Aplicación del método "back and forth"de teoría de modelos a órdenes lineales y al grafo universal

Rosa Ximena Barajas Rincón

Trabajo de Grado para optar al título de Matemática

Director

Rafael Fernando Isaacs Giraldo

Magíster en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2022

Agradecimientos

Agradezco especialmente a mis padres, Amelia Rincón Hernández y Expedito Barajas Rojas, también a mi hermana Yaneth Liliana Barajas Rincón, por su apoyo incondicional, paciencia, preocupación y compañía que me han dado a lo largo de mi carrera.

Al profesor Rafael Fernando Isaacs, por el tiempo, la paciencia, la orientación y los consejos que me ofreció para la realización de este trabajo, y por los conocimientos nuevos que me brindó en todo este proceso.

A mis compañeros y amigos del pregado que me brindaron su amabilidad, tiempo y colaboración en situaciones académicas y personales.

A major acknowledgment and thanks to Professor Peter J. Cameron for his attention to my concerns and for the wonderful insights he gave me in his emails.

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Resumen

Título: Aplicación del método "back and forth"de teoría de modelos a órdenes lineales y al grafo universal [*]

Autor: Rosa Ximena Barajas Rincón [**]

Palabras Clave: Método *"back and forth"*, Isomorfismo, Isomorfismos parciales, Estructuras relacionales, Órdenes lineales, La Clase de tipos de orden, Grafos aleatorios, Grafos no dirigidos, Grafo universal.

Descripción: Dadas dos estructuras relaciones (A,R) y (B,S), isomorfas, el método *"back and forth"*, de la teoría de modelos, nos permite construir una colección de isomorfismos parciales entre las dos estructuras, de tal manera que la unión de todos los isomorfismos de esa colección nos genera un ismorfismo total entre dichas estructuras. El método consiste en tomar subconjuntos finitos. $U_i \subseteq A$ y $V_i \subseteq V$, $i \in \mathbb{N}$, y crear correspondecias f_i, isomorfas entre U_i y V_i, es decir, funciones biyectivas que además preserven orden, esto es, $x_i \preceq y_i \Leftrightarrow f(x_i) \preceq f(y_i)$.

Iniciaremos presentando los conceptos y propiedades más relevantes sobre estructuras relacionales y órdenes en general, como el concepto de isomorfismo, que será ensencial al estudiar algunos resultados y propiedades entre órdenes lineales y grafos aleatorios no dirigidos. Luego, presentaremos la noción de lo que es la clase de los tipos de orden, las respectivas caracterizaciones de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, en que consiste el método *"back and forth"* y su aplicación a los teoremas de Cantor; se mostrará por ejemplo que cualesquier dos órdenes lineales densos contables sin primeros ni últimos elementos son isomorfos haciendo uso del *"back and forth"*, y para finalizar presentaremos el concepto de grafos aleatorios no dirigidos junto con la propiedad de extensión, muy crucial en esta parte, y el maravilloso grafo universal $\mathfrak{R}$; aquí describimos construcciones de $\mathfrak{R}$ y mostramos que cualesquier dos grafos contables infinitos no dirigidos son isomorfos, haciendo uso del *"back and forth"*.

---

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Rafael Fernando Isaacs Giraldo, Magíster en Matemáticas.

Abstract

Title: Application of the "back and forth"method of model theory to linear orders and the universal graph *

Author: Rosa Ximena Barajas Rincón **

Keywords: *"Back and forth"* method, Isomorphism, Partial isomorphisms, Relational structures, Linear orders, The class of order types, Random graphs, Undirected graphs, Universal graph.

Description: Given two related structures (A,R) and (B,S), isomorphic, the *"back and forth"* method of model theory allows us to construct a collection of partial isomorphisms between the two structures, such that the The union of all the isomorphisms of that collection generates a total isomorphism between these structures. The method consists of taking finite subsets. $U_i \subseteq A$ and $V_i \subseteq B$, $i \in N$, and create correspondences f_i, isomorphic between U_i and V_i, that is, bijective functions that also preserve order, that is, $x_i \preceq y_i \Leftrightarrow f(xi) \preceq f(yi)$.

We will begin by presenting the most relevant concepts and properties about relational structures and orders in general, such as the concept of isomorphism, which will be essential when studying some results and properties between linear orders and undirected random graphs. Then, we will present the notion of what the class of order types is, the respective characterizations of $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Q}$, what the *"back and forth"* method consists of and its application to Cantor's theorems; It will be shown, for example, that any two countable dense linear orders without first or last elements are isomorphic using *"back and forth"*, and finally we will present the concept of undirected random graphs together with the extension property, which is very crucial in this part. , and the wonderful universal graph R; here we describe constructions of R and show that any two undirected infinite count graphs are isomorphic, using *back and forth*.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Rafael Fernando Isaacs Giraldo, Magíster en Matemáticas.

Introducción

El estudio de cualquiera de las diferentes áreas de las matemáticas viene acompañado de cierta formalidad que las hacen complejas en la mayoría de casos, la historia nos muestra que la necesidad de formalizarlas parte de problemas cotidianos muy simples y faciles de identificar, pero hoy en día el avance de esta ciencia es tan elevado que comprenderlas no está al alcance de cualquier público. El objetivo en esta pequeña introducción es compartirles, de manera informal e intuitiva, una noción de los temas principales a trabajar en este proyecto, e incentivar al lector a conocer, con más detalle, una rama de la matemática que contiene propiedades y resultados sorprendentes.

Para comprender los temas sobre los que se basa este trabajo de grado iniciaremos mencionando un poco de historia sobre la evolución del concepto de *estructura* desde Évariste Galois (1811-1832) hasta la perspectiva estructuralista de Bourbaki (grupo de matemáticos franceses) y la mirada filosófica de Albert Lautman (1908-1944). Galois introduce el término de grupo, entendido como una *estructura* matemática formada por un conjunto y por una operación, a partir de la cual se relacionan cualquier par de elementos del conjunto para generar un tercero. Pero para entender el alcance de esta definición, es importante nombrar el problema al que Galois se enfrentó y la novedad de su solución en la matemática. El álgebra, en sus orígenes, fue una generalización de la aritmética, ya que en lugar de usar números para resolver problemas específicos, el álgebra introduce letras para simbolizar números y valores desconocidos. En términos generales, una ecuación algebraica se define como una igualdad expresada por un polinomio igual a cero, compuesta de constantes (a, b, c) y coeficientes (x, y, z). Niels Abel (1802-1829) probó en 1825 que no existe una forma general para resolver polinomios con grado igual o mayor a cinco, Galois más adelante llegó a la misma conclusión de Abel pero con un valor agregado: determinó qué propiedades deben tener los coeficientes de cualquier ecuación de cualquier grado para poder tener una forma que permita obtener una solución general. Esta solución se da a través del estudio de las permutaciones de las raíces de una ecuación polinomial de cualquier grado, con lo que se establece si es posible encontrar una solución. Por tanto, no interesa el significado de los elementos y operaciones, solo expresar su estructura algebraica interna.

El *estructuralismo*, un movimiento cultural del siglo XX, hereda elementos tanto del logicismo como del formalismo. Del logicismo adopta la metodología de construcción de conceptos más generales de naturaleza lógica, y la generalidad de los conceptos de clase y relación. Del formalismo retoma el estudio de estructuras abstractas en las que no se identifican los elementos ni las operaciones o relaciones entre estos.

Se entiende por estructura a un conjunto de elementos cuya naturaleza no está especificada. Para definir una estructura se da primero una serie de relaciones en las que han de intervenir estos elementos. En segundo lugar, se postulan sobre estas relaciones ciertas condiciones que deben ser satisfechas. Por ejemplo, en la teoría de conjuntos los números reales se definen como conjuntos de números racionales. También las operaciones y relaciones basadas en ellos se reducen a operaciones y relaciones entre conjuntos. En contraste, el enfoque de Bourbaki asume los números reales, sus operaciones y relaciones como datos con el fin de aislar sus propiedades de manera abstracta. Para Bourbaki no importa los objetos con los que se opera ni la naturaleza de la operación, pues son los axiomas quienes adquieren un lugar dominante, siendo las condiciones que deben cumplir las relaciones entre los objetos. Además, plantean que cada estructura lleva en sí su lenguaje propio, cargado de intuiciones particulares.

Ahora, con base a la información y conceptos dados anteriormente, podemos introducir, de manera más familiar e intuitiva, los temas principales que abarca este trabajo de grado. En primera instancia está el concepto de *isomorfismo*, que pretende captar la idea de *tener la misma estructura*, de manera informal, un isomorfismo no es más que una función (relación) entre dos conjuntos, X e Y, dotados del mismo tipo de estructura en determinado lenguaje, pero no necesariamente con elementos de la misma naturaleza, esta función hace que cada elemento de Y provenga de un único elemento de X, además transforma, conforme al leguaje, las operaciones, relaciones, etc., que hay en X en las que hay en Y. Así, en términos generales, dos estructuras se dicen que son *isomorfas* cuando existe una perfecta correspondencia de relaciones entre los elementos de los diferentes conjuntos. Saliéndonos del contexto matemático, podemos representar lo anterior tomando dos paises diferentes pero con igual régimen de gobierno y elegir dos muestras de población, una de cada país, de igual cantidad y formar una relación, entre los elementos de cada muestra, que mantenga la unicidad y características políticas en la correspondencia.

En general, y ya entrando más en un escenario puramente matemático, este proyecto se desarrolla trabajando propiedades entre estructuras sobre conjuntos contables, una de ellas es el orden, pero lo importante a resaltar es un método de la Teoría de modelos llamado *"back and forth"*, aplicado en isomorfismos entre conjuntos finitos, el cual nos permite deducir los resultados más importantes del trabajo, como lo es la existencia del famoso *Grafo Universal*, que es lo sorprendente, ya que podemos afirmar que cualesquier dos grafos contables son isomorfos.

En la Teoría de Modelos el método *"back and forth"* consiste en construir un isomorfismo entre dos estructuras elementalmente equivalentes mediante un procedimiento inductivo de isomorfismos entre conjuntos finitos, llamados *isomorfismos parciales*. El *"back and forth"* se aplica en diversas áreas de las matemáticas, lo que inspiró a realizar este trabajo, que tiene como objetivo la aplicación de este método al momento de estudiar propiedades del grafo universal, trabajadas por Peter J. Cameron en (Cameron, 2013) y Cameron (2001), y los teoremas de Cantor y sus consecuencias en la teoría de Órdenes Lineales.

La teoría de los grafos aleatorios, fundada por Paul Erdös y Alfred Rényi en una serie de documentos fundamentales, hace mención del Grafo Universal $\mathfrak{R}$ (Grafo de Rado) en Rado (1964) y sus caracterizaciones. Para presentar este famoso y espectacular grafo, que es nuestra gran meta, partiremos del siguiente suceso,*se encuentran dos personas y deciden coontruir dos grafos de la siguente manera, se lanza una moneda y si cae cara una de ellas elige si trazar o no una arista de su respectivo grafo, y si cae sello la otra persona de igual forma decide si trazar o no una* *arista de su respectivo grafo, este paso se repite una cantidad numerable (no finita) de veces y al final los grafos formados resultan ser isomorfos*, ¿sorprendete, no? En Cameron (2013) Cameron le da protagonismo a este grafo mostrando propiedades de este, haciendo uso del método *"back and forth"*.

Si bien el teorema sobre conjuntos contables densamente ordenados se debe a Cantor (1895), el método *"back and forth"* con el que ahora se prueba fue desarrollado por Huntingto en (Huntington, 2013) y Hausdorff en (Blumberg, 1920). Más tarde en el año 1953 se aplicó en otras situaciones, especialmente por Roland Fraïssé en la teoría de juegos para verificar equivalencias elementales.

En el Capítulo 1 mostramos y definimos la teoría relacionada a Órdenes Lineales y sus propiedades, con el fin de familiarizarnos con el contexto de los teoremas de Cantor y el orden de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$. Además definiremos formalmente lo que es un isomorfismo entre estructuras relacionales, y en particular entre órdenes lineales.

En el Capítulo 2 trabajamos los teoremas de Cantor, probados haciendo uso del método *"back an forth"*. Parte de los resultados se encuentran en (Rosenstein, 1982), el teorema de Cantor desarrollado en 1895 nos dice que cualesquiera dos órdenes lineales densos contables sin extremos son isomorfos.

En el Capítulo 3 iniciamos definiendo conceptos básicos de la teoría de grafos para ir entrando en contexto con el grafo universal, después enunciamos una propiedad de extensión que concierne a los grafos en cuanto a la adyacencias de los vértices y cómo de ella se desprende el teorema que garantiza la existencia de dicho grafo $\mathfrak{R}$, luego presentamos las descripciónes binaria y teórico numérica del grafo Universal $\mathfrak{R}$ trabajadas en (Cameron, 2013), posteriormente el uso del método *"back and forth"* para probar la existencia e indestructibilidad de $\mathfrak{R}$.

1. Preliminares

1.1. Estructuras relacionales

En esta corta sección hablaremos sin mayor detalle de lenguajes, *estructuras relacionales* y el concepto de *isomorfismo* entre estructuras.

En varias ramas de las matemáticas, una estructura es un conjunto con operaciones y relaciones, o de manera más general, consiste de objetos matemáticos que de cierta manera se relacionan con el conjunto, para el caso de las estructuras relacionales, que son las de nuestro interés en este trabajo, se definen de la siguiente manera.

Una *estructura relacional* es un conjunto A junto con una relación R, denotado por (A,R), en donde A se suele llamar el dominio o universo de la estructura y R es una relación que condiciona subconjuntos del producto cartesiano $A \times A$, es decir, para $(x,y) \in A \times A$ se tiene que xRy, esto indica que x está relacionado con y.

Definición 1.1.1. Sean (A,R) y (B,S) estructuras relacionales, decimos que (A,R) es *subestructura relacional* de (B,R), $(A,R) \subset (B,S)$, si cumple lo siguiente: $A \subseteq B$ y para cada pareja $(a_1,a_2) \in A \times A$ se tiene que $a_1Ra_2 = a_1Sa_2$.

Como se mencionó anteriormente en la introducción, el concepto de isomorfismo es el más importante a destacar, pues pretende captar la idea de tener la misma estructura sin importar que los objetos no sean de la misma naturaleza. Dos estructuras matemáticas entre las que existe una relación de isomorfismo se llaman isomorfas.

Definición 1.1.2. Sean (A,R) y (B,S) dos estructuras relacionales con dominio A y B respectivamente, decimos entonces que son *isomorfas* si existe una biyección $h : A \to B$ tal que:

- $a_1 R a_2$ si y sólo si $h(a_1) S h(a_2)$.

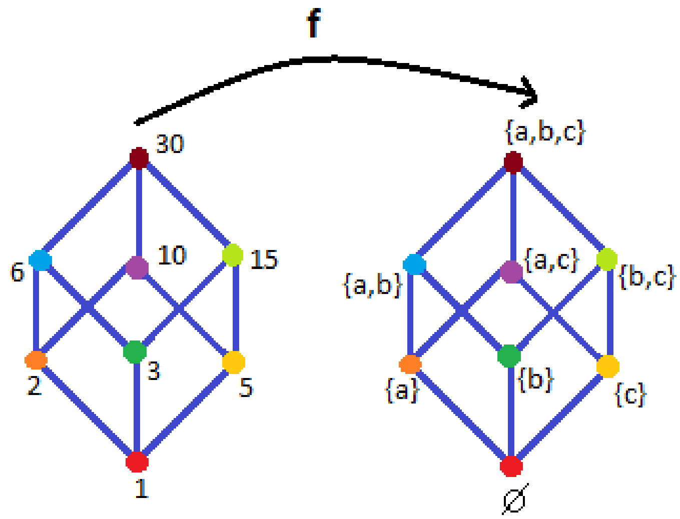
Nota: si dos estructuras relacionales (A,R) y (B,S) son isomorfas escribimos la expresión $(A,R) \simeq (B,S)$ como notación de que son isomorfas. Si dos estrucuturas son isomorfas tienen las mismas propiedades (que se pueden escribir en el lenguaje).

Ejemplo 1.1.3. *Sea* $(\mathbb{N}, |_{30})$*, definido en el conjunto de los naturales, el órden de los números naturales divisores de 30 y sea* $(P(\{a,b,c\}), \subset)$ *el orden de partes de un cojunto de 3 elementos, se tiene que* $(\mathbb{N}, |_{30}) \simeq (P(\{a,b,c\}), \subset)$.

El conjunto de los divisores de 30 viene dado por $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ *y* $P(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$. *Graficamente estos dos órdenes se representan de la siguiente manera (ver Figura 1).*

Figura 1.

El orden de $(\mathbb{N}, |_{30})$ *y* $(P(\{a,b,c\}), \subset)$



En la Figura 1 f *es un isomorfismo entre los dos conjuntos, pero no el único que se puede construir, cada asignación de* f *está representada por los colores y graficamente se observa que la preservación de orden se cumple. Estos dos órdenes son parciales, ya que no estan relacionados todos los elementos de cada conjunto. Es importante aclarar que* f *no es el único isomorfismo que se puede construir entre estas estructuras.*

Ejemplo 1.1.4. *Sea* $(\mathbb{N}, \leq)$ *el conjunto de los números naturales con el orden usual, y sea* $(\mathbb{N}, |)$ *el conjunto de los números naturales con la relación divide, es decir,* a *está relacionado con* b *si y solo si* $a|b$*. Estas dos estructuras relacionales no son isomorfas, veamos porqué.*

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, definida como la función identidad, es decir, para* $a \in \mathbb{N}$*,* $f(a) = a$*, se tiene entonces que si* $a|b$*, esto implica que* $a < b$*, pero si se tiene* $a < b$ *no siempre se cumple que* $a|b$*.*

Por ejemplo, $4 < 9$*, pero es claro que* 4 *no divide a* 9.

Los anteriores conceptos y ejemplos siempre se definen en un lenguaje. Un lenguaje está dado por un conjunto de símbolos, funciones y relaciones, también consta de fórmulas las cuales se contruyen apartir de los símbolos del lenguaje junto con variables $v_1, v_2, \ldots$, conectivos lógicos ($\wedge$, $\vee$,$\neg$,), parentésis (,), cuantificadores ($\forall$, $\exists$) y el símbolo de igualdad $=$. En el Ejemplo 1.1.4 las expresiones $4 < 9$, $f(a) = a$ y $a|b$ son fórmulas. Una sentencia en lenguaje se define como aquellas fórmulas para las cuales todas sus variables son cuantificadas y pueden tomar un valor de verdad. Por ejemplo, la siguientes expresiones, definidas en el conjunto de los naturales, son sentencias: $\forall n(n < n+1)$, $\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee x > y)$

1.2. Conceptos sobre órdenes

En esta sección definiremos lo que es un orden parcial, un buen orden, órdenes lineales y finalmente las operaciones entre órdenes. Para las siguientes definiciones, propiedades y teoremas, relacionados a órdenes, notaremos como $\preceq_R$ a una relacion R de orden arbitraria y como $(X, \preceq_R)$ a un *conjunto ordenado* X.

Definición 1.2.1. Un *orden parcial* en un conjunto X es una relación binaria R en X que satisface que R es refelxiva antisimétrica y transitiva, es decir, R satisface:

1. Para todo $x \in X$ se tiene que xRx.

2. Si $xRy \in R$ y $yRx \in R$, entonces $x = y$. (*La expresión* $xRy \wedge yRx$ *y la expresión* $x = y$ *son fórmulas de primer orden*).

3. Si xRy y yRz, entonces xRz

Nota: En la Definición 1.2.1 la expresión xRx representan lo que es una término en lenguaje de primer orden y las expresiones $xRy \wedge yRx$ y $x = y$ son fórmulas de primer orden. La expresión $\forall x \exists y (xRy \vee yRx)$, en el lenguaje de órdenes, es un ejemplo de lo que es una *sentencia*.

Consideramos la notación $(X, \preceq_R)$ para hacer referencia a dicho conjunto X ordenado parcialmente con la relación R, en efecto, decimos que $(X, \preceq_R)$ es un orden parcial.

Nota: Para el caso en que la relación es estricta, es decir, no se cumple la igualdad, se tiene la notación $\prec$.

1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$, y $\mathbb{R}$ están ordenados por el orden usual entre números.
2. El conjunto $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ está ordenado por la relación $\subseteq$.
3. El siguiente orden está definido en el conjunto de los números naturales, $(\mathbb{N}, |_n)$ se define como el conjunto de elementos $x_i \in \mathbb{N}$ que son divisores de n, es decir, satisfacen que $x_i | n$.

1.2.1. Órdenes lineales. Con respecto a la definición anterior sobre orden parcial, si además los elementos de X son comparables dos a dos, decimos que el orden es un orden lineal. La definición formal es la siguiente.

Definición 1.2.2. Un *orden lineal* del conjunto X es una relación binaria R en X que satisface

1. Si $(x,y) \in R$ y $(y,z) \in R$, entonces $(x,z) \in R$;
2. Para cada $x \in X$, $(x,x) \notin R$;
3. Dados $x, y \in X$, $x \neq y$, o bien $(x,y) \in R$ o $(y,x) \in R$, pero no ambos.

Definición 1.2.3. Un orden lineal es la estructura $(A, \preceq_R)$, donde A es un conjunto y $\preceq_R$ es un orden lineal de A. Es usual denotar $(x,y) \in R$ por $x \preceq_R y$.

Definición 1.2.4. Sea (A,R) un orden lineal, definiremos como *primer elemento de* A, a aquel elemento $a \in A$ que satisface que $a \preceq x$, para todo $x \in A$. Y definiremos como *último elemento de* A, a aquel elemento $b \in A$ que satisface que $b \succeq x$, para todo $x \in A$.

Una propiedad del orden $(\mathbb{N}, \leq)$ es que tiene al 0 como primer elemento y no tiene último elemento, para el caso de $(\mathbb{Z}, \leq)$ una caracterización es que no tiene primer ni último elemento, esto hace que $(\mathbb{N}, \leq)$ y $(\mathbb{Z}, \leq)$. Por otra parte comparando $(\mathbb{Z}, \leq)$ con $(\mathbb{Q}, \leq)$ vemos que los dos no tiene ni primer ni último elemento pero la siguiente propiedad que posee $(\mathbb{Q}, \leq)$ los hace diferentes, veamos la propiedad de manera formal, $(\mathbb{Q}, \leq)$ satisface la siguiente propiedad:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}[x < y \rightarrow \exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y].$$

Más adelante enunciaremos formalmente como relacionar estos órdenes lineales a cualquier otro orden lineal teniendo en cuenta estas propiedades de sus órdenes.

Definición 1.2.5. Sean R y S órdenes lineales de A y B respectivamente y suponga que $A \subseteq B$. Decimos que $(A, \preceq_R)$ es un suborden de $(B, \preceq_S)$ si, para cada $a_1, a_2, \in A$, $a_1 \preceq_R a_2$, si y solo si $a_1 \preceq_S a_2$.

Nota: intuitivamente, $(A, \preceq_R)$ es un suborden de $(B, \preceq_S)$ si dos elementos de A están ordenados por R de la misma manera en que están ordenados por S. Esto se declara con más detalle de la siguiente manera:

- $(A, \preceq_R)$ es un suborden de $(B, \preceq_S)$ si y solo si $A \subseteq B$ y $R = S \cap (A \times A)$.
- Sea $(B, \preceq_S)$ un orden lineal y sea $A \subseteq B$. Entonces existe una única relación binaria R en A tal que $(A, \preceq_R)$ es un suborden de $(B, \preceq_S)$.
- Sean $(B, \preceq_R)$ y $(B, \preceq_S)$ dos órdenes lineales de B y asuma que $R \neq S$. Entonces ninguno es suborden del otro.

Ejemplo 1.2.6. *1. Un ejemplo lo proporciona el conjunto de los números pares como subconjunto de los números naturales. Sea $P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$ y $\leq_P$ el orden natural de P, entonces $(P, \leq)$ es un suborden de $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$.*

2. $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$ es un suborden de $(\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}})$, y $(\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}})$ suborden de $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}})$.

3. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$X = \left\{ 1 - \frac{1}{(n+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

X hereda el orden de $\mathbb{R}$ por ser subconjunto de $\mathbb{R}$, por tanto X es un conjunto ordenado.

Definición 1.2.7. Sea R un orden lineal de A y sea S un orden lineal de B. Un isomorfismo de $(A, \preceq_R)$ en $(B, \preceq_S)$ es una función biyectiva que preserva orden en A y B, es decir, una función $f : A \to B$ que además de ser 1-1 y sobre satisface

$$f(a_1) \preceq_S f(a_2) \text{ si y solo si } a_1 \preceq_R a_2.$$

Un isomorfismo de $(A, \preceq_R)$ a $(B, \preceq_S)$ a veces se denomina función de preservación del orden de $(A, \preceq_R)$ a $(B, \preceq_S)$.

Ejemplo 1.2.8. *Sean $M = (2\mathbb{N}, <)$ y $N = (\mathbb{N}, <)$. Claramente $M \subseteq N$. Más aún, la función $j : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $j(x) = x/2$ es un isomorfismo, ya que es biyectiva y para todo $a, b \in M$, $a < b$ si y sólo si $a/2 < b/2$. De esta manera, $M \simeq N$.*

Ejemplo 1.2.9. *Sea $X = [0, 1)$ como subconjunto de $\mathbb{R}$. Observamos que X como conjunto ordenado tiene primer elemento propiedad que $\mathbb{R}$ no posee. Además $Y = (3, 6]$ como subconjunto de $\mathbb{R}$. Observamos que Y como conjunto ordenado tiene último elemento propiedad que $\mathbb{R}$ no posee.*

Ejemplo 1.2.10. *Sea X la colección de subconjuntos de $\mathbb{N}$ que se indica a continuación:*

$$\{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}, \{0,1,2,3,,4\}, \ldots, \{0,1,2,3,4,5,\ldots,n\}, \ldots$$

Mostraremos que $(X, \subseteq)$ es isomorfo a $(\mathbb{N}, \leq)$. Para simplificar el argumento, denotemos por L_n al conjunto $\{0,1,2,3,4,5,\ldots,n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Haga $X = \{L_0, L_1, L_2, \ldots\}$ y Considere la siguiente función $f : \mathbb{N} \to X$ dada por $f(n) = L_n$.

Veamos que f es un isomorfismo, es decir, es inyectiva, sobre y además preserva el orden.

- *f-inyectiva: sean n, $m \in \mathbb{N}$, supongamos que $f(n) = f(m)$, esto es, $L_n = L_m$, luego por definición del conjunto L_n concluimos que $n = m$ y en consecuencia f es inyectiva.*

- *f-sobre: sea $y \in rang(f)$, entonces existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $x = |y|$ y $f(x) = y$, en consecuencia f es sobre.*

- *f preserva el orden: Es claro que f preserva el orden ya que $n \leq m$ si, y sólo si, $L_n \subseteq L_m$.*

Por tanto f es un isomorfismo y $(X, \subseteq) \simeq (\mathbb{N}, \leq)$.

Ejemplo 1.2.11. *Defina $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ por*

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & si \quad x > 0 \\ x & si \quad x = 0 \\ x - \frac{1}{2} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Veamos por encima y sin mayor detalle que f es un isomorfismo de orden, pero no como campo.

- *Se tiene que f es biyecta, veamos el porqué:*

    - *Cuando $x = 0$ es trivial. Para el caso de $x > 0$ tenemos $f(x) = x + \frac{1}{2}$, entonces si tomamos cualesquiera $x_1 > 0, x_2 > 0$, racionales, y si $x_1 + \frac{1}{2} = x_2 + \frac{1}{2}$ entonces $x_1 = x_2$, luego f es inyectiva para este caso; para el caso en que $x < 0$, la prueba de que f es inyectiva es análoga.*

      Sean $x_1 > 0$ y $x_2 = 0$, racionales, como $x_1 \neq x_2$ veamos que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Lo haremos por contradicción, supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$, esto es, $x_1 + \frac{1}{2} = x_2 = 0$, es decir,

$x_1 = -\frac{1}{2}$, pero esto es una contradicción ya que $x_1 > 0$. Por tanto, $f(x_1) \neq f(x_2)$, y f inyectiva; para el caso $x_1 < 0$ y $x_2 = 0$ la prueba es análoga.

- *Ahora veamos que es sobreyectiva, sea $y \in \mathbb{Q}$, si $y = 0$ es trivial. Ahora, si $y > 0$, $\exists x \in \mathbb{Q}$ tal que $f^{-1}(y) = x$, $x = y - \frac{1}{2}$, por tanto es sobreyectiva. Para el caso en que $y < 0$, la prueba es análoga.*

- *f preserva el orden ya que para cualesquiera x_1, $x_2 \in \mathbb{Q}$, con $x_1 \leq x_2$, tenemos que $f(x_1) \leq f(x_2)$ puesto que en los 3 casos tenemos definidas 3 rectas, además para $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$ siempre se tendrá $x_1 - \frac{1}{2} < x_2 + \frac{1}{2}$.*

- *Pero f respeta el orden pero no las operaciones, pues $f(1/2) = 1$, $f(1/2 + 1/2) = f(1) = 3/2$, pero $f(1/2) + f(1/2) = 2$.*

Lema 1.2.12.

- *Sea $(A, \preceq_R)$ orden lineal, se cumle que existe un isomorfismo f de $(A, \preceq_R)$ en $(A, \preceq_R)$. (f se define como la función identidad).*

- *Sea f_1 un isomorfismo de $(A_1, \preceq_{R_1})$ a $(A_2, \preceq_{R_2})$ y f_2 un isomorfismo de $(A_2, \preceq_{R_2})$ a $(A_3, \preceq_{R_3})$, entonces $f_2 \circ f_1$ es un isomorfismo de $(A_1, \preceq_{R_1})$ a $(A_3, \preceq_{R_3})$.*

- *Sea f un isomorfismo de $(A, \preceq_R)$ a $(B, \preceq_S)$, entonces f^{-1} es un isomorfismo de $(B, \preceq_S)$ a $(A, \preceq_R)$.*

- *Sea f un isomorfismo de $(A, \preceq_R)$ a $(A', \preceq_{R'})$ y g un isomorfismo desde $(B, \preceq_S)$ a $(B', \preceq_{S'})$. Suponga que h es un isomorfismo de $(B, \preceq_S)$ a $(A, \preceq_R)$, entonces $f \circ h \circ g^{-1}$ es un isomorfismo de $(B', \preceq_{S'})$ a $(A', \preceq_{R'})$.*

Definición 1.2.13. Un orden $(A, \preceq_R)$ se dice que es **contable** si A es un conjunto contable. De lo contrario, se dice que el orden lineal es no-contable.

Lema 1.2.14. *Sea $(A, \preceq)$ un órden lineal, entonces cualquier subconjunto finito no-vacío D A, tiene un primer y último elemento.*

Demostración. Mostramos que hay un primer elemento y la demostración para un último elemeto es análoga. Por inducción. Sea $A' = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un subconjunto de A que tiene n elementos y tiene un primer elemento. Claramente, para $n = 1$ es verdadero. Supongamos que para n es verdadero y veamos que se cumple para $n+1$. Si D tiene $n+1$ elementos, sea $D = D' \cup \{y\}$, para algunos $y \in D$ y D' con n elementos (es decir, $D' = D - \{y\}$). Por inducción, D' tiene un elemento mínimo, denotémoslo como x. Dado que $\preceq$ es un orden total, ya sea $x \preceq y$ o $y \preceq x$. En el primer caso, x es un elemento mínimo de D. Por otro lado, si $y \preceq x$ afirmamos que y es un elemento mínimo de D: Si $z \in D$, entonces $z = y$, o $z \in D'$ e $y \preceq x \preceq z$. En cualquier caso, $y \preceq z$, como se quería mostrar. □

Teorema 1.2.15. *Sean (A, R) y (B, S) órdenes lineales donde A y B tienen igual número finito n de elementos, entonces $(A, R) \simeq (B, S)$.*

Demostración. Por inducción en n. El resultado es claro para $n = 0$ o $n = 1$. Así que supongamos que es cierto para n y supongamos que A y B tienen cada uno $n+1$ elementos. Sea a el R-elemento más grande de A y sea b el S-elemento más grande de B. Sea $A_0 = A - (a)$ y sea $B_0 = B - \{b\}$. Sean (A_0, R_0) y (B_0, S_0) los subórdenes de (A, R) y (B, S) generado por A_0, y B_0, entonces $(A, R) = (A_0 \cup \{a\}, R)$ y $(B, S) = (B_0 \cup \{b\}, S)$. Según la hipótesis de inducción, ya que A y B, cada uno tiene

n elementos, $(A_0, R_0) \simeq (B_0, S_0)$. También $(\{a\}, \varnothing) \simeq (\{b\}, \varnothing)$. Por tanto, se tiene que $(A, R) \simeq (B, S)$. □

1.2.2. Buenos órdenes.

Definición 1.2.16. Sea $\preceq$ un orden sobre X. Diremos que $(X, \preceq)$ es un conjunto *bien ordenado*, si todo $A \subseteq X$ con $A \neq \emptyset$ tiene mínimo, es decir, existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 \preceq x$ para todo $x \in A$.

Nota: La Definición 1.2.16, escrita formalmente, no es una sentencia de primer orden porque la expresión *"para cualquier conjunto"* requiere un lenguaje en el que los cuantificadores puedan abarcar no solo a variables que representan elementos concretos sino también a relaciones o funciones.

Si $(X, \preceq)$ está bien ordenado, entonces $\preceq$ es un orden lineal. En efecto, dados $a, b \in X$, sea el conjunto $X = \{a, b\}$. Por la propiedad del buen orden, tenemos que a o b es el mínimo de A. En el primer caso, $a \prec b$ y en el segundo $b \prec a$. Esto muestra que $\preceq$ es un orden lineal.

Una de las propiedades básicas de $\mathbb{N}$ es el *principio de buena ordenación* que se desprende del hecho de que $(\mathbb{N}, \leq)$ está bien ordenado.

Ejemplo 1.2.17. *Considere el subconjunto X de $\mathbb{R}$:*

$$X = \{1 - 1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Afirmamos que X, con el orden que hereda de $\mathbb{R}$, es un conjunto bien ordenado. En efecto, sea $A \subseteq X$ no vacío. Ahora considere el subconjunto $B \subseteq \mathbb{N}$ que consiste de los naturales n tales *que* $1-1/(n+1) \in A$. *Claramente B no es vacío, y en consecuencia, por el principio de buena ordenación de* $\mathbb{N}$, *B tiene un primer elemento que denotaremos por* n_0. *Afirmamos que* $a_0 = 1 - 1/(n_0+1)$ *es el mínimo de A. Es claro que* $a_0 \in A$. *Sea* $x \in A$, *esto es,* $x = 1-1(n+1)$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$. *Por definición del conjunto B, se tiene que* $n \in B$. *Por lo tanto* $n_0 \leq n$ *y en consecuencia* $1-1/(n_0+1)$.

1.2.3. Operaciones entre órdenes lineales.

1.2.3.1. Suma de órdenes lineales. Sean $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$ dos conjuntos ordenados. La suma de esos órdenes consiste en colocar los elementos de X antes de cualquier elemento de Y. Formalmente, definimos un nuevo conjunto ordenado que denotaremos por

$$(X, \preceq_X) \oplus (Y, \preceq_Y)$$

sobre el conjunto $Z = X \cup Y$, el orden viene dado de la siguiente manera: Sean $a, b \in Z$ diremos que $a \preceq_Z b$, si se da cualquiera de las siguientes alternativas:

- $a, b \in X$ y $a \preceq_X b$
- $a, b \in Y$ y $a \preceq_Y b$
- $a \in X$ y $b \in Y$.

Ejemplo 1.2.18. *Consideremos el caso en que* $X = \mathbb{N}^*$ *(los números naturales negativos con el* *orden usual) y $Y = \mathbb{N}_0$ (los números naturales junto con el 0), entonces* $(\mathbb{N}^*, \leq^*_{\mathbb{N}}) \oplus (\mathbb{N}_0, \leq_{\mathbb{N}_0}) = \mathbb{Z}$*,*

$$\ldots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$$

Lema 1.2.19. *Sea $(A, \preceq_R) \simeq (A', \preceq_{R'})$ y $(B, \preceq_S) \simeq (B', \preceq_{S'})$, con $A \cap B = \emptyset$ y $A' \cap B' = \emptyset$, entonces*

$$(A, \preceq_R) + (B, \preceq_S) \simeq (A', \preceq_{R'}) + (B', \preceq_{S'})$$

Demostración. Sean $f : A \to A'$ y $g : B \to B'$ isomorfismos. Definimos $h : A \cup B \to A' \cup B'$ por

$$h(x) = \begin{cases} f(x)) & si \quad x \in A \\ \\ g(x)) & si \quad x \in B. \end{cases}$$

Se verifica fácilmente que h es un isomorfismo. □

1.2.3.2. Producto de órdenes lineales. La idea para hacer el producto de órdenes lineales es la misma que se usa para multiplicar números.

Definición 1.2.20. Sean $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$ dos conjuntos linealmente ordenados. El orden *lexicográfico* en $X \times Y$ se define como sigue: Sean (x, y), $(x', y') \in X \times Y$, pondremos $(x, y) \preceq (x', y')$ si se cumple alguna de las siguientes alternativas:

1. $x \preceq_X x'$,
2. $x = x'$ y $y \preceq_Y y'$.

Ejemplo 1.2.21. *(El orden lexicográfico en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$). Consideremos el orden $\prec_{lex}$ sobre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definido de la siguiente manera.*

$$(a,b) \prec_{lex} (c,d) \text{ si (i) } a < c \text{ o (ii) } a = c \text{ y } b \leq d.$$

Todos los pares en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ que comienzan con 0 *son menores que los que comienzan con un* 1*. Por ejemplo,*

$$(0,0) \prec_{lex} (0,1) \prec_{lex} (0,2) \prec_{lex} (0,3) \prec_{lex} \dots (1,0) \preceq_{lex} (1,1) \preceq_{lex} (1,2) \preceq_{lex} (1,3) \preceq_{lex} \dots$$

El orden lexicográfico de dos conjuntos totalmente ordenados es, por tanto, una extensión lineal de su orden de productos.

Teorema 1.2.22. *Sean $(A,\leq_A)$ y $(B,\leq_B)$ buenos órdenes entonces el órden lexicográfico $(A\times B,\leq_{lex})$ es un buen orden.*

Demostración. supongamos que S es un subconjunto no vacío de $A\times B$. Sea $T = \{a : \exists b \in B((a,b)\in S)\}$. Como S no está vacío, también lo es T. Sea a_0 el elemento mínimo de T. Sea $U = \{b : (a_0,b)\in S\}$. Dado que $a_0 \in T$, U no está vacío. Sea b_0 el elemento mínimo de U. Afirmamos que (a_0,b_0) es el elemento mínimo de S. Si $(x,y)\in S$, entonces según la definición de T, $x\in T$, entonces $a_0 \leq_A x$. Si $a_0 <_A x$, entonces $(a_0,b_0)\leq(x,y)$, según sea necesario. De lo contrario, $a_0 = x$ y $(x,y) = (a_0,y)$. Entonces $y\in U$, y por definición, $b_0 \leq y$. Esto significa $(a_0,b_0)\leq_{lex}(x,y)$. $\square$

Corolario 1.2.23. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *con el orden lexicográfico es un conjunto bien ordenado.*

Si se tiene una colección infinita de conjuntos ordenados, se puede definir de manera similar el orden lexicográfico en el producto cartesiano de los conjuntos de esta colección. Este orden lexicográfico generalizado es un orden total si cada conjunto de factores está totalmente ordenado. A diferencia del caso finito, un producto infinito de buenos órdenes no está necesariamente bien ordenado por el orden lexicográfico.

Por ejemplo, el conjunto de sucesiones binarias infinitas numerables (por definición, es el conjunto de funciones desde enteros positivos hasta el conjunto $\{0,1\}$*, también conocido como el espacio de Cantor* $\{0,1\}^{\omega}$*) no está bien ordenado; el subconjunto de sucesiones que tienen precisamente un 1, es decir,*

$$\{100000\ldots, 010000\ldots, 001000\ldots, \ldots\}$$

no tiene un elemento mínimo bajo el orden lexicográfico inducido por $0 < 1$*, porque* $100000\ldots > 010000\ldots > 001000\ldots > \ldots$ *es una cadena descendente infinita, de igual forma* $011111\ldots < 101111\ldots < 110111\ldots < \ldots$ *es una cadena ascendente infinita. Por tanto este producto lexicográfico infinito no está bien ordenado.*

En algunos casos el orden *lexicográfico* de $X \times Y$ no es isomorfo al de $Y \times X$. Veamos un ejemplo de esto.

Ejemplo 1.2.24. *Sea* $X = \mathbb{N}$ *con su orden usual y* $Y = \{a,b\}$ *con el orden* $a < b$*. Entonces* $X \times Y$

queda ordenado de la siguiente manera:

$$(0,a) \prec (0,b) \prec (1,a) \prec (1,b) \prec (2,a) \prec (2,b) \prec (3,a) \prec (3,b) \prec \ldots.$$

En este caso particular, $X \times Y$*, es isomorfo a* $\mathbb{N}$ *con su orden natural.*

Por otra parte, el orden de $Y \times X$ *es:* $(a,0) \prec (a,1) \prec (a,2) \prec (a,3) \prec \ldots \prec (b,0) \prec (b,1) \prec (b,2) \prec (b,3) \prec \ldots$*. Afirmamos que* $Y \times X$ *no es isomorfo a* $X \times Y$*, pues enparticularen* $X \times Y$ *no existe un elemento como* $(b,0)$ *que tiene infinitos elementos antes que él. Afirmamos además que* $Y \times X$ *es isomorfo a* $\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$*.*

2. Aplicación del método *"back and forth"* a órdenes lineales

En este capítulo mostraremos resultados sobre órdenes lineales que se deducen haciendo uso del método *"back and forth"*, más específicamente veremos el uso de este para mostrar que cualesquier dos órdenes lineales densos, contables y sin extremos son isomorfos. Iniciaremos caracterizando los órdenes de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, luego se definirá *la clase de los tipos de orden* y finalmente el método *"back and forth"* junto con unas pruebas de los teoremas de Cantor.

2.1. Caracterización del orden de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$

En el Capítulo 1 ya habíamos mencionado brevemente como eran estos órdenes, ahora enunciaremos resultados acerca de cada orden, en términos de isomorfismos.

2.1.1. El orden de $\mathbb{N}$.

Teorema 2.1.1. *Sea $(X,\preceq)$ un orden con las siguientes propiedades:*

1. *X es infinito.*
2. *$(X,\preceq)$ es un buen orden.*
3. *Para todo $x \in X$, el conjunto de predecesores de x es finito, es decir, $\{y \in X : y \prec x\}$ es finito.*

Entonces $(X,\preceq)$ es isomorfo a $\mathbb{N}$ con el orden usual.

Teorema 2.1.2. *Sea $(X,\preceq)$ un orden con las siguientes propiedades:*

1. *$(X,\preceq)$ es un buen orden.*

2. *X no tiene último elemento.*

3. *Todo $x \in X$ que no sea el mínimo tiene un predecesor inmediato, es decir, existe $y \in X$ tal que $y \prec x$ y no existe $z \in X$ tal que $y \prec z \prec x$.*

Entonces $(X, \preceq)$ es isomorfo a $\mathbb{N}$ con el orden ususal.

2.1.2. El orden de $\mathbb{Z}$. Para caracterizar $\mathbb{Z}$ introduciremos el concepto de intervalo en un conjunto linealmente ordenado.

Definición 2.1.3. Para todo conjunto linealmente ordenado X, se pueden definir los intervalos abiertos

- $(a,b) = \{x \in X | a < x \wedge x < b\}$,
- $(\infty, b) = \{x \in X | x < b\}$,
- $(a, \infty) = \{x \in X | a < x\}$,
- $(\infty, \infty) = X$.

Teorema 2.1.4. *Sea $(X, \preceq)$ un conjunto linealmente ordenado que satisface las siguientes propiedades:*

1. *X no tiene ni primer ni último elemento.*

2. *Todo intervalo final propio tiene primer elemento y todo intervalo inicial propio tiene último elemento.*

3. *Cada elemento de X tiene un predecesor y un sucesor inmediato.*

Entonces $(X,\preceq)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ (con el orden usual).

2.1.3. El orden de $\mathbb{Q}$. El orden de $\mathbb{Q}$ no es un buen orden.

Ejemplo 2.1.5. *El conjunto*

$$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$$

sólo contiene racionales positivos pero no tiene elemento mínimo, pues $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Introduciremos para este orden algunas propiedades acerca de $\mathbb{Q}$, para ello primero damos la siguiente definición.

Definición 2.1.6. Se dice que un orden lineal A es denso si, dados dos elementos cualesquiera $a_1, a_2 \in A$ tal que $a_1 < a_2$, hay un elemento $b \in A$ tal que $a_1 < b < a_2$.

$\mathbb{Q}$ satisface las siguientes propiedades:

- $\mathbb{Q}$ es numerable.
- $\mathbb{Q}$ no tiene extremos, es decir, no tiene ni máximo, ni mínimo.
- El orden de $\mathbb{Q}$ es denso, es decir, dados $x,y \in \mathbb{Q}$ con $x < y$, existe $z \in \mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$.

Lema 2.1.7. *Si $(A,\preceq_R) \simeq (B,\preceq_S)$, entonces A es R-denso si y solo si B es S-denso.*

2.1.4. La clase de los Tipo de Orden. Acontinuación estudiaremos una parte de lo que es la clase de órdenes lineales, para ello denotaremos por $\mathscr{OL}$ a la clase de todos los órdenes lineales.

Definición 2.1.8. Sea $\mathscr{T}$ una colección de objetos de $\mathscr{OL}$ que verifica lo siguiente:

1. Dado $(S,<_S) \in \mathscr{OL}$, existe $(\Sigma,<_\Sigma) \in \mathscr{T}$ tal que $(S,<_S) \simeq (\Sigma,<_\Sigma)$.
2. Si $(S,<_S) \in \mathscr{OL}$ y denotamos por

$$[(S,<_S)]_\simeq := \{(A,<_A) \in \mathscr{OL} | (A,<_A) \simeq (S,<_S)\},$$

existe un único $(\Sigma,<_\Sigma) \in \mathscr{T}$ tal que $\mathscr{T} \cap [(S,<_S)]_\simeq = \{(\Sigma,<_\Sigma)\}$.

A $\mathscr{T}$ se le llama la clase de tipos de orden.

Definición 2.1.9. Sea $\mathscr{T}$ la clase de tipos de orden

- Considere $\tau : \mathscr{OL} \to \mathscr{T}$ una función que para cada $(S,<_S) \in \mathscr{OL}$ $\tau(S,<_S) := (\Sigma,<_\Sigma)$ donde

$$\mathscr{T} \cap [(S,<_S)]_\simeq = (\Sigma,<_\Sigma).$$

  Decimos que S tiene tipo de orden Σ.

- Sean $(S,\leq_S),(M,\leq_M) \in \mathscr{OL}$ decimos que $(S,\leq_S) \preceq (M,\leq_M)$ si y sólo si existe una función inyectiva $f : S \to M$ que preserva el orden, es decir:

$$(\forall x, y \in S)(x <_S y \Leftrightarrow f(x) <_M f(y))$$

.

- Sean $(\Sigma, <_\Sigma), (\mu, <_\mu) \in \mathscr{T}$, decimos que $\sigma \leq_\tau \mu$ si y sólo si $(\Sigma, <_\Sigma) \preceq (\mu, <_\mu)$.

Definición 2.1.10. Decimos que un orden lineal $(A, \preceq_R)$ tiene un tipo de orden τ si τ es el representante de la clase de equivalencia de $(A, \preceq_R)$.

Cantor en 1897 introdujo la idea de los números transfinitos como una generalización de los números naturales, en efecto los ordinales clasifican todos los posibles conjuntos bien ordenados. En el caso infinito, los ordinales representan la cantidad de elementos. veamos algunos de ellos:

Notación:

- El tipo de orden de $\mathbb{N}$ se denota ω.
- El tipo de orden de $\mathbb{Q}$ se denota η.
- El tipo de orden de $\mathbb{Z}$ se denota ζ.

Así, mientras sólo existe un cardinal infinito numerable $\aleph_0$, existen infinitos ordinales infinitos y numerables,

$$\omega, \omega + 1, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

que corresponden a distintas maneras de ordenar $\mathbb{N}$.

Como ya lo habíamos mencionado en la introducción, el métododo *back and forth* de la Teoría de Modelos se emplea para construir isomorfismos entre estructuras. La relación de isomorfismo es la relación más importante en el intento de comprender, desde el punto de vista categórico.

La técnica de extensión de isomorfismo parcial se denomina técnica de ida y vuelta (o back and forth) y será la técnica más importante que se utilizará en este trabajo.

Definición 2.1.11. Sean (A,R_A) y (B,R_A) dos estructuras relacionales con dominios A y B respectivamente. Un isomorfismo parcial de (A,R_A) en (B,R_B) es simplemente un isomorfismo $f:A_0 \to B_0$ donde $\mathscr{A}_0 \subseteq A$ y $B_0 \subseteq B$, A_0 y B_0 son finitos.

Definición 2.1.12. Sea I una colección de isomorfismos parciales de (A,R_A) a (B,R_B). Decimos que tenemos una propiedad de ida y vuelta (o, como se conoce mejor en inglés, back and forth) si:

- (*forth*)($\forall f_i \in I)(\forall x \in A)(\exists g_i \in I$, $f_i \subseteq g_i$, $x \in dom\ (g_i)$, $i \in \mathbb{N}$).
- (*back*) ($\forall f_i \in I)(\forall y \in B)(\exists g_i \in I$, $f_i \subseteq g_i$, $y \in im\ (g_i)$, $i \in \mathbb{N}$).

Y haciendo $f = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i$ se tiene que $f : A \to B$ es un isomorfismo total.

Nota: si I es una colección de isomorfismos parciales de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ con la propiedad de *"back and forth"*, escribimos $\mathscr{A} \simeq_p \mathscr{B}$ para decir que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son parcialmente isomorfos, con $p \in I$.

2.2. Teoremas de Cantor

Teorema 2.2.1. *(Cantor 1). Sea $(A,\leq_R)$ un orden lineal denso contable que no tiene primer ni último elemento. Sea $(B,\leq_S)$ un orden lineal contable arbitrario. Entonces $(B,\leq_S)$ es isomorfo a* *un suborden de* $(A, \leq_R)$.

Demostración. Como B es contable, podemos enumerar los elementos de B como $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ Tenga en cuenta que la posición relativa de dos elementos de B en esta enumeración, en general, no tiene nada que ver con su orden en $\langle B, S \rangle$.

Definiremos una función $f : B \to A$ paso a paso. Al final de la etapa t habremos definido $f(b_i)$ para cada $i \leq t$ de tal manera que para $i, j \leq t, b_i <_S b_j$ si y solo si $f(b_i) <_R f(bj)$. Si podemos mantener esto siempre, entonces f definirá de hecho una función $1-1$ de B a A tal que para cualquier $i, j, b_i <_S b_j$ si y solo si $f(b_i) <_R f(b_j)$ y f será un isomorfismo de $(B, \leq_S)$ en $(A, \leq_R)$.

Para seguir con la demostración se procede a hacer uso del paso *Forth* del método *Back and Forth*, para este resultado no será necesario el paso *Back*. En la etapa 0 definimos $f(b_0) = a_0$, donde a_0 es un elemento arbitrario de A. Supongamos que estamos en la etapa $t+1$ y que $f(b_0), f(b_1), \ldots, f(b_t)$ se han definido todos y para $i, j \leq t$, $f(b_i) <_R f(b_j)$ si y solo si $b_i <_S b_j$. Ahora los elementos $\{b_0, b_1, \ldots, b_t\}$ cuando se organizan en su orden S se convierten en

$$b_{i_0} <_S b_{i_1} <_S b_{i_2} <_S \ldots <_S b_{i_t}$$

donde $\{i_0, i_1, \ldots, i_t\} = \{0, 1, \ldots, t\}$. Por lo tanto, también

$$f(b_{i_0}) <_R f(b_{i_t}) <_R \ldots <_R f(b_{i_t}).$$

Ahora b_{t+1} se encuentra en uno de los $t+2$ lugares con respecto al orden S de $b_0,\ldots,b_t$; a saber,

$$
\begin{array}{lll}
sea & (0) & b_{t+1} <_S b_{i_0} \\
o & (n) & b_{i_{n-1}} <_S b_{t+1} <_S b_{i_n} \quad n, \quad 1 \leq n \leq t\cdot \\
o & (t+1) & b_{i_t} <_S b_{t+1}.
\end{array}
$$

En el caso (0), elija $f(b_{t+1})$ para que sea un elemento de A que sea $R-$más pequeño que $f(b_{i_0})$; dicho elemento existe ya que se supone que A no tiene primer elemento. En el caso $(t+1)$ elija $f(b_{t+1})$ para que sea un elemento de A que sea R-mayor que $f(b_{i_t})$; dicho elemento existe ya que se supone que A no tiene último elemento. En el caso (n) donde $1 \leq n \leq t$ elija $f(b_{t+1})$ un elemento de A que es $R-$entre $f(b_{i_{n-l}})$ y $f(b_{i_n})$; dicho elemento existe ya que se supone que A es denso. Ahora es obvio que al final de la etapa $t+1$, hemos definido $f(b_i)$ para cada $i \leq t+1$ de tal manera que para $i,j \leq t+1$

$$b_i <_S b_j \text{ si y solo si } f(b_i) <_R f(b_j).$$

Por lo tanto, la hipótesis de inducción continúa y podemos continuar extendiendo nuestra función f para que su dominio de definición eventualmente incluya cada elemento de B. $\square$

El teorema anterior es uno de los resultados más importantes para la teoría de orden pues tiene como consecuencia el siguiente corolario:

Corolario 2.2.2. *Cualquier orden lineal numerable y denso se encaja en* $(\mathbb{Q} <_{\mathbb{Q}})$*, es decir, si*

$\mu \in \mathscr{T}$ es denso y numerable, $\mu \leq_\tau \eta$.

Teorema 2.2.3. *(Cantor 2): Sean $(A, \leq_R)$ y $(B, \leq_S)$ órdenes lineales densos contables sin primeros ni últimos elementos (sin extremos). Entonces $(A, \leq_R) \simeq (B, \leq_S)$.*

Demostración. Definiremos una función $f : B \to A$ paso a paso. Al final de la etapa t habremos definido $f(b_i)$ para cada $i \leq t$ de tal manera que para $i, j \leq t, bi <_S bj$ si y solo si $f(b_i) <_R f(bj)$. En la prueba del Teorema 2.2.1, el orden lineal $\langle B, S\rangle$ se mapeó isomorficamente en $\langle A, R\rangle$. Sin embargo, no se intentó garantizar que cada elemento de A fuera la imagen bajo f de algún elemento de B; Tal intento podría, por supuesto, no haber tenido éxito en general, ya que, si, por ejemplo, $b_{i_{n-1}}$ fuera el $S-$predecesor inmediato de b_{i_n}, entonces ningún elemento de A que fuera R-entre $f(b_{i_{n-1}})$ y $f(b_{i_n})$ podría convertirse en la imagen de un elemento de B bajo f. Aquí la situación es bastante diferente: $\langle B, S\rangle$ es denso y no tiene primer ni último elemento. Por lo tanto, el intento de hacer que un elemento de A sea la imagen bajo f de un elemento de B no fallará. Enumeramos $B = \{b_0, b_1, \ldots\}$ y $A = \{d_0, d_1, d_2, \ldots\}$ de igual forma que en la prueba del Teorema 2.2.1.

En las etapas pares, es decir, para $t = 2n$ definiremos la imagen bajo f de b_n; en las etapas impares, es decir, para $t = 2n+1$, encontraremos una preimagen en f para d_n. Por lo tanto, la hipótesis de inducción es que al final de la etapa $t = 2n$ (respectivamente, $t = 2n+1$) hemos definido f para un número finito de elementos de B que incluyen al menos $b_0, b_1, \ldots, b_n$ y que para cada $j < n$ (respectivamente, $j \leq n$) existe un $b_{t(j)}$ tal que $f(b_{t(j)})$ está definido y es igual a d_j. Además para cada b_i, b_j para el cual f es definido tenemos

$$b_i <_S b_j \text{ si y solo si } f(b_i) <_R f(b_j).$$

Si podemos pasar de la etapa t a la etapa $t+1$ para que la hipótesis de inducción continúe manteniéndose, entonces podemos seguir extendiendo f para que su dominio de definición eventualmente incluya cada elemento de B y su rango eventualmente incluya cada elemento de A. Como la hipótesis de inducción continúa siendo válida, f será una función de preservación del orden de $\langle B,S\rangle$ a $\langle A,R\rangle$ y, por lo tanto, un isomorfismo de $\langle B,S\rangle$ en $\langle A,R\rangle$.

En la etapa 0, definimos $f(b_0) = d_0$. Supongamos que estamos en la etapa $t+1$ y que $t+1 = 2n$. Si $f(b_n)$ ya ha sido definido, entonces pasamos a la siguiente etapa. De lo contrario, procedemos como en la prueba del Teorema 2.2.1 y sean

$$b_{i_0} <_S b_{i_1} <_S b_{i_2} <_S \ldots <_S b_{i_k}$$

los elementos para los cuales ya se ha definido f.Entonces

$$f(b_{i_0}) <_R f(b_{i_1})_R f(b_{i_2}) <_R \ldots <_R f(b_{i_k}).$$

Existen $k+2$ posibles $S-$ubicaciones de b_n y para cada una de ellas, usando la hipotésis de que A es denso y no tiene primer o último elemento, como en la prueba del Teorema 2.2.1, podemos encontrar un elemento en la correspondiente $R-$ubicación en A, y luego definimos $f(b_n)$ como este elemento. Esto lo hacemos si $t+1$ es par.

Si $t+1 = 2n+1$ es impar, entonces verificamos si $f(b_{i_m}) = d_n$, para algún m,$1 \leq m \leq k$, donde, como arriba,

$$b_{i_0} <_S b_{i_1} <_S b_{i_2} <_S \ldots <_S b_{i_k}$$

son los elementos para los cuales ya se ha definido f. Si es así, pasamos a la siguiente etapa. De lo contrario, hay $k+2$ posibles $R-$ubicaciones de d_n, y para cada una de ellas, utilizando el hecho de que B es denso y no tiene primer o último elemento, podemos encontrar un elemento b en la ubicación $S-$ correspondiente en B , y luego definimos $f(b) = d_n$. Esto completa la descripción de lo que hacemos en la etapa $t+1$.

Es claro que la hipótesis de inducción de hecho continúa manteniéndose, y por lo tanto, f es un isomorfismo de $(B, \leq_S)$ en $(A, \leq_R)$. □

Una formulación alternativa del Teorema 2.2.3 se da en términos de lo que es una teoría k-categórica para un cardinal k.

Definición 2.2.4. (*k-categoricidad*). Una teoría es k-categórica ($\kappa \geq \aleph_0$) sii (i) admite un modelo de cardinal k y ii) todos sus modelos de cardinal k son isomorfos.

Teorema 2.2.5. *(Versión análoga - Cantor 2) La teoría de órdenes lineales densos sin extremos es $\aleph_0$-categórica.*

Nota: Para la demostración de esta versión haremos uso de los ismofismos parciales.

Demostración. Supongamos que $(A, <)$ y $(B, <)$ son dos órdenes lineales densos sin extremos tales que $|A| = \aleph_0 = |B|$. Sean $A = \{a_n : n < \omega\}$ y $B = \{b_n : n < \omega\}$ enumeraciones para los elementos de A y B, respectivamente. Para encontrar un isomorfismo $f : (A,<) \to (B,<)$, lo que haremos es definir funciones parciales f_n entre A y B que satisfacen las siguientes propiedades:

- Para todo $n < \omega$, $f_n \subseteq f_{n+1}$ (como conjuntos de parejas ordenadas en $A \times B$).
- $\mathrm{dom}(f_n)$, $\mathrm{im}(f_n)$ son finitos para todo $n < \omega$.
- $\{a_0, \ldots, a_n\} \subset \mathrm{dom}(f_n)$ y $\mathrm{im}(f_n) \supseteq \{b_0, \ldots, b_n\}$ $\mathrm{im}(f_n)$.
- Para todo $a_i, a_j \in \mathrm{dom}(f_n)$, $(A,<) \models a_i < a_j$ si y sólo si $(B,<) \models f_n(a_i) < f_n(a_j)$.

Una vez hecho esto, $f = \bigcup_{n<\omega} f_n$ será un isomorfismo entre $(A,<)$ y $(B,<)$. Para comenzar, basta con tomar $f_0 = (a_0, b_0)$. Supongamos ahora que f_n ya ha sido construído con las propiedades requeridas, y veamos como construír f_{n+1}.

- *Forth:* En este paso construímos una función f'_n que extiende a f_n y tiene a a_{n+1} en su dominio. Si $a_{n+1} \in \mathrm{dom}(f_n)$, hacemos $f'_n = f_n$. Ahora, si $a_{n+1} \notin \mathrm{dom}(f_n)$, podemos organizar linealmente los elementos en $\mathrm{dom}(f_n)$, como $c_1 < \ldots < c_k$. Tenemos tres posibilidades para el nuevo elemento a_{n+1}:
    - $a_{n+1} < c_1$. Como B no tiene extremo inferior, existe un elemento $b'_{n+1} \in N$ tal que $b'_{n+1} < f_n(c_1)$.En este caso hacemos $f_n = f_n \cup \{(a_{n+1}, b'_{n+1})\}$.
    - $c_k < a_{n+1}$. Como B no tiene extremo superior, existe un elemento $b'_{n+1} \in B$ tal que $f_n(c_k) < b'_{n+1}$. En este caso hacemos $f'_n = f_n \cup \{(a_{n+1}, b'_{n+1})\}$.

- Existe un único $i \leq k$ tal que $c_i < a_{n+1} < c_{i+1}$. Como $(N,<)$ es un orden denso, existe un elemento $b'_{n+1} \in N$ tal que $f_n(c_i) < b'_{n+1} < f_n(c_{i+1})$, y podemos poner $f'_n = f_n \cup \{(a_{n+1}, b'_{n+1})\}$.

- *Back* En este paso construímos la función $f_{n+1} \supseteq f'_n$ que tiene b_{n+1} en su imagen. Si $b_{n+1} \in \mathrm{im}(f'_n)$,hacemos $f_{n+1} = f'_n$, pero si $b_{n+1} \notin \mathrm{im}(f'_n)$, podemos ordenar linealmente los elementos en $\mathrm{im}(f'_n)$ como $d_1 < \ldots < d_l$. De nuevo tenemos tres casos:

  - Si $b_{n+1} < d_1$, como $(A,<)$ es un orden sin extremos, existe un elemento $a'_{n+1} \in M$ tal que $a'_{n+1} < (f'_n)^1(d_1)$, y hacemos $f_{n+1} = f'_n \cup \{(a'_{n+1}, b_{n+1})\}$.

  - Si $d_l < b_{n+1}$, como $(A,<)$ es un orden sin extremos, existe un elemento $a'_{n+1} \in A$ tal que $(f'_n)^1(d_l) < a'_{n+1}$, y hacemos $f_{n+1} = f'_n \cup \{(a'_{n+1}, b_{n+1})\}$.

  - Si existe $j \leq l$ tal que $d_j < b_{n+1} < d_{j+1}$, entonces como $(A,<)$ es un orden denso existe un elemento $a'_{n+1} \in A$ tal que $(f'_n)^1(d_j) < a'_{n+1} < (f'_n)^1(d_{j+1})$. Hacemos entonces $f_{n+1} = f'_n \cup \{(a'_{n+1}, b_{n+1})\}$.

Como $|\mathrm{dom}(f_{n+1})\ | \leq |\ \mathrm{dom}(f_n)| + 2$ y $|\ \mathrm{im}(f_{n+1}) \leq |\ \mathrm{im}(f_n)| + 2$, se cumple la condición (ii). Además, $f_n \subseteq f_{n+1}$, $a_{n+1} \in \mathrm{dom}(f_{n+1})$ y $b_{n+1} \in \mathrm{im}(f_{n+1})$, por lo que se cumplen las condiciones (i) y (iii). Finalmente, por construcción, f_{n+1} satisface la condición (iv).

De esta forma, $f = \bigcup_{n<\omega} f_n \subseteq A \times B$ es una función con

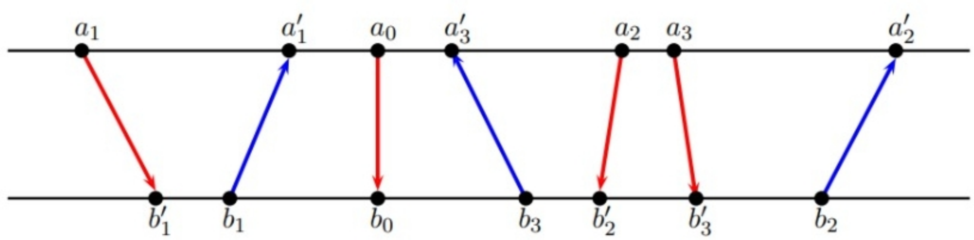
$$\mathrm{dom}(f) = \bigcup_{n<\omega} \mathrm{dom}(f_n) \supseteq \bigcup_{n<\omega} \{a_0, \ldots, a_n\} = A \text{ y}$$

$$\mathrm{im}(f) = \bigcup_{n<\omega} \mathrm{im}(f_n) \supseteq_{n<\omega} \{b_0, \ldots, b_n\} = B.$$

Así, $f : A \to B$, y siempre que $a < a'$ en A, a, $a' \in \mathrm{dom}(f_n)$ para algún $n < \omega$, y tendremos que $f(a) = f_n(a) < f_n(a') = f(a')$. Esto muestra que f es un isomorfismo entre $(A, <)$ y $(B, <)$.

Figura 2.

Ilustración de correspondencia



$\square$

Podemos concluir que $\eta + \eta = \eta$, que $\eta \cdot \eta = \eta$, que $\alpha \cdot \eta = \eta$ para cualquier orden contable tipo α, y que $\eta + 1 + \eta = \eta$, es importante aclarar el producto no conmuta.

Corolario 2.2.6. *Cada orden lineal denso contable tiene un tipo de orden* $1, \eta, 1 + \eta, \eta + 1$ *o* $1 + \eta + 1$.

Demostración. Sea (D', R') un orden lineal denso numerable distinto de 1. Entonces, si D resulta de eliminar el primer y/o último elemento de D', $D \simeq \eta$. Por lo tanto $(D', R') \simeq \eta$, $1 + \eta, \eta + 1$, o $1 + \eta + 1$. $\square$

Así, cuando hablamos de ordenes lineales densos y contables, estamos hablando de η. Tenga en cuenta que los ordenamientos lineales de tipo de orden $\eta + 1, 1 + \eta$, y $1 + \eta + 1$ son todos universales en el sentido del Teorema 2.2.1 ya que cada uno contiene una copia de η.

3. El grafo universal $\mathfrak{R}$

Erd*ö*s y Rényi mostraron el paradójico y sorprendente resultado de que existe un gráfo aleatorio infinito numerable único, llamado *el grafo universal* $\mathfrak{R}$. En este capítulo estudiaremos algunas propiedades interesantes sobre este maravilloso grafo, haciendo uso principal del método *"back and forth"*. Como resultado central de este capítulo, mostraremos que existe un grafo $\mathfrak{R}$ con la siguiente caracterización:

Si se elige un grafo contable al azar, seleccionando las aristas independientemente con probabilidad $\frac{1}{2}$ de cualquier conjunto de vértices de 2 elementos, entonces casi con seguridad (es decir, con probabilidad 1), el grafo resultante es isomorfo a $\mathfrak{R}$.

Los principales resultados en este capítulo relacionados con el grafo universal $\mathfrak{R}$ fueron trabajados y presentados por Cameron en (Cameron, 2013) y (Cameron, 2001). Antes de mostrar todas las propiedades interesantes del grafo universal daremos conceptos básicos de la teoría de grafos.

3.1. Conceptos sobre grafos

El inicio de la Teoría de Grafos tuvo lugar en 1736, sus ideas básicas las introdujo el gran matemático suizo Leonhard Euler. El trabajo surgió del famoso problema conocido como el problema de los puentes de Königsberg.

En la representación que hizo Euler de este problema se presentan cuatro puntos (a los que denominaremos vértices), a, b, c, d y siete aristas o lados que conectan algunos de los vértices.

Este problema nos da paso para introducir la definición de grafo.

Los grafos nos permiten modelizar relaciones,aunque el concepto de grafo es más amplio que lo que denominamos estructura relacional, hacemos una primera definición considerando las estructuras relacionales antireflexivas, cuando son simétricas como grafos y si no son simétricas se entenderán como grafos dirigidos. Los elementos de A se llaman vértices, los elementos de R son las aristas, si R no es simétrica, cuando R es simétrica las parejas (a,b) y (b,a) de R se consideran una sola arista no dirigida. Con relación a esto damos una primera definición de grafo, en particular un *grafo no-dirigido*.

Si tenemos un grafo $G = (V(G), E(G))$, puede ser visto como una estructura en el lenguaje de grafos $\mathscr{L}_g = \{R\}$ pensando en el conjunto de vértices como el universo, y definiendo la relación R^G como $(x,y) \in R^G$ si y sólo si $\{x,y\} \in E(G)$.

En el caso de los puentes de Königsberg, el grafo correspondiente tiene como conjunto de vértices al conjunto $V = \{a,b,c,d,\}$, como conjunto de aristas el conjunto $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$ y la aplicación de incidencia es la dada por:

$$\psi_G(e_1) = \psi_G(e_2) = \{a,b\},\ \psi_G(e_3) = \psi_G(e_4) = \{b,c\},\ \psi_G(e_5) = \{a,d\},\ \psi_G(e_6) = \{b,d\},$$
$$\psi_G(e_7) = \{c,d\}.$$

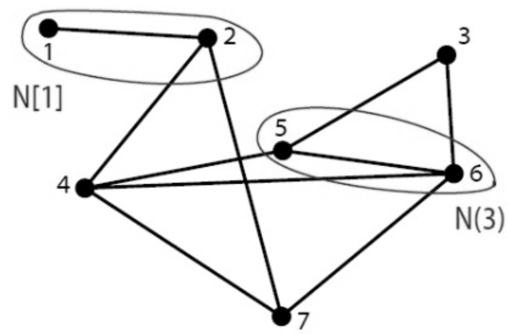
A un grafo no dirigido se le conoce también como multigrafo ya que es un grafo en el que se permite la existencia de varias aristas conectando los mismos vértices y la aparición de bucles.

En base a lo anterior definimos las siguientes propiedades sobre grafos.

Definición 3.1.1. Un vértice v es adyacente a otro vértice w en G si $(v,w) \in E(G)$. Decimos que v y w son los extremos de la arista.

Figura 3.

Vértices adyacentes



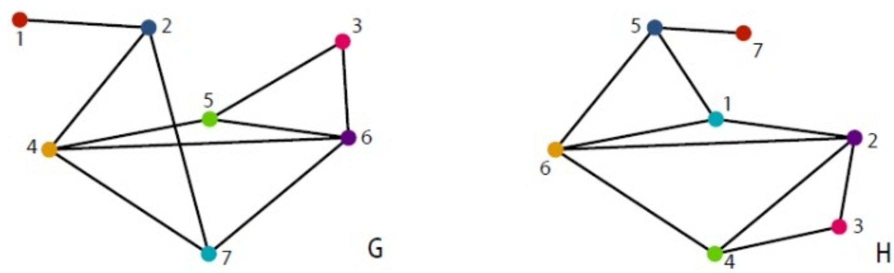
Definición 3.1.2. (*Grafos Isomorfos*).

- Dos grafos G y H son isomorfos si existe una biyección entre $V(G)$ y $V(H)$ que conserva las adyacencias. En este caso, notamos $G = H$.

- Más formalmente, G y H son isomorfos si existe $f : V(G) \to V(H)$ biyectiva tal que $(v,w) \in E(G)$ si y sólo si $(f(v), f(w)) \in E(H)$.

Figura 4.

Grafos isomorfos con la asignación f(1)=7, f(2)=5, f(3)=3, f(4)=6, f(5)=4, f(6)=2, f(7)=1



Grafos aleatorios

Definición 3.1.3. (Grafos aleatorios binomiales, $G(n,p)$): este modelo tiene dos parámetros, el número de vértices n y un parámetro de probabilidad $0 \leq p \leq 1$. Sea $\mathscr{G}$ la familia de todos los grafos etiquetados posibles en el conjunto de vértices $[n]$, $|\mathscr{G}| = 2^{\binom{n}{2}}$. El modelo $G(n,p)$ asigna a un grafo $G \in \mathscr{G}$ la siguiente probabilidad

$$\mathbf{Pr}[G] = p^{|E(G)|}(1-p)^{\binom{n}{2}-|E(G)|}$$

En el modelo $G(n,p)$ se lanza una moneda independientemente para cada arista, y con probabilidad p se agrega al grafo. Como resultado se tendrá $p\binom{n}{2}$ aristas. Cuando $p = \frac{m}{\binom{n}{2}}$, entonces un grafo aleatorio binomial en expectativa tiene m bordes e intuitivamente los dos modelos deberían comportarse de manera similar.

3.1.1. Grafo universal. Todos los resultados y propiedades que se mostraran acerca del grafo universal corresponden, en sí, a un caso particular dentro de los 4 casos posibles para conectar un par de vértices.

Hay 4 posibilidades para cada par de vértices x, y:

- unidos por arcos en ambas direcciones
- x a y pero no y a x
- y a x pero no x a y
- sin arcos en absoluto.

Para cada par, se elige al azar entre esos cuatro casos.

Teorema 3.1.4. *Existe un dígrafo único que ocurre con probabilidad 1.*

Sugerencia. Para la demostración se requiere de cuidado al elegir dos vértices x e y, no se sabe cuál es x y cuál es y. Una forma de lidiar con esto es enumerar los vértices por números naturales y tomar x como el vértice del par con un índice más pequeño.

La condición que caracteriza al dígrafo es la siguiente. Dados cuatro conjuntos finitos disjuntos por pares A, B, C, D, existe un vértice z tal que hay aristas en ambas direcciones entre z y los vértices en A, aristas con dirección de z a B pero no de B a z, aristas con dirección de C a z pero no de z a C, y no hay aristas entre z y D.

Si omitimos el primer caso obtendremos un grafo orientado, es decir, ningún par de vértices estan unidos por aristas en ambas direcciones. Además, si tomamos el dígrafo aleatorio o el grafico orientado al azar y olvidamos las direcciones (y las aristas dobles), obtenemos el grafo aleatorio.

Tenemos que elegir al azar de qué manera colocar el arco entre x e y en los casos 2 y 3.

Dados dos vértices x e y, se toma el resultado 1 con probabilidad 1/4 y el resultado 4 con probabilidad 1/4. También deseamos elegir cada uno de 2 y 3 con probabilidad 1/4. Pero, ¿cuál es x y cuál es y? La razón para enumerar los vértices como números naturales y dejar que x sea el más pequeño es simplemente para hacer esto. Así que describamos todo el esquema con una moneda justa, como la siguiente.

- Primero se lanza la moneda. Si sale cara, entonces se obtendrá el resultado 1 o 4; se decide entre ellos lanzando de nuevo, de modo que cara significa 1 y cruz significa 4.
- Pero si el resultado del primer lanzamiento es cruz, entonces se lanza de nuevo; cara significa que se coloca un arco de menor a mayor de x e y, y cruz significa un arco de mayor a menor.

Debido a que estamos eligiendo al azar, finalmente no importa cuál es x y cuál es y; pero necesitan ser distinguidos de alguna manera para hacer esto. La forma más sencilla de hacer esto es etiquetarlos con números naturales y dejar que x sea el más pequeño.

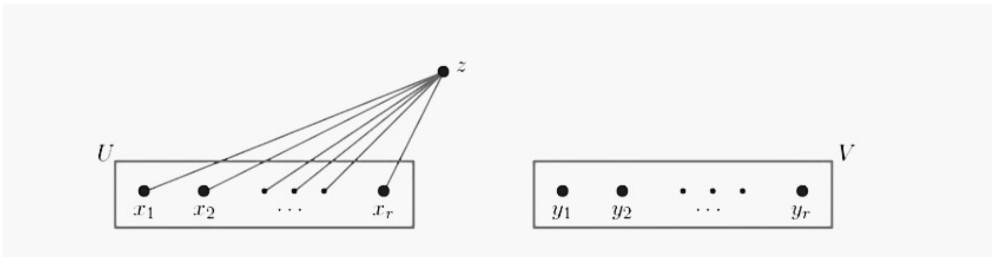
3.2. Existencia y construcción de $\mathfrak{R}$

Esta sección verifica algunas formas de la definición del grafo universal $\mathfrak{R}$ y la contrucción de este dada por Rado y exaltada más adelante por Cameron en (Cameron, 2013).

Empezamos con una propiedad elemental que un grafo puede tener o no, la cuál se usará con frecuencia. (Propiedad de extensión) *Dada una cantidad finita de distintos vértices* $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$, *existe un vértice z que es adyacente a* $u_1, \ldots, u_m$ *y no adyacente a* $v_1, \ldots, v_n$.

Figura 5.

Propiedad de extensión



El teorema que sigue es un resultado importante en la teoría de grafos, el cual Erdös y Rényi mostraron en 1963, optando por dar una definición probabilística de $\mathfrak{R}$ y estableciendo su existencia, simplemente conectaron cada par de vértices por una arista de forma independiente con probabilidad $\frac{1}{2}$). Cameron nos muestra en (Cameron, 2013) la respectiva prueba en donde se hace uso de la propiedad mencionada anteriormente y el método Back and Forth.

Teorema 3.2.1. *Existe un grafo* $\mathfrak{R}$ *con la siguiente propiedad. Si se elige un grafo contable al azar, seleccionando las aristas independientemente con probabilidad* $\frac{1}{2}$ *de culquier conjunto de vértices de 2 elementos, entonces casi con seguridad (es decir, con probabilidad 1), el grafo resultante es isomorfo a* $\mathfrak{R}$.

El teorema se desprende de dos hechos:

1. Con probabilidad 1, un grafo contable aleatorio satisface la *Propiedad de extensión*.

2. Cualesquiera dos grafos contables que satisfacen la *Propiedad de extensión* son isomorfos.

Primero mostaremos el *hecho* 1.

Demostración. Hecho 1: Tenemos que mostrar que el evento donde la *Propiedad de extensión* falla tiene probabilidad 0, es decir, el conjunto de grafos que no satisfacen la *Propiedad de extensión* es un conjunto nulo. Para esto, es suficiente mostrar que el conjunto de grafos para el cual la *Propiedad de extensión* falla para algunos vértices dados $u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n$ es nulo. (Para esta deducción, usamos un lema elemental de la teoría de la medida: la unión de muchos conjuntos nulos contables es nula. Solo hay una cantidad contable de valores de m y n, y para cada par de valores, solo hay contables opciones de los vértices $u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n$.) Ahora podemos calcular la probabilidad de este conjunto. Sean $z_1,\ldots,z_N$ distintos vértices del grafo diferentes de $u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n$. Sea $x_k \in \{u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n$, la probabilidad de que cualquier z_i se una correctamente a x_k es $\frac{1}{2}$; como para culquier vértice $x_k \in \{u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n$ estos eventos son independientes entonces la probabilidad de que cualquier z_i se una correctamente a estos vértices es $\frac{1}{2^{m+n}}$, en consecuencia obtenemos que la probabilidad de que no se una correctamente es $1-\frac{1}{2^{m+n}}$; (para diferentes z_i) los eventos siguen siendo independientes, luego, la probabilidad de que ninguno de los $z_1,\cdots,z_N$ este correctamente unido, al conjunto de vétices $\{u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n\}$,es $\left(1-\frac{1}{2^{m+n}}\right)^N$. Por otro lado, existen $\frac{N!}{(N-(m+n))}$ formas de escoger $\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m\} \subseteq G$ (el conjunto de grafos que no satisfacen la *propiedad de extensión*) y cada una tiene probabilidad $(1-\frac{1}{2^{m+n}})^N$ de que exista $z \in G$ tal que x_i se une a z y y_j se une a z para todo $i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m$. Finalmente tenemos que la probabilidad para este evento es

$$\frac{N!}{(N-(m+n))}\left(1-\frac{1}{2^{m+n}}\right)^N$$

Y aplicando límite esto tiende a 0 cuando $N \to \infty$; entonces el evento de que ningún vértice esté correctamente unido tiene probabilidad 0.

$\square$

El mismo resultado se mantiene si se eligen las aristas con probabilidad fija p, donde $0 < p < 1$. También se puede permitir alguna variación en la probabilidad de la arista.

La *Propiedad de extensión* es útil debido al *hecho* 2 que nos indica lo siguiente: *sean* Γ_1 *y* Γ_2 *grafos contables que satisfagan la Propiedad de extensión. Entonces* Γ *y* Γ^* *son isomorfos.*

Demostración. Hecho 2: Definimos nuestro isomorfismo de manera inductiva. Sean $\{x_1, x_2, \ldots\}$ y $\{y_1, y_2, \ldots\}$ los conjuntos de vértices de Γ_1 y Γ_2 respectivamente. Sea $f_0 = \emptyset$ la función vacío. Supongamos que hemos construido f_n, que es un isomorfismo de algunos subgrafos inducidos de Γ_1 y Γ_2. Sea x_{m+1} otro vértice de Γ_1. Mostraremos que f puede extenderse a x_{m+1}, considerando los siguientes dos casos.

- *Caso 1: (n es par)*. Sea m el índice más pequeño de modo que f_n no esté definido en x_{m+1}. Definamos $U, V \subseteq \text{dom}(f_n)$ dejando que U sea el conjunto de vecinos de x_{m+1} y V el conjunto de los no vecinos. Dado que Γ_2 satisface la *Propiedad de extensión*, existe $y \in \Gamma_2$ que es adyacente a cada vértice de $f_n(U)$ y no adyacente a los vértices en $f_n(V)$, por lo que podemos considerar que y es $f_{n+1}(x_{m+1})$ (sin necesidad de Axioma de elección, gracias al buen orden).

Ahora utilizamos el método *"back and forth"* en lo que resta de la prueba para extender f_n a Γ_1 en el caso 2.

- *Caso 2: (n es impar)*. Sea m el índice más pequeño de manera que y_{m+1} no esté en el rango de f_n. Podemos repetir el argumento anterior al revés. Definamos $U, V \subseteq \text{rang}(f_n)$ dejando que U sea el conjunto de vecindades de y_{m+1} y V el conjunto de las no vecindades. Ahora existe $x \in \Gamma_1$ adyacente a cada vértice de $f_n^{-1}(U)$ y no adyacente a los vértices de $f_n^{-1}(V)$, y podemos tomar $f_{n+1}(x) = y_{m+1}$.

  Ahora tome $f = \bigcup_{n \geq 1} f_n$. Este método de definición de f ha asegurado que f es 1 a 1 y sobre; el *caso 1* controla cómo extendimos el dominio mientras el *caso 2* controla cómo ampliamos el rango, por lo que hacemos cada caso minuciosamente muchas veces para controlar ambos. Sabemos que f es un grafo que es un isomorfismo porque cada f_n lo es.

$\square$

Si Γ_2 satisface la *Propiedad de extensión*, pero Γ_1 es cualquier grafo contable, entonces los pasos que van desde Γ_1 a Γ_2 funcionan, aunque no puede ir en la dirección inversa. Entonces podemos obtener una incrustación pero no necesariamente una biyección. Esto muestra que un grafo satisfaciendo la *Propiedad de extensión* es universal. Ahora una ilustración del paso *Forth* acorde al uso del método *"back and forth"* en la prueba anterior.

3.2.1. Ilustración. ***Paso forth:***

Figura 6.

Ilustración 1: Enumeramos los conjuntos de vértices de Γ_1, Γ_2 *como* $(a_0, a_1, \ldots)$ *Y* $(b_0, b_1, \ldots)$. *Construimos un isomorfismo* ϕ *entre ellos en etapas*

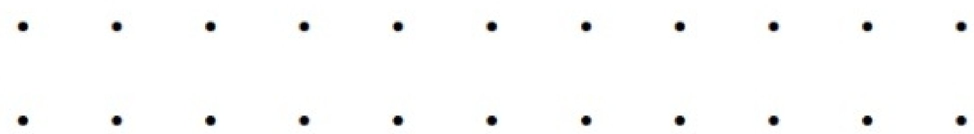


Figura 7.

Ilustración 2: En la etapa 0, asigne a_0 *a* b_0

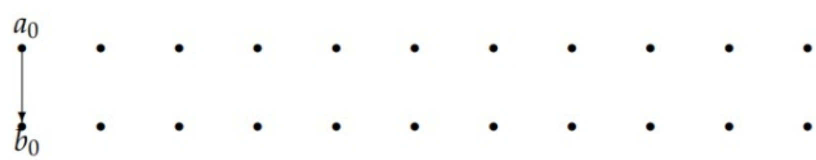


Figura 8.

Ilustración 3: En las etapas pares, sea a_m *el primer* a_i *sin asignar. Sean* U' *y* V' *sus vecinos y no vecinos entre los vértices ya mapeados*

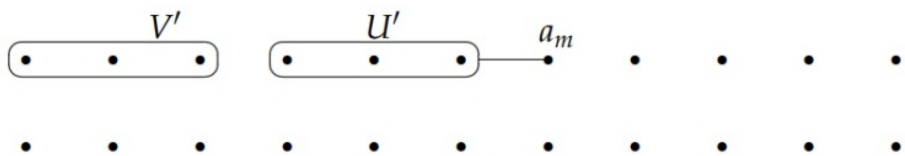


Figura 9.

Ilustración 4: Haga U y V sus imágenes bajo ϕ

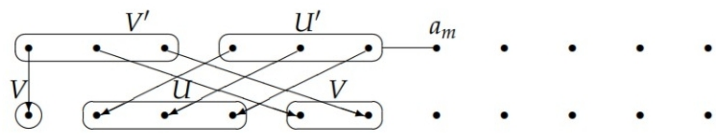


Figura 10.

Ilustración 5: Use la Propiedad de extensión en el grafo Γ_2 para encontrar un vértice z que cumpla la Propiedad para U y V

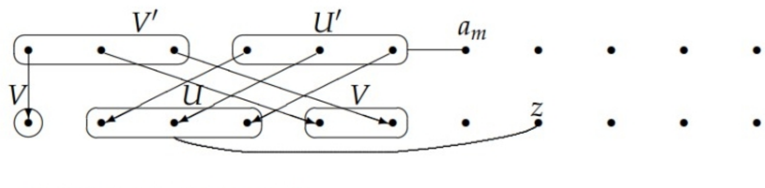
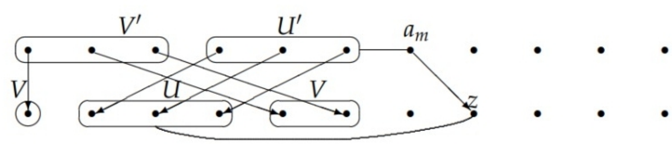


Figura 11.

Ilustración 6: Luego a a_m se le asigna z



3.2.2. Descripciones. Presentaremos dos descripciones del grafo aleatorio contable. El primero se debe a Rado.

Definición 3.2.2. (Definición Binaria de $\mathfrak{R}$). Una forma familiar de codificar subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ como números naturales es: el conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de elementos distintos se codifica como $2^{a_1} + \ldots + 2^{a_n}$. Esto genera a una descripción explícita de $\mathfrak{R}$: el conjunto de vértices es $\mathbb{N}$; x y y

son adyacentes si el dígito x en la expansión de base 2 de y es un 1 o viceversa. Esta descripción fue dada por Rado en **?**.

Ejemplo 3.2.3. *Sea* $A = \{2,5,9,23,35\}$ *un conjunto de vértices y sea* $B = \{10,101,1001,10111,100011\}$ *el conjunto de la expansión de base 2 de los elementos de A respectivamente, comparando los dos conjuntos deducimos que 2 no es adyacente con ningún otro elemento de A ya que los números 101, 1001, 10111, 100011, correspondientes a la forma binaria de 5,9,12,35 respectivamente, tienen el dígito 2 como 0. Como caso contrario se tiene que 5 es adyacente a 23 y 35 ya que en su expansión de base 2 tienen al dígito 5 como 1.*

Ejemplo 3.2.4. *El conjunto de vértices es el conjunto de números naturales, incluido el cero. Para* $x < y$*, se une x a y si el x-ésimo dígito en la expansión de base 2 de y es 1; es decir, cuando y se escribe como una suma de potencias distintas de* 2*, entonces* 2^x *es una de estas potencias. Por ejemplo, 0 se une a todos los números con unidades de dígito 1, es decir, a todos los números impares. Entonces 1 se une a 0 y todos los números congruentes con 2 o 3 (mod 4); 2 se une a 1 y a todos los números congruentes con 4, 5, 6 o 7 (mod 8); y así.*

La siguiente construcción dada por Cameron en **?** es más teórico-numérica.

Notación: el símbolo de Legendre, que también se conoce como carácter cuadrático, se define para todos los números enteros a y números primos impares p como

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & si \quad a \quad divide \quad a \quad p \\ 1 & si \quad aR'p \\ -1 & si \quad aN'p \end{cases}$$

donde $aR'p$ indica que a es residuo cuadràtico de p y $aN'p$ indica que a no es residuo cuadràtico de p.

Ejemplo 3.2.5. *Si tomamos como primo a* $p = 13$*, se tiene que* $1^2 \equiv 12^2 \equiv 4$*(mod13),* $2^2 \equiv 11^2 \equiv 4$*(mod 13),* $3^2 \equiv 10^2 \equiv 9$*(mod 13),* $4^2 \equiv 9^2 \equiv 3$*(mod 13),* $5^2 \equiv 8^2 \equiv 12$*(mod 13),* $6^2 \equiv 7^2 \equiv 10$*(mod 13)*

Por lo tanto, los residuos cuadráticos módulo 13 son: 1, 3, 4, 9, 10 y 12; los no residuos: 2, 5, 6, 7, 8, y 11.

Definición 3.2.6. (Definición teórico-numérica). Tome como vértices el conjunto $\mathbb{P}$ de primos congruentes a 1 (mod 4). Por reciprocidad cuadrática, si $p, q \in \mathbb{P}$ entonces $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$ si y sólo si $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$. (Aquí "$\left(\frac{p}{q}\right) = 1$" significa que p es un residuo cuadrático (mod q)). Decimos que p y q son adyacentes si $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$.

Ejemplo 3.2.7. *El conjunto de vértices es el conjunto de números primos congruentes con 1 (mod 4); p se une a q si p es un residuo cuadrático (mod q). Por reciprocidad cuadrática, esta relación de unión es simétrica. Así, 5 se une a todos los primos congruentes con 1 o 4 (mod 5); 13 se une a todos los primos congruentes con 1, 3, 4, 9, 10 o 12 (mod 13), y así sucesivamente.*

Estos grafos se ven bastante diferentes; es sorprendente que en realidad resulten isomorfos. El hecho de que sean isomórficos se deriva del hecho de que ambos son isomorfos al grafo aleatorio contable, es decir, si U y V son conjuntos finitos disjuntos de vértices en cualquiera de los grafos, hay un vértice z unido a todo elemento de U y ninguno de V.

Puede ser interesante ver cómo se construye el isomorfismo. Comenzamos con el primer vértice del primer grafo (que es 0) y lo asignamos al primer vértice del segundo grafo (que es 5). En el siguiente paso, tenemos que volver del segundo grafo al primer grafo, por lo que elegimos el primer vértice no utilizado en el segundo grafo (que es 13). Ahora que 13 no está unido a 5, tenemos que elegir el primer vértice del primer grafo que no está unido a 0 (este es 2). Entonces a 2 le asignamos 13). Ahora, el primer vértice no utilizado en el primer grafo es 1, que se une a 0 y 2; así que se elije el primer vértice en el segundo grafo unido a 5 y 13, que es 29 (es congruente con 4 (mod 5) y con 3 (mod 13)), y a 1 le asignamos 29. Continuando así. Debido a que ambos grafos satisfacen la condición del grafo aleatorio, es decir, la propiedad de extensión, nunca paramos; siempre hay un vértice para elegir en cada paso.

La definición binaria satisface la *Propiedad de extensión* casi inmediatamente: dado $U = \{m_1,\ldots,m_k\}$ y $V = \{n_1,\ldots,n_l\}$, tome $x = \sum_{i=1}^{k} 2^{m_i}$, el número con 1 en los lugares para U. El caso probabilístico es rápido: al ser un suceso independiente, dado U y V disjuntos y finitos, cada vértice fuera de $U \cup V$ tiene una probabilidad de $1/2^{|U|+|V|}$ de satisfacer la *Propiedad de extensión* para (U,V), por lo que uno de nuestros infinitos vértices seguramente lo hará.

Veamos ahora que la construcción teórico-numérica es buena. Sean $U = \{u_1,\ldots,u_m\}$, $V = \{v_1,\ldots,v_n\} \subseteq \mathbb{P}$ subconjuntos finitos disjuntos de la familia de primos congruentes a 1 mod 4. Sea $d = 4u_1...u_m v_1...v_n$. Para cada $i = 1,\ldots,m$, sea a_i un residuo cuadrático módulo u_i, y para cada $j = 1,\ldots,n$, sea b_j un no-residuo cuadrático módulo v_j. El sistema

$$x \equiv 1 \pmod 4),\ x \equiv a_i \pmod{u_i},\ x \equiv b_j \pmod{v_j},$$

donde $i = 1, \ldots, m$ tiene una solución única $y \equiv z \pmod d$ por el Teorema del Residuo Chino. Como $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \neq 0$, tenemos que z no es múltiplo de ninguno de los $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, bn$, entonces z es coprimo a d, entonces la progresión aritmética $z, z+d, z+2d, \ldots$ son muchos primos por el Teorema de Dirichlet. Tome $x \in \mathbb{P}$ como uno de esos primos, y x satisfacerá la *Propiedad de extensión* para (U,V).

3.2.3. Propiedades. Cameron en Cameron (2013) nos habla sobre el hecho de que cualquier grafo contable es isomorfo a $\mathfrak{R}$ garantizando así su existencia, y que para demostrar que se ha construido $\mathfrak{R}$, es necesario y suficiente verificar la *Propiedad de extensión*. Comenzamos con un ejemplo de la teoría de conjuntos. El Teorema descendente de Löwenheim-Skolem, dice que una teoría consistente de primer orden sobre un lenguaje contable tiene un modelo contable. En particular, hay un modelo contable de teoría de conjuntos (la Paradoja de Skolem).

Un modelo de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel ZF consiste en una colección de objetos llamados conjuntos y una relación binaria $\in$ en esta colección. En otras palabras, es un grafo dirigido. Al cambiar la orientación de esta relación $\in$, es decir, $\ni$, y definir un grafo no dirigido en la que x e y son adyacentes si $x \in y$ o $y \in x$, obtenemos una grafo simple.

Teorema 3.2.8. *sea M un modelo contable de la teoria de conjuntos (axiomas de Zermelo Fraenkel). Defina un grafo M^* por la regla de que $x \sim y$ si y sólo si $x \in y$ o $y \in x$. Entonces M^* es isomorfo a $\mathfrak{R}$.*

Demostración. Sean $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ y $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ distintos elementos de M. Podemos ver que $x = U \cup \{V\}$ satisface la *Propiedad de extensión* para (U,V). Sabemos que cada $u \in U$ es adyacente a x, ya que $U \subseteq x$. Supongamos, por contradicción, que tenemos $v \in V$ adyacente a x. Si $v \in x$, entonces dado que $v \neq u$ para todos los $u \in U$, debemos tener $v = V$, en cuyo caso $v \in V = v$, entonces $v \in v$, contradiciendo el Axioma de Regularidad. Si $x \in v$, entonces notamos que $v \in V \in x$ para obtener $x \in v \in V \in x$, contradiciendo el Axioma de Regularidad. Por lo tanto, x satisface la *Propiedad de extensión* para (U,V). $\square$

Observación: En la demostración, se usó solo el axioma de Conjunto Vacío, axioma de Emparejamiento y Unión, que nos permiten juntar una cantidad finita de elementos, y el Axioma de Fundación. Los otros axiomas (Infinito, Selección, Elección, etc.) no son necesarios.

El Teorema 3.2.8 dice que la relación de pertenencia en un modelo contable de Zermelo-Fraenkel, caso simétrico, es isomorfa al grafo aleatorio.

Uno de los axiomas de Zermelo-Fraenkel es el axioma de fundación, que de hecho prohíbe cadenas infinitas descendentes. Por ejemplo, si tenemos $z = \{y, \ldots\} = \{\{x, \ldots\}, \ldots\} = \{\{\{z, \ldots\}, \ldots\}, \ldots\}$, es decir,

$$x \ni z \ni y \ni x \ni z \ni y \ni x \ldots,$$

que sería una cadena descendente infinita. Entonces esa configuración no es posible.

Pero esto no significa que no haya 3 ciclos en el grafo, ya que los conjuntos x, $y = \{x\}$ y $z = \{x, \{x\}\}$

forman un ciclo de 3 (tenemos $x \in y$, $y \in z$ y $x \in z$). Esto está permitido por las reglas de ZF.

Del resultado anterior se sabe que, si tomamos un modelo contable de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel ZFC y la relación de pertenencia sin importar el orden de los elementos en la pertenencia (es decir, hacemos un grafo uniendo x a y si $x \in y$ o $y \in x$), obtenemos el grafo aleatorio de Erdos– Rényi. El axioma crucial en la prueba de esto es el axioma de fundación; por lo que es natural preguntarse qué sucede si eliminamos este axioma o lo reemplazamos por una alternativa (como el Axioma Anti Fundación de Aczel). El grafo resultante puede no ser simple; puede tener bucles (si $x \in x$ para alguna x) o múltiples aristas (si $x \in y$ e $y \in x$ para algunas x, y distintas).

Por cierto, el axioma de fundación de ZF prohíbe los ciclos dirigidos para la relación de pertenencia; en particular prohíbe los bucles $(x \in x)$ y los bordes dobles $(x \in y \in x)$ en el grafo no dirigido. A esto se le concoe como el grafo de pertenencia del modelo.

3.3. Indestructibilidad de R

En esta sección se mostraran resultados sobre el grafo $\mathfrak{R}$ que garantizan su estabilidad, es decir, si se le hacen pequeños cambios, el grafo resultante sigue siendo isomorfo a $\mathfrak{R}$. Algunos de estos resultados dependen del siguiente análogo de la *Propiedad de extensión*, que es una consecuencia inmediata de la *Propiedad de extensión*.

Proposición 3.3.1. *Sean $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ distintos vértices de R.Entonces el conjunto*

$$Z = \{z : z \sim u_i \textit{ para } i = 1, \ldots, m; z \not\sim v_j \textit{ para } j = 1, \ldots, n\}$$

es infinito; y el subgrafo inducido en este conjunto es isomorfo a R.

Demostración. Es suficiente verificar la *Propiedad de extensión* para Z. Sean $u'_1, \ldots, u'_k$, $v'_1, \ldots, v'_l$ distintos vértices de Z, ahora el vértice z es adyacente a $u_1, \ldots, u_n, u'_1, \ldots, u'_k$ y no a $v_1, \ldots, v_n, v'_1, \ldots, v'_l$, pertenece a Z y da prueba de la particularización de la *Propiedad de extensión* aquí. □

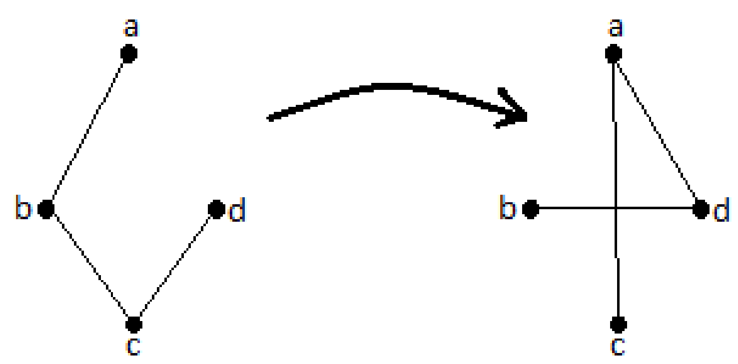
Proposición 3.3.2. *El resultado de cualquiera de las siguientes operaciones en $\mathfrak{R}$ es isomorfo a $\mathfrak{R}$:*

- *eliminar un número finito de vértices;*
- *cambiar un número finito de aristas por no aristas o viceversa;*
- *cambio con respecto a un conjunto finito de vértices.*

Nota: En el caso (a) la cantidad de vértices eliminados es finita por tanto el conjunto Z definido en la Proposición 3.3.1 no se tomará en cuenta para esos vértices. En el caso (b) la operación se entiende mejor con una ilustración de un ejemplo (ver Figura 12). En el primer grafo de la figura a solo tiene aristas con b entonces al hacer la operación a tiene aristas con c y d y de igual forma se hace para los vértices b, c y d, como se ilustra en el grafo 2.

Figura 12.

Cambio de un número finito de aristas por no aristas



En el caso (c) cambiar con respecto a un conjunto X de vértices es la operación que reemplaza todos las aristas entre X y el complemento por no aristas, y todos las no aristas por aristas, pero deja los bordes y los no bordes dentro de X o completamente fuera de X sin cambios.

Todo esto se prueba mediante la propiedad de extensión, que al generalizarla nos dice. Sean U y V conjuntos finitos disjuntos de vértices. La propiedad de extensión dice que hay un vértice z unido a todo en U y nada en V. De hecho, hay infinitos vértices de este tipo. Para elegir un vértice, sea z_1, lo agregamos a U, luego buscamos otro vértice z_2 para este nuevo conjunto más grande.Y Continuamos así.

Demostración. En los casos (a) y (b), para verificar un caso particular de la *Propiedad de extensión*, utilizamos la Proposición 3.3.1 para evitar los vértices que han sido alterados. Para (c), si

$U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ y $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, elegimos un vértice z fuera de X que es adyacente (en $\mathfrak{R}$) a los vértices de $U \setminus X$ y $V \cap X$, y no adyacente a aquellos de $U \cap X$ y $V \setminus X$. Después de la eliminación, debido a que hay infinitas opciones para z, debe haber algunas que no se hayan eliminado. $\square$

No todos las grafos obtenidos de $\mathfrak{R}$ al cambiar son isomorfos a $\mathfrak{R}$.

Ejemplo 3.3.3. *Si cambiamos con respecto a los vecinos de un vértice x, entonces x es un vértice aislado en el grafo resultante. Sin embargo, si se elimina x, obtenemos R. Además, si cambiamos con respecto a un conjunto aleatorio de vértices, el resultado es casi seguro isomorfo a* $\mathfrak{R}$*.*

$\mathfrak{R}$ cumple el principio de casillero:

Proposición 3.3.4. *Si el conjunto de vértices de* $\mathfrak{R}$ *se divide en un número finito de partes, entonces el subgrafo inducido en una de estas partes es isomorfo a* $\mathfrak{R}$*.*

Demostración. Suponga que la conclusión es falsa para la partición $X_1 \cup \ldots \cup U_k$ del conjunto de vértices. Luego, para cada i, la *Propiedad de extensión* falla en X_i, por lo que hay subconjuntos finitos disjuntos U_i, V_i de X_i de modo que ningún vértice de X_i esté correctamente unido a todos los vértices de U_i, y a ninguno de V_i. Haciendo $U = U_1 \cup \ldots \cup U_k$ y $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$, encontramos que la *Propiedad de extensión* falla en $\mathfrak{R}$ para los conjuntos U y V, una contradicción. $\square$

Proposición 3.3.5. $\mathfrak{R}$ *es el único grafo contable* Γ *aparte de los grafos completos y nulos, de modo que, no importa cómo se divida* $V(\Gamma)$ *en dos partes, una de las partes induce una copia isomorfa de* Γ*.*

Demostración. Primero mostramos que el grafo $\mathfrak{R}$ tiene la propiedad de partición. Sea $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(R)$. Si la *Propiedad de extensión* falla en $\mathfrak{R}[V_1]$ y $\mathfrak{R}[V_2]$, digamos para los conjuntos U_1, W_1 y U_2, W_2, respectivamente, entonces la *Propiedad de extensión* falla para $U = U_1 \cup U_2$ y $W = W_1 \cup W_2$ en $\mathfrak{R}$, lo cual es una contradicción.

Para mostrar unicidad, Sea $\Gamma = (V, E)$ un grafo contable con la propiedad de partición. Sea V_1 su conjunto de vértices aislados, y V_2 el resto. Si $V_1 \neq \emptyset$ entonces $\Gamma \not\simeq \Gamma[V_2]$, ya que Γ tiene vértices aislados pero $\Gamma[V_2]$ no. Por lo tanto, $\Gamma = \Gamma[V_1] \simeq \Gamma'$ (grafo completo). Del mismo modo, si G tiene un vértice adyacente a todos los demás vértices, entonces $\Gamma = \Gamma'$.

Supongamos ahora que Γ no tiene vértice aislado y ningún vértice unido a todos los demás vértices. Si Γ no es el gafo Rado, entonces hay conjuntos U, W para los cuales la *Propiedad de extensión* falla en Γ; elija estos con $|U \cup W|$ mínimo. Primero suponga que $U \neq \emptyset$, y elija $u \in U$. Sea V_1 que consiste en u y todos los vértices fuera de $U \cup W$ que no sean adyacentes a u, y sea V_2 que contiene los vértices restantes. Como u está aislado en $\Gamma[V_1]$, tenemos $\Gamma \not\simeq \Gamma[V_1]$ y, por lo tanto, $G \simeq \Gamma[V_2]$. Por la minimidad de $|U \cup W|$, existe un vértice $v \in \Gamma[V_2] - U - W$ que es adyacente a cada vértice en $U \setminus \{u\}$ y a ninguno en W. Pero v también es adyacente a u, porque se encuentra en V_2. Entonces U, W y v satisfacen la *Propiedad de extensión* para Γ, contrario a la suposición.

Finalmente, suponga que $U = \emptyset$. Entonces $W \neq \emptyset$. Elija $w \in W$ y considere la partición $\{V_1, V_2\}$ de V donde V_1 consiste en w y todos sus vecinos fuera de W. Como antes, $\Gamma \not\simeq \Gamma[V_1]$ y, por lo tanto, $\Gamma \simeq G[V_2]$. Por lo tanto, U y $W \setminus \{w\}$ satisfacen la *Propiedad de extensión* en $\Gamma[V_2]$, con $v \in V_2 \setminus W$, y luego U, W, v satisfacen la *Propiedad de extensión* en Γ. $\square$

Referencias Bibliográficas

Blumberg, H. (1920). Hausdorff's grundzüge der mengenlehre. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(3):116–129.

Cameron, P. J. (2001). The random graph revisited. In *European Congress of Mathematics*, pages 267–274. Springer.

Cameron, P. J. (2013). The random graph. *The Mathematics of Paul Erdős II*, pages 353–378.

Huntington, E. V. (2013). *The Continuum and Other Types of Serial Order*. Harvard University Press.

Rado, R. (1964). Universal graphs and universal functions. *Acta Arithmetica*, 9(4):331–340.

Rosenstein, J. G. (1982). *Linear orderings*. Academic press.