la otra dirección, considerando el Teorema 2.2.4, basta demostrar que S es maximal en el conjunto de los semigrupos numéricos que no contienen a $F(S)$. Sea T un semigrupo numérico con $S \subsetneq T$ y sea $x \in T \setminus S \subset \mathbb{Z} \setminus S$, por hipótesis, $F(S) - x \in S$, luego $F(S) - x \in T$, lo cual implica que $F(S) = (F(S) - x) + x \in T$ y finalmente como $F(S)$ es impar, se concluye que S es simétrico.

La parte 2 es similar. \square

Corolario 2.2.8. *Sea S un semigrupo numérico.*

$$1) S \text{ es simétrico si y solo si, } g(S) = \frac{F(S) + 1}{2},$$

$$2) S \text{ es pseudo-simétrico si y solo si, } g(S) = \frac{F(S) + 2}{2}.$$

Observación. Por el Lema 1.3.5, si S es un semigrupo numérico, entonces $g(S) \geq \frac{F(S) + 1}{2}$. Como consecuencia de este Corolario, se tiene que los semigrupos numéricos irreducibles son aquellos con el menor género posible en términos de su número de Frobenius.

Corolario 2.2.9. *Todo semigrupo numérico de dimensión igual a 2 es simétrico.*

Ejemplo 2.2.10. Note que $\langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow\}$ es un semigrupo numérico simétrico. $\langle 4, 5, 7 \rangle = \{0, 4, 5, 7, \rightarrow\}$ es pseudo-simétrico, y $\langle 5, 6, 7 \rangle = \langle 5, 6, 7, 8 \rangle \cap \langle 5, 6, 7, 9 \rangle$ por lo que se tiene que $\langle 5, 6, 7 \rangle$ no es irreducible.

Los conjuntos de Apéry de los semigrupos numéricos irreducibles tienen formas especiales. Esta forma los caracteriza, como lo se verá en el resto de esta sección.

Lema 2.2.11. *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S^*$, si $x, y \in S$ cumplen que $x + y \in \text{Ap}(S, n)$, entonces se tiene que $\{x, y\} \subseteq \text{Ap}(S, n)$.*

Demostración. Es una consecuencia directa de la definición del conjunto de Apéry, puesto que si $x \notin \text{Ap}(S, n)$, lo cual es equivalente a $x - n \in S$, entonces $(x - n) + y = (x + y) - n \in S$, lo cual contradice el hecho de que $x + y \in \text{Ap}(S, n)$. \square

Proposición 2.2.12. *Sea S un semigrupo numérico y $n \in S^*$. Si $\text{Ap}(S, n) = \{a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1}\}$, entonces S es simétrico si y solo si $a_i + a_{n-1-i} = a_{n-1}$ para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$.*

Demostración. Suponga que S es simétrico, luego por la Proposición 1.3.3 se tiene que $F(S) = a_{n-1} - n$ y como $a_{n-1} - n \notin S$ y S es simétrico, $F(S) - (a_i - n) = a_{n-1} - a_i \in S$. Por tanto, se tiene que $[F(S) - (a_i - n)] + a_i = a_{n-1}$ y por el Lema 2.2.11, existe $j \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $a_{n-1} = a_i + a_j$ y como $a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1}$, se concluye que j debe ser igual a $n-1-i$.

Para la otra dirección, por hipótesis se tiene que $\{a_{n-1}\} = \text{Max}_{\leq S} \text{Ap}(S, n)$, luego, por la Proposición 1.4.5, $PF(S) = \{F(S)\}$, lo que significa que $\{a_{n-1} - n\} = \text{Max}_{\leq S} \mathbb{Z} \setminus S$, en particular, si $x \in \mathbb{Z} \setminus S$, entonces $F(S) - x \in S$ y observe que si $F(S)/2 \in \mathbb{Z}$, entonces $F(S)/2 \in \mathbb{Z} \setminus S$, pues en caso contrario se tendría que $F(S) = F(S)/2 + F(S)/2 \in S$, sin embargo, note que esto a su vez implicaría que $F(S)/2 = F(S) - F(S)/2 \in S$, una contradicción, por lo que $F(S)$ es impar y por la Proposición 2.2.7, S es simétrico. \square

Corolario 2.2.13. Sea S un semigrupo numérico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1) S es simétrico,
- 2) $PF(S) = \{F(S)\}$,
- 3) $t(S) = 1$.

Demostración. 1) \Leftrightarrow 2) : Es equivalente a la segunda parte de la demostración anterior.

2) \Leftrightarrow 3) : Inmediato por la definición del tipo de un semigrupo numérico y el hecho de que $F(S) \in PF(S)$. \square

Corolario 2.2.14. Sea S un semigrupo numérico y $n \in S^*$. Entonces S es simétrico si y solamente si

$$\text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, n) = \{F(S) + n\}.$$

Demostración. Inmediato por el corolario anterior. \square

Ejemplo 2.2.15. Sea $S = \langle 3, 5 \rangle$. entonces $F(S) = 7$ y $\text{Ap}(S, 3) = \{0, 5, 10\}$ y por tanto $\text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, 3) = \{10 = 7 + 3\}$.

Se puede construir una caracterización similar para los semigrupos numéricos pseudo-simétricos, pero teniendo cuidado con $F(S)/2$.

Lema 2.2.16. Sea S un semigrupo numérico pseudo-simétrico y $n \in S^*$. Entonces $F(S)/2 + n \in \text{Ap}(S, n)$.

Demostración. Como $F(S)/2 \notin S$, basta mostrar que $F(S)/2 + n \in S$. Suponga que $F(S)/2 + n \notin S$, entonces por la Proposición 2.2.7, $F(S)/2 - n = F(S) - (F(S)/2 + n) \in S$, lo que implica que $F(S)/2 = (F(S)/2 - n) + n \in S$, lo cual es un absurdo, por lo que se concluye que $F(S)/2 + n \in \text{Ap}(S, n)$. \square

Observe que este resultado implica que si S es pseudo-simétrico, entonces $F(S)/2 \in PF(S)$.

Proposición 2.2.17. Sea S un semigrupo numérico con número de Frobenius par y $n \in S^*$. Entonces S es pseudo-simétrico si y solo si:

$$\text{Ap}(S, n) = \{a_0 < a_1 < \dots < a_{n-2} = F(S) + n\} \cup \left\{ \frac{F(S)}{2} + n \right\}$$

donde $a_i + a_{n-2-i} = a_{n-2}$ para todo $i \in \{0, \dots, n-2\}$.

Demostración. Suponga que S es pseudo-simétrico. Entonces, por el Lema 2.2.16, $F(S)/2 + n \in \text{Ap}(S, n)$ y es claro que $F(S)/2 + n < \text{máx}(\text{Ap}(S, n)) = F(S) + n$, si $w \in \text{Ap}(S, n) \setminus \{F(S)/2 + n\}$, entonces $w - n \notin S$ y $w - n \neq F(S)/2$ y por la Proposición 2.2.7, se tiene que $F(S) - (w - n) \in S$, lo cual implica que $\text{máx} \text{Ap}(S, n) - w = F(S) + n - w \in S$ y por el Lema 2.2.11, sigue que $\text{máx} \text{Ap}(S, n) - w \in \text{Ap}(S, n)$. Además, es válido que $\text{máx}(\text{Ap}(S, n)) - w \neq F(S)/2 + n$, pues en caso contrario se tendría que $w = F(S)/2$. Con este caso especial solucionado, la demostración procede de manera análoga a la realizada para la primera parte de la Proposición 2.2.12.

Para la otra dirección, sea $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ tal que $x \neq F(S)/2$. Se va a demostrar que $F(S) - x \in S$. Sea $w \in \text{Ap}(S, n)$ tal que $w \equiv x \pmod{n}$, entonces $x = w - kn$, para algún $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, además $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pues se tiene que $x \equiv w \pmod{n}$ está en S si y solo si $w \leq x$, lo cual es equivalente a $x \notin S$ si y solo si $w > x$, ahora, separando lo anterior en dos casos.

1) Si $w = (F(S)/2) + n$, entonces

$$F(S) - x = F(S) - (F(S)/2 + n - kn) = F(S)/2 + (k - 1)n.$$

Luego, como $x \neq F(S)/2$, se tiene que $k > 1$, es decir, $F(S) - x \in S$.

2) Si $w \neq (F(S)/2) + n$, sigue que

$$F(S) - x = F(S) - w + kn = F(S) + n - w + (k - 1)n = a_{n-2} - w + (k - 1)n \in S,$$

ya que $a_{n-2} - w \in S$ por hipótesis.

□

Corolario 2.2.18. *Sea S un semigrupo numérico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- 1) S es pseudo-simétrico,
- 2) $PF(S) = \{F(S), F(S)/2\}$.

A diferencia de lo que ocurre con semigrupos numéricos simétricos, el hecho de que $t(S) = 2$ no implica que S sea pseudo-simétrico.

Ejemplo 2.2.19. Sea $S = \langle 5, 7, 8 \rangle$, entonces $\text{Ap}(S, 5) = \{0, 7, 8, 14, 16\}$ y $\text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, 5) = \{14, 16\}$, así $PF(S) = \{9, 11\}$, luego $t(S) = 2$ pero S no es pseudo-simétrico pues $F(S) = 11$.

Ejemplo 2.2.20. Sea $S = \langle 4, 5, 7 \rangle$, entonces $\text{Ap}(S, 4) = \{0, 5, 7, 10\}$ y $\text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, 4) = \{7, 10\}$, así $PF(S) = \{3, 6\} = \{F(S)/2, F(S)\}$. Por tanto, S es pseudo-simétrico.

Corolario 2.2.21. Sea S un semigrupo numérico y $n \in S^*$, entonces S es pseudo-simétrico si y solo si,

$$\text{Max}_{\leq_S}(\text{Ap}(S, n)) = \left\{ \frac{F(S)}{2}, F(S) + n \right\}$$

2.2.2. Extensiones Unitarias de un Semigrupo Numérico En esta subsección, se introduce el concepto de **laguna especial** de un semigrupo numérico. Esta definición es motivada por el problema de computar el conjunto de todos los semigrupos numéricos que contienen un semigrupo numérico dado.

Definición 2.2.22. Dado un semigrupo numérico S , se denota por

$$SG(S) = \{x \in PF(S) \mid 2x \in S\}.$$

Los elementos de $SG(S)$ son llamados **lagunas especiales** de S .

Ejemplo 2.2.23. Sea $S = \langle 5, 7, 8, 9, 11 \rangle$, entonces se tiene que $G(S) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, luego $PF(S) = \{2, 3, 4, 6\}$ y así, $SG(S) = \{4, 6\}$.

Proposición 2.2.24. Sea S un semigrupo numérico y $x \in G(S)$, las siguientes propiedades son equivalentes:

- 1) $x \in SG(S)$;
- 2) $S \cup \{x\}$ es un semigrupo numérico.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) : Note que $S \cup \{x\}$ es un semigrupo numérico, puesto que:

- Es cerrado bajo la suma, pues como $x \in PF(S)$, entonces $x + s \in S$ para todo $s \in S$ y se tiene que $nx \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por la definición de $SG(S)$.
- Tiene complemento finito, ya que $S \subset S \cup \{x\}$ y S tiene complemento finito.

2) \Rightarrow 1) : Si $S \cup \{x\}$ es un semigrupo numérico, entonces es cerrado bajo la suma, lo cual implica que $x + s \in S$ para todo $s \in S^*$, es decir, $x \in PF(S)$, y también se tiene que $2x \in S$, por lo que se concluye que $x \in SG(S)$. \square

Ejemplo 2.2.25. Sea $S = \langle 7, 8, 9, 11, 13 \rangle = \{0, 7, 8, 9, 11, 13, \rightarrow\}$, entonces $SG(S) = \{10, 12\}$ y se tiene que $\langle 7, 8, 9, 10, 11, 13 \rangle$ y $\langle 7, 8, 9, 11, 12, 13 \rangle$ son semigrupos numéricos.

Lema 2.2.26. Sean S y T dos semigrupos numéricos tales que $S \subsetneq T$. Entonces, $S \cup \{\max(T \setminus S)\}$ es un semigrupo numérico, o equivalentemente, $\max(T \setminus S) \in SG(S)$.

Demostración. Como S y T son semigrupos numéricos, y $S \subsetneq T$, existe $x = \max(T \setminus S)$. Además, $x + s \in T$ y $x + s > x$ para todo $s \in S^*$, luego $x + s \in S$, es decir, $x \in PF(S)$. Similarmente, $2x \in T$ y $2x > x$, por lo que $2x \in S$ y de esta manera se concluye que $x \in SG(S)$. \square

Dado un semigrupo numérico S , se denota por $\mathcal{O}(S)$ al **conjunto de todos los semigrupos numéricos que contienen a S** . Como el complemento de S en \mathbb{N} es finito, $\mathcal{O}(S)$ también es finito.

Dados dos semigrupos numéricos S y T con $S \subseteq T$, se define recursivamente la siguiente sucesión:

- $S_0 = S$;
- $S_{n+1} = S_n \cup \{\max(T \setminus S_n)\}$ si $S_n \neq T$ y $S_n = S_{n+1}$ en caso contrario.

Si la cardinalidad de $T \setminus S$ es k , entonces

$$S = S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \cdots \subsetneq S_k = T$$

Utilizando esta sucesión, se puede construir el conjunto $\mathcal{O}(S)$. Se inicia con S , se construyen los semigrupos numéricos $S \cup \{x\}$, donde $x \in SG(S)$, y para cada elemento de la colección anterior distinto de \mathbb{N} (Note que $SG(\mathbb{N})$ es el conjunto vacío), se repite el proceso anterior de manera recursiva.

Ejemplo 2.2.27. Sea $S = \langle 6, 7, 9 \rangle$. Para este semigrupo numérico, $SG(S) = \{17\}$, luego $S \cup \{17\} = \langle 6, 7, 9, 17 \rangle$ es un semigrupo numérico que contiene a S (Estos difieren solamente por 1 elemento) y ahora, como $SG(S \cup \{17\}) = \{8, 10, 11\}$, se obtienen los semigrupos $S \cup \{17, 8\}$, $S \cup \{17, 10\}$ y $S \cup \{17, 11\}$. Repitiendo este proceso, se puede construir $\mathcal{O}(S)$, como lo puede ver en la figura 2.1 (ver A.6 del Apéndice A para el código utilizado).

Demostración. 1) \Rightarrow 2) : Sea $x \in SG(S)$. Por la Proposición 2.2.24, $S \cup \{x\}$ es un semigrupo numérico que contiene a S propiamente y por la hipótesis, se tiene que necesariamente $(S \cup \{x\}) \cap \{g_1, \dots, g_t\} \neq \emptyset$, es decir, $SG(S) \subseteq \{g_1, \dots, g_t\}$.

2) \Rightarrow 1) : Por el Lema 2.2.26, T es un semigrupo numérico que contiene a S propiamente, luego $\text{máx}(T \setminus S) \in SG(S)$ y como $SG(S) \subseteq \{g_1, \dots, g_t\}$, se tiene que $T \cap \{g_1, \dots, g_t\} \neq \emptyset$, lo que concluye la demostración. \square

Como corolario de este resultado, se tiene otra caracterización para los semigrupos numéricos irreducibles. Por el Teorema 2.2.4, se sabe que un semigrupo numérico S es irreducible si y solo si, S es maximal en el conjunto de los semigrupos numéricos que no contienen a $F(S)$; observe además que $F(S) \in SG(S)$ cuando $S \neq \mathbb{N}$.

Corolario 2.2.29. *Sea S un semigrupo numérico. Entonces S es irreducible si y solo si $SG(S)$ posee a lo sumo un elemento.*

Los siguientes resultados nos permiten construir una generalización de la construcción propuesta en el Lema 2.2.6 para encontrar un semigrupo numérico irreducible que contiene a un semigrupo numérico dado con el mismo número de Frobenius.

Lema 2.2.30. *Sea S un semigrupo numérico y sean $\{g_1, \dots, g_t\} \subseteq G(S)$, las siguientes son equivalentes:*

1) S es maximal en el conjunto de los semigrupos numéricos T tales que

$$T \cap \{g_1, \dots, g_t\} = \emptyset.$$

2) Si $x \in G(S)$, entonces existen $i \in \{1, \dots, t\}$ y $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tales que $g_i - kx \in S$.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) : Sea $x \in G(S)$, entonces como $S \subsetneq \langle S, x \rangle$, se tiene que $\langle S, x \rangle \cap \{g_1, \dots, g_t\} \neq \emptyset$, luego, existen $i \in \{1, \dots, t\}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $s \in S$ tales que $g_i = s + kx$ y se concluye que $g_i - kx \in S$.

2) \Rightarrow 1) : Sea T un semigrupo numérico tal que $S \subsetneq T$ y $x \in T \setminus S$, entonces $S \subsetneq \langle S, x \rangle \subseteq T$ y por hipótesis, existen i y k tales que $g_i - kx \in S$, lo cual implica que $g_i \in \langle S, x \rangle$ y por tanto, $g_i \in T$. \square

Proposición 2.2.31. *Sean S un semigrupo numérico y $\{g_1, \dots, g_t\} \subseteq G(S)$, si existe*

$$h = \text{máx}(\{x \in \mathbb{Z} \setminus S \mid 2x \in S, g_i - x \notin S, \forall i \in \{1, \dots, t\}\}),$$

entonces $S \cup \{h\}$ es un semigrupo numérico tal que $(S \cup \{h\}) \cap \{g_1, \dots, g_t\} = \emptyset$.

Demostración. Por la Proposición 2.2.24, basta con mostrar que $h \in SG(S)$; por la definición de h , se tiene que $2h \in S$, luego suponga que existe $s \in S^*$ tal que $h + s \notin S$, entonces como $2(h + s) \in S$ y $h < h + s$, es válido que $g_i - (h + s) \in S$ para algún $i \in \{1, \dots, t\}$ y por tanto, $g_i - h = g_i - (h + s) + s \in S$, lo que contradice la definición de h . \square

Corolario 2.2.32. Sean S un semigrupo numérico y $\{g_1, \dots, g_t\} \subseteq G(S)$, las siguientes son equivalentes:

- 1) S es maximal en el conjunto de todos los semigrupos numéricos cuya intersección con $\{g_1, \dots, g_t\}$ es vacía.
- 2) Para cada $x \in \mathbb{N}$, si $x \in G(S)$ y $2x \in S$, entonces $g_i - x \in S$ para algún $i \in \{1, \dots, t\}$.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) : Si existe $x \in G(S)$ tal que $2x \in S$ y $g_i - x \notin S$ para todo $i \in \{1, \dots, t\}$, entonces es posible encontrar h tal y como está definido en la Proposición 2.2.31, por lo que se tiene que $S \cup \{h\}$ es un semigrupo numérico que contiene a S propiamente y no interseca con $\{g_1, \dots, g_t\}$, lo cual contradice la hipótesis.

2) \Rightarrow 1) : Por el Lema 2.2.30, nos basta con mostrar que para todo $x \in G(S)$, existen i, k apropiados tales que $g_i - kx \in S$, luego sean $x \in G(S)$ y $k = \max(\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid nx \notin S\})$, por lo que $kx \in G(S)$ y $2kx \in S$ y, por hipótesis, $g_i - kx \in S$ para algún $i \in \{1, \dots, t\}$. \square

Corolario 2.2.33. Sea S un semigrupo numérico. Entonces S es irreducible si y solo si para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \in G(S)$ y $2x \in S$ implica que $F(S) - x \in S$.

Demostración. Sigue del Teorema 2.2.4 y del Corolario 2.2.32. \square

Sea \mathcal{S} el conjunto de todos los semigrupos numéricos, para $\{g_1, \dots, g_t\} \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se define

$$\mathcal{S}(g_1, \dots, g_t) = \{S' \in \mathcal{S} \mid S' \cap \{g_1, \dots, g_t\} = \emptyset\}.$$

La Proposición 2.2.31 muestra una forma de encontrar un elemento maximal (respecto a la inclusión de conjuntos) de $\mathcal{S}(g_1, \dots, g_t)$. Se va a representar a estos elementos como $\text{Max}_{\subseteq}(\mathcal{S}(g_1, \dots, g_t))$. Primero, tome como punto inicial $S = \{0, \max(g_1, \dots, g_t) + 1, \rightarrow\}$ y defina de manera recursiva la siguiente sucesión de conjuntos:

- $S_0 = S$,
- $S_{n+1} = S_n \cup \{h(S_n)\}$, donde $h(S_n)$ es

$$h(S_n) = \max\{x \in G(S_n) \mid 2x \in S_n, g_i - x \notin S_n, \forall i \in \{1, \dots, t\}\}.$$

Si $h(S_n)$ no existe, entonces S_n es el semigrupo numérico deseado (El Corolario 2.2.32 nos da la condición de finalización).

Ejemplo 2.2.34. Se va a calcular un elemento en $\text{Max}_{\subseteq}(\mathcal{S}(4, 7, 9))$.

- $S_0 = \{0, 10, \rightarrow\}$, $h(S_0) = 8$;
- $S_1 = \{0, 8, 10, \rightarrow\}$, $h(S_1) = 6$;
- $S_2 = \{0, 6, 8, 10, \rightarrow\}$, $h(S_2) = 5$;
- $S_3 = \{0, 5, 6, 8, 10, \rightarrow\}$, y $h(S_3)$ no existe, luego $S_3 \in \text{Max}_{\subseteq}(\mathcal{S}(4, 7, 9))$.

2.2.3. Descomposición de un Semigrupo Numérico en Irreducibles En esta subsección, se va a presentar un algoritmo para calcular una descomposición de un semigrupo numérico dado en semigrupos numéricos irreducibles, también se muestra como se pueden obtener descomposiciones "minimales".

Sea S un semigrupo numérico. Si S no es irreducible, entonces existen S_1 y S_2 que contienen a S y cumplen que $S_1 \cap S_2 = S$. Ahora se puede preguntar si S_1 y S_2 son irreducibles y, en caso de que no lo sean, escribirlos como la intersección de otros semigrupos numéricos; se puede repetir este proceso varias veces, más es un proceso finito, pues cada semigrupo numérico involucrado en esta construcción contiene a S y se sabe que $\mathcal{O}(S)$ es finito.

Proposición 2.2.35. *Todo semigrupo numérico puede ser escrito como la intersección de una cantidad finita de semigrupos numéricos irreducibles.*

En la sección anterior, se describió un procedimiento para construir $\mathcal{O}(S)$ para cualquier semigrupo numérico, a partir de la computación de $SG(S)$. Durante la ejecución de este procedimiento, se pueden escoger los semigrupos numéricos que tienen como máximo una laguna especial, los cuales serán los semigrupos numéricos irreducibles que contienen a S por el Corolario 2.2.29. Denote por

$$\mathcal{I}(S) = \{T \in \mathcal{O}(S) \mid T \text{ es irreducible}\}.$$

Es inmediato que $S = \bigcap_{T \in \mathcal{I}(S)} T$. Además, se pueden remover de la intersección, aquellos semigrupos numéricos que no son minimales respecto a la inclusión de conjuntos (se van a representar aquellos que sí son minimales como parte del conjunto $\text{Min}_{\subseteq} \mathcal{I}(S)$), y el semigrupo numérico resultante es el mismo.

Proposición 2.2.36. *Sea S un semigrupo numérico y sean*

$$\{S_1, \dots, S_n\} = \text{Min}_{\subseteq}(\mathcal{I}(S)),$$

entonces,

$$S = S_1 \cap \dots \cap S_n$$

Sin embargo, esta descomposición no es necesariamente minimal (en el sentido de usar la menor cantidad de irreducibles posible), como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2.37. *Sea $S = \langle 5, 6, 8 \rangle$. Se va a computar el conjunto de $\text{Min}_{\subseteq}(\mathcal{I}(S))$. Como $SG(S) = \{7, 9\}$, se tiene por la Proposición 2.2.24 que $S \cup \{7\}$ y $S \cup \{9\}$ son semigrupos numéricos. Ahora, como $SG(S \cup \{7\}) = \{9\}$, es válido que $S \cup \{7\}$ es irreducible (por el Corolario 2.2.29), por lo que $S \cup \{7\} \in \text{Min}_{\subseteq}(\mathcal{I}(S))$. Por otra parte, $SG(S \cup \{9\}) = \{3, 4, 7\}$, luego $S \cup \{9\}$ no es irreducible, pero $S \cup \{9, 3\}$ y $S \cup \{9, 4\}$ si lo son, y como $S \cup \{7\} \subseteq S \cup \{9, 7\}$, se tiene que*

$$\text{Min}_{\subseteq}(\mathcal{I}(S)) = \{S \cup \{7\}, S \cup \{9, 3\}, S \cup \{9, 4\}\},$$

por tanto,

$$S = (S \cup \{7\}) \cap (S \cup \{9, 3\}) \cap (S \cup \{9, 4\}) = (S \cup \{7\}) \cap (S \cup \{9, 4\}).$$

Cuando se busca por el menor n tal que $S = S_1 \cap \dots \cap S_n$ con $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{I}(S)$, entonces basta con buscar entre las descomposiciones con elementos de $\text{Min}_{\subseteq}(\mathcal{I}(S))$.

Proposición 2.2.38. *Sea S un semigrupo numérico, si $S = S_1 \cap \dots \cap S_n$ con $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{I}(S)$, entonces existen $S'_1, \dots, S'_n \in \text{Min}_{\subseteq}(\mathcal{I}(S))$ tales que*

$$S = S'_1 \cap \dots \cap S'_n.$$

Demostración. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, si S_i no pertenece a $\text{Min}_{\subseteq}(\mathcal{I}(S))$, entonces basta con tomar $S'_i \in \text{Min}_{\subseteq}(\mathcal{I}(S))$ tal que $S'_i \subseteq S_i$. □

La siguiente Proposición nos da una condición sobre los semigrupos numéricos que deben aparecer en la descomposición minimal.

Proposición 2.2.39. *Sean S un semigrupo numérico y sean $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{O}(S)$, las siguientes son equivalentes:*

- 1) $S = S_1 \cap \dots \cap S_n,$

2) Para todo $h \in SG(S)$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $h \notin S_i$.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) : Si $h \in SG(S)$ entonces $h \notin S$, por lo que por la hipótesis, se tiene que $h \notin S_i$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$.

2) \Rightarrow 1) : Si $S \subsetneq S_1, \dots, S_n$, por el Lema 2.2.26, $h = \max((S_1 \cap \dots \cap S_n) \setminus S)$ pertenece a $SG(S)$ y está en S_i para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, lo cual contradice la hipótesis. \square

Se puede computar $\text{Min}_{\subseteq}(\mathcal{I}(S)) = \{S_1, \dots, S_n\}$ de la siguiente manera: para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, defina

$$C(S_i) = \{h \in SG(S) \mid h \notin S_i\}.$$

Por la Proposición 2.2.39, se sabe que

$$S = S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_r} \iff C(S_{i_1}) \cup \dots \cup C(S_{i_r}) = SG(S).$$

Por los resultados anteriores, se puede construir un método para calcular una descomposición de S como intersección de semigrupos numéricos irreducibles con la menor cantidad posible de elementos, como se muestra a continuación.

Algoritmo 2.2.40. Sea S un semigrupo numérico que no es irreducible.

- 1) Encuentre el conjunto $SG(S)$.
- 2) Tome $I = \emptyset$ y $C = \{S\}$.
- 3) Para todo $S' \in C$, compute (utilizando la Proposición 2.2.24) todos los semigrupos \bar{S} tales que $|\bar{S} \setminus S'| = 1$, donde $|\bar{S} \setminus S'|$ denota la cardinalidad del conjunto. Se elimina a S' de C . Sea B el conjunto conformado por todos los semigrupos numéricos contruidos de esta manera.
- 4) Elimine de B los semigrupos S' tales que $SG(S) \subseteq S'$.
- 5) Elimine de B los semigrupos S' tales que existe $\tilde{S} \in I$ con $\tilde{S} \subseteq S'$.
- 6) Sea $C = \{S' \in B \mid S' \text{ no es irreducible}\}$.
- 7) Sea $I = I \cup \{S' \in B \mid S' \text{ es irreducible}\}$.
- 8) Si $C \neq \emptyset$, volver al Paso 3.
- 9) Para cada $S' \in I$, compute $C(S')$.

10) Escoja $\{S_1, \dots, S_r\}$ de modo que r es el menor número cumpliendo que:

$$C(S_1) \cup \dots \cup C(S_r) = SG(S).$$

11) Devuelva S_1, \dots, S_r .

Se va a ilustrar este algoritmo con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.41. Sea $S = \langle 5, 6, 7 \rangle$, entonces $SG(S) = \{8, 9\}$. Tomando $S_1 = \langle 5, 6, 7, 8 \rangle$ y $S_2 = \langle 5, 6, 7, 9 \rangle$, se tiene que $B = \{S_1, S_2\}$ y S_1 y S_2 son irreducibles, luego $I = B$ y $C = \emptyset$; además, $C(S_1) = \{9\}$ y $C(S_2) = \{8\}$, así, $C(S_1) \cup C(S_2) = SG(S)$ y se concluye que ésta es la descomposición minimal de S y $S = \langle 5, 6, 7, 8 \rangle \cap \langle 5, 6, 8, 9 \rangle$.

Dado un semigrupo numérico, se pueden considerar 2 tipos de minimalidades para la descomposición de dicho semigrupo numérico en irreducibles. La primera minimalidad es en términos de su cardinalidad, es decir, que es *minimal* en el sentido de utilizar la menor cantidad posible de semigrupos numéricos irreducibles en la descomposición. La segunda minimalidad es en términos de *redundancia*, es decir, una descomposición es *minimal* si ninguno de los semigrupos involucrados es redundante (No puede ser eliminado sin cambiar el resultado de la intersección), lo cual es equivalente a decir que, la descomposición no puede ser refinada en una descomposición menor. Los dos conceptos no coinciden, pues observe que una descomposición minimal en el primer sentido, necesariamente no es refinable, mientras que existen descomposiciones no refinables que utilizan más irreducibles que otras descomposiciones, como lo puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.42. El semigrupo numérico $S = \langle 5, 21, 24, 28, 32 \rangle$ puede ser escrito como

$$S = \langle 5, 9, 12, 13 \rangle \cap \langle 5, 11, 12, 13 \rangle \cap \langle 5, 12, 14, 16 \rangle \cap \langle 5, 14, 16, 18 \rangle$$

y como

$$S = \langle 5, 7 \rangle \cap \langle 5, 8 \rangle.$$

Se tiene que ambas descomposiciones no pueden ser refinadas sin dañar la intersección (es decir, son minimales en términos de redundancia). Sin embargo, la primera descomposición utiliza 4 semigrupos numéricos y la segunda utiliza 2 semigrupos numéricos.

El Algoritmo 2.2.40 ya está implementado en GAP y SageMath, ver A.7 del Apéndice A, junto a la demostración (computacional) del ejemplo anterior.

2.2.4. Lagunas Fundamentales de un Semigrupo Numérico Por la Proposición 2.2.28 se tiene que, si S es un semigrupo numérico, entonces $SG(S)$ determina a S salvo maximalidad (con respecto a la inclusión de conjuntos). Sin embargo, esto no significa que $SG(S)$ determine a S únicamente. Se pueden encontrar semigrupos numéricos S y T con $S \neq T$ y $SG(S) = SG(T)$ (En particular, esto implica que ni $S \subseteq T$ ni $T \subseteq S$).

Ejemplo 2.2.43. Sean $S_1 = \langle 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15 \rangle$ y $S_2 = \langle 5, 8, 11, 12 \rangle$. Entonces $SG(S_1) = SG(S_2) = \{14\}$ pero $S_1 \neq S_2$.

En esta subsección, se va a presentar un subconjunto del conjunto de lagunas de un semigrupo numérico que lo determina totalmente.

Definición 2.2.44. Sea S un semigrupo numérico, se dice que un conjunto X de enteros positivos **determinan las lagunas** de S si S es el mayor (respecto a la inclusión de conjuntos) semigrupo numérico tal que $X \subseteq G(S)$.

Dado $X \subseteq \mathbb{N}$, se denota por $D(X)$ el conjunto de todos los divisores positivos de los elementos de X , es decir,

$$D(X) = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ divide a algún } x \in X\}.$$

Proposición 2.2.45. Sea X un conjunto finito de elementos positivos. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1) El conjunto X determina las lagunas de un semigrupo numérico;
- 2) $\mathbb{N} \setminus D(X)$ es un semigrupo numérico.

Si se tienen estas condiciones, entonces X determina las lagunas del semigrupo numérico $\mathbb{N} \setminus D(X)$.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) : Sea S un semigrupo numérico cuyas lagunas son determinadas por X , entonces como $X \subseteq G(S)$, se tiene que $D(X) \subseteq G(S)$ y por tanto, $S \subseteq \mathbb{N} \setminus D(X)$. Considere $a \in \mathbb{N} \setminus D(X)$, entonces $S' = \langle a, \text{máx}(X) + 1, \rightarrow \rangle$ es un semigrupo numérico tal que $X \subseteq G(S')$, y por la definición de $S, S' \subseteq Sm$, luego $a \in S$, y se concluye que $\mathbb{N} \setminus D(X) = S$. En particular, $\mathbb{N} \setminus D(X)$ es un semigrupo numérico.

2) \Rightarrow 1) : Es inmediato del hecho de que X determina las lagunas de $\mathbb{N} \setminus D(X)$. \square

Proposición 2.2.46. Sean S un semigrupo numérico y $X \subseteq G(S)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1) X determina las lagunas de S ;

2) Para cada $a \in \mathbb{N}$, si $a \in G(S)$ y $\{2a, 3a\} \subset S$, entonces $a \in X$.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) : Utilizando la Proposición 2.2.28, se tiene que $S = \mathbb{N} \setminus D(X)$, por lo que $G(S) = D(X)$. Si $a \in G(S)$, entonces existe $x \in X$ tal que $a \mid x$ y así $ka = x$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Si supone que $\{2a, 3a\} \subset S$, entonces $la \in S$ para todo $l \geq 2$, por lo que se concluye que $k = 1$ y $a = x \in X$.

2) \Rightarrow 1) : Por lo que se vió en la Proposición 2.2.28, basta con demostrar que $S = \mathbb{N} \setminus D(X)$. Por hipótesis, $X \subseteq G(S)$, luego $D(X) \subseteq G(S)$ y $S \subseteq \mathbb{N} \setminus D(X)$, si a es un entero no negativo con $a \notin S$, entonces $a \in G(S)$, luego sea $k = \text{máx}\{n \in \mathbb{N} \mid na \in G(S)\}$ el cual existe pues $G(S)$ es finito, además de que como $0 \notin G(S)$, se tiene que $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, por tanto $ka \in G(S)$ y $\{2ka, 3ka\} \subset S$ y por hipótesis, $ka \in X$, por lo que se concluye que $a \in D(X)$. Así, sigue que $S = \mathbb{N} \setminus D(X)$. \square

Este resultado motiva la siguiente definición.

Definición 2.2.47. Una laguna x de un semigrupo numérico S se llama *fundamental* si $\{2x, 3x\} \subset S$ (o equivalentemente, $kx \in S$ para todo $k > 1$). Se va a denotar por $FG(S)$ el conjunto de las lagunas fundamentales de S .

Ejemplo 2.2.48. Sea $S = \langle 6, 9, 11 \rangle$. Entonces $FG(S) = \{3, 10, 13, 14, 16, 19, 25\}$.

Con esta nueva notación, se puede reformular la Proposición 2.2.46

Corolario 2.2.49. Sea S un semigrupo numérico y X un subconjunto de $G(S)$. Entonces X determina las lagunas de S si y solo si $FG(S) \subseteq X$.

Así, para un semigrupo numérico S , el conjunto $FG(S)$ es el menor (respecto a la inclusión de conjuntos) subconjunto de $G(S)$ que determina las lagunas de S . Además, dos elementos de $FG(S)$ distintos no son comparables con respecto a la relación de divisibilidad.

Proposición 2.2.50. Sea X un subconjunto finito de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1) Existe un semigrupo numérico S tal que $FG(S) = X$;

2) $\mathbb{N} \setminus D(X)$ es un semigrupo numérico y $x \nmid y$ para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) : La primera afirmación fue probada en la Proposición 2.2.45. Para la segunda afirmación, sean $x, y \in X$ con $x \neq y$ y $x \mid y$ lo implica que $y = kx$ para algún $k \geq 2$ pues $x, y > 0$ (así $k \neq 0$) y $x \neq y$ (luego $k \neq 1$). Sin embargo, se tiene que $y \in FG(S)$, lo cual implica que $\{2y, 3y\} \subset S$, lo cual es una contradicción. Así, se demuestra la segunda afirmación.

2) \Rightarrow 1) : Si $S = \mathbb{N} \setminus D(X)$ es un semigrupo numérico, entonces X determina sus lagunas. Además, por el Corolario 2.2.49, se tiene que $FG(S) \subseteq X$ y por hipótesis, $x \nmid y$ para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$, luego para cada $x \in X$ es válido que $\{2x, 3x\} \cap D(X) = \emptyset$, por lo tanto, $x \in FG(S)$ y se tiene la igualdad de conjuntos. \square

Sea S un semigrupo numérico y $x \in SG(S)$, entonces $3x = x + 2x \in S$, ya que $2x \in S$ por la definición y $x \in PF(S)$. De esta manera, $SG(S) \subseteq FG(S)$; además, la condición $x + s \in S$ para todo $s \in S^*$ implica que los elementos de $SG(S)$ son maximales en $FG(S)$ con respecto a la relación de orden \leq_S .

Proposición 2.2.51. *Sea S un semigrupo numérico. Entonces*

$$SG(S) = \text{Max}_{\leq_S}(FG(S)).$$

Utilizado lo anterior, el Corolario 2.2.29 puede ser reformulado de la siguiente manera.

Corolario 2.2.52. *Sea S un semigrupo numérico, entonces S es irreducible si y solo si el conjunto $\text{Max}_{\leq_S}(FG(S))$ tiene a lo sumo un solo elemento.*

Esto ya está implementado en GAP y SageMath, ver A.7 del Apéndice A.

3. Semigrupos Numéricos Generalizados

En este capítulo se trata con los **semigrupos numéricos generalizados** (SNGs de manera corta), una generalización natural a los semigrupos numéricos con los que se ha trabajado en los capítulos anteriores para \mathbb{N}^d con $d \geq 1$. Se estudian sus invariantes asociados, se caracterizan en términos del cardinal de un subconjunto especial de sus lagunas, de manera natural y se estudian los semigrupos numéricos generalizados irreducibles y algunas propiedades intrínsecas a estos.

En este capítulo, se va a utilizar la letra negrilla para denotar elementos con d coordenadas. Así, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$.

3.1. Preliminares

Dado que existen varias diferencias entre los semigrupos numéricos y los SNG, parte de la investigación actual consiste en extender conceptos de los semigrupos numéricos a los SNG de manera natural. En Cisto et al. (2019) se extienden la noción de generadores para los SNG de manera natural. En esta sección, se introducen varias definiciones que son naturales para los semigrupos numéricos en el contexto de los SNGs.

Definición 3.1.1. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un submonoide de \mathbb{N}^d con la suma usual. Se dice que S es un **semigrupo numérico generalizado** (SNG) si $G(S) = \mathbb{N}^d \setminus S$ es finito. Se dice que $G(S)$ es el conjunto de **lagunas** de S y se denota el **género** de S como $g = g(S) = |G(S)|$.

Ejemplo 3.1.2. Sea $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(1, 0), (0, 1), (2, 1)\}$. Entonces $G(S) = \{(1, 0), (0, 1), (2, 1)\}$ y $g = 3$.

Definición 3.1.3. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG. Se define en \mathbb{Z}^d la siguiente relación:

$$\mathbf{a} \leq_S \mathbf{b} \text{ si y solo si } \mathbf{b} - \mathbf{a} \in S$$

En particular, \leq_S es una relación de orden parcial en \mathbb{Z}^d .

Demostración. La prueba es equivalente a la realizada en la Definición 1.4.2. □

Definición 3.1.4. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG.

1) Sea

$$PF(S) = \{\mathbf{x} \in G(S) \mid \mathbf{x} + \mathbf{s} \in S, \text{ para todo } \mathbf{s} \in S^*\},$$

se dice que $PF(S)$ es el conjunto de **elementos pseudo-Frobenius** de S . El cardinal de $PF(S)$ es llamado el **tipo** de S y se denota por $t = t(S)$.

2) Sea

$$\text{Ap}(S, \mathbf{n}) = \{s \in S \mid s - \mathbf{n} \notin S\},$$

donde $\mathbf{n} \in S^*$. Se llama a $\text{Ap}(S, \mathbf{n})$ el **conjunto de Apéry** de S respecto a \mathbf{n} .

Observe que a diferencia de lo que ocurre para semigrupos numéricos, $\text{Ap}(S, \mathbf{n})$ puede ser infinito.

Ejemplo 3.1.5. Sea $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 2), (0, 5), (1, 2)\}$, entonces:

$$\begin{aligned} \text{Ap}(S, (1, 1)) = & \{(0, 0), (0, 3), (0, 4), (0, 6), (1, 3), (1, 6), (2, 3), (1, 0), (0, 7), (2, 0), (0, 8), \\ & (3, 0), \dots, (0, n), (k, 0) \mid n \geq 9, k \geq 4\}. \end{aligned}$$

Claramente este conjunto es infinito.

Proposición 3.1.6. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG, entonces $PF(S)$ es el conjunto de elementos maximales de $G(S)$ respecto al orden \leq_S .

Demostración. Sea $x \in G(S)$ maximal respecto al orden \leq_S , entonces si existiera $s \in S^*$ tal que $x + s \notin S$, esto implicaría que $x \leq_S x + s$, lo cual contradice la maximalidad de x y por tanto, $x \in PF(S)$.

Para la otra contención, considere $x \in PF(S)$ y note que si existiera $y \in \mathbb{Z}^d \setminus S$ tal que $x \leq_S y$, es decir, $y - x = s \in S$, entonces $y = y - x + x = x + s \notin S$, lo cual contradice la elección de x . \square

Observe que la anterior proposición implica que $PF(S) \neq \emptyset$ pues $G(S)$ es finito, por lo que tiene maximales respecto al orden \leq_S .

Proposición 3.1.7. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG y $\mathbf{n} \in S^*$. Entonces:

$$PF(S) = \{w - \mathbf{n} \mid w \in \text{Máx}_{\leq_S}(\text{Ap}(S, \mathbf{n}))\}.$$

Demostración. Sea $x \in PF(S)$. Luego $x \notin S$ y $x + s \in S$ para todo $s \in S^*$, en particular $x + \mathbf{n} \in S$. Esto es equivalente a que $x + \mathbf{n} \in \text{Ap}(S, \mathbf{n})$ pues $x = (x + \mathbf{n}) - \mathbf{n} \notin S$. Si considera $w \in \text{Ap}(S, \mathbf{n})$ con $x + \mathbf{n} \leq_S w$, sigue que $y = w - x - \mathbf{n} \in S$ y $w - \mathbf{n} = x + y \notin S$. Pero $x \in PF(S)$, por lo que necesariamente $y = 0$ y $x + \mathbf{n} = w$, lo cual quiere implica que $x + \mathbf{n}$ es maximal respecto al orden \leq_S y $x = w - \mathbf{n}$ por lo que se tiene la primera inclusión.

Sea ahora $w \in \text{Máx}_{\leq_S}(\text{Ap}(S, n))$, entonces $w - n \notin S$ por definición de $\text{Ap}(S, n)$ y si hubiese un $s \in S^*$ tal que $w - n + s = (w + s) - n \notin S$, esto implicaría que $w + s \in \text{Ap}(S, n)$ con $w \leq_S w + s$, lo cual contradice la maximalidad de w . Por tanto, cada elemento de la forma $w - n$ con $w \in \text{Máx}_{\leq_S} \text{Ap}(S, n)$ es un elemento pseudo-Frobenius, por lo que se obtiene la otra inclusión. \square

Ejemplo 3.1.8. Sea $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 0), (3, 0)\}$ un SNG en \mathbb{N}^2 . En la Figura 3.1 se representa a este SNG, donde los puntos rellenos representan los elementos de S y los puntos con centro vacío y borde representan las lagunas de S .

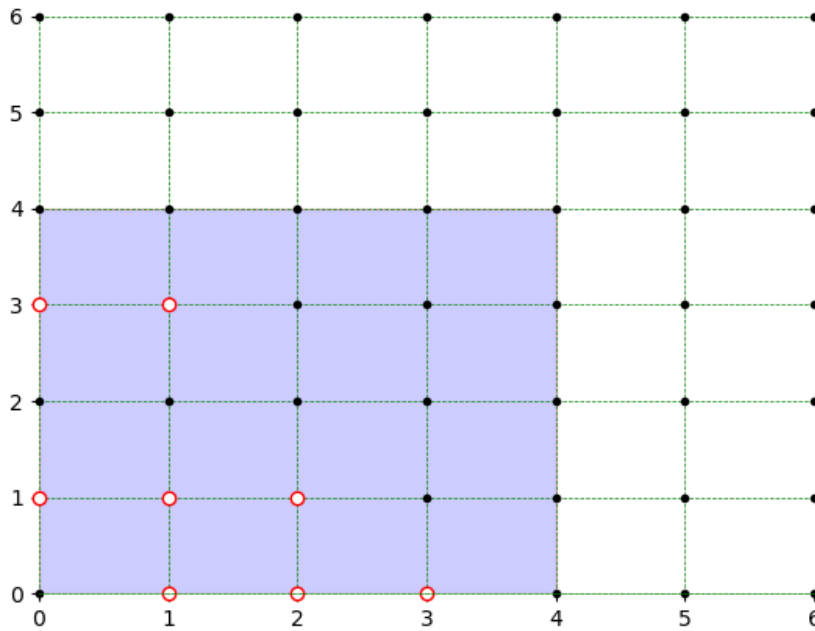


Figura 3.1: SNG en \mathbb{N}^2 y sus lagunas

Entonces

- $PF(S) = \{(0, 3), (1, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (3, 0)\}$;
- $\text{Ap}(S, (0, 2)) = \{(0, 0), (0, 5), (1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), (5, 0), (5, 1), \dots, (n, 0), (n, 1) \mid n \geq 5\}$;
- $\text{Máx}_{\leq_S} \text{Ap}(S, (0, 2)) = \{(0, 5), (1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$.

Por lo que al utilizar la Proposición 3.1.7, se tiene que

$$(0, 5) - (0, 2) = (0, 3), \quad (2, 2) - (0, 2) = (2, 0),$$

$$(1, 2) - (0, 2) = (1, 0), \quad (2, 3) - (0, 2) = (2, 1),$$

$$(1, 5) - (0, 2) = (1, 3), \quad (3, 2) - (0, 2) = (3, 0).$$

Ejemplo 3.1.9. Sea $T = \mathbb{N}^3 \setminus \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ un SNG en \mathbb{N}^3 , en la Figura 3.2 se representa este SNG, donde los puntos con borde rojo representan las lagunas de T .

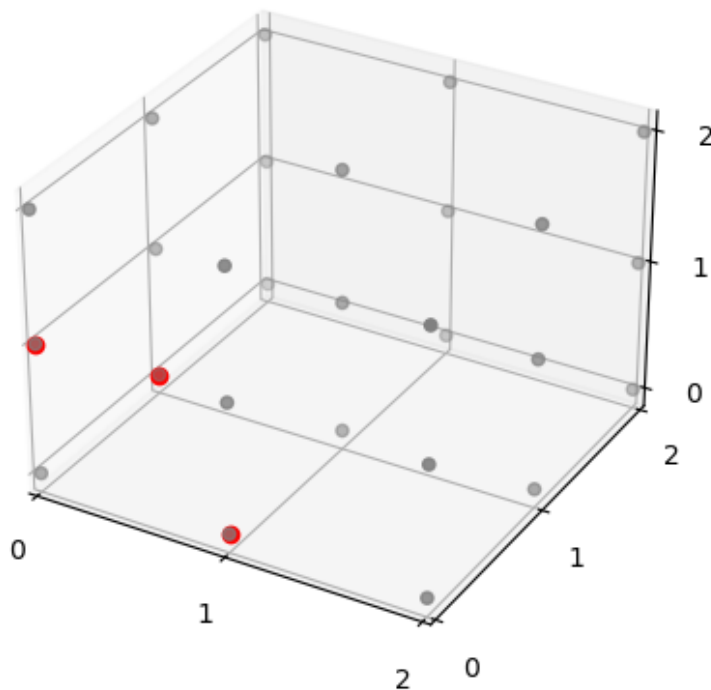


Figura 3.2: SNG en \mathbb{N}^3 y sus lagunas

Entonces

- $PF(T) = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$;
- $Ap(T, (0, 0, 1)) = \{(0, 0, 0), (0, 0, 2), (0, 1, 1), (0, 2, 0), \dots, (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 2, 0), \dots, (2, 0, 0), (2, 1, 0), \dots, (3, 0, 0), \dots, (4, 0, 0), \dots, (a, b, 0) \mid a, b \geq 5\}$;
- $M\acute{a}x_{\leq s} Ap(T, (0, 0, 1)) = \{(0, 0, 2), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

Por lo que al utilizar la Proposici3n 3.1.7, se tiene que

$$(0, 0, 2) - (0, 0, 1) = (0, 0, 1)$$

$$(0, 1, 1) - (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$$

$$(1, 0, 1) - (0, 0, 1) = (1, 0, 0).$$

3.2. Semigrupos Numéricos Generalizados Irreducibles

En esta sección se introduce el concepto de **semigrupo numérico generalizado irreducible** como una generalización natural para los semigrupos numéricos irreducibles, además de la extensión de algunas caracterizaciones e invariantes asociados a estos.

Definición 3.2.1. Sean $a, b \in \mathbb{N}^d$, entonces se define el **orden parcial natural** de \mathbb{N}^d , \leq , de la siguiente manera:

$$a \leq b \text{ si y solo si } a^{(i)} \leq b^{(i)} \ (\forall i \in \{1, \dots, d\})$$

donde $a^{(i)}$ representa la i -ésima coordenada del elemento $a \in \mathbb{N}^d$.

Se entiende por $2x = (2x^{(1)}, 2x^{(2)}, \dots, 2x^{(d)})$.

Definición 3.2.2. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG. Se define

$$\begin{aligned} SG(S) &= \{x \in G(S) \mid 2x \in S \text{ y } x + s \in S \text{ para cada } s \in S^*\}, \\ &= \{x \in PF(S) \mid 2x \in S\}, \end{aligned}$$

como el conjunto de **lagunas especiales** de S .

Observación. Note que $SG(S) \subseteq PF(S)$ por la segunda equivalencia, pero la igualdad no siempre se tiene, pues si $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (2, 0)\}$, entonces se tiene que $PF(S) = G(S)$ pero $SG(S) = \{(0, 1), (2, 0)\}$. Por otra parte, $SG(S) \neq \emptyset$, pues si existe $z \in G(S)$ tal que z es maximal en $G(S)$ respecto al orden parcial natural de \mathbb{N}^d (y siempre existe, pues $G(S)$ es finito), entonces $z \in SG(S)$.

Proposición 3.2.3. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG y $x \in G(S)$, entonces $S \cup \{x\}$ es un SNG si y solo si $x \in SG(S)$.

Demostración. Si $S \cup \{x\}$ es un SNG, entonces es cerrado bajo la suma, por lo que $x + s \in S$ para todo $s \in S^*$, es decir $x \in PF(S)$ y $2x \in S$, luego $x \in SG(S)$.

Ahora, si $x \in SG(S)$, entonces se tiene que $S \cup \{x\}$ es un SNG ya que:

- Sean $a, b \in S \cup \{x\}$ y $a, b \in S \subset S \cup \{x\}$, entonces $a + b \in S$ pues S es un SNG y si $a = x$ o $b = x$, entonces como $x \in SG(S)$, sigue que $a + b \in S \cup \{x\}$, por lo que se concluye $S \cup \{x\}$ es cerrado bajo la suma.
- Como $S \subset S \cup \{x\}$, vale que $G(S \cup \{x\}) \subset G(S)$ y como $G(S)$ es finito (pues S es un SNG), sigue que $G(S \cup \{x\})$ es finito, esto es, $S \cup \{x\}$ tiene complemento finito.

□

Definición 3.2.4. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG. Se dice que S es **irreducible** si S no puede ser escrito como la intersección de dos SNGs que lo contengan propiamente.

Ejemplo 3.2.5. Sea $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (2, 0)\}$, entonces se tiene que $SG(S) = \{(0, 1), (2, 0)\}$, por lo que $A = S \cup \{(0, 1)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(1, 0), (2, 0)\}$ y $B = S \cup \{(2, 0)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0)\}$ son SNGs por la proposición anterior. Ahora, dado que $S \subset A$, $S \subset B$ y $S = A \cap B$, S no es irreducible.

Demostrar que un SNG en particular es irreducible, utilizando solamente la definición puede ser complicado. Ahora se demuestra una caracterización para los SNGs irreducibles.

Proposición 3.2.6. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG, entonces S es irreducible si y solo si $|SG(S)| = 1$.

Demostración. Suponga que S es un SNG irreducible y suponga que existen $x, y \in SG(S)$ tales que $x \neq y$, entonces $S \cup \{x\}$ y $S \cup \{y\}$ son un par de SNGs distintos, que contienen propiamente a S y $(S \cup \{x\}) \cap (S \cup \{y\}) = S$, lo cual contradice la irreducibilidad de S .

Recíprocamente, suponga que $|SG(S)| = 1$ y que existen dos SNGs distintos S_1, S_2 tales que $S \subset S_1$, $S \subset S_2$ y $S_1 \cap S_2 = S$. Sean x, y elementos maximales respecto al orden parcial natural de \mathbb{N}^d de $S_1 \setminus S$ y $S_2 \setminus S$ respectivamente (Observe que $S_1 \setminus S$ y $S_2 \setminus S$ son finitos pues $S_1 \setminus S = S_1 \cap G(S)$ y $G(S)$ es finito, por lo que estos elementos maximales existen) Es claro que $x, y \in G(S)$ y resta probar que $x, y \in SG(S)$. Como x es maximal en $S_1 \setminus S$ con respecto a \leq , se tiene que $2x \notin S_1 \setminus S$, ya que $2x > x$ y si $s \in S^*$, entonces $x + s > x$, por lo que $x + s \notin S_1 \setminus S$. Ahora, $x \in S_1$ y $s \in S^* \subset S_1^*$, por lo que $x + s \in S_1$ y $x + s \in S$ y se concluye que $x \in SG(S)$. Se puede probar que $y \in SG(S)$ de manera similar. Por hipótesis, se tiene que $|SG(S)| = 1$, luego $x = y$ y por tanto $x \in S_1 \setminus S$ y $x \in S_2 \setminus S$. Sin embargo, esto implica que $x \in S_1 \cap S_2 = S$, lo cual es una contradicción al hecho de que $x \in G(S)$. □

Proposición 3.2.7. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG, entonces S es irreducible si y solo si existe un elemento $f \in G(S)$ tal que, para todo $g \in G(S)$ con $2g \neq f$, se tiene que $f - g \in S$.

Demostración. Por la Proposición 3.2.6, $SG(S)$ solo tiene un elemento. Sean $SG(S) = \{f\}$ y $g \in G(S)$ con $g \neq f$ y suponga que $2g \neq f$. Ya que $g \notin SG(S)$, se tienen dos posibilidades.

- 1) Suponga que existe $s_1 \in S^*$ tal que $f_1 = g + s_1 \notin S$, en particular, $f_1 - g \in S$. Si $f_1 = f$, se concluye la demostración, en caso contrario, entonces $f_1 \notin SG(S)$ y se va a probar que existen $s_2 \in S^*$ y $f_2 \notin S$ con $f_2 > f_1$ tales que $f_2 = g + s_2$; ya que $f_1 \notin SG(S)$, si existe $t \in S^*$ tal que $f_1 + t \notin S$, se define $f_2 = f_1 + t = g + (s_1 + t)$ con $s_2 = s_1 + t$ y además $f_2 > f_1$, pero si se tiene que $f_1 + t \in S$ para cada $t \in S^*$, entonces considere $f_2 = 2f_1 \notin S$, así $f_2 = g + (g + 2s_1)$ y $s_2 = g + 2s_1 = f_1 + s_1 \in S$, luego existen $s_2 \in S^*$ y $f_2 \notin S$ con $f_2 > f_1$ tales que $f_2 = g + s_2$. Ahora, si $f_2 = f$, se concluye la demostración. En caso contrario, utilizando el argumento anterior, se obtiene una sucesión de elementos $f_i \notin S$ con $f_i > f_{i-1}$ para cada i y $f_i = g + s_i$ y como $G(S)$ es finito, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_k = f$ con $f_k - g \in S$.
- 2) Suponga que $g + s \in S$ para cada $s \in S^*$ y $2g \notin S$, se va a demostrar que esto lleva a una contradicción, pues note que para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $ig + s \in S$ para cada $s \in S^*$ y dado que $G(S)$ es finito, existe $k = \max\{i \in \mathbb{N} \mid ig \notin S\}$, en particular, $kg \in SG(S)$, luego $kg = f$. Como $2g \neq f$, entonces $k \geq 3$ y considere el elemento $\bar{g} = (k-1)g$, entonces se tiene que $\bar{g} + s \in S$ para cada $s \in S^*$ y $2\bar{g} = 2(k-1)g \in S$ puesto que $2(k-1) > k$, es decir $\bar{g} \in SG(S)$, pero esto es una contradicción ya que $\bar{g} \neq f$.

Recíprocamente, por hipótesis se tiene que f es mayor que cada elemento de $G(S)$ con respecto a \leq_S , salvo por el elemento $g \in G(S)$ tal que $2g = f$, si este existe. Por la Proposición 3.1.6, los posibles elementos de $PF(S)$ son f y $g = \frac{f}{2}$ y además, $SG(S) \subseteq PF(S)$ y $g \notin SG(S)$, puesto que $2g = f \notin S$, luego debe ser que $SG(S) = \{f\}$ y S es irreducible. \square

Lema 3.2.8. *Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG irreducible con $SG(S) = \{f\}$, entonces una y sólo una de las siguientes afirmaciones se cumple:*

- 1) $PF(S) = \{f\}$ si existe una componente de f que es impar
- 2) $PF(S) = \{f, \frac{f}{2}\}$ si todas las componentes de f son pares.

Demostración. Si f tiene una componente impar, entonces no existe $g \in G(S)$ tal que $2g = f$ y, por la Proposición 3.2.7, f es un elemento maximal de $G(S)$ con respecto a \leq_S , por lo que se tiene que $PF(S) = \{f\}$ por la Proposición 3.1.6.

Ahora, si todas las componentes de f son pares, se tiene que $\frac{f}{2} \in \mathbb{N}^d$ y dicho elemento es una laguna, ya que $f \in G(S)$ y $\frac{f}{2} + \frac{f}{2} = f$. Dado que $f - \frac{f}{2} = \frac{f}{2} \notin S$, entonces f y $\frac{f}{2}$ son incomparables con \leq_S y además, por la Proposición 3.2.7, f es mayor que todos los elementos de $G(S)$ diferentes de $\frac{f}{2}$ con respecto a \leq_S , por lo tanto, f es un

elemento maximal respecto a dicho orden, es decir, $f \in PF(S)$. Similarmente, $\frac{f}{2}$ también es maximal en $G(S)$ respecto a \leq_S porque, de lo contrario, existiría un elemento $g \in G(S)$ tal que $\frac{f}{2} \leq_S g \leq_S f$, pero esto es una contradicción, en conclusión, $PF(S) = \{f, \frac{f}{2}\}$. \square

Observación. Note que si una de las condiciones del Lema 3.2.8 se cumple, entonces S es irreducible, pues ambas implican que $SG(S) = \{f\}$, por lo que la afirmación sigue de la Proposición 3.2.6.

En resumen, se tiene lo siguiente.

Teorema 3.2.9. *Sea S un SNG, las siguientes son equivalentes:*

- 1) $|PF(S)| = 1$,
- 2) $PF(S) = \{f\}$ y f tiene al menos una componente impar,
- 3) Existe $f \in G(S)$ tal que para todo $h \in G(S)$, se tiene que $f - h \in S$.

Teorema 3.2.10. *Sea S un SNG, las siguientes son equivalentes:*

- 1) $PF(S) = \left\{f, \frac{f}{2}\right\}$.
- 2) Existe $f \in G(S)$ tal que todas sus componentes son pares y para todo $h \in G(S)$ con $h \neq \frac{f}{2}$, se tiene que $f - h \in S$.

Definición 3.2.11. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG. Se dice que S es **simétrico** si satisface una de las equivalencias del Teorema 3.2.9. Similarmente, se dice que S es **pseudo-simétrico** si satisface una de las equivalencias del Teorema 3.2.10.

Por el Lema 3.2.8, cada SNG irreducible es simétrico o pseudo-simétrico, tal como ocurre con los semigrupos numéricos.

Ejemplo 3.2.12. Sea $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$. Con una breve computación, se tiene que $PF(S) = \{(6, 1)\} = SG(S)$. Por lo tanto, S es un SNG simétrico.

Sea $S' = \mathbb{N}^2 \setminus \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0), (6, 0), (12, 0)\}$. En este caso, se tiene que $PF(S) = \{(6, 0), (12, 0)\}$ y $SG(S) = \{(12, 0)\}$, por lo que se concluye que S' es un SNG pseudo-simétrico.

Tanto S como S' son irreducibles. Se pueden computar estos y más ejemplos utilizando GAP y SageMath, ver A.8 del Apéndice A.

Observación. Si $d = 1$ y S es un semigrupo numérico simétrico, entonces S es irreducible, por lo que $SG(S) = \{f\}$ y por el Teorema 3.2.9, f es impar. Además, f es el número de Frobenius del semigrupo numérico S , puesto que para cada semigrupo numérico el número de Frobenius es trivialmente un elemento de $SG(S)$, por lo tanto, la definición de SNG simétrico dada aquí, es una generalización de la definición de semigrupo numérico simétrico. Se tiene un argumento similar para los SNG pseudo-simétricos.

3.3. Descomposición de un SNG en SNGs irreducibles

Se tiene que todo semigrupo numérico puede ser escrito como una intersección de un número finito de semigrupos numéricos irreducibles y una descomposición que utilice la menor cantidad posible de semigrupos numéricos irreducibles se puede obtener de manera algorítmica, el objetivo de esta sección es encontrar resultados análogos para SNGs.

Definición 3.3.1. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG. Se definen los siguientes conjuntos:

- 1) $\mathcal{O}(S) = \{T \subseteq \mathbb{N}^d \mid T \text{ es un SNG, } S \subseteq T\}$, el cual es llamado el **conjunto de los semigrupos numéricos que contienen a S** ,
- 2) $\mathcal{I}(S) = \{T \in \mathcal{O}(S) \mid T \text{ es irreducible}\}$.

Tal y como ocurre con semigrupos numéricos, se tiene que $\mathcal{O}(S)$ es finito pues S tiene complemento finito en \mathbb{N}^d , y $\mathcal{I}(S) \subseteq \mathcal{O}(S)$.

Se sabe que si $S \subseteq \mathbb{N}^d$ es un SNG y $x \notin S$, entonces $S \cup \{x\}$ es un SNG si y solo si x es una laguna especial de S . En particular, para construir $\mathcal{O}(S)$ basta con calcular $SG(S)$ y para cada $x \in SG(S)$ construir $S_x = S \cup \{x\}$ y repetir este proceso de manera recursiva con cada S_x hasta obtener \mathbb{N}^d ; una implementación de este proceso, escrita por el autor, se puede ver en A.9 del Apéndice A.

Ejemplo 3.3.2. Sea $S = \mathbb{N}^3 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$. Entonces se puede dibujar $\mathcal{O}(S)$ de la siguiente manera. En este caso, se utilizan las lagunas de cada SNG en lugar de sus generadores para mejorar la visibilidad de la figura.

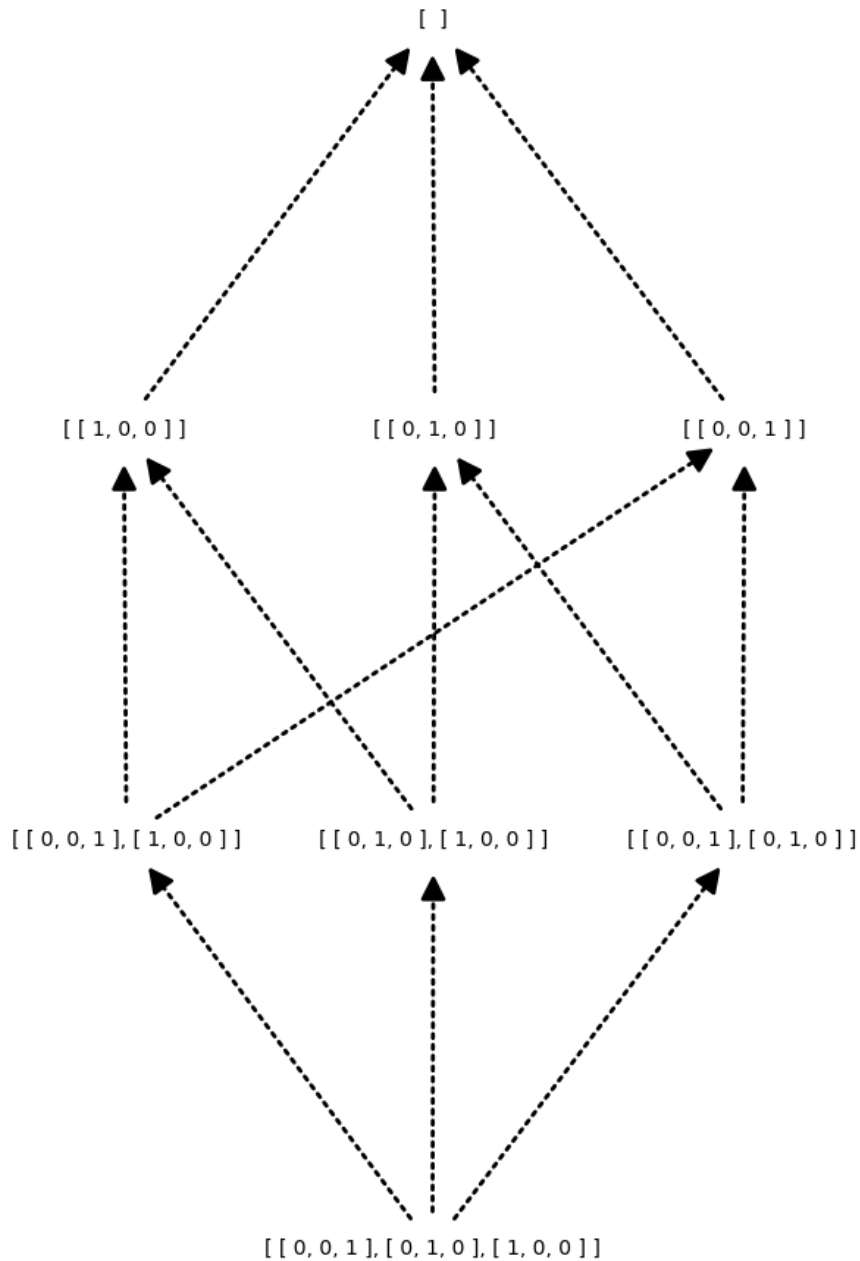


Figura 3.3: $\mathcal{O}(\mathbb{N}^3 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\})$

Proposición 3.3.3. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG. Si S no es irreducible, entonces $S = S_1 \cap \dots \cap S_n$ con $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{I}(S)$.

Demostración. Si S no es irreducible, entonces $S = S_1 \cap S_2$ donde S_1, S_2 son SNGs tales que $S \subset S_1$ y $S \subset S_2$. Si S_1 o S_2 tampoco son irreducibles, podemos repetir el mismo argumento y este proceso es finito pues $\mathcal{I}(S) \subseteq \mathcal{O}(S)$, por lo que construimos a S como una intersección finita de SNGs irreducibles. □

Sea $\text{Mín}_{\subseteq}(\mathcal{I}(S))$ el conjunto de los elementos de $\mathcal{I}(S)$ que son minimales con respecto a la inclusión de conjuntos. Una descomposición $S = S_1 \cap \cdots \cap S_n$ es llamada **minimal** (o **no refinable**) si $S_1, \dots, S_n \in \text{Mín}_{\subseteq}(\mathcal{I}(S))$.

Proposición 3.3.4. *Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG y $S = S_1 \cap \cdots \cap S_n$ con $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{I}(S)$, entonces existen $S'_1, \dots, S'_n \in \text{Mín}_{\subseteq}(\mathcal{I}(S))$ tales que $S = S'_1 \cap \cdots \cap S'_n$.*

Demostración. Si $S = S_1 \cap \cdots \cap S_n$ y existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $S_i \notin \text{Mín}_{\subseteq}(\mathcal{I}(S))$, entonces se puede escoger un $S'_i \subset S_i$ con $S'_i \in \text{Mín}_{\subseteq}(\mathcal{I}(S))$. \square

Lema 3.3.5. *Sean S y T dos SNGs en \mathbb{N}^d tales que $S \subsetneq T$ y $\mathbf{h} \in \text{Máx}(T \setminus S)$ (maximales respecto al orden parcial natural de \mathbb{N}^d), entonces $\mathbf{h} \in SG(S)$.*

Demostración. Sea $\mathbf{h} \in \text{Máx}(T \setminus S)$. Luego $\mathbf{h} \in G(S)$ y para todo $s \in S \setminus \{0\}$, tenemos que $\mathbf{h} + s \in T$ y $\mathbf{h} + s > \mathbf{h}$, luego $\mathbf{h} + s \in S$. Análogamente, $2\mathbf{h} \in T$ y $2\mathbf{h} > \mathbf{h}$, por lo que $2\mathbf{h} \in S$ y $\mathbf{h} \in SG(S)$. \square

Definición 3.3.6. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG y $T \in \mathcal{O}(S)$. Definimos:

$$\mathcal{C}(T) = \{\mathbf{h} \in SG(S) \mid \mathbf{h} \notin T\}.$$

Proposición 3.3.7. *Sean $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG y $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{O}(S)$, entonces las siguientes son equivalentes:*

- 1) $S = S_1 \cap \cdots \cap S_n$,
- 2) Para todo $\mathbf{h} \in SG(S)$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\mathbf{h} \notin S_i$,
- 3) $\mathcal{C}(S_1) \cup \cdots \cup \mathcal{C}(S_n) = SG(S)$.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) Sea $\mathbf{h} \in SG(S)$. Entonces $\mathbf{h} \notin S = S_1 \cap \cdots \cap S_n$, lo cual implica que $\mathbf{h} \notin S_i$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$.

2) \Rightarrow 1) Suponga que $S \subsetneq S_1 \cap \cdots \cap S_n$. Sea $\mathbf{h} \in \text{Máx}((S_1 \cap \cdots \cap S_n) \setminus S)$ y note que por el Lema 3.3.5 se tiene que $\mathbf{h} \in SG(S)$ y $\mathbf{h} \in S_1 \cap \cdots \cap S_n$, lo cual contradice la hipótesis.

2) \Rightarrow 3) Por hipótesis, para cada $\mathbf{h} \in SG(S)$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\mathbf{h} \in \mathcal{C}(S_i)$, luego $SG(S) \subseteq \mathcal{C}(S_1) \cup \cdots \cup \mathcal{C}(S_n)$, y la otra contención es trivial por construcción de los $\mathcal{C}(S_i)$, lo que nos da la igualdad de conjuntos.

3) \Rightarrow 2) Como $\mathcal{C}(S_1) \cup \cdots \cup \mathcal{C}(S_n) = SG(S)$, para cada $\mathbf{h} \in SG(S)$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\mathbf{h} \in \mathcal{C}(S_i)$, esto es, $\mathbf{h} \notin S_i$ por definición de $\mathcal{C}(S_i)$. \square

Tal y como ocurre para los semigrupos numéricos, es posible considerar una descomposición minimal en irreducibles para un SNG dado y construir un algoritmo para calcular dicha descomposición.

Algoritmo 3.3.8. *Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG que no es irreducible.*

- 1) Encuentre el conjunto $SG(S)$,
- 2) Tome $I = \emptyset$ y $C = \{S\}$,
- 3) Para todo $S' \in C$, sea B el conjunto conformado por todos los SNGs \bar{S} tales que $|\bar{S} \setminus S'| = 1$,
- 4) Elimine de B los SNGs S' tales que $SG(S) \subseteq S'$,
- 5) Elimine de B los SNGs S' tales que existe $\tilde{S} \in I$ con $\tilde{S} \subseteq S'$,
- 6) Sea $C = \{S' \in B \mid S' \text{ no es irreducible}\}$,
- 7) Sea $I = I \cup \{S' \in B \mid S' \text{ es irreducible}\}$,
- 8) Si $C \neq \emptyset$, volver al Paso 3,
- 9) Para cada $S' \in I$, compute $\mathcal{C}(S')$,
- 10) Devuelva un conjunto de SNGs S_1, \dots, S_r de modo que estos sean minimales en I y cumplan que:

$$\mathcal{C}(S_1) \cup \dots \cup \mathcal{C}(S_r) = SG(S).$$

Se van a explicar algunas de las lineas del algoritmo anterior:

- Paso 3): Los SNGs \bar{S} son construidos como $S' \cup \{x\}$ con $x \in SG(S)$.
- Paso 4): Si $SG(S) \subseteq S'$, entonces S' no aparece en la descomposición de S' como intersección de SNGs, por la Proposición 3.3.7.
- Paso 5): Como se quiere calcular una descomposición minimal de S como una intersección de SNGs irreducibles, se pueden descartar los SNGs que contengan algún SNG irreducible que ya se haya obtenido anteriormente.
- Paso 8): Por los pasos 4) y 5), se puede asegurar que C será vacío en alguna iteración.

- Paso 10): Como $\text{Mín}_{\subseteq} \mathcal{I}(S) \subseteq I$, se puede obtener una descomposición minimal por la Proposición 3.3.4.

Se sabe que para semigrupos numéricos, una descomposición minimal como la definida en la Proposición 3.3.4 no es única y no siempre es minimal con respecto al número de SNGs involucrados en la descomposición. Lo mismo ocurre para los SNGs. En el Paso 10 del algoritmo 3.3.8, se podría en su lugar construir una descomposición utilizando el menor número de SNGs irreducibles.

Ejemplo 3.3.9. Sea $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$, entonces se tiene que

$$S = (S \cup \{(0, 1), (1, 1)\}) \cap (S \cup \{(1, 0), (2, 0)\})$$

Una implementación del Algoritmo 3.3.8, escrita por el autor, junto a la computación del ejemplo anterior se pueden ver en A.9 del Apéndice A.

El conjunto de las lagunas especiales de un SNG nos permite obtener algunas propiedades sobre la maximalidad de un SNG dado dentro del conjunto de todos los SNGs.

Proposición 3.3.10. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG y sea $\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t\} \subseteq G(S)$, entonces las siguientes son equivalentes:

- 1) S es maximal con respecto a la inclusión en el conjunto de los SNGs T tales que $T \cap \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t\} = \emptyset$;
- 2) $SG(S) \subseteq \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t\}$.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) Sea $\mathbf{h} \in SG(S)$ y suponga que $\mathbf{h} \notin \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t\}$, entonces $S \subsetneq S \cup \{\mathbf{h}\}$ y $S \cup \{\mathbf{h}\} \cap \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t\} = \emptyset$, lo cual contradice la hipótesis.

2) \Rightarrow 1) Sea T un SNG tal que $T \cap \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t\} = \emptyset$, suponga que $S \subsetneq T$ y considere $\mathbf{h} \in \text{Máx}_{\leq}(T \setminus S)$. Por el Lema 3.3.5, se tiene que $\mathbf{h} \in SG(S)$, más $\mathbf{h} \notin \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t\}$, ya que $T \cap \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t\} = \emptyset$, lo cual es una contradicción. \square

Esto implica que si S y T son dos SNGs tales que $SG(S) = SG(T)$ pero $G(S) \neq G(T)$, entonces $S \not\subseteq T$ y $T \not\subseteq S$.

3.4. Unicidad del elemento de Frobenius

En \mathbb{N}^d no existe un orden total natural, por lo que no es inmediatamente claro como se podría definir el elemento de Frobenius para un SNG (tal y como ocurre en los semigrupos numéricos). En Cisto et al. (2020), se logra esto al definir un **orden**

monomial relajado, cuyo propósito es construir un *árbol* de SNGs para cada d , de modo similar al que ocurre en el caso $d = 1$. El elemento de Frobenius es únicamente determinado con respecto al orden monomial relajado definido. En esta sección, se quiere investigar condiciones para las cuales el elemento de Frobenius no depende del orden monomial relajado utilizado.

Definición 3.4.1. Un orden total $<_m$ de los elementos de \mathbb{N}^d es llamado un **orden monomial** si satisface

- 1) Si $v, w \in \mathbb{N}^d$ y si $v <_m w$ entonces $v + u <_m w + u$ para cualquier $u \in \mathbb{N}^d$,
- 2) Si $v \in \mathbb{N}^d$ y $v \neq 0$ entonces $0 <_m v$.

Definición 3.4.2. Un orden total, \prec , de los elementos de \mathbb{N}^d es llamado un **orden monomial relajado** si satisface

- 1) Si $v, w \in \mathbb{N}^d$ y si $v \prec w$ entonces $v \prec w + u$ para cualquier $u \in \mathbb{N}^d$,
- 2) Si $v \in \mathbb{N}^d$ y $v \neq 0$ entonces $0 \prec v$.

Los órdenes monomiales más conocidos, definidos sobre los monomios de un anillo de polinomios dado definen sobre \mathbb{N}^d órdenes totales, los cuales pueden ser llamados *órdenes monomiales* sobre \mathbb{N}^d . En particular, éstos son órdenes monomiales relajados (la recíproca no es cierta). Será también útil recordar que, cualquier orden monomial sobre \mathbb{N}^d puede definirse en términos de productos punto, mediante una colección ordenada de d *vectores de peso* linealmente independientes de $\mathbb{R}_{\geq 0}^d$. Es decir, si w_1, w_2, \dots, w_d son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}_{\geq 0}^d$, entonces se puede definir un orden monomial $<_m$ sobre los elementos de \mathbb{N}^d como:

$u <_m v$ si y solo si el menor i que cumple con $w_i \cdot u \neq w_i \cdot v$ tiene que $w_i \cdot u < w_i \cdot v$.

Además, $<_m$ es también un orden monomial relajado.

Ejemplo 3.4.3. Algunos ejemplos de órdenes monomiales relajados en \mathbb{N}^d son:

- 1) El *orden lexicográfico* determinado al fijar los vectores de peso $w_i = e_i$, donde $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$. Este orden también es un orden monomial.
- 2) Toda permutación de los elementos e_i con $i \in \{1, \dots, d\}$ determina un orden monomial relajado.
- 3) Sea $<_1$ un orden monomial y sean $\text{mín}(u) = \{u^{(i)} \mid i = 1, \dots, d\}$. Defina $u \prec v$ si,

- I) $\min(\mathbf{u}) < \min(\mathbf{v})$ o si
 II) $\min(\mathbf{u}) = \min(\mathbf{v})$ y $\mathbf{u} <_1 \mathbf{v}$.

Observe que \prec es un orden monomial relajado pero no es un orden monomial en general. Para ilustrar esto, considere el siguiente ejemplo: sean $\mathbf{u} = (0, 2, 3)$ y $\mathbf{v} = (1, 1, 3)$ y note que $\min(\mathbf{u}) = 0 < 1 = \min(\mathbf{v})$. Sea $\mathbf{k} = (3, 0, 1)$, luego $\mathbf{u} + \mathbf{k} = (3, 2, 4)$ lo cual significa que $\min(\mathbf{u} + \mathbf{k}) = 2$ pero $\mathbf{v} + \mathbf{k} = (4, 1, 4)$, por tanto $\min(\mathbf{v} + \mathbf{k}) = 1$. Esto muestra que el orden monomial relajado definido en 3) no necesariamente es un orden monomial.

Definición 3.4.4. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG y \prec un orden monomial relajado en \mathbb{N}^d . El elemento de Frobenius de S con respecto a \prec , denotado por f_{\prec} , es el mayor elemento de $G(S)$ con respecto a \prec .

Proposición 3.4.5. *Todo orden monomial relajado de \mathbb{N}^d es una extensión del orden parcial natural de \mathbb{N}^d .*

Demostración. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^d$ elementos distintos con $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$. Entonces existe $\mathbf{c} \in \mathbb{N}^d$ tal que $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b}$. Sea \prec un orden monomial relajado en \mathbb{N}^d y suponga que $\mathbf{b} \prec \mathbf{a}$, luego $\mathbf{b} \prec \mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b}$, una contradicción. \square

Proposición 3.4.6. *Sean $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG y $f \in G(S)$. Entonces $f_{\prec} = f$ para cada orden monomial relajado \prec si y solo si, f es el único elemento maximal en $G(S)$ con respecto al orden parcial natural de \mathbb{N}^d .*

Demostración. Note que f debe ser maximal en $G(S)$ con respecto al orden parcial natural de \mathbb{N}^d , pues si existiera un $\mathbf{h} \in G(S)$ con $\mathbf{f} \leq \mathbf{h}$, entonces $\mathbf{f} \preceq \mathbf{h}$ para cada orden monomial relajado sobre \mathbb{N}^d por la Proposición 3.4.5, por tanto, resta demostrar que f es el único elemento maximal en $G(S)$. Suponga que existe otro elemento $\mathbf{g} \in G(S)$ maximal con $\mathbf{g} \neq \mathbf{f}$. Como \mathbf{g} es maximal, se tiene que $\mathbf{g} \not\leq \mathbf{f}$ y $\mathbf{f} \not\leq \mathbf{g}$. Por tanto, existe al menos una coordenada de \mathbf{g} , dígase la j -ésima, que es mayor a la j -ésima coordenada de \mathbf{f} . Se va a definir un orden monomial relajado \prec , utilizando unos vectores de peso w_1, w_2, \dots, w_d apropiados. Denote por \mathbf{e}_i con $i = 1, \dots, d$ los vectores básicos dados anteriormente, fijando $w_1 = e_j$, $w_j = e_1$ y $w_i = e_i$ para $i \neq 1, j$, se tiene que el orden monomial relajado definido por estos vectores de peso implica que $\mathbf{f} \prec \mathbf{g}$, lo cual es una contradicción con la hipótesis.

Recíprocamente, esto es una consecuencia directa de la Proposición 3.4.5. \square

Por la Proposición 3.4.6, se tiene que si $S \subseteq \mathbb{N}^d$ es un SNG tal que existe un único elemento maximal $f \in G(S)$ con respecto al orden parcial natural de \mathbb{N}^d , entonces S tiene un *único* elemento Frobenius, independiente del orden monomial relajado utilizado.

Definición 3.4.7. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG tal que existe un único elemento maximal $f \in G(S)$ con respecto al orden parcial natural \leq en \mathbb{N}^d . Se llama a (S, f) un SNG Frobenius y se puede referir a f como el elemento Frobenius de S sin ambigüedad alguna.

Observación. Todo semigrupo numérico S es un SNG Frobenius (S, f) , donde f es el número de Frobenius.

Proposición 3.4.8. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG irreducible con $SG(S) = \{f\}$. Entonces (S, f) es un SNG Frobenius.

Demostración. Basta con demostrar que f es el único elemento maximal en $G(S)$ respecto al orden parcial natural de \mathbb{N}^d . Sea $h \in G(S)$. Si $h = \frac{f}{2}$, es claro que $h \leq f$. Si $h \neq \frac{f}{2}$, entonces $f - h \in S \subseteq \mathbb{N}^d$ por la Proposición 3.2.7, lo cual implica que $h \leq f$. \square

Observación. La recíproca de la Proposición 3.4.8 no es cierta. Considere el SNG $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 5), (0, 6), (0, 9)\}$. Es claro que $(0, 9)$ es el único elemento maximal en $G(S)$ con respecto al orden parcial natural de \mathbb{N}^2 , pero $SG(S) = \{(0, 6), (0, 9)\}$. De esta manera, $(S, (0, 9))$ es un SNG Frobenius pero no es irreducible.

Corolario 3.4.9. Los SNGs simétricos y pseudo-simétricos son SNGs Frobenius.

Proposición 3.4.10. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG. Entonces S es irreducible con elemento de Frobenius f si y solo si S es maximal en el conjunto de todos los SNGs que no contienen a f .

Demostración. Si S es irreducible con elemento de Frobenius f , entonces $SG(S) = \{f\}$ y el resultado sigue de la Proposición 3.3.10.

Recíprocamente, suponga que $S = S_1 \cap S_2$ con $S \subsetneq S_1$ y $S \subsetneq S_2$. Entonces $f \in S_1 \cap S_2$, lo que contradice la hipótesis. \square

Ahora se desea investigar sobre la existencia de órdenes monomiales relajados tales que, con respecto a estos, algún elemento $h \in G(S)$ sea el elemento Frobenius. Por la Proposición 3.4.5, se tiene que estos elementos deben ser maximales en $G(S)$ con relación al orden parcial natural de \mathbb{N}^d .

Definición 3.4.11. Sean $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG y $h \in G(S)$, se dice que h es **Frobenius permisible** si existe un orden monomial relajado \prec tal que $f_\prec = h$.

Ejemplo 3.4.12. Para cada SNG Frobenius, su respectivo elemento de Frobenius es Frobenius permisible.

Proposición 3.4.13. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG cuyo conjunto de lagunas $G(S)$ tiene exactamente dos elementos maximales h_1, h_2 con respecto al orden parcial natural de \mathbb{N}^d . Entonces h_1 y h_2 son Frobenius permisibles.

Demostración. Basta con mostrar que existen órdenes monomiales relajados \prec_1, \prec_2 tales que $h_1 \prec_1 h_2$ y $h_2 \prec_2 h_1$. Como h_1 y h_2 son elementos maximales distintos, entonces existen al menos una coordenada de h_1 , dígase la i -ésima, que es mayor a la i -ésima coordenada de h_2 y una coordenada de h_2 , dígase la j -ésima, que es mayor a la j -ésima coordenada de h_1 . Con esto, se puede definir dos órdenes monomiales relajados a partir de unos vectores pesos apropiados, tal y como se hizo en demostración de la Proposición 3.4.6. De esta manera, defina \prec_1 utilizando $w_1 = e_j, w_j = e_1$ y $w_k = e_k$ para $k \neq 1, j$ y defina \prec_2 con $w_1 = e_i, w_i = e_1$ y $w_k = e_k$ para $k \neq 1, i$. Así, es válido que $h_1 \prec_1 h_2$ y $h_2 \prec_2 h_1$, completando la demostración. \square

Ejemplo 3.4.14. Si $G(S)$ tiene más de dos elementos maximales, entonces el argumento anterior no funciona, pero puede ocurrir que cualquier elemento maximal en $G(S)$ es Frobenius permisible, como ocurre en el siguiente ejemplo:

Sea $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 0), (5, 0), (7, 0)\}$, como se puede observar en la siguiente figura, donde los puntos en negro son elementos de S , los puntos con borde rojo son las lagunas de S y los puntos verdes son los elementos maximales de $G(S)$ respecto al orden parcial natural de \mathbb{N}^2 .

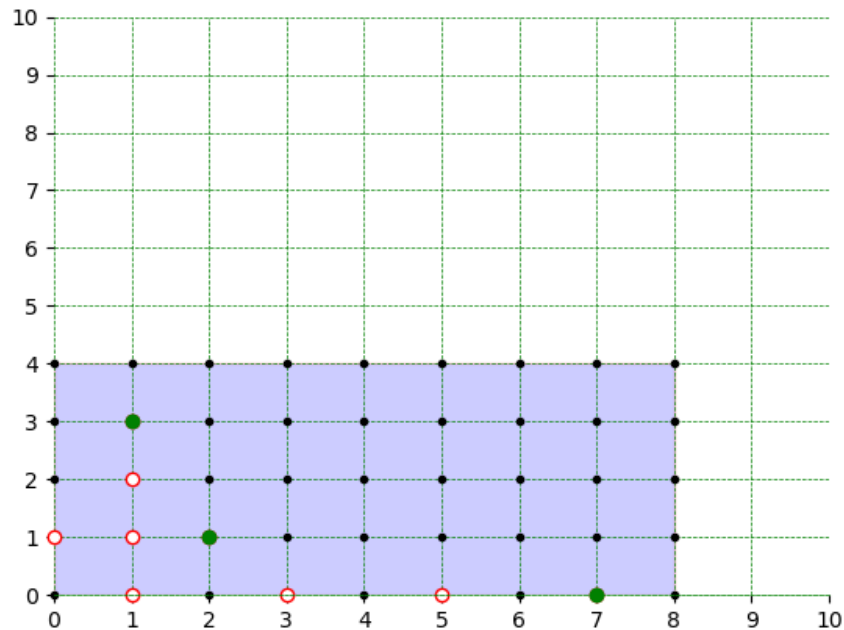


Figura 3.4: SNG en \mathbb{N}^2 con sus lagunas maximales respecto a \leq

Tomando $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$, se tiene que:

- $(1, 3)$ es Frobenius permisible, pues se puede definir un orden monomial relajado \prec_1 utilizando como vectores peso $w_1 = e_2$ y $w_2 = e_1$. Con esto, se tiene que $(7, 0) \prec_1 (2, 1) \prec_1 (1, 3)$;
- $(7, 0)$ es Frobenius permisible, pues se puede definir un orden monomial relajado \prec_2 utilizando como vectores peso $w_1 = e_1$ y $w_2 = e_2$. Con esto, se tiene que $(1, 3) \prec_2 (2, 1) \prec_2 (7, 0)$;
- $(2, 1)$ también es Frobenius permisible con respecto al orden monomial relajado \prec definido en el ítem 3) del Ejemplo 3.4.3, donde \prec_1 es el orden lexicográfico. Con esto, se tiene que $(7, 0) \prec (1, 3) \prec (2, 1)$.

3.5. Fórmulas para SNGs irreducibles y SNGs Frobenius

En esta sección, se van a dar algunas caracterizaciones de SNGs simétricos y pseudo-simétricos en términos del elemento de Frobenius y su género, tal y como se tiene para semigrupos numéricos en el Corolario 2.2.8. Se va a comenzar dando algunas notaciones que se utilizarán en la sección.

Para un elemento $x \in \mathbb{N}^d$, se va a utilizar $x + \mathbf{1}$ para referirnos al elemento de \mathbb{N}^d cuya i -ésima coordenada es $x^{(i)} + 1$ para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, y el símbolo $|x|_{\times}$ para representar $\prod_{i=1}^d x^{(i)} = x^{(1)} \cdot x^{(2)} \cdots x^{(d)}$, el producto de las coordenadas de x .

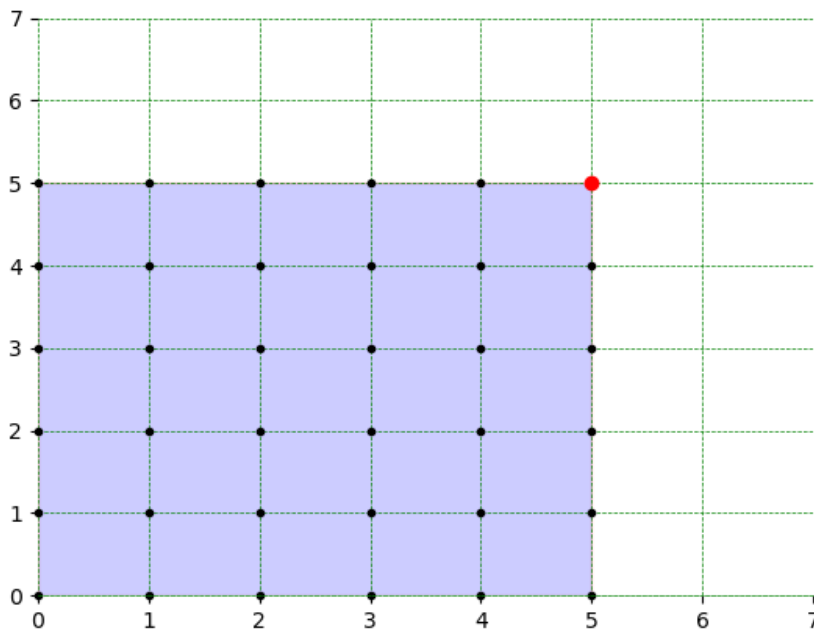
Definición 3.5.1. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG, $\mathbf{h} \in \mathbb{N}^d$ y \leq el orden parcial natural de \mathbb{N}^d . Defina los conjuntos:

- $\pi(\mathbf{h}) = \{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d \mid \mathbf{n} \leq \mathbf{h}\}$;
- $LG(\mathbf{h}) = \{\mathbf{g} \in G(S) \mid \mathbf{g} \leq \mathbf{h}\}$;
- $N(\mathbf{h}) = \{\mathbf{n} \in \pi(\mathbf{h}) \mid \mathbf{n} \in S\}$;
- $MG(S)$ es el conjunto de los elementos maximales de $G(S)$ con respecto a \leq .

Lema 3.5.2. Sean $\mathbf{h} \in \mathbb{N}^d$ y $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG, entonces se tienen las siguientes propiedades:

- 1) $|\pi(\mathbf{h})| = (h^{(1)} + 1)(h^{(2)} + 1) \cdots (h^{(d)} + 1) = |\mathbf{h} + \mathbf{1}|_{\times}$;
- 2) $|N(\mathbf{h})| + |LG(\mathbf{h})| = |\mathbf{h} + \mathbf{1}|_{\times}$.

Demostración. Note que para cada $\mathbf{h} \in \mathbb{N}^d$, $\pi(\mathbf{h})$ es finito y representa el conjunto de puntos enteros sobre el hiperrectángulo cuyos vértices son: \mathbf{h} , el origen de \mathbb{N}^d y los puntos sobre los ejes coordenados de la forma $(h^{(1)}, 0, \dots, 0), (0, h^{(2)}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, h^{(d)})$. La Figura 3.5 ilustra esto al dibujar $\pi((\mathbf{5}, \mathbf{5}))$ en \mathbb{N}^2 .

Figura 3.5: $\pi((5, 5))$ en \mathbb{N}^2

Así, es fácil ver la primera afirmación. Para la segunda afirmación, es inmediato del hecho de que $\pi(\mathbf{h}) = N(\mathbf{h}) \cup LG(\mathbf{h})$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{N}^d$ y que $N(\mathbf{h})$ y $LG(\mathbf{h})$ son disjuntos. \square

Proposición 3.5.3. Sea (S, \mathbf{f}) un SNG Frobenius con género g en \mathbb{N}^d , entonces $2g \geq |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$.

Demostración. Observe que $g = |G(S)| = |LG(\mathbf{f})|$ pues (S, \mathbf{f}) es un SNG Frobenius. Además, si $x \in N(\mathbf{f})$, entonces $x < \mathbf{f}$, ya que $\mathbf{f} \notin S$, por lo que existe $y \in \pi(\mathbf{f})$ tal que $x + y = \mathbf{f}$ (Note que $y \notin S$, pues si así fuese, esto implicaría que $\mathbf{f} \in S$). Por tanto, $y \in LG(S)$, es decir, cada elemento de $N(\mathbf{f})$ está relacionado con un elemento de $LG(\mathbf{f})$, lo cual implica que $|LG(\mathbf{f})| \geq |N(\mathbf{f})|$. Por lo tanto, $|\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times} = |LG(\mathbf{f})| + |N(\mathbf{f})| \leq 2g$. \square

Cada semigrupo numérico es un SNG Frobenius, por lo que el resultado anterior nos da la conocida desigualdad $g(S) \geq \frac{F(S) + 1}{2}$ (Lema 1.3.5), donde $F(S)$ y $g(S)$ son el número de Frobenius y el género de un semigrupo numérico S dado.

Definición 3.5.4. Sean $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG y $\mathbf{h} \in G(S)$, entonces se define la siguiente función:

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbf{h}}: N(\mathbf{h}) &\rightarrow LG(\mathbf{h}) \\ s &\mapsto \mathbf{h} - s.\end{aligned}$$

Es fácil ver que esta función está bien definida y es inyectiva.

Lema 3.5.5. Sean $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG y $\mathbf{h} \in G(S)$, entonces $|N(\mathbf{h})| \leq |LG(\mathbf{h})| \leq |G(S)| = g$.

Demostración. Es inmediato del hecho de que $\Psi_{\mathbf{h}}$ es inyectiva. \square

Teorema 3.5.6. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG de género g , entonces S es simétrico si y solo si, existe $\mathbf{f} \in G(S)$ con $2g = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$. Además, \mathbf{f} es el elemento de Frobenius de S .

Demostración. Suponga que S es simétrico, entonces $SG(S) = PF(S) = \{\mathbf{f}\}$, por lo que $LG(\mathbf{f}) = G(S)$ por la Proposición 3.4.8. Se va a demostrar que la función $\Psi_{\mathbf{f}}$ es biyectiva, es decir, que también es sobreyectiva, en efecto, sea $\mathbf{h} \in LG(\mathbf{f})$, como S es simétrico, entonces $s = \mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$, es decir, $\Psi_{\mathbf{f}}(s) = \mathbf{h}$ y se tiene que $\Psi_{\mathbf{f}}$ es sobreyectiva. De esta manera, es válido que $|N(\mathbf{f})| = |LG(\mathbf{f})| = g$ y $2g = |N(\mathbf{f})| + |LG(\mathbf{f})| = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$, por el Lema 3.5.2.

Recíprocamente, sea $\mathbf{f} \in G(S)$ tal que $2g = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$. Por los Lemas, 3.5.5 y 3.5.2, es válido que $2g = |N(\mathbf{f})| + |LG(\mathbf{f})| \leq 2|LG(\mathbf{f})| \leq 2g$. Por tanto, $|N(\mathbf{f})| = |LG(\mathbf{f})| = g$, lo cual implica que $\Psi_{\mathbf{f}}$ es biyectiva. Ahora, se va a probar que para todo $\mathbf{h} \in G(S)$ se tiene que $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$. Como $|LG(\mathbf{f})| = g$ y $\Psi_{\mathbf{f}}$ es sobreyectiva, entonces $|LG(\mathbf{f})| = G(S)$ y si $\mathbf{h} \in G(S)$, existe $s \in S$ tal que $\Psi_{\mathbf{f}}(s) = \mathbf{f} - s = \mathbf{h}$, o equivalentemente, $\mathbf{f} - \mathbf{h} = s \in S$; por el Teorema 3.2.9, S es simétrico y, en particular, es válido que $\mathbf{f} \in MG(S)$, por lo que se concluye que \mathbf{f} es el elemento de Frobenius de S . \square

Teorema 3.5.7. Sea $S \subseteq \mathbb{N}^d$ un SNG de género g . Entonces S es pseudo-simétrico si y solo si, existe $\mathbf{f} \in G(S)$ con $2g - 1 = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$. Además, \mathbf{f} es el elemento de Frobenius de S .

Demostración. Suponga que S es pseudo-Frobenius, entonces

$$PF(S) = \left\{ \mathbf{f}, \frac{\mathbf{f}}{2} \right\}, SG(S) = \{\mathbf{f}\},$$

y $LG(S) = G(S)$. Además, para cada $\mathbf{h} \in G(S)$ con $\mathbf{h} \neq \frac{\mathbf{f}}{2}$, se tiene que $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$. Entonces, argumentando de manera similar a la que se hizo para el Teorema 3.5.6, se

puede probar que

$$|N(\mathbf{f})| + |LG(\mathbf{f})| = g + g - 1 = 2g - 1$$

Recíprocamente, sea $\mathbf{f} \in G(S)$ tal que $2g - 1 = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$, en particular, todas las coordenadas de \mathbf{f} son pares y $2g - 1 = |N(\mathbf{f})| + |LG(\mathbf{f})| \leq 2|LG(\mathbf{f})| \leq 2g$, por tanto, se tiene que $|LG(\mathbf{f})| = g$ (es imposible que $2g - 1 = 2|LG(\mathbf{f})|$) y como consecuencia $|N(\mathbf{f})| = g - 1$; además, $\frac{\mathbf{f}}{2} \in G(S)$ pues $\mathbf{f} \in G(S)$, por lo que la función $\widetilde{\Psi}_{\mathbf{f}}: N(\mathbf{h}) \rightarrow LG(\mathbf{h}) \setminus \left\{ \frac{\mathbf{f}}{2} \right\}$, inducida por $\Psi_{\mathbf{f}}$, es biyectiva. Esto implica que para cada $\mathbf{h} \in LG(\mathbf{h}) \setminus \left\{ \frac{\mathbf{f}}{2} \right\}$, o equivalentemente, si $\mathbf{h} \in G(S)$ y $\mathbf{h} \neq \frac{\mathbf{f}}{2}$, existe $s \in S$ tal que $\mathbf{f} - s = \mathbf{h}$, lo cual implica que $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$. Por el Teorema 3.2.10, S es pseudo-simétrico y, en particular, $\mathbf{f} \in MG(S)$, por lo que se concluye que \mathbf{f} es el elemento de Frobenius de S . \square

Ejemplo 3.5.8. Sea $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$. Así que S es un SNG con género $g = 7$ y para $\mathbf{f} = (6, 1) \in G(S)$ la igualdad $2g = (6 + 1)(1 + 1)$ es cierta, por lo que se puede concluir que S es simétrico. Esto es verdad, pues $PF(S) = \{(6, 1)\}$.

Sea $S' = \mathbb{N}^2 \setminus \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0), (6, 0), (12, 0)\}$, S' es un SNG con género $g = 7$ y para $\mathbf{f} = (12, 0) \in G(S')$ la igualdad $2g - 1 = (12 + 1)(0 + 1)$ es cierta, por lo que se puede concluir que S' es pseudo-simétrico. En este caso, $PF(S') = \{(6, 0), (12, 0)\}$.

Observación. Si $d = 1$, los Teoremas 3.5.6 y 3.5.7 se reducen al Corolario 2.2.8 para semigrupos numéricos simétricos y pseudo-simétricos.

Ejemplo 3.5.9. Sea $S = \mathbb{N}^3 \setminus \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (2, 0, 0), (2, 0, 1)\}$. S es un SNG Frobenius con elemento de Frobenius $\mathbf{f} = (2, 0, 1)$. Además, se tiene que $2g = 8 > (2 + 1)(0 + 1)(1 + 1) = 6$, por lo que se puede concluir que S no es irreducible.

Sea $S' = \mathbb{N}^3 \setminus \{(1, 0, 0), (2, 0, 0), (2, 0, 1)\}$. En este caso, el elemento de Frobenius es $\mathbf{f} = (2, 0, 1)$ y se tiene que $2g = 6 = (2 + 1)(0 + 1)(1 + 1)$. En particular, S' es simétrico.

Bibliografía

- Assi, A. and García-Sánchez, P. A. (2016). *Numerical Semigroups and Applications*. Springer International Publishing.
- Bernardini, M., Tenório, W., and Tizziotti, G. (2022). The corner element of generalized numerical semigroups. *Results in Mathematics*, 77(4).
- Bras-Amorós, M. (2003). *Improvements to Evaluation Codes and New Characterizations of Arf Semigroups*, pages 204–215. Springer Berlin Heidelberg.
- Bras-Amorós, M. (2019). Increasingly enumerable submonoids of \mathbb{R} : Music theory as a unifying theme. *The American Mathematical Monthly*, 127(1):33–44.
- Brauer, A. (1942). On a problem of partitions. *American Journal of Mathematics*, 64(1/4):299.
- Cisto, C., Delgado, M., and García-Sánchez, P. A. (2020). Algorithms for generalized numerical semigroups. *Journal of Algebra and Its Applications*, 20(05):2150079.
- Cisto, C., Failla, G., and Utano, R. (2019). On the generators of a generalized numerical semigroup. *Analele Universitatii “Ovidius” Constanta - Seria Matematica*, 27(1):49–59.
- Delgado, F. and Nunez, A. (1987). Monomial rings and saturated rings. In *Géométrie algébrique et applications, I (La Rábida, 1984)*, pages 23–34.
- Delgado, M., Garcia-Sanchez, P. A., and Morais, J. (2022). NumericalSgps, a package for numerical semigroups, Version 1.3.1. Refereed GAP package, <https://gap-packages.github.io/numericalsgps>.
- Eaton, R., Herzinger, K., Pierce, I., and Thompson, J. (2020). Numerical semigroups and the game of sylver coinage. *The American Mathematical Monthly*, 127(8):706–715.
- Failla, G., Peterson, C., and Utano, R. (2015). Algorithms and basic asymptotics for generalized numerical semigroups in \mathbb{N}^d . *Semigroup Forum*, 92(2):460–473.
- Fröberg, R., Gottlieb, C., and Häggkvist, R. (1986). On numerical semigroups. *Semigroup Forum*, 35(1):63–83.
- GAP (2024). *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.13.1*. The GAP Group. <https://www.gap-system.org>.

- Munuera, C., Farran, J., and Campillo, A. (2000). On the parameters of algebraic-geometry codes related to arf semigroups. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46(7):2634–2638.
- Ramírez Alfonsín, J. L. (2005). *The Diophantine Frobenius Problem*. Oxford University Press.
- Rosales, J., García-Sánchez, P., García-García, J., and Jiménez Madrid, J. (2004). Fundamental gaps in numerical semigroups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 189(1-3):301–313.
- Rosales, J. and García-Sánchez, P. A. (2009). *Numerical Semigroups*. Springer New York.
- Rosales, J. C. and García-Sánchez, P. A. (1998). On cohen-macaulay and gorenstein simplicial affine semigroups. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 41(3):517–537.
- Silva, M. (2022). Sobre semigrupos numéricos. Master's thesis, EDUFU - Editora da Universidade Federal de Uberlândia.
- Skupién, Z. (1993). A generalization of sylvester's and frobenius' problems on numerical semigroups. *Acta Arithmetica*, 65(4):353–366.
- The Sage Developers (2024). *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 10.3)*. <https://www.sagemath.org>.
- Wilf, H. S. (1978). A circle-of-lights algorithm for the “money-changing problem”. *The American Mathematical Monthly*, 85(7):562–565.

Apéndices

A Código en SageMath y GAP

Este apéndice contiene todo el código utilizado a lo largo del trabajo.

A.1 Semigrupos numéricos con número de Frobenius y género fijo

```
[1]: for n in range(1,12):  
    print(f'Semigrupos Numéricos con Número de Frobenius {n}')  
    print('Cantidad: ',gap(f'Length(NumericalSemigroupsWithFrobeniusNumber({n}))'))  
    print(gap(f'List(NumericalSemigroupsWithFrobeniusNumber({n}),MinimalGenerators)'))
```

Semigrupos Numéricos con Número de Frobenius 1

Cantidad: 1

[[2, 3]]

Semigrupos Numéricos con Número de Frobenius 2

Cantidad: 1

[[3 .. 5]]

Semigrupos Numéricos con Número de Frobenius 3

Cantidad: 2

[[2, 5], [4 .. 7]]

Semigrupos Numéricos con Número de Frobenius 4

Cantidad: 2

[[3, 5, 7], [5 .. 9]]

Semigrupos Numéricos con Número de Frobenius 5

Cantidad: 5

[[2, 7], [3, 4], [3, 7, 8], [4, 6, 7, 9], [6 .. 11]]

Semigrupos Numéricos con Número de Frobenius 6

Cantidad: 4

[[4, 5, 7], [4, 7, 9, 10], [5, 7, 8, 9, 11], [7 .. 13]]

Semigrupos Numéricos con Número de Frobenius 7

Cantidad: 11

[[2, 9], [3, 5], [3, 8, 10], [4, 5, 6], [4, 5, 11],
 [4, 6, 9, 11], [4, 9, 10, 11], [5, 6, 8, 9], [5, 8, 9, 11, 12],
 [6, 8, 9, 10, 11, 13], [8 .. 15]]

Semigrupos Numéricos con Número de Frobenius 8

Cantidad: 10

[[3, 7, 11], [3, 10, 11], [5, 6, 7, 9], [5, 6, 9, 13],
 [5, 7, 9, 11, 13], [5, 9, 11, 12, 13], [6, 7, 9, 10, 11],
 [6, 9, 10, 11, 13, 14], [7, 9, 10, 11, 12, 13, 15], [9 .. 17]]

Semigrupos Numéricos con Número de Frobenius 9

Cantidad: 21

```
[ [ 2, 11 ], [ 4, 6, 7 ], [ 4, 6, 11, 13 ], [ 4, 7, 10, 13 ],
  [ 4, 10, 11, 13 ], [ 5, 6, 7, 8 ], [ 5, 6, 7 ], [ 5, 6, 8 ],
  [ 5, 6, 13, 14 ], [ 5, 7, 8, 11 ], [ 5, 7, 11, 13 ], [ 5, 8, 11, 12, 14 ],
  [ 5, 11, 12, 13, 14 ], [ 6, 7, 8, 10, 11 ], [ 6, 7, 10, 11, 15 ],
  [ 6, 8, 10, 11, 13, 15 ], [ 6, 10, 11, 13, 14, 15 ],
  [ 7, 8, 10, 11, 12, 13 ], [ 7, 10, 11, 12, 13, 15, 16 ],
  [ 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17 ], [ 10 .. 19 ] ]
```

Semigrupos Numéricos con Número de Frobenius 10

Cantidad: 22

```
[ [ 3, 8, 13 ], [ 3, 11, 13 ], [ 4, 7, 9 ], [ 4, 7, 13 ], [ 4, 9, 11, 14 ],
  [ 4, 11, 13, 14 ], [ 6, 7, 8, 9, 11 ], [ 6, 7, 8, 11 ], [ 6, 7, 9, 11 ],
  [ 6, 7, 11, 15, 16 ], [ 6, 8, 9, 11, 13 ], [ 6, 8, 11, 13, 15 ],
  [ 6, 9, 11, 13, 14, 16 ], [ 6, 11, 13, 14, 15, 16 ],
  [ 7, 8, 9, 11, 12, 13 ], [ 7, 8, 11, 12, 13, 17 ],
  [ 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17 ], [ 7, 11, 12, 13, 15, 16, 17 ],
  [ 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15 ], [ 8, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18 ],
  [ 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19 ], [ 11 .. 21 ] ]
```

Semigrupos Numéricos con Número de Frobenius 11

Cantidad: 51

```
[ [ 2, 13 ], [ 3, 7 ], [ 3, 10, 14 ], [ 3, 13, 14 ], [ 4, 5 ], [ 4, 6, 9 ],
  [ 4, 6, 13, 15 ], [ 4, 9, 10, 15 ], [ 4, 9, 14, 15 ], [ 4, 10, 13, 15 ],
  [ 4, 13, 14, 15 ], [ 5, 7, 8, 9 ], [ 5, 7, 8 ], [ 5, 7, 9, 13 ],
  [ 5, 7, 13, 16 ], [ 5, 8, 9, 12 ], [ 5, 8, 12, 14 ], [ 5, 9, 12, 13, 16 ],
  [ 5, 12, 13, 14, 16 ], [ 6, 7, 8, 9, 10 ], [ 6, 7, 8, 9 ], [ 6, 7, 8, 10 ],
  [ 6, 7, 8, 17 ], [ 6, 7, 9, 10 ], [ 6, 7, 9, 17 ], [ 6, 7, 10, 15 ],
  [ 6, 7, 15, 16, 17 ], [ 6, 8, 9, 10, 13 ], [ 6, 8, 9, 13 ],
  [ 6, 8, 10, 13, 15, 17 ], [ 6, 8, 13, 15, 17 ], [ 6, 9, 10, 13, 14, 17 ],
  [ 6, 9, 13, 14, 16, 17 ], [ 6, 10, 13, 14, 15, 17 ],
  [ 6, 13, 14, 15, 16, 17 ], [ 7, 8, 9, 10, 12, 13 ], [ 7, 8, 9, 12, 13 ],
  [ 7, 8, 10, 12, 13 ], [ 7, 8, 12, 13, 17, 18 ], [ 7, 9, 10, 12, 13, 15 ],
  [ 7, 9, 12, 13, 15, 17 ], [ 7, 10, 12, 13, 15, 16, 18 ],
  [ 7, 12, 13, 15, 16, 17, 18 ], [ 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15 ],
  [ 8, 9, 12, 13, 14, 15, 19 ], [ 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 19 ],
  [ 8, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19 ], [ 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17 ],
  [ 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20 ],
  [ 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21 ], [ 12 .. 23 ] ]
```

```
[15]: for n in range(7):
        print(f'Semigrupos Numéricos con Género {n}')
        print('Cantidad: ',gap(f'Length(NumericalSemigroupsWithGenus({n}))'))
        print(gap(f'List(NumericalSemigroupsWithGenus({n}),MinimalGenerators)'))
```

Semigrupos Numéricos con Género 0

Cantidad: 1

[[1]]

Semigrupos Numéricos con Género 1

Cantidad: 1

[[2, 3]]

Semigrupos Numéricos con Género 2

Cantidad: 2

[[3 .. 5], [2, 5]]

Semigrupos Numéricos con Género 3

Cantidad: 4

[[4 .. 7], [3, 5, 7], [3, 4], [2, 7]]

Semigrupos Numéricos con Género 4

Cantidad: 7

[[5 .. 9], [4, 6, 7, 9], [4, 5, 7], [4, 5, 6], [3, 5],
[3, 7, 8], [2, 9]]

Semigrupos Numéricos con Género 5

Cantidad: 12

[[6 .. 11], [5, 7, 8, 9, 11], [5, 6, 8, 9], [5, 6, 7, 9],
[5, 6, 7, 8], [4, 6, 7], [4, 7, 9, 10], [4, 6, 9, 11],
[4, 5, 11], [3, 8, 10], [3, 7, 11], [2, 11]]

Semigrupos Numéricos con Género 6

Cantidad: 23

[[7 .. 13], [6, 8, 9, 10, 11, 13], [6, 7, 9, 10, 11],
[6, 7, 8, 10, 11], [6, 7, 8, 9, 11], [6, 7, 8, 9, 10],
[5, 7, 8, 9], [5, 8, 9, 11, 12], [5, 7, 9, 11, 13], [5, 7, 8, 11],
[5, 6, 9, 13], [5, 6, 8], [5, 6, 7], [4, 7, 10, 13], [4, 7, 9],
[4, 9, 10, 11], [4, 6, 11, 13], [4, 6, 9], [4, 5], [3, 8, 13],
[3, 10, 11], [3, 7], [2, 13]]

A.2 Computación del número de Frobenius y género con reducción

```
[1]: S1 = 'NumericalSemigroup([32,48,27])'
      print(gap(f'MinimalGenerators({S1})'))
      print(gap(f'FirstElementsOfNumericalSemigroup(10,{S1})'))
      print(gap(f'FrobeniusNumber({S1})'))
      print(gap(f'Genus({S1})'))
```

```
[ 27, 32, 48 ]
[ 0, 27, 32, 48, 54, 59, 64, 75, 80, 81 ]
421
211
```

```
[2]: S2 = 'NumericalSemigroup([2,3,27])'
      print(gap(f'MinimalGenerators({S2})'))
      print(gap(f'FirstElementsOfNumericalSemigroup(10,{S2})'))
      print(gap(f'FrobeniusNumber({S2})'))
      print(gap(f'Genus({S2})'))
```

```
[ 2, 3 ]
[ 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ]
1
1
```

```
[3]: 16*1 + 15*27
```

```
[3]: 421
```

```
[4]: 16*1 + (15*26)/2
```

```
[4]: 211
```

A.3 Computación de números pseudofrobenius a partir de $Ap(S, n)$

```
[1]: gap('LoadPackage("numericalsgps")')
```

```
[1]: true
```

```
[2]: S = 'NumericalSemigroup( 11, 12, 13, 32, 53 )'
Apery_S = f'AperyListOfNumericalSemigroupWRTElement({S},11)'
Lista_Apery = gap(f'{Apery_S}')
Lista_Vertices = gap(f'AperyListOfNumericalSemigroupAsGraph({Apery_S})')
print(Lista_Apery, Lista_Vertices)
```

```
[ 0, 12, 13, 25, 26, 38, 39, 51, 52, 53, 32 ] [ ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, [ 12, 25, 38, 51 ],
[ 13, 25, 26, 38, 39, 51, 52 ], ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,,
[ 25, 38, 51 ], [ 26, 38, 39, 51, 52 ], ,, ,, ,, [ 32 ], ,, ,, ,, [ 38, 51 ],
[ 39, 51, 52 ], ,, ,, ,, ,, ,, [ 51 ], [ 52 ], [ 53 ] ]
```

```
[3]: import re
def leaveOne(s, char):
    return re.sub(r'((%s\s?)){2,}' % char, r'\1' , s)

def convertir_lista_vecinos(lista_movimientos):
    return {sub[0]: sub[1:] for sub in lista_movimientos}

def limpiar_string_mov(original_string):
    foo = [pos for pos, char in enumerate(original_string) if char in ["(", ")"]]
    new_string = ""
    for n in range(len(foo)-1):
        if original_string[foo[n]] == "(" and original_string[foo[n+1]]=="(":
            new_string += original_string[foo[n]:foo[n+1]].replace(",","")
            new_string += original_string[foo[n+1]:foo[n+2]]
        elif original_string[foo[n]] == ")" and original_string[foo[n+1]]=="(":
            new_string += leaveOne(original_string[foo[n]:foo[n+1]],",")
            new_string += original_string[foo[n+1]:foo[n+2]]
        elif original_string[foo[n]] == ")" and original_string[foo[n+1]]==")":
            new_string += original_string[foo[n]:foo[n+1]].replace(",","")
            new_string += original_string[foo[n+1]:foo[n+1]+1]
    return convertir_lista_vecinos(sage_eval(new_string))
```

```
[4]: limpiar_string_mov(str(Lista_Vertices))
```

```
[4]: {12: [25, 38, 51],
13: [25, 26, 38, 39, 51, 52],
25: [38, 51],
26: [38, 39, 51, 52],
32: [],
```

```
38: [51],
39: [51, 52],
51: [],
52: [],
53: []}
```

```
[5]: D = DiGraph(limpiar_string_mov(str(Lista_Vertices)))
      P = Poset(D)
      P.maximal_elements()
```

```
[5]: [53, 32, 52, 51]
```

```
[6]: print([u-11 for u in P.maximal_elements()],gap(f'PseudoFrobenius({S})'))
```

```
[42, 21, 41, 40] [ 21, 40, 41, 42 ]
```

A.4 Tipo de $\langle s, s + 3, s + 3n + 1, s + 3n + 2 \rangle$

```
[1]: gap('LoadPackage("numericalsgps")')
```

```
[1]: true
```

```
[2]: n = 2
      r = 3*n+2 #r=8
      s = r*(3*n+2)+3 #s=67
```

```
[3]: S = gap(f'NumericalSemigroup({s},{s+3},{s+3*n+1},{s+3*n+2})')
      print(gap(f'Type({S})'),2*n+3)
```

8 7

```
[4]: from collections.abc import Iterable
      from numpy import *
      import math
      import matplotlib.pyplot as plt

      def obtener_tipo(num):
          if isinstance(num, Iterable):
              ls = []
              for n in num:
                  r = 3*n+2
                  s = r*(3*n+2)+3
                  S = gap(f'NumericalSemigroup({s},{s+3},{s+3*n+1},{s+3*n+2})')
                  ls.append(int(gap(f'Type({S})')))
              return ls
          else:
              n = int(num)
              r = 3*n+2
              s = r*(3*n+2)+3
              S = gap(f'NumericalSemigroup({s},{s+3},{s+3*n+1},{s+3*n+2})')
              return int(gap(f'Type({S})'))
```

```
[5]: obtener_tipo(arange(2, 20, 1))
```

```
[5]: [8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59]
```

```
[6]: obtener_tipo(2)
```

```
[6]: 8
```

```
[7]: t = arange(2, 20, 1)

      tipo_a = 2*t+3
      tipo_b = asarray(obtener_tipo(t))
```

```
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
plt.plot(t,tipo_a,t,tipo_b)
plt.xticks(t)
ax.spines[['top', 'right']].set_visible(False)
ax.legend(['2t+3', 'Tipo real'])#Esto dibuja el gráfico que compara t(S) y 2n+3
```

A.5 Semigrupos numéricos Arf y saturados

```
[1]: gap('LoadPackage("numericalsgps")')
```

```
[1]: true
```

```
[2]: gap("IsArf(NumericalSemigroup(3,5,7))")
      #Verifica si un semigrupo numérico dado es Arf o no
```

```
[2]: true
```

```
[3]: gap("IsArf(NumericalSemigroup(3,5,12))")
```

```
[3]: false
```

```
[4]: gap("(ArfClosure(NumericalSemigroup(5,12,17))){[1..12]}")
      #Obtiene los primeros 12 elementos de Arf(5,12,17)
```

```
[4]: [ 0, 5, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 ]
```

```
[5]: gap("Set(ArfNumericalSemigroupsWithFrobeniusNumber(10),MinimalGenerators)")
      #Genera todos los semigrupos numéricos Arf con Número de Frobenius 10
```

```
[5]: [ [ 3, 11, 13 ], [ 4, 11, 13, 14 ], [ 6, 9, 11, 13, 14, 16 ],
      [ 6, 11, 13, 14, 15, 16 ], [ 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17 ],
      [ 7, 11, 12, 13, 15, 16, 17 ], [ 8, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18 ],
      [ 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19 ], [ 11 .. 21 ] ]
```

```
[6]: gap("IsSaturated(NumericalSemigroup(4,6,9,11))")
      #Verifica si un semigrupo numérico dado es Saturado o no
```

```
[6]: true
```

```
[7]: gap("IsSaturated(NumericalSemigroup(8, 9, 12, 13, 15, 19 ))")
```

```
[7]: false
```

```
[8]: gap("SaturatedClosure(NumericalSemigroup(6,10,15)){[1..12]}")
      #Obtiene los primeros 12 elementos de Sat(6,10,15)
```

```
[8]: [ 0, 6, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 ]
```

```
[9]: gap("Set(SaturatedNumericalSemigroupsWithFrobeniusNumber(10),MinimalGenerators)")
      #Genera todos los semigrupos numéricos saturados con Número de Frobenius 10
```

```
[9]: [ [ 3, 11, 13 ], [ 4, 11, 13, 14 ], [ 6, 9, 11, 13, 14, 16 ],
      [ 6, 11, 13, 14, 15, 16 ], [ 7, 11, 12, 13, 15, 16, 17 ],
      [ 8, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18 ], [ 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19 ],
      [ 11 .. 21 ] ]
```

A.6 Construcción de $\mathcal{O}(S)$

```
[1]: gap('LoadPackage("numericalsgps")')
```

```
[1]: true
```

```
[2]: gap('OverSemigroups(NumericalSemigroup(6,7,9))')
```

```
[2]: [ ModularNumericalSemigroup( [ 1, 2 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 2, 3 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 2, 5 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 2, 7 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 3 .. 5 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 3, 4 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 3, 5, 7 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 3, 7, 8 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 3, 7, 11 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 3, 7 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 4 .. 7 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 4, 6, 7, 9 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 5 .. 9 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 5, 6, 7, 9 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 6 .. 11 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 6, 7, 8, 9, 10 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 6, 7, 8, 9, 11 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 6, 7, 8, 9 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 6, 7, 9, 10, 11 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 6, 7, 9, 10 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 6, 7, 9, 11 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 6, 7, 9, 17 ] )
      , NumericalSemigroup( [ 6, 7, 9 ] )
      ]
```

```
[3]: gap('List(OverSemigroups(NumericalSemigroup(6,7,9)),MinimalGenerators)')
```

```
[3]: [ [ 1 ], [ 2, 3 ], [ 2, 5 ], [ 2, 7 ], [ 3 .. 5 ], [ 3, 4 ], [ 3, 5, 7 ],
      [ 3, 7, 8 ], [ 3, 7, 11 ], [ 3, 7 ], [ 4 .. 7 ], [ 4, 6, 7, 9 ],
      [ 5 .. 9 ], [ 5, 6, 7, 9 ], [ 6 .. 11 ], [ 6, 7, 8, 9, 10 ],
      [ 6, 7, 8, 9, 11 ], [ 6, 7, 8, 9 ], [ 6, 7, 9, 10, 11 ], [ 6, 7, 9, 10 ],
      [ 6, 7, 9, 11 ], [ 6, 7, 9, 17 ], [ 6, 7, 9 ] ]
```

```
[8]: def NumSem_SpecialGaps(NumericalSemigroup):
      try:
          SGs = gap(f"SpecialGaps({NumericalSemigroup})")
      except:
          SGs = []
```

```

NSs = []
for k in SGs:
    NSs.append(
        gap(f"AddSpecialGapOfNumericalSemigroup({k},{NumericalSemigroup})")
    )
return NSs

HashMap = {}
def generate_oversemigroup_tree(N):
    global HashMap
    if isinstance(N,list):
        Nset = gap(f"MinimalGenerators(NumericalSemigroup({[1]}))")
        for Nm in N:
            OverN = NumSem_SpecialGaps(Nm)
            if 'ModularNumericalSemigroup( [ 1, 2 ] )' in [str(A) for A in OverN]:
                HashMap[gap(f"MinimalGenerators({Nm})")] = [Nset]
            else:
                if str(Nm) == 'ModularNumericalSemigroup( [ 1, 2 ] )':
                    HashMap[Nset] = []
                else:
                    HashMap[gap(f"MinimalGenerators({Nm})")]
                    = [gap(f"MinimalGenerators({M})") for M in OverN]
            generate_oversemigroup_tree(OverN)
    else:
        OverN = NumSem_SpecialGaps(N)
        HashMap[gap(f"MinimalGenerators({N})")]
        = [gap(f"MinimalGenerators({M})") for M in OverN]
        generate_oversemigroup_tree(OverN)
    return HashMap

generadores = [6,7,9]
N = gap(f"NumericalSemigroup({generadores})")
#Base del Árbol
generate_oversemigroup_tree(N)

```

```

[4]: {[ 6, 7, 9 ]: [[ 6, 7, 9, 17 ]],
      [ 6, 7, 9, 17 ]: [[ 6 .. 9 ], [ 6, 7, 9, 10 ], [ 6, 7, 9, 11 ]],
      [ 6 .. 9 ]: [[ 6 .. 10 ], [ 6, 7, 8, 9, 11 ]],
      [ 6 .. 10 ]: [[ 6 .. 11 ]],
      [ 6 .. 11 ]: [[ 3, 7, 8 ], [ 4, 6, 7, 9 ], [ 5 .. 9 ]],
      [ 3, 7, 8 ]: [[ 3, 4 ], [ 3, 5, 7 ]],
      [ 3, 4 ]: [[ 3 .. 5 ]],
      [ 3 .. 5 ]: [[ 2, 3 ]],
      [ 2, 3 ]: [[ 1 ]],
      [ 1 ]: [],

```

```

[ 3, 5, 7 ]: [[ 3 .. 5 ]],
[ 4, 6, 7, 9 ]: [[ 2, 7 ], [ 3, 4 ], [ 4 .. 7 ]],
[ 2, 7 ]: [[ 2, 5 ]],
[ 2, 5 ]: [[ 2, 3 ]],
[ 4 .. 7 ]: [[ 2, 5 ], [ 3 .. 5 ]],
[ 5 .. 9 ]: [[ 3, 5, 7 ], [ 4 .. 7 ]],
[ 6, 7, 8, 9, 11 ]: [[ 6 .. 11 ]],
[ 6, 7, 9, 10 ]: [[ 3, 7 ], [ 6 .. 10 ], [ 6, 7, 9, 10, 11 ]],
[ 3, 7 ]: [[ 3, 7, 11 ]],
[ 3, 7, 11 ]: [[ 3, 7, 8 ]],
[ 6, 7, 9, 10, 11 ]: [[ 3, 7, 11 ], [ 5, 6, 7, 9 ], [ 6 .. 11 ]],
[ 5, 6, 7, 9 ]: [[ 5 .. 9 ]],
[ 6, 7, 9, 11 ]: [[ 6, 7, 8, 9, 11 ], [ 6, 7, 9, 10, 11 ]]

```

```

[5]: D = DiGraph(generate_oversemigroup_tree(gap(f"NumericalSemigroup({[6,7,9]}")))
P = Poset(D)
A = P.plot(vertex_shape="",vertex_size=1000,figsize=12,edge_style=":",
edge_thickness = 0.1)#Esto genera la figura del árbol

```

A.7 Descomposición de semigrupos en irreducibles y lagunas fundamentales

```
[1]: gap('LoadPackage("numericalsgps")')
```

```
[1]: true
```

```
[2]: S = 'NumericalSemigroup(5,6,7)'  
MinI_S = gap('DecomposeIntoIrreducibles({S})')  
gap('List({MinI_S},MinimalGenerators)')
```

```
[2]: [ [ 5 .. 8 ], [ 5, 6, 7, 9 ] ]
```

```
[3]: S2 = 'NumericalSemigroup(5,7,8,9,11)'  
MinI_S2 = gap('DecomposeIntoIrreducibles({S2})')  
gap('List({MinI_S2},MinimalGenerators)')
```

```
[3]: [ [ 3, 5, 7 ], [ 4, 5, 7 ] ]
```

```
[4]: S3 = 'NumericalSemigroup(5,21,24,28,32)'  
MinI_S3 = gap('DecomposeIntoIrreducibles({S3})')  
gap('List({MinI_S3},MinimalGenerators)')
```

```
[4]: [ [ 5, 9, 12, 13 ], [ 5, 11, 12, 13 ], [ 5, 12, 14, 16 ], [ 5, 14, 16, 18 ] ]
```

```
[5]: S_1 = 'NumericalSemigroup(5,7)'  
S_2 = 'NumericalSemigroup(5,8)'  
S_comparar = gap('IntersectionOfNumericalSemigroups({S_1},{S_2})')  
gap('S3={S_comparar}')
```

```
[5]: true
```

```
[6]: S_1 = 'NumericalSemigroup(5,7,11)'  
gap('FundamentalGaps({S_1})')
```

```
[6]: [ 6, 8, 9, 13 ]
```

```
[7]: S_2 = 'NumericalSemigroup(8,9,10,11,12,13,15)'  
gap('FundamentalGaps({S_2})')
```

```
[7]: [ 4, 5, 6, 14 ]
```

```
[8]: S_3 = 'NumericalSemigroup(6,9,11)'  
gap('FundamentalGaps({S_3})')
```

```
[8]: [ 3, 10, 13, 14, 16, 19, 25 ]
```

```
[9]: S_4 = 'NumericalSemigroup(14,15,22,31)'  
gap('FundamentalGaps({S_4})')
```

```
[9]: [ 25, 26, 32, 33, 34, 35, 38, 39, 40, 41, 47, 48, 49, 54, 55, 63, 69 ]
```

A.8 SNGs Irreducibles

```
[1]: gap('LoadPackage("numericalsgps")')
```

```
[1]: true
```

```
[2]: def EsIrreducible(sng):
    try:
        special_gaps = [tuple(u) for u in gap(f'SpecialGaps({sng})')]
        pseudo_frob = [tuple(u) for u in gap(f'PseudoFrobenius({sng})')]
        #Revisar si es irreducible
        if len(special_gaps) != 1:
            raise ValueError("El SNG no es Irreducible")
        #Revisa si es Simétrico al mirar PF(S)
        if len(pseudo_frob) == 1:
            return "El SNG es Simétrico"
        #En caso de que no, mira que el f/2 esté en PF(S)
        #[Ya sabemos que f in SG(S)]
        else:
            half_sg = tuple([n/2 for n in special_gaps[0]])
            if half_sg in pseudo_frob:
                return "El SNG es Pseudo-simétrico"
    except ValueError as e:
        print(e)
    except Exception as e:
        print(e)
```

```
[3]: lagunas_1 = str([[0, 1], [1, 1], [2, 1], [3, 1], [4, 1], [5, 1], [6, 1]])
EsIrreducible(gap(f'AffineSemigroupByGaps({lagunas_1})'))
```

```
[3]: 'El SNG es Simétrico'
```

```
[4]: lagunas_2 = str([[1, 0], [2, 0], [3, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [12, 0]])
EsIrreducible(gap(f'AffineSemigroupByGaps({lagunas_2})'))
```

```
[4]: 'El SNG es Pseudo-simétrico'
```

```
[5]: lagunas_3 = str([[0, 1], [0, 3], [1, 0], [1, 1], [1, 3], [2, 1], [2, 0], [3, 0]])
EsIrreducible(gap(f'AffineSemigroupByGaps({lagunas_3})'))
```

El SNG no es Irreducible

A.9 Descomposición de un SNG en SNGs Irreducibles

```
[1]: gap('LoadPackage("numericalsgps")')
```

```
[1]: true
```

```
[2]: def SNG_SpecialGaps(SNG):
    try:
        SGs = gap(f"SpecialGaps({SNG})")
    except:
        SGs = []
    NSs = []
    for k in SGs:
        NSs.append(gap(f"AddSpecialGapOfAffineSemigroup({k},{SNG}"))
    return NSs
```

```
[3]: Nd = gap(''AffineSemigroup( [ [ 0, 0, 1 ], [ 0, 1, 0 ], [ 1, 0, 0 ],
[ 1, 0, 1 ], [ 1, 1, 0 ], [ 2, 0, 0 ], [ 3, 0, 0 ] )''')
def oversemigroup_function(SNG):
    HashMap = {}
    def generate_oversemigroup_tree(N):
        nonlocal HashMap
        global Nd
        if isinstance(N,list):
            for Nm in N:
                OverN = SNG_SpecialGaps(Nm)
                if f"{Nd}" in [str(A) for A in OverN]:
                    HashMap[gap(f"Gaps({Nm})")] = [Nd]
                else:
                    if str(Nm) == f"{Nd}":
                        HashMap[Nd] = []
                    else:
                        HashMap[gap(f"Gaps({Nm})")] = [gap(f"Gaps({M})") for M in OverN]
            generate_oversemigroup_tree(OverN)
        else:
            OverN = SNG_SpecialGaps(N)
            HashMap[gap(f"Gaps({N})")] = [gap(f"Gaps({M})") for M in OverN]
            generate_oversemigroup_tree(OverN)

    generate_oversemigroup_tree(SNG)
    return HashMap
```

```
[5]: SNG_1 = gap("AffineSemigroupByGaps([[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]])")
D = DiGraph(oversemigroup_function(SNG_1))
P = Poset(D)
```

```
SNG_1_plot = P.plot(vertex_shape="",vertex_size=1000,figsize=12,edge_style=":",
edge_thickness = 0.1)
SNG_1_plot.save("Diagrama_Hasse_SNG_N3.png")
```

```
[6]: import itertools
import copy

def SNG_I_decomposition(SNG):
    SGs = gap(f"SpecialGaps({SNG})")
    SNG_2 = SNG
    I = []
    C = [SNG]
    while C != []:
        B = []
        for SNG in C:
            B.extend(SNG_SpecialGaps(SNG))
        B.sort()
        B = list(k for k,_ in itertools.groupby(B))
        B = [S for S in B if not specialgaps_in_SNG(S,SGs)]
        B = [S for S in B if not exist_subset(S,I)]
        C = [S for S in B if not EsIrreducible(S)]
        I.extend([S for S in B if S not in C])
    C_S = {S : Ev_C_S(S,SGs) for S in I}
    Descomp = Opt_S(SNG_2,I,C_S)
    return Descomp

def specialgaps_in_SNG(SNG,SpecialGaps):
    for N in SpecialGaps:
        if not gap(f"{N} in {SNG}"):
            return False
    return True

def exist_subset(SNG,Conjunto_SNGs):
    Gaps_SNG = gap(f"Gaps({SNG})")
    try:
        Conjunto_SNGs.remove(SNG)
    except:
        pass
    for N in Conjunto_SNGs:
        Gaps_N = gap(f"Gaps({N})")
        if A_is_subset(Gaps_SNG,Gaps_N):
            return True
    return False
```

```

def A_is_subset(setA,setB):
    for N in setA:
        if N not in setB:
            return False
    return True

def EsIrreducible(SNG):
    return len(gap(f"SpecialGaps({SNG})"))==1

def Ev_C_S(SNG, SpecialGaps):
    return [e for e in SpecialGaps if not gap(f"{e} in {SNG}")]

def Opt_S(SNG,I,CS):
    I2 = []
    for K in I:
        I3 = copy.deepcopy(I)
        if not exist_subset(K,I3):
            I2.append(K)
    if len(I) != len(I2):
        I = I2
        for k in [S for S in I if S not in I2]:
            del CS[k]
    AB = [list(comb) for i in range(2, len(I)+1) for comb in
itertools.combinations(CS.values(), i)]
    AB2 = [list(comb) for i in range(2, len(I)+1) for comb in
itertools.combinations(I, i)]
    Gaps_SNG = gap(f"Gaps({SNG})")
    SGs = gap(f"SpecialGaps({SNG})")
    i=0
    Combos = []
    for recurso in AB:
        prim = recurso[0]
        for N in recurso[1:]:
            prim.extend(N)
        prim.sort()
        prim = list(k for k,_ in itertools.groupby(prim))
        if gap(f"{prim} = {SGs}"):
            gaps_sets = [list(gap(f"Gaps({S})")) for S in AB2[i]]
            gaps_sets_0 = list(gaps_sets[0])
            for N in gaps_sets[1:]:
                gaps_sets_0.extend(list(N))
            gaps_sets_0.sort()
            gaps_sets_0 = list(k for k,_ in itertools.groupby(gaps_sets_0))

```

```

        if gap(f"{gaps_sets_0} = {Gaps_SNG}"):
            Combos.append(gaps_sets)
            break
    i=i+1
return Combos

```

```

[7]: Test_1 = gap("AffineSemigroupByGaps([[0, 1], [1, 0], [1, 1], [2, 0], [2, 1]])")
      SNG_I_decomposition(Test_1)

```

```

[7]: [[[[ 1, 0 ], [ 2, 0 ], [ 2, 1 ]], [[ 0, 1 ], [ 1, 1 ], [ 2, 1 ]]]]

```

```

[8]: Test_2 = gap("AsAffineSemigroup(NumericalSemigroup(5,21,24,28,32))")
      Combos = SNG_I_decomposition(Test_2)

```

```

[9]: def flatten_chain(matrix):
      return list(itertools.chain.from_iterable(matrix))

      for k in Combos[0]:
          print(gap(f"MinimalGenerators(NumericalSemigroupByGaps({list(flatten_chain(k))}))"))

```

```

[ 5, 8 ]

```

```

[ 5, 7 ]

```