

EL PROBLEMA DEL COEFICIENTE INVERSO PARA  
UNA ECUACIÓN INTEGRO-DIFERENCIAL

JUVITSA MILENA CAMPOS PALOMINO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2005

EL PROBLEMA DEL COEFICIENTE INVERSO PARA  
UNA ECUACIÓN INTEGRO-DIFERENCIAL

JUVITSA MILENA CAMPOS PALOMINO

Monografía presentada como  
requisito para optar al título  
de *Licenciada en Matemáticas*

Ph.D Henry Lamos Díaz

**Director**

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2005

**RESUMEN****TÍTULO: PROBLEMA DEL COEFICIENTE INVERSO PARA UNA ECUACIÓN INTEGRO-DIFERENCIAL\*****AUTOR: JUVITSA MILENA CAMPOS PALOMINO\*\*****PALABRAS CLAVES:** Sistemas de ecuaciones diferenciales parciales  
Problema directo  
Problema inverso  
Operador monótono  
Problema coeficiente inverso  
Ecuación integro-diferencial**DESCRIPCIÓN:**

La monografía consiste en la lectura de un artículo de los profesores A.M. Denisov y T.S. Shores. El artículo trata el problema del coeficiente inverso recuperando de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales una función  $\varphi(x)$ ; el sistema puede ser reducido a una ecuación integro-diferencial de segundo orden con condiciones de límite. Los resultados importantes de este artículo son los teoremas de existencia y unicidad de la solución para el problema inverso; se utiliza el método del operador monótono para probar estos resultados, por último se desarrolla un método numérico para resolver el problema inverso y se ilustra con ejemplos.

En el presente trabajo de manera clara y extensa se reconstruyen las diferentes demostraciones de los teoremas, lemas, corolarios y algoritmos para la resolución del problema inverso dados en el artículo que se estudia. Se hacen algunos experimentos numéricos con los que se puede observar los puntos que se discuten en el artículo. Además se tratan tópicos individuales que permiten la lectura del artículo de manera sencilla.

---

\* Monografía

\*\* Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas. Henry Lamos, Ph. D

---

## SUMMARY

**TITLE: AN INVERSE COEFFICIENT PROBLEM FOR AN INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION\***

**AUTHOR: JUVITSA MILENA CAMPOS PALOMINO\*\***

**KEYWORDS:** System of partial differential equation  
Direct problem  
Inverse problem  
Monotone operator  
Inverse coefficient problem  
Integro-differential equation

**DESCRIPTION:**

The monograph consists on the reading of article of the professors A. M. Denisov and T. S. Shores. The one articulates it tries the inverse coefficient problem of recovering the function  $\phi(x)$  system of partial differential equations; that can be reduced to a second order integro-differential equation with boundary conditions. The main results of this article are theorems of existence and uniqueness of solutions to the inverse problem. It is used the monotone operator method to prove existence of solutions to the inverse problem, lastly a numeric method is developed to solve the inverse problem and it is illustrated with examples.

Presently work in a clear and extensive way the different demonstrations are reconstructed of the theorems, lemma, corollary and algorithms for the resolution of the problem inverse dice in the article that is studied. Some numeric experiments are made with those that one can observe the points that are discussed in the article. They are also individual topics that allow the reading of the article in a simple way.

---

\* Monograph

\*\* Faculty of Sciences, School of Mathematics, Licentiate in Mathematics, Henry Lamos, Ph. D

---

# DEDICATORIA

*A mi familia: Saúl, Alcira y Fernando*

---

# AGRADECIMIENTOS

- A Dios por ser mi luz y mi fortaleza en los momentos difíciles.
- A mis padres, Saúl y Alcira, por el apoyo moral y económico que me brindaron.
- A mi hermano, Fernando, por ayudar en los momentos difíciles.
- Al profesor Henry Lamos Díaz, por su importante colaboración y dirección de este trabajo.
- A los compañeros de carrera, por los momentos de amistad compartidos.

---

# LISTA DE ANEXOS

|                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| Anexo A. Programas en MATLAB..... | 64 |
|-----------------------------------|----|

---

# LISTA DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 1.1. Función $y(x) = x^2$ ..... | 14 |
| Figura 4.1. Soluciones del P.I.....    | 50 |
| Figura 5.1. Simulación Numérica .....  | 62 |
| Figura 5.2. Malla para $Q_T$ .....     | 56 |

---

# ÍNDICE GENERAL

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. PRELIMINARES</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1. Función de Green . . . . .  | 4         |
| 1.2. Operadores Lineales . . . . .   | 8         |
| 1.3. Ecuaciones Integrales de Volterra . . . . .   | 11        |
| 1.4. Solución de una Ecuación Integro de Tipo Volterra mediante la Serie de<br>Neumann . . . . . | 11        |
| 1.5. Modulo de Continuidad . . . . .   | 13        |
| <b>2. UNA ECUACIÓN INTEGRO-DIFERENCIAL</b>   | <b>16</b> |
| 2.1. Problema de Valor en la Frontera . . . . .  | 16        |
| 2.2. Problema integrodiferencial de valor en la frontera . . . . .                               | 23        |
| <b>3. EL PROBLEMA DIRECTO</b>  | <b>29</b> |
| <b>4. EL PROBLEMA INVERSO</b>  | <b>37</b> |
| 4.1. Formulación de un operador . . . . .  | 37        |
| 4.2. Propiedades del Operador A . . . . .  | 39        |
| 4.3. Propiedades de la Solución del Problema Inverso . . . . .                                   | 47        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>5. EJEMPLOS NUMÉRICOS</b>   | <b>55</b> |
| 5.1. Esquema Numérico para el Problema Integro-Diferencial de Valor en la Frontera (PVF) . . . . . | 55        |
| 5.2. Un Algoritmo para el Calculo de un Operador . . . . .   | 60        |

---

# INTRODUCCIÓN

John L. Synge “ La aplicación de las matemáticas a un problema real involucra tres etapas. La primera es una inmersión del mundo real en el mundo de las matemáticas, la segunda etapa es un nado en el mundo de las matemáticas y la tercera es un regreso del mundo de las matemáticas al mundo real, pero, y esto es muy importante, con una predicción.”

Cuando un investigador trata con problemas del mundo real las dificultades a que se debe enfrentar son muy variadas y complejas debido a la(s): 1. Muchas metas “difusas” y conflictivas. 2. Falta de especificidad en cuanto a cuales son las variables de decisión, cuales son los parámetros que caracterizan el sistema (la realidad). 3. La incertidumbre en cuanto a los límites o restricciones de las variables de decisión y sus funciones. 4. Falta de conocimiento de las relaciones de causa y efecto. 5. Elementos estocásticos o aleatorios. 6. El carácter dinámico subyacente que produce que las metas, restricciones y relaciones de causa y efecto varíen en el tiempo. 7. Falta de información acerca de los datos necesarios para especificar el problema. 8. Descripción cualitativa de algunos de los datos. 9. posibilidad de consecuencias imprevistas resultantes de la alteración de las condiciones existentes o la imposición de otras nuevas.

La modelación matemática permite al investigador simplificar y abstraer los sistemas reales con el propósito de tener más información acerca del mundo real. La construcción de un modelo matemático consiste en describir de forma matemática los factores

esenciales del proceso y sus interrelaciones.

El análisis de un proceso físico dado a través de un modelo matemático se considera desde tres perspectivas. 1. Como un problema directo. Dadas las entradas y el sistema de parámetros encontrar la(s) respuesta(s) del modelo (causa-efecto). 2. Como un problema de reconstrucción. Dado el sistema de parámetros y la respuesta, encontrar el tipo de entrada que tuvo que haber sido dada para haber obtenido la correspondiente respuesta. 3. Problema de identificación. Dada las entradas y las salidas, determinar el sistema de parámetros que sean compatibles con la relación existente entre las entradas y las salidas.

El problema directo que estudiamos es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de la forma:

$$c_1(x)u_x + a_t = D_1u_{xx} \quad (1)$$

$$a_t = \gamma(\phi(x)u - a) \quad (2)$$

para  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq t \leq T$ , con condiciones iniciales y de frontera

$$u(0, t) = \mu(t); \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

$$u(L, t) + \beta u_x(L, t) = 0; \quad 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

$$a(x, 0) = 0; \quad 0 \leq x \leq L \quad (5)$$

Es posible considerar el anterior problema directo como un modelo matemático unidimensional de absorción dinámica [ver Orellana]. Aquí  $\phi(x)$  describe una propiedad de variación espacial del medio absorbente. El problema inverso (P.I) que consideramos es el siguiente: Dado  $u(x, t)$  una solución al problema directo dado anteriormente y la condición suplementaria:

$$g(x) = u(x, T); \quad 0 \leq x \leq L \quad (6)$$

determinar la función coeficiente  $\phi(x)$ ,  $x \in [0, L]$  dado en el problema directo.

En el primer Capítulo del presente trabajo trata sobre el estudio de algunos conceptos importantes para nuestro análisis en los Capítulos siguientes.

En el Capítulo 2 se presenta el estudio de una ecuación integrodiferencial; por lo tanto las propiedades de la solución de inmediato se transmitían a la solución del problema directo (1)-(5).

En el tercer Capítulo se estudia el problema directo (P.D) y demostramos algunas propiedades de la solución del (P.D).

En el Capítulo 4 analizamos el problema inverso (P.I) y formulamos un operador  $A$  para hallar la solución del (P.I); probamos algunas propiedades del operador  $A$  y algunas propiedades de la solución del (P.I).

Por último en el Capítulo 5 desarrollamos esquemas numéricos para resolver un problema de valor en la frontera; además un esquema numérico para hallar el operador  $A$ ; y para concluir realizamos una simulación numérica

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## PRELIMINARES

En este capítulo veremos algunos conceptos que serán necesarios para nuestro trabajo. Comenzaremos estudiando la solución para un problema no homogéneo con valores en la frontera, que se puede expresar de una forma particular.

---

### 1.1. Función de Green

---

Veamos el siguiente problema

$$L[y](x) = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) = -f(x); \quad a \leq x \leq b \quad (1.1)$$

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \quad (1.2)$$

$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \quad (1.3)$$

donde  $p(x), q(x) \in C[a, b]$  con  $p(x) > 0$  en  $[a, b]$ . Supondremos que  $f(x) \in C[a, b]$ , aunque esta condición no es necesaria; además que el problema homogéneo  $f(x) = 0$  tiene una solución trivial o sea:  $\lambda = 0$  no es un valor propio. Mostraremos que para el parámetro no-homogéneo con valores en la frontera (1.1)-(1.3)

se puede dar una solución de la forma:

$$y(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds$$

donde  $G(x, s)$  es llamada la función núcleo, o función de Green. Usaremos variación de parámetro para hallar la solución de (1.1)-(1.3); comencemos eligiendo dos soluciones no triviales de  $L[y] = 0$ ; sean  $z_1, z_2$  donde  $z_1$  satisface la condición (1.2) y  $z_2$  satisface la condición (1.3).

Reformulemos la ecuación (1.1) así:

$$-f(x) = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y \quad (1.4)$$

Dividiendo (1.4) por  $p(x)$  nos queda:

$$y'' + \frac{p'(x)}{p(x)}y' + \frac{q(x)}{p(x)}y = \frac{-f(x)}{p(x)} \quad (1.5)$$

Por lo tanto la solución particular de (1.5) está dada por: [ver Zill]

$$y(x) = c_1(x)z_1(x) + c_2(x)z_2(x) \quad (1.6)$$

Utilizando variación de parámetros obtenemos:

$$c_1'(x) = \frac{f(x)}{p(x)} \frac{z_2(x)}{W[z_1; z_2]} \quad (1.7)$$

$$c_2'(x) = \frac{f(x)}{p(x)} \frac{z_1(x)}{W[z_1; z_2]} \quad (1.8)$$

donde  $W[z_1; z_2]$  es el wronskiano de  $z_1, z_2$ .

Integremos  $c_1'(x)$  de  $x$  a  $b$ , e integremos  $c_2'(x)$  de  $a$  hasta  $x$ ; para no confundir los términos de la integración con los límites de las integrales; hagamos un cambio de variable, hagamos  $x = s$

$$c_1(x) = \int_x^b \frac{f(s)z_2(s)}{p(s)W[z_1; z_2]} ds \quad (1.9)$$

$$c_2(x) = \int_a^x \frac{-f(s)z_2(s)}{p(s)W[z_1; z_2]} ds \quad (1.10)$$

Sustituyendo (1.9) y (1.10) en (1.6)

$$y(x) = \left[ \int_x^b \frac{-z_2(s)f(s)}{p(s)W[z_1; z_2]} ds \right] z_1(x) + \left[ \int_a^x \frac{-z_1(s)f(s)}{p(s)W[z_1; z_2]} ds \right] z_2(x). \quad (1.11)$$

Definamos en (1.11) la función núcleo:

$$G(x, s) \equiv \begin{cases} \frac{-z_1(s)z_2(x)}{p(s)W[z_1; z_2](s)}; & a \leq s \leq x \\ \frac{-z_1(x)z_2(s)}{p(s)W[z_1; z_2](s)}; & x \leq s \leq b \end{cases} \quad (1.12)$$

Utilizando (1.12) en (1.11) nos queda:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_x^b G(x, s)f(s)ds + \int_a^x G(x, s)f(s)ds \\ y(x) &= \int_a^b G(x, s)f(s)ds \end{aligned} \quad (1.13)$$

Para simplificar la función de Green calculemos:

$$p(s)W[z_1; z_2](s) = p(s)[z_1(s)z_2'(s) - z_1'(s)z_2(s)] \quad (1.14)$$

Una representación del wronskiano de dos soluciones  $z_1, z_2$  para la ecuación  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  en  $[a, b]$  es la identidad de Abel [ver Nagle]:

$$W[z_1; z_2](s) = c e^{-\int_{s_0}^s p(t)dt}. \quad (1.15)$$

Reemplazando (1.15) en (1.14) tenemos

$$p(x)W[z_1; z_2] = c \quad \text{en } x \in [a, b]. \quad (1.16)$$

Si utilizamos (1.16) en (1.12):

$$G(x, s) \equiv \begin{cases} \frac{-z_1(s)z_2(x)}{c}; & a \leq s \leq x \\ \frac{-z_1(x)z_2(s)}{c}; & x \leq s \leq b \end{cases} \quad (1.17)$$

La función (1.17) es la función de Green para el problema (1.1)-(1.3)

**Teorema 1.1.** Sea  $G(x, s)$  la función de Green para el problema (1.1)-(1.3) entonces la función

$$y(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds$$

es solución del problema (1.1)-(1.3); para cualquier función  $f(x) \in [a, b]$ .

*Demostración.*

Nosotros utilizamos el método de variación de parámetros para deducir  $y(x)$  de modo que sabemos que satisface (1.1). Por lo tanto basta mostrar que  $y(x)$  satisface (1.2)-(1.3) Veamos esto; empecemos derivando  $y(x)$ .

$$\begin{aligned} y'(x) &= z_1'(x) \int_x^b \frac{-z_2(s)f(s)}{c} ds + \frac{z_1(s)z_2(x)f(x)}{c} + z_2'(x) \int_a^x \frac{-z_1(s)f(s)}{c} ds \\ &\quad - \frac{z_2(s)z_1(x)f(x)}{c} \\ &= z_1'(x) \int_x^b \frac{-z_2(s)f(s)}{c} ds + z_2'(x) \int_a^x \frac{-z_1(s)f(s)}{c} ds \end{aligned} \quad (1.18)$$

En (1.2) tenemos:

$$\begin{aligned} a_1y(a) + a_2y'(a) &= a_1 \left[ z_1(a) \int_a^b \frac{-z_2(s)f(s)}{c} ds + z_2(a) \int_a^a \frac{-z_1(s)f(s)}{c} ds \right] \\ &\quad + a_2 \left[ z_1'(a) \int_a^b \frac{-z_2(s)f(s)}{c} ds + z_2'(a) \int_a^a \frac{-z_1(s)f(s)}{c} ds \right] \\ &= a_1z_1(a) \int_a^b \frac{-z_2(s)f(s)}{c} ds + a_2z_1'(a) \int_a^b \frac{-z_2(s)f(s)}{c} ds \\ &= [a_1z_1(a) + a_2z_1'(a)] \left[ \int_a^b \frac{-z_2(s)f(s)}{c} ds \right] \end{aligned} \quad (1.19)$$

Como  $z_1$  satisface (1.2) entonces (1.19) nos queda:

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = [a_1z_1(a) + a_2z_1'(a)] \left[ \int_a^b \frac{-z_2(s)f(s)}{c} ds \right] = 0$$

Análogamente se demuestra que  $y(x)$  satisface la ecuación (1.3); con esto queda verificado el teorema. ■

**Ejemplo 1.1.** Determinar la función de Green para el siguiente problema con valores en la frontera:

$$y''(x) = x; \quad y(0) = 0; \quad y(\pi) = 0$$

Una solución del problema homogéneo  $y'' = 0$  es  $y_h = Ax + B$  de modo que  $z_1, z_2$  deben tener esta forma.

★ Para obtener  $z_1(x)$  elegimos  $A$  y  $B$  de tal forma que  $z_1(0) = 0$  entonces  $z_1(x) = Ax$ ; como  $A$  es arbitrario hacemos  $A = 1$ , luego  $z_1(x) = x$ .

★ Para obtener  $z_2(x)$  elegimos  $A$  y  $B$  de tal forma que  $z_2(\pi) = 0$  entonces  $z_2(\pi) = A\pi + B$  luego  $A\pi = -B$ , hacemos  $A = -1$  por lo tanto  $\pi = B$ ; concluimos que  $z_2(x) = \pi - x$ . Entonces  $z_1(x) = x$ ;  $z_2(x) = \pi - x$ ;  $p(x) = 1$ :

$$W[z_1; z_2] = -1(x) - (\pi - x) \cdot 1 = -x - \pi + x = -\pi$$

por lo tanto  $p(x)W[z_1, z_2](x) = -\pi$ . concluimos que la función de Green para nuestro problema es:

$$G(x, s) \equiv \begin{cases} \frac{s(\pi-x)}{\pi}; & 0 \leq s \leq x \\ \frac{x(\pi-s)}{\pi}; & x \leq s \leq \pi \end{cases}$$

Tenemos entonces que la solución es:

$$y(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds = \int_0^x \frac{s(\pi-x)}{\pi} \cdot s ds + \int_\pi^x \frac{\pi(\pi-s)}{\pi} \cdot s ds$$

$$y(x) = \frac{x(\pi^2 - x^2)}{6}$$

En la siguiente sección trataremos conceptos que nos ayudarán en nuestro estudio del problema integro-diferencial de valor en la frontera en el Capítulo 2; además serán importantes para la formulación del operador en el Capítulo 4.

---

## 1.2. Operadores Lineales

---

**Definición 1.1.** Sean  $E$  y  $E_1$  dos espacios normados; se llama operador lineal que actúa de  $E$  en  $E_1$  a toda aplicación de la forma

$$y = Ax \quad (x \in E, y \in E_1) \tag{1.20}$$

que verifica la condición:

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = A\alpha x_1 + A\beta x_2.$$

**Definición 1.2.** (*Continuidad de los Operadores*) Sean  $E$  y  $E_1$  espacios normados; se dice que  $A$  es un operador continuo;  $A : E \rightarrow E_1$ ; cuando para todo  $x_0 \in E$  se tiene: para cualquier  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que la desigualdad

$$\|x - x_0\| < \delta \quad (x \in E)$$

implica

$$\|Ax - Ax_0\| < \epsilon.$$

Un operador de interés es:

Consideremos en el espacio de funciones continuas sobre  $[a, b]$  el operador dado por:

$$A\varphi(t) = \int_a^b K(s, t)\varphi(s)ds = y(t) \quad (1.21)$$

donde  $K(s, t)$  es una función fija continua de dos variables definida en  $[a, b] \times [a, b] = Q_T$ . La función  $A\varphi(t)$  es continua para cualquiera que sea la función continua  $\varphi(s)$  ya que la función  $K(t, s)$  es uniformemente continua en  $Q_T$ , de manera que el operador (1.21) transforma el espacio de funciones continuas en si mismo.

\* Probemos su linealidad:

Sean  $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in C[a, b]$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  entonces:

$$\begin{aligned} A[\alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)] &= \int_a^b K(s, t)[\alpha\varphi_1(s) + \beta\varphi_2(s)]ds \\ &= \int_a^b K(s, t)\alpha\varphi_1(s)ds + \int_a^b K(s, t)\beta\varphi_2(s)ds \\ &= \alpha \int_a^b K(s, t)\varphi_1(s)ds + \beta \int_a^b K(s, t)\varphi_2(s)ds \\ &= \alpha A\varphi_1(t) + \beta A\varphi_2(t) \end{aligned}$$

luego el operador  $A$  es lineal.

\* Probemos la continuidad en la norma uniforme del operador  $A$  :

La continuidad del operador  $A$  se desprende del hecho que en el espacio  $C[a, b]$  la convergencia es convergencia uniforme; así que podemos tomar el límite dentro del

signo de la integral. Por consiguiente, si  $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi_0(t)$  entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} A\varphi_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b K(t, s)\varphi_n(s)ds = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} K(t, s)\varphi_n(s)ds \\ &= \int_a^b K(t, s)\varphi_0(s)ds = A\varphi_0\end{aligned}$$

**Definición 1.3.** (*Operadores Lineales Acotados*) Un operador lineal que actúa de  $E$  en  $E_1$  se llama acotado, cuando está definido sobre todo  $E$  y transforma cada conjunto acotado en un conjunto también acotado

**Definición 1.4.** (*Conjuntos Equiacotados*) Una familia  $\Phi$  de funciones  $\varphi$  definida sobre  $[a, b]$  se llama equiacotada cuando existe un número  $K$  tal que

$$|\varphi(x)| < K$$

para todo  $x \in [a, b]$  y para toda  $\varphi \in \Phi$

**Definición 1.5.** (*Conjuntos Equicontinuos*) Una familia  $\Phi = \{\varphi\}$  se llama equicontinua, cuando para cada  $\epsilon$  hay un  $\delta > 0$  tal que

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \epsilon$$

para todas las funciones  $\varphi \in \Phi$  y para todo  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tal que la distancia  $\rho(x_1, x_2) < \delta$

**Definición 1.6.** (*Operadores Totalmente Continuos*) Un operador  $A$  que aplica el espacio de Banach  $E$  en sí mismo se llama totalmente continuo, cuando transforma un conjunto acotado en uno relativamente compacto.

**Definición 1.7.** (*Operadores Monótonos*) Un operador  $A$  que aplica de un espacio de Banach  $E$  en otro espacio de Banach  $E'$ ; se dice monótono si  $\varphi_1, \varphi_2 \in E$  y  $\varphi_1 < \varphi_2$  entonces  $A\varphi_1 < A\varphi_2$ .

El siguiente teorema se usará para demostrar algunas propiedades del operador  $A$  en el Capítulo 4.

**Teorema 1.2.** (Arzela) Para que una familia  $\Phi$  de funciones continuas, definidas en el segmento  $[a, b]$ , sea relativamente compacta en  $C[a, b]$ , es necesario y suficiente que esta familia sea equiacotada y equicontinua.

*Demostración.* (ver Kolmogorov) ■

### 1.3. Ecuaciones Integrales de Volterra

**Definición 1.8.** La ecuación:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.22)$$

donde  $f(x), K(x, t)$  son funciones conocidas,  $\varphi(x)$  es una función incognita y  $\lambda$  un parámetro numérico, se llama ecuación integral lineal de Volterra de segunda especie. La función  $K(x, t)$  se denomina kernel de la ecuación de Volterra.

**Ejemplo 1.2.** La que la función  $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$  es solución de la ecuación integral de Volterra.

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2} \varphi(t)dt \quad (1.23)$$

para verificar esto sustituimos en (1.23) la función  $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \left( \frac{t}{1+x^2} \right) \cdot \left( \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} \right) dt &= \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) \cdot \left( \frac{1}{(1+t^2)^{1/2}} \right) \Big|_{t=0}^{t=x} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = \varphi(x) \end{aligned}$$

De este modo la sustitución de  $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$  en ambos miembros de la ecuación (1.23) transforma a esta en una identidad respecto a  $x$ .

### 1.4. Solución de una Ecuación Integro de Tipo Volterra mediante la Serie de Neumann

Supongamos que se tiene una ecuación integral de Volterra de segunda especie

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.24)$$

donde  $K(x, t)$  es una función continua  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq t \leq x$  y  $f(x)$  es continua para  $0 \leq x \leq a$ . Busquemos la solución de la ecuación integral (1.24) en forma de serie infinita de potencias de  $\lambda$  :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \dots + \lambda^n\varphi_n(x) + \dots \quad (1.25)$$

La serie infinita de (1.25) es llamada serie de Neumann; sustituyendo la serie (1.25) en (1.24) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \dots + \lambda^n\varphi_n(x) + \dots \\ & = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)[\varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t) + \dots]dt \end{aligned} \quad (1.26)$$

Comparando los coeficientes de iguales potencias de  $\lambda$  en (1.26) hallamos:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f(x) \\ \varphi_1(x) &= \int_0^x K(x, t)\varphi_0(t)dt = \int_0^x K(x, t)f(t)dt \\ \varphi_2(x) &= \int_0^x K(x, t)\varphi_1(t)dt = \int_0^x K(x, t) \int_0^t K(t, t_1)f(t_1) dt_1 dt \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.27)$$

Las relaciones (1.27) permite determinar sucesivamente las funciones  $\varphi_n(x)$ .

Se puede asociar las relaciones (1.27) con un operador integral:

$$Pf = \int_0^x K(x, t)f(t)dt \quad (1.28)$$

Entonces (1.26) nos queda

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= f(x) \\ \varphi_1 &= \int_0^x K(x, t)f(t)dt = Pf \\ \varphi_2 &= \int_0^x K(x, t) \int_0^t K(t, t_1)f(t_1) dt_1 dt = P^2f \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución  $\varphi(x)$  se puede escribir:

$$\varphi = f + Pf + P^2f + \dots \quad (1.29)$$

La ecuación (1.29) es la misma serie de Neumann dada anteriormente en (1.25).

Se puede demostrar [ver Krasnov], que bajo las hipótesis hechas  $f(x)$  y  $K(x, t)$ , la serie (1.29) obtenida de este modo converge uniformemente respecto a  $x$  y  $\lambda$  para cualquier  $x$  y  $\lambda \in [0, a]$  y su suma es la solución única de la ecuación (1.24)

---

## 1.5. Módulo de Continuidad

---

Sea  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se llama módulo de continuidad  $w_f(\delta)$  de la función  $f$  a:

$$w_f(\delta) = \sup_{\rho(x', x'') < \delta} [f(x') - f(x'')]; \quad x', x'' \in E$$

donde  $\rho(x', x'')$  es la distancia entre  $x'$  y  $x''$ .

Es fácil darse cuenta que si

$$\sup_{\rho(x', x'') < \delta} [f(x') - f(x'')] = \sup_{\rho(x', x'') < \delta} |f(x'') - f(x')|$$

entonces:

(1)  $w_f(\delta) \geq 0$

(2) si  $0 < \delta_1 < \delta_2 \Rightarrow w_f(\delta_1) \leq w_f(\delta_2)$ .

**Ejemplo 1.3.** *Hallemos el módulo de continuidad para  $y = x^2$ ;  $-\infty < x < +\infty$*

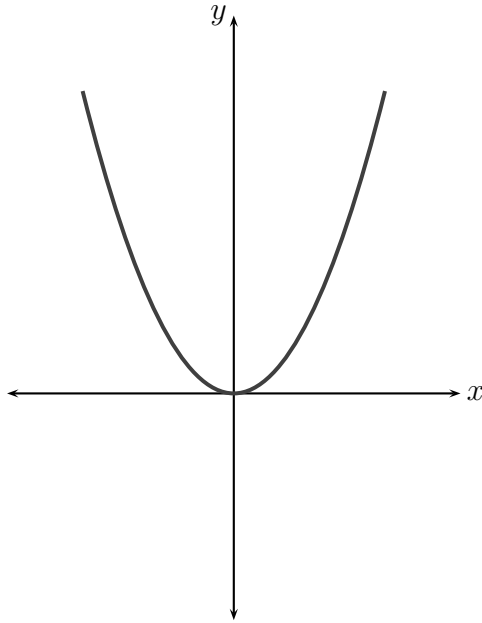


figura 1.1

$\forall \delta > 0$  y para cualquier  $x_0$  fijo tenemos:

$$w_y(\delta) = \sup_{\rho(x', x'') < \delta} ((x'')^2 - (x')^2) \geq x_0^2 - (x_0 - \delta)^2 = 2x_0\delta - \delta^2$$

*definición de sup*

(1.30)

esta desigualdad es verdadera para todo  $x_0$  y como para cualquier  $\delta$  tenemos:

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} (2x_0\delta - \delta^2) = +\infty,$$

entonces de (1.30) tenemos

$$w_y(\delta) = +\infty; \quad -\infty < x < +\infty.$$

La definición de módulo de continuidad se utilizará en el Capítulo 4.

**Ejemplo 1.4.** Hallemos el módulo de continuidad para  $y = x^2$ ;  $0 \leq x \leq 1$ .

$$w_y(\delta) = \sup_{\rho(x', x'') < \delta} |(x'')^2 - (x')^2| = 1 - (1 - \delta)^2 = 1^2 - 1^2 + 2\delta + \delta^2 = 2\delta + \delta^2$$

*Analíticamente esto se comprueba:*

$$0 \leq x'' - \delta \leq x' \leq x'' \leq 1$$

$$(x'')^2 - (x')^2 \leq (x'')^2 - (x'' - \delta)^2 = 2x''\delta - \delta^2 \leq 2\delta - \delta^2$$

*Obtenemos*

$$w_y(\delta) = \sup_{\rho(x', x'') < \delta} |(x'')^2 - (x')^2| \leq 2\delta - \delta^2$$

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## UNA ECUACIÓN INTEGRO-DIFERENCIAL

---

### 2.1. Problema de Valor en la Frontera

---

En primer lugar consideremos un problema de valor en la frontera:

$$L[v] = -v'' + p(x) + q(x)v = H(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.1)$$

$$v(0) = 0 \quad (2.2)$$

$$v(L) + \beta v_x(L) = 0 \quad (2.3)$$

Asumiremos que  $\beta$  y  $q(x)$  son positivos; y las funciones  $p(x), q(x), H(x)$  en  $[0, L]$ . Resolvamos (2.1)-(2.3) para esto multipliquemos (2.1) por el factor integrante  $e^{-\int_0^x p(\xi)d\xi}$  [?]

$$-e^{-\int_0^x p(\xi)d\xi} v'' + e^{-\int_0^x p(\xi)d\xi} p(x)v' + e^{-\int_0^x p(\xi)d\xi} q(x)v = e^{-\int_0^x p(\xi)d\xi} H(x) \quad (2.4)$$

observemos que:

$$-(e^{-\int_0^x p(\xi)d\xi} v')' = -e^{-\int_0^x p(\xi)d\xi} v'' + e^{-\int_0^x p(\xi)d\xi} p(x)v' \quad (2.5)$$

Reemplazando (2.5) en (2.4):

$$-(e^{-\int_0^x p(\xi)d\xi}v')' + e^{-\int_0^x p(\xi)d\xi}q(x)v(x) = e^{-\int_0^x p(\xi)d\xi}H(x) \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) se dice que está escrita en forma autoadjunta.<sup>1</sup>

Anotamos que las ecuaciones (2.1) y (2.6) cuando  $H(x) = 0$ , el caso homogéneo; son equivalentes; encontremos ahora la función de Green para  $L[v] = 0$ .

Sea  $L[y] = 0$  tales que  $y(0) = 0, \wedge, y'(0) = 1$  y  $L[z] = 0$  con condiciones

$z(L) = \beta, \wedge, z'(L) = -1$ ; Según [Zill] la solución particular de (2.6) se puede dar como:

$$v(x) = C_1y(x) + C_2z(x)$$

aplicando variación de parámetros, tenemos

$$C_1 = \int_x^L \frac{-z(s)(-e^{-\int_0^s p(\xi)d\xi})H(s)ds}{(-e^{-\int_0^s p(\xi)d\xi})W[y(s), z(s)]} = \int_x^L \frac{-z(s)H(s)}{W[y, z](s)}ds$$

$$C_2 = \int_0^L \frac{-y(s)(-e^{-\int_0^s p(\xi)d\xi})H(s)ds}{(-e^{-\int_0^s p(\xi)d\xi})W[y(s), z(s)]} = \int_0^x \frac{-y(s)H(s)}{W[y, z](s)}ds$$

Donde  $W[y, z](s)$  es el wronskiano de las funciones  $y(s)$  y  $z(s)$ ; sustituimos  $C_1$  y  $C_2$  en la solución particular

$$v(x) = \int_x^L \frac{-z(s)H(s)}{W[y, z](s)}ds \cdot y(x) + \int_0^x \frac{-y(s)H(s)}{W[y, z](s)}ds \cdot z(s)$$

$$v(x) = \int_x^L \frac{-z(s)(-e^{-\int_0^s p(\xi)d\xi})H(s)}{(-e^{-\int_0^s p(\xi)d\xi})W[y, z](s)}ds \cdot y(x) + \int_0^x \frac{-y(s)(-e^{-\int_0^s p(\xi)d\xi})H(s)}{(-e^{-\int_0^s p(\xi)d\xi})W[y, z](s)}ds \cdot z(x)$$

Introducimos la función de Green para la ecuación  $L[v] = 0$ ; como:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{-y(\xi)z(x)}{C}; & x \geq \xi \\ \frac{-y(x)z(\xi)}{C}; & x \leq \xi \end{cases}$$

<sup>1</sup>esto es  $-(p(x)v')' + p(x)q(x)v(x) = p(x)f(x)$  donde  $p(x) = e^{-\int_0^x p(\xi)d\xi}$

donde  $C = e^{-\int_0^x p(\xi)d\xi} W[y, z](x) \equiv -z(0)$ . Entonces:

$$v(x) = \int_x^L G(x, \xi) e^{-\int_0^\xi p(\xi)ds} H(\xi) d\xi + \int_0^x G(x, s) e^{-\int_0^s p(s)ds} h(\xi) d\xi$$

Luego podemos reescribir  $v(x)$  como:

$$v(x) = \int_0^L G(x, \xi) e^{-\int_0^x p(\xi)d\xi} H(\xi) d\xi \quad (2.7)$$

Ahora hagamos  $K(x, \xi) = G(x, \xi) e^{-\int_0^x p(\xi)d\xi}$ ; entonces (2.7) nos queda:

$$v(x) = \int_0^L K(x, \xi) H(\xi) d\xi \quad (2.8)$$

Veamos algunas características de las funciones  $y(x)$  y  $z(x)$ :

(1) La función  $y(x)$  como solución del problema  $L[y] = 0$  con  $y(0) = 0$  y  $y'(0) = 1$  no tiene máximo local positivo en el intervalo  $[0, L]$ .

Supongamos que en  $x_0 \in [0, L]$  hay un máximo positivo para  $y(x)$ , por lo tanto

$$-y''(x_0) + p(x_0)y'(x_0) + q(x_0)y(x_0) = 0$$

por ser  $x_0$  un máximo tenemos  $y'(x_0) = 0$ , entonces:

$$\begin{aligned} -y''(x_0) + q(x_0)y(x_0) &= 0 \\ y''(x_0) &= q(x_0)y(x_0) \end{aligned}$$

Sabemos por definición que  $q(x_0)$  y  $y(x_0)$  es positivo entonces  $y''(x_0) > 0$  luego  $y(x_0)$  es un mínimo relativo con lo que llegamos a una contradicción. Luego la función  $y(x)$  es positiva y creciente en el intervalo  $(0, L]$ ;

(2) Para la función  $z(x)$  escogida como solución del problema  $L[z] = 0$  con  $z(L) = \beta$  y  $z'(L) = -1$ ; podemos probar que no existe un mínimo local negativo en el intervalo  $[0, L]$

Supongamos que en  $x_0 \in [0, L]$  hay un mínimo local negativo, por lo tanto:

$$-z''(x_0) + p(x_0)z'(x_0) + q(x_0)z(x_0) = 0$$

por ser  $x_0$  un mínimo entonces  $z'(x_0) = 0$ , luego

$$\begin{aligned} -z''(x_0) + q(x_0)z(x_0) &= 0 \\ z''(x_0) &= [q(x_0)z(x_0)] \end{aligned}$$

Por definición tenemos que  $q(x_0)$  es positivo y  $z(x_0)$  es negativo entonces  $q(x_0)z(x_0) < 0$  luego  $z''(x_0) < 0$  y esto es una contradicción porque  $z(x_0)$  es un mínimo.

Por lo tanto la función  $z(x)$  es decreciente y positiva en el intervalo  $[0, L]$ .

Por consiguiente podemos afirmar que la función de Green  $G(x, \xi)$  para (2.4) es no-negativa sobre su dominio  $[0, L] \times [0, L]$ , igualmente la función  $K(x, \xi) = G(x, \xi)e^{-\int_0^x p(\xi)d\xi}$  es una función no-negativa y a esta función se le denomina Kernel.

Introduzcamos la función  $k(x) = z(x)/z(0)$  observemos que  $k(x)$  es una solución positiva decreciente; por ser  $z(x)$  una solución de (2.1); veamos que esto es así; como  $L[z(x)] = 0$  reemplazando  $k(x)$  en (2.1) tenemos:

$$L[k] = L\left[\frac{z}{z(0)}\right] = \frac{1}{z(0)}L[z] = 0.$$

Además  $k(x)$  satisface las condiciones de frontera  $k(0) = 1$  y  $k(L) + \beta k'(L) = 0$ .

- Condición de frontera derecha :

$$k(L) + \beta k'(L) = \frac{z(L)}{z(0)} + \beta \frac{z'(L)}{z(0)} = \frac{1}{z(0)} \underbrace{[z(L) + \beta z'(L)]}_{\text{condición (2.3)}} = 0$$

- Condición de frontera izquierda:

$$k(0) = \frac{z(0)}{z(0)} = 1$$

La función  $k(x)$  juega un papel importante para nuestro análisis del problema directo. Por ahora señalaremos que con su ayuda se simplifica la descripción de la función de Green para el problema no-autoadjunto.

Sabemos que

$$K(x, \xi) = G(x, \xi)e^{-\int_0^\xi p(s)ds}$$

reemplazando  $G(x, \xi)$  en la ecuación anterior obtenemos:

$$K(x, \xi) = \begin{cases} (e^{-\int_0^x p(s)ds} \cdot (\frac{-y(\xi)z(x)}{c})); & \text{si } x > \xi \\ (e^{-\int_0^x p(s)ds} \cdot (\frac{-y(x)z(\xi)}{c})); & \text{si } x < \xi \end{cases}$$

Ahora reemplazamos  $c = -z(0)$  y obtenemos:

$$k(x, \xi) = \begin{cases} (e^{-\int_0^x p(s)ds} \cdot (\frac{y(\xi)z(x)}{z(0)})); & \text{si } x \geq \xi \\ (e^{-\int_0^x p(s)ds} \cdot (\frac{y(x)z(\xi)}{z(0)})); & \text{si } x < \xi \end{cases}$$

Sustituyendo  $k(x) = \frac{Z(x)}{Z(0)}$  concluimos:

$$K(x, \xi) = \begin{cases} (e^{-\int_0^x p(s)ds} \cdot (-y(\xi)k(x)) & \text{si } x \geq \xi \\ (e^{-\int_0^x p(s)ds} \cdot (-y(x)k(\xi)) & \text{si } x < \xi \end{cases} \quad (2.9)$$

Para dar énfasis a la dependencia de un parámetro como  $q(x)$  nosotros escribiremos así:  $k(x) = k(x; q)$ ,  $y(x) = y(x; q)$  y  $z(x) = z(x; q)$ , observemos el punto  $y$  como después de la variable  $x$ .

En el siguiente lema será utilizado en el análisis de nuestro problema inverso.

**Lema 2.1.** *Si  $0 < q(x) \leq C_0$  siendo  $C_0$  una constante y  $x \in [0, L]$ , luego la familia de funciones  $\{K_x(x, \xi; q), k'(x, q)\}$  son uniformemente acotadas por una constante  $\hat{C}_0$  independientemente de  $q(x)$*

*Demostración.*

De (2.9) tenemos

$$K(x, \xi) = \begin{cases} e^{-\int_0^x p(s)ds} y(\xi)k(x); & x \geq \xi \\ e^{-\int_0^x p(s)ds} y(x)k(\xi); & x < \xi \end{cases}$$

De aquí podemos ver que es suficiente demostrar que  $y'(x)$  y  $k'(x)$  son uniformemente acotadas en el intervalo  $[0, L]$ . Ambas funciones son la segunda coordenada de la solución del problema de valor inicial:

$$V' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q(x) & p(x) \end{bmatrix} V = AV \quad (2.10)$$

$$V(a) = V_0 \quad (2.11)$$

Sea  $V = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$  entonces

$$V' = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q(x) & p(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ q(x)y + p(x)y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} y' = y' \\ y'' = q(x)y + p(x)y' \end{matrix}$$

Lo mismo si hacemos  $V = \begin{bmatrix} k \\ k' \end{bmatrix}$  entonces:

$$V' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q(x) & p(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ k' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k' \\ q(x)k + p(x)k' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} k' = k' \\ k'' = kq(x) + k'p(x) \end{matrix}$$

Con lo que demostramos que  $y'(x)$  y  $k'(x)$  son las segundas coordenadas del problema de valor inicial (2.10) y (2.11).

En el caso de  $y(x; q)$ , el valor de  $a$  es igual a cero y la condición  $V_0 = (0, 1)^T$ , en el caso de  $k(x; q)$  y  $a = L$ , la condición  $V(L) = (\beta/z(0), -1/z(0))^T$ , en el ultimo caso anotamos que  $z(x; q)$  es decreciente; ahora:

$$z(0; q) \geq \beta \quad \text{y} \quad \|v_0\| \leq 1 + \frac{1}{\beta}$$

Veamos que esto es así:

$$\|V_0\|^2 = \frac{\beta^2}{Z^2(0)} + \frac{1}{Z^2(0)} + \frac{\beta^2 + 1}{Z^2(0)} \leq \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2} = 1 + \frac{1}{\beta^2} \leq 1 + \frac{1}{\beta} \leq \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2$$

entonces  $\|V_0\| \leq 1 + \frac{1}{\beta}$

Para el primer caso  $\|V_0\|^2 = 1^2 = 1 \leq 1 + \frac{1}{\beta}$ , independiente de  $q$ .

Establezcamos una cota para la función  $y(x; q)$  integrando la ecuación (2.10) desde 0

hasta  $x$  y luego tomando la norma tenemos:

$$\begin{aligned}
 V' &= AV \\
 \int_0^x V' ds &= \int_0^x A(s)V(s)ds \\
 -V(0) + V(x) &= \int_0^x A(s)V(s)ds \\
 V(x) &= V(0) + \int_0^x A(s)V(s)ds \\
 \|V(x)\| &= \left\| V(0) + \int_0^x A(s)V(s)ds \right\| \\
 \|V(x)\| &\leq \|V_0\| + \int_0^x \|A(s)\| \|V(s)\| ds
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Hallemos la  $\|A(s)\|$ ; Sea  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$  entonces  $\|A\| = |A_1| + |A_2|$

Entonces para nuestro problema

$$\|A(s)\| = \|p(x)\| + \|q(x)\| \leq \|p(x)\| + C_0 + 1.$$

Luego  $\|A\| \leq \|p(x)\| + C_0 + 1$ .

Reemplazando  $\|A\|$  en (2.12) obtenemos:

$$\|V(x)\| \leq \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) + \int_0^x (\|p(x)\| + C_0 + 1) \|V(s)\| ds \tag{2.13}$$

Utilizando la desigualdad de Gronwall para  $x \in [0, L]$  en (2.13) tenemos

$$\|V(x)\| \leq \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) e^{\int_0^L (\|p(x)\| + C_0 + 1) ds} \equiv \hat{C}_0$$

Igualmente para establecer una cota para la función  $k(x, t)$ ; sabemos que  $\|v_0\| \leq 1 + \frac{1}{\beta}$ ; por consiguiente, si integramos la ecuación desde 0 hasta  $x$  y luego tomamos la norma podemos concluir la ecuación (2.12) y finalmente verificar la ecuación (2.13); la cual nos lleva a una cota para  $\|v\|$ . ■

## 2.2. Problema integrodiferencial de valor en la frontera

Ahora consideremos una ecuación integro-diferencial la cual incluye la reformulación del problema directo en el Capítulo 3 para la función  $u = u(x, t)$ , en  $Q_T = [0, L] \times [0, T]$ .

**Teorema 2.1.** Sean  $\beta, \gamma, q(x)$  positivas en  $[0, L]$ ,  $F(x, t)$  y  $\mu(t)$  no-negativas y todas las funciones continuas en el problema de valor en la frontera:

$$-u_{xx} + p(x)u_x + q(x)u - \gamma q(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau = F(x, t), (x, t) \in Q_T \quad (2.14)$$

$$u(0, t) = \mu(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.15)$$

$$u(L, t) + \beta u_x(L, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.16)$$

Entonces este problema tiene una solución única no-negativa  $u(x, t) \in C[Q_T]$  con derivadas parciales  $u_x(x, t)$  y  $u_{xx}(x, t)$  continuas.

Además si  $F_t(x, t)$  y  $\mu'(t)$  son continuas, entonces  $u_t(x, t)$  también lo es.

*Demostración.*

Sea  $u(x, t)$  una solución del problema de valor en la frontera (2.14)-(2.16).

Introduciremos la función  $v(x, t) = u(x, t) - \mu(t)k(x)$  donde  $k(x) = \frac{z(x)}{z(0)}$  que se discutió anteriormente.

Entonces observemos que la función  $v(x, t)$  es solución para el problema de frontera

$$-v_{xx} + p(x)v_x + q(x)v = F(x, t) + \gamma q(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau; (x, t) \in Q_t \quad (2.17)$$

$$v(0, t) = 0; \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.18)$$

$$v(L, t) + \beta v_x(L, T) = 0; \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.19)$$

(A)

$$\begin{aligned}
& -v_{xx} + p(x)v_x + q(x)v = \\
& \underbrace{-u_{xx}(x,t) + p(x)u_x(x,t) + q(x)u(x,t)}_{=F(x,t) + \gamma q(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x,\tau) d\tau \text{ por (2.14)}} + \mu(t)k''(x) - p(x)\mu(t)k'(x) - q(x)\mu(t)k(x) \\
& = F(x,t) + \gamma q(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x,\tau) d\tau - \mu(t) \underbrace{[k''(x) + p(x)k'(x) + q(x)k(x)]}_{L[k]=0} \\
& = F(x,t) + \gamma q(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x,\tau) d\tau;
\end{aligned}$$

Con lo cual hemos demostrado que  $v(x,t)$  cumple (2.17)

(B)

$$\begin{aligned}
v(0,t) &= u(0,t) - \mu(t)k(0) \\
&= u(0,t) - \mu(t) \left[ \frac{z(0)}{z(0)} \right] \\
&= \underbrace{u(0,t)}_{=\mu(t) \text{ por (2.15)}} - \mu(t) = \mu(t) - \mu(t) = 0
\end{aligned}$$

Con lo que hemos demostrado que  $v(x,t)$  cumple (2.18)

(C)

$$\begin{aligned}
v(L,t) + \beta v_x(L,t) &= u(L,t) - \mu(t)k(L) + \beta u_x(L,t) - \beta \mu(t)k'(L) \\
&= \underbrace{u(L,t) + \beta u_x(L,t)}_{=0 \text{ por (2.16)}} - \mu(t)k(L) - \beta \mu(t)k'(L) \\
&= -\mu(t)[k(L) + \beta k'(L)] \\
&= -\mu(t) \left[ \frac{z(L)}{z(0)} + \beta \frac{z'(L)}{z(0)} \right]
\end{aligned}$$

Utilizando las condiciones para la función  $z(x)$  donde  $z(L) = \beta$  y  $z'(L) = -1$ , podemos obtener en la ecuación anterior

$$\mu(t) \left[ \frac{z(L)}{z(0)} + \beta \frac{z'(L)}{z(0)} \right] = \mu(t) \left[ \frac{\beta}{z(0)} - \frac{\beta}{z(0)} \right] = 0$$

En este punto podemos observar que el problema (2.17) y (2.19) es equivalente al problema (2.1) y (2.3); con  $H(x) = F(x, t) + \gamma q(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau$ . Siguiendo la metodología expuesta para hallar la solución de (2.1) y (2.3) tenemos que la función  $v(x, t)$  la podemos escribir como:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \int_0^L K(x, \xi) \left[ F(x, \xi) + \gamma q(\xi) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(\xi, \tau) d\tau \right] d\xi \\ &= \int_0^L K(x, \xi) F(x, \xi) d\xi + \int_0^L K(x, \xi) \gamma q(\xi) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(\xi, \tau) d\tau d\xi \end{aligned} \quad (2.20)$$

reemplazando  $v(x, t) = u(x, t) - \mu(t)k(x)$  en (2.19) obtenemos:

$$u(x, t) = \mu(t)k(x) + \int_0^L K(x, \xi) F(x, \xi) d\xi + \int_0^L K(x, \xi) \gamma q(\xi) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(\xi, \tau) d\tau d\xi$$

Si hacemos  $f(x, t) = \mu(t)k(x) + \int_0^L K(x, \xi) F(x, \xi) d\xi$  obtenemos:

$$u(x, t) = f(x, t) + \int_0^t \int_0^L e^{-\gamma(t-\tau)} K(x, \xi) \gamma q(\xi) u(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (2.21)$$

La integral doble en (2.21) es una ecuación de tipo Volterra para la función  $u(x, t)$ .

Definimos el operador integral  $P$  :

$$Pu = \int_0^t \int_0^L e^{-\gamma(t-\tau)} K(x, \xi) \gamma q(\xi) u(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

con kernel no negativo continuo en  $Q_T$ .

Según [ver Krasnov] la solución única de la ecuación integral puede ser escrita por la serie de Neumann

$$u = f + Pf + P^2f + \dots$$

Hemos definido:

$$f(x, t) = \mu(t)k(x) + \int_0^L K(x, \xi) F(x, \xi) d\xi$$

Podemos observar en la ecuación anterior que si  $F(x, t)$  y  $\mu(t)$  tiene derivadas continuas  $F_t(x, t)$  y  $\mu'(t)$  entonces  $f(x, t)$  tiene derivada continua  $f_t(x, t)$ , ahora si derivamos (2.21) con respecto a  $t$  podemos concluir que  $u(x, t)$  tiene derivada continua  $u_t(x, t)$  ■

Nosotros ahora encontraremos cotas para la solución del problema (2.14) con parte derecha igual a cero. En el siguiente resultado se usa la función la función  $k(x)$  (descrita anteriormente) para la construcción de la función de Green en (2.6). Recordemos que  $k(x) > 0 \quad \forall x; \quad 0 \leq x \leq L$ .

**Teorema 2.2.** Sean  $\beta, \gamma$  y  $q(x)$  positivos,  $F(x, t) = 0, \mu(t)$  no negativo y todas las funciones continuas en el problema de frontera (2.14)-(2.16). Luego la solución  $u(x, t)$  al problema de frontera (2.14)-(2.16) satisface:

$$\mu(t) k(x) \leq u(x, t) \leq \max_{0 \leq t \leq T} \mu(t)$$

*Demostración.*

Supongamos que para algún  $(x_0, t_0) \in Q_t$ ,

$$u(x_0, t_0) \equiv \max_{(x,t) \in Q_T} u(x, t)$$

Como  $u(x, t)$  es una función no-negativa tenemos dos casos para trabajar:

cuando  $u(x_0, t_0) = 0$  y cuando  $u(x_0, t_0) > 0$ .

\* Veamos que ocurre cuando  $u(x_0, t_0) = 0$ ,

$$\max_{(x,t) \in Q_T} u(x, t) = u(x_0, t_0) = 0;$$

por hipótesis  $\mu(t) \geq 0$ ; entonces

$$\max_{(x,t) \in Q_T} u(x, t) = u(x_0, t_0) = 0 \leq \mu(t)$$

concluimos:

$$\max_{(x,t) \in Q_T} u(x, t) \leq \mu(t)$$

\* Nos queda el otro caso; cuando  $u(x_0, t_0) > 0$  :

(i) Sea  $x_0 = L$ , por (2.16) tenemos:

$$\begin{aligned} u(L, t) + \beta u_x(L, t) &= 0 \\ u(x_0, t) + \beta u_x(x_0, t) &= 0 \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

Como está última ecuación se cumple para todo  $t \in [0, T]$  en particular para  $t_0 \in [0, T]$  :

$$u(x_0, t_0) + \beta u_x(x_0, t_0) = 0$$

además por ser  $u(x_0, t_0)$  el máximo de  $u(x, t)$  entonces  $u_x(x_0, t_0) = 0$

Luego:

$$u(x_0, t_0) = 0$$

Con lo cual llegamos a una contradicción ya que estábamos trabajando con el caso  $u(x_0, t_0) > 0$  y llegamos a que  $u(x_0, t_0) = 0$  por lo tanto  $x_0 \neq L$ ;

(ii) Como sabemos  $x_0 \in [0, L]$ . entonces  $x_0$  no puede ser mayor que  $L$ .

Por (i) y (ii) podemos concluir que

$$x_0 < L \tag{2.22}$$

Ahora si  $x_0 > 0$  entonces la ecuación integro diferencial en (2.14) con  $F(x, t) = 0$  nos queda:

$$\begin{aligned} 0 &= u_{xx}(x_0, t_0) - \underbrace{p(x)u_x(x_0, t_0)}_{=0 \text{ (por ser el máximo)}} - q(x)u(x_0, t_0) + \gamma q(x_0) \int_0^{t_0} e^{-\gamma(t_0-\tau)} u(x_0, \tau) d\tau \\ &= u_{xx}(x_0, t_0) - q(x)u(x_0, t_0) + \gamma q(x_0) \int_0^{t_0} e^{-\gamma(t_0-\tau)} u(x_0, \tau) d\tau \\ &< u_{xx}(x_0, t_0) - q(x)u(x_0, t_0) \left( 1 - \gamma \int_0^{t_0} e^{-\gamma(t_0-\tau)} d\tau \right) < 0 \end{aligned}$$

lo cual nos produce una contradicción; entonces nos quedan los casos  $x_0 < 0$  ó  $x_0 = 0$ ; pero si  $x_0 < 0$  no nos pertenecería al intervalo  $0 \leq x \leq L$ ; por lo tanto la única opción que nos queda es que

$$x_0 = 0 \tag{2.23}$$

Podemos concluir:

$$\begin{array}{ccccc} u(x_0, t_0) & = & u(0, t_0) & = & \mu(t_0) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{por(2.23)} & & \text{por(2.15)} \end{array}$$

Como sabemos

$$u(x, t) \leq u(x_0, t_0) = \mu(t_0) \leq \max_{0 \leq t \leq T} \mu(t).$$

Como probamos siendo  $u(x_0, t_0) = 0$  ó  $u(x_0, t_0) > 0$  siempre

$$u(x, t) \leq \max_{0 \leq t \leq T} \mu(t)$$

Con lo que establecimos la cota superior para  $u(x, t)$ .

Para establecer la cota inferior vemos que  $v(x, t) = u(x, t) - \mu(t)k(x)$  satisface la ecuación integro-diferencial

$$-v_{xx} + p(x)v_x + q(x)v - \gamma q(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v(x, \tau) d\tau = \gamma q(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \mu(\tau) k(x) d\tau \quad (2.24)$$

Probemos que  $v(x, t)$  satisface la ecuación (2.24)

$$\begin{aligned} & -v_{xx} + p(x)v_x + q(x)v - \gamma q(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v(x, \tau) d\tau \\ &= -u_{xx}(x, t) + \mu(t)k''(x) + p(x)[u_x(x, t) - \mu(t)k'(x)] + q(x)[u(x, t) - \mu(t)k(x)] \\ & \quad - \gamma q(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} (\mu(x, \tau) - \mu(\tau)k(x)) d\tau \\ &= -u_{xx} + p(x)u_x + q(x)u - \gamma q(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau \\ & \quad - \mu(t)[-k''(x) + p(x)k'(x) + q(x)k(x)] + \gamma q(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \mu(t)k(x) d\tau \\ &= \underbrace{F(x, t)}_{=0} + \gamma q(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \mu(\tau)k(x) d\tau = \gamma q(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \mu(\tau)k(x) d\tau \end{aligned}$$

Por lo tanto hemos demostrado que  $v(x, t)$ , cumple la ecuación (2.24); anteriormente pudimos ver que  $v(x, t)$  también cumple (2.18) y (2.19).

Sabemos que  $\gamma, q(x), \mu(t)$  y  $k(x)$  son funciones positivas; entonces el lado derecho de la ecuación (2.24) es no-negativo, por lo tanto al problema (2.24), (2.18) y (2.19) podemos aplicar el teorema (2.1) y obtenemos que  $v(x, t) \geq 0$  (función no-negativa),

$$v(x, t) = u(x, t) - \mu(t)k(x) \geq 0$$

$$u(x, t) \geq \mu(t)k(x)$$

Con lo que hemos demostrado el teorema (2.2) ■

---

---

# CAPÍTULO 3

---

## EL PROBLEMA DIRECTO

En este Capítulo daremos un análisis completo del problema directo sujeto a condiciones adecuadas sobre los parámetros del problema

$$c_1(x)u_x + a_t = D_1u_{xx} \quad (3.1)$$

$$a_t = \gamma(\phi(x)u - a) \quad (3.2)$$

Para  $0 \leq x \leq L$ ;  $0 \leq t \leq T$ , con condiciones iniciales y de frontera:

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.3)$$

$$u(L, t) + \beta u_x(L, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.4)$$

$$a(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.5)$$

Haremos las siguientes suposiciones acerca de los parámetros del problema (3.1)-(3.5).

### Condiciones sobre los parámetros

1.  $\phi \in C[0, L]$  y  $\phi(x) > 0$  para  $x \in [0, L]$
2.  $c_1 \in C[0, L]$
3. Las constantes  $D_1, \gamma, \beta$  son positivas

4.  $\mu \in C[0, L]$  y  $\mu$  es no-negativa en  $[0, T]$
5.  $\mu' \in C[0, L]$ ,  $\mu(0) = 0$  y  $\mu$  es positiva sobre  $(0, T]$
6.  $\left( \mu'(t) - \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \mu'(\tau) d\tau \right) > 0$ , para  $0 \leq t \leq T$

**Definición 3.1.** Se llama solución del problema directo (3.1)-(3.5) a la pareja de funciones  $u, a \in C[Q_T]$ ; tales que  $u_x, u_{xx}, a_t \in C[Q_T]$  y  $u, a$  son solución del problema (3.1)-(3.5).

Para establecer la existencia y la unicidad de la solución del problema directo (PD) se usaran las condiciones sobre los parámetros (1)-(4); sin embargo, para la demostración de las cotas para la solución y el teorema de comparación requeriremos las condiciones (5) y (6).

**Teorema 3.1.** Supóngase que se cumplen las condiciones (1)-(4). Entonces el problema directo tiene una única solución  $u(x, t), a(x, t)$  y además ambas funciones son no-negativas.

*Demostración.*

Inicialmente integremos (3.2) junto con la condición inicial  $a(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq L$ .

$$\begin{aligned} a_t(x, t) &= \gamma(\phi(x)u(x, t) - a(x, t)) \\ a_t(x, t) + \gamma a(x, t) &= \gamma\phi(x)u(x, t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

multipliquemos la ecuación (3.6) por  $e^{\gamma t}$ , e integremos de 0 a  $t$ :

$$\begin{aligned} e^{\gamma t} a_t(x, t) + e^{\gamma t} \gamma a(x, t) &= e^{\gamma t} \gamma \phi(x) u(x, t) \\ (e^{\gamma \tau} a(x, t))_t &= e^{\gamma t} \gamma \phi(x) u(x, t) \\ \int_0^t (e^{\gamma \tau} a(x, \tau))_t d\tau &= \int_0^t e^{\gamma \tau} \gamma \phi(x) u(x, \tau) d\tau \\ e^{\gamma t} a(x, t) - a(x, 0) &= \int_0^t e^{\gamma \tau} \gamma \phi(x) u(x, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.7)$$

Utilizando la condición inicial (3.5) en (3.7):

$$\begin{aligned}
 e^{\gamma t} a(x, t) &= \int_0^t e^{\gamma \tau} \gamma \phi(x) u(x, \tau) d\tau \\
 a(x, t) &= e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma \tau} \gamma \phi(x) u(x, \tau) d\tau \\
 a(x, t) &= \gamma \phi(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Sustituyendo (3.2) y (3.8) en (3.1), tenemos:

$$\begin{aligned}
 c_1(x) u_x + a_t &= D_1 u_{xx} \\
 c_1(x) u_x + \gamma(\phi(x) u - a) &= D_1 u_{xx},
 \end{aligned}$$

Ahora:

$$c_1(x) u_x + \gamma \phi(x) u - \gamma^2 \phi(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau = D_1 u_{xx} \tag{3.9}$$

Dividiendo la ecuación (3.9) por  $D_1$  :

$$\frac{c_1(x) u_x}{D_1} + \frac{\gamma \phi(x) u}{D_1} - \frac{\gamma^2 \phi(x)}{D_1} \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau = \frac{D_1}{D_1} u_{xx} \tag{3.10}$$

Hagamos  $c(x) = \frac{c_1(x)}{D_1}$  y  $d = \frac{\gamma}{D_1}$  en (3.10):

$$\begin{aligned}
 c(x) u_x + d \phi(x) u - \gamma \phi(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau &= u_{xx} \\
 - u_{xx} + c(x) u_x + d \phi(x) u - d \gamma \phi(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau &= 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Luego el problema directo (3.1)-(3.5) es equivalente al problema (3.11), (3.8), (3.3) y (3.4). Del teorema (2.1) tenemos que existe una solución  $u(x, t)$  única no-negativa, continua en  $Q_T$  y con derivadas parciales  $u_x(x, t)$ ,  $u_{xx}(x, t)$ , continuas para el problema (3.11), (3.8), (3.3) y (3.4). Por otra parte si definimos  $a(x, t)$  usando (3.1), se obtiene que  $a(x, t)$  es continua y  $a_t \in C[Q_T]$ , además  $a$  es no-negativa. Luego  $u(x, t)$ ,  $a(x, t)$  es la solución única no-negativa del problema directo ■

Las cotas obtenidas en el teorema (2.2) tienen las aplicaciones siguientes en el problema directo (P.D)

**Teorema 3.2.** *Supóngase que se cumplen las condiciones de parámetro (1)-(5). Si  $u(x, t)$  es una solución al problema directo entonces  $u_t \in C[Q_T]$  y para  $(x, t) \in Q_T$*

$$\mu'(t)k(x) \leq u_t(x, t) \leq \max_{0 \leq t \leq T} \mu'(t)$$

Donde  $k(x)$  es una solución de (2.1) para  $p(x) = c(x)$ ;  $q(x) = d\phi(x)$ ;  $H(x) = 0$ , además satisface las condiciones de frontera  $k(0) = 1$  y  $k(L) + \beta k'(L) = 0$ .

*Demostración.*

Del teorema (2.1) tenemos  $u_t \in C[Q_T]$ . Ahora observemos que para  $(x, t) \in Q_T$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau \right) &= e^{-\gamma(t-t)} u(x, t) - e^{-\gamma(t-0)} u(x, 0) \cdot 0 - \int_0^t \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau \\ &= u(x, t) - \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau = u(x, t) - \underbrace{\gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau}_{(*)} \quad (3.12)$$

Integremos por partes (\*);

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau &= \frac{1}{\gamma} u(x, t) e^{-\gamma(t-\tau)} \Big|_0^t + \frac{1}{\gamma} \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_t(x, \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\gamma} u(x, t) - \frac{1}{\gamma} u(x, 0) e^{-\gamma t} + \frac{1}{\gamma} \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_t(x, \tau) d\tau \end{aligned}$$

utilizando la condición de parámetros (5);

$u(x, 0) = \mu(0) = 0$ ; tenemos:

$$\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau = \frac{1}{\gamma} u(x, t) - \frac{1}{\gamma} \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_t(x, \tau) d\tau \quad (3.13)$$

reemplazando (3.13) en (3.12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau &= u(x, t) - \gamma \left[ \frac{1}{\gamma} u(x, t) - \frac{1}{\gamma} \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_t(x, \tau) d\tau \right] \\ &= u(x, t) - u(x, t) + \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_t(x, \tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_t(x, \tau) d\tau \end{aligned}$$

En conclusión

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_t(x, \tau) d\tau \quad (3.14)$$

Derivemos (3.11) con respecto a  $t$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ -u_{xx} + c(x)u_x + d\phi(x)u - \gamma d\phi(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_t(x, \tau) d\tau \right] &= 0 \\ - (u_{xx})_t + c(x)(u_x)_t + d\phi(x)u_t - \gamma d\phi(x) - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_t(x, \tau) d\tau \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sustituyendo  $v(x, t) = u_t(x, t)$  y (3.14) en (3.15)

$$-v_{xx} + c(x)v_x + d\phi(x)v - \gamma d\phi(x) \cdot \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v(x, \tau) d\tau = 0 \quad (3.16)$$

Derivemos (3.4) con respecto a  $t$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [u(L, t) + \beta u_x(L, t)] &= 0 \\ u_t(L, t) + \beta (u_x)_t(L, t) &= 0 \\ v(L, t) + \beta v_x(L, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Por último derivemos (3.3) con respecto a  $t$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [u(0, t)] &= \frac{\partial}{\partial t} \mu(t) \\ u_t(0, t) &= \mu'(t) \\ v(0, t) &= \mu'(t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por el teorema (2.1) la solución para (3.16), (3.17) y (3.18) es  $v(x, t)$  y este último teorema implica que  $v(x, t) \geq 0$ , luego  $u_t(x, t) \geq 0$  para  $x \in Q_T$ ; ahora aplicaremos el teorema (2.2) a  $v(x, t)$  para producir:

$$\begin{aligned} \mu'(t)k(x) &\leq v(x, t) \leq \max_{0 \leq t \leq T} \mu'(t) \quad \text{para } (x, t) \in Q_T \\ \mu'(t)k(x) &\leq u_t(x, t) \leq \max_{0 \leq t \leq T} \mu'(t) \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el teorema. ■

Para dar énfasis a la dependencia que tiene la solución del problema con respecto a la función  $\phi$  escribiremos:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x, t; \phi) \\ a(x, t) &= a(x, t; \phi) \end{aligned}$$

**Teorema 3.3.** *Supongase que se cumplen las condiciones de parámetro (1)-(6). Sean  $u(x, t; \phi_i), a(x, t; \phi_i)$  una solución del problema directo que corresponde a  $\phi_i$  con  $i = 1, 2$ . Si  $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$  para  $x \in [0, L]$  entonces  $u_t(x, t; \phi_1) \geq u_t(x, t; \phi_2)$  para  $(x, t) \in Q_T$*

*Demostración.*

De manera análoga como se hizo en el teorema (3.2) definimos  $v(x, t) = u_t(x, t; \phi)$  que satisface el problema con condiciones de frontera (3.16)-(3.17).

Hagamos  $v_i(x, t) = u_t(x, t; \phi_i)$ ,  $i = 1, 2$ ; también definiremos:

$$\begin{aligned} V_i(x, t) &= \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_i(x, \tau) d\tau; \quad i = 1, 2; \\ w &= v_1 - v_2; \\ W &= V_1 - V_2. \end{aligned}$$

Reemplazando  $v_i(x, t)$  en (3.16)

$$-(v_i)_{xx} + c(x)(v_i)_x + d\phi(x)v_i - \gamma d\phi_i(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_i(x, \tau) d\tau = 0$$

Utilizando la definición de  $V_i(x, t)$ .

$$-(v_i)_{xx} + c(x)(v_i)_x + d\phi(x)v_i - \gamma d\phi_i(x)V_i(x, t) = 0 \quad (3.19)$$

Derivemos  $\gamma d\phi_i(x)V_i(x, t)$  de la ecuación (3.19) con respecto a  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [d\phi_i(x)V_i] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ d\phi_i(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_i(x, \tau) d\tau \right] \\ &= d\phi_i v_i(x, t) - \gamma d\phi_i(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_i(x, \tau) d\tau \\ &= d\phi_i(x)v_i - \gamma d\phi_i(x)V_i \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t}[d\phi_i(x)V_i] = d\phi_i(x)v_i - \gamma d\phi_i(x)V_i \quad (3.20)$$

Sustituyendo (3.20) en (3.19)

$$-(v_i)_{xx} + c(x)(v_i)_x + d\phi_i(x)(V_i)_t = 0 \quad (3.21)$$

En (3.21) reemplazamos  $v_i$  por  $v_1$  y  $v_2$  :

$$-(v_1)_{xx} + c(x)(v_1)_x + d\phi_1(x)(V_1)_t = 0$$

$$-(v_2)_{xx} + c(x)(v_2)_x + d\phi_2(x)(V_2)_t = 0$$

restemos estas dos últimas ecuaciones:

$$-(v_1)_{xx} + (v_2)_{xx} + c(x)(v_1)_x - c(x)(v_2)_x + d\phi_1(x)(V_1)_t - d\phi_2(x)(V_2)_t = 0$$

$$-(v_1 - v_2)_{xx} + c(x)(v_1 - v_2)_x + d\phi_1(x)(V_1)_t - d\phi_2(x)(V_2)_t = 0$$

utilicemos la definición de  $w = v_1 - v_2$  en la ecuación anterior:

$$-(w)_{xx} + c(x)(w)_x + d\phi_1(x)(V_1)_t - d\phi_2(x)(V_2)_t = 0$$

$$-(w)_{xx} + c(x)(w)_x + d\phi_1(x)(V_1)_t - d\phi_1(x)(V_2)_t = d\phi_2(x)(V_2)_t - d\phi_1(x)(V_2)_t$$

$$-(w)_{xx} + c(x)(w)_x + d\phi_1(x)(V_1 - V_2)_t = d(\phi_2(x) - \phi_1(x))(V_2)_t$$

utilizando la definición de  $W = V_1 - V_2$  tenemos:

$$-(w)_{xx} + c(x)(w)_x + d\phi_1(x)W_t = d(\phi_2(x) - \phi_1(x))(V_2)_t \quad (3.22)$$

Para aplicar el teorema (2.1) a la ecuación (3.22) es necesario demostrar que  $(V_2)_t$  es no-negativo.

Enpecemos observando que  $v_2(x, t)$  es una solución de (3.16) con  $\phi(x) = \phi_2(x)$  y además  $v_2(x, t)$  cumple las condiciones de límite (3.17) y (3.18); por otra parte, podemos demostrar que  $V_2$  es solución para (3.16) con  $\phi(x) = \phi_2(x)$  con las condiciones  $V_2(0, t) = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \mu'(\tau) d\tau$  y  $V_2(L, t) + \beta(V_2)_x(L, t) = 0$ ; veamos que esto último es cierto:

$$(V_2)_x = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} (v_2)_x(x, \tau) d\tau$$

$$(V_2)_{xx} = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} (v_2)_{xx}(x, \tau) d\tau$$

Reemplazando esto en (3.16)

$$\begin{aligned}
& - \left( \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} (v_2)_{xx}(x, \tau) d\tau \right) + c(x) \left( \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} (v_2)_x(x, \tau) d\tau \right) \\
& + d\phi_2(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_2(x, \tau) d\tau - \gamma d\phi_2(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_2(x, \tau) d\tau \\
& = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \left[ -(v_2)_{xx} + c(x)(v_2)_x + d\phi_2(x)v_2 - \gamma d\phi_2(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_2(x, \tau) d\tau \right] d\tau = 0
\end{aligned}$$

ya que  $v_2(x, t)$  es solución para (3.16).

- $V_2(x, t) = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_2(x, \tau) d\tau$ ; hacemos  $x = 0$   
 $V_2(0, t) = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_2(0, \tau) d\tau = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_t(0, \tau) d\tau = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \mu'(\tau) d\tau$
- $V_2(L, t) + \beta(V_2)_x(L, t) = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_2(L, \tau) d\tau + \beta \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} (v_2)_x(L, \tau) d\tau$   
 $= \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} [v_2(L, \tau) + \beta(v_2)_x(L, \tau)] d\tau = 0$

Ahora observamos que

$$(V_2)_t(0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \mu'(\tau) d\tau \right] = \mu'(t) - \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \mu'(\tau) d\tau$$

Por la condición de parámetro (6)

$$\mu'(t) - \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \mu'(\tau) d\tau \geq 0$$

Luego  $(V_2)_t(0, t) \geq 0$ .

Siguiendo el teorema (3.2) tenemos  $(V_2)_t \geq 0$ ; si observamos la parte derecha de la ecuación (3.22);  $d \geq 0$ ;  $\phi_2 - \phi_1 \geq 0$ ;  $(V_2)_t \geq 0$ , entonces esta parte de la ecuación es no-negativa, aplicamos el teorema (2.1) y obtenemos que  $w(x, t) \geq 0$  por lo tanto  $v_1 - v_2 \geq 0$  luego  $u_t(x, t; \phi_1) - u_t(x, t; \phi_2) \geq 0$  y podemos concluir:

$$u_t(x, t; \phi_1) \geq u_t(x, t; \phi_2)$$

con lo que hemos demostrado el teorema. ■

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## EL PROBLEMA INVERSO

---

### 4.1. Formulación de un operador

---

El problema inverso que consideraremos es el siguiente :

Dado  $u(x, t)$  una solución del problema directo (3.1)-(3.5) y la información suplementaria  $g(x) = u(x, T)$ ,  $0 \leq x \leq L$ , es necesario identificar la función coeficiente  $\phi(x)$ ,  $x \in [0, L]$  que se encuentra en la ecuación (3.2) correspondiente al sistema de ecuaciones parciales, que estudiamos en el problema directo (PD).

Primero debemos notar que la información  $g(x)$ , debe satisfacer las condiciones de frontera  $g(0) = \mu(T)$  y  $g(L) + \beta g'(L) = 0$  ya que  $u(x, t)$  las satisface, además por la definición (3.1) es claro que  $g(x)$  debe tener segunda derivada continua. El problema inverso puede ser expresado en términos de una ecuación operadora; como sigue:

A partir de la ecuación (3.7); esto es:

$$-u_{xx} + c(x)u_x + d\phi(x)u - \gamma d\phi(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau = 0, \quad (4.1)$$

reemplacemos  $t = T$  en (4.1)

$$\begin{aligned} -g''(x) + c(x)g'(x) + d\phi(x)u(x, T) - \gamma d\phi(x) \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u(x, \tau) d\tau &= 0 \\ g''(x) - c(x)g'(x) &= d\phi(x)u(x, T) - \gamma d\phi(x) \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u(x, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.2)$$

por (3.12) podemos observar que

$$d\phi(x)u(x, T) - \gamma d\phi(x) \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u(x, \tau) d\tau = d\phi(x) \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u_t(x, \tau) d\tau \quad (4.3)$$

Utilizando (4.3) en (4.2):

$$g''(x) - c(x)g'(x) = d\phi(x) \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u_t(x, \tau) d\tau$$

ó

$$\phi(x) = \frac{g''(x) - c(x)g'(x)}{d \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u_t(x, \tau) d\tau} \quad (4.4)$$

Por el teorema (3.2) podemos concluir  $u_t(x, t) \geq 0$  y sabemos que  $\phi(x)$  es positiva, luego tenemos:

$$g''(x) - c(x)g'(x) \geq 0 \quad (4.5)$$

Ahora resumamos las propiedades de la función suplementaria  $g(x)$ :

Condiciones sobre la función suplementaria:

- (1)  $g(x) \in C^2[0, L]$  y  $g(x)$  es una función positiva.
- (2)  $g(0) = \mu(T)$  y  $g(L) + \beta g'(L) = 0$ .
- (3)  $[g''(x) - c(x)g'(x)] \in C[0, L]$  y es una función positiva sobre  $[0, L]$ .

**Definición 4.1.** *Supongase que la función  $g(x)$  satisface la condiciones (1)-(3) y definamos el operador :*

$$A\phi = \frac{g''(x) - c(x)g'(x)}{d \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u_t(x, \tau; \phi) d\tau} \quad (4.6)$$

donde  $u(x, t; \phi)$  es la solución del problema directo (3.1)-(3.5) para la función correspondiente  $\phi(x)$  dada.

Observemos que la función  $\phi(x)$  es la solución del (P.I), entonces:

$$\phi = A\phi. \quad [\text{ver (4.4)}] \quad (4.7)$$

Y al contrario supongamos que  $\tilde{\phi}$  es una solución positiva y continua de (4.7). entonces:

$$\begin{aligned} g''(x) - c(x)g'(x) &= d\tilde{\phi}u(x, T; \tilde{\phi}) - d\tilde{\phi}\gamma \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u(x, \tau; \tilde{\phi}) d\tau \\ &= u_{xx}(x, T; \tilde{\phi}) - c(x)u_x(x, T; \tilde{\phi}) \end{aligned}$$

Puesto que  $g(x)$  y  $u(x, T; \tilde{\phi})$  satisfacen las mismas condiciones de frontera se sigue que  $g(x) = u(x, T; \tilde{\phi})$  por esto  $\tilde{\phi}(x)$  es una solución del (P.I)

---

## 4.2. Propiedades del Operador A

---

Atraves de esta sección vamos a suponer que las condiciones sobre los parámetros (2)-(6) se cumplen. Ahora examinaremos algunas propiedades del operador  $A$ : por el teorema (3.2) tenemos que para toda función positiva  $\phi(x)$ :

$$A\phi = \frac{g''(x) - c(x)g'(x)}{d \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u_t(x, \tau; \phi) d\tau} \geq \frac{g''(x) - c(x)g'(x)}{d \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu_M d\tau} \equiv h(x) \quad (4.8)$$

Donde  $\mu_M \equiv \max_{0 \leq t \leq T} \mu'(t)$ . Definamos:

$$E \equiv \{\phi(x) \in C[0, L] \mid \phi \geq h(x), x \in [0, L]\};$$

Sea  $P$  es el conjunto de funciones positivas, el conjunto  $E \subseteq P$ .

A continuación, usamos las normas uniformes  $\|\cdot\|$  en  $C[0, L]$  y  $C[Q_T]$ ; para demostrar la continuidad del operador.

Los próximos dos teoremas exponen las propiedades esenciales del operador  $A$ ; el siguiente resultado es muy importante para el desarrollo del investigación.

**Teorema 4.1.** *El operador  $A : P \rightarrow E$  dado por (4.6) es continuo y monótono.*

*Demostración.*

Primero observemos que para la desigualdad (4.8), el operador  $A$  transforma funciones positivas de  $C[0, L]$  al conjunto  $E$ . Definamos el operador  $B$ :

$$B\phi = \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u_t(x, \tau; \phi) d\tau \quad (4.9)$$

luego el operador dado en (4.6) nos queda:

$$A\phi = \frac{g'' - cg'}{d} \left( \frac{1}{B\phi} \right) \quad (4.10)$$

Demostremos que  $A$  es acotado; por el teorema (3.2) tenemos:

$$\mu'(t)k(x) \leq u_t(x, t) \leq \max_{0 \leq t \leq T} \mu'(t). \quad (4.11)$$

multipliquemos (4.10) por  $e^{-\gamma(T-\tau)}$ :

$$\mu'(t)k(x)e^{-\gamma(T-\tau)} \leq e^{-\gamma(T-\tau)} u_t(x, t) \leq e^{-\gamma(T-\tau)} \max_{0 \leq t \leq T} \mu'(t). \quad (4.12)$$

Integremos (4.11) de 0 a  $T$ :

$$k(x; \phi) \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu'(\tau) d\tau \leq \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u_t(x, \tau; \phi) d\tau \leq \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} \mu'(t) d\tau \quad (4.13)$$

utilizando (4.9) tenemos:

$$0 < k(x; \phi) \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu'(\tau) d\tau \leq B\phi \leq \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} \mu'(t) d\tau \quad (4.14)$$

Utilizando la condición del parámetro (5) y la definición:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \mu'(t) \equiv \mu_M, \quad (4.14) \quad \text{nos queda:}$$

$$0 < k(x; \phi) \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu'(\tau) d\tau \leq B\phi \leq \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu_M d\tau \quad (4.15)$$

La desigualdad (4.15) nos muestra que el operador  $B$  es acotado.

Veamos la continuidad del operador  $B$ . El operador integral dado por:

$$I\varphi = \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \varphi(x, \tau) d\tau.$$

es continuo en la norma uniforme; como lo discutimos en los preliminares; el núcleo  $K(t, s) = e^{\gamma(T, \tau)}$  es continuo.

Ahora demostremos que el operador  $C\phi = u_t(x, \tau; \phi)$  es continuo.

Sean  $v_i(x, t) = u_t(x, t; \phi_i)$ ,  $i = 1, 2$ . y  $w(x) = v_1(x, t) - v_2(x, t)$ ; vimos anteriormente que cada  $v_i$  es solución del problema de frontera (3.16)-(3.18) con  $\phi = \phi_i$ , luego:

$$-(v_1)_{xx} + c(x)(v_1)_x + d\phi_1 v_1 - \gamma d\phi_1(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_1(x, \tau) d\tau = 0 \quad (4.16)$$

$$-(v_2)_{xx} + c(x)(v_2)_x + d\phi_2 v_2 - \gamma d\phi_2(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_2(x, \tau) d\tau = 0 \quad (4.17)$$

restemos las ecuaciones (4.16) y (4.17):

$$\begin{aligned} & -(v_1 - v_2)_{xx} + c(x)(v_1 - v_2)_x + d(\phi_1 v_1 - \phi_2 v_2) - \gamma d\phi_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_1(x, \tau) d\tau \\ & + \gamma d\phi_2 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_2(x, \tau) d\tau = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sumemos  $[\gamma d\phi_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_2(x, \tau) d\tau - \gamma d\phi_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_2(x, \tau) d\tau]$ , y,  $[d\phi_2(x) v_2(x, t) - d\phi_1(x) v_2(x, t)]$  a la ecuación (4.18)

$$\begin{aligned} & -(v_1 - v_2)_{xx} + c(x)(v_1 - v_2)_x + d\phi_1 v_1 - d\phi_1 v_2 - d\phi_2 v_2 - \gamma d\phi_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_1(x, \tau) d\tau \\ & - \gamma d\phi_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_2(x, \tau) d\tau = -d\phi_1 v_2 - \gamma d\phi_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_2(x, \tau) d\tau \\ & - \gamma d\phi_2 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_2(x, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.19)$$

reemplazando en (4.19),  $(v_1 - v_2)$  por  $w(x)$  tenemos:

$$-w_{xx} + c(x)w_x + d\phi_1 w - \gamma d\phi_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} w(x, \tau) d\tau = F(x, t) \quad (4.20)$$

donde:

$$F(x, t) = \gamma d(\phi_1 - \phi_2) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} v_2(x, \tau) d\tau - d(\phi_1 - \phi_2) v_2(x, t) \quad (4.21)$$

mostremos que  $w(x)$  satisface las condiciones de frontera (3.17) y (3.18); veamos:

$$w(0, t) = v_1(0, t) - v_2(0, t) = \mu'(t) - \mu'(t) = 0 \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} w(L, t) + \beta w_x(L, t) &= (v_1 - v_2)(L, t) + \beta(v_1 - v_2)_x(L, t) \\ &= v_1(L, t) - v_2(L, t) + \beta(v_1)_x(L, t) - \beta(v_2)_x(L, t) \\ &= [v_1(L, t) + \beta(v_1)_x(L, t)] - [v_2(L, t) + \beta(v_2)_x(L, t)] = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Resolviendo el problema (4.20), (4.22) y (4.23);  $w(x)$  satisface la ecuación integral de la forma:

$$w(x) = \int_0^L K(x, \varepsilon; \phi_1) F(\varepsilon, t) d\varepsilon + \int_0^t \int_0^L K(x, \varepsilon; \phi_1) F(\varepsilon, t) \gamma d\phi_1(\varepsilon) \cdot |e^{-\gamma(t-\tau)}| \cdot |w(\varepsilon, \tau)| d\tau \quad (4.24)$$

donde  $K(x, \varepsilon; \phi_1)$  es una función continua en el cuadrado  $0 \leq x; \varepsilon \leq L$ .

Siguiendo los mismos pasos expuestos en el Capítulo 2 para la función  $w(x, t)$ ; el valor absoluto de  $w(x)$  en (4.24) es:

$$\begin{aligned} |w(x, t)| &\leq \int_0^L |K(x, \varepsilon; \phi_1)| \cdot |F(\varepsilon, t)| d\varepsilon \\ &\quad + \int_0^t \int_0^L |K(x, \varepsilon; \phi_1)| \cdot |F(\varepsilon, t)| \gamma d|\phi_1(\varepsilon)| |e^{-\gamma(t-\tau)}| |w(\varepsilon, \tau)| d\tau \end{aligned} \quad (4.25)$$

Tomando el máximo en (4.25) y definiendo:

$$\|w(\cdot, t)\| = W(t); K_M = \max_{0 \leq x, \varepsilon \leq L} |K(x, \varepsilon; \phi_1)|; \mu_M = \max_{0 \leq t \leq T} \mu'(t)$$

tenemos que:

$$W(t) = K_M \cdot \max |F(x, t)| \cdot L + \gamma d K_M \cdot \max |\phi_1(\varepsilon)| \cdot L \int_0^t W(\tau) d\tau \quad (4.26)$$

Hallemos  $|F(x, t)|$  en (4.21):

$$|F(x, t)| = \gamma d |\phi_1 - \phi_2| \int_0^t |v_2(x, \tau)| \cdot |e^{-\gamma(t-\tau)}| d\tau - d |\phi_1 - \phi_2| |v_2(x, t)| \quad (4.27)$$

Tomando el máximo en la desigualdad (4.27) y utilizando el teorema (3.2):

$$\begin{aligned} \|F(x, t)\| &\leq \gamma d |\phi_1 - \phi_2| \max_t \mu'(t) \cdot T + d |\phi_1 - \phi_2| \max_t |\mu'(t)| \\ &\leq \gamma d \|\phi_1 - \phi_2\| \mu_M \cdot T + d \|\phi_1 - \phi_2\| \mu_M \end{aligned} \quad (4.28)$$

Volviendo a (4.26):

$$\begin{aligned} W(t) &\leq K_M[\gamma d\|\phi_1 - \phi_2\| \cdot \mu_M + d\|\phi_1 - \phi_2\|\mu_M] \cdot L + \gamma dK_M\|\phi_1\| \cdot L \int_0^t W(\tau)d\tau \\ &\leq LK_M d\mu_M(\gamma T + 1)\|\phi_1 - \phi_2\| + LK_M\gamma d\|\phi_1\| \int_0^t W(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (4.29)$$

Utilizando la desigualdad de Gronwall en (4.29)

$$W(t) \leq LK_M d\mu_M(\gamma T + 1)\|\phi_1 - \phi_2\| e^{LK_M\gamma d\|\phi_1\|t} \quad (4.30)$$

como  $W(t) = \|w(\cdot, t)\| = \|v_1 - v_2\| = \|u_t(x, t; \phi_1) - u_t(x, t; \phi_2)\|$  Por consiguiente el operador  $C$  es continuo, como el operador integral  $I\Psi = \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)}\Psi(x, \tau)$  es continuo; ya que  $A$  es continuo si  $B$  es continuo y  $B$  es continuo y  $C$  es continuo.

Ahora demostraremos la monotonía del operador  $A$ ; para esto observamos en primer lugar que si  $\phi_1 \leq \phi_2$  entonces  $u_t(x, t; \phi_1) \geq u_t(x, t; \phi_2)$  por el teorema (3.3); por consiguiente

$$\int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)}u_t(x, \tau; \phi_1)d\tau \geq \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)}u_t(x, \tau; \phi_2)d\tau \quad (4.31)$$

por la desigualdad (4.15) ambos términos en (4.31) son positivos entonces; tomando el recíproco tenemos:

$$\frac{1}{\int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)}u_t(x, \tau; \phi_1)d\tau} \leq \frac{1}{\int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)}u_t(x, \tau; \phi_2)d\tau} \quad (4.32)$$

multiplicando (4.32) por  $\frac{g''-cg'}{d}$  obtenemos:

$$\frac{g'' - cg'}{d \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)}u_t(x, \tau; \phi_1)d\tau} \leq \frac{g'' - cg'}{d \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)}u_t(x, \tau; \phi_2)d\tau}$$

así que  $A\phi_1 \leq A\phi_2$  ■

**Teorema 4.2.** *El operador  $A : P \rightarrow E$  dado por (4.6) transforma conjuntos acotados en conjuntos equicontinuos.*

*Demostración.*

Consideremos el conjunto de funciones

$$P_0 \equiv \{\phi(x) \in C[0, L] \mid 0 < \phi(x) \leq \phi_0(x), \quad x \in [0, L]\}$$

donde  $\phi_0(x)$  es una función continua,  $P_0$  es un conjunto acotado

Sea  $0 \leq x_1, x_2 \leq L$ . Definiendo el operador  $B$  como en (4.9):  $B\phi = \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u_t(x, \tau; \phi) d\tau$  y además definiendo  $r(x) = \frac{g'' - cg'}{d}$  luego

$$A\phi = \frac{g''(x) - c(x)g'(x)}{dB\phi(x)} = \frac{r}{dB\phi} \quad (4.33)$$

Evaluemos (4.33) en  $x_1$  y  $x_2$  y restemos las ecuaciones que resultan:

$$A\phi(x_1) - A\phi(x_2) = \frac{r(x_1)}{B\phi(x_1)} - \frac{r(x_2)}{B\phi(x_2)} = \frac{B\phi(x_2)r(x_1) - B\phi(x_1)r(x_2)}{B\phi(x_1) \cdot B\phi(x_2)} \quad (4.34)$$

Sumemos y restemos  $\frac{B\phi(x_2)r(x_2)}{B\phi(x_1) \cdot B\phi(x_2)}$  en (4.34)

$$\begin{aligned} A\phi(x_1) - A\phi(x_2) &= \frac{B\phi(x_2)r(x_1) - B\phi(x_2)r(x_2) + B\phi(x_2)r(x_2) - B\phi(x_1)r(x_2)}{B\phi(x_1) \cdot B\phi(x_2)} \\ &= \frac{(r(x_1) - r(x_2))B\phi(x_2) + r(x_2)(B\phi(x_2) - B\phi(x_1))}{B\phi(x_1) \cdot B\phi(x_2)} \end{aligned}$$

Podemos concluir entonces

$$A\phi(x_1) - A\phi(x_2) = \frac{(r(x_1) - r(x_2))B\phi(x_2) + r(x_2)(B\phi(x_2) - B\phi(x_1))}{B\phi(x_1)B\phi(x_2)} \quad (4.35)$$

Ahora de (4.15) tenemos:

$$0 < k(x; \phi) \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu'(\tau) d\tau \leq B\phi(x) \leq \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu_M d\tau \quad (4.36)$$

Evaluando en  $x_1, x_2$  la parte izquierda de la desigualdad (4.36):

$$\begin{aligned} 0 < k(x_1; \phi) \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu'(\tau) d\tau &\leq B\phi(x_1) \\ 0 < k(x_2; \phi) \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu'(\tau) d\tau &\leq B\phi(x_2) \end{aligned}$$

multiplicando entre sí las ecuaciones anteriores:

$$0 < \underbrace{k(x_1; \phi)k(x_2; \phi) \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu'(\tau) d\tau \cdot \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu'(\tau) d\tau}_{C_1 > 0} \leq B\phi(x_1)B\phi(x_2) \quad (4.37)$$

Lo mismo hacemos con la parte derecha en (4.15):

$$B\phi(x) \leq \underbrace{\int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu_M d\tau}_{C_2 > 0} \quad (4.38)$$

De lo anterior podemos decir que existen constantes  $C_1 > 0$  y  $C_2 > 0$  independientes de  $x$  y  $\phi$  tales que:  $B\phi(x_1) \cdot B\phi(x_2) \leq C_1$  y  $B\phi(x) < C_2$ . Sea  $w_r$  un módulo de continuidad de  $r(x)$ ; luego (4.35) nos queda:

$$|\phi(x_1) - A\phi(x_2)| \leq \frac{w_r(|x_1 - x_2|)C_2 + \|r\| \cdot |B\phi(x_2) - B\phi(x_1)|}{C_1} \quad (4.39)$$

Ahora demostraremos que para cualquier  $\phi \in P_0$  existe una constante  $C_3$  tal que

$$|B\phi(x_2) + B\phi(x_1)| < C_3|x_1 - x_2| \quad (4.40)$$

De las demostraciones de los teoremas (3.2) y (2.2) la función  $v(x, t) = u_t(x, t; \phi)$  satisface la ecuación integral:

$$v(x, t) = f(x, t) + \int_0^t \int_0^L e^{-\gamma(t-\tau)} K(x, \varepsilon; \phi) \gamma d\phi(\varepsilon) v(\varepsilon, \tau) d\varepsilon d\tau \quad (4.41)$$

donde  $f(x, t) = \mu'(t)k(x)$

Evaluemos (4.41) en  $x = x_1$  y  $x = x_2$ .

$$v(x_1, t) = f(x_1, t) + \int_0^t \int_0^L e^{-\gamma(t-\tau)} K(x_1, \varepsilon; \phi) \gamma d\phi(\varepsilon) v(\varepsilon, \tau) d\varepsilon d\tau$$

$$v(x_2, t) = f(x_2, t) + \int_0^t \int_0^L e^{-\gamma(t-\tau)} K(x_2, \varepsilon; \phi) \gamma d\phi(\varepsilon) v(\varepsilon, \tau) d\varepsilon d\tau$$

restemos las ecuaciones anteriores

$$v(x_1, t) - v(x_2, t) = \mu'(t)(k(x_1) - k(x_2)) + \int_0^t \int_0^L e^{-\gamma(t-\tau)} [K(x_1, \varepsilon; \phi) - K(x_2, \varepsilon; \phi)] \cdot \gamma d\phi(\varepsilon) v(\varepsilon, \tau) d\varepsilon d\tau \quad (4.42)$$

Si  $\varepsilon$  esta entre  $x_1$  y  $x_2$  nosotros podemos escribir:

$$K(x_1, \varepsilon; \phi) - K(x_2, \varepsilon; \phi) = K(x_1, \varepsilon; \phi) - K(\varepsilon, \varepsilon; \phi) + K(\varepsilon, \varepsilon; \phi) - K(x_2, \varepsilon; \phi)$$

Por lo tanto podemos aplicar el teorema del valor medio en cada uno de los términos; como también para el término  $k(x_1) - k(x_2)$ . Observemos que del lema (2.1) podemos encontrar una cota uniforme  $\hat{C}_0$  en la función  $K_x(x, \varepsilon; \phi)$  y  $k'(x)$  independiente de  $\phi$ .

Sean

$$\mu_M = \max_{t \in [0, T]} \mu'(t) \quad \wedge \quad C = \|\phi_0\|$$

tomemos valores absolutos en (4.42)

$$\begin{aligned} |v(x_1, t) - v(x_2, t)| &\leq |\mu'(t)| \cdot |k(x_1) - k(x_2)| + \int_0^t \int_0^L e^{-\gamma(t-\tau)} |K(x_1, \varepsilon; \phi)| \gamma d|\phi(\varepsilon)| \\ &\quad \cdot |v(\varepsilon, \tau)| d\varepsilon d\tau - \int_0^t \int_0^L e^{-\gamma(t-\tau)} |K(x_2, \varepsilon; \phi)| \gamma d|\phi(\varepsilon)| \cdot |v(\varepsilon, \tau)| d\varepsilon d\tau \end{aligned} \quad (4.43)$$

Tomemos máximos en (4.43) recordando que

$$|v(x_1, t) - v(x_2, t)| \leq \max |v(x_1, t) - v(x_2, t)| :$$

$$\begin{aligned} |v(x_1, t) - v(x_2, t)| &\leq \hat{C}_0 |x_1 - x_2| + \int_0^t [\hat{C}_0 |x_1 - x_2| \gamma dC \mu_M L] d\tau \\ &\quad + \int_0^t [\hat{C}_0 |x_1 - x_2| \gamma dC \mu_M] d\tau \\ &= \mu_M \hat{C}_0 |x_1 - x_2| + 2 \int_0^t \hat{C}_0 |x_1 - x_2| \gamma dC \mu_M L d\tau \\ &\leq \mu_M \hat{C}_0 |x_1 - x_2| + 2 \hat{C}_0 |x_1 - x_2| \gamma dC \mu_M \cdot L \\ &= \hat{C}_0 \mu_M (1 + 2 \gamma dC L T) |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

En conclusión:

$$|v(x_1, t) - v(x_2, t)| \leq \hat{C}_0 \mu_M (1 + 2 \gamma dC L T) |x_1 - x_2| \quad (4.44)$$

luego:

$$\begin{aligned}
|B\phi(x_1) - B\phi(x_2)| &\leq \left| \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u_t(x_1, \tau; \phi) d\tau - \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u_t(x_2, \tau; \phi) d\tau \right| \\
&\leq \left| \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} [u_t(x_1, \tau; \phi) - u_t(x_2, \tau; \phi)] d\tau \right| \\
&= \left| \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} [v(x_1, \tau; \phi) - v(x_2, \tau; \phi)] d\tau \right| \\
&\leq \underbrace{TC_0\mu_M(1 + 2\gamma dCLT)}_{C_3 > 0} |x_1 - x_2|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto (4.39) nos queda:

$$|A\phi(x_1) - A\phi(x_2)| \leq \frac{w_r(|x_1 - x_2|)C_2 + \|r\|C_3|x_1 - x_3|}{C_1} \quad (4.45)$$

Así que nuestro teorema queda demostrado. ■

---

### 4.3. Propiedades de la Solución del Problema Inverso

---

**Teorema 4.3.** *Si las condiciones sobre los parámetros (2)-(6) y las condiciones sobre la información  $g(x)$ , (1)-(3) se cumplen, entonces una condición necesaria y suficiente para que el problema inverso tenga solución es la existencia de una función  $\phi_0(x) \in C[0, L]$  para la cual  $A\phi_0(x) \leq \phi_0(x)$ ,  $0 \leq x \leq L$ .*

*Demostración.*

Demostremos la condición necesaria :

Supongamos que el problema inverso tiene solución;  $\phi(x)$ , entonces  $\phi = A\phi$ ; luego hacemos  $\phi_0 = \phi$  y nos queda demostrado el teorema.

Al contrario; supongamos que la función continua positiva  $\phi_0$  satisface la desigualdad  $A\phi_0 \leq \phi_0$ . Por (4.8) tenemos que para cualquier  $\phi(x)$  positiva y  $x \in [0, L]$ ,  $h(x) \leq A\phi(x)$ .

Mostremos ahora que el operador  $A$  transforma el intervalo

$$I = \{\phi(x) \in [0, L] \mid h(x) \leq \phi(x) \leq \phi_0(x), 0 \leq x \leq L\}$$

en sí mismo. Veamos; tomemos un  $\phi_1(x) \in I$ , apliquemos a  $\phi_1(x)$  el operador  $A$ , entonces:

$$h(x) \leq A\phi_1(x) \quad (4.46)$$

Ahora como  $\phi_1(x) \leq \phi_0(x)$ , utilizando la monotonía de  $A$  en (4.46) nos queda:

$$A\phi_1(x) \leq \phi_0(x) \leq \phi_0 \quad (4.47)$$

La última desigualdad en la ecuación anterior se tiene por hipótesis del teorema; de (4.46) y (4.47) concluimos:

$$h(x) \leq A\phi_1(x) \leq \phi_0 \quad (4.48)$$

Además observemos que por los teoremas (4.1) y (4.2) se concluye que el operador  $A : I \rightarrow I$  es un operador compacto, monótono y continuo. De aquí se desprende [ver ] por el teorema del punto fijo que la sucesión  $\phi_0, A\phi_0, A^2\phi_0 \dots$  converge hacia un punto fijo  $\phi$  de  $A$ , el cual como vimos en la introducción de este Capítulo debe satisfacer  $u(x, T; \phi) = g(x)$ ,  $0 \leq x \leq L$  ■

Una condición suficiente para la existencia de una solución está dada por el siguiente resultado.

**Corolario 4.1.** *Si las condiciones sobre los parámetros (2)-(6), sobre la función suplementaria (1)-(3) se satisfacen, y para alguna constante positiva  $\phi_0$  la condición*

$$\frac{g'' - cg'}{d \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu'(\tau) d\tau} \leq \phi_0 k(x, \phi_0) \quad (4.49)$$

*se satisface, entonces el problema inverso tiene solución*

*Demostración.* Por el teorema (3.2)

$$\mu'(t) k(x; \phi_0) \leq u_t(x, t; \phi_0) \quad (4.50)$$

multipliquemos (4.50) por  $(d e^{-\gamma(T-t)})$  :

$$d e^{-\gamma(T-t)} \mu'(t) k(x, \phi_0) \leq d e^{-\gamma(T-t)} u_t(x, t; \phi_0) \quad (4.51)$$

Integremos (4.51) de 0 a  $T$  :

$$d \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu'(t) k(x, \phi_0) d\tau \leq d \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u_t(x, t; \phi_0) d\tau \quad (4.52)$$

En el Capítulo 2 se vio que la función  $k(x)$  es positiva; además por la condición de parámetro (5) la función  $\mu'(t)$  también lo es; luego (4.52) es positiva; entonces podemos tomar los recíprocos en (4.52):

$$\frac{1}{d \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u_t(x, t; \phi_0) d\tau} \leq \frac{1}{d \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu'(t) k(x, \phi_0) d\tau} \quad (4.53)$$

Por (4.5) tenemos que la función  $g'' - cg'$  es positiva luego podemos multiplicar (4.53) por ella:

$$A\phi_0 = \frac{g'' - cg'}{d \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u_t(x, \tau; \phi_0) d\tau} \leq \frac{g'' - cg'}{d \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu'(t) k(x, \phi_0) d\tau} \quad (4.54)$$

Tomemos la parte derecha de la desigualdad (4.54)

$$\frac{g'' - cg'}{d \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu'(\tau) k(x; \phi_0) d\tau} = \frac{1}{k(x; \phi_0)} \left[ \frac{g'' - cg'}{\int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu'(\tau) d\tau} \right] \quad (4.55)$$

Utilizando la hipótesis en (4.55):

$$\frac{1}{k(x; \phi_0)} \left[ \frac{g'' - cg'}{d \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} \mu'(\tau) d\tau} \right] \leq \left[ \frac{1}{k(x; \phi_0)} \right] \cdot \phi_0 k(x; \phi_0) \quad (4.56)$$

Por transitividad en (4.54), (4.55) y (4.56) tenemos:

$$A\phi_0 \leq \phi_0$$

Entonces utilizando el teorema (4.3); el problema inverso tiene solución. ■

El siguiente corolario se usa para propósitos computacionales.

**Corolario 4.2.** *Si el P.I tiene solución entonces la sucesión de iteraciones  $h, Ah, A^2h, \dots$ , converge a una solución de P.I.*



$\phi_3$  no puede estar como en la figura (4.1) ya que  $\phi_3 = \min\{\phi_1, \phi_2\}$ ; por lo tanto utilizando la monotonía de  $A$  :

$$A\phi_3 \leq \min\{\phi_1, \phi_2\} = \phi_3$$

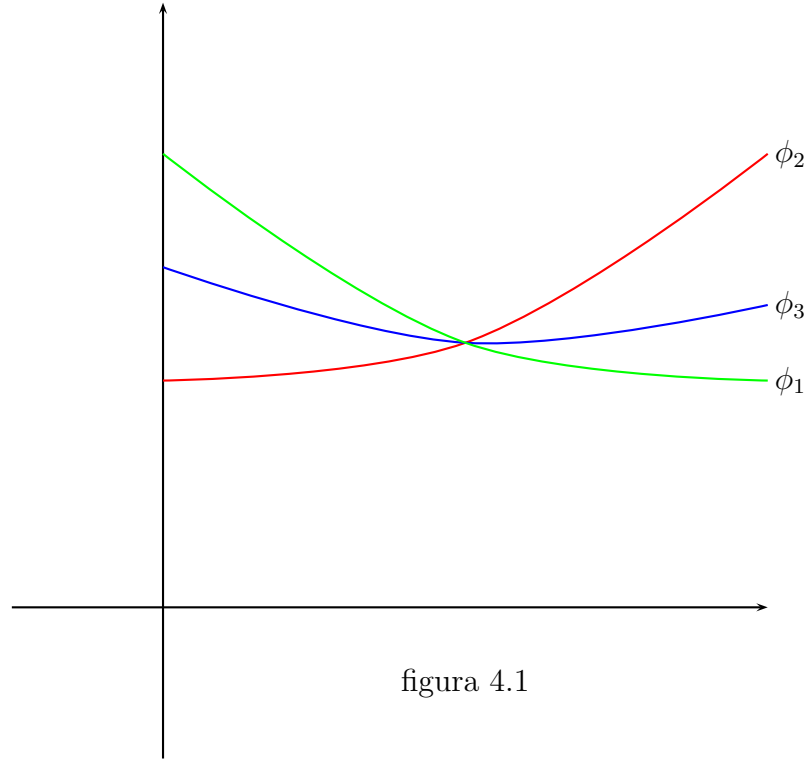


figura 4.1

se sigue de la demostración del teorema (4.3) que la sucesión  $\phi_3, A\phi_3, A^2\phi_3, \dots$  forma una sucesión decreciente de funciones que convergen a una solución  $\phi_4$  del P.I, la cual está acotada por  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , luego tenemos nuevamente el primer caso para las funciones  $\phi_4$  y  $\phi_2$ . Sabemos por el teorema (3.3) que si  $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$  entonces  $u_2(x, t) \leq u_1(x, t)$  en  $Q_T$ . Al igual que en la demostración del teorema (3.3) tenemos

$$U_k = \int_0^t e^{\gamma(t-\tau)} u_k(x, \tau) \quad k = 1, 2; \quad w = u_1 - u_2; \quad W = U_1 - U_2$$

reemplazando  $u_1$  y  $u_2$  en la ecuación (3.16) entonces

$$-(u_1)_{xx} + c(x)(u_1)_x + d\phi_1 u_1 - \gamma d\phi_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_1(x, \tau) d\tau = 0 \quad (4.57)$$

$$-(u_2)_{xx} + c(x)(u_2)_x + d\phi_2 u_2 - \gamma d\phi_2 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau = 0 \quad (4.58)$$

Restemos las ecuaciones (4.57) y (4.58):

$$-(u_1 - u_2)_{xx} + c(x)(u_1 - u_2)_x + d\phi_1 u_1 - d\phi_2 u_2 - \gamma d\phi_2 + \gamma d\phi_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_1(x, \tau) d\tau = 0 \quad (4.59)$$

Sumando y restando a la ecuación (4.59) las siguientes expresiones:  $d\phi_1 \phi_2$ ,  $y$ ,  $\gamma d\phi_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau$  :

$$\begin{aligned} & - (u_1 - u_2)_{xx} + c(x)(u_1 - u_2)_x + d\phi_1(u_1 - u_2) + d\phi_1 u_2 - d\phi_2 u_2 \\ & - \gamma d\phi_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_1(x, \tau) d\tau + \gamma d\phi_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau \\ & - \gamma d\phi_2 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau + \gamma d\phi_2 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau = 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

Sustituyendo la diferencia  $u_1 - u_2$  por  $w(x)$  nos queda:

$$\begin{aligned} & - w_{xx} + c(x)w_x + d\phi_1 w - \gamma d\phi_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} w(x, \tau) d\tau \\ & = d\phi_2 u_2 - d\phi_1 u_2 + \gamma d\phi_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau - \gamma d\phi_2 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.61)$$

Tomando el lado derecho de la ecuación (4.61):

$$\begin{aligned} & d\phi_2 u_2 - d\phi_1 u_2 + \gamma d\phi_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau - \gamma d\phi_2 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau \\ & = -d\phi_1 \left( u_2 - \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau \right) + d\phi_2 \left( u_2 - \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau \right) \end{aligned} \quad (4.62)$$

reemplazando (3.12) en (4.62):

$$\begin{aligned} & - d\phi_1 \left( u_2 - \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau \right) + d\phi_2 \left( u_2 - \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau \right) \\ & = -d\phi_1 (U_2)_t + d\phi_2 (U_2)_t = d(\phi_1 - \phi_2)(U_2)_t \end{aligned} \quad (4.63)$$

Por (4.62) y (4.63) la ecuación (4.60) nos queda:

$$-w_{xx} + c(x)w_x + d\phi_1 w + -\gamma d\phi_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} w(x, \tau) d\tau = d(\phi_2 - \phi_1)(U_2)_t \quad (4.64)$$

Luego  $w(x, t)$  es solución de la ecuación (4.64) con las condiciones de frontera (2.18) y (2.19).

La función  $U_2$  satisface la ecuación (3.11) con  $\phi = \phi_2$ ; veamos:

$$\begin{aligned}
& - (U_2)_{xx} + c(x)(U_2)_x + d\phi_2(x)U_2 - \gamma d\phi_2(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} U_2(x, \tau) d\tau \\
&= - \left( \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau \right)_{xx} + c(x) \left( \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau \right)_x \\
&+ d\phi_2(x) \left( \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau \right) - \gamma d\phi_2(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \left[ \left( \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau \right) \right] \\
&= \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \underbrace{\left( -(u_2)_{xx} + c(x)(u_2)_x + d\phi_2(x)u_2 - \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(x, \tau) d\tau \right)}_{=0 \text{ por (3,2)}} d\tau = 0
\end{aligned}$$

Por consiguiente  $U_2$  satisface la ecuación:

$$-(U_2)_{xx} + c(x)(U_2)_x + d\phi_2(x)U_2 - \gamma d\phi_2(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} U_2(x, \tau) d\tau = 0 \quad (4.65)$$

Además  $U_2$  satisface la siguientes condiciones de frontera:

$$\bullet U_2(0, t) = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(0, \tau) d\tau = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \mu(\tau) d\tau \equiv M(t) \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned}
\bullet U_2(0, t) + \beta(u_2)_x(L, t) &= \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_2(L, \tau) d\tau + \beta \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} (u_2)_x(L, \tau) d\tau \\
&= \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \underbrace{(u_2(L, t) + \beta(u_2)_x(L, t))}_{=0} d\tau = 0
\end{aligned} \quad (4.67)$$

Si Observamos en la ecuación (4.66) la definición de  $M(t)$ , fácilmente se ve que  $M(0) = 0$ , y  $U_2(x, 0) = 0$ . Derivando la función  $M'(t)$  :

$$M'(t) = \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \mu(\tau) d\tau \right] = \mu(t) - \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \mu(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \mu'(\tau) d\tau \quad (4.68)$$

La última parte de la ecuación (4.68) es el resultado de integrar por partes que requiere la condición (5) sobre los parámetros para  $t > 0$ , como la función  $k(x) > 0$  entonces:

$$(U_2)_t(x, t) \geq M'(t)k(x) > 0 \quad \text{para } t \in [0, T] \quad (4.69)$$

Evaluando (4.64) en  $t = T$

$$\begin{aligned} & -w_{xx}(x, T) + c(x)w_x(x, T) + d\phi_1 w(x, T) - \gamma d\phi_1(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} w(x, \tau) d\tau \\ & = d(\phi_2 - \phi_1)(U_2)_t \end{aligned} \quad (4.70)$$

Además  $w(x, T) = u_1(x, T) - u_2(x, T)$  y  $u_1(x, T) = u_2(x, T)$ , entonces  $w(x, T) = 0$ ; igualmente:

$$\begin{aligned} w_x(x, T) &= (u_1(x, T) - u_2(x, T))_x = 0 \quad , y, \\ w_{xx}(x, T) &= (u_1(x, T) - u_2(x, T))_{xx} = 0 \end{aligned}$$

Luego el lado izquierdo de la ecuación (4.70) nos queda igual a:

$$-d\phi_1(x)\gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} w(x, \tau) d\tau \quad (4.71)$$

Por las condiciones del parámetro (1) – (3);  $\phi_1(x) > 0$  para  $x \in [0, L]$ ;  $d$  es positiva y como  $w(x, t)$  resuelve el problema directo; también es positivo. Por el teorema (3.1) tenemos en (4.71):

$$-d\phi_1(x)\gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} w(x, \tau) d\tau < 0 \quad x \in [0, L]$$

Ahora vemos el lado derecho de (4.70);  $d$  es positivo; como  $\phi_2$  está acotado por  $\phi_1$  entonces  $\phi_2 - \phi_1$  es positivo, ahora  $(U_2)_t$  también lo es, por consiguiente el lado derecho de (4.70) es positivo; lo cual es una contradicción. Podemos entonces afirmar que  $\phi_1 = \phi_2$  y con esto llegamos a que el (P.I) tiene una solución única. ■

---

---

# CAPÍTULO 5

---

## EJEMPLOS NUMÉRICOS

En este Capítulo veremos como calcular numéricamente el P.I bajo restricciones no muy fuertes y daremos varios ejemplos. Centremos nuestros esfuerzos en el cálculo de la función  $u(x, t)$  en vez de  $\{u(x, t), a(x, t)\}$  solución del P.I; ya que  $a(x, t)$  se obtiene a partir de  $u(x, t)$  (vea (3.2)). Calcularemos la función  $u(x, t)$ , luego usaremos la función (3.8) para hallar  $a(x, t)$ .

---

### 5.1. Esquema Numérico para el Problema

#### **Integro-Diferencial de Valor en la Frontera (PVF).**

---

Primero desarrollaremos un esquema numérico para el problema (2.14)-(2.16); esto es

$$-u_{xx} + p(x)u_x + q(x)u - \gamma q(x) \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau = f(x, t); \quad (x, t) \in Q_t \quad (5.1)$$

$$u(0, t) = \mu(t); \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.2)$$

$$u(L, t) + \beta u_x(L, t) = 0; \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.3)$$

Asumimos que todas las hipótesis del teorema (2.2) son ciertas, esto es:  $\beta, \gamma, q(x)$  son positivas,  $F(x, t)$  y  $\mu(t)$  no negativos y todas las funciones son continuas.

Sea  $u(x, t)$  la solución a calcular y definamos:

$$U(x, t) = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau \quad (5.4)$$

Sea  $\Delta_x = \frac{L}{M}$ ,  $\Delta_t = \frac{T}{N}$  el paso en  $x$  y  $t$  respectivamente, estos parámetros los usamos en el proceso de discretización del problema, donde  $M, N \in \mathbb{Z}^+$ . Veamos a (2.14) y (5.4) como un sistema de evolución en las incógnitas  $u$  y  $U$ . El aspecto de evolución de  $U$  se hace más claro observando lo siguiente:

$$U(x, t) = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau = \int_0^{t-\Delta t} e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau + \int_{t-\Delta t}^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau \quad (5.5)$$

Reemplazando  $t = t - \Delta t$  en (5.4) tenemos:

$$\begin{aligned} U(x, t - \Delta t) &= \int_0^{t-\Delta t} e^{-\gamma(t-\Delta t-\tau)} u(x, \tau) d\tau \\ &= e^{\gamma\Delta t} \int_0^{t-\Delta t} e^{-\gamma(t-\Delta t-\tau)} u(x, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.6)$$

multiplicando (5.6) por  $e^{-\gamma\Delta t}$  tenemos:

$$e^{-\gamma\Delta t} U(x, t - \Delta t) = \int_0^{t-\Delta t} e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau \quad (5.7)$$

Reemplazando (5.7) en (5.5) obtenemos:

$$U(x, t) = e^{-\gamma\Delta t} U(x, t - \Delta t) + \int_{t-\Delta t}^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau \quad (5.8)$$

Ahora, sea  $t_n = n\Delta t$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  una malla para el intervalo  $[0, T]$  y  $x_k = k\Delta x$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$  una malla para el intervalo  $[0, L]$ . La malla para el rectángulo  $Q_T$  se obtiene como el conjunto de parejas  $(x_k, t_n)$ ;  $k = 1, 2, \dots, M$  y  $n = 1, 2, \dots, N$ . Esta malla se muestra en la figura (5.2).

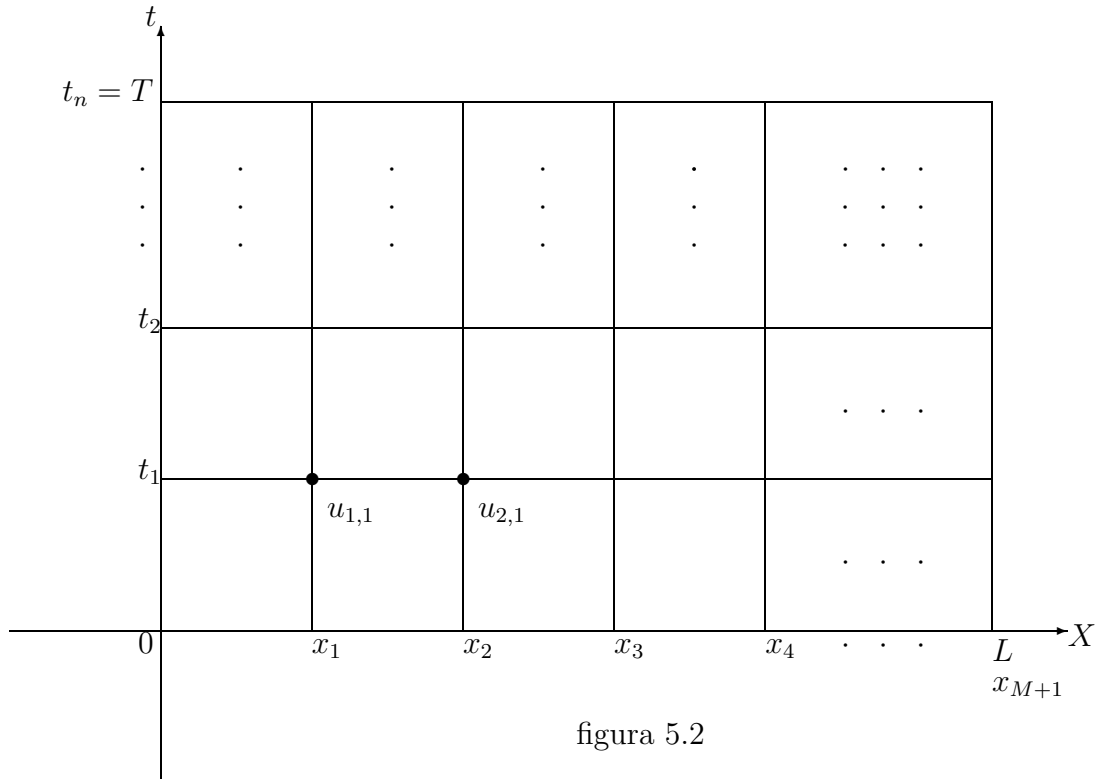


figura 5.2

Definamos las siguientes funciones de malla  $p_k = p(k\Delta x)$ ,  $q(k\Delta x)$ ,  $\mu_n = \mu(n\Delta t)$  y  $F_{k,n} = F(k\Delta x, n\Delta t)$ . Igualmente en nuestras aproximaciones las soluciones exactas son:

$$u_{k,n} \approx u(x_k, t_n) = u(k\Delta x, n\Delta t)$$

$$U_{k,n} \approx U(x_k, t_n) = U(k\Delta x, n\Delta t)$$

Construyamos un esquema de diferencias finitas de segundo orden de aproximación en las variables  $\Delta x$  y  $\Delta t$ .

Por consiguiente usamos la primera y segunda fórmula de diferencias centradas para discretizar (2.14) y el método del trapecio para discretizar (5.8):

$$U(x, t) = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau = e^{-\gamma\Delta t} U(x, t - \Delta t) + \int_{t-\Delta t}^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau$$

Luego (5.8) lo podemos aproximar por medio de la expresión:

$$\begin{aligned} U_{k,n} &= (e^{-\gamma\Delta t}) \cdot (U_{k,n-1}) + \frac{\Delta t}{2} (e^{-\gamma(t-t+\Delta t)}) \cdot (u_{k,n-1}) + (e^{-\gamma(t-t)}) \cdot (u_{k,n}) \\ &= e^{-\gamma\Delta t} U_{k,n-1} + \frac{\Delta t}{2} [(e^{-\gamma\Delta t}) \cdot (u_{k,n-1}) + u_{k,n}] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para discretizar la ecuación (2.14) utilizamos las siguientes fórmulas de diferencias centradas [ver Burden]

$$(u_{xx})_{k,n} = \frac{u_{k+1,n} - 2u_{k,n} + u_{k-1,n}}{(\Delta x)^2} \quad (5.10)$$

$$(u_x)_{k,n} = \frac{u_{k+1,n} - u_{k-1,n}}{2\Delta x} \quad (5.11)$$

Reemplacemos en (2.11) las ecuaciones (5.10)-(5.11) y utilizando (5.6) tenemos:

$$\begin{aligned} &\frac{-(u_{k+1,n} - 2u_{k,n} + u_{k-1,n})}{(\Delta x)^2} + p_k \frac{(u_{k+1,n} - u_{k-1,n})}{2\Delta x} - q_k u_{k,n} \\ &- \gamma q_k [e^{-\gamma\Delta t} U_{k,n-1} + \frac{\Delta t}{2} (e^{-\gamma\Delta t} u_{k,n-1} + u_{k,n})] = F_{k,n} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} &\frac{-u_{k+1,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{2u_{k,n}}{(\Delta x)^2} - \frac{u_{k-1,n}}{(\Delta x)^2} + p_k \frac{u_{k+1,n}}{2\Delta x} - p_k \frac{u_{k-1,n}}{2\Delta x} - q_k u_{k,n} \\ &- \gamma q_k e^{-\gamma\Delta t} U_{k,n-1} - \gamma q_k \frac{\Delta t}{2} e^{-\gamma\Delta t} u_{k,n-1} - \gamma q_k \frac{\Delta t}{2} u_{k,n} = F_{k,n} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Simplificando (5.12):

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{2 + p_k(\Delta x)}{2(\Delta x)^2}\right) u_{k-1,n} + \left[\frac{2 - q_k(\Delta x)^2(1 - \gamma\frac{\Delta t}{2})}{(\Delta x)^2}\right] u_{k,n} - \left(\frac{2 + p_k(\Delta x)}{2(\Delta x)^2}\right) u_{k+1,n} \\ &= F_{k,n} + \gamma q_k e^{-\gamma\Delta t} (U_{k,n-1} + \frac{\Delta t}{2} u_{k,n-1}) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Tomando factor común  $(\Delta x)^2$  en la ecuación (5.13) obtenemos:

$$-\left(1 + p_k \frac{(\Delta x)}{2}\right) u_{k-1,n} + \left[2 + (\Delta x)^2 q_k \left(1 - \gamma \frac{\Delta t}{2}\right)\right] u_{k,n} - \left(1 - p_k \frac{\Delta x}{2}\right) u_{k+1,n} = G_{k,n} \quad (5.14)$$

donde

$$G_{k,n} = (\Delta x)^2 \left\{ F_{k,n} + \gamma e^{-\gamma \Delta t} \left( U_{k,n-1} + \frac{\Delta t}{2} u_{k,n-1} \right) \right\} \quad (5.15)$$

El sistema (5.9), (5.14) y (5.15) son válidas para los nodos interiores  $(x_k, t_n)$  con  $k = 1, 2, \dots, M$  y  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Podemos observar que el término  $u_{0,n}$  es conocido basándonos en la condición de frontera (2.15) ya que  $u(0, t) = \mu(t)$ ; al igual  $u_{M+1,n}$  por la condición de frontera (2.16). El problema integro-diferencial de frontera lo resolvemos usando un método, el cual es explícito en el tiempo e implícito en el espacio. El algoritmo para el problema integro-diferencial de valor en la frontera puede ser descrito como sigue:

- (1) Dado los valores  $U$  y  $u$  en el nivel  $(n - 1)$  de tiempo resolvemos el sistema (5.14) y (5.15) para el valor de  $u$  en el nivel de tiempo  $n$ .
- (2) Usando (5.9) resolvemos explícitamente  $U$  para el nivel de tiempo  $n$ .

Realicemos una prueba de escritorio: Supongamos que conocemos  $U_{0,1}$  y  $u_{0,1}$ ; siguiendo lo enunciado anteriormente, podemos ver en este caso  $n = 1$  y para nuestra ilustración tomemos  $k = 1$ . Observemos entonces (5.14) y (5.15) cuando  $n = 1$  y  $k = 1$ :

$$-\left(1 + p_1 \frac{\Delta x}{2}\right) u_{0,1} + \left[2 + (\Delta x)^2 q_1 \left(1 - \gamma \frac{\Delta t}{2}\right)\right] u_{1,1} - \left(1 - p_1 \frac{\Delta x}{2}\right) u_{2,1} = G_{1,1} \quad (5.16)$$

donde:

$$G_{1,1} = (\Delta x)^2 \left\{ F_{1,1} + \gamma e^{-\Delta t} q_1 \left( U_{1,0} + \frac{\Delta t}{2} u_{1,0} \right) \right\} \quad (5.17)$$

De las ecuaciones (5.16)-(5.17) conocemos  $U_{1,0}$  y  $u_{1,0}$ ; si discretizamos de la condición (2.16), observamos que el término  $u_{2,1}$  en (5.16) se puede escribir en términos de  $u_{1,1}$ ; veamos esto:

$$u_{1,1} + \beta \left[ \frac{u_{2,1} - u_{0,1}}{2\Delta x} \right] = 0$$

Como ya dijimos conocemos  $u_{0,1}$  por la condición inicial (2.15); luego en las ecuaciones (5.16) y (5.17) lo desconocido es  $u_{1,1}$  y  $u_{2,1}$ ; al recorrer la malla en la capa  $n = 1$  encontramos los valores  $u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}$  y así sucesivamente; luego usamos la ecuación (5.9) y determinamos  $U_{i,j}$ ; para  $k = 1$  y  $n = 1$  tenemos:

$$U_{1,1} = e^{-\gamma \Delta t} U_{1,0} + \frac{\Delta t}{2} e^{-\gamma \Delta t} [u_{1,0} + u_{1,1}]$$

## 5.2. Un Algoritmo para el Calculo de un Operador

Si asumimos que la condición suplementaria se da en forma exacta  $g(x)$  entonces la discretización del operador  $A$  es inmediata.

Sea  $g_k = g(k\Delta x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M + 1$  y  $\phi_k = \phi(k\Delta x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ . Observemos que  $v(x, t) = u_t(x, t)$  satisface la ecuación (3.16) junto con las condiciones de frontera  $v(0, t) = \mu'(t)$  y  $v(L, t) + \beta v_x(L, t) = 0$ , entonces la función

$V(x, t) = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u_t(x, \tau) d\tau$  puede ser aproximada por el desarrollo del algoritmo para el problema de frontera de la ecuación integro-diferencial (PFV) aplicado a  $v(x, t)$ ; resultando las aproximaciones  $V_{k,N}$  en los nodos  $(x_k, t_n)$ .

Para el operador  $A$  tenemos:

$$A\phi = \frac{g''(x) - c(x)g'(x)}{d \int_0^T e^{-\gamma(T-\tau)} u_t(x, \tau; \phi) d\tau}$$

Para discretizar el operador  $A$  utilizaremos

$$g''(x) = \frac{g_{k+1} - 2g_k + g_{k-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{g_{k+1} - g_{k-1}}{2\Delta x}$$

Luego; sea  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M)$

$$(A_M\phi)_k = \frac{\frac{g_{k+1} - 2g_k + g_{k-1}}{(\Delta x)^2} - c_k \left[ \frac{g_{k+1} - g_{k-1}}{2\Delta x} \right]}{dV_{k,N}}$$

$$(A_M\phi)_k = \frac{[1 + c_k \frac{\Delta x}{2}]g_{k-1} - 2g_k + (1 - c_k \frac{\Delta x}{2})g_{k+1}}{dV_{k,N}(\Delta x)^2}$$

Por lo tanto podemos concluir que nuestro operador  $A$  tiene la forma:

$$(A_M\phi)_k = \frac{[1 + c_k \frac{\Delta x}{2}]g_{k-1} - 2g_k + (1 - c_k \frac{\Delta x}{2})g_{k+1}}{dV_{k,N}(\Delta x)^2} \quad (5.18)$$

válida para  $k = 1, 2, \dots, M$ . Cuando  $k = M$ ; entonces necesitamos conocer  $g_{M+1}$ ; para esto usamos la condición inicial que satisface  $g(x)$  al final del punto por la derecha. Discretizando esta condición usando diferencias centradas tenemos  $g(M\Delta x) + \beta g'(M\Delta x) =$

0; para  $k = 1$  se requiere  $g_0$  que puede ser hallada por la condición de frontera  $g(0) = \mu(T)$ .

Nosotros podemos ahora usar el corolario (4.2) para describir un algoritmo de solución del P.I:

sea  $\phi_0$  la semilla para la discretización donde  $\phi_0(x) = h(x)$  definida en (4.8). Entonces se usa la iteración de punto fijo de (5.9); hasta alcanzar la convergencia.

Se ilustra el algoritmo del P.I en el siguiente ejemplo. En este ejemplo nosotros consideramos el problema directo (3.1)-(3.5) en su forma equivalente como un problema de valor en la frontera (3.11),(3.8),(3.3) y (3.4).

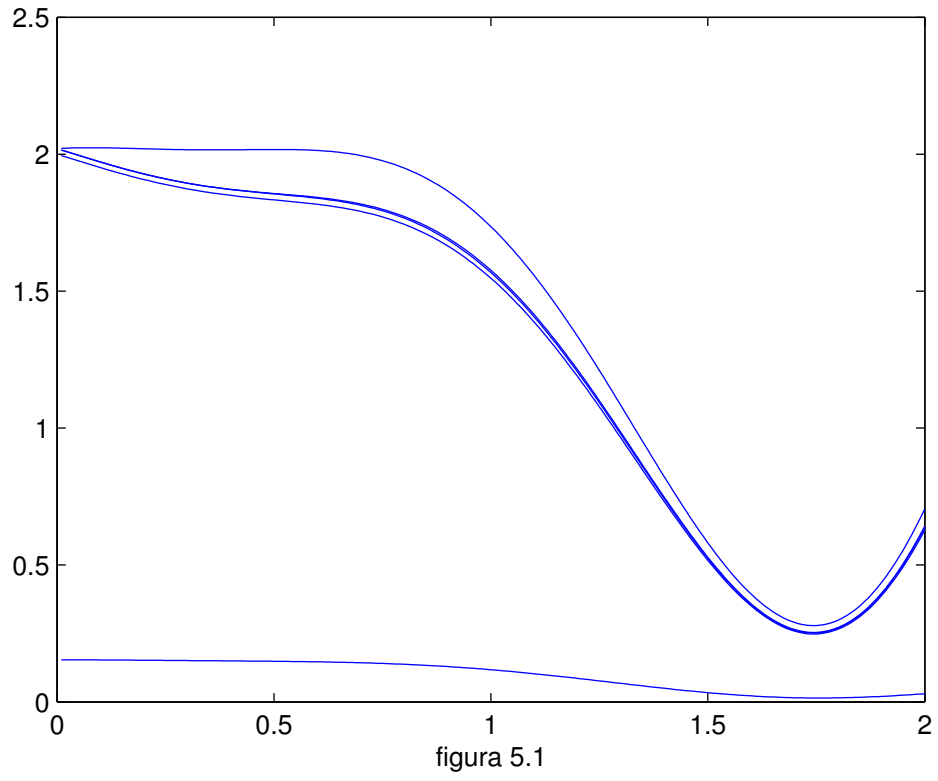
### Simulación Numérica

Consideremos el caso cuando  $L = 2$ ,  $T = 2$ ,  $\gamma = \beta = 1$ ,  $c(x) = 1 + \frac{\cos(3x)}{3}$ ,  
 $\phi(x) = 2 - \frac{x}{2} + \frac{x^2 \sin(3x)}{3}$  y  $\mu(t) = \frac{(1 - e^{-0,2t})}{0,2}$ .

Observemos que nuestros datos de entrada satisfacen las condiciones sobre los parámetros (2)-(6); en este ejemplo tomamos  $\Delta x = \Delta t = 0,01$ ; veamos como funciona nuestro algoritmo.

1. Se usa el algoritmo (PVF) para obtener la función  $g(x)$ .
2. Se usa el algoritmo P.I sucesivamente con la inextrapolación (PVF) para calcular la solución de este P.I
3. Nuestra semilla es la función  $h(x)$  definida en (4.8) que es la iteración 1 en la figura 5.2.
4. Como se puede observar el punto fijo de iteración exhibe una aproximación lineal de convergencia hasta aproximadamente la quinta iteración.
5. En la cuarta iteración la norma del error  $\|\phi - \phi_4\| = 0,0021$
6. El comportamiento monótono del operador es evidente en la figura 5.1

Los resultados anteriores fueron generados usando **MATLAB**; versiones de los programas usados son anexados en las siguientes páginas.



---

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] KOLMOGOROV A.N. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Moscu. MIR, 1972.
- [2] KRASNOV M., Kiseliyov A., Makarenko G. *Ecuaciones integrales*. Moscu. MIR, 1970.
- [3] ORELLANA Yaneth. *Solución tipo onda viajera para un modelo matemático de sorción dinámica*. Bucaramanga, Tesis de pregrado, UIS, 1998.
- [4] DESINOV A.M. *An inverse problem for a hyperbolic equation*. 2000
- [5] ISAVOK V. *Inverse parabolic problems with thr final overdetermination*. Comm.Pure appl, 1991.
- [6] PRILEPKO A.I, KOSTIN. *Inverse problem of determining the coefficient in a parabolic equation*. Siberian Math, 1992.
- [7] STARGOLD I. *Green's functions and Boundary value problems*. New york. John Wiley and Sons Inc, 1979.
- [8] BURDEN Richard. *Análisis Numérico*. Thomson Editores, 1998.

- [9] NAGLE R., SAFF Eduard.,SNIDER Arthur. *Ecuaciones Diferenciales y roblemas con valores en la frontera*. Tercera Edición.
- [10] ZILL Dennis. *Ecuaciones Diferenciales con Modelado*. México. Thomson, 1997.

---

# ANEXOS

## ANEXO A

### (PROGRAMAS EN MATLAB)

#### **alfa.m**

function retval = alpha(t)

usage: y = alpha(t);

description: Returns value of alpha at scalar t.

retval = 0; for examples 1,2,3

#### **f.m**

function retval = F(x,t)

usage: y = F(x,t);

description: Returns ordinate vector of values of F(x,t)

at abscissa vector x, scalar time t.

local variables:

nn: length of vector x

k: loop variable

nn = length(x);

```
retval = zeros(size(x));
for k = 1:nn
retval(k) = 0; retval(k) = 2*exp(-x(k))*(-t*t+t-1+exp(-t));
end;
```

### forwardsolvrex.m

```
function [u,U] = forwardsolvrex(M,N,el,T,gmma,bta,pnodes,qnodes,pnodesh,qnodesh)
```

```
usa: [u,U] = forwardsolvrex(M,N,el,T,gmma,bta,pnodes,qnodes,pnodesh,qnodesh)
```

descripcion: se construye y se retorna la solucion para

nuestro problema en el tiempo  $T$ , usando la extrapolacion de Richardson con respecto al tiempo y al espacio.

local variables: dx,xnodes,pnodes,qnodes,p1,U,u,Uh,uh,n,Ainv,unew

```
dx = el/M;
```

```
dt = T/N;
```

```
xnodes = linspace(dx,el,M)';
```

```
xnodesh = linspace(dx/2,el,2*M)';
```

the initial value of  $u$  may *\*not\** be zero if source term

$F(x,0)$  is not 0. Handle this separately. Of course, if

$F(x,0)=0$ , this simply generates the zero solution for  $u$ .

```
u = zeros(M,1); needed for U
```

```
U = zeros(M,1); since  $U(x,0) = 0$ 
```

```
u = sm(el,M,dt,0,bta,pnodes,qnodes) (el,M,dt,0,U,u,0,bta,pnodes,qnodes);
```

```
uh = zeros(2*M,1); needed for U
```

```
Uh = zeros(2*M,1); since  $U(x,0) = 0$ 
```

```
uh = sm(el,2*M,dt/2,0,bta,pnodesh,qnodesh) ...
```

```
rhs(el,2*M,dt/2,0,Uh,uh,0,bta,pnodesh,qnodesh);
```

get the coefficient matrix  $A$  only once. To speed things

up in *\*this\** code, we invert  $A$ . In production code one

would obtain LU factorization only once, then repeatedly

forward and backward solve the system.

```
Ainv = inv(sm(el,M,dt,gmma,bta,pnodes,qnodes));
```

```
Ainvh = inv(sm(el,2*M,dt/2,gmma,bta,pnodesh,qnodesh));
```

now march to the requested solution

for n = 1:N

first the full step

```
unew = Ainv*rhs(el,M,dt,n,U,u,gmma,bta,pnodes,qnodes);
```

```
U = U/exp(gmma*dt) + dt/2*(u/exp(gmma*dt) + unew);
```

```
u = unew;
```

then two half steps

```
unew = Ainvh*rhs(el,2*M,dt/2,2*n-1,Uh,uh,gmma,bta,pnodesh,qnodesh);
```

```
Uh = Uh/exp(gmma*dt/2) + dt/4*(uh/exp(gmma*dt/2) + unew);
```

```
uh = unew;
```

```
unew = Ainvh*rhs(el,2*M,dt/2,2*n,Uh,uh,gmma,bta,pnodesh,qnodesh);
```

```
Uh = Uh/exp(gmma*dt/2) + dt/4*(uh/exp(gmma*dt/2) + unew);
```

```
uh= unew;
```

```
end;
```

finally, extrapolation

```
u = 4/3*uh(2:2:2*M) - 1/3*u;
```

```
U = 4/3*Uh(2:2:2*M) - 1/3*U;
```

### **operator.m**

```
function retval = operatorA(M,N,el,T,gmma,bta,gnodes,pnodes,qnodes)
```

```
usage: psi = operatorA(M,N,el,T,gmma,bta,gnodes,pnodes,qnodes)
```

description: constructs and returns the value of operator A

on the function  $q(x)$ , given as a column vector of discrete

values at the abscissa array  $xnodes = \text{linspace}(el/M,el,M)$ .

The function named "mu" should really be  $\mu'(t)$  for this routine.

$gnodes$  is used to define the operator. The  $gnodes$  vector

gives values of  $g$  at nodes  $\text{linspace}(0,el,M+1)$ .

local variables:  $dx,xnodes,U,u,n,Ainv,unew$

```
dx = el/M;
```

```
dt = T/N;
```

```
xnodes = linspace(dx,el,M)';
```

```
u = zeros(M,1); since  $u_t(x, 0) = 0$ 
```

$U = \text{zeros}(M,1)$ ; since  $U(x,0) = 0$   
get the coefficient matrix  $A$  only once. To speed things  
up in *\*this\** code, we invert  $A$ . In production code one  
would obtain LU factorization only once, then repeatedly  
forward and backward solve the system. Or use a band method.

```
Ainv = inv(sm(el,M,dt,gmma,bta,pnodes,qnodes));  
now march to the requested solution  
for n = 1:N  
unew = Ainv*rhs(el,M,dt,n,U,u,gmma,bta,pnodes,qnodes);  
U = U/exp(gmma*dt) + dt/2*(u/exp(gmma*dt) + unew);  
u = unew;  
end;
```

we now have  $U$  at time  $T$  on  $xnodes$

calculate the numerator of returned value

```
retval = ((1+pnodes(1:M-1)*dx/2).*gnodes(1:M-1) - ...  
2*gnodes(2:M) + (1-pnodes(1:M-1)*dx/2).*gnodes(3:M+1));
```

do the last entry by quadratic interpolation

```
retval = [retval;0]/(dx*dx);  
retval = retval./U;  
retval(M) = 3*retval(M-1)-3*retval(M-2)+retval(M-3);
```

#### **sm.m**

```
function retval = sm(el,M,dt,gmma,bta,pnodes,qnodes)
```

```
usage: A = sm(el,M,dt,gmma,bta,pnodes,qnodes)
```

description: returns the system matrix for this problem.

local variables: dx, ii

```
retval = zeros(M,M);  
dx = el/M;  
pnodes = dx/2*pnodes;  
qnodes = dx*dx*qnodes;
```

hacemos primero la fila de las condiciones Dirichlet

```
retval(1,1) = 2 + qnodes(1)*(1-gmma*dt/2);
```

```
retval(1,2) = -1 + pnodes(1);
ahora los nodos interiores
for ii = 2:M-1
retval(ii,ii-1) = -1 - pnodes(ii);
retval(ii,ii) = 2 + qnodes(ii)*(1-gmma*dt/2);
retval(ii,ii+1) = -1 + pnodes(ii);
end;
fijamos la ultima fila por diferencias centradas, etc.
retval(M,M-1) = -2;
retval(M,M) = 2 + qnodes(M)*(1-gmma*dt/2) + (1-pnodes(M))*2*dx/bta;
o hacemos la ultima fila con mas exactitud
retval(M,M-2) = bta;
retval(M,M-1) = -4*bta;
retval(M,M) = 2*dx + 3*bta;
```

#### **forwardsolv.m**

```
function [u,U] = forwardsolv(M,N,el,T,gmma,bta,pnodes,qnodes)
usage: [u,U] = forwardsolv(M,N,el,T,gmma,bta,pnodes,qnodes)
description: constructs and returns the solution to
our problem at time T.
local variables: dx,xnodes,n,Ainv,unew
dx = el/M;
dt = T/N;
xnodes = linspace(dx,el,M)';
the initial value of u may *not* be zero if source term
F(x,0) is not 0. Handle this separately. Of course, if
F(x,0)=0, next lines simply generates the zero solution for u.
u = zeros(M,1); since u(x,0) = 0
U = zeros(M,1); since U(x,0) = 0
u = sm(el,M,dt,gmma,bta,pnodes,qnodes)(el,M,dt,0,U,u,0,bta,pnodes,qnodes);
get the coefficient matrix A only once. To speed things
up in *this* code, we invert A. In production code one
```

would obtain LU factorization only once, then repeatedly forward and backward solve the system.

```
Ainv = inv(sm(el,M,dt,gmma,bta,pnodes,qnodes));
now march to the requested solution
for n = 1:N
unew = Ainv*rhs(el,M,dt,n,U,u,gmma,bta,pnodes,qnodes);
U = U/exp(gmma*dt) + dt/2*(u/exp(gmma*dt) + unew);
u = unew;
end;
```

#### **mu.m**

```
function retval = mu(t)
usage: y = mu(t);
description: Returns value of mu or mu' at scalar t.
global mindex; will give 0th or 1th derivative of mu
global malpha; a parameter for mu
if (mindex == 0)
retval = (1-exp(-malpha*t))/malpha; example 1,2
retval = t2; example3
else
retval = exp(-malpha*t); example 1,2
retval = 2*t; example 3
end;
```

#### **rhs.m**

```
function retval = rhs(el,M,dt,n,U,u,gmma,bta,pnodes,qnodes)
usa: b = rhs(el,M,dt,n,U,u,gmma,bta,pnodes,qnodes)
descripcion: retorna el valor del lado derecho de la ecuacion (5.3)
u(x,T) es u vector; T = n*dt. La entrada los valores a priori de U, u en
(n-1)*dt.
variables locales: dx, xnodes, Fnodes, qnodes,
retval = zeros(M,1);
dx = el/M;
```

```
xnodes = linspace(dx,el,M)';
Fnodes = F(xnodes,n*dt);
retval = dx*dx*(Fnodes + (gamma/exp(gamma*dt)*qnodes).*(U + dt/2*u));
fijamos la primera entrada
retval(1,1) = retval(1,1) + (1+pnodes(1)*dx/2)*mu(n*dt);
fijamos la ultima entrada por diferencias centradas, etc
retval(M,1) = retval(M,1) + (1-pnodes(M)*dx/2)*2*dx/bta*alpha(n*dt);
o con un orden mayor de exactitud
retval(M,1) = 2*dx*alpha(n*dt);
```

### **ejemplo.m**

script: example1.m

use  $\mu(t) = (1 - \exp(-\alpha t)) / \alpha$  for this example  
also use  $F(x,t)=0$ ,  $\alpha(t)=0$  (the rhs of right bdy cond),  
 $\phi(x) = 2 - x/2 + x^2 * \sin(3 * x) / 3$  and  $c(x) = 1 + \cos(3 * x) / 3$ .

Check files alpha.m, F.m and mu.m. Other functions  
are hardwired into this example.

Choices of example 1 are malpha=0.2 and malpha=3.0 for Example 5.1

To get the noise and attempted smoothing of Example 5.2 deremark the  
appropriate lines below.

```
global mindex;
```

```
global malpha;
```

```
files work for Octave or Matlab
```

```
malpha = 3.0;
```

```
el = 2 right hand spatial limit
```

```
T = 2 time limit
```

```
gamma = 1.0 gamma parameter as above
```

```
bta = 1.0 beta boundary parameter as above
```

```
M = 200 space node indices from dx..M
```

```
N = 200 time node indices from dx..N
```

```
dx = el/M;
```

```
xnodes = linspace(dx,el,M)';
```

```
pnodes = ones(size(xnodes))+.3*cos(3*xnodes);
here we wire d into qnodes...we're assuming d=1.
qnodes = 2*ones(size(xnodes))-xnodes/2+xnodes.^2.*sin(3*xnodes)/3;
xnodesh = linspace(dx/2,el,2*M)';
pnodesh = ones(size(xnodesh))+.3*cos(3*xnodesh);
qnodesh = 2*ones(size(xnodesh))-xnodesh/2+xnodesh.^2.*sin(3*xnodesh)/3;
qnodesorig = qnodes;
Here is an operator experiment:
mindex = 0; now mu calculates mu(t)
dx = el/M;
x = linspace(dx,el,M)';
this is our "measurement"
[gnodes,Unodes]=forwardsolvrex(M,M,el,T,gmma,bta,pnodes,qnodes,pnodesh,qnodesh);
gnodes = [mu(T);gnodes];
try randomizing effect for Example 5.2
gnodes = gnodes+0.0001*(rand(size(gnodes))-0.5);
try smoothing this effect
gnodes = polyval(polyfit([0;xnodes],gnodes,10),[0;xnodes]);
gtmp=[gnodes(1);gnodes;gnodes(M+1)];
gnodes = 1/3*(gtmp(1:M+1)+gtmp(2:M+2)+gtmp(3:M+3));
and fix the boundary values
now construct a first approximation to q(x), namely h(x)
mindex = 1; now mu calculates mu'(t)
mumax = 0;
tmpt = linspace(0,T,N);
for jj = 1:N
mumax = max(mumax,abs(mu(tmpt(jj))));
end;
qnodes = ((1+pnodes(1:M-1)*dx/2).*gnodes(1:M-1) - ...
2*gnodes(2:M) + (1-pnodes(1:M-1)*dx/2).*gnodes(3:M+1));
this calculation assumes d=1, else stick it in as factor
```

```
qnodes = [qnodes;0]/(mumax/gmma*(1-exp(-gmma*T))*dx*dx);
do the last entry by quadratic interpolation
qnodes(M) = 3*qnodes(M-1)-3*qnodes(M-2)+qnodes(M-3);
plot(xnodes,qnodes);
disp('qnodes(5):')
disp(qnodes(5))
hold on
for jj = 1:8
qtmp = operatorA(M,N,el,T,gmma,bta,gnodes,pnodes,qnodes);
norm(qtmp-qnodesorig,inf)
qnodes = qtmp;
if (jj > 4)
plot(x,qnodes);
disp('qnodes(5):')
disp(qnodes(5))
end;
end;
finally, plot the true value
plot(x,qnodesorig)
disp('qnodesorig(5):')
disp(qnodesorig(5))
what does this computed q(x) result in? Let's see...
mindex = 0; mu now calculates mu(t)
newgnodes = [mu(T);forwardsolv(M,N,el,T,gmma,bta,pnodes,qnodes)];
disp('Here is the error in original g minus implied g:');
disp(norm(gnodes-newgnodes,inf));
```