



**ANÁLISIS Y MODELAMIENTO DEL COMPORTAMIENTO
ELÁSTICO DE TUBERÍAS**

**JUAN CARLOS REYES RIVERA
WILSON VILLERO OSPINO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
BUCARAMANGA**

2005



**ANÁLISIS Y MODELAMIENTO DEL COMPORTAMIENTO
ELÁSTICO DE TUBERÍAS**

**JUAN CARLOS REYES RIVERA
WILSON VILLERO OSPINO**

**Proyecto de grado en modalidad de investigación para optar el título de
Ingeniero Civil**

**Director
HERNÁN PORRAS DIAZ
Ing. Civil, M. Sc., Ph. D.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
BUCARAMANGA**

2005

Dedicatoria

*A mi mama, por ti estoy aquí,
A mi Papa por su invaluable apoyo,
A Tico, Leydi, Jose y Ana, mis hermanos, por su compañía,
A Keila T. por creer en mí.*

Juan Carlos Reyes Rivera

Dedicatoria

*A mi mamá por apoyarme,
A mi papá por esperarme,
A mi hermana, mis familiares y a Linita por creer en mi,
Y en especial a Dios.*

Wilson Villero Ospino

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus agradecimientos a:

Primeramente a Dios por permitirnos la vida y la salud.

Al doctor Hernán Porras D., director del proyecto, por su invaluable orientación y apoyo en la ejecución del trabajo realizado.

A los profesores José Fernando Jiménez y Pablo Abad Mejía de la Universidad Nacional de Medellín por su colaboración y orientación en la mecánica de los medios continuos.

A Neyid Jasbon por su indispensable orientación.

A nuestros amigos y compañeros, en especial a Freddy Barrera por su paciencia y colaboración.

A Ana milena Andrade por la ayuda prestada en Medellín.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	1
1. TENSORES	3
1.1 NOTACION INDICIAL	3
1.1.1 Convención de sumatorias, índices “falsos”.	3
1.1.2 Índices libres.	4
1.1.3 Delta de Kronecker.	4
1.1.4 Símbolo alternador.	5
1.1.5 Manipulaciones con las notaciones indiciales.	6
1.2 TENSORES	8
1.2.1 Escalares, puntos y vectores.	10
1.2.2 Producto escalar y vectorial.	12
1.2.3 Tensores de orden dos – una aplicación lineal.	14
1.2.4 Componentes de un tensor.	16
1.2.5 Suma de tensores.	17
1.2.6 Producto tensorial (o diádico) de dos tensores	17
1.2.7 Producto de dos tensores.	18
1.2.8 Tensor identidad.	19
1.2.9 Transpuesta de un tensor.	19
1.2.10 Tensor ortogonal.	19
1.2.11 Leyes de transformación para componentes cartesianas de vectores y tensores.	20
1.2.12 Tensores simétricos y antisimétricos.	23
1.2.13 El vector dual de un tensor antisimétrico.	23

1.2.14	Eigenvalores e eigenvectores de un tensor T .	24
1.2.15	Valor principal y dirección principal de un tensor simétrico real.	27
1.2.16	Matriz de un vector con respecto a las direcciones principales.	27
1.2.17	Escalares invariantes de un tensor.	29
1.2.18	Campo escalar, gradiente de un campo escalar.	29
1.2.19	Campo vectorial, gradiente de un campo vectorial.	30
2.	CINEMATICA DEL CONTINUO	32
2.1	TEORIA DEL CONTINUO	32
2.2	DESCRIPCION DEL MOVIMIENTO DEL CONTINUO	33
2.3	DESCRIPCION ESPACIAL Y DESCRIPCION MATERIAL	38
2.3.1	Descripción material.	38
2.3.2	Descripción espacial.	38
2.4	DERIVADAS TEMPORALES: LOCAL, MATERIAL, CONVECTIVA	39
2.4.1	Derivada local.	40
2.4.2	Derivada material.	40
2.4.3	Derivada conectiva.	40
2.5	VELOCIDAD Y ACELERACION	40
2.6	ESTACIONAREIDAD	44
2.7	TRAYECTORIA	44
2.7.1	Ecuación diferencial de las trayectorias.	45
2.8	SUPERFICIE MATERIAL	48
2.9	SUPERFICIE DE CONTROL	48
2.10	VOLUMEN MATERIAL	50
2.11	VOLUMEN DE CONTROL	51
3.	DEFORMACION	52
3.1	TENSOR GRADIENTE DE DEFORMACION	52
3.1.1	Tensor gradiente de deformación inverso.	54
3.2	DEZPLAZAMIENTOS	56
3.3	TENSORES DE DEFORMACION	58

3.3.1	Expresión de los tensores de deformación en términos de los (gradientes de los) desplazamientos.	59
3.4	ESTIRAMIENTO. ALARGAMIENTO UNITARIO	59
3.4.1	Estiramientos, alargamientos unitarios y los tensores de deformación.	61
3.5	VARIACION DE ANGULOS	62
3.6	SIGNIFICADO FISICO DE LOS TENSORES DE DEFORMACION	63
3.6.1	Tensor material de deformación.	63
3.6.2	Tensor Espacial de Deformación.	67
3.7	VELOCIDAD DE DEFORMACION	68
3.7.1	Tensor de velocidad de deformación y tensor spin.	69
3.8	DERIVADAS MATERIALES DE LOS TENSORES DEFORMACION Y OTRAS MAGNITUDES	71
3.8.1	Tensor gradiente de deformación \mathbf{F} y gradiente de la deformación Inverso \mathbf{F}^{-1} .	71
3.8.2	Tensores de deformación \mathbf{E} y \mathbf{e} .	72
3.9	DEFORMACION INFINITESIMAL	73
3.9.1	Tensores de deformación. Tensor de deformación infinitesimal.	73
3.9.2	Estiramiento. Alargamiento unitario.	77
3.9.3	Interpretación física de las deformaciones infinitesimales.	77
3.10	ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD	79
3.10.1	Ejemplo preliminar: ecuaciones de compatibilidad de un campo vectorial potencial.	80
3.10.2	Condiciones de compatibilidad para las deformaciones infinitesimales.	82
3.10.3	Ecuaciones de compatibilidad del tensor velocidad de deformación.	84
4.	TENSIÓN	85
4.1	FUERZAS DE VOLUMEN O MÁNICAS	85
4.2	FUERZAS DE SUPERFICIE	86
4.3	POSTULADOS DE CAUCHY	88

4.4 TENSOR DE TENSIONES	89
4.4.1 Aplicación de la 2a ley de Newton a un medio continuo.	89
4.4.2 Tensor de tensiones.	90
4.4.3 Interpretación geométrica del estado de tensiones en un punto.	95
4.5 PROPIEDADES DEL TENSOR DE TENSORES	98
4.5.1 Ecuación de Cauchy. Ecuación de equilibrio interno.	99
4.5.2 Ecuación de equilibrio en el contorno.	100
4.5.3 Simetría del tensor de tensiones. Principio de momento de momentum.	101
4.5.4 Diagonalización. Tensiones y direcciones principales.	104
4.5.5 Tensión media y presión media.	106
4.5.6 Descomposición del tensor de tensiones en sus partes esférica y desviadora.	107
4.6 CIRCULO DE MOHR EN 3 DIMENSIONES	107
4.6.1 Interpretación gráfica de estados tensionales.	107
4.7 CIRCULO DE MORH EN 2 DIMENSIONES	116
4.7.1 Estado tensional sobre un plano dado.	117
4.7.2 Problema directo: Diagonalización del tensor de tensiones.	119
4.7.3 Problema inverso.	121
4.7.4 Propiedades del círculo de Mohr.	122
4.7.5 El polo del círculo de Mohr. Teorema.	124
5. ELASTICIDAD LINEAL	130
5.1 PROPIEDADES MECANICAS. UNA NOCION EXPERIMENTAL	130
5.2 HIPOTESIS DE LA TEORIA DE ELASTICIDAD LINEAL	134
5.2.1 Deformaciones infinitesimales.	134
5.2.2 Existencia de un estado neutro.	136
5.2.3 Proceso adiabático e isotérmico.	136
5.2.4 Esfuerzos internos en función de las deformaciones.	136
5.3 ECUACION CONSTITUTIVA ELASTICA LINEAL. LEY DE HOOKE GENERALIZADA	137

5.4 ISOTROPIA. CONSTANTES DE LAMÉ. LEY DE HOOKE PARA ELASTICIDAD LINEAL ISOTROPA	138
5.5 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	146
5.5.1 Ecuaciones de gobierno.	146
5.5.2 Condiciones de contorno.	147
5.5.3 Problema “cuasiestático”.	149
5.6 RESOLUCION DEL PROBLEMA ELASTICO LINEAL	152
5.6.1 Planteamiento en desplazamiento: ecuaciones de Navier.	152
5.6.2 Planteamiento en tensiones: ecuaciones de Beltrami-Michell.	153
6. LOS ELEMENTOS FINITOS	160
6.1 EL MODELAMIENTO MATEMATICO	160
6.2 EL MODELAMIENTO COMPUTACIONAL	161
6.3 METODOS NUMERICOS DE USOS MÁS EXTENDIDOS	161
6.3.1 El método de las diferencias finitas.	161
6.3.2 El método variacional.	162
6.3.3 El método de los elementos finitos.	163
6.3.4 El método de los elementos de frontera.	164
6.4 EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	165
6.4.1 Antecedentes Históricos.	166
6.5 EL LENGUAJE DE LOS ELEMENTOS FINITOS (GLOSARIO)	167
6.5.1 Coordenadas.	167
6.5.2 Funciones Incógnitas.	167
6.5.3 Dimensión del problema.	168
6.5.4 Datos del problema.	168
6.5.5 Dominio del problema.	169
6.5.6 Frontera del dominio.	169
6.5.7 Elemento finito.	170
6.5.8 Nodo.	171
6.5.9 Variables primarias.	171
6.5.10 Variables secundarias.	171

6.5.11	Grados de libertad.	172
6.5.12	Funciones de interpolación.	173
6.5.13	Funciones de prueba.	173
6.5.14	Condiciones de frontera.	173
6.5.15	Condiciones de frontera esenciales (Condiciones de contorno en desplazamientos).	174
6.5.16	Condiciones de frontera natural (Condiciones de contorno en tensiones).	175
6.5.17	Combinación lineal.	175
6.6	PASOS EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA CON ELEMENTOS FINITOS	175
6.6.1	Discretización del dominio.	176
6.6.2	Derivación de las ecuaciones para un elemento de la malla.	177
6.6.3	Ensamble de las ecuaciones de elemento.	179
6.6.4	Imposición de las condiciones de frontera.	179
6.6.5	Solución de las ecuaciones.	180
6.6.6	Postproceso de solución.	180
6.7	FORMULACIÓN PARA PROBLEMAS UNIDIMENSIONALES	182
6.7.1	Elementos finitos para ecuaciones de segundo orden unidimensionales.	182
6.7.2	Elementos finitos para ecuaciones de cuarto orden unidimensionales.	202
7.	ELASTICIDAD LINEAL PLANA	217
7.1	ESTADO DE TENSION PLANA	217
7.1.1	Campo de deformaciones. Ecuación constitutiva.	220
7.1.2	Campo de desplazamientos.	222
7.2	DEFORMACION PLANA	223
7.2.1	Campos de deformaciones y de tensiones.	225
7.3	APLICACIÓN DEL PROBLEMA ELASTICO LINEAL	226
7.4	FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL PROBLEMA DE DEFORMACION PLANA	229

8. APLICACION	236
8.1 TUBERIAS	236
8.2 CLASIFICACION DE TUBERIAS	237
8.2.1 Tuberías Rígidas.	237
8.2.2 Tuberías flexibles.	237
8.3 ECUACION MATEMATICA PARA EL ANALISIS ELASTICO	237
8.4 COEFICIENTES DE ELASTICIDAD Y POISSON PARA DIVERSOS MATERIALES	238
8.5 APLICACION A CONDUCTOS ENTERRADOS	239
8.5.1 Cargas sobre conductos enterrados.	239
8.5.2 Condiciones de construcción.	240
8.5.3 Calculo de la carga vertical sobre el tubo en condición de zanja. Teoría de Marston.	245
8.5.4 Calculo de la carga vertical sobre el tubo en condición de terraplén.	246
8.5.4 Ejemplo.	249
8.6 APLICACION A PILOTES	267
8.6.1 PILOTES	267
8.6.2 Ejemplo.	267
8.7 VARIACION DE CARGAS EN UNA TUBERIA DE DIAMETRO CONSTANTE	275
8.8 COMPARACION DE LOS DIAGRAMAS DE VON MISES PARA LOS CUATRO MATERIALES	276
9. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	280
BIBLIOGRAFIA	284
ANEXOS	286

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Esfuerzos de un elemento diferencial	10
Figura 2. Vector	11
Figura 3. Ley del paralelogramo	11
Figura 4. Angulo formado por dos vectores	12
Figura 5. Producto vectorial	13
Figura 6. Producto mixto	14
Figura 7. Aplicación lineal de \mathbb{R} en \mathbb{R}	15
Figura 8. Sistemas de coordenadas	21
Figura 9. Esquematación del medio material	32
Figura 10. Configuración del medio continuo	34
Figura 11. Trayectoria de una partícula	36
Figura 12. Descripción material y espacial de una propiedad	39
Figura 13. Ejemplo 2.2	42
Figura 14. Estacionariedad	44
Figura 15. Trayectoria de una partícula	45
Figura 16. Superficie Material	49
Figura 17. Superficie de Control	49
Figura 18. Volumen Material	50
Figura 19. Volumen de Control	51
Figura 20. Medio continuo en movimiento	52
Figura 21. Desplazamientos	57
Figura 22. Estiramiento y alargamiento unitario	60
Figura 23. Variación de ángulos	63
Figura 24. Tensor material de deformación	64
Figura 25. Angulo entre segmentos	66

Figura 26. Interpretación física del tensor material de deformación	67
Figura 27. Interpretación física del tensor espacial de deformación	69
Figura 28. Tensor de velocidad de deformación	70
Figura 29. Deformación infinitesimal	74
Figura 30. Interpretación física de las deformaciones infinitesimales	78
Figura 31. Campo de deformaciones no compatible	80
Figura 32. Fuerzas superficiales	87
Figura 33. Postulados de Cauchy	89
Figura 34. Tetraedro elemental alrededor de un punto material P	90
Figura 35. Vectores de tracción en el tetraedro elemental	92
Figura 36. Teorema del valor medio	92
Figura 37. Descomposición en componentes del vector de tracción $\mathbf{t}^{(1)}$	94
Figura 38. Vectores de tracción $\mathbf{t}^{(2)}$ y $\mathbf{t}^{(3)}$	95
Figura 39. Representación grafica del tensor de tensiones (notación científica)	96
Figura 40. Representación grafica del tensor de tensiones (notación ingenieril)	97
Figura 41. Descomposición del vector de tracción	98
Figura 42. Tensiones positivas en los planos ocultos	99
Figura 43. Propiedades del tensor de tensiones	100
Figura 44. Diagrama de cuerpo libre paralelepipedo diferencial	102
Figura 45. Diagonalización del tensor de tensiones	105
Figura 46. Descomposición del vector de tracción	109
Figura 47. Lugar geométrico de los puntos (σ, τ)	109
Figura 48. Primera limitación del dominio factible	113
Figura 49. Zona factible	113
Figura 50. Círculos de Mohr en tres dimensiones	114
Figura 51. Reducción del problema de tres a dos dimensiones	117
Figura 52. Estado tensional sobre un palo dado	118

Figura 53. Problema directo y problema inverso	120
Figura 54. Problema inverso	121
Figura 55. Propiedades del círculo de Mohr	122
Figura 56. Propiedades del círculo de Mohr	123
Figura 57. Círculo de Mohr a partir del tensor de tensiones	124
Figura 58. El polo del círculo de Mohr. Teorema	125
Figura 59. El polo del círculo de Mohr. Teorema inverso	125
Figura 60. Demostración: teorema del polo del círculo de Mohr	126
Figura 61. Demostración: teorema del polo del círculo de Mohr	127
Figura 62. Diagrama carga – deformación P vs Δl	131
Figura 63. Diagrama esfuerzo – deformación	132
Figura 64. Esquema de deformaciones infinitesimales	135
Figura 65. Sistemas coordenados $\{x_1, x_2, x_3\}$ y $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$	139
Figura 66. Condiciones especiales de tensión	143
Figura 67. Ejemplo 5.1	145
Figura 68. Esquema del problema elástico lineal	146
Figura 69. Condiciones de contorno	148
Figura 70. Ejemplo 5.2	148
Figura 71. Ejemplo 5.3	156
Figura 72. Esquema del estado de deformación	159
Figura 73. Dominio unidimensional. Viga sometida a flexión	168
Figura 74. Diferentes tipos de elementos en 2-D	170
Figura 75. Modelo geométrico y malla de elementos finitos 1-D	171
Figura 76. Tipos de elementos 3-D	172
Figura 77. Discretización del dominio en elementos	184
Figura 78. Conectividad de los elementos	186
Figura 79. Desplazamientos y fuerzas nodales para el elemento axial	188
Figura 80. Gráfico de las funciones de interpolación para elementos 1-D	192

Figura 81. Correspondencia entre los valores de la variable principal en los nodos. a). Notación global. b) Notación Local	195
Figura 82. Viga sometida a cargas transversales. Nomenclatura para el análisis por elementos finitos	204
Figura 83. Funciones de interpolación para la ecuación de cuarto orden	209
Figura 84. Ensamble de los elementos de la viga	213
Figura 86. Comparación entre las soluciones por elementos finitos, para la función incógnita y sus tres primeras derivadas	216
Figura 87. Esquema representativo del problema elástico lineal plano	219
Figura 88. Hipótesis simplificativa de la teoría de elasticidad lineal plana	220
Figura 89. Ejemplo de estado de deformación plana	224
Figura 90. Esquema del problema elástico lineal	227
Figura 91. Elementos a ser analizados en el ejemplo 7.1	234
Figura 92. Zanja ancha	244
Figura 93. Zanja imperfecta	245
Figura 94. Factor de proyección	248
Figura 95. Condiciones para tramo tubería ($K_0 + 0.64$)	250
Figura 96. Sección discretizada con elementos triangulares	251
Figura 97. Nodos de la sección discretizada	252
Figura 98. Aplicación de cargas y restricciones de desplazamientos	252
Figura 99. Sección deformada caso 1	253
Figura 100. Diagrama de von Mises caso 1	254
Figura 101. Condiciones para tramo tubería ($K_0 + 150$)	255
Figura 102. Sección deformada caso 2	256
Figura 103. Diagrama de von Mises caso 2	257
Figura 104. Condiciones para tramo tubería ($K_0 + 500$)	258
Figura 105. Sección deformada caso 3	259
Figura 106. Diagrama de von Mises caso 3	260
Figura 107. Condiciones para tramo tubería ($K_0 + 720$)	261

Figura 108. Sección deformada caso 4	262
Figura 109. Diagrama de von Mises caso 4	263
Figura 110. Condiciones para tramo tubería ($K_0 + 980$)	264
Figura 111. Sección deformada caso 5	265
Figura 112. Diagrama de von Mises caso 5	266
Figura 113. Condiciones de carga sobre el pilote	268
Figura 114. Diagrama de cortante del pilote	270
Figura 115. Sección del pilote discretizada con elementos triangulares	271
Figura 116. Aplicación de cargas y restricciones de desplazamientos	271
Figura 117. Sección deformada	272
Figura 118. Diagrama de von Mises	272
Figura 119. Tramo del pilote discretizado con elementos de 10 nodos	273
Figura 120. Sección del tramo del pilote deformado	274
Figura 121. Tramo deformado del pilote	274
Figura 122. Diagrama de von Mises para el tramo del pilote	275
Figura 123. Comparacion de los diagramas de von mises para los cuatro materiales	276
Figura 124. Diagrama de von Mises para el concreto	278
Figura 125. Diagrama de von Mises para el novaform	278
Figura 126. Diagrama de von Mises para el hierro fundido	279

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Definiciones de constantes elasticas	144
Tabla 2. Coeficiente de elasticidad y Poisson	238
Tabla 3. Coeficientes de rigidez del terreno $\left(\frac{Kg}{cm^2}\right)$	243
Tabla 4. Valores de la razón de asentamiento r_{ds}	248
Tabla 5. Valores de momento y fuerza cortante para la sección del pilote	269
Tabla 6. Carga aplicada Vs deformación máxima obtenida	276

LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. FUNCIONES DE APROXIMACIÓN	286
Anexo B. FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN	295
Anexo C. METODOS VARIACIONALES	310
Anexo D. FENOMENOS MODELADOS CON AYUDA DE LOS METODOS NUMERICOS	325
Anexo E. PROGRAMA COMPUTACIONAL ANSYS	338

RESUMEN

TITULO: ANÁLISIS Y MODELAMIENTO DEL COMPORTAMIENTO ELÁSTICO DE TUBERÍAS*

AUTORES: JUAN CARLOS REYES RIVERA
WILSON VILLERO OSPINO**

PALABRAS CLAVES: Mecánica del continuo, elemento finito, tubería, modelamiento matemático, teoría de elasticidad.

Este trabajo fue preparado con el propósito de introducir el concepto de mecánica del medio continuo a los que inician en este campo, además de complementarlo con la teoría del método de los elementos finitos con el fin de brindar herramientas que permitan dirigirnos hacia el mundo del modelamiento matemático dentro del campo ingenieril. El propósito de este texto es presentar los modelos físicos y matemáticos necesarios en una discusión elemental de elasticidad. Nos interesan los estados de esfuerzos y desplazamientos relativos interiores a un cuerpo sólido en el caso de las tuberías las cuales están sujetas a un sistema de fuerzas equilibradas. Esta es la línea que nos lleva a relacionar en su evolución el conocimiento del comportamiento de cuerpos sometidos a acciones externas con la formación de un cuerpo matemático y el desarrollo de los principios físicos necesarios. Simplemente se desea transitar por el interior de los modelos físicos y elementos matemáticos allí contenidos procurando ofrecer un material de consulta útil a aquellas personas que deseen una lectura rigurosa de temas relacionados con Elasticidad, Elementos finitos y mecánica del medio continuo. El contenido del texto está claramente dividido en cuatro partes que se presentan secuencialmente: En la primera parte se hace la introducción matemática requerida para el estudio solicitado, en la segunda parte del texto se introducen los conceptos fundamentales y descriptivos comunes a todos los medios continuos (movimiento, deformación y tensión), en esta parte se estudia uno de los tipos específicos de medios continuos como lo son los sólidos, esta parte termina con las formulaciones clásicas de la mecánica de sólidos, se sigue una tercera parte con una descripción del método de los elementos finitos necesario para la solución de las ecuaciones referentes al modelo matemático de elasticidad lineal y finalmente se incursiona en una aplicación de la teoría de elasticidad lineal referida al comportamiento elástico de las tuberías.

* FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS, ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

** Director, HERNÁN PORRAS DIAZ. Ing. Civil, M. Sc., Ph. D.

SUMMARY

TITLE: ANALYSIS AND MODELING OF ELASTICITY BEHAVIOR OF PIPES.*

AUTHORS: JUAN CARLOS REYES RIVERA
WILSON VILLERO OSPINO**

KEYWORDS: Continuum mechanics, finite element, pipe, mathematical model, elasticity theory.

This book was written to introduce the meaning of the continuum mechanics to the beginners on this field and to be a complement of the theory of finite elements method, all this with the purpose of giving the appropriate tools to help us to go in the course of mathematics models in the engineer field. The intention of this book is to show the essential physical and mathematical models for a basic discussion of elasticity. We are interested in the relative effort and displacements conditions from inside a solid, pipes in this case, that is subject to system of balance forces. This is the foundation that takes us to the knowledge of the bodies' behavior when they are submitted to extreme actions, with the mathematical formulation and the needed development of the physical principles. We just want to go through physical patterns and mathematical elements, trying to offer useful information to that people who want to know more about Elasticity, the Finite Elements and the continuum mechanics. The contents of this book has four different parts: In the first one there is an introduction of mathematics that is necessary for the rest of the study, the second part it has been shown the fundamental knowledge of the continuum (movement, deformation, and tension); in this part you can see the specific kinds of continuum such as solids, the third part is a description of the finite elements method which is followed necessary for the solution of the referring equations to the mathematical model of linear elasticity, and the final part bursts into the application of the linear elasticity theory applied to the elastic behavior of the pipes.

* CIVIL ENGINEERING SCHOOL, UIS

** Director, HERNÁN PORRAS DIAZ. Civil engineer, M. Sc., Ph. D.

INTRODUCCIÓN

Desde comienzos de la historia, cuando el hombre grababa en las paredes rocosas su impresión de lo que observaba o sentía, se ha dado cuenta que plasmar su opinión en algún medio gráfico le servía para recordar y actualizar esos sucesos.

A través de los tiempos, muchos investigadores se han dado a la tarea de documentar sus trabajos, lo cual servía no solo para tenerlos de referencia personal sino para que otros tuvieran acceso a los descubrimientos hechos por ellos.

Esta práctica que se ha mantenido hasta nuestros días, ha servido para que el conocimiento se vaya transmitiendo por generaciones, y aun mejor, se vaya actualizando.

De ahí que uno de los objetivos que planteamos en este proyecto es recolectar información que varios autores a lo largo del tiempo han documentado acerca de la Mecánica del Medio Continuo, simplificándola y adaptándola a un texto que esperamos sirva como referencia a los estudiantes de esta asignatura, no solo para información, sino como apoyo a investigaciones que pretendan realizar.

Al abordar una teoría, como Ingenieros Civiles es importante preguntarnos como podemos aplicarla a la realidad que manejamos en nuestro accionar, por lo tanto como un aporte personal a la investigación, aplicaremos los conceptos que trata la Mecánica del Medio Continuo a un fenómeno concerniente a nuestro campo de acción, de modo que las personas interesadas en el tema puedan observar la aplicación a un fenómeno específico y real de Ingeniería, la aplicación que hemos

escogido para el desarrollo de este proyecto es el análisis y modelamiento del comportamiento elástico de tuberías.

Aplicando la teoría de la Mecánica del Medio Continuo al modelamiento de la tubería, llegaremos a un conjunto de ecuaciones diferenciales cuya solución es algo compleja, por lo tanto nos apoyaremos en la solución de estas aplicando un método numérico, particularmente, escogeremos el método de Elementos Finitos, ya que este da excelentes resultados cuando es utilizado para resolver problemas de análisis de esfuerzos que sean descritos por ecuaciones diferenciales parciales bien definidas, con las apropiadas condiciones de frontera. Además, en el momento el método de los Elementos Finitos ha desplazado a un segundo plano a otros métodos numéricos, un indicativo de ello es que la mayoría de paquetes computacionales comerciales los vienen empleando, especialmente en el área de la mecánica de los sólidos, como es el caso de ANSYS.

1. TENSORES

1.1 NOTACION INDICIAL

1.1.1 Convención de sumatorias, índices “falsos”. Considérese la suma:

$$s = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

Se puede escribir:

$$s = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad \text{ó} \quad s = \sum_{j=1}^n a_j x_j \quad \text{ó} \quad s = \sum_{m=1}^n a_m x_m$$

El índice i , ó j , ó m en las ecuaciones anteriores son llamados índices “falsos” en el sentido de que la sumatoria es independiente de la letra usada. Se puede adicionalmente simplificar la escritura de las ecuaciones anteriores si se adopta la siguiente convención: “*Toda repetición de un índice en un mismo monomio de una expresión algebraica supone la sumatoria respecto a dicho índice*”¹.

Esta convención es conocida como convención de sumatoria de Einstein y de acuerdo a esto se tiene:

$$s = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{j=1}^n a_j x_j = \sum_{m=1}^n a_m x_m \equiv a_i x_i = a_j x_j = a_m x_m$$

- **Empleo de notación indicial en igualdades.** Cuando se expresan igualdades de cantidades vectoriales o tensoriales se puede emplear notación compacta, indicial o matricial. De esta manera, por ejemplo, la igualdad de dos tensores A y B se puede indicar de cualquiera de estas tres maneras:

¹ LAI, Michael, RUBIN, David, KREMPL, Erhard. Introduction to Continuum Mechanics. 2^a Edition, New York: Pergamon Press, 1978, p 4.

$$A = B \Leftrightarrow A_{ij} = B_{ij} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

Sin embargo no es correcto escribir:

$$A = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \text{ ni, } A_{ij} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

1.1.2 Índices libres². Un índice que solo aparece una vez en cada término de una ecuación es llamado “índice libre”, el cual tomara los valores 1, 2 o 3 *de uno en uno*, como ejemplo, considérese el siguiente sistema de ecuaciones:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

Usando la convención de sumatorias podemos escribir:

$$y_1 = a_{1m}x_m$$

$$y_2 = a_{2m}x_m$$

$$y_3 = a_{3m}x_m$$

Lo cual puede ser escrito de forma corta así:

$$y_i = a_{im}x_m, \quad i = 1,2,3.$$

Es importante tener en cuenta que un índice libre que aparezca en una expresión algebraica debe ser igual en cada uno de los términos de esta, es decir que una expresión como $a_i = b_j$ carece de sentido pues $i \neq j$. En conclusión para que algún índice sea considerado índice libre deben aparecer en todos y cada uno de los términos de la expresión.

1.1.3 Delta de Kronecker³. El delta de Kronecker, denotado por δ_{ij} , se define como:

² LAI, Op. cit., p. 6.

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 \quad \text{si } i = j \\ &\quad \text{ó} \\ \delta_{ij} &= 0 \quad \text{si } i \neq j \end{aligned}$$

En otras palabras:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces se puede enunciar las siguientes propiedades:

- $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$
- $\delta_{im} a_m = a_i$
- $\delta_{im} T_{mj} = T_{ij}$
- Si $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ son vectores unitarios y perpendiculares entre si, entonces

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

1.1.4 Símbolo alternador⁴. Previamente de define permutación par e impar:

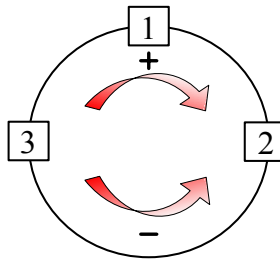
Sean i, j, k una permutación de los números 1, 2, 3. Se dice que la permutación es par si i, j, k son tres números consecutivos del conjunto 1, 2, 3, 1, 2 y se dice que una permutación es impar en caso contrario. Por ejemplo, 2, 3, 1 es una permutación par de los números 1, 2, 3 y 2, 1, 3 es una permutación impar de los mismos.

El símbolo alternador, denotado por ϵ_{ijk} , esta definido por:

$$\epsilon_{ijk} = \left. \begin{array}{l} 1 \quad \text{si } i, j, k \text{ es una permutacion par de los numeros } 1, 2, 3 \rightarrow (\text{sentido horario}) \\ -1 \quad \text{si } i, j, k \text{ es una permutacion impar de los numeros } 1, 2, 3 \rightarrow (\text{sentido antihorario}) \\ 0 \quad \text{si dos o mas de los subindices } i, j, k \text{ son iguales} \end{array} \right\}$$

³ GOICOLEA R., José M. Mecánica del medio continuo: resumen de álgebra y cálculo tensorial. Madrid: universidad politécnica de Madrid.2002, p14.

⁴ SHARIPOV, R. A. Quick introduction to analysis tensorial. Russia: 2004, p 8.



Es decir:

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1.$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1.$$

$$\epsilon_{111} = \epsilon_{221} = \dots = 0.$$

Nótese que:

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}$$

Si $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ cumplen con la regla de la mano derecha, entonces:

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \text{Etc...}$$

Lo cual se puede escribir como:

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k.$$

Ahora, si $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ y $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$, entonces:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \times (b_j \mathbf{e}_j) = a_i b_j (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = a_i b_j \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k,$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \epsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k.$$

1.1.5 Manipulaciones con las notaciones indiciales⁵.

- **Sustitución:**

Si,

$$a_i = U_{im} b_m$$

⁵ LAI, Op. cit., p. 9.

Y

$$b_i = V_{im} c_m$$

Entonces:

$$b_m = V_{mn} c_n.$$

Reemplazando:

$$a_i = U_{im} V_{mn} c_n.$$

• **Multiplicación:**

Si

$$p = a_m b_m$$

Y

$$q = c_m d_m$$

Entonces:

$$pq = a_m b_m c_m d_m.$$

Es importante notar que $pq \neq a_m b_m c_m d_m$. De hecho el lado derecho de la expresión no está definido bajo la convención de sumatoria y por tal motivo es obvio que:

$$pq \neq \sum_{m=1}^3 a_m b_m c_m d_m.$$

Considerando que el producto de vectores es distributivo, y se tiene $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ y $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$ entonces:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \cdot (b_j \mathbf{e}_j) = a_i b_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j).$$

En particular, si $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ son vectores unitarios perpendiculares entre sí, entonces $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Así que:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i = a_j b_j = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

- **Factorización:**

Si

$$T_{ij}n_j - \lambda n_i = 0,$$

Entonces, usando el delta de Kronecker, se puede escribir:

$$n_i = \delta_{ij}n_j,$$

Reemplazando:

$$T_{ij}n_j - \lambda\delta_{ij}n_j = 0,$$

Así:

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})n_j = 0,$$

1.2 TENSORES

El análisis tensorial puede considerarse como una generalización del análisis vectorial aplicado a ciertas cantidades matemáticas y físicas conocidas como tensores que requieren más de tres componentes para su completa especificación. Hay además algunas leyes desde el punto de vista de la física que sirven para transformar las componentes de tensores cuando se cambian los ejes. Para suscitar interés en el estudio de los tensores como parte esencial de la mecánica de los medios continuos, primero se proporciona un ejemplo.

Ejemplo 1.1. Recuérdese del curso de Mecánica de Materiales, cuando un cuerpo elástico se deforma, en general se producirán en él ciertas fuerzas internas. En cualquier punto particular **P** dentro de tal cuerpo, sea un área plana elemental cuya normal este en dirección del eje x_1 de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares $Ox_1x_2x_3$ (ver figura 1) la fuerza por unidad de área sobre este elemento debida al material en contacto con él es un vector que tiene tres

componentes cartesianas rectangulares, que pueden representarse por $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$.

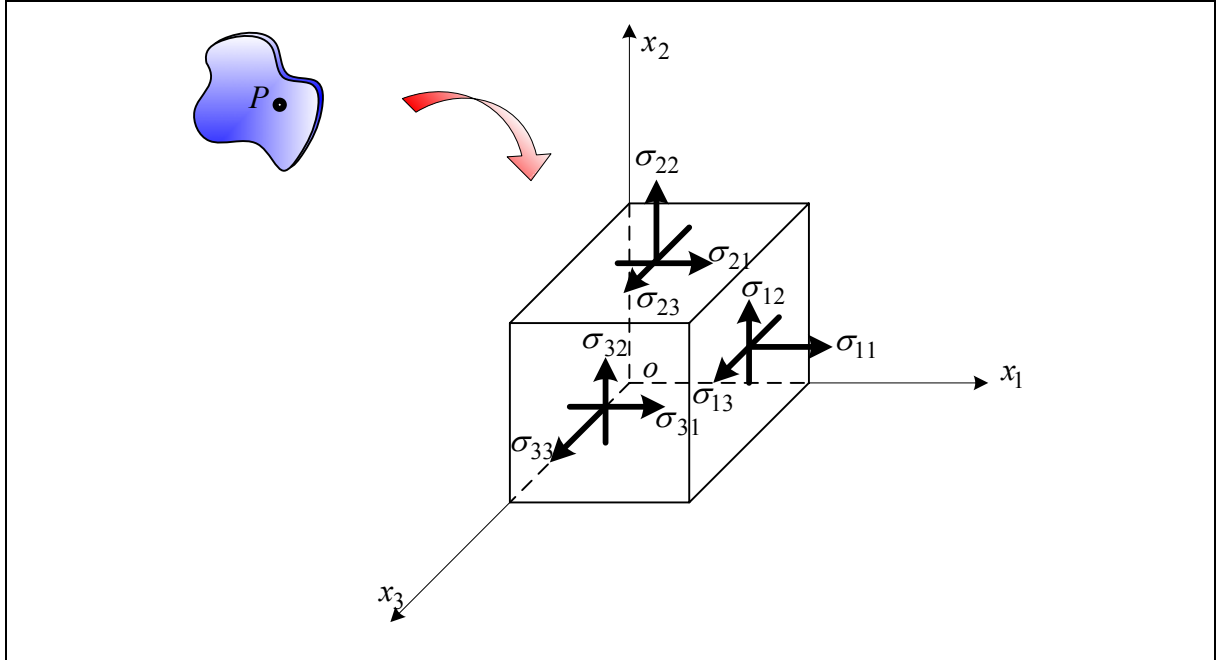
De manera semejante las fuerzas por unidad de área sobre las áreas elementales planas en \mathbf{P} cuyas normales están en las direcciones Ox_2 y Ox_3 , respectivamente, tendrán componentes que pueden ser representadas por $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$ y $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$, respectivamente. Se puede demostrar que, en general, las nueve componentes $\sigma_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ son necesarias para determinar completamente el “estado de esfuerzo” en el punto \mathbf{P} .

Es importante notar que, en el caso particular del tensor esfuerzo, con componentes σ_{ij} , mencionado anteriormente, el primer subíndice indica la dirección que sigue la normal con respecto a determinado elemento, y el segundo la dirección de la componente del esfuerzo que actúa sobre ese elemento.

Además, aplicando las leyes de movimiento de Newton a una parte elemental del cuerpo, es posible deducir exactamente cómo estas componentes se transforman en una rotación de ejes.

Hay otras muchas cantidades matemáticas y físicas que pueden describirse de la misma manera que el **esfuerzo**, estas cantidades son conocidas como **tensores**.

Figura 1. Esfuerzos de un elemento diferencial



El interés de esta sección es presentar la matemática básica concerniente al análisis tensorial por ser este el fundamento matemático de la **mecánica del medio continuo**.

1.2.1 Escalares, puntos y vectores⁶. Los elementos $\alpha \in \mathbb{R}$ se denominan escalares y pueden considerarse como tensores de orden cero, como se justificara más adelante.

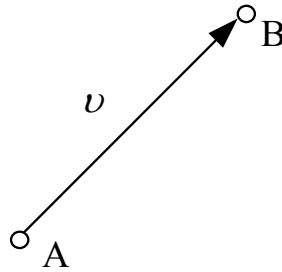
Los elementos $A \in E^3$ se denominan puntos. El segmento orientado con origen en un punto A y final en otro B se denomina vector:

El conjunto de los vectores, junto con las operaciones de suma de vectores mediante la ley del paralelogramo (ver Figura 3) y producto por un escalar tiene la

⁶ GOICOLEA, Op. cit., p. 2.

estructura de espacio vectorial Euclidiano, denominándose V , espacio vectorial asociado a E^3 .

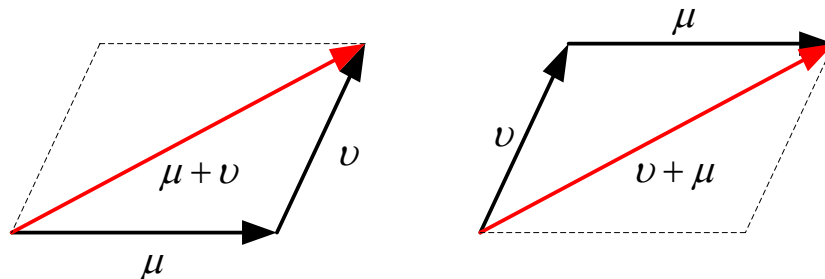
Figura 2. Vector



Esquemáticamente, las propiedades axiomáticas del espacio vectorial, para elementos $a, b, c \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, son:

$$\begin{aligned}
 a + b &= b + a, \\
 (a + b) + c &= a + (b + c), \\
 \exists 0 \mid a + 0 &= a, \\
 \exists (-a) \mid a + (-a) &= 0; \\
 \lambda(a + b) &= \lambda a + \lambda b, \\
 (\lambda + \mu)a &= a\lambda + a\mu, \\
 \lambda(\mu a) &= (\lambda\mu)a, \\
 1 \cdot a &= a.
 \end{aligned}$$

Figura 3. Ley del paralelogramo



Fijado un origen $o \in E^3$, existe una equivalencia entre puntos y vectores, ya que cada punto x está asociado al vector $x = \overrightarrow{ox}$. Por este motivo en ocasiones se empleara la notación x para referirnos a los puntos.

1.2.2 Producto escalar y vectorial. El **producto escalar** de vectores $a, b \in V$ es una operación simétrica, simbolizada por un punto (\cdot), mediante la cual se obtiene un número real ($a \cdot b \in \mathbb{R}$), con las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= b \cdot a, \\ (\lambda a + \mu b) \cdot c &= (\lambda a \cdot c) + (\mu b \cdot c), \\ a \cdot a &> 0; \\ a \cdot a = 0 &\Leftrightarrow a = 0 \end{aligned}$$

La norma o magnitud de un vector se define como:

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}$$

Interpretándose como la distancia entre los puntos origen y final del mismo, $|a| = |\overline{AB}| = \text{dis}(A, B)$. Como consecuencia de los axiomas anteriores se obtienen diversas propiedades interesantes, como la desigualdad de Cauchy- Schwartz:

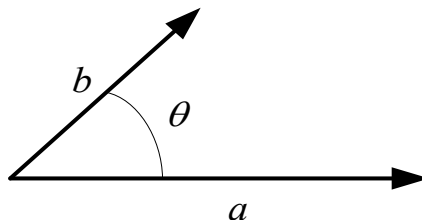
$$|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|$$

Por otra parte, el producto escalar puede interpretarse geoméricamente como:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \theta$$

Siendo θ el ángulo formado por a y b (ver Figura 4). Cuando el producto escalar de dos vectores es nulo ($a \cdot b = 0$) se dice que son normales o perpendiculares.

Figura 4. Ángulo formado por dos vectores



El **producto vectorial** de vectores es una operación hemisimétrica (antisimétrica) entre vectores, simbolizada por una cruz (\times), cuyo resultado es otro vector ($\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in V$), con las propiedades:

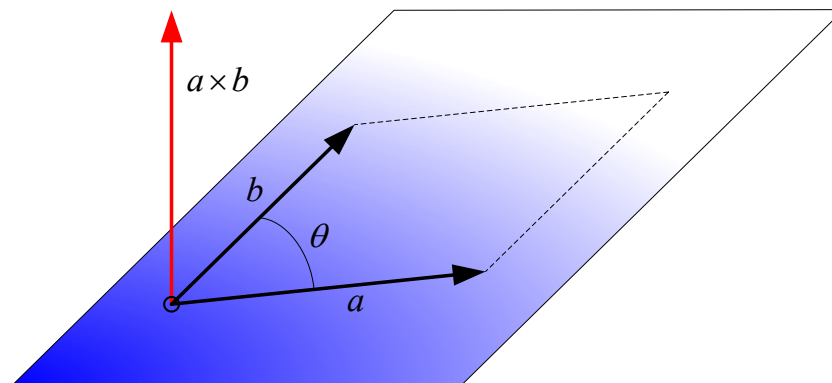
$$\begin{aligned} \mathbf{b} \times \mathbf{a} &= -\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \\ (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= 0, \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

El producto vectorial se interpreta geoméricamente como un vector perpendicular al plano formado por los dos vectores que se multiplican, orientado según la regla de la mano derecha (sentido del pulgar cuando el índice va del primer vector al segundo), y cuya magnitud es:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \theta$$

Es decir el área del paralelogramo formado por los dos vectores (ver Figura 5).

Figura 5. Producto vectorial



Por último, a partir de los productos escalar y vectorial se puede definir el producto mixto de tres vectores:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

El producto mixto es obviamente un escalar. Por las propiedades de los productos escalar y vectorial puede demostrarse fácilmente que:

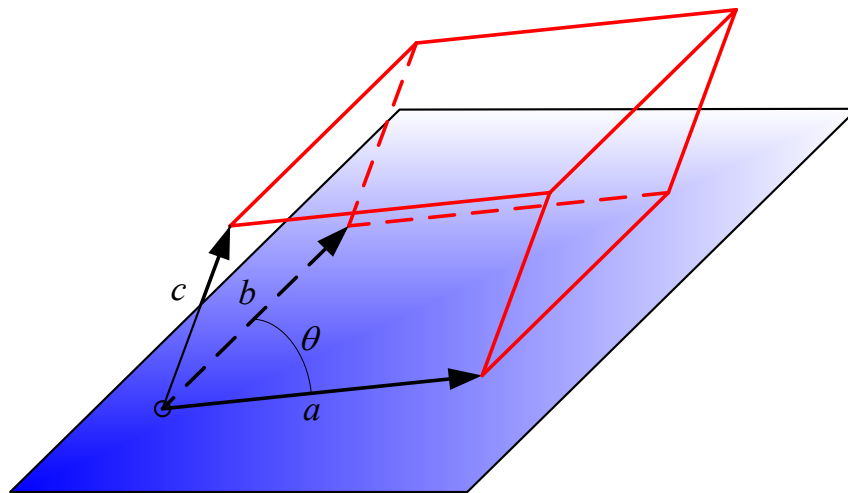
$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Es decir que se pueden intercambiar los productos escalar y vectorial. Como consecuencia, se obtienen las igualdades:

$$\begin{aligned} [a, b, c] &= [b, c, a] = [c, a, b], \\ -[a, b, c] &= -[b, c, a] = -[c, a, b], \\ [\lambda a + \mu b, c, d] &= \lambda[a, c, d] + \mu[b, c, d], \\ [a, b, c] = 0 &\Leftrightarrow (a, b, c) \text{ linealmente independientes} \end{aligned}$$

Se observa por tanto que el signo del resultado se mantiene si se efectúa una permutación par de los vectores, y se invierte si es impar. La interpretación geométrica del producto mixto es el volumen del paralelepípedo que forman los tres vectores (ver Figura 6).

Figura 6. Producto mixto



1.2.3 Tensores de orden dos – una aplicación lineal.

- **Aplicaciones lineales.** Dentro de los entes que se han considerado, las aplicaciones lineales más sencillas son las de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es decir que para un escalar $x \in \mathbb{r}$ producen otro escalar $y = \phi(x)$. Es fácil comprobar que si cumple la propiedad de linealidad ($\phi(\lambda x + \mu y) = \lambda \phi(x) + \mu \phi(y)$), la forma que debe tomar la función es el producto por un determinado escalar, que (sin que dejar lugar a

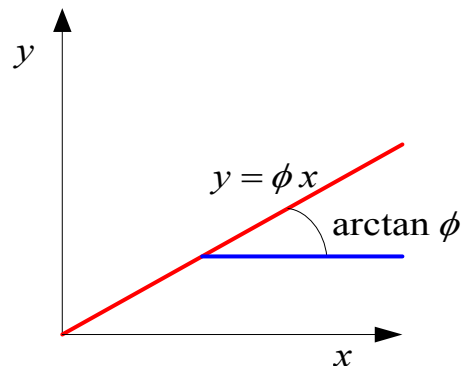
equivoco) se denomina también $\phi : \phi(x) = \phi \cdot x$. Esta aplicación, que se asimila por tanto a un escalar ϕ , puede considerarse como un *tensor de orden cero*.

El siguiente tipo de aplicación que se considera es la que asocia a un vector cualquiera $u \in V$ un escalar, $\sigma(u) \in \mathbb{R}$. La propiedad de linealidad en este caso es $\sigma(\lambda u + \mu v) = \lambda \sigma(u) + \mu \sigma(v)$. Esta propiedad precisamente la verifica el *producto escalar*, por lo que un vector cualquiera a define una aplicación lineal asociada, el producto escalar:

$$\sigma(u) = a \cdot u$$

Esta propiedad permite identificar los vectores como *tensores de orden uno*.

Figura 7. Aplicación lineal de R en R



La siguiente extensión lógica a las aplicaciones que se analiza, es la de aplicaciones lineales de vectores en vectores, que como se observará a continuación se denomina:

- **Tensores de orden dos.** Se denomina tensor de orden dos sobre un espacio vectorial V a una aplicación lineal $T : V \rightarrow V$, de forma que:

$$V \ni v \mapsto T(v) = T \cdot v \in V$$

La linealidad se traduce de forma resumida en la propiedad siguiente:

$$T(\lambda u + \mu v) = \lambda(Tu) + \mu(Tv) \quad \forall u, v \in V$$

El conjunto de tensores de orden dos sobre v se denota por v^2 , y tiene la estructura de espacio vectorial de dimensión $3^2=9$.

1.2.4 Componentes de un tensor. Sean e_1, e_2, e_3 vectores unitarios en la dirección de los respectivos ejes X, Y, Z de un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares*. Se dice entonces que las componentes cartesianas de un vector a están dadas por:

$$\begin{aligned} a_1 &= e_1 \cdot a \\ a_2 &= e_2 \cdot a \\ a_3 &= e_3 \cdot a \end{aligned}$$

Donde a es la magnitud del vector. Entonces se puede representar el vector a en términos de sus componentes así:

$$a = e_1 \cdot a_1 + e_2 \cdot a_2 + e_3 \cdot a_3$$

Ahora se analiza un tensor T . Para un vector a (usando el concepto de aplicación lineal), $b = T a$ es un vector dado por:

$$b = T a = a_1 T e_1 + a_2 T e_2 + a_3 T e_3$$

Las componentes de b estarán dadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} b_1 &= b \cdot e_1 = a_1 e_1 \cdot T e_1 + a_2 e_1 \cdot T e_2 + a_3 e_1 \cdot T e_3, \\ b_2 &= b \cdot e_2 = a_1 e_2 \cdot T e_1 + a_2 e_2 \cdot T e_2 + a_3 e_2 \cdot T e_3, \\ b_3 &= b \cdot e_3 = a_1 e_3 \cdot T e_1 + a_2 e_3 \cdot T e_2 + a_3 e_3 \cdot T e_3, \end{aligned}$$

Si se define $T_{ij} = e_i \cdot T e_j$, se puede concluir que:

$$b_i = T_{ij} a_j$$

Expresión de la cual (teniendo en cuenta la convención de Einstein) se puede derivar, para $i=1,2,3$ y $j=1,2,3$; un sistema de tres ecuaciones el cual es posible expresar de la siguiente manera:

* Lo que también conocemos como base ortonormal.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Donde la matriz:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Es conocida como *matriz del tensor* T respecto a los vectores unitarios $\{e_1, e_2, e_3\}$.

1.2.5 Suma de tensores. Dados los tensores T y S , la suma de T y S denotada por $(T + S)$, se define así:

$$(T + S)a = Ta + Sa,$$

Para cualquier a . Es claro que la suma $(T + S)$ es también un tensor.

Las componentes de $(T + S)$ son:

$$(T + S)_{ij} = e_i \cdot (T + S)_j = e_i \cdot Te_j + e_i \cdot Se_j$$

Lo cual de forma general sería:

$$(T + S)_{ij} = T_{ij} + S_{ij}$$

1.2.6 Producto tensorial (o diádico) de dos tensores⁷. El producto tensorial o “diádico” de a y b denotado por $a \otimes b$ es definido como una aplicación, mediante la cual se transforma cualquier c de acuerdo a la regla:

$$(a \otimes b)c = a(b \cdot c)$$

Ahora, para cualquier c, d, α y β , tenemos, de acuerdo a la regla:

$$\begin{aligned} (a \otimes b)(\alpha c + \beta d) &= a[b \cdot (\alpha c + \beta d)] \\ &= a[\alpha(b \cdot c) + \beta(b \cdot d)] \\ &= a\alpha(b \cdot c) + \beta a(b \cdot d) \\ &= \alpha(ab)c + \beta(ab)d \end{aligned}$$

De modo que $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$ es un tensor y sus componentes respecto a $\{e_1, e_2, e_3\}$ son:

$$(\mathbf{ab})_{ij} = e_i \cdot (\mathbf{ab})e_j = e_i \cdot [\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot e_j)] = e_i \cdot (\mathbf{ab}_j) = (e_i \cdot \mathbf{a})b_j = a_i b_j$$

En forma matricial se podría:

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot [b_1 \quad b_2 \quad b_3]$$

1.2.7 Producto de dos tensores⁸. Si T y S son dos tensores, entonces TS y ST están definidos como las transformaciones:

$$(TS)\mathbf{a} = T(S\mathbf{a}) \quad \text{y} \quad (ST)\mathbf{a} = S(T\mathbf{a})$$

Así las componentes de (TS) son:

$$(TS)_{ij} = e_i \cdot (TS)e_j = e_i \cdot T(Se_j) = e_i \cdot T(S_{mj}e_m) = S_{mj}(e_i \cdot Te_m)$$

Lo que equivale a:

$$(TS)_{ij} = T_{im}S_{mj} \quad \text{ó} \quad (ST)_{ij} = S_{im}T_{mj}$$

Lo cual se puede expresar de modo matricial como:

$$[TS] = [T][S] \quad \text{ó} \quad [ST] = [S][T]$$

Se debe enfatizar en general que $TS \neq ST$, es decir que el producto de tensores no es conmutativo. Pero el producto de tensores si cumple con la ley asociativa, es decir:

Si T, S y V son tensores, entonces:

$$(T(SV))\mathbf{a} = T((SV)\mathbf{a}) = T(S(V\mathbf{a})) = (TS)(V\mathbf{a}) = T(S(V\mathbf{a}))$$

Por ejemplo:

$$T(SV) = (TS)V$$

Además, el producto de tensores también cumple con la ley distributiva, esto es:

⁷ LAI, Op. cit., p. 14.

⁸ CALCOTE, Lee R. Introduction to continuum mechanics. New Jersey: D. Van Nostrand Company Inc. 1968. p. 33.

$$T(S + V) = (T + S)(T + V)$$

1.2.8 Tensor identidad. La aplicación lineal mediante la cual se transforma un vector en el mismo es llamada **tensor identidad**. Denotándose este tensor especial con la letra I , tenemos;

$$Ia = a$$

En particular:

$$Ie_1 = e_1$$

$$Ie_2 = e_2$$

$$Ie_3 = e_3$$

Así las componentes cartesianas del tensor identidad son:

$$I_{ij} = e_i \cdot Ie_j = e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

Por ejemplo:

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.9 Transpuesta de un tensor. La transpuesta de un tensor T , denotada por T^T , se define como el tensor que satisface la siguiente identidad para cualquier vector a y b :

$$a \cdot (Tb) = b \cdot (T^T a)$$

De acuerdo a esta definición, se tiene:

$$e_i \cdot (Te_j) = e_j \cdot (T^T e_i) = T_{ij} = T^T_{ij}$$

1.2.10 Tensor ortogonal. Un tensor ortogonal es una aplicación lineal mediante la cual el vector transformado mantiene su magnitud y su ángulo. Por ejemplo, sea Q un tensor ortogonal, entonces por definición se tiene que $|Qa| = |a|$ y $\cos(a, b) = \cos(Qa, Qb)$, para cualquier a y b .

Se puede probar que el producto de un tensor ortogonal Q con su correspondiente tensor transpuesto da como resultado el tensor identidad I , es decir:

$$Q^T Q = I$$

1.2.11 Leyes de transformación para componentes cartesianas de vectores y tensores⁹. Supuestos $\{e_1, e_2, e_3\}$ y $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ como vectores unitarios correspondientes a dos sistemas de coordenadas cartesianas rectangulares diferentes (ver Figura 8) Es claro que $\{e_1, e_2, e_3\}$ puede hacerse coincidir con $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ ya sea mediante una rotación o mediante una rotación seguido de una reflexión de ejes.

En conclusión es posible afirmar que $\{e_1, e_2, e_3\}$ y $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ están relacionados por un tensor ortogonal Q , mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} e'_i &= Q e_i = Q_{mi} e_m, \\ e'_1 &= Q_{11} e_1 + Q_{21} e_2 + Q_{31} e_3, \\ e'_2 &= Q_{12} e_1 + Q_{22} e_2 + Q_{32} e_3, \\ e'_3 &= Q_{13} e_1 + Q_{23} e_3 + Q_{33} e_3 \end{aligned}$$

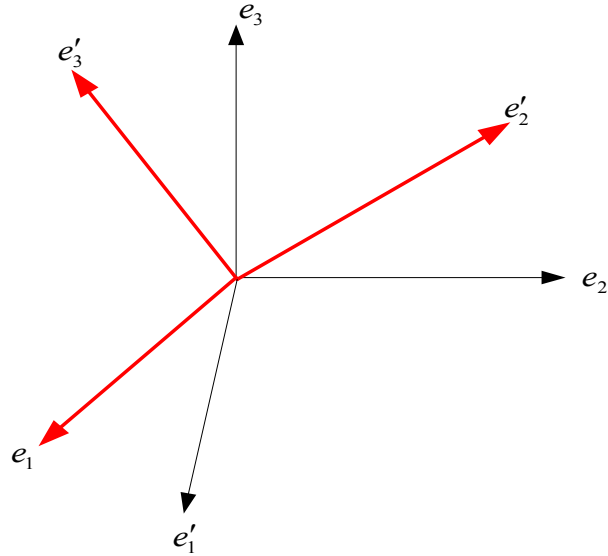
Donde $Q_{mi} Q_{mj} = Q_{im} Q_{jm} = \delta_{ij}$ (Por ejemplo, $Q Q^T = Q^T Q = I$).

Se considera ahora un vector \mathbf{a} . Las componentes cartesianas de \mathbf{a} con respecto a $\{e_1, e_2, e_3\}$ y $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ son $a_i = e_i \cdot \mathbf{a}$ y $a'_i = e'_i \cdot \mathbf{a}$ respectivamente. Dado que $a'_i = e'_i \cdot \mathbf{a} = Q_{mi} e_m \cdot \mathbf{a}$, entonces se tiene:

$$a'_i = Q_{mi} a_m \tag{1.1}$$

⁹ SHARIPOV, Op. cit., p. 21.

Figura 8. Sistemas de coordenadas



Lo que en forma matricial es posible escribir como:

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix}_{e'_i} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{e_i} \equiv [a]' = [Q]^T [a]$$

La ecuación (1.1) es la ley de transformación relativa a las componentes de vectores idénticos con respecto a diferentes bases cartesianas unitarias.

Ahora se considera un tensor T cualquiera. Las componentes de T respecto a (1.1), y $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ son $T_{ij} = e_i \cdot T e_j$ y $T'_{ij} = e'_i \cdot T e'_j$, respectivamente. Dado que:

$$T'_{ij} = e'_i \cdot T e'_j = Q_{mj} e'_m \cdot T Q_{nj} e'_n = Q_{mj} Q_{nj} (e'_m \cdot T e'_n),$$

Se tiene:

$$T'_{ij} = Q_{mj} Q_{nj} (T_{mn}) \quad (1.2)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix}_{e'_i} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix}_{e_i} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}_{e_i} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}_{e_i}$$

O en forma corta:

$$[T]' = [Q]^T [T] [Q]$$

Equivalentemente:

$$T_{ij} = Q_{mj} Q_{nj} (T'_{mn}) \quad (1.3)$$

Las ecuaciones (1.2) y (1.3) representan la ley de transformación de relativa a las componentes de tensores idénticos con respecto a diferentes bases unitarias cartesianas.

Las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) condicionan que si las componentes de un tensor (o vector) con respecto a un sistema base ortonormal cartesiano $\{e_1, e_2, e_3\}$ son conocidas, entonces sus componentes respecto con respecto a cualquier sistema coordinado base ortonormal cartesiano $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ son únicamente determinados por estas. En otras palabras las componentes T_{ij} (o a_i) con respecto a un sistema cartesiano $\{e_1, e_2, e_3\}$ caracterizan completamente a un tensor o a un vector. Así, perfectamente tiene sentido usar expresiones como “*considerar un tensor T_{ij}* ” lo cual significa considerar un tensor \mathbf{T} cuyas componentes respecto a cualquier sistema de coordenadas cartesianas $\{e_1, e_2, e_3\}$ son T_{ij} . Centrándose solo en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares y usando vectores unitarios a lo largo de las direcciones positivas como vectores base, es posible dar las siguientes definiciones:

$$\alpha' = \alpha \quad \text{tensor de orden cero (o escalar)}$$

$$a'_i = Q_{mi} a_m \quad \text{tensor de primer orden (o vector)}$$

$$T'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn} \quad \text{tensor de segundo orden (o tensor)}$$

$$T'_{ijk} = Q_{mi} Q_{mj} Q_{rk} T_{mnr} \quad \text{tensor de tercer orden}$$

1.2.12 Tensores simétricos y antisimétricos¹⁰. Un tensor T es llamado simétrico si $T = T^T$, de modo que las componentes de un tensor simétrico T cumplen con las siguientes características:

$$T_{ij} = (T^T)_{ij} = T_{ji} \equiv T_{12} = T_{21}, T_{13} = T_{31} \text{ y } T_{23} = T_{32}$$

Un tensor T es llamado antisimétrico si $T = -T^T$, de modo que las componentes de un tensor antisimétrico T cumplen con las siguientes características:

$$T_{ij} = -(T^T)_{ij} = -T_{ji} \equiv T_{12} = -T_{21}, T_{13} = -T_{31} \text{ y } T_{23} = -T_{32}$$

Cualquier tensor T puede ser descompuesto como la suma de un tensor simétrico y un tensor antisimétrico. De hecho:

$$T = T^S + T^A$$

Donde:

$$T^S = \frac{T + T^T}{2} \quad \text{Es Simétrico.}$$

Y

$$T^A = \frac{T - T^T}{2} \quad \text{Es antisimétrico.}$$

1.2.13 El vector dual de un tensor antisimétrico. Para cualquier tensor antisimétrico, es posible siempre encontrar un vector, llamado vector dual de T o también conocido como vector axial de T , denotado por t^A , bajo el cual un vector a cualquiera es transformado por el tensor T en el vector $t^A \times a$. Esto es:

$$T a = t^A \times a$$

Las componentes de t^A pueden ser halladas de la siguiente manera:

De $T e_j = t^A \times e_j$, tenemos:

$$T_{ij} = e_i \cdot T e_j = e_i \cdot (t^A \times e_j) = t^A \cdot (e_j \times e_i)$$

¹⁰ GOICOLEA R., Op. cit., p. 17.

Si $(e_j \times e_i) = -(e_i \times e_j)$, T_{ij} debe ser igual a $-T_{ji}$ para que t^A exista. Cuando $T_{ij} = -T_{ji}$ (T es antisimétrico) las componentes por fuera de la diagonal principal de T_{ij} están relacionadas a las componentes de t^A de la siguiente manera, si (e_1, e_2, e_3) cumplen con la regla de la mano derecha:

$$T_{32} = -T_{23} = e_3 \cdot T e_2 = t^A \cdot (e_2 \times e_3) = t^A \cdot e_1 = t^A_1$$

$$T_{13} = -T_{31} = e_1 \cdot T e_3 = t^A \cdot (e_3 \times e_1) = t^A \cdot e_2 = t^A_2$$

$$T_{21} = -T_{12} = e_2 \cdot T e_1 = t^A \cdot (e_1 \times e_2) = t^A \cdot e_3 = t^A_3$$

Así

$$t^A = T_{32}e_1 + T_{13}e_2 + T_{21}e_3$$

ó

$$t^A = -(T_{23}e_1 + T_{31}e_2 + T_{12}e_3)$$

1.2.14 Eigenvalores e eigenvectores de un tensor T ¹¹. Se considera un tensor T cualquiera, si a es un vector el cual es transformado por T en un vector paralelo a el mismo, es decir, $T a = \lambda a$, entonces a es un eigenvector y λ es un eigenvalor.

Si a es un eigenvector con el correspondiente eigenvalor λ de la transformación lineal de T , entonces cualquier vector paralelo a a es también un eigenvector con el mismo eigenvalor λ . De hecho, para cualquier escalar α :

$$T(\alpha a) = \alpha T a = \alpha(\lambda a) = \lambda(\alpha a)$$

Un tensor puede tener eigenvectores en muchas direcciones diferentes. De hecho, dado que $I a = a$, cualquier vector es un eigenvector del tensor identidad I , con eigenvalores iguales a la unidad. Para el tensor αI lo dicho anteriormente también es cierto, excepto que los eigenvalores ahora serán igual a α .

¹¹ HEINBOCKEL, J. H. Introduction to tensor calculus and continuum mechanics. U.S.A: Old Dominion university, 1996. p. 178.

Algunos tensores solo tienen eigenvectores en una dirección. Por ejemplo, para cualquier tensor de rotación, cuya rotación alrededor de un eje y para un ángulo barrido que no sea múltiplo entero de π , solamente los vectores que son paralelos a los ejes de rotación permanecerán paralelos a ellos mismos.

Sea n un eigenvector unitario, entonces $Tn = \lambda n = I\lambda n$. Así:

$$(T - I\lambda)n = 0$$

Si $n = \alpha_i e_i$, entonces escrito en forma de componentes:

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij})\alpha_j = 0 \quad \text{con} \quad \alpha_j \alpha_j = 1$$

Lo que equivale a:

$$(T_{11} - \lambda)\alpha_1 + (T_{12})\alpha_2 + (T_{13})\alpha_3 = 0, \quad (1.4)$$

$$(T_{21})\alpha_1 + (T_{22} - \lambda)\alpha_2 + (T_{23})\alpha_3 = 0, \quad (1.5)$$

$$(T_{31})\alpha_1 + (T_{32})\alpha_2 + (T_{33} - \lambda)\alpha_3 = 0, \quad (1.6)$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1. \quad (1.7)$$

Las ecuaciones (1.4, 1.5, 1.6) son un sistema de ecuaciones lineales homogéneas, en el cual admite soluciones "no triviales" para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ solo si el determinante de sus coeficiente es cero. Es decir:

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.8)$$

Para un tensor T dado, sus componentes T_{ij} son conocidas, el determinante anterior genera una ecuación cúbica para λ ; esta es llamada ecuación característica de T y las raíces de la ecuación son los eigenvalores de T . De este modo si se hallan los valores de las raíces de la ecuación característica del tensor T , es decir los eigenvalores, es posible hallar los correspondientes eigenvectores haciendo uso de las ecuaciones (1.4, 1.5, 1.6 y 1.7). Este método puede ser descrito de mejor forma mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. Si, con respecto a un sistema ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la matriz de un tensor T esta dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Encontrar los eigenvalores y sus correspondientes eigenvectores.

Solución: La ecuación característica es:

$$|T - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 4 \\ 0 & 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \equiv (2 - \lambda)(\lambda^2 - 25) = 0$$

Ecuación de la cual se puede hallar los tres eigenvalores: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$ y $\lambda_3 = -5$.

Para el eigenvalor $\lambda_1 = 2$ se aplica las ecuaciones (1.4, 1.5, 1.6 y 1.7):

$$\begin{aligned} 0\alpha_1 &= 0, \\ \alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0, \\ 4\alpha_2 - 5\alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

Así, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ y $\alpha_1 = \pm 1$ y por ende el correspondiente eigenvector para $\lambda_1 = 2$ es $n_1 = \pm \mathbf{e}_1$.

Para el eigenvalor $\lambda_2 = 5$ se aplica las ecuaciones (1.4, 1.5, 1.6 y 1.7):

$$\begin{aligned} -3\alpha_1 &= 0, \\ -2\alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0, \\ 4\alpha_2 - 8\alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

Así, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ y $\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y por ende el correspondiente eigenvector para

$\lambda_2 = 5$ es $n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$.

De manera similar se calcula el correspondiente eigenvector para $\lambda_3 = -5$, que es

$$n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(e_2 - 2e_3).$$

1.2.15 Valor principal y dirección principal de un tensor simétrico real. En los capítulos siguientes, se encontraran muchos tensores reales (tensor deformación, tensor esfuerzo, tensor tasa de deformación) los cuales son simétricos, por lo cual el siguiente teorema, enunciado sin demostración, será de gran importancia: *“los eigenvalores de cualquier tensor simétrico real son todos reales”*¹².

De este modo, para un tensor simétrico real, siempre existen al menos tres eigenvectores reales los cuales se llaman **direcciones principales**, las cuales son mutuamente perpendiculares. Los correspondientes eigenvalores son llamados **valores principales**.

1.2.16 Matriz de un vector con respecto a las direcciones principales. Se ha visto que para un tensor simétrico real, siempre existen 3 direcciones principales las cuales son mutuamente perpendiculares. Sean n_1, n_2 y n_3 vectores unitarios en estas direcciones. Entonces, usando n_1, n_2 y n_3 como vectores base, las componentes del tensor son:

$$T_{11} = n_1 \cdot T n_1 = n_1 \cdot (\lambda_1 n_1) = \lambda_1$$

$$T_{22} = n_2 \cdot T n_2 = n_2 \cdot (\lambda_2 n_2) = \lambda_2$$

$$T_{33} = n_3 \cdot T n_3 = n_3 \cdot (\lambda_3 n_3) = \lambda_3$$

$$T_{12} = n_1 \cdot T n_2 = n_1 \cdot (\lambda_2 n_2) = 0 = T_{21}$$

$$T_{13} = n_1 \cdot T n_3 = n_1 \cdot (\lambda_3 n_3) = 0 = T_{31}$$

$$T_{23} = n_2 \cdot T n_3 = n_2 \cdot (\lambda_3 n_3) = 0 = T_{32}$$

Esto es:

¹² LAI, Op. cit., p. 28.

$$[T]_{n_1, n_2, n_3} \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

La matriz es una matriz diagonal y los elementos de la diagonal son los eigenvalores de T .

Se muestra que los principales valores de un tensor T incluyen los máximos y mínimos valores que los elementos de la diagonal de cualquier matriz pueden tener.

Primero, para cualquier vector $e'_1 = \alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3$:

$$T'_{11} \equiv e'_1 \cdot T e'_1 = [\alpha, \beta, \gamma] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Lo cual es equivalente a:

$$T'_{11} = \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 + \lambda_3 \gamma^2$$

Sin perder la generalidad, se tiene:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$$

Entonces notando que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, se tiene:

$$\lambda_1 = \lambda_1 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 + \lambda_3 \gamma^2$$

Lo que es igual a:

$$\lambda_1 \geq T'_{11}$$

También:

$$\lambda_3 = \lambda_3 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \leq \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 + \lambda_3 \gamma^2$$

Lo que equivale:

$$\lambda_3 \leq T'_{11}$$

Así el $\begin{cases} \text{maximo} \\ \text{minimo} \end{cases}$ valor de los valores principales de T es el $\begin{cases} \text{maximo} \\ \text{minimo} \end{cases}$ valor de los elementos de la diagonal de toda $[T]$ de T .

1.2.17 Escalares invariantes de un tensor¹³. La ecuación característica de un tensor T , $|T_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$ es una ecuación cúbica en λ , la cual se puede escribir como:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

Donde:

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji})$$

$$I_3 \equiv |T|$$

Dado que por definición los eigenvalores de T no dependen de las alternativas de vectores base $\{e_1, e_2, e_3\}$, por consiguiente los coeficientes de la ecuación cúbica deben ser iguales para cualquier $\{e_1, e_2, e_3\}$. Estos coeficientes son llamados **escalares invariantes de T** .

1.2.18 Campo escalar, gradiente de un campo escalar¹⁴. Sea $\phi(\mathbf{r})$ una función de valor escalar del vector posición \mathbf{r} , es decir, para cada posición \mathbf{r} , ϕ da el valor de un escalar, como densidad, temperatura, o potencial eléctrico en un punto dado. En otras palabras, $\phi(\mathbf{r})$ describe un campo escalar. Asociado con el campo escalar, hay un campo vectorial, llamado **gradiente** de ϕ , el cual es de considerable importancia. El gradiente de ϕ en un punto determinado de \mathbf{r} esta definido por un vector, denotado por $\nabla\phi$, tal que su producto punto con $d\mathbf{r}$ da como resultado:

$$d\phi = \phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) \equiv \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$$

Se denota dr como la magnitud de $d\mathbf{r}$, y \mathbf{e} como el vector unitario en la dirección de $d\mathbf{r}$ (nótese que $\mathbf{e} = \frac{d\mathbf{r}}{dr}$). Entonces de la ecuación de arriba se tiene:

¹³ LAI, Op. cit., p. 37.

¹⁴ Ibid., p. 40.

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{\text{en direccion } e} = \nabla\phi \cdot e$$

Teniendo en cuenta que las componentes del vector e son $\{e_1, e_2, e_3\}$ se puede afirmar:

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{\text{en direccion } e_1} = \nabla\phi \cdot e_1 = (\nabla\phi)_1$$

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{\text{en direccion } e_2} = \nabla\phi \cdot e_2 = (\nabla\phi)_2$$

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{\text{en direccion } e_3} = \nabla\phi \cdot e_3 = (\nabla\phi)_3$$

Por esto, las componentes cartesianas de $\nabla\phi$ son $\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$, esto es:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} e_3 \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x_i} e_i$$

1.2.19 Campo vectorial, gradiente de un campo vectorial¹⁵. Sea $v(\mathbf{r})$ una función de valor vectorial de posición, por ejemplo, el campo desplazamiento o el campo velocidad. Asociado con el campo vectorial, hay un campo tensorial, llamado **gradiente** de v , el cual es de una considerable importancia. El gradiente de v (denotado por ∇v) es definido por ser un tensor de segundo orden el cual, siendo operado con dr genera el siguiente resultado:

$$dv = v(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - v(\mathbf{r}) = (\nabla v) d\mathbf{r}$$

Nuevamente, denotando dr como la magnitud de $d\mathbf{r}$, y e como el vector unitario en la dirección de $d\mathbf{r}$ (nótese que $e = \frac{d\mathbf{r}}{dr}$), se tiene:

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)_{\text{en direccion } e} = \nabla v \cdot e$$

¹⁵ HEINBOCKEL, J. H. Introduction to tensor calculus and continuum mechanics. Old Dominion University Publications. 1996. p. 115.

De lo anterior se puede concluir que las componentes cartesianas de $(\nabla \mathbf{v})$ son:

$$(\nabla \mathbf{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Así:

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

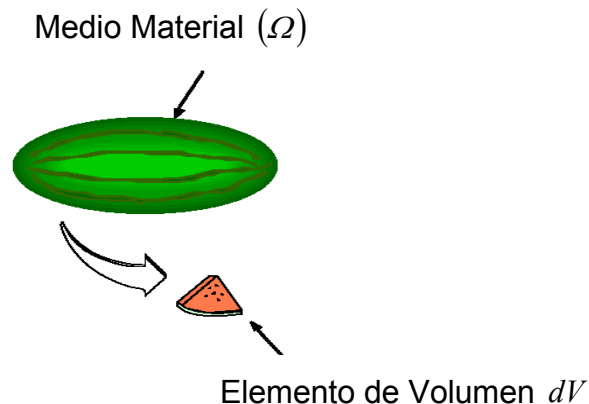
2. CINEMATICA DEL CONTINUO

2.1 TEORIA DEL CONTINUO

Partiendo de la suposición de que el espacio físico en que vivimos es matemáticamente representable por el espacio Euclidiano E^3 . Sea Ω un campo volumétrico perteneciente a E^3 y conteniendo un medio material. Dicho medio se supone continuo si el número de partículas que constituyen un diferencial de volumen dV es suficientemente grande en la escala macroscópica.¹⁶

La figura 9 esquematiza el medio material con una sandia, las partículas son las semillas S de la patilla y un diferencial de volumen por una porción de patilla. Se ubicara en una escala (macroscópica) de la patilla, de tal manera que la porción contiene un número estáticamente significativo de pepas.

Figura 9. Esquematización del medio material



¹⁶ KENNET, B. L. Introduction of continuum mechanics. Research School of Earth Sciences. Canberra: Australian National University, 2000. p. 5.

Se entiende por medio continuo un conjunto infinito de partículas (que forman parte, por ejemplo, de un sólido, de un fluido o de un gas) que va a ser estudiado macroscópicamente, es decir, sin considerar las posibles discontinuidades existentes en el nivel microscópico (nivel atómico o molecular). En consecuencia, se admite que no hay discontinuidades entre las partículas y que la descripción matemática de este medio y de sus propiedades se puede realizar mediante funciones continuas¹⁷.

La teoría del continuo supone que la materia es infinitamente divisible. Cabe resaltar que la teoría del continuo es justificable o no de acuerdo a la situación dada; por ejemplo, mientras la teoría del continuo describe adecuadamente el comportamiento del acero en muchas circunstancias, no produce resultados que estén acorde con las observaciones experimentales en cuanto a la propagación de ondas de longitud de onda extremadamente pequeñas en acero.

2.2 DESCRIPCION DEL MOVIMIENTO DEL CONTINUO

La forma más básica de describir el movimiento del medio continuo puede hacerse mediante funciones matemáticas que representen la posición de cada partícula a lo largo del tiempo. En general, se solicita que estas funciones y sus pertinentes derivadas sean continuas.

Se supone que el medio continuo está formado por infinitas partículas, llamadas *puntos materiales*, que pueden ocupar distintos puntos espaciales en su movimiento a lo largo del tiempo. Se define como *configuración* del medio continuo en el momento t , que se denota por Ω_t , el lugar geométrico de las posiciones que

¹⁷ OLIVELLA, Xavier, AGUELET, Carlos. Mecánica de Medios Continuos para Ingenieros. Barcelona: Edicions UPC, 2002. p. 1.

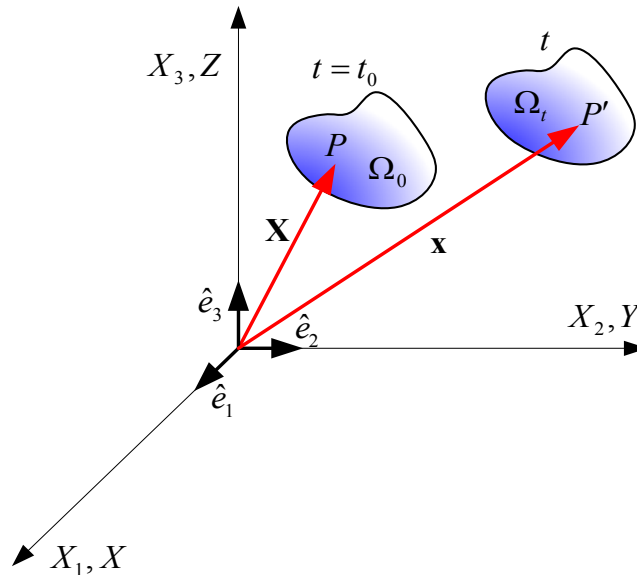
ocupan en el espacio los puntos materiales (partículas) del medio continuo en dicho instante¹⁸.

A un cierto instante $t = t_0$ del intervalo de tiempo de interés se denomina *instante de referencia* y a la configuración de dicho instante Ω_0 se la denomina configuración *inicial, material o de referencia*.

Considere ahora un sistema de coordenadas cartesianas (X, Y, Z) con su correspondiente base ortonormal (e_1, e_2, e_3) . En la configuración de referencia Ω_0 , el vector posición \mathbf{X} de una partícula que ocupa un punto P en el instante de referencia viene dado por (figura 10):

$$\mathbf{X} = X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3 \equiv X_i e_i$$

Figura 10. Configuración del medio continuo



Donde las componentes (X_1, X_2, X_3) se les denominan coordenadas materiales,

¹⁸ LAI, Op. cit., p. 61.

$$[\mathbf{X}] = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \text{coordenadas materiales}$$

En la configuración actual Ω_t , la partícula situada originalmente en el punto material P ocupa el punto espacial P' y su vector de posición \mathbf{x} viene dado por:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \equiv x_i\mathbf{e}_i$$

Donde a (x_1, x_2, x_3) se les denomina coordenadas espaciales de la partícula en el instante de tiempo t:

$$[\mathbf{x}] = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \text{coordenadas espaciales}$$

El movimiento de las partículas del medio continuo puede describirse ahora por la evolución de sus coordenadas espaciales (o de su vector posición) a lo largo del tiempo. Matemáticamente esto solicita conocer una función (φ) que para cada partícula suministre sus coordenadas espaciales x_i (o su vector de posición espacial \mathbf{x}) en los sucesivos instantes de tiempo. De lo anterior es posible deducir que la función (φ) puede describir las coordenadas espaciales en función de las coordenadas materiales X_i y el tiempo (t), obteniéndose las *ecuaciones del movimiento*:

$$\mathbf{x} = \varphi(\text{particula}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

$$x_i = \varphi_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (2.2)$$

O las *ecuaciones del movimiento inversas*:

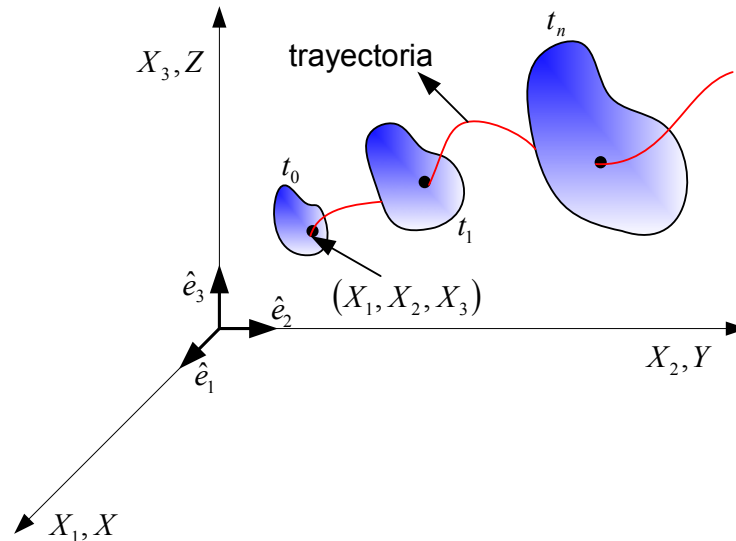
$$\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (2.3)$$

$$X_i = \varphi_i^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (2.4)$$

Que suministran las coordenadas materiales en función de las espaciales. De modo que podemos concluir que la expresión $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$, definida para un valor fijo

de las coordenadas materiales X , proporciona la ecuación de la *trayectoria* de la partícula, (Figura 11):

Figura 11. Trayectoria de una partícula



Sin embargo existen ciertas restricciones matemáticas para garantizar la existencia de φ y de φ^{-1} así como su correcto significado físico. Estas restricciones son:

- $\varphi(X,0)=X$ puesto que por definición, X es el vector de posición en el instante de referencia $t = 0$ (condición de consistencia).
- $\varphi \in C$ (la función φ es continua y con derivadas continuas en cada punto e instante).
- φ es biunívoca (para garantizar que dos partículas no ocupan simultáneamente el mismo punto en el espacio y que una partícula no ocupa simultáneamente dos puntos distintos en el espacio).

- El Jacobiano de la transformación $J = \det \left[\frac{\partial \varphi(X,t)}{\partial X} \right] \equiv \left| \frac{\partial \varphi(X,t)}{\partial X} \right| > 0$. La interpretación física de esta condición es que todo volumen diferencial ha de ser siempre positivo, o utilizando el *principio de conservación de masa* (que se vera mas adelante), la densidad de las partículas ha de ser siempre positiva.

Para aclarar las condiciones anteriores, veamos un ejemplo:

Ejemplo 2.1. La descripción espacial del movimiento de un medio continuo esta dada por:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \equiv \begin{cases} x_1 = X_1 \mathbf{e}^{2t} \\ x_2 = X_2 \mathbf{e}^{-2t} \\ x_3 = 5X_1 t + X_3 \mathbf{e}^{2t} \end{cases} \equiv \begin{cases} x = X \mathbf{e}^{2t} \\ y = Y^{-2t} \\ z = 5Xt + Z \mathbf{e}^{2t} \end{cases}$$

Obtener las ecuaciones de movimiento inversas.

Solución: El determinante del Jacobiano resulta:

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^{-2t} & 0 \\ 5t & 0 & \mathbf{e}^{2t} \end{vmatrix} \equiv \mathbf{e}^{2t} \neq 0$$

La condición suficiente (aunque no necesaria) para que la función $x = \varphi(X, t)$ sea biunívoca (que exista la inversa) es que el determinante del Jacobiano de la función no sea nulo. Además puesto que el Jacobiano es positivo, el movimiento tiene sentido físico. Por lo tanto la inversa de la descripción espacial dada existe y esta dada por:

$$\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 e^{-2t} \\ x_2 e^{2t} \\ x_3 e^{-2t} - 5tx e^{-4t} \end{bmatrix}$$

2.3 DESCRIPCION ESPACIAL Y DESCRIPCION MATERIAL¹⁹

La descripción matemática de las propiedades de las partículas del medio continuo puede hacerse mediante dos alternativas. La descripción *material* (generalmente utilizada en Mecánica de Sólidos) y la descripción *espacial* (utilizada generalmente en Mecánica de Fluidos).

2.3.1 Descripción material. En la descripción material se describe cierta propiedad (por ejemplo la temperatura θ) mediante cierta función cuyo argumento son las coordenadas materiales. Es decir:

$$\theta = \theta(\mathbf{X}, t) \equiv \theta(X_1, X_2, X_3, t)$$

Obsérvese que si se fijan los tres argumentos $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ de la ecuación anterior se está siguiendo a una partícula determinada (ver Figura 12.a), de ahí proviene la denominación de la descripción material. La literatura suele referirse también a la descripción material como *descripción Lagrangeana* o *descripción de referencia*.

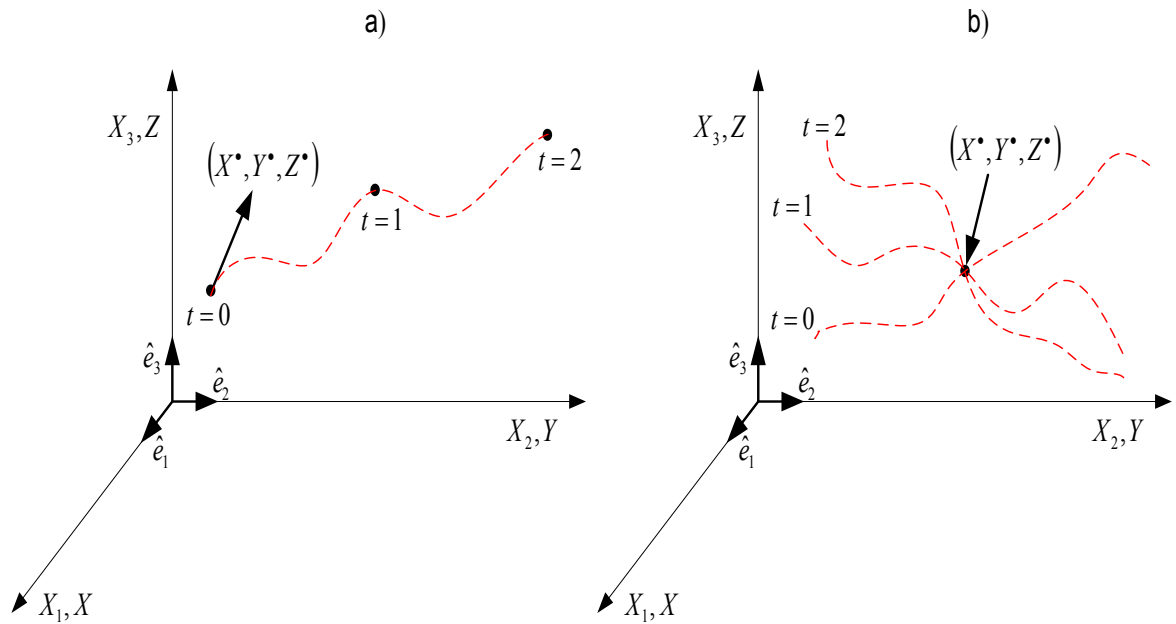
2.3.2 Descripción espacial. En la descripción espacial la atención se centra en un punto del espacio. Se describe una propiedad dada como una función del punto del espacio y el tiempo:

$$\theta = \bar{\theta}(\mathbf{x}, t) \equiv \bar{\theta}(x_1, x_2, x_3, t)$$

¹⁹ LAI, Op. cit., p. 63.

De tal forma que al asignar cierto valor al argumento x en $\theta = \bar{\theta}(x, t)$ se obtiene la evolución de la temperatura para distintas partículas que van pasando por dicho punto del espacio a lo largo del tiempo (ver Figura 12.b).

Figura 12. Descripción material y espacial de una propiedad



2.4 DERIVADAS TEMPORALES: LOCAL, MATERIAL, CONVECTIVA²⁰

La consideración de las distintas descripciones (material y espacial) de las propiedades del medio continuo lleva a diversas definiciones de las derivadas temporales de dichas propiedades. Se considera una cierta propiedad y sus descripciones material y espacial:

$$\Gamma(\mathbf{X}, t) \equiv \gamma(\mathbf{x}, t)$$

Y se definen así los conceptos de derivada local, material y conectiva:

²⁰ OLIVELLA, Op. cit., p. 8.

2.4.1 Derivada local. La variación de una propiedad respecto al tiempo en un punto fijo del espacio. Si se dispone de la descripción espacial de la propiedad $\gamma(\mathbf{x}, t)$, dicha derivada local puede escribirse como:

$$\text{derivada local} = \frac{\partial \gamma(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (2.5)$$

2.4.2 Derivada material. La variación de la propiedad respecto al tiempo siguiendo una partícula (punto material) específica del medio continuo. Si se dispone de la descripción material de la propiedad $\Gamma(\mathbf{X}, t)$, dicha derivada puede describirse matemáticamente como:

$$\text{derivada material} = \frac{d}{dt} \Gamma \equiv \frac{\partial \Gamma(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.6)$$

2.4.3 Derivada conectiva. Matemáticamente la *derivada conectiva* se define como la diferencia entre las derivadas material y local de la propiedad. Es decir, para cualquier propiedad $\chi(\mathbf{x}, t)$:

$$\underbrace{\frac{d\chi(\mathbf{x}, t)}{dt}}_{\text{derivada material}} \equiv \underbrace{\frac{\partial \chi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}}_{\text{derivada local}} + \underbrace{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \bullet \nabla \chi(\mathbf{x}, t)}_{\text{derivada conectiva}} \quad (2.7)$$

2.5 VELOCIDAD Y ACELERACION

La velocidad es la derivada temporal de las ecuaciones del movimiento. La descripción material viene dada, en consecuencia, por:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.8)$$

$$V_i(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

Y si se dispone de las ecuaciones inversas del movimiento $\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)$ es posible obtener la descripción espacial de la velocidad como:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),t) \quad (2.9)$$

La aceleración de una partícula es la tasa de variación de la velocidad de esta. Por tal motivo se puede definir como la derivada material de la velocidad. Así, si la descripción material de la velocidad es conocida (o puede ser obtenida de la forma expuesta anteriormente), entonces la aceleración puede ser fácilmente obtenida, simplemente tomando la derivada parcial con respecto al tiempo de la función $\mathbf{V}(\mathbf{X},t)$, es decir²¹:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{X},t) &= \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X},t)}{\partial t} \\ \mathbf{A}_i(\mathbf{X},t) &= \frac{\partial V_i(\mathbf{X},t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Y a través de las ecuaciones inversas del movimiento $\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x},t)$ es posible obtener la descripción espacial de la velocidad como:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),t) \quad (2.11)$$

De igual modo si se dispone de la descripción espacial de la velocidad, puede obtenerse directamente de la descripción espacial de la aceleración aplicando la ecuación de la derivada convectiva para obtener la derivada material de $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},t) = \underbrace{\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{dt}}_{\text{derivada material}} \equiv \underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t}}_{\text{derivada local}} + \underbrace{\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \bullet \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}_{\text{derivada convectiva}} \quad (2.12)$$

Veamos el siguiente ejemplo:

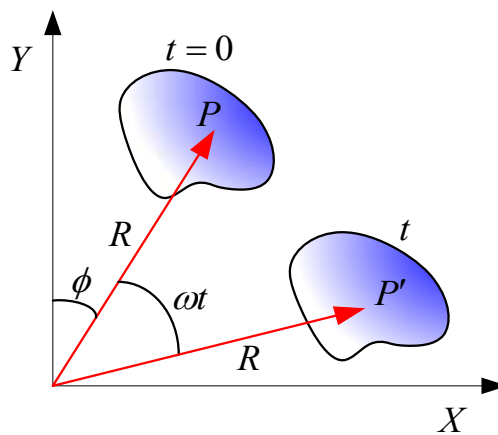
Ejemplo 2.2. Considere un sólido, ver Figura 13, que gira con velocidad angular ω constante y que tiene como ecuación del movimiento:

$$\begin{cases} x = R \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \\ y = R \operatorname{cos}(\omega t + \phi) \end{cases}$$

²¹ HEINBOCKEL, Op. cit. p. 190.

Hallar la velocidad y la aceleración del movimiento descritas en forma espacial y material.

Figura 13. Ejemplo 2.2



Solución: Las ecuaciones del movimiento pueden reescribirse como:

$$x = R \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = R \operatorname{sen}(\omega t) \cos \phi + R \cos(\omega t) \operatorname{sen} \phi$$

$$y = R \cos(\omega t + \phi) = R \cos(\omega t) \cos \phi - R \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen} \phi$$

y, ya que para $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} X = R \operatorname{sen} \phi \\ Y = R \cos \phi \end{cases}$, las formas canónicas de la ecuación del movimiento y sus inversas quedan:

$$\begin{cases} x = X \cos(\omega t) + Y \operatorname{sen}(\omega t) \\ y = -X \operatorname{sen}(\omega t) + Y \cos(\omega t) \end{cases} \quad \begin{cases} X = x \cos(\omega t) - y \operatorname{sen}(\omega t) \\ Y = x \operatorname{sen}(\omega t) + y \cos(\omega t) \end{cases}$$

a.1) Velocidad en descripción material:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \equiv \begin{cases} V_x = \frac{\partial x}{\partial t} = -X \omega \operatorname{sen}(\omega t) + Y \omega \cos(\omega t) \\ V_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -X \omega \cos(\omega t) - Y \omega \operatorname{sen}(\omega t) \end{cases}$$

a.2) Velocidad en descripción espacial:

Sustituyendo los valores de x e y dados en la forma canónica vista anteriormente, es posible obtener la forma espacial de la velocidad como:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_x = \frac{\partial x}{\partial t} = \omega y \\ \mathbf{v}_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega x \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \omega y \\ -\omega x \end{array} \right\}$$

b.1) Aceleración en descripción material:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X},t) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X},t)}{\partial t} \equiv \left\{ \begin{array}{l} A_x = \frac{\partial V_x}{\partial t} = -X \omega^2 \cos(\omega t) - Y \omega^2 \sin(\omega t) \\ A_y = \frac{\partial V_y}{\partial t} = X \omega^2 \sin(\omega t) - Y \omega^2 \cos(\omega t) \end{array} \right\} \equiv -\omega^2 \left\{ \begin{array}{l} X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t) \\ -X \sin(\omega t) + Y \cos(\omega t) \end{array} \right\}$$

b.2) Aceleración en descripción espacial:

Sustituyendo las ecuaciones de movimiento inversas en la ecuación anterior:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),t) \equiv \left\{ \begin{array}{l} a_x = -\omega^2 x \\ a_y = \omega^2 y \end{array} \right\}$$

Esta misma expresión podría ser obtenida si se considera la expresión de la velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ y la expresión de la derivada material en la ecuación de la derivada conectiva:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{x},t) &= \underbrace{\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{dt}}_{\text{derivada material}} \equiv \underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t}}_{\text{derivada local}} + \underbrace{\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \bullet \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}_{\text{derivada conectiva}} \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{array}{l} \omega y \\ -\omega x \end{array} \right\} + [\omega y \quad -\omega x] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{l} \omega y \\ -\omega x \end{array} \right] = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\} + [\omega y \quad -\omega x] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\omega y) & \frac{\partial}{\partial x}(-\omega x) \\ \frac{\partial}{\partial y}(\omega y) & \frac{\partial}{\partial y}(-\omega x) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Obsérvese que el resultado obtenido por los dos procedimientos es idéntico.

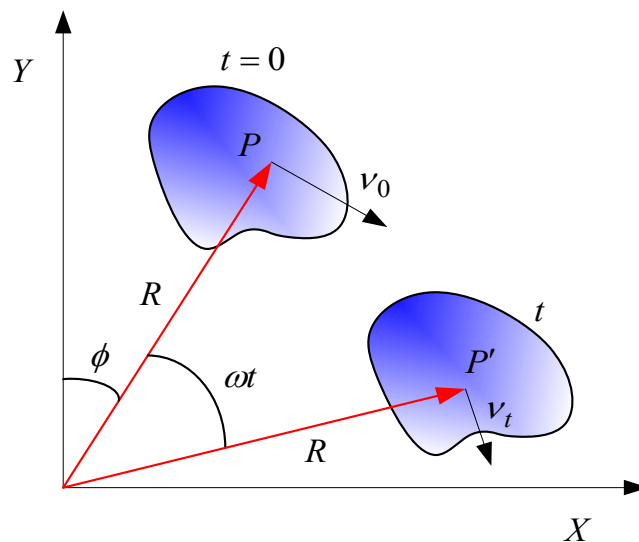
2.6 ESTACIONAREIDAD

Una propiedad es estacionaria cuando su descripción espacial es función del tiempo. De acuerdo con el enunciado anterior y la definición de derivada local, toda propiedad estacionaria tiene su derivada local nula. Analizando el ejemplo anterior, se tiene un campo de velocidades cuya descripción espacial es:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \begin{Bmatrix} \omega y \\ -\omega x \end{Bmatrix}, \text{ la cual no depende del tiempo; por lo que es posible concluir que}$$

la velocidad para este caso es una función estacionaria. Cabe resaltar que esto no implica que la velocidad de las partículas (que tiene un movimiento circular uniforme respecto al origen, con velocidad angular ω) no dependa del tiempo (ver Figura 14).

Figura 14. Estacionareidad



2.7 TRAYECTORIA

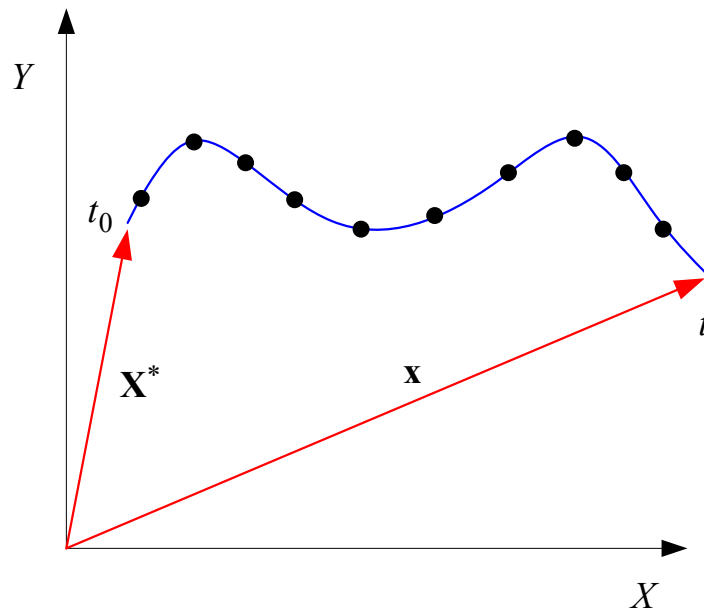
La trayectoria se define como el lugar geométrico de las posiciones que ocupa una partícula en el espacio a lo largo del tiempo. La ecuación paramétrica de una

trayectoria se obtiene particularizando las ecuaciones del movimiento para una determinada partícula (identificada por sus coordenadas materiales \mathbf{X}^* , ver Figura 15):

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} \quad (2.13)$$

Las ecuaciones de movimiento definen entonces una familia de curvas cuyos elementos son las trayectorias de las diversas partículas.

Figura 15. Trayectoria de una partícula



2.7.1 Ecuación diferencial de las trayectorias. Dado el campo de las velocidades en descripción espacial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, es posible conseguir la familia de trayectorias planteando el sistema de ecuaciones diferenciales que impone que, en cada punto del espacio \mathbf{x} , el vector velocidad sea la derivada respecto al tiempo de la ecuación paramétrica de las trayectorias dada por la ecuación (3.13). En otras palabras se debe encontrar la solución al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) \\ \frac{dx_i(t)}{dt} = v_i(\mathbf{x}(t), t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (2.14)$$

El cual dependerá de tres constantes de integración (C_1, C_2, C_3) :

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \phi(C_1, C_2, C_3, t) \\ x_i = \phi(C_1, C_2, C_3, t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (2.15)$$

Las expresiones (3.15) constituyen una familia de curvas en el espacio parametrizada por las constantes (C_1, C_2, C_3) . Asignando un valor determinado a dichas constantes se obtienen un miembro de la familia que es la trayectoria de la partícula caracterizada por la etiqueta (C_1, C_2, C_3) .

Para obtener las ecuaciones en forma canónica se impone la condición de consistencia en la configuración material:

$$\mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X} = \phi(C_1, C_2, C_3, 0) \Rightarrow C_i = \chi_i(\mathbf{X}) \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (2.16)$$

Y reemplazando en la ecuación (3.15) se obtiene la forma canónica en la ecuación de las trayectorias:

$$\mathbf{x} = \phi(C_1(\mathbf{X}), C_2(\mathbf{X}), C_3(\mathbf{X}), t) = \phi(\mathbf{X}, t) \quad (2.17)$$

Para visualizar más fácilmente lo anterior consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.3. Considere el campo de velocidad del ejemplo 2-2:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} \omega y \\ -\omega x \end{Bmatrix}$$

Obtener la ecuación de las trayectorias.

Solución: Utilizando la expresión (3.14), se puede escribir:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = v_x(\mathbf{x}, t) = \omega y \\ \frac{dy(t)}{dt} = v_y(\mathbf{x}, t) = -\omega x \end{cases}$$

El sistema anterior de ecuaciones diferenciales es un sistema de variables cruzadas. Si se deriva la segunda ecuación y se substituye el resultado en la primera se obtiene:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\omega \frac{dx(t)}{dt} = -\omega^2 y(t) \Rightarrow y'' + \omega^2 y = 0$$

Ecuación característica:

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

Soluciones características:

$$r_j = \pm i\omega \quad j \in \{1, 2\}$$

Solución: $y(t) = \text{Parte Real} \{C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\} = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \text{sen}(\omega t)$

La solución para $x(t)$ se obtiene a partir de $\frac{dy}{dt} = -\omega x$ que resulta en

$x = -\frac{1}{\omega} \frac{dy}{dt}$, obteniéndose así:

$$\begin{cases} x(C_1, C_2, t) = C_1 \text{sen}(\omega t) - C_2 \cos(\omega t) \\ y(C_1, C_2, t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \text{sen}(\omega t) \end{cases}$$

Las anteriores ecuaciones proporcionan las expresiones de las trayectorias en forma no canónica. La forma canónica se obtiene considerando la condición inicial:

$$\mathbf{x}(C_1, C_2, 0) = \mathbf{X}$$

Es decir:

$$\begin{cases} x(C_1, C_2, 0) = -C_2 = X \\ y(C_1, C_2, 0) = C_1 = Y \end{cases}$$

Así, las ecuaciones del movimiento o ecuaciones de las trayectorias, en forma canónica son:

$$\begin{cases} x(C_1, C_2, t) = Y \operatorname{sen}(\omega t) + X \cos(\omega t) \\ y(C_1, C_2, t) = Y \cos(\omega t) - X \operatorname{sen}(\omega t) \end{cases}$$

2.8 SUPERFICIE MATERIAL

Una superficie material se define como una superficie móvil en el espacio constituida siempre por las mismas partículas (puntos materiales)²².

En la configuración de referencia Ω_0 la superficie Σ_0 podrá definirse en términos de una función de las coordenadas materiales $F(X, Y, Z)$ como:

$$\Sigma_0 = \{X, Y, Z \mid F(X, Y, Z) = 0\} \quad (2.18)$$

Cabe destacar que la función $F(X, Y, Z)$ no depende del tiempo, lo que avala que las partículas, que cumplen con la ecuación $F(X, Y, Z) = 0$ son invariablemente las mismas de acuerdo a la definición de superficie material.

La descripción espacial de la superficie se obtendrá a partir de la descripción espacial de $F(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)) = f(x, y, z, t)$:

$$\Sigma_t = \{x, y, z \mid f(x, y, z, t) = 0\} \quad (2.19)$$

De igual modo es substancial advertir que la función $f(x, y, z, t)$ depende explícitamente del tiempo, lo que establece que los puntos del espacio que estarían sobre la superficie varían con el tiempo. Esta dependencia del tiempo de la descripción espacial de la superficie, la confiere su carácter de superficie móvil en el espacio (ver Figura 16).

2.9 SUPERFICIE DE CONTROL

Una superficie de control es una superficie fija en el espacio²³. Su descripción matemática viene dada por:

²² OLIVELLA, Op. cit., p. 20.

$$\Sigma \equiv (\mathbf{x} \mid f(x, y, z) = 0) \quad (2.20)$$

Es evidente que una superficie de control es atravesada por las distintas partículas del medio continuo a lo largo del tiempo (ver Figura 17).

Figura 16. Superficie Material

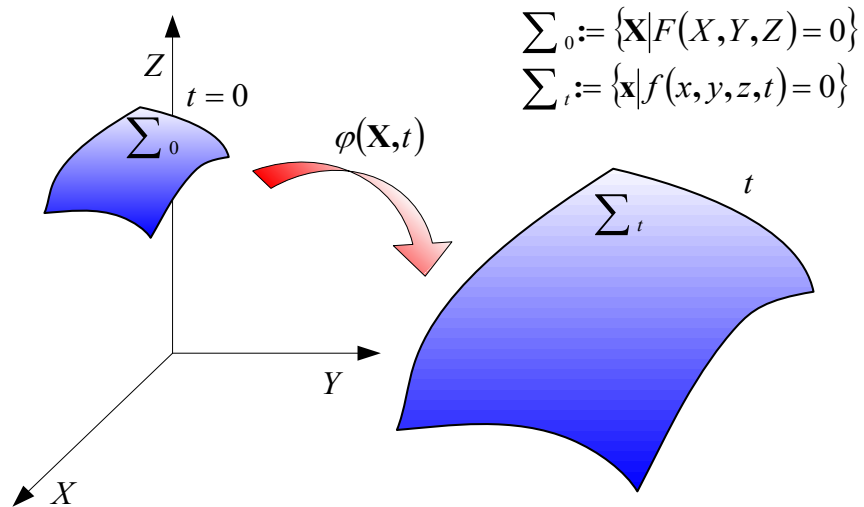
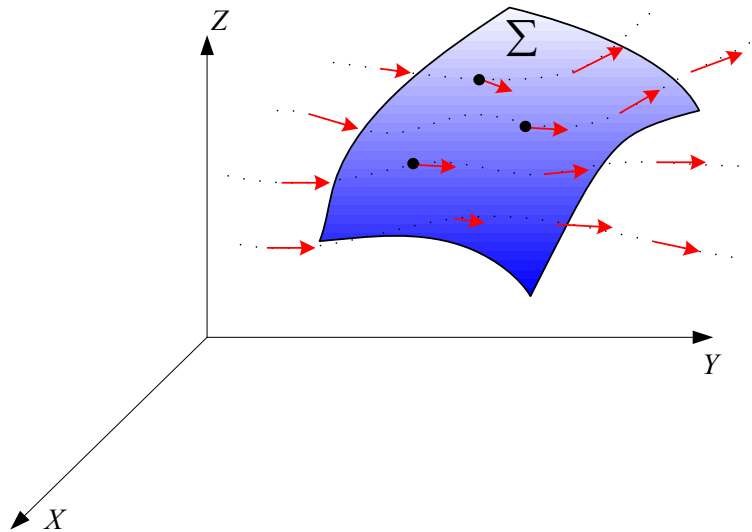


Figura 17. Superficie de Control



²³ Ibid., p. 22.

2.10 VOLUMEN MATERIAL

Un volumen material es un volumen limitado por una superficie material cerrada²⁴. La representación matemática de un volumen material V (ver Figura 18) aparece dada por:

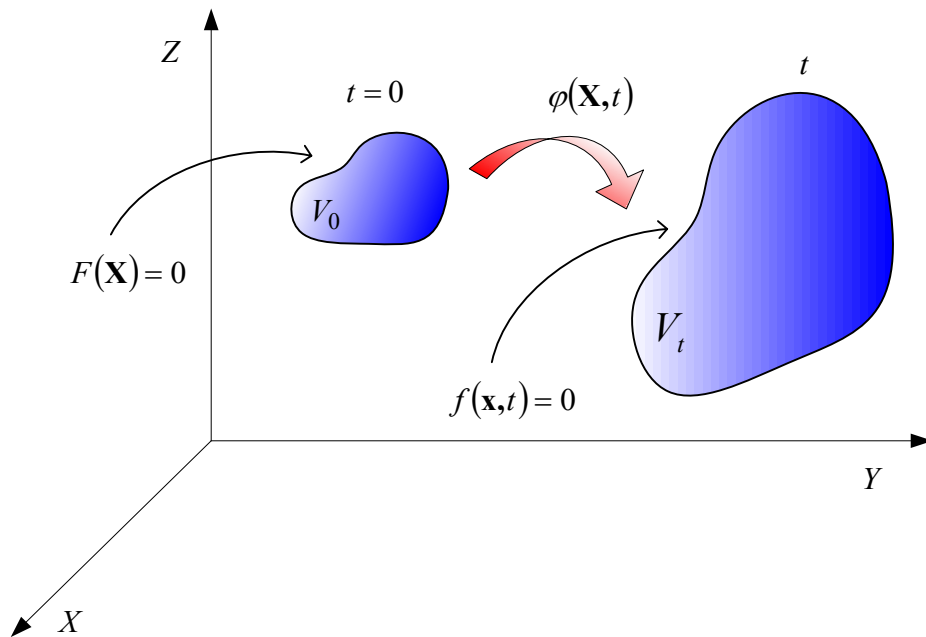
$$V_0 = \{\mathbf{X} \mid F(\mathbf{X}) \leq 0\} \quad (2.21)$$

En la descripción material, y por:

$$V_t = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}, t) \leq 0\} \quad (2.22)$$

En la descripción espacial, siendo $F(\mathbf{X}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t))$ la función que describe la superficie material que lo encierra.

Figura 18. Volumen Material



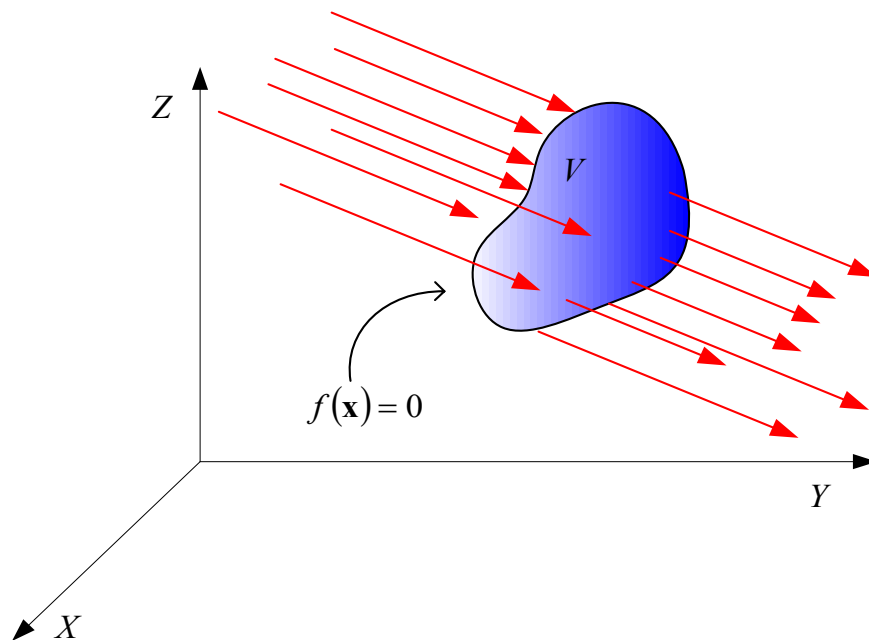
²⁴ OLIVELLA, Op. cit., p. 23.

2.11 VOLUMEN DE CONTROL

Es un conjunto de puntos del espacio situados en el interior de una superficie de control cerrada²⁵. Se trata de un volumen fijo en el espacio que es atravesado por partículas del medio durante su movimiento (ver Figura 19). Su descripción matemática es:

$$V = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (2.23)$$

Figura 19. Volumen de Control



²⁵ OLIVELLA, Op. cit., p. 24.

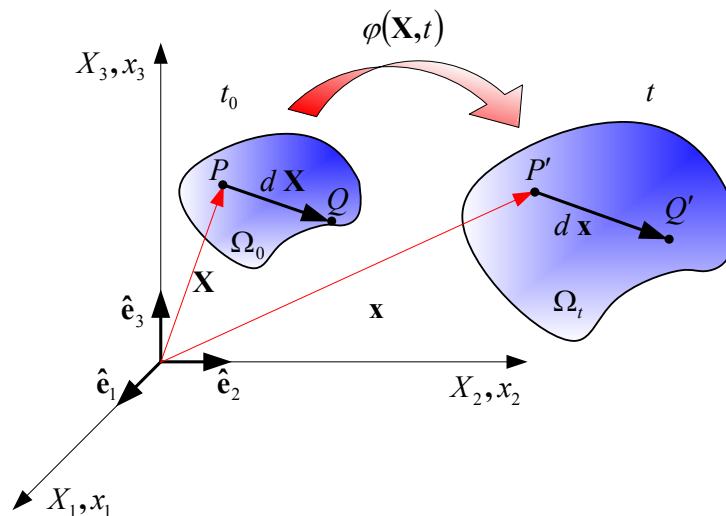
3. DEFORMACION

En el contexto mas general, el concepto deformación se refiere al estudio no ya del movimiento absoluto de las partículas tal como se vio ... en el capítulo 2..., sino del *movimiento relativo* con respecto a una partícula determinada, *de las partículas situadas en un entorno diferencial de aquella*.

3.1 TENSOR GRADIENTE DE DEFORMACION²⁶

Considere el medio continuo en movimiento de la Figura 20 una partícula P en una configuración de referencia Ω_0 , y que ocupa un punto del espacio P' en la configuración actual Ω_t , y una partícula Q situada en un entorno diferencial de P y cuyas posiciones relativas respecto a ésta en los instantes de referencia y actual vienen dadas por $d\mathbf{X}$ y $d\mathbf{x}$ respectivamente.

Figura 20. Medio continuo en movimiento



²⁶ BACKUS, George. Continuum mechanics. Golden, Colorado st: Samizdat press.1997. p. 235.

Sean:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \stackrel{not}{=} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \\ x_i = \varphi_i(X_1, X_2, X_3, t) \stackrel{not}{=} x_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (3.1)$$

Las ecuaciones de movimiento. Derivando (3.1) con respecto a las coordenadas materiales \mathbf{X} resulta:

○ **Ecuación Fundamental de la Deformación.**

$$\begin{cases} dx_i = \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial X_j}}_{F_{ij}} dX_j \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \\ d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \end{cases} \quad (3.2)$$

En efecto, la ecuación (3.2) proporciona la evolución del vector de posición relativo $d\mathbf{x}$ en función de la correspondiente posición relativa $d\mathbf{X}$ en el instante de referencia. La ecuación (3.2) define el tensor *gradiente material de deformación de deformación* $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$:

○ **Tensor Gradiente Material de Deformación.**

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \mathbf{x} \otimes \bar{\nabla} \\ F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (3.3)$$

Recuérdese las definiciones del operador Nabla espacial y Nabla material. Se considera aquí la forma simbólica del operador Nabla material: $\bar{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial X_i} \hat{\mathbf{e}}_i$,

aplicada a la expresión del producto tensorial o abierto $\left([\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}]_{ij} \stackrel{not}{=} [\mathbf{a} \mathbf{b}]_{ij} = a_i b_j \right)$. De

igual modo se considera la forma simbólica del operador Nabla espacial: $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i$.

Obsérvese la diferencia de notación entre dichos operadores $\bar{\nabla}$ y ∇ .

Las componentes explícitas del tensor deformación están dadas por:

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{x} \otimes \bar{\nabla}] = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{x}]} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix}}_{\bar{\nabla}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

El *tensor gradiente de deformación* $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ contiene la información del movimiento relativo, a lo largo del tiempo t , de todas las partículas materiales en el entorno diferencial de una partícula dada, identificada por sus coordenadas materiales \mathbf{X} . En este sentido si se conoce el valor $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ se dispone de la información asociada al concepto general de deformación dado al inicio de este capítulo.

3.1.1 Tensor gradiente de deformación inverso. Considerando ahora las ecuaciones de movimiento inversas:

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) \stackrel{not}{=} \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \\ X_i = \varphi^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \stackrel{not}{=} X_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (3.5)$$

Y diferenciando (3.5) con respecto a las coordenadas espaciales x_i , resulta:

$$\begin{cases} dX_i = \underbrace{\frac{\partial X_i}{\partial x_j}}_{F_j^{-1}} dx_j \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \\ d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \end{cases} \quad (3.6)$$

Al tensor definido por la ecuación (3.6) se le denomina *tensor gradiente espacial de la deformación* o *tensor gradiente (material) de la deformación inversa* y viene caracterizado por:

o **Tensor Gradiente Espacial De Deformación**

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{X} \otimes \nabla \\ F_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad i, j \in \{1,2,3\} \end{cases} \quad (3.7)$$

Las componentes explicitas del tensor \mathbf{F}^{-1} vienen dadas por:

$$[\mathbf{F}^{-1}] = [\mathbf{X} \otimes \bar{\nabla}] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \underline{[\mathbf{x}]} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}}_{\underline{[\nabla]^T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Ejemplo 3.1. Para un determinado instante, el movimiento de un medio continuo viene definido por:

$$x_1 = X_1 - AX_3, \quad x_2 = X_2 - AX_3, \quad x_3 = -AX_1 + AX_2 + X_3.$$

Obtener el tensor de gradiente de material de la deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ en dicho instante. A partir de las ecuaciones de movimiento inversas obtener el tensor gradiente espacial de la deformación $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x})$. Con los resultados obtenidos comprobar que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \equiv \mathbf{1}$.

Solución:

a) tensor gradiente material de la deformación:

$$[\mathbf{F}] \equiv [\mathbf{x} \otimes \bar{\nabla}] = [\mathbf{x}] \cdot [\bar{\nabla}]^T = \begin{bmatrix} X_1 - AX_3 \\ X_2 - AX_3 \\ -AX_1 + AX_2 + X_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & 1 & -A \\ -A & A & 1 \end{bmatrix}$$

b) ecuaciones de movimiento inversas: de la inversión algebraica de las ecuaciones de movimiento se obtiene:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{cases} X_1 = (1 - A^2)x_1 - A^2x_2 + Ax_3 \\ X_2 = A^2x_1 + (1 - A^2)x_2 + Ax_3 \\ X_3 = Ax_1 - Ax_2 + x_3 \end{cases}$$

c) tensor de gradiente espacial de la deformación:

$$[\mathbf{F}^{-1}] \equiv [\mathbf{X} \otimes \nabla] = [\mathbf{X}] \cdot [\nabla]^T = \begin{bmatrix} (1 + A^2)x_1 - A^2x_2 + Ax_3 \\ A^2x_1 + (1 - A^2)x_2 + Ax_3 \\ Ax_1 - Ax_2 + x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + A^2 & -A^2 & A \\ A^2 & 1 - A^2 & A \\ A & -A & 1 \end{bmatrix}$$

d) comprobación:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & 1 & -A \\ -A & A & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + A^2 & -A^2 & A \\ A^2 & 1 - A^2 & A \\ A & -A & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{1}$$

3.2 DEZPLAZAMIENTOS

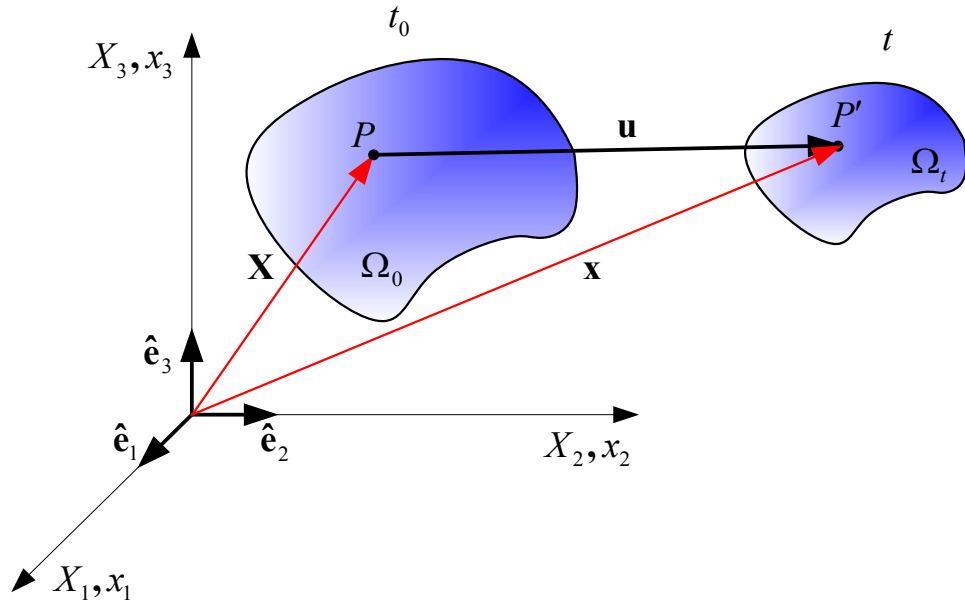
La diferencia entre los vectores de posición de una misma partícula en las configuraciones actual y de referencia es conocida como desplazamiento.

El desplazamiento de una partícula P esta dado por el vector \mathbf{u} que une los puntos del espacio P (posición inicial) y P' (posición en el instante actual t) de la partícula (ver Figura 21). El desplazamiento de todas las partículas del medio continuo define el *campo vectorial de desplazamientos* que como todas las propiedades del medio continuo, podrá describirse en forma material $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ o espacial $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ²⁷:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \\ U_i(\mathbf{X}, t) = x_i(\mathbf{X}, t) - X_i \end{cases} \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \\ u_i(\mathbf{x}, t) = x_i - X_i(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.10)$$

Figura 21. Desplazamientos



De igual modo es posible obtener los tensores gradiente material y espacial de los desplazamientos diferenciando los vectores U_i (3.9) y u_i (3.10), con respecto a las coordenadas materiales y espaciales respectivamente:

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial X_j}}_{F_{ij}} - \underbrace{\frac{\partial X_i}{\partial X_j}}_{\delta_{ij}} = F_{ij} - \delta_{ij} \stackrel{\text{Tensor gradiente material de los desplazamientos}}{=} \overset{\text{def}}{J_{ij}} \begin{cases} \mathbf{J}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \otimes \bar{\nabla} = \mathbf{F} - \mathbf{1} \\ J_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = F_{ij} - \delta_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{\delta_{ij}} - \underbrace{\frac{\partial X_i}{\partial x_j}}_{F^{-1}_{ij}} = \delta_{ij} - F^{-1}_{ij} \stackrel{\text{Tensor gradiente espacial de los desplazamientos}}{=} \overset{\text{def}}{j_{ij}} \begin{cases} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \otimes \nabla = \mathbf{1} - \mathbf{F}^{-1} \\ j_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - F^{-1}_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (3.12)$$

²⁷ HEINBOCKEL, Op. cit., p. 243.

3.3 TENSORES DE DEFORMACION²⁸

- Tensor Material De Deformación (Tensor De Deformación Green-Lagrange)

$$\begin{aligned} \text{Tensor material de} \\ \text{deformacion} \\ \text{(Green - Lagrange)} \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \\ E_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(F_{ki}F_{kj} - \delta_{ij}) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (3.13)$$

- Tensor Espacial De Deformación (Tensor De Deformación De Almansi)

$$\begin{aligned} \text{Tensor material de} \\ \text{deformacion} \\ \text{(Almansi)} \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \\ e_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - F_{ki}^{-1}F_{kj}^{-1}) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (3.14)$$

Cabe resaltar que los tensores material \mathbf{E} y espacial \mathbf{e} de deformación son *tensores distintos y no se trata de la descripción material y espacial de un mismo tensor de deformación*, pues es posible ver en la deducción de estas expresiones que ambos tensores vienen afectados por diferentes vectores diferenciales. Para el Ejemplo 3.1 es posible probar que $\mathbf{E} \neq \mathbf{e}$.

Ejemplo 3.2. Para el movimiento del...ejemplo 3.1..., obtener los tensores materiales y espaciales de deformación:

a) Tensor material de deformación: $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1})$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & 1 & A \\ -A & -A & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & 1 & -A \\ -A & A & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} A^2 & -A^2 & -2A \\ -A^2 & A^2 & 0 \\ -2A^2 & 0 & 2A^2 \end{bmatrix}$$

²⁸ LAI, Op. cit., p. 66.

b) Tensor Espacial De Deformación: $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1})$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1+A^2 & A^2 & A \\ -A^2 & 1-A^2 & -A \\ A & A & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+A^2 & -A^2 & A \\ A^2 & 1-A^2 & A \\ A & -A & 1 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3A^2 - 2A^4 & A^2 + 2A^4 & -2A - 2A^3 \\ A^2 + 2A^4 & A^2 - 2A^4 & 2A^3 \\ -2A - 2A^3 & 2A^3 & -2A^2 \end{bmatrix}$$

(Obsérvese que $\mathbf{E} \neq \mathbf{e}$)

3.3.1 Expresión de los tensores de deformación en términos de los (gradientes de los) desplazamientos. Sustituyendo las expresiones (3.11) ($\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{J}$) y (3.12) ($\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1} - \mathbf{j}$) en las ecuaciones (3.13) y (3.14) se obtienen las expresiones de los tensores de deformación en función del gradiente material, $\mathbf{J}(\mathbf{X}, t)$, y espacial, $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$, de los desplazamientos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}, t) \rightarrow \begin{cases} \mathbf{E} = \frac{1}{2}[(\mathbf{1} + \mathbf{J}^T) \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{J}) - \mathbf{1}] = \frac{1}{2}[\mathbf{J} + \mathbf{J}^T + \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J}] \\ E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \frac{\partial U_k}{\partial X_j} \right] \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \begin{cases} \mathbf{e} = \frac{1}{2}[\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{j}^T) \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{j})] = \frac{1}{2}[\mathbf{j} + \mathbf{j}^T - \mathbf{j}^T \cdot \mathbf{j}] \\ e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

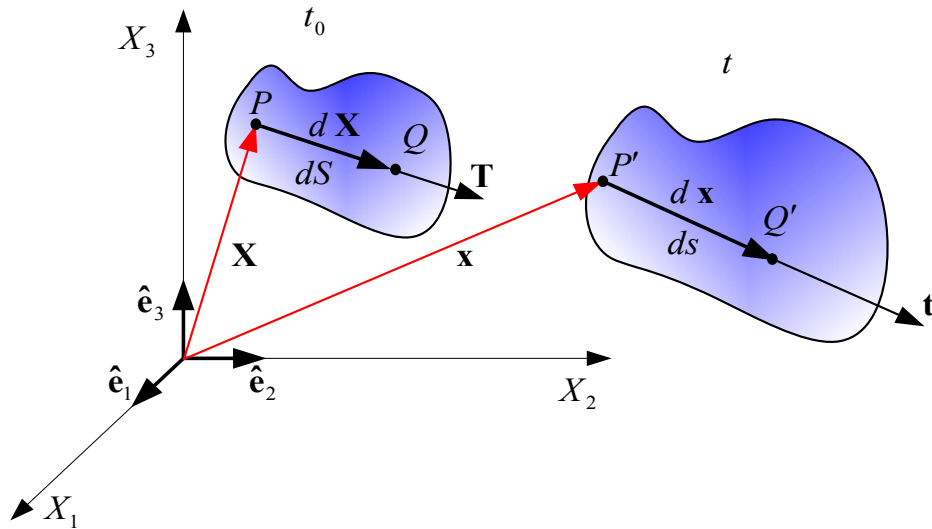
3.4 ESTIRAMIENTO. ALARGAMIENTO UNITARIO²⁹

Se considera ahora una partícula P en la configuración de referencia y otra partícula Q , situada en el entorno diferencial de P , ver Figura 22. Las

²⁹ OLIVELLA, Op. cit., p. 33.

correspondientes posiciones en la configuración vienen dada por los puntos del espacio P' y Q' de modo que las distancias entre ambas partículas en la configuración de referencia dS , se transforma en ds en el instante actual. Sean \mathbf{T} y \mathbf{t}^* vectores unitarios en las direcciones de \overline{PQ} y $\overline{P'Q'}$, respectivamente.

Figura 22. Estiramiento y alargamiento unitario



Se define *estiramiento* en el punto material P (o en el punto espacial P') en la dirección material \mathbf{T} (o en la dirección espacial \mathbf{t}) como la longitud del segmento diferencial *deformado* $\overline{P'Q'}$ por unidad de longitud del segmento diferencial *original* \overline{PQ} . Matemáticamente la definición anterior es:

$$\text{Estiramiento} = \lambda_{\mathbf{T}} = \lambda_{\mathbf{t}} = \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{ds}{dS} \quad (0 < \lambda < \infty) \quad (3.15)$$

De igual modo se define *alargamiento unitario* en el punto material P (o en el punto espacial P') en la dirección material \mathbf{T} (o en la dirección espacial \mathbf{t}) como el

* Frecuentemente se prescindirá de los subíndices $(\bullet)_{\mathbf{T}}$ o $(\bullet)_{\mathbf{t}}$ al referirse a los estiramientos o alargamientos unitarios. Téngase bien presente, sin embargo, que siempre están asociados a una dirección determinada.

incremento de longitud del segmento diferencial *deformado* $\overline{P'Q'}$ por unidad de longitud del segmento diferencial *original* \overline{PQ} . Y la correspondiente definición matemática:

$$\text{Alargamiento unitario} = \varepsilon_{\mathbf{T}} = \varepsilon_{\mathbf{t}} = \frac{\overline{\Delta P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{ds - dS}{dS} \quad (3.16)$$

Las ecuaciones (3.15) y (3.16) permite relacionar inmediatamente los valores del alargamiento unitario y del estiramiento para un mismo punto y dirección como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \frac{ds - dS}{dS} = \frac{ds}{\underbrace{dS}_{\lambda}} - 1 = \lambda - 1 \quad (\Rightarrow -1 < \varepsilon < \infty) \quad (3.17)$$

Analizando la expresión anterior:

- Si $\lambda = 1 (\varepsilon = 0) \Rightarrow ds = dS$: las partículas P y Q pueden haberse movido relativamente con el tiempo, pero sin aumentar ni disminuir la distancia entre ellas.
- Si $\lambda > 1 (\varepsilon > 0) \Rightarrow ds > dS$: las distancia entre las partículas P y Q se ha alargado con la deformación del medio.
- Si $\lambda < 1 (\varepsilon < 0) \Rightarrow ds < dS$: las distancia entre las partículas P y Q se ha acortado con la deformación del medio.

3.4.1 Estiramientos, alargamientos unitarios y los tensores de deformación.

Es posible relacionar las expresiones que definen el estiramiento y el alargamiento unitario con los tensores de deformación vistos en el apartado anterior, mediante las expresiones que siguen:

$$\begin{cases} \lambda = \sqrt{1 + 2\mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda - 1 = \sqrt{1 + 2\mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}} - 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{\sqrt{1+2\mathbf{t}\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{t}}} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda - 1 = \frac{1}{\sqrt{1+2\mathbf{t}\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{t}}} - 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

De lo anterior es fácil deducir que los tensores material y espacial de deformación $\mathbf{E}(\mathbf{X},t)$ y $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ contienen información sobre los estiramientos (y los alargamientos unitarios) para cualquier dirección en un entorno diferencial de una partícula dada, tal como ponen de manifiesto las ecuaciones (3.18) y (3.19).

3.5 VARIACION DE ANGULOS ³⁰

Se considera ahora una partícula P y otras dos partículas Q y R , situadas en un entorno diferencial de P en la configuración material, ver Figura 23, y las mismas partículas ocupando las posiciones espaciales P' , Q' y R' . Se define ahora la relación entre los ángulos que forman los correspondientes segmentos diferenciales en la configuración de referencia (ángulo Θ), y en la configuración actual (ángulo θ).

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{T}^{(1)} \cdot (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}) \cdot \mathbf{T}^{(2)}}{\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}} \quad (3.20)$$

Donde los estiramientos $\lambda^{(1)}$ y $\lambda^{(2)}$ pueden obtenerse aplicando la expresión (3.18) a las direcciones $\mathbf{T}^{(1)}$ y $\mathbf{T}^{(2)}$ llegando a:

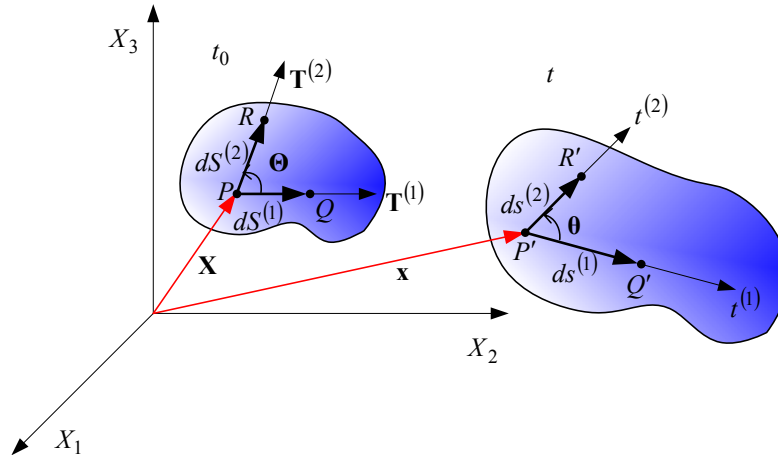
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{T}^{(1)} \cdot (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}) \cdot \mathbf{T}^{(2)}}{\sqrt{1+2\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(1)}} \sqrt{1+2\mathbf{T}^{(2)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}} \quad (3.21)$$

De un modo análogo, operando en la configuración de referencia, puede obtenerse un ángulo Θ entre los segmentos diferenciales $d\mathbf{X}^{(1)}$ y $d\mathbf{X}^{(2)}$ (en función de $\mathbf{t}^{(1)}$, $\mathbf{t}^{(2)}$ y \mathbf{e}) como:

³⁰ OLIVELLA, Op. cit., p. 37.

$$\cos \Theta = \frac{\mathbf{t}^{(1)} \cdot (\mathbf{1} + 2\mathbf{e}) \cdot \mathbf{t}^{(2)}}{\sqrt{1 + 2\mathbf{t}^{(1)} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t}^{(1)}} \sqrt{1 + 2\mathbf{t}^{(2)} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t}^{(2)}}} \quad (3.22)$$

Figura 23. Variación de ángulos



De igual forma, como en el apartado anterior, es posible razonar fácilmente que los tensores material y espacial de deformación $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$ y $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ contienen información sobre las variaciones de los ángulos entre segmentos diferenciales en el entorno de una partícula dada, durante el proceso de deformación.

3.6 SIGNIFICADO FISICO DE LOS TENSORES DE DEFORMACION

3.6.1 Tensor material de deformación. Considere un segmento \overline{PQ} , orientado paralelamente al eje X_1 en la configuración de referencia (ver Figura 24). Antes de la deformación \overline{PQ} tiene una longitud de conocida $dS = dX$.

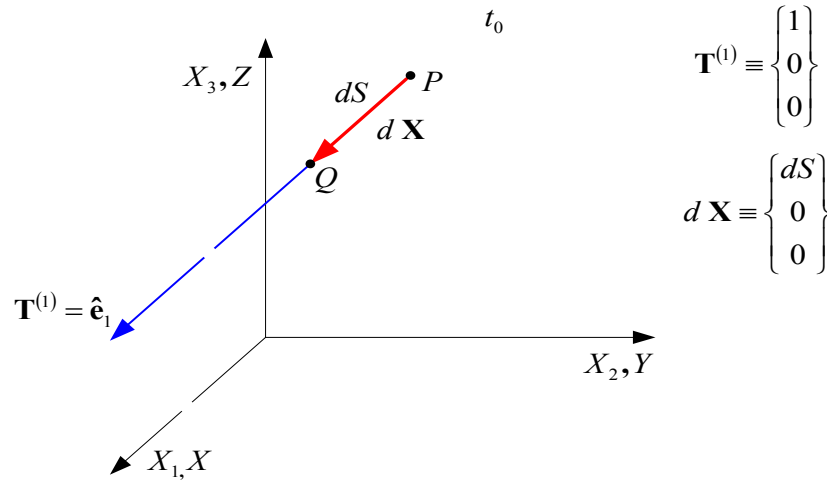
Se pretende conocer la longitud $\overline{P'Q'}$ después de la deformación. Para ello se tiene en cuenta el tensor material de deformación \mathbf{E} dado por sus componentes:

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{XX} & E_{XY} & E_{XY} \\ E_{XY} & E_{YY} & E_{YZ} \\ E_{XZ} & E_{YZ} & E_{ZZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

En consecuencia:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} = [\mathbf{T}]^T \cdot [\mathbf{E}] \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = E_{11} \quad (3.24)$$

Figura 24. Tensor material de deformación



El estiramiento en la dirección material X_1 puede obtenerse ahora sustituyendo el valor $\mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}$ en la expresión del estiramiento (3.18), obteniéndose:

$$\lambda_1 = \sqrt{1 + 2E_{11}}.$$

De modo análogo se pueden considerar segmentos orientados en las direcciones $X_2 \equiv Y$ y $X_3 \equiv Z$ y obtener los valores λ_2 y λ_3 , resultando:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{1 + 2E_{11}} = \sqrt{1 + 2E_{XX}} \Rightarrow \varepsilon_X = \lambda_X - 1 = \sqrt{1 + 2E_{XX}} - 1 \\ \lambda_2 &= \sqrt{1 + 2E_{22}} = \sqrt{1 + 2E_{YY}} \Rightarrow \varepsilon_Y = \lambda_Y - 1 = \sqrt{1 + 2E_{YY}} - 1 \\ \lambda_3 &= \sqrt{1 + 2E_{33}} = \sqrt{1 + 2E_{ZZ}} \Rightarrow \varepsilon_Z = \lambda_Z - 1 = \sqrt{1 + 2E_{ZZ}} - 1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

En las componentes E_{XX} , E_{YY} y E_{ZZ} de la diagonal principal del tensor \mathbf{E} (denominadas *deformaciones longitudinales*) está contenida la información sobre el estiramiento y los alargamientos unitarios de segmentos diferenciales inicialmente (*en la configuración de referencia*) orientados en las direcciones X , Y y Z . Es decir:

- Si $E_{XX} = 0 \Rightarrow \varepsilon_X = 0 \Rightarrow$ No hay alargamiento en al dirección X .
- Si $E_{YY} = 0 \Rightarrow \varepsilon_Y = 0 \Rightarrow$ No hay alargamiento en al dirección Y .
- Si $E_{ZZ} = 0 \Rightarrow \varepsilon_Z = 0 \Rightarrow$ No hay alargamiento en al dirección Z .

Considérese ahora un ángulo entre los segmentos PQ (paralelo al eje X_1) y PR (paralelo al eje X_2), siendo Q y R dos partículas del entorno diferencial de P en la configuración material y P' , Q' y R' las respectivas posiciones en la configuración espacial (ver Figura 25). Conocido el ángulo $\left(\Theta = \frac{\pi}{2}\right)$ entre los segmentos en la configuración de referencia es posible conocer el ángulo θ en la configuración actual, utilizando la expresión (3.21) y teniendo en cuenta la ortogonalidad de ambos $(\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{T}^{(2)} = 0)$ y las igualdades $\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(1)} = E_{11}$, $\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(2)} = E_{12}$ y $\mathbf{T}^{(2)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(2)} = E_{22}$,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{T}^{(1)} \cdot (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}) \cdot \mathbf{T}^{(2)}}{\sqrt{1 + 2\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(1)}} \sqrt{1 + 2\mathbf{T}^{(2)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}} \sqrt{1 + 2E_{22}}} \quad (3.26)$$

Lo que equivale a:

$$\theta \equiv \theta_{xy} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2E_{XY}}{\sqrt{1 + 2E_{XX}} \sqrt{1 + 2E_{YY}}} \quad (3.27)$$

Y el incremento del ángulo final respecto a su valor inicial resulta:

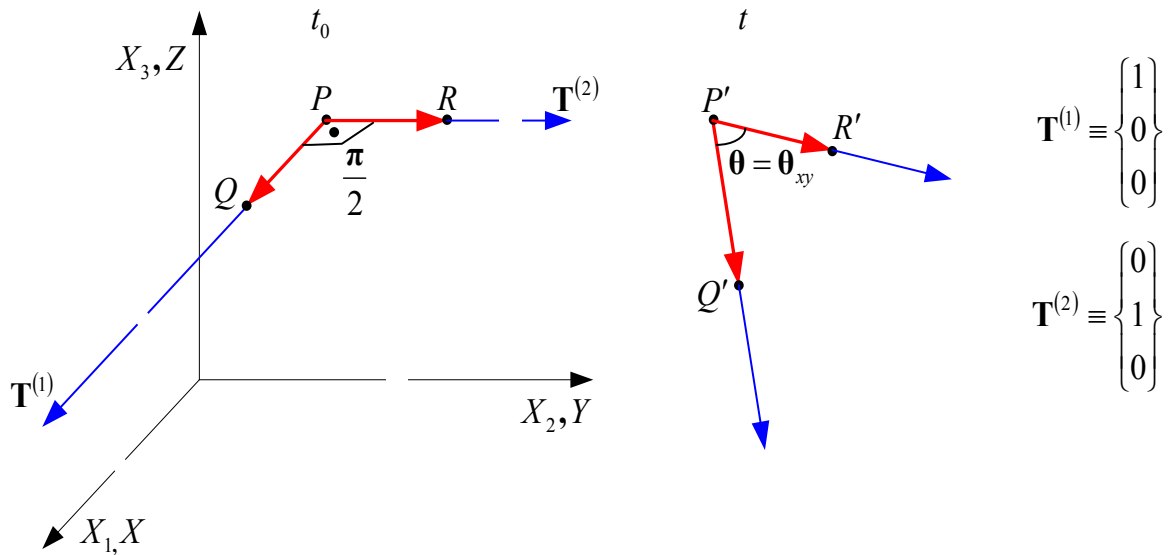
$$\Delta \Theta_{XY} = \theta_{xy} - \underbrace{\Theta_{XY}}_{\frac{\pi}{2}} = -\arcsin \frac{2E_{XY}}{\sqrt{1 + 2E_{XX}} \sqrt{1 + 2E_{YY}}} \quad (3.28)$$

Resultados análogos se obtienen partiendo de pares de segmentos orientados según los distintos ejes de coordenadas llegándose a:

$$\Delta\Theta_{XZ} = -\arcsin \frac{2E_{XZ}}{\sqrt{1+2E_{XX}}\sqrt{1+2E_{ZZ}}} \quad (3.29)$$

$$\Delta\Theta_{YZ} = -\arcsin \frac{2E_{YZ}}{\sqrt{1+2E_{YY}}\sqrt{1+2E_{ZZ}}} \quad (3.30)$$

Figura 25. Angulo entre segmentos



En las componentes E_{XY} , E_{XZ} y E_{YZ} del tensor \mathbf{E} (denominadas *deformaciones transversales*) esta contenida la información sobre la variación de los ángulos entre segmentos diferenciales inicialmente (en la *configuración material*) orientados en las direcciones X , Y y Z . Es decir³¹:

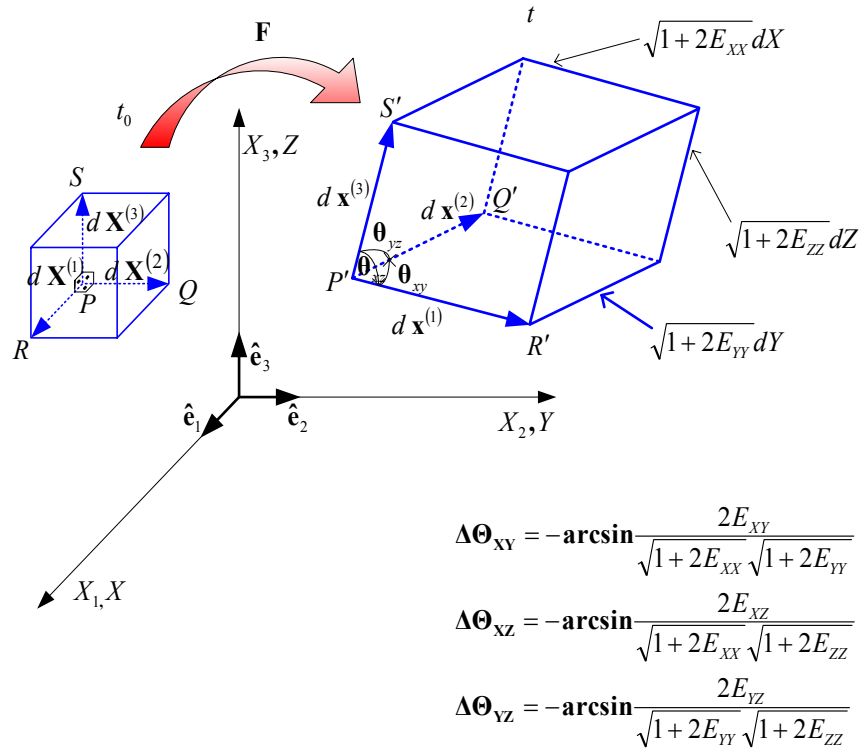
- Si $E_{XY} = 0 \Rightarrow$ La deformación no produce variación del ángulo en dos segmentos inicialmente situados en las direcciones X e Y .
- Si $E_{XZ} = 0 \Rightarrow$ La deformación no produce variación del ángulo en dos segmentos inicialmente situados en las direcciones X y Z .



- Si $E_{YZ} = 0 \Rightarrow$ La deformación no produce variación del ángulo en dos segmentos inicialmente situados en las direcciones Y y Z .

En la Figura 26 se presenta la interpretación física de las componentes del tensor material de deformación sobre un paralelepípedo elemental en el entorno de una partícula P con aristas orientadas según los ejes coordenados.

Figura 26. Interpretación física del tensor material de deformación



3.6.2 Tensor Espacial de Deformación. Argumentos parecidos a los de la sección anterior permiten interpretar a su vez componentes del tensor espacial de deformación:

³¹ CALCOTE, Op. cit., p. 55.

$$\mathbf{e} \equiv \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

La diagonal principal (deformaciones longitudinales) puede interpretarse en función de los estiramientos y alargamientos unitarios de segmentos diferenciales orientados según los ejes coordenados en *la configuración actual o deformada*:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-2e_{11}}} = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{xx}}} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{xx}}} - 1 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{\sqrt{1-2e_{22}}} = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{yy}}} \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{yy}}} - 1 \\ \lambda_3 &= \frac{1}{\sqrt{1-2e_{33}}} = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{zz}}} \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{zz}}} - 1 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Mientras que las componentes de fuera de la diagonal principal (deformaciones transversales) contienen información sobre la variación de ángulos entre segmentos diferenciales orientados según los ejes coordenados en *la configuración actual o deformada*:

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{xy} &= \frac{\pi}{2} - \Theta_{xy} = -\arcsin \frac{2e_{xy}}{\sqrt{1-2e_{xx}}\sqrt{1-2e_{yy}}} \\ \Delta\theta_{xz} &= \frac{\pi}{2} - \Theta_{xz} = -\arcsin \frac{2e_{xz}}{\sqrt{1-2e_{xx}}\sqrt{1-2e_{zz}}} \\ \Delta\theta_{yz} &= \frac{\pi}{2} - \Theta_{yz} = -\arcsin \frac{2e_{yz}}{\sqrt{1-2e_{yy}}\sqrt{1-2e_{zz}}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

El resumen de las correspondientes interpretación física se presenta en la Figura 27.

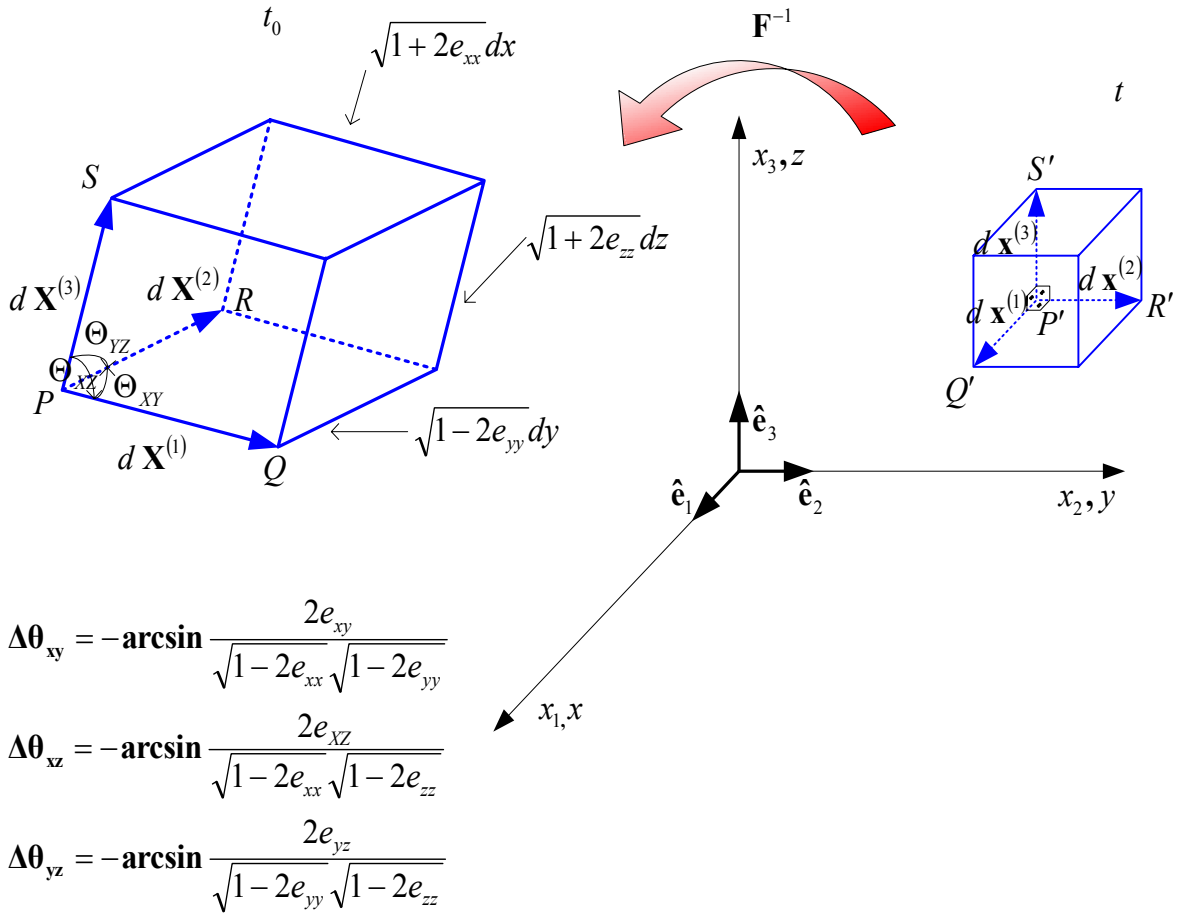
3.7 VELOCIDAD DE DEFORMACION

En las secciones anteriores de este capítulo se ha estudiado el concepto deformación, entendido como la variación de la posición relativa (ángulos y distancias) de las partículas en el entorno de una partícula dada. Ahora se definirá

el concepto de *velocidad de deformación* como una medida de la variación de la posición relativa de las partículas por unidad de tiempo.

3.7.1 Tensor de velocidad de deformación y tensor spin. Considérese la configuración correspondiente en el instante t , sean dos partículas del medio continuo P y Q que ocupan los puntos espaciales P' y Q' en dicho instante (ver Figura 28), sus velocidades, $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t)$ y su velocidad relativa

Figura 27. Interpretación física del tensor espacial de deformación



viene dado por³²:

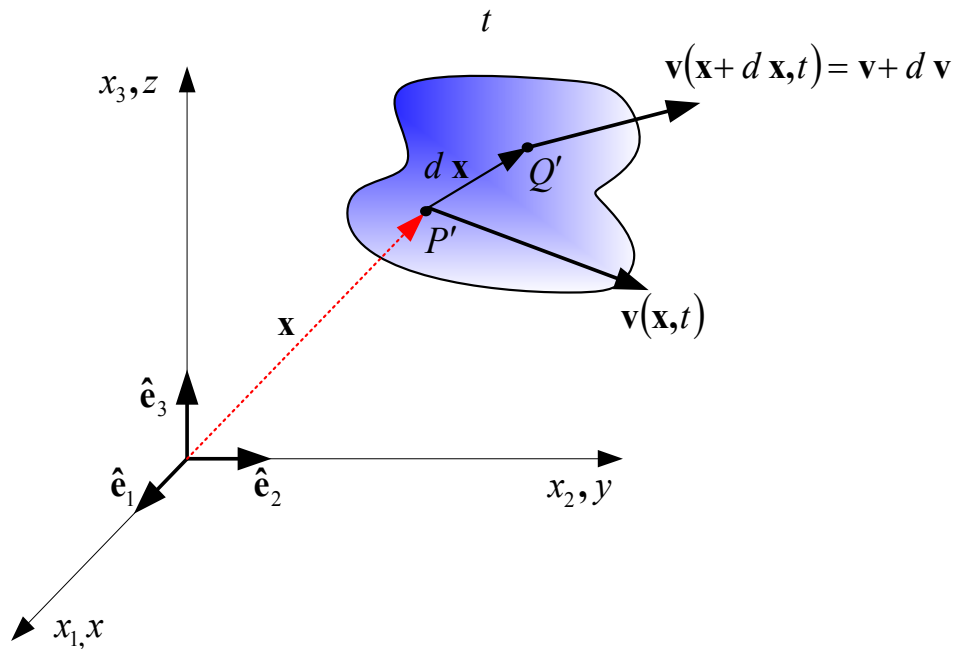
$$d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_P = \mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (3.34)$$

Con lo que puede escribirse:

$$d\mathbf{v} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}}_l \cdot d\mathbf{x} = l \cdot d\mathbf{x}$$

$$dv_i = \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}}_{l_{ij}} dx_j = l_{ij} dx_j \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.35)$$

Figura 28. Tensor de velocidad de deformación



En la ecuación (3.35) se ha introducido el denominado tensor gradiente espacial de velocidad $l(\mathbf{x}, t)$ definido como:

$$\text{Tensor gradiente espacial de la velocidad} \rightarrow \begin{cases} l(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \\ l = \mathbf{v} \otimes \nabla \\ l_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (3.36)$$

³² LAI, Op. cit., p. 75.

Descomponiendo el tensor gradiente de velocidad en su parte simétrica y antisimétrica* :

$$l = \mathbf{d} + \mathbf{w}$$

Donde \mathbf{d} es un tensor simétrico denominado *tensor de velocidad de deformación*:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tensor} \\ \text{velocidad de} \\ \text{deformación} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d} \stackrel{def}{=} \text{sym}(l) = \frac{(l + l^T)}{2} = \frac{(\mathbf{v} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{v})^{not}}{2} = \nabla^S \mathbf{v} \\ d_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \quad i, j \in \{1,2,3\} \\ [\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3.37)$$

y \mathbf{w} es un tensor asimétrico denominado *tensor velocidad de rotación o tensor spin* cuya expresión es:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tensor} \\ \text{velocidad de} \\ \text{rotación (spin)} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w} \stackrel{def}{=} \text{skew}(l) = \frac{(l - l^T)}{2} = \frac{(\mathbf{v} \otimes \nabla - \nabla \otimes \mathbf{v})^{not}}{2} = \nabla^a \mathbf{v} \\ w_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \quad i, j \in \{1,2,3\} \\ [\mathbf{w}] = \begin{bmatrix} 0 & w_{12} & -w_{31} \\ -w_{12} & 0 & w_{23} \\ w_{31} & -w_{23} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3.38)$$

3.8 DERIVADAS MATERIALES DE LOS TENSORES DEFORMACION Y OTRAS MAGNITUDES³³

3.8.1 Tensor gradiente de deformación \mathbf{F} y gradiente de la deformación Inverso \mathbf{F}^{-1} . Derivando respecto al tiempo la expresión de \mathbf{F} en la ecuación (3.3):

* Recordemos...el apartado 1.2.12... Tensores simétricos y antisimétricos.

³³ BACKUS, Op. cit., p. 147.

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} \Rightarrow \frac{dF_{ij}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \underbrace{\frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t}}_{v_i} = \frac{\partial v_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} = \underbrace{\frac{\partial v_i(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t))}{\partial x_k}}_{l_k} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial X_j}}_{F_{kj}} = l_{ik} F_{kj}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dF_{ij}}{dt} = \dot{F}_{ij} = l_{ik} F_{kj} & i, j \in \{1, 2, 3\} \\ \frac{d\mathbf{F}^{not}}{dt} = \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{F} \end{cases} \quad (3.39)$$

Donde se ha tenido en cuenta la expresión (3.36) para el tensor gradiente de la velocidad \mathbf{l} . Para obtener la derivada material del tensor \mathbf{F}^{-1} se deriva la siguiente identidad:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \frac{d\mathbf{F}}{dt} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F} \cdot \frac{d(\mathbf{F}^{-1})}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d(\mathbf{F}^{-1})}{dt} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \underbrace{\frac{d\mathbf{F}}{dt}}_{\dot{\mathbf{F}} / \mathbf{l} \cdot \mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{l} \cdot \underbrace{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}}_{\mathbf{1}} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{l}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d(\mathbf{F}^{-1})}{dt} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{l} \\ \frac{dF_{ij}^{-1}}{dt} = -F_{ik}^{-1} l_{kj} & i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (3.40)$$

3.8.2 Tensores de deformación \mathbf{E} y \mathbf{e} . De las ecuaciones (3.13), (3.39) y (3.37):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \Rightarrow \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{F}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \cdot \underbrace{(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T)}_{2\mathbf{d}} \cdot \mathbf{F}$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F} \quad (3.41)$$

Para el tensor espacial de deformación \mathbf{e} es posible obtener:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}^{-1}) \Rightarrow \frac{d\mathbf{e}}{dt} = \dot{\mathbf{e}} = -\frac{1}{2} (\mathbf{l}^T \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{l}) \quad (3.42)$$

3.9 DEFORMACION INFINITESIMAL

La teoría de deformación infinitesimal se basa en dos hipótesis simplificativas sobre la teoría general (o de deformación finita) vista en apartados anteriores (ver Figura 29).

Hipótesis:

- i) *Los desplazamientos son muy pequeños* frente a las dimensiones típicas del medio continuo ($\|\mathbf{u}\| \ll \|\mathbf{X}\|$).
- ii) *Los gradientes de los desplazamientos son muy pequeños* (infinitesimales).

En virtud de la primera hipótesis las configuraciones de referencia, Ω_0 y actual, Ω_t , están muy próximas entre si y se consideran indistinguibles una de otra.

En consecuencia, las coordenadas materiales y espaciales coinciden y ya no tiene sentido hablar de descripciones material y espacial:

$$\begin{cases} \mathbf{x} \equiv \mathbf{X} + \mathbf{u} \cong \mathbf{X} \\ x_i = X_i + u_i \cong X_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \stackrel{not}{=} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ U_i(\mathbf{X}, t) \stackrel{not}{=} u_i(\mathbf{X}, t) \equiv u_i(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.43)$$

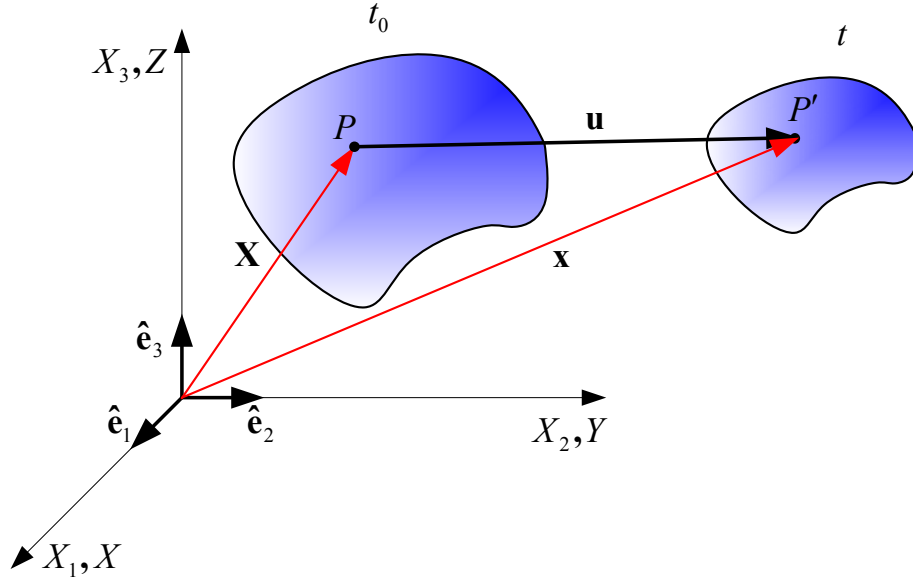
La segunda hipótesis puede escribirse matemáticamente como:

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1, \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.44)$$

3.9.1 Tensores de deformación. Tensor de deformación infinitesimal³⁴. Los tensores gradiente material y gradiente espacial de los desplazamientos coinciden. En efecto, a la vista de la ecuación (3.43):

³⁴ MEJIA ABAD, Pablo. Elementos de estudio en elasticidad y mecánica de medios continuos. Medellín: publicaciones UNAL- Medellín. 1986. p. 146.

Figura 29. Deformación infinitesimal



$$\begin{cases} x_j = X_j \\ u_i(\mathbf{x}, t) = U_i(\mathbf{X}, t) \end{cases} \Rightarrow j_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = J_{ij} \Rightarrow \mathbf{j} = \mathbf{J} \quad (3.45)$$

Y el tensor gradiente de deformación resulta ser:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T + \mathbf{J}^T \mathbf{J}) \cong \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T) \\ E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}}_{\ll 1} \right) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (3.46)$$

Donde se ha tenido en cuenta el carácter de infinitésimo de segundo orden del término $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$. Operando similarmente con el tensor espacial de deformación:

$$\begin{cases} \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{j} + \mathbf{j}^T - \mathbf{j}^T \mathbf{j}) \cong \frac{1}{2}(\mathbf{j} + \mathbf{j}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T) \\ e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}}_{\ll 1} \right) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (3.47)$$

Las ecuaciones (3.46) y (3.47) permiten definir el *tensor de deformación infinitesimal* $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\begin{array}{l} \text{Tensor de} \\ \text{deformación} \rightarrow \\ \text{infinitesimal} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T)^{not} = \nabla^s \mathbf{u} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \end{array} \right. \quad * \quad (3.48)$$

Cabe resaltar que el *tensor de deformación infinitesimal es simétrico*, tal como se observa de su definición en la ecuación (3.48):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T)^T = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T) = \boldsymbol{\varepsilon}$$

Ejemplo 3.3. Para el movimiento...del ejemplo 3.1..., determinar bajo que condiciones constituye un caso de deformación infinitesimal. Para dicho caso obtener el tensor infinitesimal de deformación.

Comparar con el resultado obtenido a partir de los tensores espacial y material de deformación...del ejemplo 3.2... considerando la hipótesis de deformación infinitesimal.

Solución:

a) las ecuaciones de movimiento vienen dadas por
$$\begin{cases} x_1 = X_1 - AX_3 \\ x_2 = X_2 - AX_3 \\ x_3 = -AX_1 + AX_2 + X_3 \end{cases} \quad \text{de las}$$

cuales se obtiene el campo de desplazamientos:

* NOTACION: se define el operador gradiente simétrico ∇^s mediante: $\nabla^s(\bullet) = \frac{1}{2}[(\bullet) \otimes \nabla + \nabla \otimes (\bullet)]$.

$$\mathbf{U}(\mathbf{X},t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} \equiv \begin{cases} U_1 = -AX_3 \\ U_2 = -AX_3 \\ U_3 = -AX_1 + AX_2 \end{cases} . \text{ Es evidente que para que los desplazamientos}$$

Sean infinitesimales debe cumplirse que A sea un infinitésimo ($A \ll 1$).

b) *Tensor de deformación*: el tensor gradiente de los desplazamientos

$\mathbf{J}(\mathbf{X},t) = \mathbf{j}(\mathbf{x},t)$ esta dado por:

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \otimes \nabla = \left\{ -AX_3, -AX_3, -AX_1 + AX_2 \right\} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \\ \frac{\partial}{\partial X_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & A \\ -A & -A & 0 \end{bmatrix}$$

y el tensor infinitesimal de deformación, de acuerdo con la ecuación (3.48) será:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U & 0 & -A \\ 0 & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) *Tensores material y espacial de deformación*: en el ejemplo 3.2 el tensor material y espacial de deformación resulta ser, respectivamente:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A^2 & -A^2 & -2A \\ -A^2 & A^2 & 0 \\ -2A^2 & 0 & 2A^2 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3A^2 - 2A^4 & A^2 + 2A^4 & -2A - 2A^3 \\ A^2 + 2A^4 & A^2 - 2A^4 & 2A^3 \\ -2A - 2A^3 & 2A^3 & -2A^2 \end{bmatrix}$$

y despreciando los infinitésimos de segundo grado o superiores ($A^4 \ll A^3 \ll A^2 \ll A$) resulta:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

3.9.2 Estiramiento. Alargamiento unitario. Considerando la formula general (3.18) del estiramiento unitario en la dirección $\mathbf{T} \cong \mathbf{t}$ ($\lambda_t = \sqrt{1 + 2\mathbf{t} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}}$) y aplicando el mismo desarrollo en una serie de Taylor alrededor de 0 (teniendo en cuenta que $\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon}$ es infinitésimo y, por lo tanto también lo es $x = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{t}$, se obtiene:

$$\lambda_t = \sqrt{1 + \underbrace{2\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{t}}_x} \cong 1 + \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{t} \quad (3.49)$$

$$\varepsilon_t = \lambda_t - 1 = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{t}$$

3.9.3 Interpretación física de las deformaciones infinitesimales.

Consideremos el tensor de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}$ y sus componentes en el sistema de coordenadas $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$ de la Figura 30:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Considérese el segmento diferencial \overline{PQ} orientado en la configuración de referencia en la dirección del eje coordenado $x_1 \equiv x$. El estiramiento λ_x y el alargamiento unitario ε_x en dicha dirección vienen dados, de acuerdo con la ecuación (3.49) con $\mathbf{t} = \{1, 0, 0\}^T$, por:

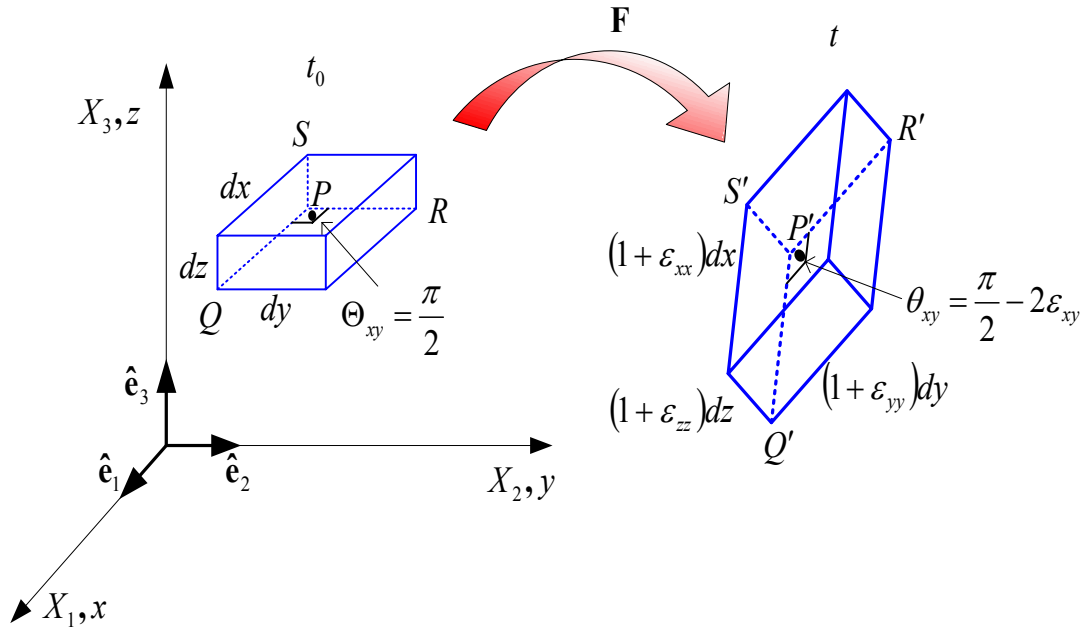
$$\lambda_x = 1 + \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{t} = 1 + \varepsilon_{xx} \Rightarrow \varepsilon_x = \lambda - 1 = \varepsilon_{xx} \quad (3.51)$$

Lo que permite dar a la componente $\varepsilon_{xx} \equiv \varepsilon_{11}$ el significado físico del alargamiento unitario ε_x en la dirección del eje coordenado $x_1 \equiv x$. Una interpretación similar puede darse a las demás componentes de la diagonal principal del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ (ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz}).

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x ; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_y ; \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_z \quad (3.52)$$

Atendiendo ahora a las componentes de fuera de la diagonal principal de ε , consideremos los segmentos diferenciales \overline{PQ} y \overline{PR} orientados según las direcciones coordenadas x y y en la configuración de referencia y formando, por lo tanto, un ángulo $\Theta_{xy} = \frac{\pi}{2}$ de dicha configuración. Aplicando la ecuación (3.27), el incremento del ángulo correspondiente será:

Figura 30. Interpretación física de las deformaciones infinitesimales



$$\Delta\theta_{xy} = \theta_{xy} - \frac{\pi}{2} = -2 \arcsin \frac{\varepsilon_{xy}}{\underbrace{\sqrt{1+2\varepsilon_{xx}}}_{\approx 1} \underbrace{\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}}_{\approx 1}} \cong -2 \underbrace{\arcsin \varepsilon_{xy}}_{\approx \varepsilon_{xy}} = -2\varepsilon_{xy} \quad (3.53)$$

Donde se ha tenido en cuenta el carácter infinitesimal de ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xy} . En consecuencia, de la ecuación (3.53) ε_{xy} puede interpretarse como *menos el semi-incremento, producto por la deformación, del ángulo entre dos segmentos*

diferenciales inicialmente orientados según las direcciones coordenadas x e y . Una interpretación análoga puede encontrarse para las demás componentes ε_{xz} y ε_{yz} :

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}\Delta\theta_{xy}; \quad \varepsilon_{xz} = -\frac{1}{2}\Delta\theta_{xz}; \quad \varepsilon_{yz} = -\frac{1}{2}\Delta\theta_{yz} \quad (3.54)$$

3.10 ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

Dado un campo de desplazamiento $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ suficientemente regular, siempre es posible hallar el campo de deformaciones correspondientes (por ejemplo, de Green-Lagrange) mediante la derivación del mismo respecto a las coordenadas (en este caso materiales):

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \frac{\partial U_k}{\partial X_j} \right) = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i} + U_{k,i} U_{k,j}) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.55)$$

Para el caso de las deformaciones infinitesimales, dado el campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, el campo de deformaciones se obtiene como:

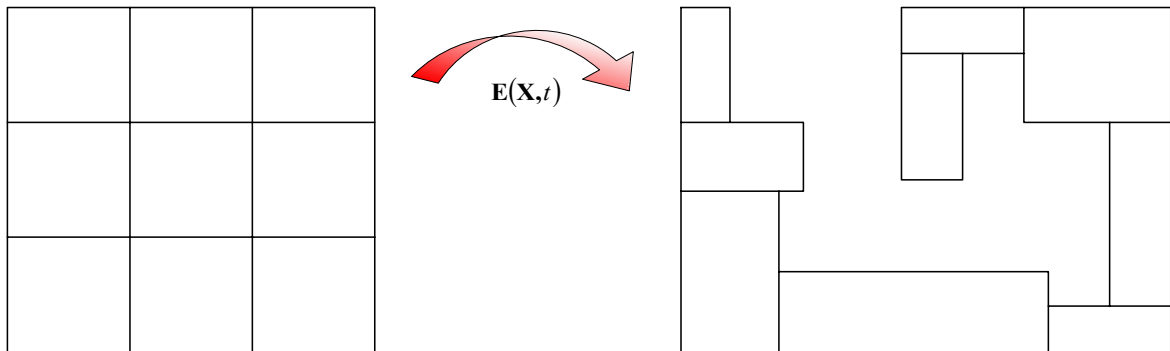
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.56)$$

Pero, dado un campo de deformaciones $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$, ¿Es posible hallar un campo de desplazamientos tal que $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ sea su tensor de deformación? Esto no es posible siempre, y la razón a esto la proporcionan las llamadas *ecuaciones de compatibilidad*. Por ende para que exista un tensor simétrico de segundo orden $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ (y que por lo tanto sea integrable y exista un campo de desplazamientos del cual provenga) es necesario que verifique unas ciertas condiciones. Estas condiciones se denominan condiciones o ecuaciones de compatibilidad y

garantizan la **continuidad** del medio continuo durante el proceso de deformación (ver Figura 31).³⁵

3.10.1 Ejemplo preliminar: ecuaciones de compatibilidad de un campo vectorial potencial. Dado un campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, se dice que es un campo potencial si existe una función escalar $\varphi(\mathbf{x},t)$ (llamada función potencial) tal que su gradiente sea $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, es decir:

Figura 31. Campo de deformaciones no compatible



$$\begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \nabla\varphi(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{v}_i(\mathbf{x},t) = \frac{\partial\varphi(\mathbf{x},t)}{\partial x_i} \end{cases} \quad i \in \{1,2,3\} \quad (3.57)$$

Por lo tanto, dada una función escalar $\varphi(\mathbf{x},t)$ (continua), siempre es posible definir un campo vectorial potencial $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ del cual aquella sea potencial de acuerdo con la ecuación (3.57).

1 8 7

³⁵ OLIVELLA, Op. cit., p. 72.

2 9 6

3 4 5

La cuestión que se plantea ahora es la inversa: dado un campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, ¿existe una función escalar $\varphi(\mathbf{x},t)$ tal que $\nabla\Phi(\mathbf{x},t)=\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$? En componentes esto se escribe como:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Rightarrow v_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \\v_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} \Rightarrow v_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \\v_z &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Rightarrow v_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0\end{aligned}\tag{3.58}$$

En (3.58) se tiene un sistema de E.D.P's con tres ecuaciones y con una incógnita ($\varphi(\mathbf{x},t)$), por lo que el sistema está sobredeterminado y puede no tener solución.

Derivando una vez las expresiones (3.58) respecto a (x, y, z) se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} & \frac{\partial v_y}{\partial z} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\end{aligned}\tag{3.59}$$

La ecuación (3.59) representa un sistema de 9 ecuaciones diferenciales. Considerando el teorema de Schwartz* se puede ver que en estas 9 ecuaciones intervienen 6 *funciones* (derivadas segundas) *distintas* de la incógnita φ , a saber:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\tag{3.60}$$

Por lo que podemos eliminarlas del sistema original (3.59) y establecer 3 relaciones, denominadas condiciones de compatibilidad, entre las derivadas espaciales primeras de las componentes de $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$.

Por lo tanto, para que exista una función escalar $\varphi(\mathbf{x},t)$ tal que $\nabla\Phi(\mathbf{x},t)=\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, el campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ dado debe verificar las siguientes condiciones de compatibilidad:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} &= 0 = S_z \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} &= 0 = S_y \\ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} &= 0 = S_x \end{aligned} \right\} \text{donde } \mathbf{S} \equiv \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \equiv \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (3.61)$$

En consecuencia, de la ecuación (3.61), las ecuaciones de compatibilidad pueden escribirse como:

$$\begin{array}{l} \text{Ecuaciones de compatibilidad} \\ \text{de un campo} \\ \text{vectorial potencial} \end{array} \rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0 \quad i, j \in \{1,2,3\} \end{cases} \quad (3.62)$$

3.10.2 Condiciones de compatibilidad para las deformaciones infinitesimales³⁶. Es posible enunciar el siguiente teorema:

si $\varepsilon_{ij}(X_1, X_2, X_3) \equiv \varepsilon_{ij}(x, y, z)$ es una función continua que tiene segundas derivadas parciales continuas en una región dada, entonces la condición necesaria y suficiente para la existencia de valores que sean soluciones de la ecuación (3.56) ($u_i = (X_1, X_2, X_3)$) son:

* El teorema de Schwartz (igualdad de derivadas cruzadas) garantiza que para una función $\Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ continuas y con derivadas continuas se cumple: $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j$

³⁶. CALCOTE, Op. cit., p. 59.

$$\begin{array}{l}
\text{Ecuaciones} \\
\text{de} \\
\text{compatibilidad}
\end{array}
\rightarrow
\left\{
\begin{array}{l}
S_{xx}^{def} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 \\
S_{yy}^{def} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} = 0 \\
S_{zz}^{def} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \\
S_{xy}^{def} = -\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \\
S_{xz}^{def} = -\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \\
S_{yz}^{def} = -\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 0
\end{array}
\right.
\quad (3.63)$$

Que constituyen las ecuaciones de compatibilidad para el tensor infinitesimal de deformación ε : la expresión correspondiente a las 6 ecuaciones (3.63) resulta ser:

$$\begin{array}{l}
\text{Ecuaciones de compatibilidad} \\
\text{para el tensor infinitesimal} \rightarrow \mathbf{S} = \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla) \\
\text{de deformación}
\end{array}
\quad (3.64)$$

Las ecuaciones (3.63) pueden ser probadas fácilmente como sigue:

Dado:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy},$$

Podemos obtener:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^2 \partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y}$$

Considerando que las ecuaciones anteriores son continuas podemos expresarlas como:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

Así:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial \varepsilon_y} + \frac{\partial u_y}{\partial \varepsilon_x} \right) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varepsilon_{12}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varepsilon_{12} = 0$$

Las otras cinco condiciones pueden ser establecidas de manera similar.

3.10.3 Ecuaciones de compatibilidad del tensor velocidad de deformación.

Dadas tres funciones de velocidad cualquiera v_1, v_2, v_3 , es posible determinar las seis componentes de rata de deformación en cualquier región donde las derivadas parciales $\frac{\partial v_i}{\partial v_j}$ existen. Por otra parte, cuando las seis componentes d_{ij} son

descritas arbitrariamente en cualquier región, en general, no existe campo de velocidad cualquiera que satisfaga la ecuación:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \stackrel{not}{=} \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Es evidente entonces que el concepto de compatibilidad de un campo de deformaciones ε introducido...en el apartado 3.10.1... puede extenderse a la compatibilidad de un campo de velocidad de deformación $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$.

4. TENSIÓN

En el capítulo anterior, se consideró una descripción puramente cinemática del movimiento de un continuo sin considerar las fuerzas que causan el movimiento y la deformación. En este capítulo se describirá el significado de las fuerzas al interior de un cuerpo como causa eficiente de cambio de movimiento y por ende de deformación, dichas fuerzas se dan entre las partículas constitutivas que conforman un medio continuo, es decir partículas microscópicas (moléculas, átomos). En la teoría clásica del continuo las fuerzas internas son introducidas mediante los conceptos de fuerzas de volumen o másicas y fuerzas de superficie, lo cual veremos en los dos primeros apartados de este capítulo, y luego veremos el concepto de *tensor de tensión* y sus respectivas propiedades y aplicaciones.

4.1 FUERZAS DE VOLUMEN O MÁSICAS

Las fuerzas de volumen son fuerzas proporcionales al volumen del material, y pueden actuar en cualquier punto del cuerpo y se describen habitualmente con un campo vectorial del tipo espacial $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, de modo que la fuerza que actúa sobre un diferencial de volumen se indica con³⁷:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)dV \quad (4.1)$$

Las dimensiones físicas de \mathbf{F} son las de fuerza por unidad de volumen $[\mathbf{F}] \equiv \text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$. La resultante \mathbf{F}_v de las fuerzas de volumen sobre un volumen finito V de materia se calcula con la integral:

$$\mathbf{F}_v = \int_V \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)dV \quad (4.2)$$

³⁷ NARANJO, Jorge A., Introducción a la mecánica de los medios continuos. Medellín: Publicaciones UNAL-Medellín, 1992. p. 71.

Con frecuencia las fuerzas de volumen son proporcionales también a la masa encerrada en el volumen, y se les llama, en tal sentido fuerzas masicas. En ciertos casos es más conveniente emplear las fuerzas másicas \mathbf{f} , cuyas dimensiones son las de una aceleración, $[\mathbf{f}] \equiv LT^{-2}$ y se define por:

$$\mathbf{f} \equiv \frac{1}{\rho} \mathbf{F} \quad (4.3)$$

La resultante total de las fuerzas másicas sobre un volumen finito será:

$$\mathbf{f}_v = \int_V \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV \quad (4.4)$$

Las fuerzas de volumen son llamadas también fuerzas exteriores. El caso más común es el de la fuerza de gravedad sobre la superficie terrestre:

$$\mathbf{f} = g \hat{\mathbf{e}}_z \quad (4.5)$$

Donde $g = 9.81 \text{m/s}^2$, aproximadamente, $\hat{\mathbf{e}}_z$ es el vector de módulo unidad orientado según la dirección z , de la vertical del lugar, cuya causa se debe a la atracción de la masa de la Tierra.

4.2 FUERZAS DE SUPERFICIE

Las fuerzas de superficie tienen un papel crucial en la mecánica de medios continuos. Estas fuerzas actúan por contacto directo entre dos partes cualesquiera del cuerpo y se definen como fuerzas por unidad de área. Si las partes en contacto se separan, las fuerzas de superficie, ejercidas cuando las partes estaban unidas, desaparecen. Las fuerzas de contacto son la resultante de un gran número de acciones atómicas o moleculares de muy corto alcance que obran a escala microscópica³⁸.

Sea $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$, la descripción espacial del campo vectorial de fuerzas superficiales por unidad de superficie en el medio continuo de la Figura 32. la fuerza resultante

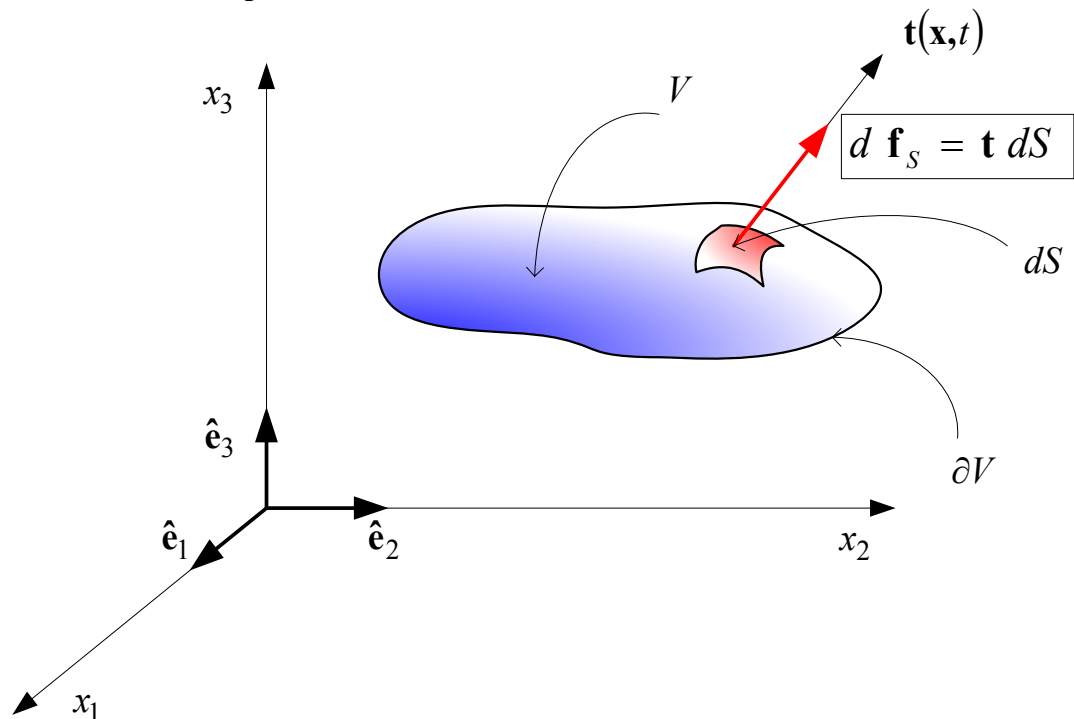
³⁸ OLIVELLA, Op. cit., p 84.

sobre un elemento diferencial de superficie dS será $\mathbf{t} \cdot dS$ y la resultante de las fuerzas de superficie actuando en el contorno ∂V del volumen V podrá escribirse como:

$$\mathbf{f} = \int_{\partial V} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dS \quad (4.6)$$

En la definición de las fuerzas de superficie dadas en (4.6) se considera implícitamente la existencia del vector de las fuerzas superficiales por unidad de superficie $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ (vector de tracción). En otras palabras, si se considera una secuencia de superficies ΔS_i , todas ellas conteniendo al punto P , y las correspondientes fuerzas superficiales $\mathbf{f}_{\Delta S_i}$, (ver Figura 32, se supone que existe el limite $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}_{\Delta S_i}}{\Delta S_i}$ y que este es independiente de la secuencia de superficies elegidas).

Figura 32. Fuerzas superficiales



4.3 POSTULADOS DE CAUCHY

Dado un medio continuo sobre el que actúan las correspondientes fuerzas másicas y superficiales (ver Figura 33). Se considera también una partícula P del interior del medio continuo y una superficie arbitraria, que pasa por el punto P y de una normal unitaria \mathbf{n} en dicho punto, que divide al medio continuo en dos partes (volúmenes materiales). En la superficie de corte, considerada ahora como parte del contorno de cada uno de estos volúmenes materiales, actuarán las fuerzas superficiales debida al contacto entre ambos.

Sea \mathbf{t} el vector de tracción que actúa en el punto P considerado como parte del contorno del primero de estos volúmenes materiales. En principio este vector de tracción (definido ahora en un punto material del medio continuo original) dependerá:

- De cual sea la partícula considerada,
- De la orientación de la superficie (definida a través de la normal \mathbf{n})
- De cual sea la propia superficie de corte.

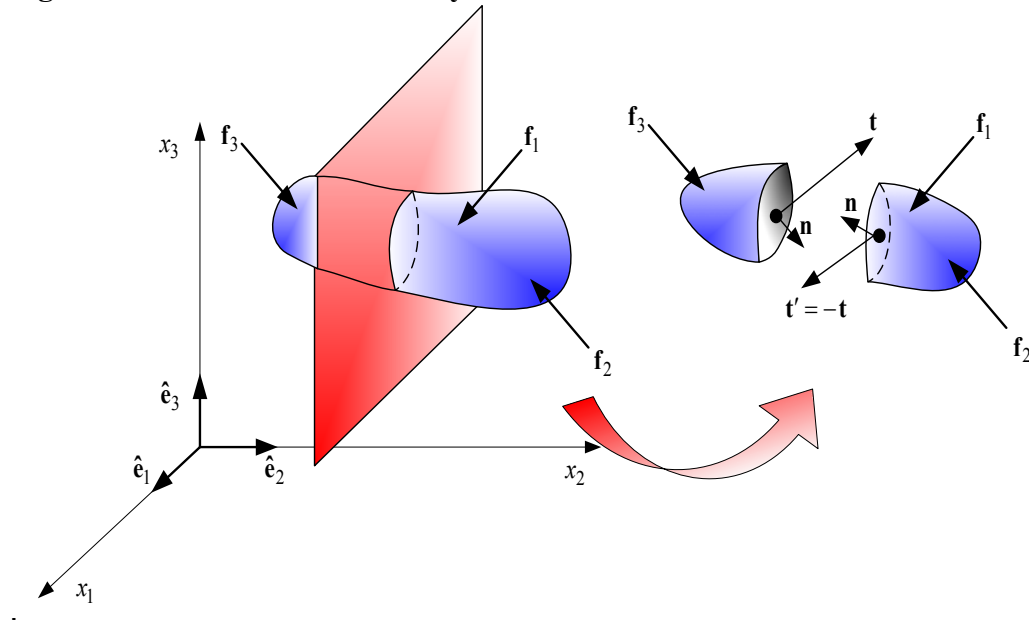
El siguiente postulado lo hace independiente de esta última condición:

1^{er} postulado de Cauchy: el vector de tracción que actúa en un punto material P de un medio continuo según un plano de normal unitaria \mathbf{n} depende únicamente del punto P de la normal \mathbf{n} $\mathbf{t} = \mathbf{t}(P, \mathbf{n})$.

2^{do} postulado de Cauchy – Principio de acción reacción: El vector de tracciones en un punto P de un medio continuo, según un plano de normal unitaria \mathbf{n} , es igual y de sentido contrario al vector de tracciones en el mismo punto P según un plano de normal unitaria $-\mathbf{n}$ en el mismo punto (ver Figura 33):

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(P, -\mathbf{n})$$

Figura 33. Postulados de Cauchy



4.4 TENSOR DE TENSIONES

4.4.1 Aplicación de la 2a ley de Newton a un medio continuo³⁹. Para un sistema discreto de partículas en movimiento tal que una partícula i , que tiene una masa m_i , una velocidad \mathbf{v}_i , y una aceleración $\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$, actúa una fuerza \mathbf{f}_i sobre cada una de las partículas del sistema que se relaciona con la aceleración de la partícula \mathbf{a}_i mediante la segunda ley de Newton así:

$$\mathbf{f}_i = m_i \mathbf{a}_i \quad (4.7)$$

De lo cual se deduce que la fuerza total resultante de todo el sistema esta dada por:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{f}_i = \sum_i m_i \mathbf{a}_i \quad (4.8)$$

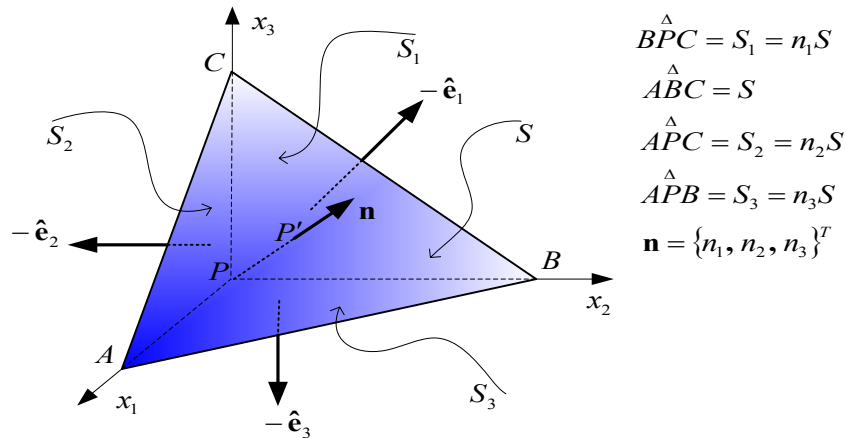
³⁹ HEINBOCKEL, Op. cit., p. 214.

Lo anterior puede ser generalizado para la teoría de la mecánica del medio continuo, teniendo en cuenta que el sistema se constituye de una cantidad infinita de partículas, para esto se considera un medio continuo de masa total M , sobre el cual actúa un vector de fuerzas masicas $\rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ y un vector de tracción $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$, cuyas partículas tiene una aceleración $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ y que ocupa en el instante t el volumen de espacio V_i se escribe:

$$\mathbf{R} = \underbrace{\int_{V_i} \rho \mathbf{b} dV}_{\text{Resultado de las fuerzas m\u00e1sicas}} + \underbrace{\int_{\partial V_i} \mathbf{t} dS}_{\text{Resultado de las fuerzas superficiales}} = \int_M \mathbf{a} \frac{dm}{\rho dv} = \int_{V_i} \rho \mathbf{a} dV \quad (4.9)$$

4.4.2 Tensor de tensiones⁴⁰. Se considera ahora el caso particular de volumen material constituido por un tetraedro elemental situado alrededor de una part\u00edcula arbitraria P del interior de un medio continuo, y orientado seg\u00fan muestra la Figura 34. Sin perdida de generalidad puede situarse el origen de coordenadas en P .

Figura 34. Tetraedro elemental alrededor de un punto material P



El tetraedro tiene un v\u00e9rtice en P y sus caras quedan definidas mediante un plano normal $\mathbf{n} \equiv \{n_1, n_2, n_3\}^T$ que intersecta con los planos coordenados definiendo una

superficie genérica de área S (la base del tetraedro) a una distancia h (la altura del tetraedro) del punto P . A su vez los planos coordenados definen las otras caras del tetraedro de áreas S_1, S_2, S_3 con normales (hacia fuera) $-\hat{e}_1, -\hat{e}_2, -\hat{e}_3$ respectivamente. Por consideraciones geométricas pueden establecerse las relaciones:

$$S_1 = n_1 S \quad S_2 = n_2 S \quad S_3 = n_3 S \quad (4.10)$$

En la Figura 35, se introduce la notación para los vectores de tracción en cada una de las caras del tetraedro considerado y asociados a las correspondientes normales.

Por el segundo postulado de Cauchy, el vector de tracción sobre un punto genérico \mathbf{x} de una de las superficies S_i (de normal hacia fuera $-\hat{e}_i$) puede escribirse:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\hat{e}_i) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \hat{e}_i) = \mathbf{t}^{(i)}(\mathbf{x}) \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (4.11)$$

En virtud del teorema del valor medio el campo vectorial $\mathbf{t}^{(i)}(\mathbf{x})$, supuesto continuo en el dominio S_i , alcanza su valor medio en el interior del mismo. Sea $\mathbf{x}_{S_i}^* \in S_i$ el punto en que alcanza el valor medio y $\mathbf{t}^{(i)*} = \mathbf{t}^{(i)}(\mathbf{x}_{S_i}^*)$ dicho valor medio.

De forma análoga sean $\mathbf{t}^* = \mathbf{t}^*(\mathbf{x}_S^*)$, $\rho^* \mathbf{b}^* = \rho(\mathbf{x}_V^*) \mathbf{b}(\mathbf{x}_V^*)$, $\rho^* \mathbf{a}^* = \rho(\mathbf{x}_V^*) \mathbf{a}(\mathbf{x}_V^*)$ los correspondientes valores medios de los campos: vectores de tracción $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ en S , densidad de fuerzas másicas $\rho \mathbf{b}(\mathbf{x})$ y de aceleración $\rho \mathbf{a}(\mathbf{x})$, los cuales, de nuevo en virtud del teorema del valor medio, se alcanza en los puntos, $\mathbf{x}_S^* \in S$ y $\mathbf{x}_V^* \in V$ del interior de los correspondientes dominios.

⁴⁰ LAI, Op. cit., p. 95.

Figura 35. Vectores de tracción en el tetraedro elemental

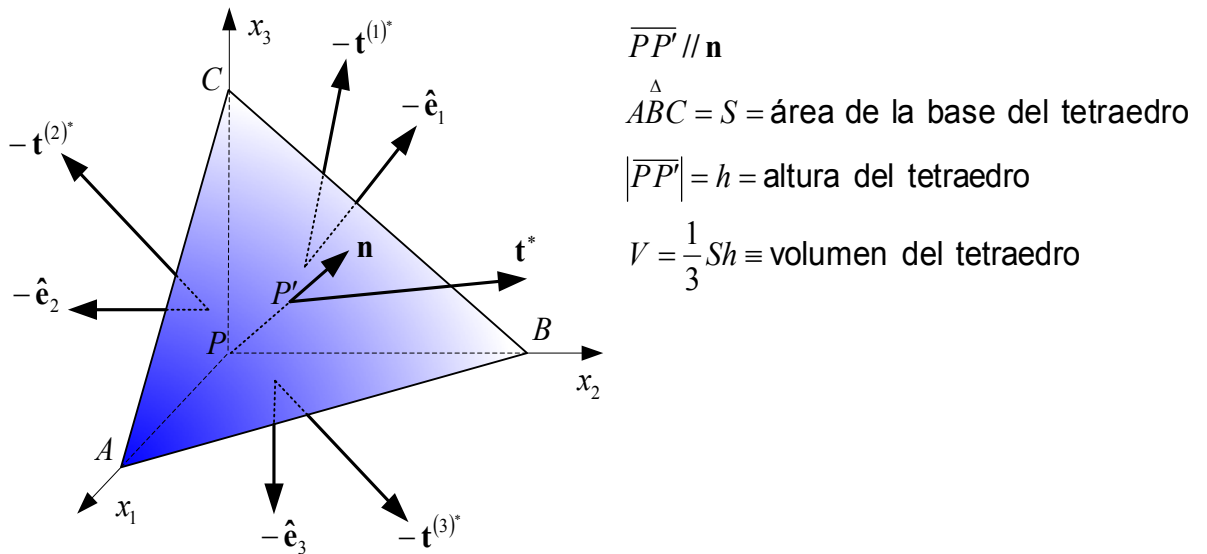
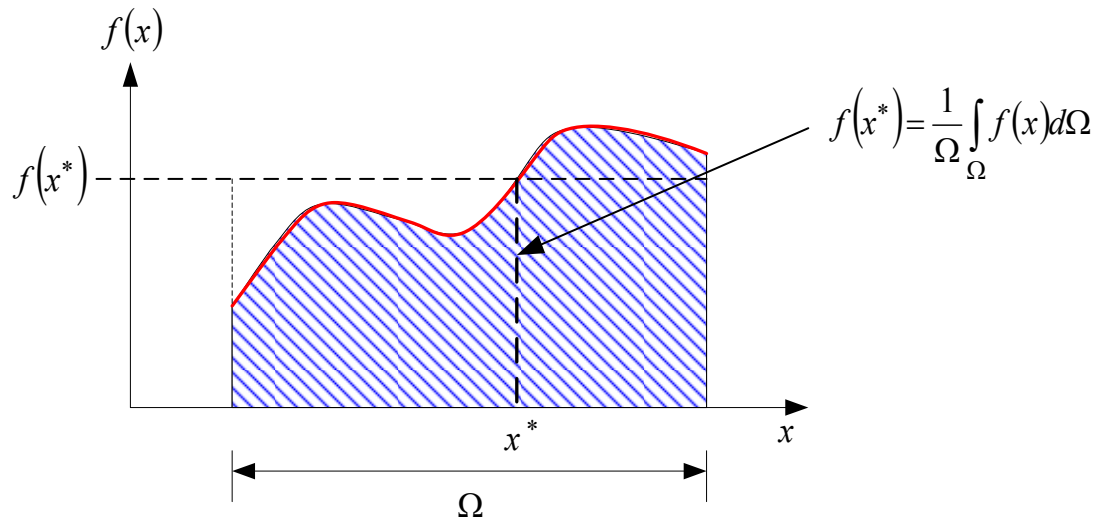


Figura 36. Teorema del valor medio



En consecuencia puede escribirse:

$$\begin{aligned}
\int_{S_i} \mathbf{t}^{(i)}(\mathbf{x}) dS &= \mathbf{t}^{(i)*} \cdot S_i \quad i \in \{1,2,3\} \\
\int_S \mathbf{t}(\mathbf{x}) dS &= \mathbf{t} \cdot S \\
\int_V \rho(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV &= \rho^* \mathbf{b}^* \cdot V \\
\int_V \rho(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) dV &= \rho^* \mathbf{a}^* \cdot V
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Aplicando ahora la ecuación (4.9) al tetraedro considerado, se tendrá:

$$\begin{aligned}
\int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{t} dS + \int_{S_1} \mathbf{t} dS + \int_{S_2} \mathbf{t} dS + \int_{S_3} \mathbf{t} dS = \\
\int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{t} dS + \int_{S_1} (-\mathbf{t}^{(1)}) dS + \int_{S_2} (-\mathbf{t}^{(2)}) dS + \int_{S_3} (-\mathbf{t}^{(3)}) dS = \int_V \rho \mathbf{a} dV
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Donde se ha tenido en cuenta la expresión (4.11). Sustituyendo la ecuación (4.12) en la expresión (4.13), ésta se puede escribir en términos de los valores medios como:

$$\rho^* \mathbf{b}^* V + \mathbf{t}^* S - \mathbf{t}^{(1)*} S_1 - \mathbf{t}^{(2)*} S_2 - \mathbf{t}^{(3)*} S_3 = \rho^* \mathbf{a}^* V \tag{4.14}$$

Sustituyendo ahora la ecuación (4.10) y expresando el volumen total de la pirámide como $V = \frac{1}{3} Sh$ la ecuación (4.14), puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \rho^* \mathbf{b}^* Sh + \mathbf{t}^* S - \mathbf{t}^{(1)*} n_1 S - \mathbf{t}^{(2)*} n_2 S - \mathbf{t}^{(3)*} n_3 S = \frac{1}{3} \rho^* \mathbf{a}^* hS \Rightarrow \\
\frac{1}{3} \rho^* \mathbf{b}^* h + \mathbf{t} - \mathbf{t}^{(1)*} n_1 - \mathbf{t}^{(2)*} n_2 - \mathbf{t}^{(3)*} n_3 = \frac{1}{3} \rho^* \mathbf{a}^* h
\end{aligned} \tag{4.15}$$

La expresión (4.15) es válida para cualquier tetraedro definido por un plano normal \mathbf{n} situado a una distancia h del punto P . Si se considera ahora un tetraedro infinitesimal, alrededor del punto P , haciendo tender a cero el valor de $|\overline{PP'}| = h$ pero manteniendo constante la orientación del plano ($\mathbf{n} = \text{constante}$), en la ecuación (4.15) se tiene que los dominios S_i, S, V colapsan en el punto CP , con lo cual los puntos de los respectivos dominios en los que se obtienen los valores medios tienden también al punto P :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{S_i}^* \rightarrow \mathbf{x}_P &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left[\mathbf{t}^{(i)*}(\mathbf{x}_{S_i}^*) \right] = \mathbf{t}^{(i)}(P) \quad i \in \{1,2,3\} \\ \mathbf{x}_S^* \rightarrow \mathbf{x}_P &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left[\mathbf{t}^*(\mathbf{x}^*) \right] = \mathbf{t}(P, \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Y además:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \rho^* \mathbf{b}^* h \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \rho^* \mathbf{a}^* h \right) = 0 \quad (4.17)$$

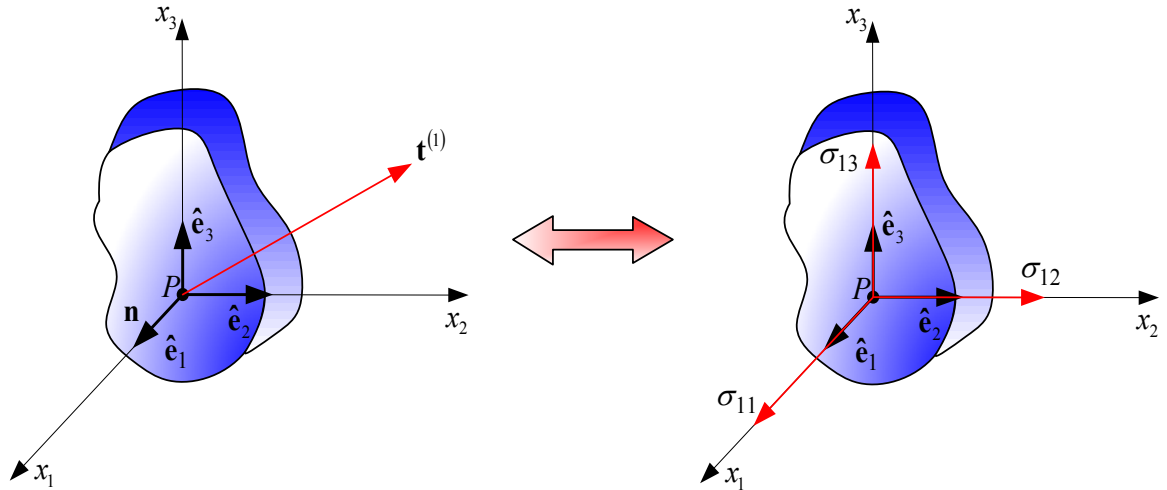
Tomando ahora el límite de la ecuación (4.15) y sustituyendo las (4.16) y (4.17) la expresión (4.15) conduce a:

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) - \mathbf{t}^{(1)} n_1 - \mathbf{t}^{(2)} n_2 - \mathbf{t}^{(3)} n_3 \Rightarrow \mathbf{t}(P, \mathbf{n}) - \mathbf{t}^i n_i = 0 \quad (4.18)$$

El vector de tracciones $\mathbf{t}^{(1)}$ puede escribirse en función de sus componentes cartesianas, ver Figura 37, como:

$$\mathbf{t}^{(1)} = \sigma_{11} \hat{\mathbf{e}}_1 + \sigma_{12} \hat{\mathbf{e}}_2 + \sigma_{13} \hat{\mathbf{e}}_3 = \sigma_{1i} \hat{\mathbf{e}}_i \quad (4.19)$$

Figura 37. Descomposición en componentes del vector de tracción $\mathbf{t}^{(1)}$



Operación que puede realizarse análogamente para los vectores de tracción $\mathbf{t}^{(2)}$ y $\mathbf{t}^{(3)}$ (ver Figura 38):

$$\mathbf{t}^{(2)} = \sigma_{21} \hat{\mathbf{e}}_1 + \sigma_{22} \hat{\mathbf{e}}_2 + \sigma_{23} \hat{\mathbf{e}}_3 = \sigma_{2i} \hat{\mathbf{e}}_i \quad (4.20)$$

$$\mathbf{t}^{(3)} = \sigma_{31} \hat{\mathbf{e}}_1 + \sigma_{32} \hat{\mathbf{e}}_2 + \sigma_{33} \hat{\mathbf{e}}_3 = \sigma_{3i} \hat{\mathbf{e}}_i \quad (4.21)$$

Resultando para el caso general:

$$\mathbf{t}^{(i)}(P) = \sigma_{ij} \hat{\mathbf{e}}_j \quad i, j \in \{1,2,3\} \quad (4.22)$$

$$t_j^{(i)}(P) = \sigma_{ij}(P) \quad i, j \in \{1,2,3\} \quad (4.23)$$

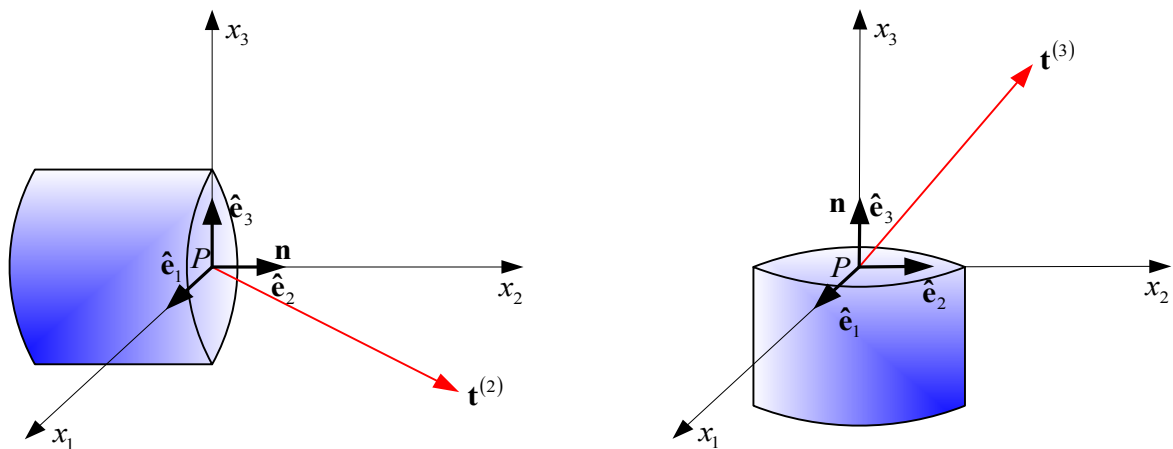
Sustituyendo la ecuación (4.23) en la (4.18):

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \sigma(P) \quad (4.24)$$

Expresión que es consistente con los postulados de Cauchy y donde se ha definido el *Tensor de Tensiones de Cauchy* σ :

$$\sigma = \sigma_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \quad (4.25)$$

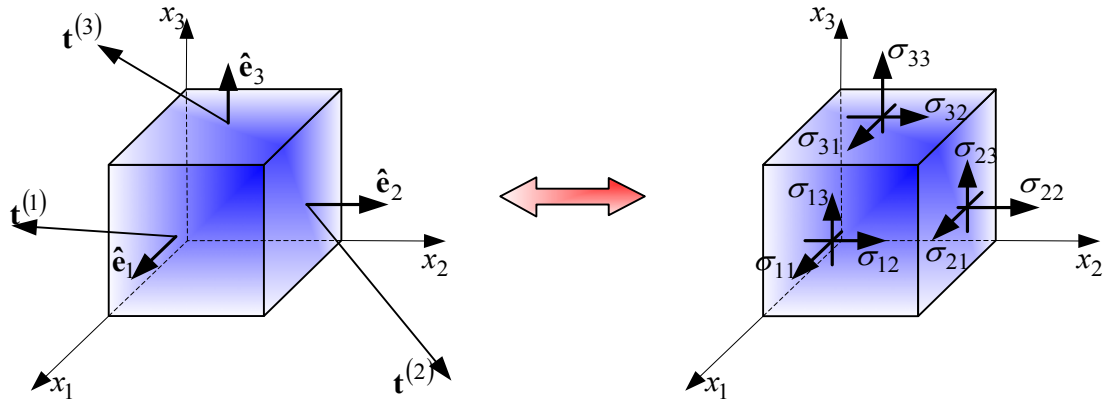
Figura 38. Vectores de tracción $\mathbf{t}^{(2)}$ y $\mathbf{t}^{(3)}$



4.4.3 Interpretación geométrica del estado de tensiones en un punto⁴¹. Es común usar representaciones graficas del tensor de tensiones basadas en paralelepípedos elementales alrededor de la partícula considerada, con caras orientadas según los tres planos coordenados, y en la que los correspondientes vectores de tracción se descomponen vectorialmente en sus componentes normal y tangencial al plano de acuerdo con las expresiones (4.19) a (4.24) (ver Figura 39):

⁴¹ MEJIA ABAD, Op. cit., p 162.

Figura 39. Representación gráfica del tensor de tensiones (notación científica)



- **Notación Científica**⁴². La representación de la Figura 39 corresponde a lo que se conoce como *notación científica*. En dicha notación la matriz de componentes de tensiones se escribe:

$$\sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Y cada componente σ_{ij} puede caracterizarse en función de sus subíndices como:

$$\sigma_{ij} \rightarrow \begin{cases} \text{índice } i \rightarrow \begin{cases} \text{indica el campo de acción} \\ \text{(plano perpendicular al eje } x_i) \end{cases} \\ \text{índice } j \rightarrow \begin{cases} \text{indica la dirección de la tensión} \\ \text{(dirección del eje } x_j) \end{cases} \end{cases} \quad (4.27)$$

- **Notación Ingenieríl**⁴³. En notación ingenieríl, las componentes del tensor de tensiones de Cauchy se escriben (ver Figura 40):

$$\sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

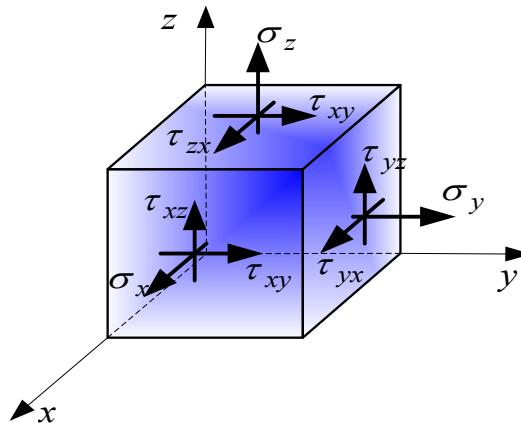
⁴² OLIVELLA, Op. Cit., p. 93.

⁴³ Ibid., p. 95.

$$\begin{cases} \sigma_a \rightarrow \text{tension normal actuante sobre el plano perpendicular al eje } a \\ \tau_{ab} \rightarrow \begin{cases} \text{tension tangencial actuante sobre el plano perpendicular al eje } a \\ \text{en la direcci3n del eje } b \end{cases} \end{cases} \quad (4.29)$$

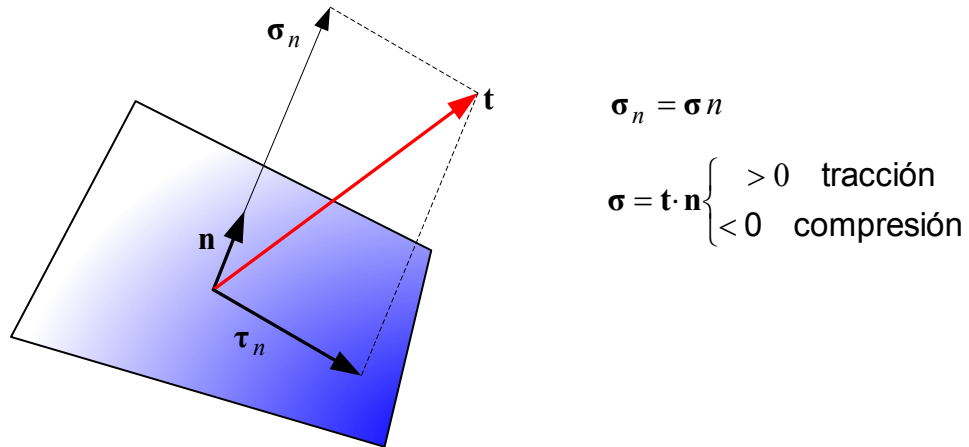
- **Criterios de Signos.** Dada una partícula P del medio continuo y un plano de normal \mathbf{n} que pase por él (ver Figura 41). El correspondiente tensor de tracci3n \mathbf{t} puede descomponerse en sus componentes normal σ_n y tangencial τ_n . El signo de la proyecci3n de \mathbf{t} sobre \mathbf{n} ($\sigma = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$) define el car3cter de la tracci3n (σ_n tiende a traccionar o tensionar al plano) o compresi3n (σ_n tiende a comprimir el plano) de la componente normal.

Figura 40. Representaci3n grafica del tensor de tensiones (notaci3n ingenieril)



Este concepto puede utilizarse para definir el signo de las componentes del tensor de tensiones. A estos efectos en el paralelepipedo elemental de la Figura 39 se distingue entre caras vistas o positivas (cuya normal hacia afuera en la direcci3n positiva del vector de la base y que se ven en la figura) y las restantes caras o caras ocultas o negativas.

Figura 41. Descomposición del vector de tracción



El criterio de signos para caras vistas es la siguiente:

Tensiones normales σ_{ij} o $\sigma_a \begin{cases} \text{positivas (+)} \Rightarrow \text{tracción} \\ \text{negativas (-)} \Rightarrow \text{compresión} \end{cases}$

Tensiones tangenciales $\tau_{ab} \begin{cases} \text{positivas (+)} \Rightarrow \text{sentido del eje } b \\ \text{negativas (-)} \Rightarrow \text{sentido contrario al eje } b \end{cases}$

De acuerdo con estos criterios los sentidos de las tensiones en la Figura 40 (sobre las caras vistas del paralelepípedo) corresponden a valores positivos de las respectivas componentes del tensor de tensiones.

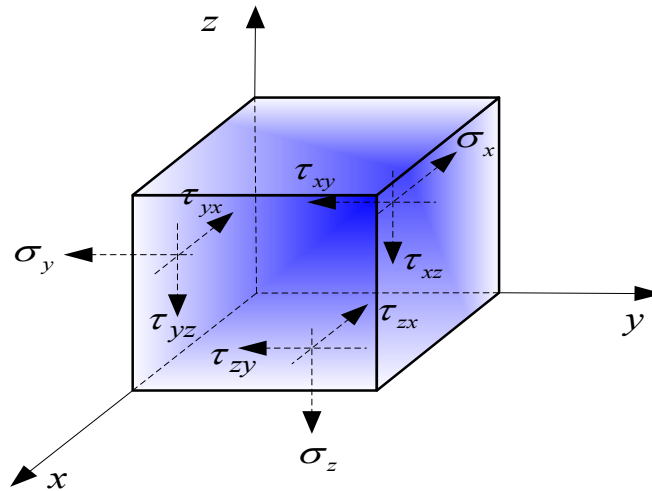
En virtud del principio de acción y reacción ($\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(P, -\mathbf{n})$) y para las caras ocultas del paralelepípedo, dichos valores positivos de los componentes del tensor de tensiones suponen sentidos contrarios para su correspondiente representación grafica (ver Figura 42).

4.5 PROPIEDADES DEL TENSOR DE TENSORES

Se considera un volumen material arbitrario V de un medio continuo y sea ∂V el contorno de este volumen material. Sean $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ las fuerzas másicas que actúan en V y sea $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$ el vector de tracción prescrito que actúa sobre el contorno ∂V .

Sean, finalmente, $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$ el campo vectorial de aceleraciones de las partículas y $\sigma(\mathbf{x},t)$ el campo tensorial de tensiones de Cauchy (ver Figura 43).

Figura 42. Tensiones positivas en los planos ocultos



4.5.1 Ecuación de Cauchy. Ecuación de equilibrio interno⁴⁴. El tensor de tensiones, las fuerzas másicas y las aceleraciones están relacionados por la denominada *Ecuación de Cauchy*:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación de} & \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{x} \in V \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = \rho a_j \quad i, j \in \{1,2,3\} \end{array} \right. \quad (4.30) \\ \text{Cauchy} & \end{aligned}$$

Cuya expresión explícita en notación ingenieril resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho b_x = \rho a_x \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho b_y = \rho a_y \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \rho b_z = \rho a_z \end{array} \right. \quad (4.31)$$

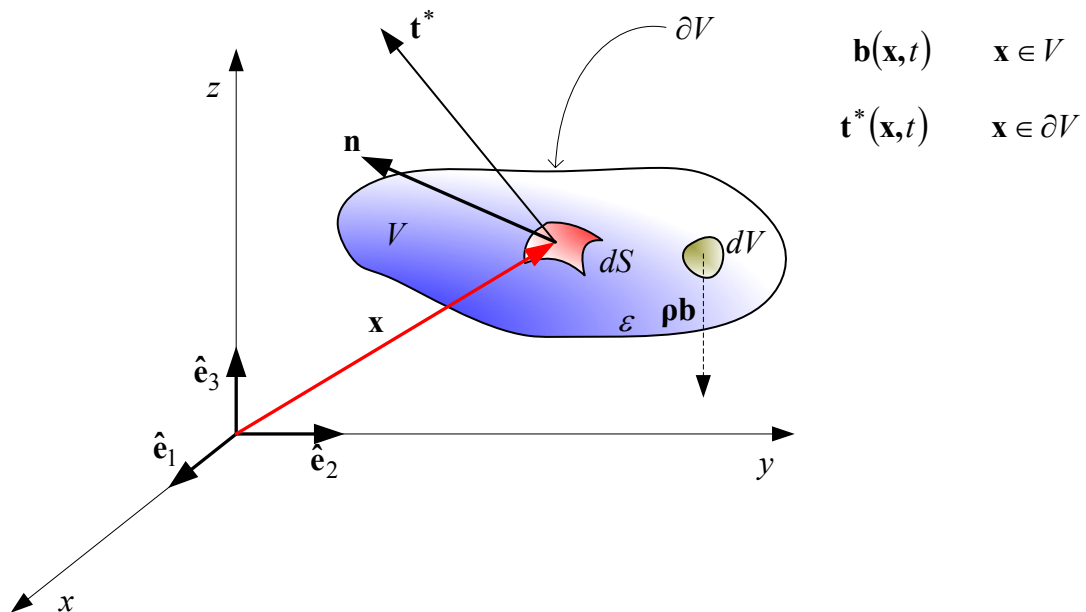
⁴⁴ MEJIA ABAD, Op. cit, 94.

Si el sistema está en equilibrio la aceleración es nula ($\mathbf{a} = 0$), la expresión (4.30) queda:

$$\text{Ecuación de equilibrio interno} \rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = 0 \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (4.32)$$

Que se conoce como la ecuación de equilibrio interno del medio continuo.

Figura 43. Propiedades del tensor de tensiones



4.5.2 Ecuación de equilibrio en el contorno⁴⁵. La ecuación (4.24) puede ser ahora aplicada a los puntos del contorno considerando que el vector de tracción es ahora conocido en dichos puntos ($\mathbf{t} = \mathbf{t}^*$). El resultado es la denominada ecuación de equilibrio en el contorno:

$$\text{Ecuación de equilibrio en el contorno} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}^* \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V \\ n_i \sigma_{ij} = t_j^* \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (4.33)$$

4.5.3 Simetría del tensor de tensiones. Principio de momento de momentum⁴⁶. Usando la ecuación de momento de momentum para un elemento diferencial, mostraremos que el tensor de tensiones es generalmente un tensor simétrico.

Se considera el diagrama de cuerpo libre de un paralelepípedo diferencial aislado de un cuerpo como el visto en la Figura 44. Calculando los momentos producidos por todas las fuerzas alrededor de un eje que pasa a través del punto A y paralelo al eje Z :

$$\sum M_A = \tau_{YX}(\Delta Y \Delta Z) \left(\frac{\Delta X}{2} \right) + \tau_{YX}(\Delta Y \Delta Z) \left(\frac{\Delta X}{2} \right) - \tau_{XY}(\Delta X \Delta Z) \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) - \tau_{XY}(\Delta X \Delta Z) \left(\frac{\Delta Y}{2} \right)$$

(4.34)

Lo cual podemos escribir como:

$$\sum M_A = (\tau_{YX} - \tau_{XY}) \Delta X \Delta Y \Delta Z$$

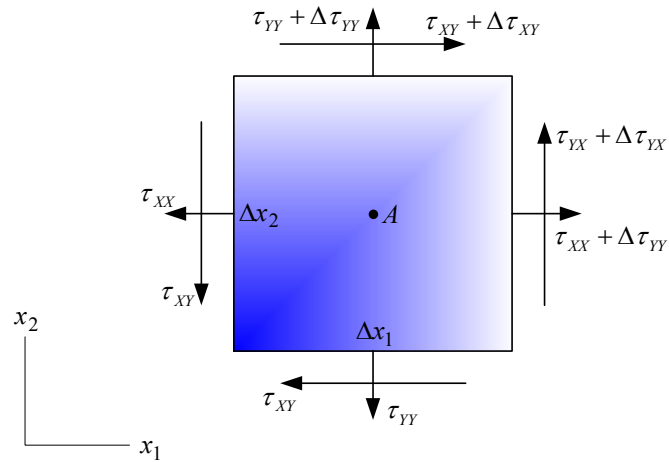
(4.35)

Ahora, así el elemento se encuentre en equilibrio estático o no, $\sum M_A$ es igual a cero pues los términos $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ corresponden a cantidades muy pequeñas, las cuales multiplicadas entre si dan como resultado un valor que puede ser omitido. De este modo tenemos $\tau_{XY} = \tau_{YX}$. De forma similar se puede probar que $\tau_{XZ} = \tau_{ZX}$ y $\tau_{YZ} = \tau_{ZY}$.

Lo cual significa que el tensor de tensiones \mathbf{t} es simétrico.

⁴⁵ MEJIA ABAD, Op. cit, p. 96.

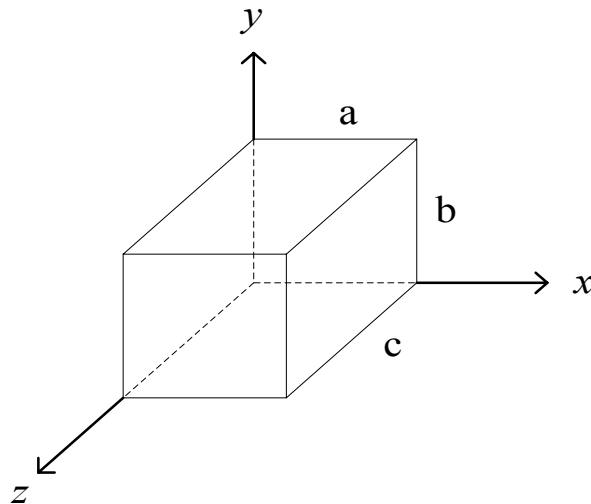
Figura 44. Diagrama de cuerpo libre paralelepipedo diferencial



Ejemplo 4.1. La distribución de tensiones dentro de un cuerpo esta dada por la matriz:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -p + \rho g y & 0 & 0 \\ 0 & -p + \rho g y & 0 \\ 0 & 0 & -p + \rho g y \end{bmatrix}$$

Donde p , ρ y g son constantes. En la Figura se muestra un cubo dentro del cuerpo.



⁴⁶ LAI, Michael, Op. cit., p. 97.

- a) ¿Cual es la distribución del vector de tensiones sobre las seis caras del cubo?
 b) Encontrar la fuerza resultante que actúa sobre las caras $y = 0$ y $x = 0$.

Solución:

a) de $[\mathbf{t}] = [\mathbf{n}] \cdot [\boldsymbol{\sigma}]$, tenemos:

$$\text{en } x = 0, [\mathbf{n}] = [-1 \ 0 \ 0], [\mathbf{t}] = [p - \rho g y \ 0 \ 0]$$

$$\text{en } x = \mathbf{a}, [\mathbf{n}] = [1 \ 0 \ 0], [\mathbf{t}] = [-p + \rho g y \ 0 \ 0]$$

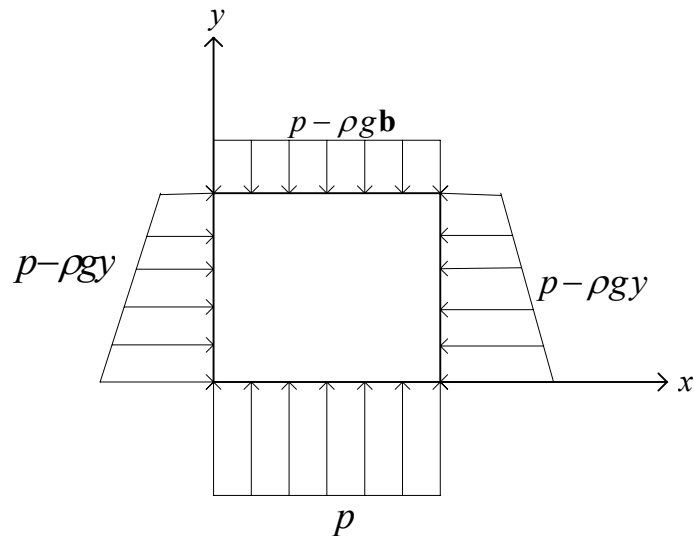
$$\text{en } y = 0, [\mathbf{n}] = [0 \ -1 \ 0], [\mathbf{t}] = [0 \ p \ 0]$$

$$\text{en } y = \mathbf{b}, [\mathbf{n}] = [0 \ 1 \ 0], [\mathbf{t}] = [0 \ -p + \rho g \mathbf{b} \ 0]$$

$$\text{en } z = 0, [\mathbf{n}] = [0 \ 0 \ -1], [\mathbf{t}] = [0 \ 0 \ p - \rho g y]$$

$$\text{en } z = \mathbf{c}, [\mathbf{n}] = [0 \ 0 \ 1], [\mathbf{t}] = [0 \ 0 \ -p + \rho g y]$$

La distribución del vector de tracción de una de las secciones se muestra a continuación:



b) En la cara $y = 0$ la fuerza resultante es:

$$\mathbf{F}_1 = \int \mathbf{t} dA = [p \int dA] \mathbf{e}_2 = p(\mathbf{ac}) \mathbf{e}_2$$

En la cara $x = 0$ la fuerza resultante es:

$$\mathbf{F}_2 = \int [(p - \rho g y) dA] \mathbf{e}_1 = \left[p \int dA - \rho g \int y dA \right] \mathbf{e}_1$$

La segunda integral puede ser evaluada directamente reemplazando (dA) por $(c dy)$ e integrando entre $y = 0$ y $y = \mathbf{b}$, así:

$$\mathbf{F}_2 = \left[p(\mathbf{cb}) - \frac{\rho g \mathbf{b}^2 \mathbf{c}}{2} \right] \mathbf{e}_1$$

4.5.4 Diagonalización. Tensiones y direcciones principales⁴⁷. Consideremos el tensor de tensiones σ . Recordemos un teorema del algebra tensorial que garantiza que todo tensor de segundo orden simétrico diagonaliza en una base ortonormal y sus eigenvalores son reales. Consideremos, pues, su matriz de componentes en la base cartesiana (x, y, z) de trabajo (ver Figura 45):

$$\sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \quad (4.36)$$

En el sistema cartesiano (x', y', z') en el que σ diagonaliza su matriz de componentes será:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}_{(x',y',z')} \quad (4.37)$$

Para este caso las direcciones principales se definen como las direcciones asociadas a los ejes (x', y', z') , en las que el tensor de tensiones diagonaliza; y las tensiones principales son los eigenvalores del tensor de tensores $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, en general se supondrán ordenadas de la forma $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$.

⁴⁷ OLIVELLA, Op. cit., p. 99.

Para obtener las direcciones y tensiones principales, se debe plantear el problema de eigenvalores asociado al tensor σ . Es decir, si λ y \mathbf{v} son un eigenvalores y su correspondiente eigenvector, respectivamente, se plantea:

$$\sigma \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow [\sigma - \lambda \mathbf{1}] \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.38)$$

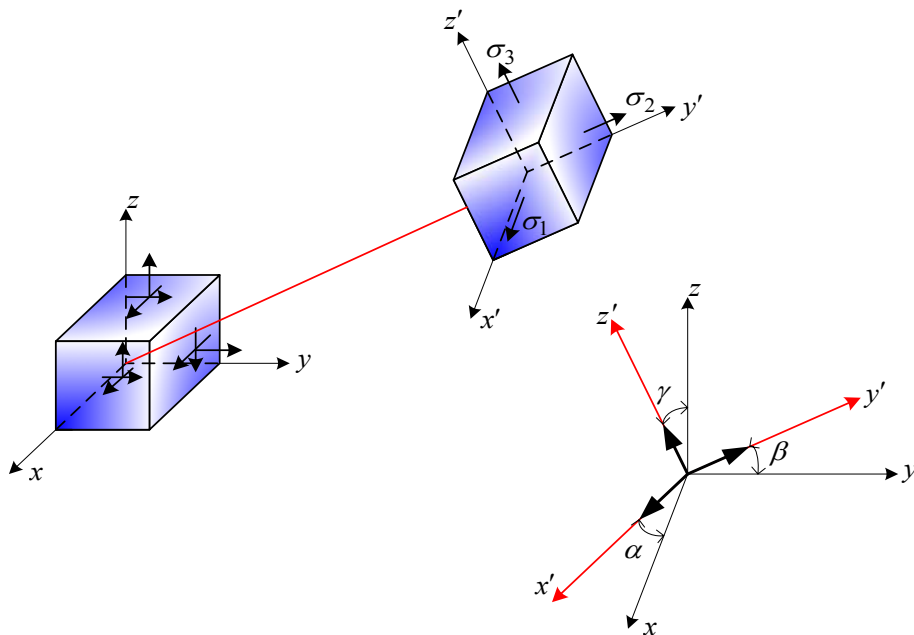
Para que la solución del sistema sea no trivial (distinta de $\mathbf{v} = 0$), el determinante de (4.38) tiene que ser igual a cero, es decir:

$$\det[\sigma - \lambda \mathbf{1}] = |\sigma - \lambda \mathbf{1}| = 0 \quad (4.39)$$

La ecuación (4.39) es una ecuación polinómica en tercer grado en λ . Siendo el tensor σ simétrico, sus tres soluciones ($\lambda_1 = \sigma_1, \lambda_2 = \sigma_2, \lambda_3 = \sigma_3$) son reales. Una vez hallados los eigenvalores y ordenados según el criterio ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), se puede obtener el eigenvector $\mathbf{v}^{(i)}$ para cada tensión σ_i , resolviendo el sistema (4.38):

$$[\sigma - \sigma_i \mathbf{1}] \cdot \mathbf{v} = 0 \quad i \in \{1,2,3\} \quad (4.40)$$

Figura 45. Diagonalización del tensor de tensiones



Que proporciona una solución no trivial para los eigenvectores $\mathbf{v}^{(i)}$, ortogonales entre sí, la cual, una vez normalizada, define los tres elementos de la base correspondiente a las tres direcciones principales.

De acuerdo con la interpretación grafica de las componentes del tensor de tensiones del apartado 4.4.3, sobre las caras del paralelepípedo elemental asociado a las direcciones principales de tensión no actúan mas que unas tensiones normales que son, precisamente, las tensiones principales (ver Figura 45).

4.5.5 Tensión media y presión media. La tensión media se define como el valor medio de las tensiones principales:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4.41)$$

Observando la matriz de componentes del tensor de tensiones en las direcciones principales (4.37), resulta:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}Tr(\sigma) \quad (4.42)$$

Se define presión media como la tensión media cambiada de signo, es decir:

$$\text{Presión media} = \overset{\text{not}}{\bar{p}} = -\sigma_m = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4.43)$$

El estado en el cual las tres tensiones principales son iguales se denomina estado de tensión hidrostático, esto es:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \Rightarrow \sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} = \sigma \mathbf{I} \quad (4.44)$$

4.5.6 Descomposición del tensor de tensiones en sus partes esférica y desviadora⁴⁸. El tensor de tensiones σ puede descomponerse en una parte (o componente) esférica σ_{esf} y una desviadora σ' :

$$\sigma = \underbrace{\sigma_{esf}}_{\text{Parte esférica}} + \underbrace{\sigma'}_{\text{Parte desviadora}} \quad (4.45)$$

Donde la parte esférica se define como:

$$\sigma_{esf} \stackrel{def}{=} \frac{1}{3} Tr(\sigma) \mathbf{I} = \sigma_m \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Donde σ_m es la tensión media definida en (4.42). Por la definición (4.45) la parte (o componente) desviadora del tensor de tensiones será:

$$\sigma' = \sigma - \sigma_{esf} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Resultando:

$$\sigma' \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

4.6 CIRCULO DE MOHR EN 3 DIMENSIONES⁴⁹

4.6.1 Interpretación gráfica de estados tensionales. El círculo de Mohr es un procedimiento grafico desarrollado con el objetivo de permitir la visualización en interpretación del tensor de tensiones.

⁴⁸ HEINBOCKEL, Op. cit., p. 251.

⁴⁹ Ibid., p. 236.

Sea P un punto arbitrario de un medio continuo y sea $\sigma(P)$ el tensor de tensiones en dicho punto. Consideremos un plano arbitrario, con normal \mathbf{n} , que pasa por P (ver Figura 46), el vector de tracción en el punto P correspondiente a dicho plano es $\mathbf{t} = \sigma \cdot \mathbf{n}$. Es posible ahora descomponer dicho vector en sus componentes σ_n , normal al plano, y su componente τ_n tangente a dicho plano.

Considere ahora la componente normal $\sigma_n = \sigma \mathbf{n}$, donde σ es la componente normal de la tensión sobre el plano, definida de acuerdo con el criterio de los signos del apartado 4.4.3.3:

$$\sigma_n = \sigma \mathbf{n} \begin{cases} \sigma > 0 & \text{traccion} \\ \sigma < 0 & \text{compresion} \end{cases} \quad (4.49)$$

Considere también ahora la componente tangencial τ_n , de la que solo nos va a interesar su módulo:

$$\tau_n = \mathbf{t} - \sigma_n \quad |\tau_n| = \tau \geq 0 \quad (4.50)$$

Podemos considerar ahora el estado tensional en el punto considerado sobre el plano normal \mathbf{n} mediante la pareja:

$$(\sigma, \tau) \rightarrow \begin{cases} \sigma \in R \\ \tau \in R_+ \end{cases} \quad (4.51)$$

Si se consideran ahora los infinitos planos que pasan por el punto P (caracterizados por todas las posibles normales $\mathbf{n}_{(i)}$) obteniendo así los correspondientes valores de la tensión normal σ_i y tangencial τ_i y finalmente, se representan en el semiespacio determinado por la pareja $(\sigma, \tau) \rightarrow \in R \times R^+$ de la Figura 47, se obtiene una nube de puntos de la que es posible preguntarnos si ocupa todo el semiespacio o *esta limitada a un lugar geométrico determinado*. La respuesta a dicha pregunta la proporciona el siguiente análisis.

Figura 46. Descomposición del vector de tracción

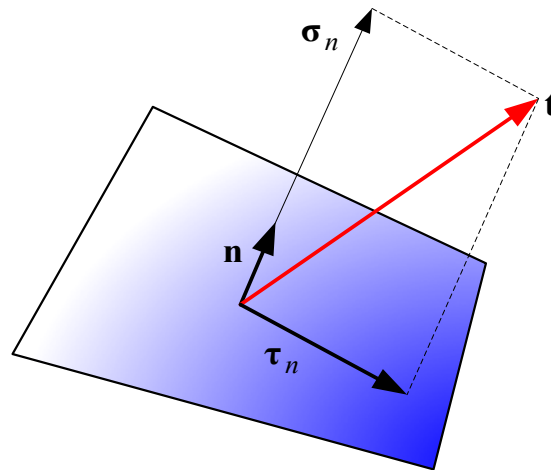
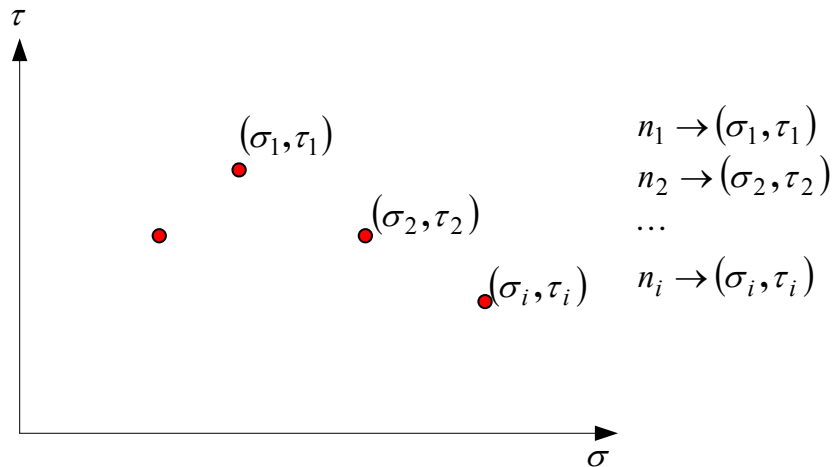


Figura 47. Lugar geométrico de los puntos (σ, τ)



Donde n_1, n_2, n_3 son las componentes de la normal \mathbf{n} en la base asociada a las direcciones principales. A la vista de la ecuación (4.53) la componente normal de la tensión σ , definida en la ecuación (4.49), y el módulo del vector de tracción serán, respectivamente:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = [\sigma_1 n_1 \quad \sigma_2 n_2 \quad \sigma_3 n_3] \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \sigma \quad (4.54)$$

$$|\mathbf{t}|^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (4.55)$$

Finalmente, la condición de normal unitaria \mathbf{n} se puede expresar en función de sus componentes como:

$$|\mathbf{n}| = 1 \Rightarrow n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (4.56)$$

Las ecuaciones (4.54), (4.55) y (4.56) se pueden sintetizar en la siguiente ecuación matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma^2 + \tau^2 \\ \sigma \\ 1 \end{bmatrix}}_b \Rightarrow A \cdot x = b \quad (4.57)$$

Sistema que podría considerarse lineal con:

- una matriz de coeficientes, $A(\sigma)$, definida por el tensor de tensiones en un punto P (a través de las tensiones principales).
- Un término independiente, b , definido por las coordenadas de un cierto punto en el semiespacio (σ, τ) (representativas a su vez de cierto estado tensional).
- Un vector de incógnitas x que determina (mediante las componentes de la normal \mathbf{n}) a que plano corresponden los valores de σ y τ elegidos.

En principio solo serán factibles las soluciones del sistema (4.57) cuyas componentes $x \equiv [n_1^2 \quad n_2^2 \quad n_3^2]^T$ sean positivas y menores que 1 (ver ecuación (4.56)).

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq n_1^2 \leq 1 \\ 0 \leq n_2^2 \leq 1 \\ 0 \leq n_3^2 \leq 1 \end{cases}$$

Toda pareja (σ, τ) que conduzca a una solución x que cumpla este requisito será considerado un punto factible del semiespacio (σ, τ) , el cual es *representativo del espacio tensional sobre un plano que pasa por P*. El lugar geométrico de los puntos (σ, τ) factibles es la denominada *región factible* del semiespacio (σ, τ) .

Considere ahora el objetivo de hallar la región factible. Mediante algunas operaciones algebraicas, el sistema (4.57) puede ser reescrito como:

$$\begin{cases} (I) \rightarrow \sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_1 + \sigma_3)\sigma + \sigma_1\sigma_3 - \frac{A}{(\sigma_1 - \sigma_3)}n_1^2 = 0 \\ (II) \rightarrow \sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)\sigma + \sigma_2\sigma_3 - \frac{A}{(\sigma_2 - \sigma_3)}n_2^2 = 0 \\ (III) \rightarrow \sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)\sigma + \sigma_1\sigma_2 - \frac{A}{(\sigma_1 - \sigma_2)}n_3^2 = 0 \end{cases} \quad (4.58)$$

$$A = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3)$$

Considere ahora, por ejemplo, la ecuación (III) del sistema (4.58). Es fácil comprobar que puede escribirse como:

$$(\sigma - a)^2 + \tau^2 = R^2$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \\ R = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3)n_3^2} \end{cases} \quad (4.59)$$

Que corresponde a la ecuación de la semicircunferencia en el semiespacio (σ, τ) de centro C_3 , y radio R_3 :

$$\begin{cases} C_3 = \left(\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), 0 \right) \\ R_3 = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3)n_3^2} \end{cases} \quad (4.60)$$

Los distintos valores de $n_3^2 \in [0,1]$ determinan un conjunto de semicircunferencias concéntricas de centro C_3 y radios $R_3(n_3)$ en el semiespacio (σ, τ) , cuyos puntos

ocuparan una cierta región del mismo. Dicha región esta delimitada por los valores máximos y mínimo de $R_3(n_3)$. Observando que el radical de la expresión de R_3 en (4.60) es positivo, estos valores que se obtendrán para $n_3^2 = 0$ (el radio mínimo) y $n_3^2 = 1$ (el radio máximo).

$$\begin{aligned} n_3^2 = 0 &\Rightarrow R_3^{\min} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ n_3^2 = 1 &\Rightarrow R_3^{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 \end{aligned} \quad (4.61)$$

El dominio delimitado por ambas semicircunferencias definirá una primera limitación del dominio factible al indicado en la Figura 48.

El proceso puede ser repetido para las otras dos ecuaciones (I),(II) obteniendo los siguientes resultados:

$$\circ \text{ Ecuación (I): } C_1 = \left(\underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)}_{a_1}, 0 \right) \Rightarrow \begin{cases} R_1^{\min} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \\ R_1^{\max} = |\sigma_1 - a_1| \end{cases}$$

$$\circ \text{ Ecuación (II): } C_2 = \left(\underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)}_{a_2}, 0 \right) \Rightarrow \begin{cases} R_2^{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \\ R_2^{\min} = |\sigma_2 - a_2| \end{cases}$$

$$\circ \text{ Ecuación (III): } C_3 = \left(\underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1)}_{a_3}, 0 \right) \Rightarrow \begin{cases} R_3^{\min} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ R_3^{\max} = |\sigma_3 - a_3| \end{cases}$$

Para cada caso se tiene, como región factible, una semi-corona definida por los radios mínimo y máximo. Evidentemente la región factible final tiene que estar en la intersección de dichas semi-coronas tal como se indica en la Figura 49.

Figura 48. Primera limitación del dominio factible

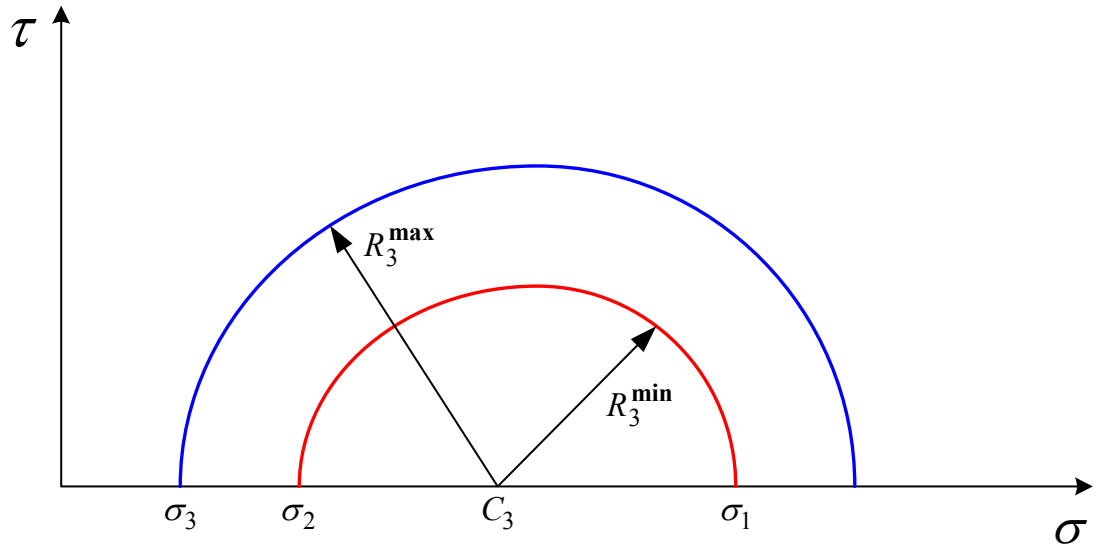
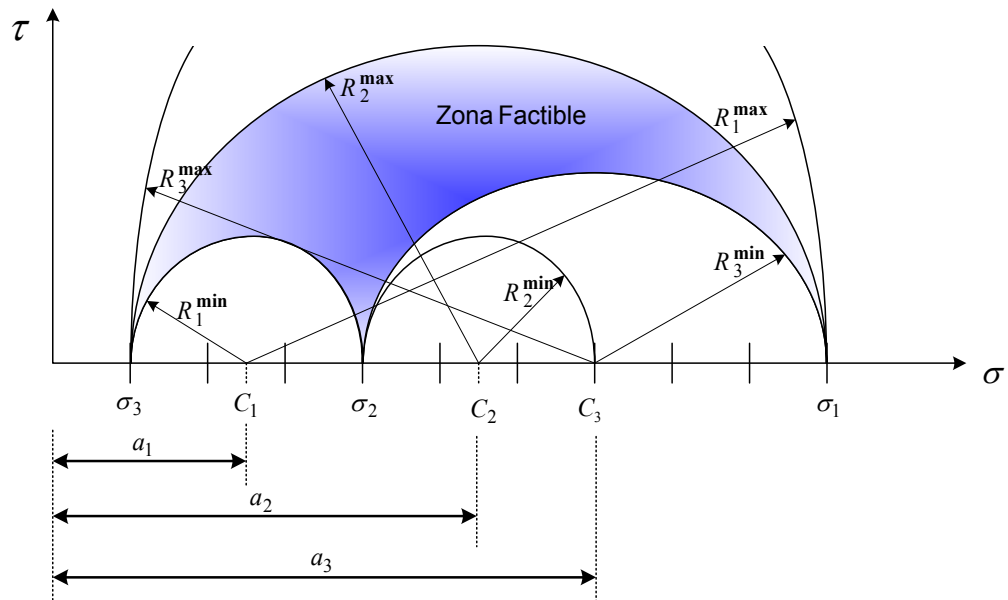
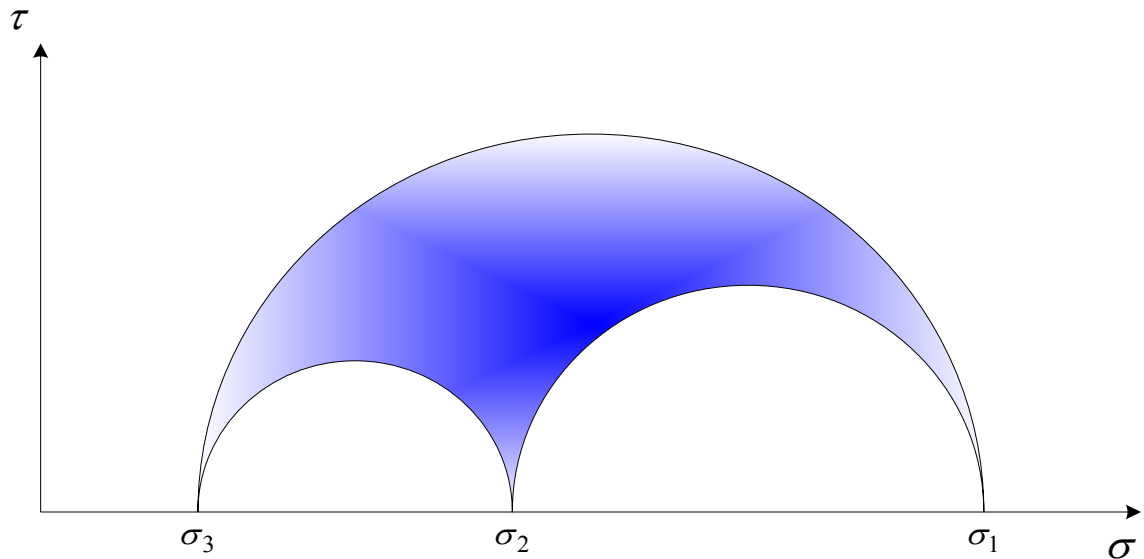


Figura 49. Zona factible



En la Figura 50 se muestra la construcción final del círculo de Mohr pasando por los puntos σ_1, σ_2 y σ_3 .

Figura 50. Círculos de Mohr en tres dimensiones



La construcción del círculo de Mohr es trivial (una vez conocidas las tres tensiones principales) y resulta de utilidad para discriminar posibles estados tensionales sobre planos, determinar valores máximos de las tensiones tangenciales etc.

Ejemplo 4.2. Las tensiones principales en un cierto punto de un medio continuo son:

$$\sigma_1 = 10 \quad \sigma_2 = 5 \quad \sigma_3 = 2$$

En un cierto plano, que pasa por dicho punto, las tensiones normal y tangencial son σ y τ respectivamente. Razonar si son posibles los siguientes valores de σ y τ :

a) $\sigma = 10$; $\tau = 1$

b) $\sigma = 5$; $\tau = 4$

c) $\sigma = 3$; $\tau = 1$

Solución:

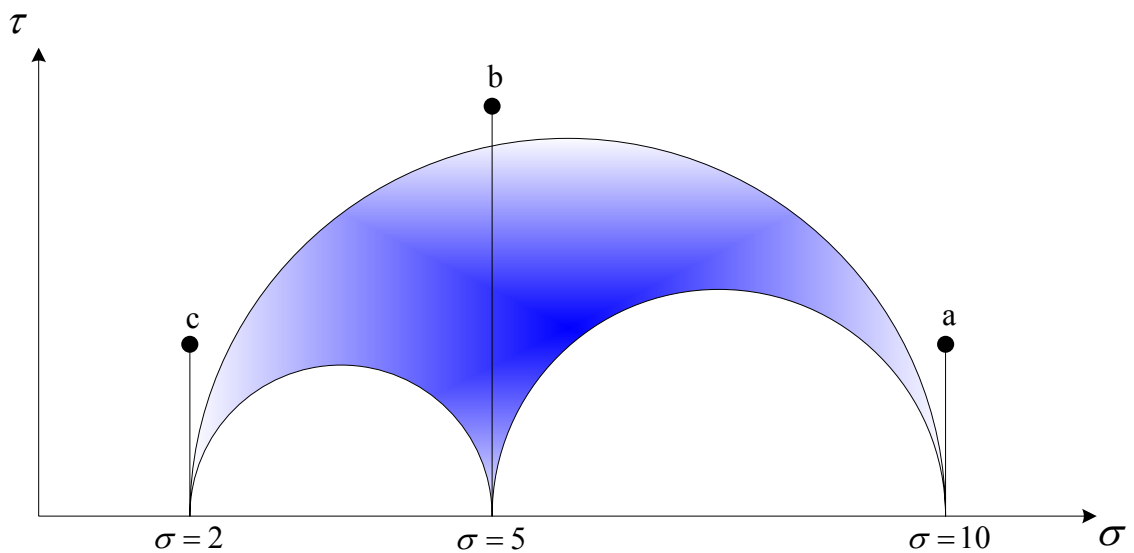
Calculando los puntos principales para poder dibujar los círculos de Mohr para los estados tensionales tenemos:

$$C_1 = \left(\underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)}_{a_1}, 0 \right) \Rightarrow \begin{cases} R_1^{\min} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \\ R_1^{\max} = |\sigma_1 - a_1| \end{cases} \equiv C_1 = (3.5, 0) \Rightarrow \begin{cases} R_1^{\min} = \frac{3}{2} = 1.5 \\ R_1^{\max} = 6.5 \end{cases}$$

$$C_2 = (6.0, 0) \Rightarrow \begin{cases} R_1^{\max} = \frac{7}{2} = 3.5 \\ R_2^{\min} = 1.0 \end{cases}$$

$$C_3 = (7.5, 0) \Rightarrow \begin{cases} R_1^{\min} = \frac{5}{2} = 2.5 \\ R_2^{\max} = 5.5 \end{cases}$$

Y dibujando los puntos pedidos en el semiespacio (σ, τ)



Solo en la zona coloreada es posible encontrar puntos que representan estados tensionales (puntos factibles). Se comprueba *que ninguno de los puntos puede serlo*.

4.7 CIRCULO DE MORH EN 2 DIMENSIONES⁵⁰

Muchos estados reales en ingeniería se asimilan a un estado tensional ideal bidimensional en el que se conoce (o se supone) *a priori* cual es una de las direcciones principales de tensión. En estos casos, haciendo coincidir el eje x_3 (o el eje z) con dicha dirección principal (ver Figura 51), las componentes del tensor de tensiones puede escribirse como:

$$\sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & & \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & & \\ & & & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & & \\ \tau_{xy} & \sigma_y & & \\ & & & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Ahora, teniendo en cuenta *solamente la familia de planos paralelos al eje x_3* (por tanto, la componente n_3 de su normal es nula). El correspondiente vector de tracción tiene la expresión:

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = \sigma \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Y su componente t_3 se anula. En las ecuaciones (4.61) y (4.62) las componentes del tensor de tensiones σ , de la normal al plano \mathbf{n} y del vector de tracción \mathbf{t} , asociadas a la dirección x_3 , o bien son conocidas (este es el caso de $\sigma_{13}, \sigma_{23}, n_3$ o t_3), o bien no intervienen en el problema (como es el caso de σ_{33}). Esta circunstancia sugiere prescindir de la dimensión y reducir el análisis a las dos dimensiones asociadas a los ejes x_1, x_2 (o x, y) como se indica en la Figura 51.

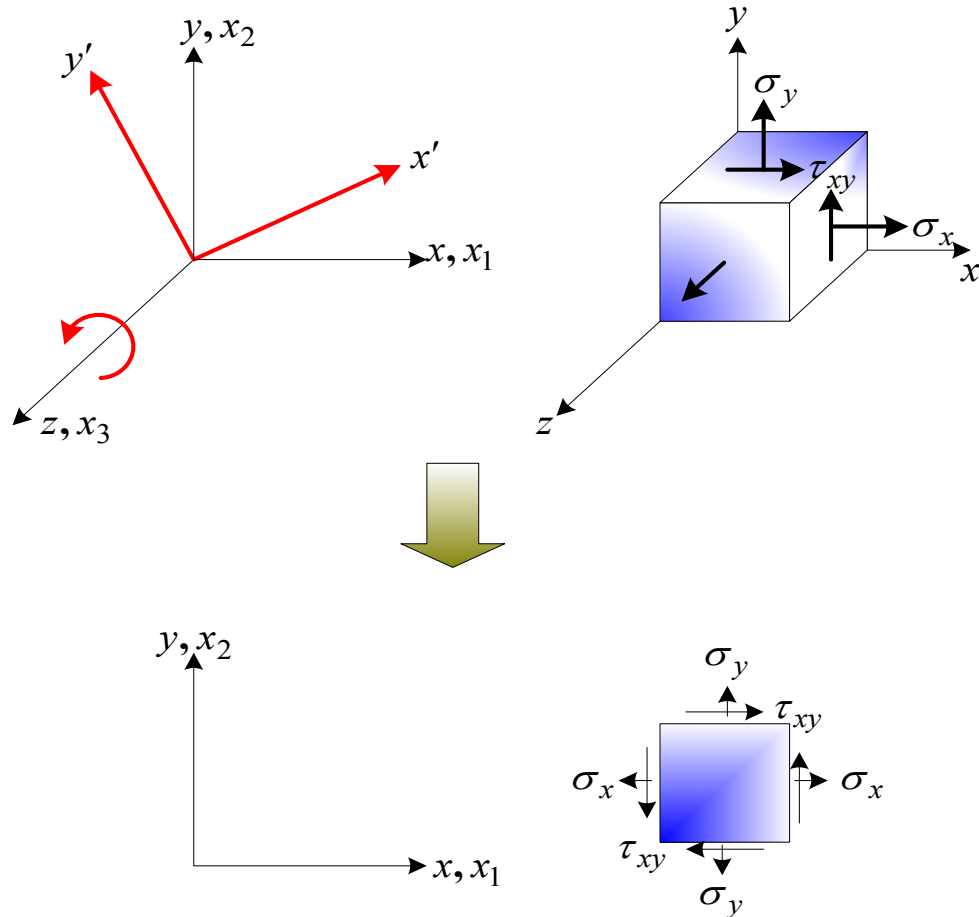
Entonces es posible definir el problema en el plano a partir de:

$$\sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

⁵⁰ OLIVELLA, Op. cit., p. 110.

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

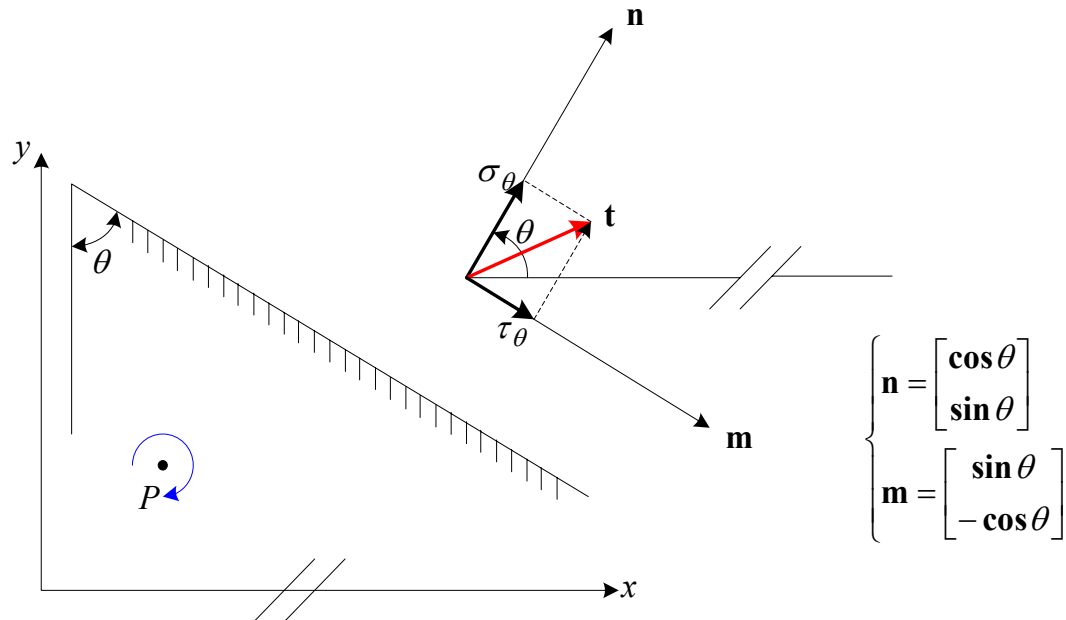
Figura 51. Reducción del problema de tres a dos dimensiones



4.7.1 Estado tensional sobre un plano dado. Sea un plano (siempre paralelo al eje z) cuya normal unitaria \mathbf{n} forma un ángulo θ con el eje x . Se define un vector unitario \mathbf{m} en la dirección tangencial a la traza del plano y en el sentido indicado en la Figura 52. Se Debe tener en cuenta que tanto la normal \mathbf{n} y tangencial \mathbf{m} y el ángulo θ en la Figura 52 tienen asociados los siguientes sentidos:

- Vector *normal* \mathbf{n} : hacia el exterior del plano (respecto a la posición del punto P).
- Vector *tangente* \mathbf{m} : tiende a *girar en el sentido horario* respecto al punto P .
- Ángulo θ : positivo en el sentido *antihorario*.

Figura 52. Estado tensional sobre un palo dado



Sea σ el tensor en el punto con componentes en la base cartesiana:

$$\sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Utilizando la expresión (4.64), el vector de tracción en el punto sobre un plano considerado es:

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = \sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta \\ \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Se define la *tensión normal* σ_θ y la *tensión longitudinal* τ_θ , sobre el plano de inclinación θ (ver Figura 6.22) como:

$$\sigma_{\theta} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta & \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_x \cos^2 \theta + \tau_{xy} 2 \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin^2 \theta$$

$$\tau_{\theta} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta & \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$\tau_{\theta} = \sigma_x \sin \theta \cos \theta - \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} [\sin^2 \theta - \cos^2 \theta]$$

Que se puede reescribir como:

$$\begin{cases} \sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ \tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) - \tau_{xy} \cos(2\theta) \end{cases} \quad (4.69)$$

4.7.2 Problema directo: Diagonalización del tensor de tensiones. El problema directo consiste en, conocidas las componentes del tensor de tensiones (4.65) en un cierto sistema de coordenadas (x, y) , obtener las direcciones y las tensiones principales (ver Figura 53).

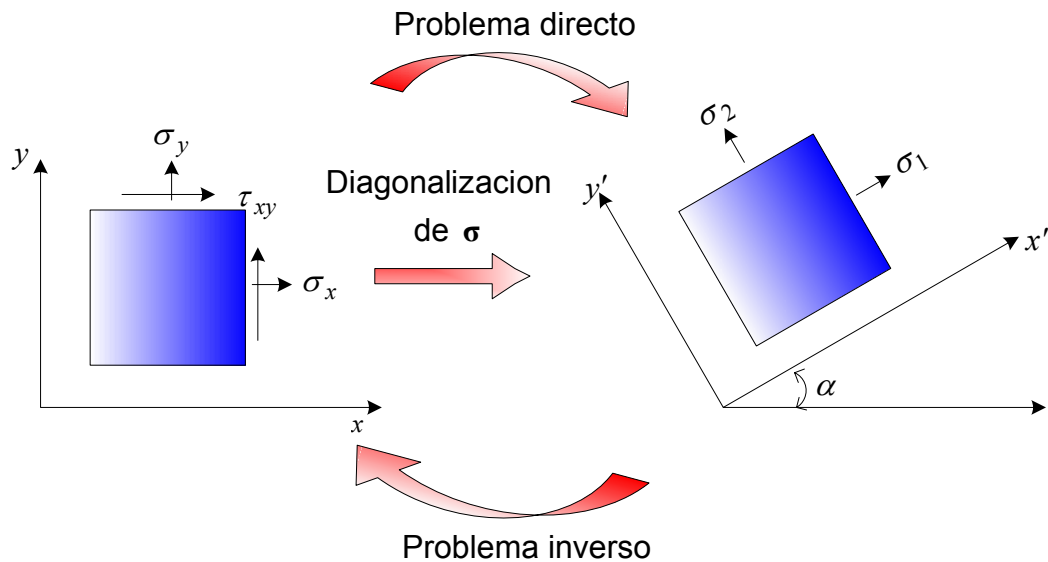
Las direcciones principales asociadas a los ejes x', y' definidas por los ángulos α y $\alpha + \pi/2$ (ver Figura 53), indican las inclinaciones de los dos planos sobre los cuales las tensiones solo tienen componente normal σ_{α} , mientras que la componente tangencial τ_{α} se anula. Imponiendo dicha condición en la ecuación (4.69) se obtiene:

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\alpha) - \tau_{xy} \cos(2\alpha) = 0 \Rightarrow \tan(2\alpha) = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}$$

$$\sin(2\alpha) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(2\alpha)}}} = \pm \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\cos(2\alpha) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(2\alpha)}} = \pm \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

Figura 53. Problema directo y problema inverso



Las ecuaciones anteriores proporcionan dos soluciones (asociadas a los signos + y -) α_1 y $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$, que definen las dos direcciones principales (ortogonales) en el plano de análisis. Las correspondientes tensiones principales se obtendrán sustituyendo el ángulo $\theta = \alpha$ de las ecuaciones anteriores en la ecuación (4.69) obteniéndose:

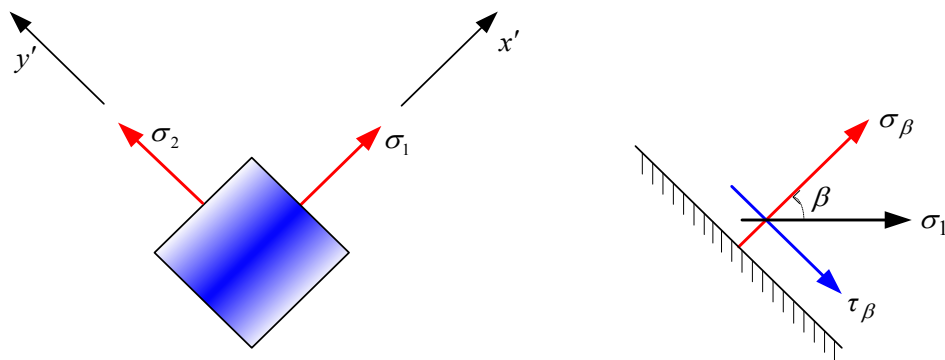
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{xy} \sin(2\alpha) \quad (4.70)$$

$$\sigma_\alpha \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases} \quad (4.71)$$

4.7.3 Problema inverso. El problema consiste en, dadas las direcciones y las tensiones principales σ_1 y σ_2 en el plano de análisis, obtener las tensiones sobre cualquier plano, caracterizado por el ángulo β que forma su normal con la dirección principal correspondiente a σ_1 . Como caso particular puede obtenerse las componentes del tensor de tensiones sobre el rectángulo elemental asociado al sistema de ejes (x, y) (ver Figura 53).

Se considera ahora el sistema cartesiano (x', y') , asociada a las direcciones principales ver Figura 54), y aplicando la ecuación (4.69) con $\sigma_{x'} = \sigma_1, \sigma_{y'} = \sigma_2, \tau_{x'y'}$ y $\theta \equiv \beta$, se obtiene:

Figura 54. Problema inverso



$$\sigma_{\beta} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\beta)$$

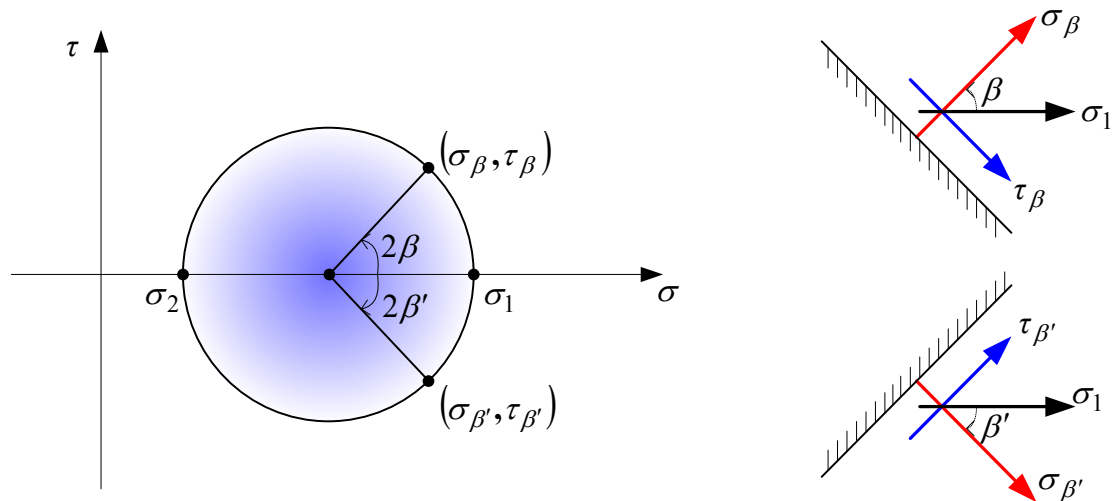
$$\tau_{\beta} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\beta)$$
(4.72)

4.7.4 Propiedades del círculo de Mohr⁵¹.

a) *Para obtener el punto representativo en el círculo de Mohr del estado tensional sobre un punto cuya normal forma un ángulo β con la dirección principal σ_1 :*

Se parte del punto representativo del plano donde actúa la dirección principal σ_1 (punto $(\sigma_1, 0)$) y se gira un ángulo 2β en el sentido que va desde σ_1 a σ_{β} (ver Figura 55).

Figura 55. Propiedades del círculo de Mohr

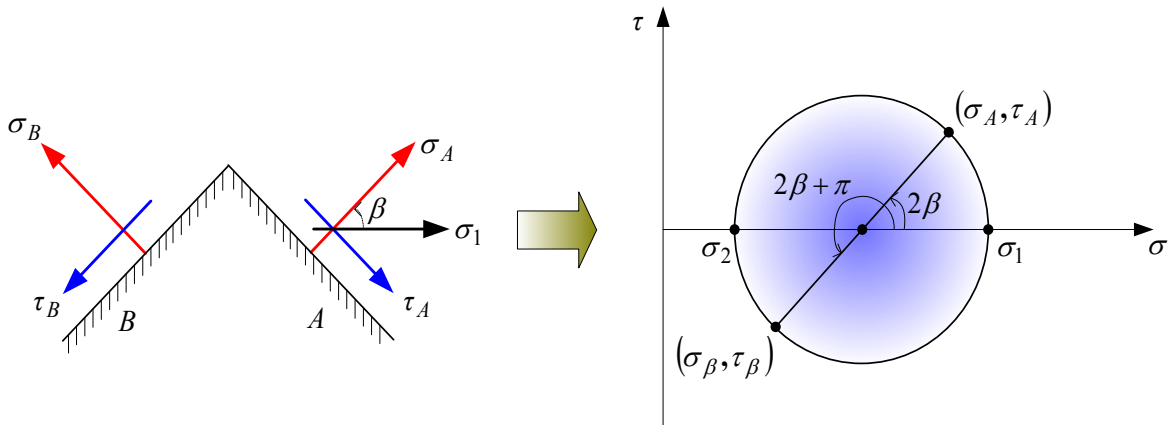


⁵¹ OLIVELLA, Op. cit., p. 116.

b) *Los puntos representativos del círculo de Mohr de los planos ortogonales están alineados con el centro del círculo (consecuencia de la propiedad a))*

para $\beta_2 = \beta_1 + \frac{\pi}{2}$, ver Figura 56.

Figura 56. Propiedades del círculo de Mohr



c) *Si se conoce el estado tensional en dos planos ortogonales se puede dibujar el círculo de Mohr.*

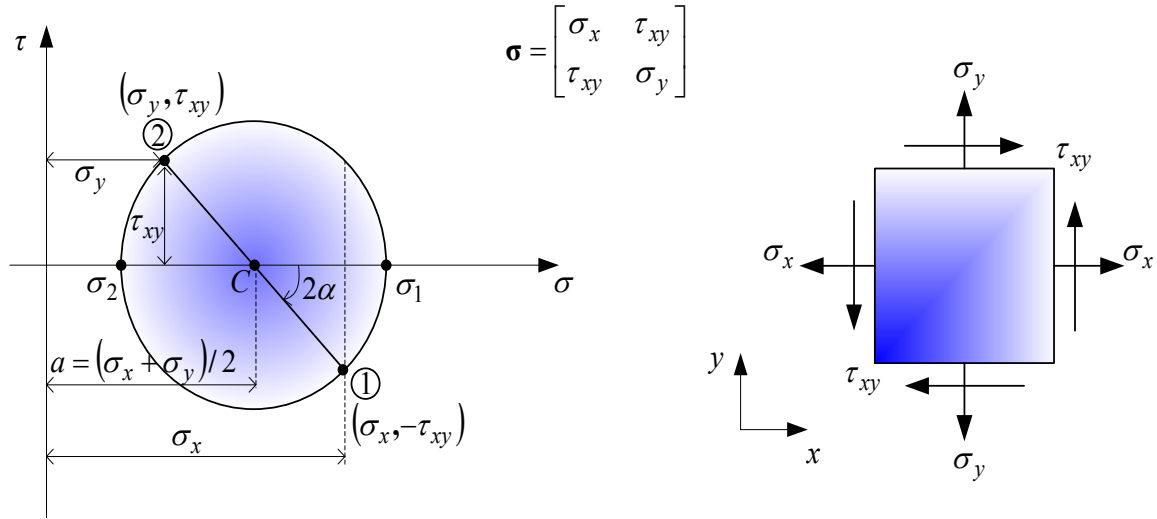
En efecto, por la propiedad b) los puntos representativos de ambos planos en el plano (σ, τ) están alineados con el centro del círculo de Mohr. En consecuencia, uniendo ambos puntos, la intersección con el eje σ proporciona el centro del círculo. Puesto que además se conocen dos puntos de círculo, puede trazarse éste.

d) *Dadas las componentes del tensor de tensiones, en una determinada base, ortonormal, se puede dibujar el círculo de Mohr:*

Este es un caso particular de la propiedad c), en la que se conocen los puntos representativos del estado tensional sobre los planos cartesianos (ver Figura 57). Obsérvese en dicha figura como pueden calcularse los radios y los puntos diametrales del círculo. Obsérvese también que la

aplicación de la propiedad a), para el punto representativo del plano perpendicular al eje x , supone moverse en sentido contrario al ángulo α .

Figura 57. Círculo de Mohr a partir del tensor de tensiones

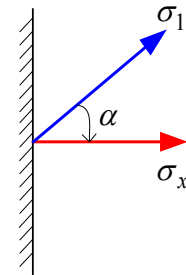


$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = a + R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = a - R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



4.7.5 El polo del círculo de Mohr. Teorema⁵²: En el círculo de Mohr existe un punto denominado polo que tiene las siguientes propiedades:

- Si se une el polo P con otro punto A del círculo de Mohr, se obtiene una recta que es paralela al plano de cuyo estado tensional es representativo el punto A (ver Figura 58).

⁵² OLIVELLA, Op. cit., p. 119.

- Lo inverso también se verifica, es decir, dado un plano cualquiera, si se traza el polo P una recta paralela a dicho plano, esta cortara al círculo de Mohr en el punto B que representa al estado tensional de dicho plano (ver Figura 59).

Figura 58. El polo del círculo de Mohr. Teorema

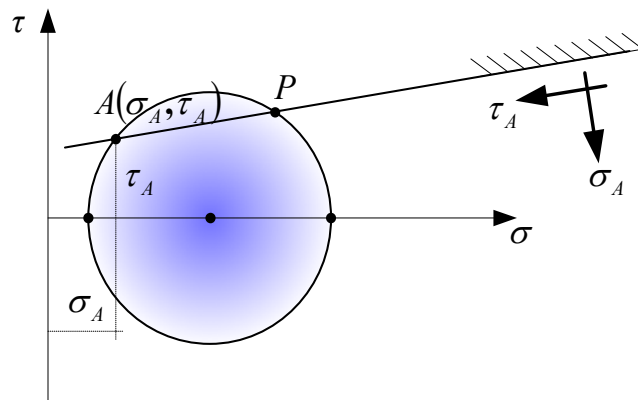
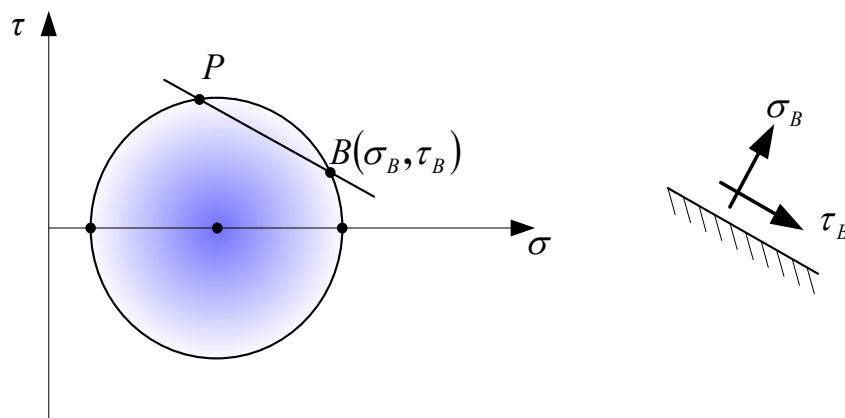


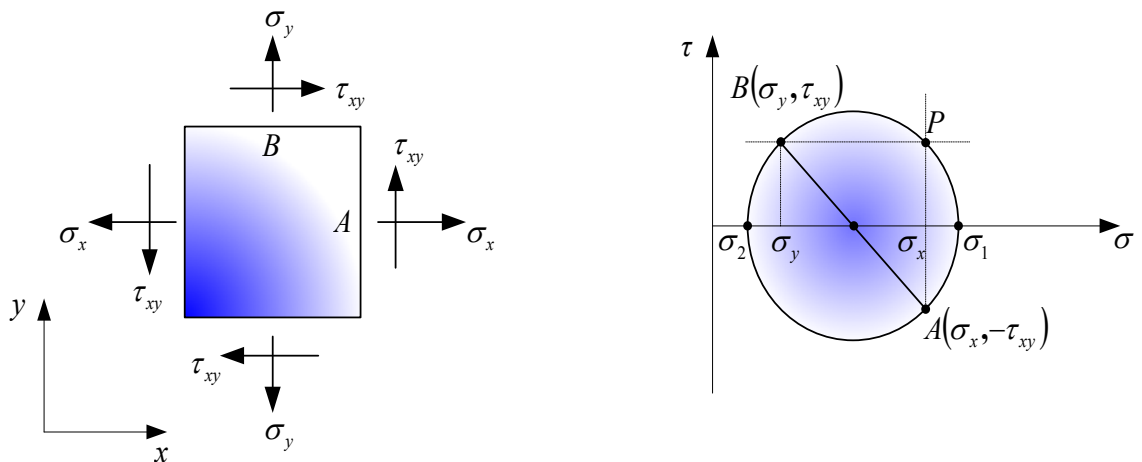
Figura 59. El polo del círculo de Mohr. Teorema inverso



Demostración: Sea el tensor de tensiones en el punto y su representación grafica sobre los planos considerados de la Figura 60 (izquierda), denominados plano A (plano vertical) y plano B (plano horizontal). Sean A y B los correspondientes puntos del círculo de Mohr (Figura 6.30, derecha).

- Suponiendo que se verifica la propiedad a), el polo del círculo de Mohr podría obtenerse trazando desde el punto A una vertical (paralela al plano A) y donde corte el círculo de Mohr se encuentra el polo P . También trazando desde el punto B una recta horizontal (paralela al plano B) donde corte el círculo de Mohr, se encontrara el polo. Puede verse en la Figura 60 que en ambos casos se obtiene el mismo punto P .
- Considere ahora un plano arbitrario cuya normal forma un ángulo θ con la horizontal (ver Figura 60, izquierda) y sean σ_θ y τ_θ las tensiones normal y tangencial, respectivamente, según este plano. Se supone además que la tensión principal mayor σ_1 forma un ángulo α con la tensión σ_x . Entonces, la tensión σ_θ formara un ángulo $\theta - \alpha$ con la tensión principal mayor σ_1 .

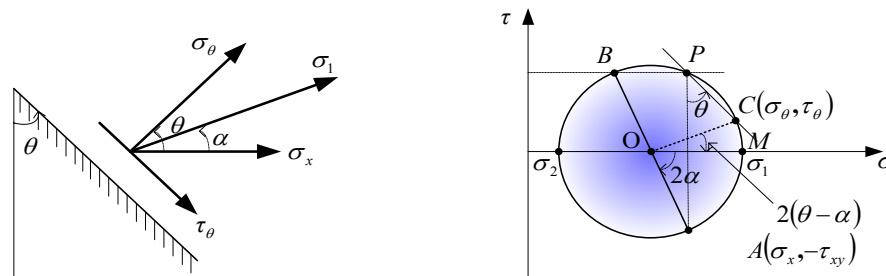
Figura 60. Demostración: teorema del polo del círculo de Mohr



- Se considera el círculo de Mohr y el polo P obtenido en el paso 1 (ver Figura 61, derecha). Utilizando la propiedad a) del apartado 4.7.4, podemos obtener el punto C , representativo del círculo de Mohr que corresponde al plano considerado, girando desde el punto M , y en el mismo sentido, un ángulo doble igual a $2(\theta - \alpha)$ tal que el ángulo MOC es $2(\theta - \alpha)$. Por construcción el ángulo AOM es 2α y el ángulo AOC la suma de ambos,

es $2(\theta - \alpha) + 2\alpha = 2\theta$ y el arco abarcado por el mismo es $AMC = 2\theta$. El ángulo semiinscritor APC que abarca el mismo arco AMC , valdrá, por lo tanto, θ con lo que queda demostrado que la recta PC es *paralela a la traza del plano considerado*. Puesto que dicho plano es cualquiera, la propiedad queda demostrada.

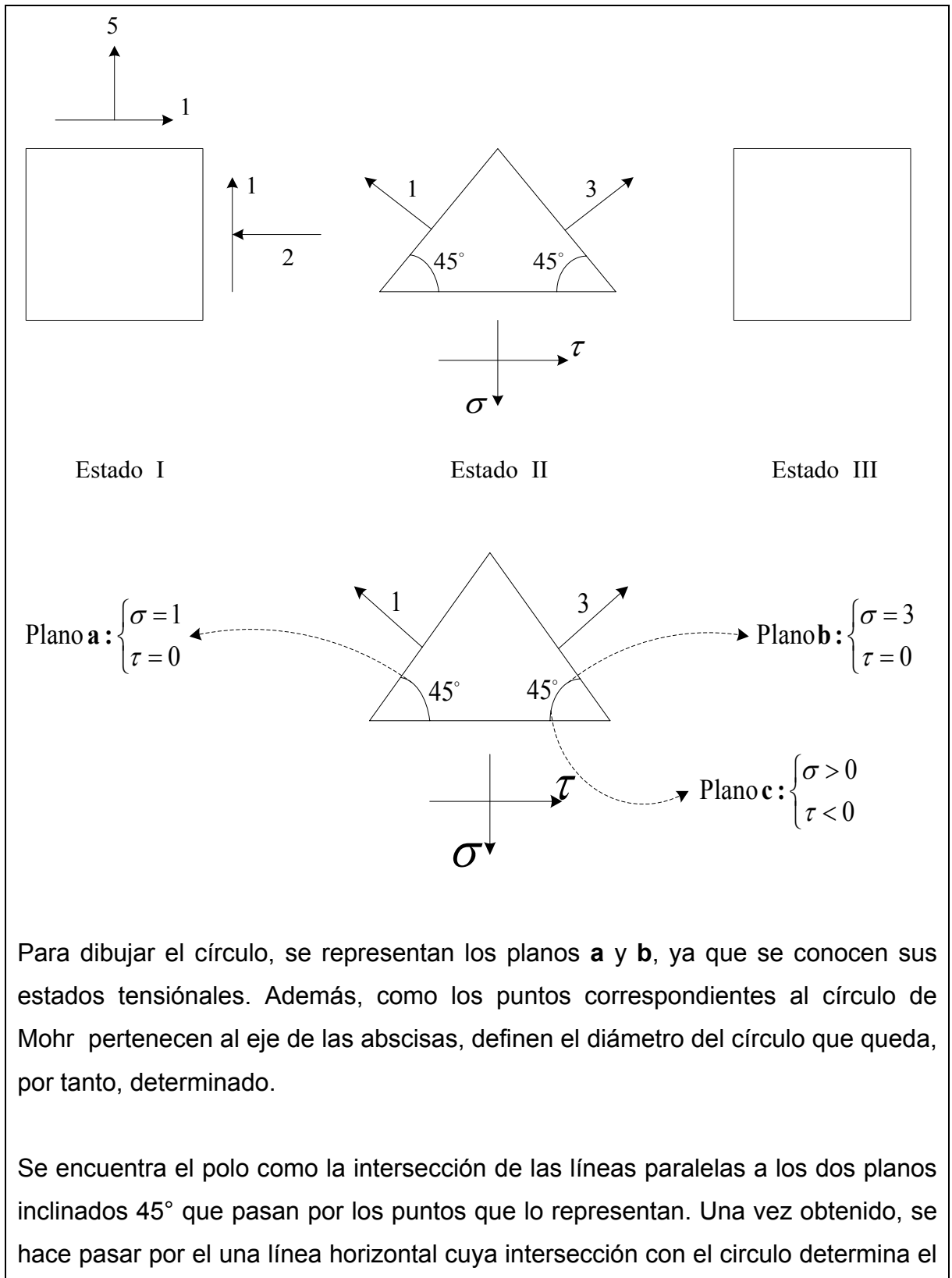
Figura 61. Demostración: teorema del polo del círculo de Mohr



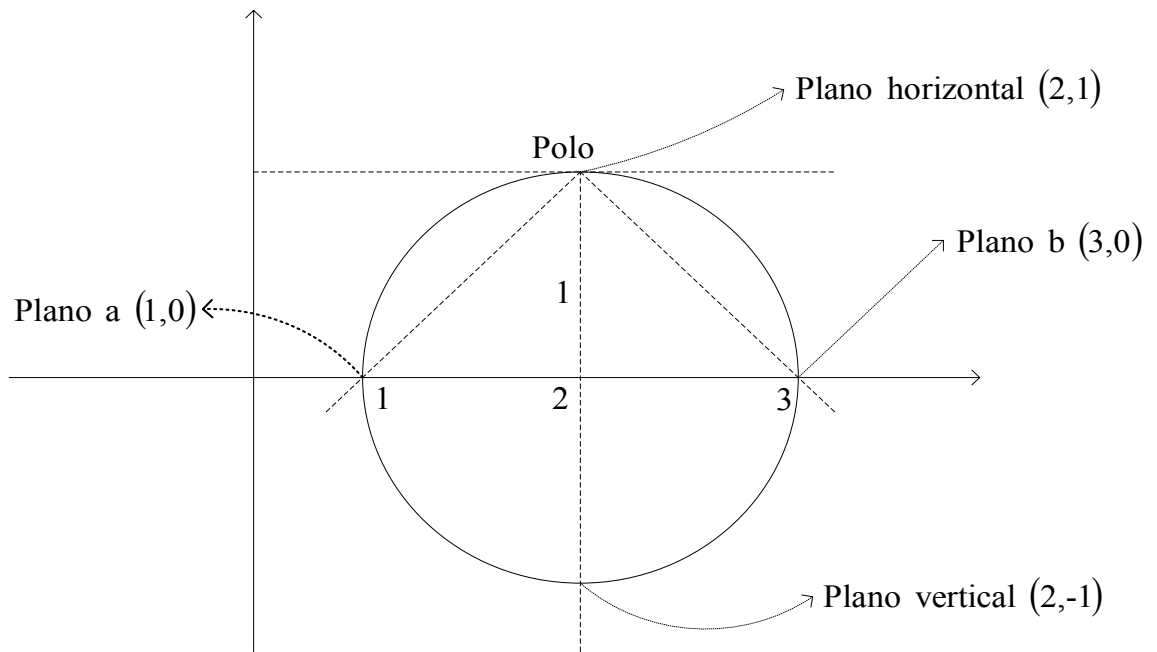
Ejemplo 4.3. Calcular las tensiones que actúan en el estado III = II + I

Solución:

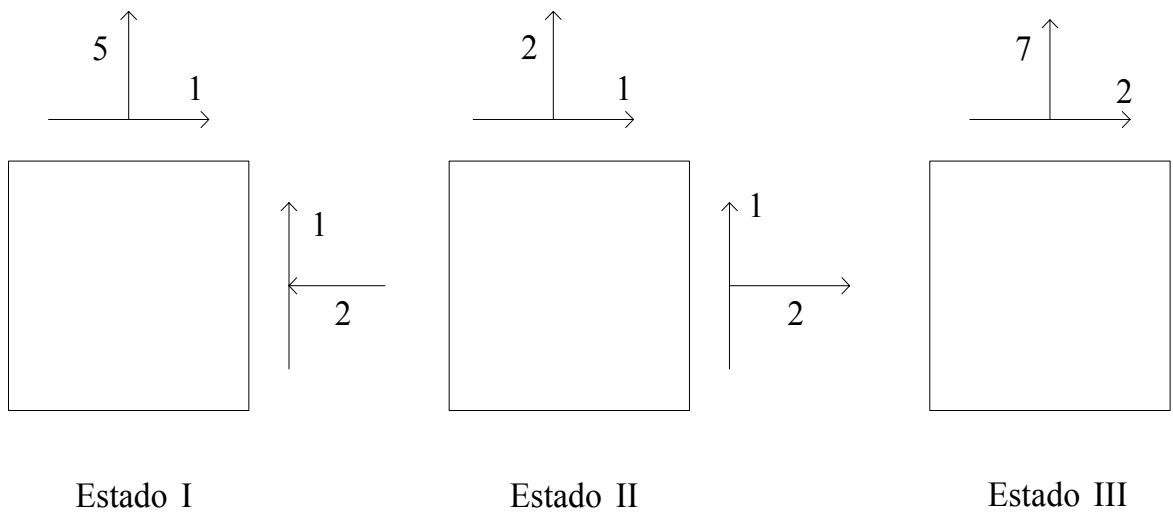
Para poder sumar los dos estados, las tensiones deben actuar sobre los mismos planos. Como los dos estados presentan planos con orientaciones diferentes, debemos buscar las tensiones del estado II existentes sobre los planos dados en el estado I. Para ello representaremos el círculo de Mohr en el estado II.



punto representativo de un plano horizontal (2,1). Se repite el mismo procedimiento para un plano vertical obteniendo el punto (2,-1).



Con esta información se puede reconstruir el estado II, ahora sobre planos horizontales y verticales, y sumarlo al estado I para obtener así el estado III.



5. ELASTICIDAD LINEAL

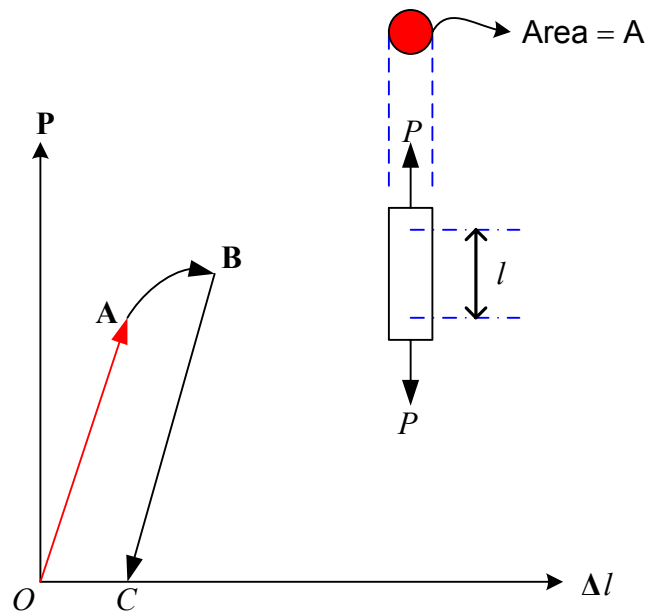
A esta altura se ha estudiado la cinemática de la deformación y la descripción del estado de tensión en un medio material continuo, sin embargo estas relaciones no son suficientes para describir la respuesta de un material específico debida a una condición de carga dada. De la experiencia se nota que bajo las mismas condiciones de carga, la respuesta del acero es diferente a la del agua. Además, para un material dado, la respuesta varia de acuerdo a diferentes condiciones de carga. Por ejemplo, para una carga moderada, la deformación causada en el acero por dicha carga desaparece a medida que la carga es retirada.

Este comportamiento característico del material es conocido como **elasticidad**. Mientras que más allá de cierta carga las deformaciones serán permanentes y puede aparecer algún tipo de fractura en el material, comportamiento totalmente opuesto a la elasticidad. En este capítulo, se estudiará el comportamiento elástico de un material sólido real mediante la idealización de este.

5.1 PROPIEDADES MECANICAS. UNA NOCION EXPERIMENTAL

Se quiere establecer alguna apreciación del comportamiento mecánico de materiales sólidos. Suponiendo que se tiene un bloque de material, y de este se extrae un cilindro delgado al cual se denominara *espécimen de prueba* de área de sección transversal A y longitud l . La barra es ahora tensionada estáticamente por la aplicación de una carga axial P , y la elongación Δl es medida con un calibrador. Una grafica típica de la fuerza de tensión contra la elongación es mostrada en la Figura 62. Si se remueve la carga dentro del rango proporcional OA el *espécimen de prueba* recobrará su posición original (teóricamente la línea OA debe ser repasada) mostrando así un comportamiento elástico.

Figura 62. Diagrama carga – deformación P vs Δl



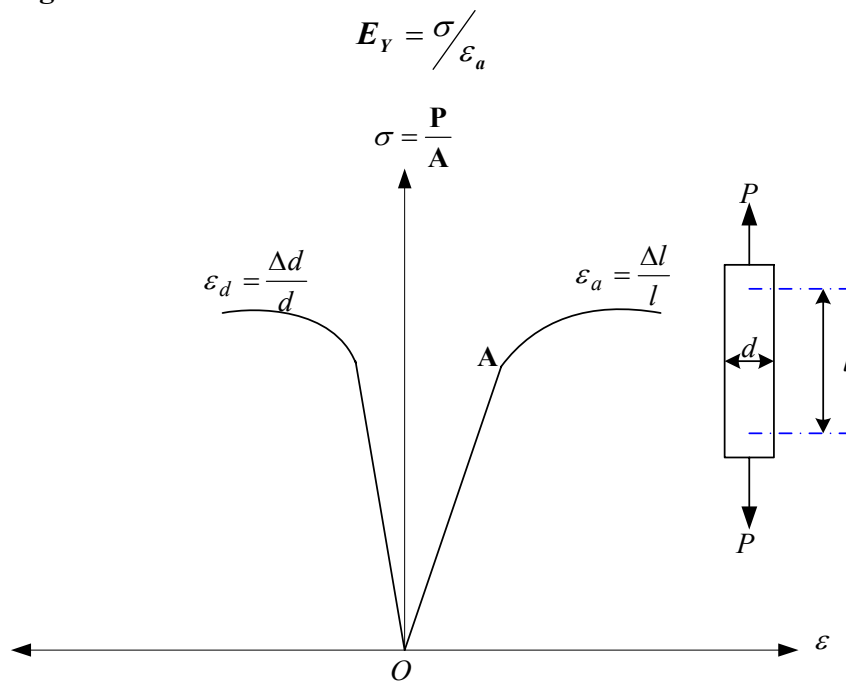
Si se aplica una carga mucho mayor que la necesaria para llevar el gráfico hasta A y luego la retiramos, observaremos que el trazo típico será $OABC$ y encontraremos que hay una “deformación permanente” OC . En el gráfico podemos ver que la línea BC tiene la misma pendiente de la línea OA , lo que indica un comportamiento elástico del material. En este punto el *especimen de prueba* ha sufrido lo que se conoce como endurecimiento en frío.

Debido a que tanto estructuras como máquinas son generalmente diseñadas para que sus componentes se comporten elásticamente y ya que el comportamiento elástico de los materiales es uno de los más sencillos de modelar, nos limitaremos a observar la elasticidad lineal. Restricción que permitirá encontrar que si un espécimen es tensionado a diferentes tasas de carga, mantendremos la misma proporcionalidad entre carga y deformación (para este caso elongación). Además, se está justificando y asumiendo que la tasa de variación de la carga no tiene efecto sobre el comportamiento elástico lineal.

La grafica de carga-deformación (P vs Δl , de la Figura 62) depende del área de la sección transversal A y de la medida de la longitud l . Además, se quiere tener una representación del comportamiento del material el cual es independiente del tamaño del espécimen y cualquier otra variable introducida al montar el experimento.

Por consiguiente se grafica el así llamado esfuerzo P/A vs. el alargamiento axial o la elongación unitaria $\varepsilon_a = \Delta l/l$ como lo muestra la Figura 63. Ahora, los resultados de la prueba si aparecerán de forma independiente de las características geométricas del espécimen. La pendiente de la línea OA será por consiguiente una característica propia del material llamada **Módulo de Young** (o **módulo de elasticidad**).

Figura 63. Diagrama esfuerzo – deformación



El valor numérico del E_y para el acero esta alrededor de los 207 GPa (30E6 p.s.i). Esto significa, para una barra de acero de sección transversal 32.3cm^2 (5in^2) que soporta una carga de 667.200 N (1500 lb.), la elongación axial es:

$$\varepsilon_a = \frac{(6672200/32.3 \times 10^{-4})}{207 \times 10^9} \approx 10^{-3} \text{ m}$$

Como se esperaba, los alargamientos en el rango elástico de los metales son bastante pequeños, de modo que es posible utilizar la teoría de deformación infinitesimal para describir la deformación de metales.

En la prueba de tensión, también es posible medir cambios en la dirección lateral. Si la barra es un cilindro circular, con diámetro d , podemos hacerlo, bajo ciertas condiciones como la permanencia circular del diámetro a medida que este decrece mientras la condición de carga de tensión aumenta. Definiendo $\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d}$, como la

deformación lateral, es posible encontrar que la relación $\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_a}$ es una constante.

Esta constante es conocida con el nombre de **Módulo de Poisson**, y esta denotada por ν . El valor típico de ν para el acero es 0.3.

Hasta aquí solo se ha considerado un espécimen aislado fuera del bloque de material. Es concebible que tanto el módulo de elasticidad E_y como el módulo de Poisson pueden depender de la orientación del espécimen relativo al bloque. En este caso el material es llamado anisótropo con respecto a sus propiedades elásticas. Las propiedades anisótropicas son usualmente exhibidas por materiales con una estructura interna definida tales como la madera. Si los especímenes son cortados en diferentes orientaciones, uno muy cercano de otro, mostrando el mismo diagrama σ vs ε , podemos concluir que el material es isótropo con respecto a las propiedades elásticas.

Además de una posible dependencia de las propiedades elásticas debida a la orientación, podemos también encontrar que el comportamiento elástico de cada espécimen se puede ver afectado por la zona del bloque de la cual sea extraído. En este caso llamaremos al material no homogéneo. Si no hay variación en el resultado de la prueba de tensión para especímenes extraídos en diferentes sectores de un mismo bloque de material, decimos que el material es **homogéneo**.

Para un espécimen de prueba de un material homogéneo e isótropo con sección transversal circular se mantendrá la forma circular de dicho espécimen pero, obviamente, variara el diámetro de la sección.

5.2 HIPOTESIS DE LA TEORIA DE ELASTICIDAD LINEAL⁵³

La teoría de elasticidad lineal puede considerarse una simplificación de teorías más generales (Teoría general de la Elasticidad), pero suficientemente aproximada para la mayoría de aplicaciones. Las hipótesis simplificativas de la *teoría de elasticidad lineal* son esencialmente las siguientes:

5.2.1 Deformaciones infinitesimales:

- *Desplazamientos pequeños*: no se diferencia la configuración de material (correspondiente al instante de referencia t_0) de la espacial (correspondiente al instante actual t) y, en consecuencia, tampoco se diferencian las coordenadas espaciales de las materiales, ver Figura 64.

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \underbrace{\mathbf{u}}_{\approx 0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{X} \quad (5.1)$$

⁵³ POLANCO, Jorge E. Elementos de mecánica del medio continuo. Medellín: Publicaciones UNAL - Medellín. 1985.

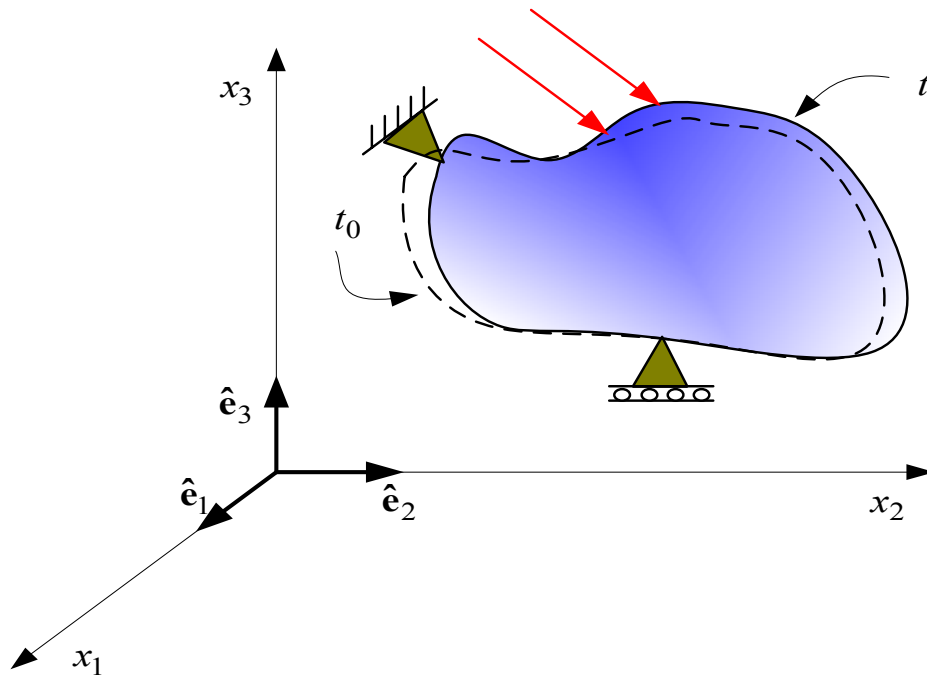
Como consecuencia de la ecuación (5.1), no hay diferencia entre *las descripciones material y espacial de una propiedad*:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} \Rightarrow \gamma(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{X}, t) = \Gamma(\mathbf{x}, t) = \Gamma(\mathbf{X}, t)$$

Y toda referencia a descripciones material y espacial (así como a los conceptos asociados, como derivada local, derivada material etc.) pierde su sentido en elasticidad infinitesimal. A partir de la ecuación 5.1, puede escribirse:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \approx \mathbf{I} \Rightarrow |\mathbf{F}| \approx 1 \quad (5.2)$$

Figura 64. Esquema de deformaciones infinitesimales



- o *Gradientes de los desplazamientos pequeños*: como consecuencia no hay distinción entre los tensores material $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$ y espacial $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ de deformación que colapsan en el tensor de deformación infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}, t) \approx \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (5.3)$$

5.2.2 Existencia de un estado neutro. La configuración de referencia es el estado natural el cual esta desprovisto de tensiones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_0) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t_0) = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

5.2.3 Proceso adiabático e isotérmico. Se considera (en principio) que el proceso de deformación es isotérmico y adiabático. Se conocen como procesos isotérmicos aquellos que tiene lugar a temperatura $\theta(\mathbf{x}, t)$ constante a lo largo del tiempo:

$$\Rightarrow \theta(\mathbf{x}, t) \equiv \theta(\mathbf{x})$$

Son procesos adiabáticos aquellos que se producen sin generación de calor en todo punto e instante de tiempo:

$$\text{Calor generado en un dominio } V : \int_V \rho r dV - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad \forall V$$

$$\Rightarrow \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \quad \forall t$$

5.2.4 Esfuerzos internos en función de las deformaciones. El comportamiento del material esta caracterizado por el conocimiento de esfuerzos internos en función de las deformaciones; por lo tanto, el tensor $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ de componentes σ_{ij} , es función de $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$, siendo $\boldsymbol{\sigma}$ nulo en el caso en el cual $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$.

5.3 ECUACION CONSTITUTIVA ELASTICA LINEAL. LEY DE HOOKE GENERALIZADA⁵⁴

Dentro de ciertos límites, los experimentos citados en la sección 5.1 tienen los siguientes rasgos en común:

- La relación entre la cantidad de carga aplicada y la cantidad de deformación medida es lineal.
- La razón de aplicación de la carga no afecta la linealidad de la relación a.
- La deformación desaparece completamente a medida que se retira a carga.
- La deformación observada en estos experimentos es muy pequeña.

Las características mencionadas ahora serán usadas para formular la ecuación constitutiva de un material ideal, la **elasticidad Hookeana**. La ecuación constitutiva relaciona la tensión con cantidades relevantes de deformación. En este caso, las deformaciones son pequeñas y la variación de la velocidad en la aplicación de la cara no tiene efecto en la linealidad de la relación carga tensión-deformación. Por lo tanto podemos escribir:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \quad (5.5)$$

La cual es la, por todos conocida, ley de Hooke. En la teoría de la elasticidad lineal esta *proporcionalidad* se generaliza al caso multidimensional suponiendo la *linealidad* de la relación entre las componentes del tensor de tensiones σ y de deformación ε en lo que se denomina la *Ley de Hooke generalizada*:

$$\text{Ley de Hooke generalizada} \rightarrow \begin{cases} \sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C} : \varepsilon(\mathbf{x}, t) \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad i, j \in \{ \} \end{cases} \quad (5.6)$$

Donde σ_{ij} y ε_{kl} son las componentes de los tensores de segundo orden de tensión y deformación, respectivamente, y C_{ijkl} son las componentes de un tensor

⁵⁴ HEINBOCKEL, Op. cit., p. 2.

de cuarto orden (denominado *tensor de constantes elásticas*), el cual contiene la información característica de las propiedades mecánicas de un material anisótropo elástico Hookeano sólido. Además si se considera que el cuerpo es homogéneo las propiedades mecánicas serán las mismas para cualquier partícula dentro de este, entonces C_{ijkl} son constantes.

El tensor de cuarto orden C tiene en principio $3^4=81$ componentes. Sin embargo, debido a la simetría de σ y ε , debe presentar ciertas simetrías ante el cambio de índices. Estas son:

$$\left. \begin{array}{l} C_{ijkl} = C_{jikl} \\ C_{ijkl} = C_{ijlk} \end{array} \right\} \rightarrow \textit{Simetrías mayores}$$

$$C_{ijkl} = C_{klij} \rightarrow \textit{Simetrías menores}$$
(5.7)

y, como consecuencia, el número de constantes distintas en el tensor de constantes elásticas C , para un sólido anisótropo, se reduce entonces 21.

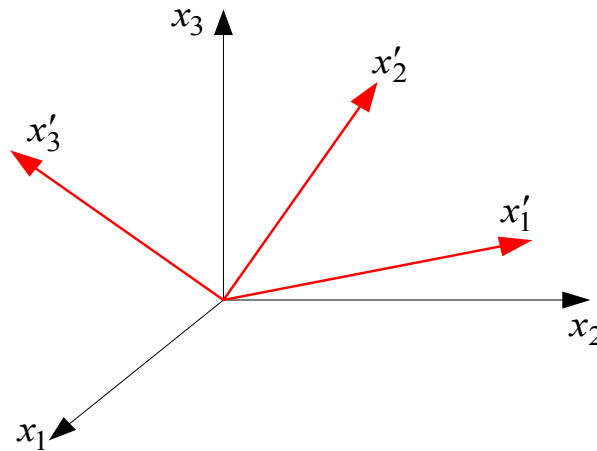
5.4 ISOTROPIA. CONSTANTES DE LAMÉ. LEY DE HOOKE PARA ELASTICIDAD LINEAL ISOTROPA

Un material isótropo es aquel cuyas propiedades mecánicas pueden ser descritas sin referirse a alguna dirección. Para el caso de un material elástico lineal, las propiedades elásticas están contenidas en el tensor C de propiedades elásticas de las ecuaciones (5.6) o (5.7). En consecuencia, las componentes deben ser independientes de la orientación del sistema cartesiano en el que se trabaje. Dados, por ejemplo, los sistemas $\{x_1, x_2, x_3\}$ y $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ de la Figura 65, la ecuación constitutiva para los dos sistemas se escribe⁵⁵:

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2, x_3\} &\Rightarrow [\sigma] = [C] : [\varepsilon] \\ \{x'_1, x'_2, x'_3\} &\Rightarrow [\sigma'] = [C'] : [\varepsilon'] \end{aligned}$$
(5.8)

⁵⁵ CALCOTE, Op. cit., p. 71.

Figura 65. Sistemas coordenados $\{x_1, x_2, x_3\}$ y $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$



Y, para el caso de material isótropo, la componente de \mathbf{C} en ambos sistemas deben ser las mismas ($\Rightarrow [\mathbf{C}] = [\mathbf{C}']$). En consecuencia, la anterior definición, de carácter físico, de isotropía se traduce en el *carácter isótropo*, en el sentido matemático, del tensor de constantes elásticas \mathbf{C} :

$$\text{Tensor de constantes elásticas} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] \end{cases} \quad i, j, k, l \in \{1, 2, 3\} \quad (5.9)^*$$

Donde λ, μ son conocidas como *constantes de Lamé*, que caracterizan el comportamiento elástico del material y que deben ser obtenidas experimentalmente.

Al sustituir la ecuación (5.9) en la (5.6) se obtiene la ecuación constitutiva elástica lineal isótropa:

* La expresión general de un tensor isótropo de cuarto orden es: $\mathbf{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{I} \quad \forall \lambda, \mu$. Es preciso, recordar que el tensor simétrico unitario de cuarto orden \mathbf{I} (isótropo) se define mediante sus componentes: $[\mathbf{I}]_{ijkl} = \frac{1}{2} [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}]$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \lambda \delta_{ij} \underbrace{\delta_{kl} \delta_{kl}}_{\varepsilon_{ll}} + 2\mu \underbrace{\left(\frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{kl} + \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{kl} \right)}_{\varepsilon_{ij}} \quad (5.10)$$

Ecuación constitutiva
para material elástico isotropo. $\rightarrow \{\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}\}$ (5.11)
Ley de Hooke

Es importante ver que la condición de isotropía reduce el número de constantes elásticas del material de 21 a 2.

Fácilmente se puede transformar la ecuación (5.11) para expresar las componentes de deformación en función de las componentes de tensión. Con este fin, primero se determina ε_{ii} en términos de σ_{ii} de (5.11) haciendo $i = j$ para producir:

$$\sigma_{ii} = 3\lambda \varepsilon_{ll} + 2\mu \varepsilon_{ii} = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{ii} \quad (5.12)$$

Ahora, solucionando (5.11) para ε_{ij} y substituyendo de (5.12), se obtiene la forma inversa del ecuación constitutiva isotrópica,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} + \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{ll} \right) \quad (5.13)$$

Por una nueva disposición formal (aunque reconocidamente no obvia) de esta ecuación, es permisible escribir:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[1 + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \right] \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \delta_{ij} \sigma_{ll} \right\} \quad (5.14)$$

De lo cual se define:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (5.15 a)$$

Y

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (5.15 \text{ b})$$

Se obtiene la siguiente forma de ley de Hooke para el comportamiento isótropo en términos de las constantes ingenieriles E y ν :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll} \delta_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{ll}\delta_{ij}] \quad (5.16)$$

Aquí E es llamado *el módulo de Young*, o simplemente *el módulo de elasticidad*, y ν es conocida como *Coefficiente de Poisson*. Por combinaciones adecuadas de estas dos constantes, es posible definir dos constantes adicionales de gran importancia a la hora de diseñar bajo teorías elásticas. Primero, *el módulo de esfuerzo al corte*, o *el módulo de rigidez*, está definido como⁵⁶:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu \quad (5.17)$$

El cual, como notamos, es igual a la *constante de Lamé*. En segundo lugar, se define *el módulo bulk* como:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (5.18)$$

Para materiales isótropos de comportamiento elástico, solo se requieren dos constantes elásticas que definen completamente la respuesta del material. Además, cualquier constante elástica puede ser determinada en términos de cualquier otras dos constantes. Una lista de todas las constantes elásticas en términos de otros pares de constantes es dada en la Tabla 1⁵⁷.

Las interpretaciones físicas de las constantes E , ν , G , y K citadas anteriormente pueden ser determinadas a partir de una consideración de las condiciones especiales de tensión mostrada en la Figura 66. En el caso de tensión uniaxial (tensión o compresión), se dice que en la dirección $x_1 = X$ con $\sigma_{11} = \pm\sigma_0$ y con

⁵⁶ BACKUS, Op. cit. p. 251.

⁵⁷ Ibid., p. 253.

todas las otras componentes de tensión igual a cero (Figura 66 a), la ecuación (5.16) produce:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} = \frac{\pm \sigma_0}{E} \quad \text{para } i = j = 1 \quad (5.19 \text{ a})$$

$$\varepsilon_{22} = -\nu \varepsilon_{11} = \frac{\mp \nu \sigma_0}{E} \quad \text{para } i = j = 2 \quad (5.19 \text{ b})$$

$$\varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11} = \frac{\mp \nu \sigma_0}{E} \quad \text{para } i = j = 3 \quad (5.19 \text{ c})$$

Así, E es el factor de proporcionalidad entre las tensiones normales y las deformaciones. Geométricamente, esto es la pendiente del gráfico 7.2 entre los puntos A y O .

Finalmente, la ecuación 5.16 pueden reescribirse utilizando la notación ingenieril para las componentes de los tensores de tensión de deformación como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Figura 66. Condiciones especiales de tension

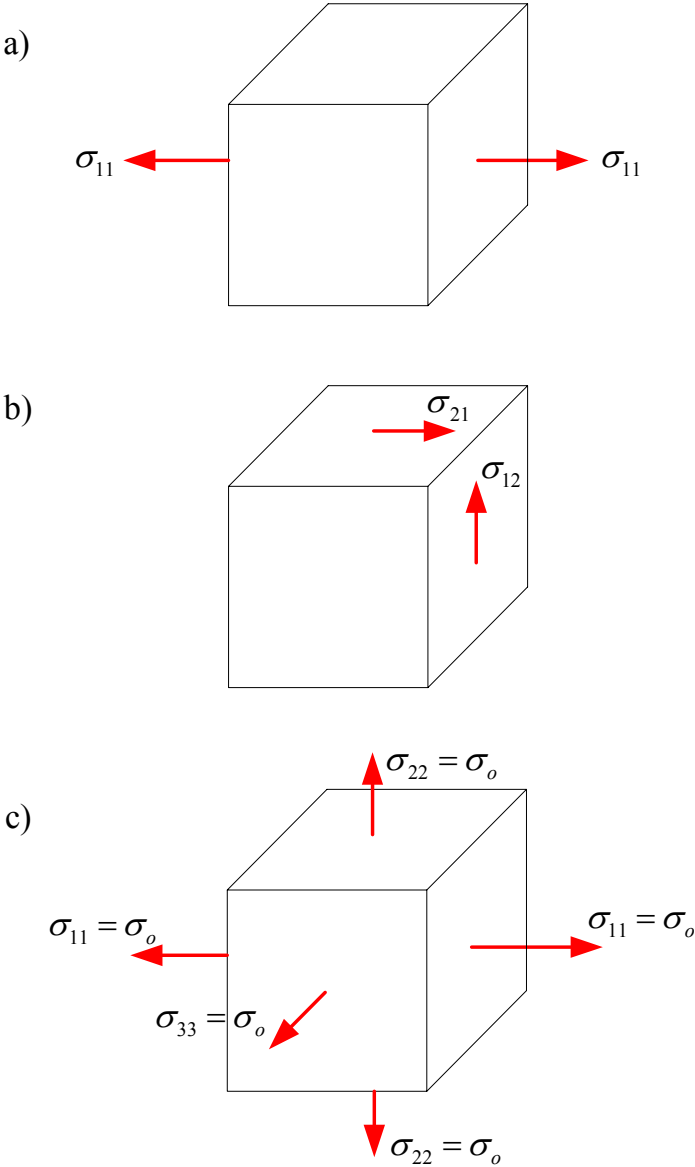


Tabla 1. Definiciones de constantes elásticas

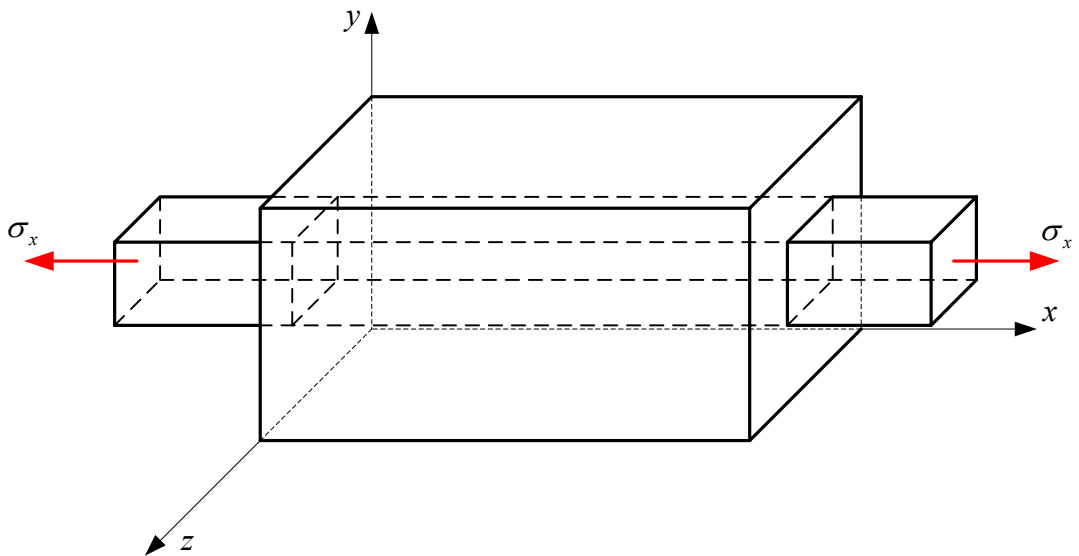
λ	μ	E	ν	K
λ, μ	$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	$\frac{3\lambda + 2\mu}{3}$	
λ, E	$(E - 3\lambda) + \frac{1}{4}\sqrt{(E - 3\lambda)^2 + 8\lambda E}$	$-(E + \lambda) + \frac{1}{4\lambda}\sqrt{(E + \lambda)^2 + 8\lambda^2}$	$(3\lambda + E) + \frac{1}{6}\sqrt{(3\lambda + E)^2 - 4\lambda E}$	
λ, ν	$\frac{\lambda(1 - 2\nu)}{2\nu}$	$\frac{\lambda(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu}$	$\frac{\lambda(1 + \nu)}{3\nu}$	
λ, K	$\frac{3(K - \lambda)}{2}$	$\frac{9K(K - \lambda)}{3K - \lambda}$	$\frac{\lambda}{3K - \lambda}$	
μ, E	$\frac{\mu(2\mu - E)}{E - 3\mu}$		$\frac{E - 2\mu}{2\mu}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu - E)}$
μ, ν	$\frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}$	$2\mu(1 + \nu)$		$\frac{2\mu(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$
μ, K	$\frac{3K - 2\mu}{3}$			
E, ν	$\frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$			$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$
E, K	$\frac{3K(3K - E)}{9K - E}$		$\frac{3K - E}{6K}$	
ν, K	$\frac{3K\nu}{1 + \nu}$	$3K(1 - 2\nu)$		

Ejemplo 5.1. Para la pieza de la Figura 67, constituida por un material elástico lineal isótropo, con modulo de Young E y modulo de rigidez G , se admite el siguiente estado tensional uniforme:

$$\sigma_x \neq 0 \quad ; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Obtener las deformaciones ingenieriles.

Figura 67. Ejemplo 5.1



Solución:

De las ecuaciones de 5.20 se puede obtener:

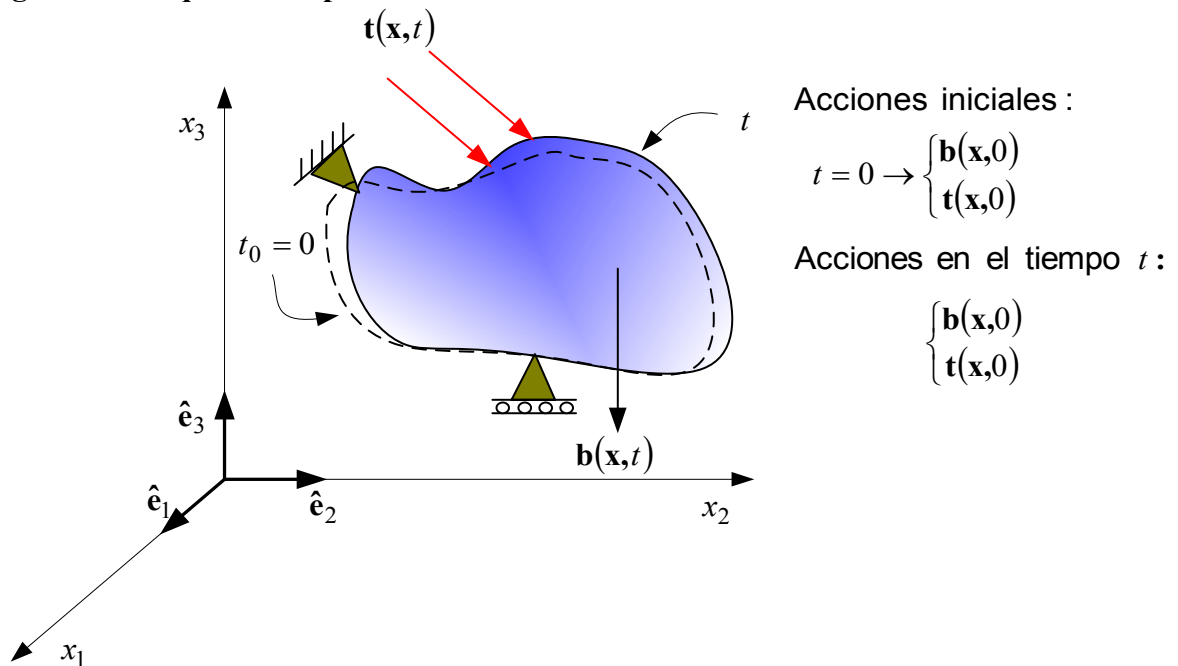
$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x \\ \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \end{cases} \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

Como consecuencia de dichas deformaciones la pieza se estira en la dirección x y se contrae en las direcciones y, z (ver Figura 67).

5.5 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA⁵⁸

Considere el sólido elástico lineal de la Figura 68 sometido a ciertas acciones caracterizadas por el vector de fuerzas másicas $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ en el interior del volumen V y el vector de tracción $\mathbf{t}(\mathbf{x},t)$ en el contorno ∂V . Se designa problema elástico lineal al conjunto de ecuaciones que permiten obtener la evolución a lo largo del tiempo de los correspondientes desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, deformaciones $\varepsilon(\mathbf{x},t)$ y tensiones $\sigma(\mathbf{x},t)$.

Figura 68. Esquema del problema elástico lineal



5.5.1 Ecuaciones de gobierno. Se ha visto que en cada punto en un continuo deformable hay seis tensiones σ_{ij} , seis deformaciones ε_{ij} , y tres desplazamientos u_{ij} . Cantidades con las cuales, aplicando los principios de la teoría elástica, es posible establecer un sistema de 15 ecuaciones:

- *Ecuación de Cauchy:*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (3 \text{ ecuaciones}) \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho_0 b_j = \rho_0 \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

- *Ecuación Constitutiva:*

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (6 \text{ ecuaciones}) \quad (5.22)$$

- *Ecuación Geométrica:*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (6 \text{ ecuaciones}) \quad (5.23)$$

Además de satisfacer estas 15 ecuaciones, las funciones de tensión, deformación y desplazamiento desarrolladas en el problema de elasticidad deben satisfacer las condiciones de contorno.

5.5.2 Condiciones de contorno.

- Considere el contorno $\Gamma \equiv \partial V$ del sólido dividido en tres partes Γ_u, Γ_σ y $\Gamma_{u\sigma}$ con las siguientes características (ver Figura 69).

$$\begin{aligned} \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma \cup \Gamma_{u\sigma} &\equiv \partial V \\ \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma &\equiv \Gamma_u \cap \Gamma_{u\sigma} \equiv \Gamma_{u\sigma} \cap \Gamma_\sigma \equiv 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Y en función de los mismos definiremos las condiciones de contorno en el espacio, es decir, aquellas que afectan a los argumentos espaciales (x, y, z) de las 15 incógnitas del problema mencionadas anteriormente:

- Contorno Γ_u : *Condiciones de contorno en desplazamientos:*

⁵⁸ OLIVELLA, Op. cit., p. 180.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{u}^*(\mathbf{x},t) \\ u_i(\mathbf{x},t) &= u_i^*(\mathbf{x},t) \quad i \in \{1,2,3\} \end{aligned} \right\} \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad \forall t \quad (5.25)$$

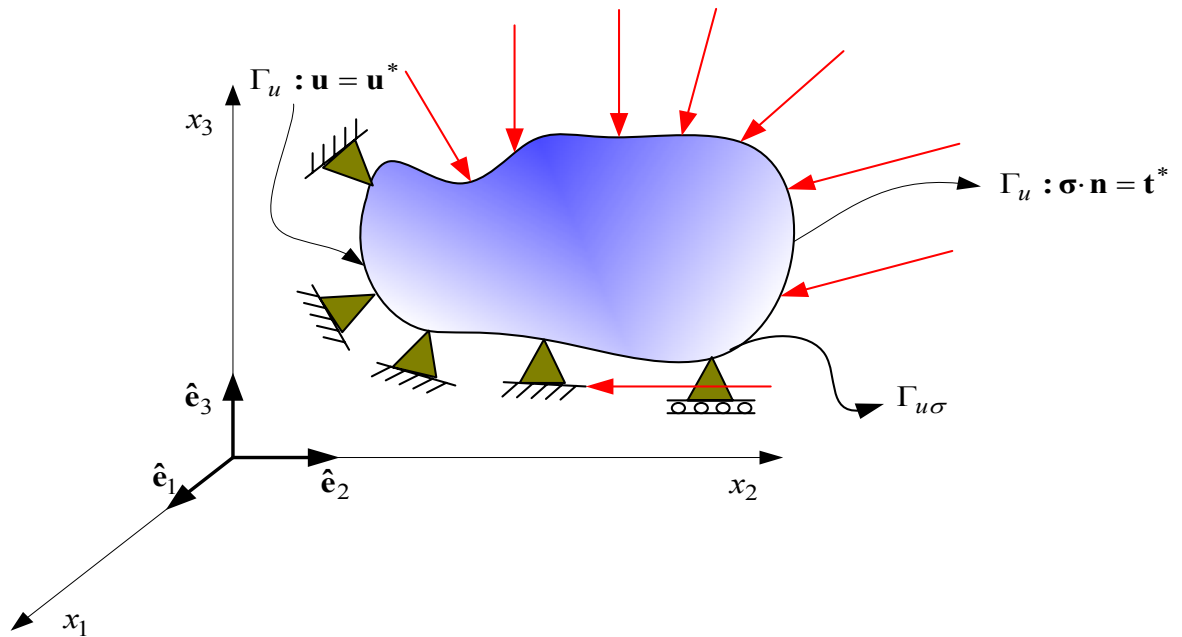
- Contorno Γ_σ : Condiciones de contorno en tensiones:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}^*(\mathbf{x},t) \\ \sigma_{ij}(\mathbf{x},t) \cdot n_j &= t_i^*(\mathbf{x},t) \quad i, j \in \{1,2,3\} \end{aligned} \right\} \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma \quad \forall t \quad (5.26)$$

- Contorno $\Gamma_{u\sigma}$: Condiciones de contorno mixtas (desplazamientos-tensión) :

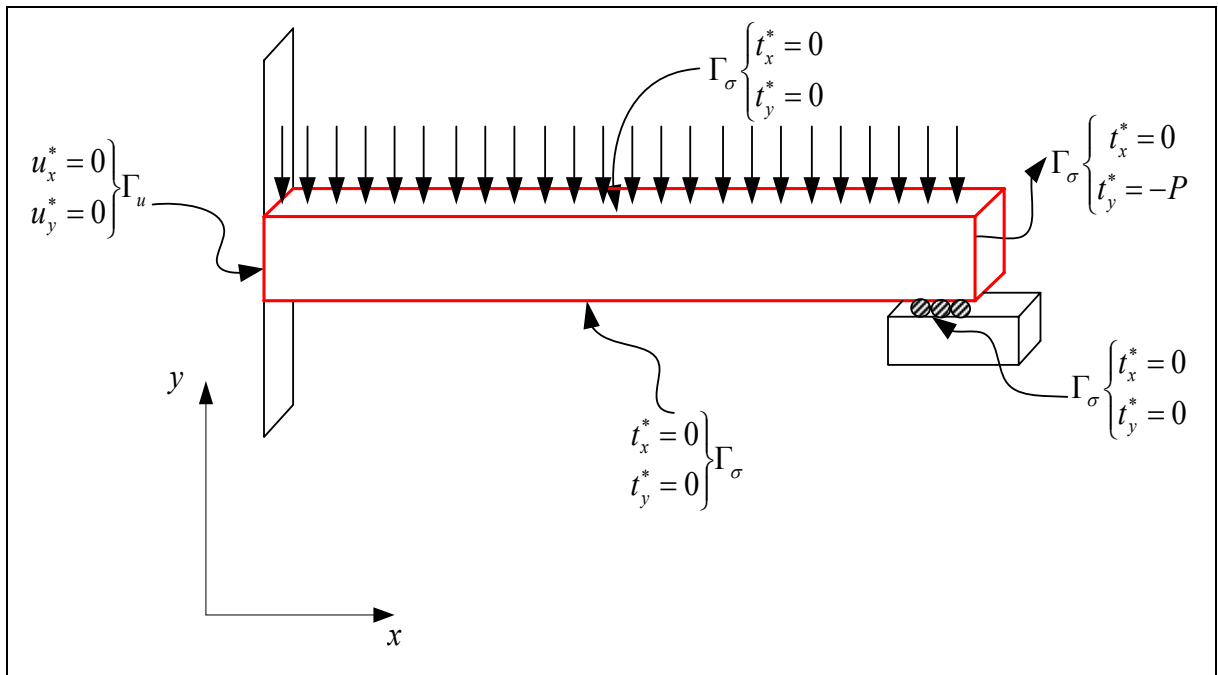
$$\left. \begin{aligned} u_i(\mathbf{x},t) &= u_i^*(\mathbf{x},t) \\ \sigma_{jk}(\mathbf{x},t) \cdot n_k &= t_j^*(\mathbf{x},t) \quad i, j, k \in \{1,2,3\} \end{aligned} \right\} (i, j, k \in \{1,2,3\} \quad i \neq j) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{u\sigma} \quad \forall t \quad (5.26)$$

Figura 69. Condiciones de contorno



Ejemplo 5.2. En la viga de la Figura 70 se ejemplifican los diversos tipos de condiciones de contorno en el espacio.

Figura 70. Ejemplo 5.2



- **Condiciones de contorno en el tiempo: Condiciones iniciales.** En general, en el instante inicial o de referencia, $t = 0$, serán conocidos los desplazamientos y la velocidad:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &\stackrel{\text{not}}{=} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \forall \mathbf{x} \in V \quad (5.27)$$

5.5.3 Problema “cuasiestático”⁵⁹. El sistema de ecuaciones (5.21) a (5.27) puede ser visualizado, desde el punto de vista de mecánico, como un sistema de acciones o datos (las fuerza másicas $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, el vector de tracción $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$, los desplazamientos impuestos $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ y las velocidades iniciales $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$) que, insertadas en un *modelo* matemático constituido por las ecuaciones diferenciales de la sección 5.5.1 y las condiciones de contorno del apartado 5.5.2, proporciona

⁵⁹ OLIVELLA, Op. cit., p. 287.

la *respuesta* o solución en forma de los campos de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, de deformaciones $\varepsilon(\mathbf{x},t)$ y tensiones $\sigma(\mathbf{x},t)$.

$$\underbrace{\left. \begin{array}{l} \mathbf{b}(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{v}_0 = (\mathbf{x}) \end{array} \right\}}_{\substack{\text{not} \\ \text{Acciones} = \mathbf{A}(\mathbf{x},t)}} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{c} \text{MODELO} \\ \text{MATEMATICO :} \\ \text{E.D.'P's + c.c} \end{array} \right\rangle \Rightarrow \underbrace{\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \\ \sigma(\mathbf{x},t) \\ \varepsilon(\mathbf{x},t) \end{array} \right\}}_{\substack{\text{not} \\ \text{Respuestas} = \mathbf{R}(\mathbf{x},t)}} \quad (5.28)$$

En el caso mas general, tanto las acciones como las respuestas dependerán del tiempo y el sistema de E.D.P's deberá ser integrado tanto en las variables espaciales como en el tiempo. Sin embargo, en ciertos casos, el espacio de integración puede ser reducido en la dimensión correspondiente al tiempo. Este es el caso de los denominados problemas cuasiestáticos.

Un problema elástico lineal cuasiestático es un problema elástico lineal en el que la aceleración se considera despreciable ($\mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} \approx 0$). Dicha hipótesis es aceptable siempre que *las acciones se apliquen muy lentamente*. En este caso puede suponerse que la variación de las acciones \mathbf{A} con el tiempo es lenta ($\partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2 \approx 0$) y, debido a la dependencia continua de los resultados respecto a los datos, la variación con el tiempo de la respuesta también es pequeña ($\partial^2 \mathbf{R} / \partial t^2 \approx 0$). En consecuencia, la segunda derivada temporal de la respuesta se considera despreciable y en particular $\frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} \approx 0$.

Para el problema cuasiestático las ecuaciones diferenciales de gobierno quedan como sigue:

- *Ecuación de Cauchy:*

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho_0 b_j = \rho_0 \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = 0 \quad j \in \{1,2,3\} \quad (7.29)$$

- *Ecuación constitutiva:*

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad i, j \in \{1,2,3\} \quad (7.30)$$

- *Ecuación Geométrica:*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j \in \{1,2,3\} \quad (7.31)$$

Que ya no involucran ninguna derivada temporal. El sistema de ecuaciones diferenciales solo necesita ser integrado en el espacio con las condiciones de contorno en el espacio del apartado 5.5.2.1. Por otra parte *el tiempo solo juega un papel de parámetro descriptivo de la evolución de las acciones que suelen describirse en función del denominado factor de carga $\lambda(t)$* :

$$\underbrace{\left. \begin{array}{l} \mathbf{b}(\mathbf{x}, \lambda) \\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, \lambda) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \lambda) \\ \mathbf{v}_0 = (\mathbf{x}) \end{array} \right\}}_{\substack{\text{not} \\ \text{Acciones} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \lambda)}} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{c} \text{MODELO} \\ \text{MATEMATICO :} \\ \text{E.D. 'P's + c.c} \end{array} \right\rangle \Rightarrow \underbrace{\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \lambda) \\ \sigma(\mathbf{x}, \lambda) \\ \varepsilon(\mathbf{x}, \lambda) \end{array} \right\}}_{\substack{\text{not} \\ \text{Respuestas} = \mathbf{R}(\mathbf{x}, \lambda)}} \quad (5.32)$$

En otras palabras, para cada valor de las acciones (caracterizado por un valor fijo de λ^*) $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \lambda^*)$ se obtiene un respuesta $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \lambda^*)$. Variando el valor de λ^* se obtiene una familia de acciones y la correspondiente familia de respuestas.

5.6 RESOLUCION DEL PROBLEMA ELASTICO LINEAL⁶⁰

La resolución del problema elástico lineal puede hacerse típicamente con dos planteamientos distintos:

- Planteamiento en *desplazamientos*
- Planteamiento en *tensiones*.

Sus nombres respectivos provienen de cual es la incógnita principal que se considera para el problema (desplazamientos o tensiones, respectivamente).

Cabe resaltar que en la actualidad el planteamiento en desplazamientos tiene mayor aplicación puesto que en el están basados la mayoría de los métodos de resolución numérica del problema elástico lineal.

5.6.1 Planteamiento en desplazamiento: ecuaciones de Navier. Considérese las ecuaciones del problema elástico lineal:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho_0 b_j &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad j \in \{1,2,3\} \\ \sigma_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ii} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad i, j \in \{1,2,3\} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j \in \{1,2,3\} \end{aligned} \right\} \text{Ecuaciones de Cauchy, constitutivas y geométricas} \quad (5.33)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_u : \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* \\ \Gamma_\sigma = \mathbf{t}^* &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \right\} \text{Condiciones de contorno en el espacio} \quad (5.34)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{v}_0 \end{aligned} \right\} \text{Condiciones iniciales} \quad (5.35)$$

⁶⁰ OLIVELLA, Op. cit., p.186.

El objetivo es plantear un sistema reducido de ecuaciones, en el que intervengan como incógnita solo en el campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$. El primer paso consiste en sustituir en (5.33) la ecuación constitutiva en la ecuación de Cauchy, y mediante una serie de sustituciones es posible obtener:

$$\text{Ecuaciones de Navier} \left\{ \begin{array}{l} (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \rho_0 b_i = \rho_0 \ddot{u}_i \quad i \in \{1,2,3\} \end{array} \right. \quad (5.36)$$

Que constituyen un sistema de EDP's de segundo orden en los desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, recibiendo el nombre de *ecuaciones de Navier*. Las ecuaciones de contorno pueden escribirse también en función de los desplazamientos como sigue:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \\ u_i = u_i^* \quad i \in \{1,2,3\} \end{array} \right\} \text{en } \Gamma_u \quad (5.37)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + \mu(\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^* \\ \lambda u_{i,i} n_i + \mu(u_{i,j} n_j + u_{j,i} n_j) = t_i^* \quad i, j \in \{1,2,3\} \end{array} \right\} \text{en } \Gamma_\sigma$$

Las condiciones iniciales (5.37) permanecen inalteradas. Una vez integrado el sistema (5.36) se dispone del campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$. Por derivación del mismo y sustitución en las ecuaciones geométricas en (5.33), se obtiene el campo de deformaciones $\varepsilon(\mathbf{x},t)$, y sustituyendo finalmente en la ecuación constitutiva, se obtiene el campo de tensiones $\sigma(\mathbf{x},t)$.

5.6.2 Planteamiento en tensiones: ecuaciones de Beltrami-Michell⁶¹. El método es solamente planteable en el caso cuasiestático...del apartado 5.5.3...: Consideremos entonces las ecuaciones del problema elástico lineal cuasiestático:

⁶¹ OLIVELLA, Op. cit., p. 188.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho_0 b_j &= 0 \quad j \in \{1,2,3\} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll} \delta_{ij} \quad i, j \in \{1,2,3\} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j \in \{1,2,3\} \end{aligned} \right\} \text{Ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y geométricas} \quad (5.38)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_u : \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* \\ \Gamma_\sigma &= \mathbf{t}^* = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \right\} \text{Condiciones de contorno en el espacio} \quad (5.39)$$

El punto de partida del planteamiento en tensiones son las ecuaciones geométricas en (5.38) de las que, por derivaciones sucesivas, se eliminan los desplazamientos obteniéndose las ecuaciones de compatibilidad:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad i, j, k, l \in \{1,2,3\} \quad (5.40)$$

La deducción de las ecuaciones del problema se hace en los siguientes pasos:

- Se sustituye la ecuación constitutiva de (5.38) en las ecuaciones de compatibilidad (5.40).
- Se sustituye en la ecuación la ecuación de equilibrio de (5.38).

El resultado es el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{ll,ij} = -\frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} (\rho_0 b_l)_{,l} - (\rho_0 b_i)_{,j} - (\rho_0 b_j)_{,i} \quad i, j \in \{1,2,3\} \quad (5.41)$$

Las ecuaciones (5.41) reciben el nombre de *ecuaciones de Beltrami-Michell* y constituyen un sistema de EDP's de segundo orden en las incógnitas $\sigma(\mathbf{x})$ que deben ser resueltas en el campo de los reales.

Hay, claro está, muchas técnicas para solucionar problemas de elasticidad, y es de gran importancia saberlo pues de este modo no solo tendremos la solución de un problema en particular sino que podríamos abordar cualquier problema. La prueba, de la unicidad de las soluciones de problema de equilibrio que la teoría

clásica de deformaciones infinitesimal de elasticidad puede ser encontrada en varias de las referencias seleccionadas y no se discutirá aquí.

A continuación se vera un ejemplo de un problema elemental de elasticidad en tres dimensiones.

Ejemplo 5.3. Considérese el estiramiento de una barra prismática por una fuerza equivalente a su peso propio.

Establezca el sistema de coordenadas como se muestra en la Figura 71., y asumiremos que ρg es el peso por unidad de volumen de la barra, Entonces las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son:

$$X = Y = 0 \quad Z = -\rho g \quad (a)$$

De la ecuación de equilibrio de 5.38 tenemos:

$$\sigma_z = \rho g z \quad (b)$$

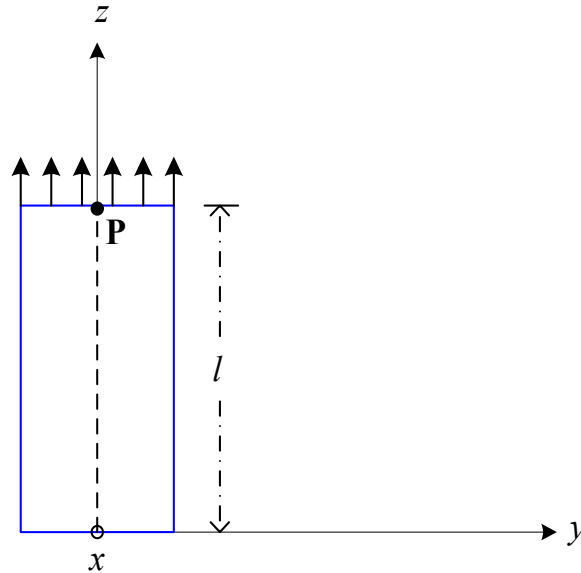
Y

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (c)$$

La ecuación anterior muestra que para un valor constante de z , estamos asumiendo una tensión uniforme producida por el peso bajo la sección. Esta suposición esta de acuerdo con la hecha en la teoría de resistencia o mecánica de materiales.

De las ecuaciones (b) y (c) puede verse que $\sigma_z = 0$ en la base de la barra ($z = 0$) y $\sigma_z = \rho g l$ en el extremo superior de la barra ($z = l$). También, todas las otras tensiones son cero. Entonces las condiciones de contorno son satisfechas si las tracciones de la superficie en el extremo superior de la barra es una fuerza de tensión uniformemente distribuida.

Figura 71. Ejemplo 5.3



Ya que se ha satisfecho las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de frontera, obtendrá la solución del problema si las condiciones de compatibilidad de (5.38) son satisfechas. De las ecuaciones (5.20) y de las expresiones (b) y (c) tenemos:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -\frac{\nu}{E} \rho g z \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu}{E} \rho g z \\ \varepsilon_z &= \frac{\rho g z}{E} \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0\end{aligned}\tag{d}$$

Las ecuaciones de deformación (d) son todas función lineal de z y automáticamente satisfacen las ecuaciones de compatibilidad (5.9). Por consiguiente, se tiene la solución al problema de una fuerza uniformemente distribuida sobre la superficie del extremo de una barra prismática.

Hay que recordar que es posible definir las deformaciones como las derivadas parciales de los desplazamientos, es decir:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x = \varepsilon_y = \partial_x u = \partial_y v = -\frac{\nu\rho gz}{E} \\ \varepsilon_z = \partial_z w = \frac{\rho gz}{E}\end{aligned}\quad (e)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \partial_x u + \partial_y v = \partial_z w + \partial_x u = \partial_z w + \partial_x v = 0$$

Entonces los desplazamientos u, v, w pueden ser hallados integrando las ecuaciones (e). Si esto se hace para la segunda ecuación tendremos:

$$w = \frac{\rho gz^2}{2E} + w_0(x, y) \quad (f)$$

Sustituyendo la ecuación (f) en la tercera ecuación de (e) resulta:

$$\partial_z w_0 + \partial_x u = 0 \quad \text{y} \quad \partial_y w_0 + \partial_z v = 0 \quad (g)$$

De lo cual:

$$u = -z\partial_x w_0 + u_0(x, y) \quad \text{y} \quad v = -z\partial_y w_0 + v_0(x, y) \quad (h)$$

Ahora sustituyendo la ecuación (h) en (e) se obtiene:

$$-z\partial_{xx} w_0 + \partial_x u_0 = -z\partial_{yy} w_0 + \partial_y v_0 = -\frac{\nu\rho gz}{E} \quad (i)$$

Note ahora que u_0 y v_0 son funciones de x y no dependen de z . Por lo tanto:

$$\partial_x u_0 = \partial_y v_0 = 0 \quad \text{y} \quad \partial_{xx} w_0 = \partial_{yy} w_0 = \frac{\nu\rho g}{E} \quad (j)$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (h) en la tercera de las ecuaciones (e) produce:

$$-2z\partial_{xy} w_0 + \partial_y u_0 + \partial_x v_0 = 0$$

Como ya se dijo u_0 y v_0 no dependen de z entonces:

$$\partial_y u_0 + \partial_x v_0 = 0 \quad (k.1)$$

Por ende:

$$\partial_{xy} w_0 = 0 \quad (k.2)$$

El problema ahora es encontrar las funciones para u_0, v_0, w_0 tal que satisfagan las ecuaciones (j) y (k). Dado que $\partial_x u_0 = 0$, u_0 no puede ser una función de x . Se asume que u_0 es una función lineal de y de modo que:

$$u_0 = C_1 y + C_2 \quad (1.1)$$

Dado que $\partial_y v_0 = 0$, v_0 no puede ser una función de y . Se asume que v_0 es una función lineal de x , entonces:

$$v_0 = C_1 x + C_3 \quad (1.2)$$

Mediante un razonamiento similar:

$$w_0 = \frac{\nu \rho g}{E} (x^2 + y^2) + C_4 x + C_5 y + C_6 \quad (1.3)$$

Completando el conjunto de ecuaciones que satisfacen las ecuaciones (j) y (k), donde desde C_1 hasta C_6 son constantes arbitrarias. Entonces de las ecuaciones (f) y (h), la familia de funciones (ecuaciones generales) para los desplazamientos es:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\nu \rho g x z}{E} - C_4 z + C_1 y + C_2 \\ v &= -\frac{\nu \rho g y z}{E} - C_5 z + C_1 x + C_2 \\ w &= \frac{\rho g z^2}{E} + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) + C_4 x + C_5 y + C_6 \end{aligned} \quad (m)$$

Se necesitan seis condiciones de contorno para evaluar las constantes de integración. Si un elemento en el centroide en la superficie del extremo superior de la barra (punto P en la Figura 5.10) es considerado fijo, entonces dicho punto ni se desplazara ni rotara. El hecho de que dicho punto no se desplace o traslade implica que $u = v = w = 0$, el que no haya rotación alrededor del eje x implica que $\partial_z v = 0$, el que no haya rotación alrededor del eje y implica que $\partial_z w = 0$, para todo $x = y = 0$ y $z = l$. Una sustitución directa de estas condiciones en la ecuación (m) da como resultado:

$$C_6 = -\frac{\rho g l^2}{2E}$$

Que es la única constante diferente de cero. Entonces la expresión final para los desplazamientos es:

$$u = -\frac{\nu\rho g xz}{E}$$

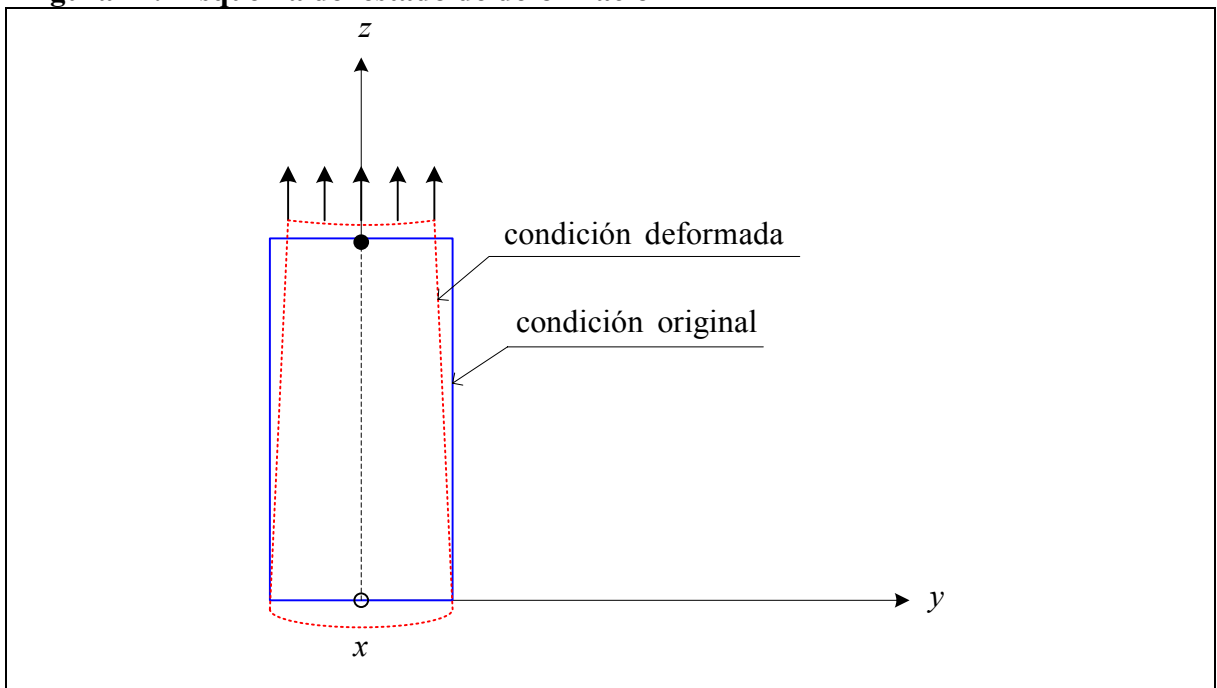
$$v = -\frac{\nu\rho g yz}{E}$$

$$w = \frac{\rho g z^2}{E} + \frac{\nu\rho g}{2E}(x^2 + y^2) + \frac{\rho g l^2}{2E}$$

(n)

Y el estado de deformación es como se muestra en la Figura 72.

Figura 72. Esquema del estado de deformación



6. LOS ELEMENTOS FINITOS

6.1 EL MODELAMIENTO MATEMATICO

El modelamiento consiste en establecer un conjunto de suposiciones, reglas, relaciones y delimitaciones con las que se intenta explicar el comportamiento de un fragmento de realidad a través del tiempo y la respuesta a estímulos externos. En los últimos años los modelos matemáticos ha tenido un impresionante desarrollo en todas las áreas del conocimiento humano científico y de los recursos naturales en general, y una de las áreas de conocimiento donde el uso de esta herramienta se hace imprescindible es en la ingeniería. La importancia de los modelos matemáticos radica, entre otros aspectos, en la simulación y predicción de fenómenos físicos a corto, mediano y largo plazo, con lo cual podemos obtener relaciones **causa-efecto**, sin haber realizado cambios en los sistemas reales, lo cual convierte esta herramienta en un requisito esencial en el diseño en Ingeniería.

Sin embargo la realidad es mucho más compleja que cualquier modelo que los científicos y matemáticos puedan concebir, los modelos solo son aproximaciones a la realidad, representaciones de la naturaleza en la mente del hombre, idealizaciones sobre las que no se puede establecer una validez absoluta sino una validez relativa y estadística, resultado del éxito del modelo para explicar una gran cantidad de situaciones de su objeto mas no la totalidad, y para predecir con aproximación mas no con exactitudes comportamiento y la magnitud de las variables medibles del fragmento de realidad representado. Por todo esto el uso de un modelo exige un conocimiento profundo de sus fundamentos teóricos y un permanente estado de retroalimentación crítica durante su aplicación. A pesar de estas limitaciones no deja de asombrar el grado de aproximación entre el

comportamiento de la naturaleza y los modelos matemáticos, que han hecho posible del desarrollo de la ciencia y la ingeniería como disciplinas racionales y como principal fuente de poder de la humanidad sobre si misma y sobre el universo.

6.2 EL MODELAMIENTO COMPUTACIONAL

Para hacer de un modelo algo útil en Ingeniería debe poder expresarse en lenguaje matemático, en forma de relaciones matemáticas cualitativas y ojala cuantitativas tales como funciones, ecuaciones, inecuaciones, que al manipularlas el Ingeniero pueda obtener información acerca de la conducta futura del objeto que diseña o analiza. Es frecuente que las expresiones matemáticas que representen algún fenómeno sean muy difíciles de resolver por procedimientos analítico exactos. Esto ocurre por ejemplo, en fenómenos cuyos modelos constan de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno establecidas sobre un espacio o dominio cuya geometría por curvas, superficies o volúmenes regulares.

Para afrontar esta dificultad, la introducción del computador en la vida cotidiana de la ciencia y la Ingeniería, ha generalizado el uso de los **métodos numéricos**, agudezas matemáticas programables, que permiten encontrar soluciones aproximadas a expresiones matemáticas como *integrales definidas, series, ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera establecidas, y optimización de una función dentro de un intervalo.*

6.3 METODOS NUMERICOS DE USOS MÁS EXTENDIDOS

6.3.1 El método de las diferencias finitas. Es uno de los métodos mas conocido y hasta hace algunos años, el principal método utilizado en algoritmos

computacionales para resolver problemas que involucren ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera dadas.

En este método se sustituye el dominio continuo del problema por un conjunto de puntos distribuidos a lo largo del dominio, formando una malla de diferencias finitas. Para cada punto de la malla es viable formular una ecuación lineal que involucre como incógnitas los valores de la propiedad buscada en este punto y en los de sus vecinos inmediatos, en los esquemas de diferencias más sencillos y mediatos en los más complejos. Al aplicar el esquema de diferencias deducido de la ecuación diferencial, a cada punto, se obtiene al final un sistema de ecuaciones lineales cuya dimensión esta dada por el número total de puntos en la malla menos los puntos de la frontera para los cuales es conocido el valor de la propiedad que deseamos calcular. La solución de este sistema de ecuaciones lineales nos dará como resultado el valor de la propiedad en cada punto de la red. A partir de estos valores se podrá interpolar la propiedad en cualquier otro punto de la red.

6.3.2 El método variacional. Este es un sistema para resolver ecuaciones diferenciales en forma aproximada. Hay dos pasos básicos en la solución variacional de ecuaciones diferenciales:

- Llevar una ecuación diferencial dada a un forma variacional.
- Determinar la solución aproximada usando un método variacional tal como el método de Ritz, el método de Galerkin, u otros métodos.

En este método *el dominio no se discretiza*. Únicamente se buscan funciones que satisfagan las condicione de frontera del problema, con las que se construye una solución aproximada en forma de combinación lineal de estas funciones. Existen

muchas formas de encontrar la solución aproximada del problema variacional, siendo los más comunes:

- Método de Ritz.
- Método de Galerkin.
- Mínimos cuadrados.
- Método del castigo.
- Residuos ponderados.
- Método de Courant.
- Método de colocación.
- Petrov-Galerkin.

La principal desventaja de este método es conseguir para cada problema las funciones que satisfagan las condiciones de frontera. *Al no existir un procedimiento sistemático para esta tarea*, no puede ser utilizado directamente en los algoritmos computacionales. Sin embargo, su importancia radica en que el método de elementos finitos está basado en él.

6.3.3 El método de los elementos finitos. Aunque el desarrollo de la teoría de elementos finitos se inició antes del siglo XXI, y a pesar de que a comienzos de él ya estaban establecidos completamente los fundamentos del método, solo en las últimas décadas ha venido ganando popularidad, debido al creciente auge del uso de los ordenadores, demostrando su superior potencia, sobre el método de las diferencias finitas que durante mucho tiempo monopolizó el interés de los programadores en métodos numéricos, debido a su sencillez.

Las ventajas de los elementos finitos sobre el de las diferencias finitas están en la mayor exactitud de las derivadas de la variable principal o propiedad a calcular; facilidad para imponer condiciones de frontera sobre contornos de forma arbitraria;

la capacidad para emplear mallas no uniformes y no rectangulares; además de la posibilidad de representar volúmenes de control de forma variable con el tiempo en problemas de mecánica fluidos. En el momento, los elementos finitos han desplazado a un segundo plano las diferencias finitas; un indicativo de ello es que la mayoría de paquetes computacionales comerciales los vienen empleando especialmente en el área de Mecánica de Sólidos.

6.3.4 El método de los elementos de frontera. Este método es de más reciente introducción en el ámbito de los métodos numéricos. Se clasifica entre las técnicas tipo frontera, en contraposición a las de tipo dominio como los elementos finitos y la diferencial finitas. Las funciones de aproximación usadas en este método satisfacen las ecuaciones del dominio y no las de la frontera, a la inversa de lo que sucede en las soluciones tipo dominio. Este método es mucho más poderoso que los anteriores, debido a que los sistemas de ecuaciones resultantes son mucho más pequeños lo cual lo hace computacionalmente más eficiente; la exactitud obtenida es generalmente que la de los elementos finitos especialmente en problemas bi y tridimensionales; también son capaces de resolver problemas con dominios infinitos, como los que se presentan en la transferencia de calor por convección, medios porosos, electromagnetismo e hidráulica, para los cuales los métodos de dominio clásico son insuficientes. Este método puede ser combinado también con alguno de los de dominio (elementos finitos o diferencias finitas), para obtener una mejor representación de condiciones de frontera en un programa de elementos finitos o diferencias finitas. Otra importante ventaja es que usualmente son capaces de representar regiones de concentración de esfuerzos en una mejor manera que los elementos finitos, aunque generalmente depende del tipo de funciones de aproximación usadas.

6.4 EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos ha llegado a ser una herramienta poderosa en la solución numérica de un amplio rango de problemas de ingeniería. Las aplicaciones van desde el análisis por deformación y esfuerzo de automóviles, aeronaves, edificios y estructuras de puentes hasta el análisis de los campos de flujo de calor, de fluidos, magnético, filtraciones y otros problemas de flujo. Con los avances de la tecnología de los ordenadores y de los sistemas CAD, pueden modelarse problemas complejos con relativa facilidad. Todo esto apunta a que debemos modernizarnos empleando estos desarrollos para entender la teoría básica, las técnicas de modelado y los aspectos computacionales de lo método de los elementos finitos.⁶²

En este capítulo se presentaran una breve reseña histórica referente al método; un glosario de los conceptos mas importantes de la teoría de elementos finitos, con el fin de familiarizar a la lector con la palabras, nomenclaturas e ideas con las que se encontrará en el desarrollo del tema; por ultimo se presenta los pasos a seguir para la solución de un problema con elementos finitos.

Se supone que el lector, conoce la teoría matemática básica, sobre la cual esta construido la teoría de los elementos finitos, ya que corresponde a temáticas de las asignaturas: *Algebra superior*, *Calculo III* y *Ecuaciones Diferenciales*, dictadas en el ciclo básico de las facultades de ingenierías físico-mecánicas y físico-químicas de la Universidad Industrial de Santander. De cualquier modo se sugiere, recordar los siguientes temas, no tanto en su mecánica como en sus conceptos:

- Determinantes y matrices.

- Sistemas de ecuaciones lineales en forma matricial.
- Interacción por partes.
- Teorema de Green.
- Operadores diferenciales.
- Ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Eigenvalores y eigenvectores.

Para efectos de ilustrar las definiciones siguientes con un ejemplo, se seguirá el caso de una viga a flexión de una viga cuya ecuación diferencial de su modelo matemático es:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + f = 0; \quad \theta = \frac{dw}{dx} \quad (6.1)$$

Y las condiciones de frontera para diferentes tipos de apoyo, están mostradas...en la figura D.1 del anexo D...

6.4.1 Antecedentes Históricos⁶³. Las ideas básicas del método de elementos finitos se originaron gracias a los avances en el análisis estructural de aeronaves: En 1941, Hrenikoff presentó una solución a problema de elasticidad usando el “método de trabajo virtual”. En un artículo publicado en 1943, Courant usó interpolación polinomial por partes sobre subregiones triangulares para modelar problemas de torsión. Turner y otros investigadores obtuvieron matrices de rigidez para armaduras, vigas y otros elementos y presentaron sus hallazgos en 1956. Clough fue el primero en acuñar y emplear el término *elemento finito* en 1960.

En los primeros años de la década de 1960, los ingenieros usaron el método para obtener soluciones aproximadas en el problema de análisis de esfuerzos, flujo de

⁶² CHANDRUPPATLA, Tirupathi y BELEGUNDU, Ashok. Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería. 2ª edición. México: Prentice Hall. 1999, p. 1.

⁶³ CHANDRUPPATLA. Op. cit., p. 2.

fluidos, transferencia de calor y otras áreas: Un libro de Argyris, publicado en 1955, sobre teoremas de energía y métodos matriciales, cimentó métodos adicionales en el estudio de los elementos finitos. El primer libro sobre elementos finitos por Zienkiewicz y Chung fue publicado en 1967. A finales de la década de 1960 y principios de la siguiente, el análisis por elementos finitos se aplicó a problemas no lineales y de grandes deformaciones. Las bases matemáticas se fijaron en la década de 1970.

Actualmente, los avances en computadoras mainframe y la disponibilidad de poderosos microprocesadores han puesto este método al alcance de estudiantes e ingenieros.

6.5 EL LENGUAJE DE LOS ELEMENTOS FINITOS (GLOSARIO)

6.5.1 Coordenadas. En toda ecuación diferencial, encontramos variables independientes que sirven para describir el espacio físico y el intervalo de tiempo en que ocurre el fenómeno. Estas variables se llaman coordenadas y se identifican de acuerdo al sistema de coordenadas utilizado como referencia; por ejemplo en sistema de cartesiano son x, y, z, t ; en sistema esférico son r, θ, ϕ, t . Cabe resaltar que por simple que sea la definición es importante hacerla para recordar que no se debe confundir las coordenadas con las variables del problema o funciones incógnitas. En el problema de la flexión de una viga, la coordenada es x .

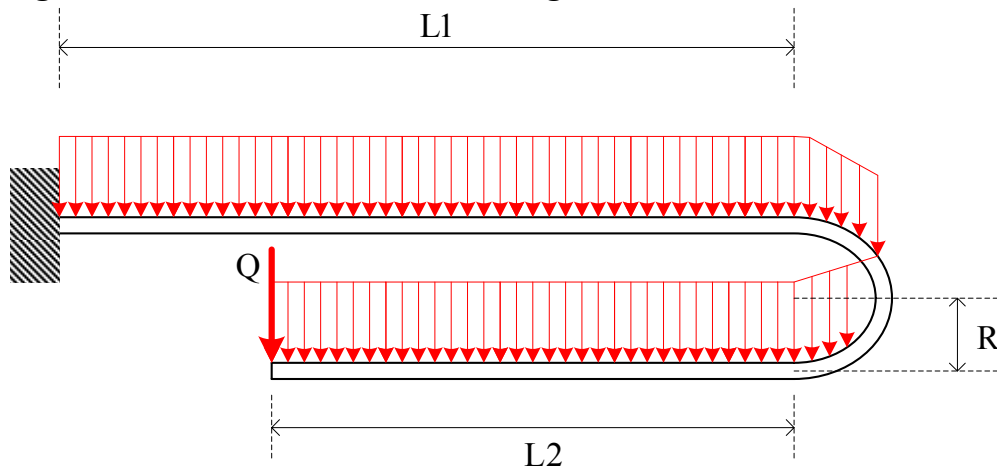
6.5.2 Funciones Incógnitas. Son variables dependientes de las coordenadas. El objetivo de una ecuación diferencial sobre un dominio, con condiciones de frontera determinadas es encontrar los valores de las funciones incógnitas para cada punto del dominio. En mecánica del medio continuo, específicamente en mecánica de sólidos, las funciones incógnitas son los desplazamientos u_x, u_y, u_z .

En el problema de flexión de la viga, es el desplazamiento vertical en un punto dado $u_x(x)$, que es función de la coordenada x .

6.5.3 Dimensión del problema. La dimensión queda determinada por el número de coordenadas que aparezcan en las ecuaciones del modelo. En este trabajo no se estudiarán los problemas dependientes del tiempo, por lo tanto solo se hablará de problemas 1-D, como es el caso de la flexión de la viga y problemas 2-D y 3-D, como los análisis de esfuerzo y deformación en tuberías que se ejemplificarán en este libro. Cuando en una ecuación diferencial aparece más de una coordenada, la ecuación se denomina ecuación diferencial parcial (EDP).

6.5.4 Datos del problema. Son cantidades que particularizan el fenómeno. En las ecuaciones diferenciales corresponden a coeficientes de las derivadas y a la función f que aparece en las ecuaciones. Estos datos pueden ser constantes o funciones de las coordenadas. Por ejemplo en la viga a flexión los datos determinantes en el comportamiento de la viga, son el módulo de Young, E , y el momento de inercia de la sección, I , y la fuerza distribuida por unidad de longitud, f .

Figura 73. Dominio unidimensional. Viga sometida a flexión



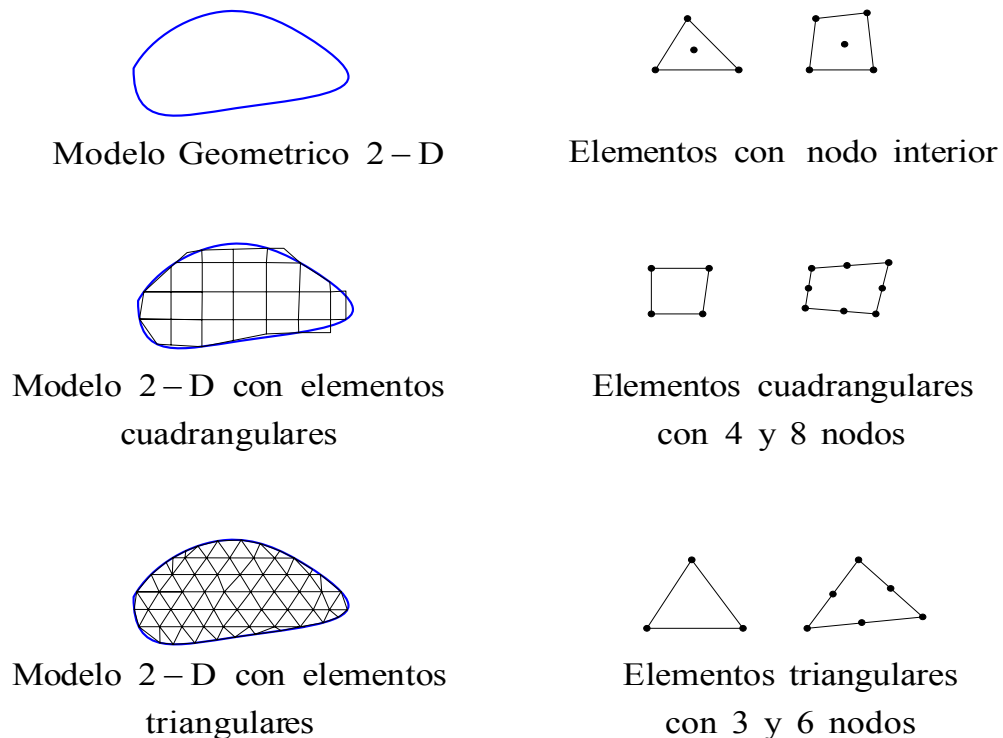
6.5.5 Dominio del problema. Espacio físico donde tiene ocurrencia el fenómeno. En realidad, todos los dominios son tridimensionales: un punto del dominio necesita tres coordenadas espaciales para quedar definido. Sin embargo, es posible que en la dirección de una de estas coordenadas el desenvolvimiento del fenómeno no tenga mayores variaciones, o que simplemente la región del espacio en esa dirección sea insignificante comparada con las otras dos dimensiones; en estos casos se hará abstracción de esa coordenada y tendremos la idealización de un dominio bidimensional que corresponde geoméricamente con una superficie plana o curva. Si son dos las coordenadas que es posible abstraerse analizara el dominio como unidimensional con representación geométrica de línea recta o curva. En la Figura 73, se presenta un dominio que aparentemente es bidimensional, pero que en realidad es unidimensional debido a que los tres tramos de la curva, dos segmentos de recta y un semicírculo, pueden ser representados, cualquiera de sus puntos por medio de una sola coordenada independiente.

6.5.6 Frontera del dominio. Entidad geométrica que sirve de interfase entre el dominio y el resto del universo de la misma dimensión. En problemas unidimensionales, el universo corresponde a una línea abierta de extensión infinita como una recta o una parábola o una curva cerrada, como una circunferencia o una elipse; el dominio es un segmento de línea, luego la frontera de este corresponde a los puntos que delimitan el segmento dentro de la línea total. En el problema de la viga la frontera no necesariamente tienen que ser los extremos de la línea, pueden ser también puntos donde se ubique cargas puntuales o apoyos. En dos dimensiones, el universo es una superficie abierta extendida al infinito como un paraboloides o un plano, o una superficie cerrada como una esfera; la frontera esta constituida por las líneas que limitan la superficie, es decir, su borde. En tres dimensiones, el universo es un cuerpo infinitamente extendido en toda

dirección y el dominio es un cuerpo de extensión finita y la interfaces es una superficie.

6.5.7 Elemento finito. *En el método de elementos finitos se aproxima el dominio geométrico continuo por una unión de subdominios mas simples, y a cada uno de estos se les denomina elemento finito⁶⁴.* En 3-D, los elementos finitos son poliedros de cualquier número de caras, aunque en la práctica solo se acostumbra a usar hexaedros, pentaedros y tetraedros. En 2-D son polígonos convexos de cualquier numero de lados aunque por simplicidad casi siempre se usan triángulos y cuadriláteros ya sean planos o curvos (ver Figura 74, 75, 76). En 1-D, los elementos finitos siempre son segmentos de línea.

Figura 74. Diferentes tipos de elementos en 2-D

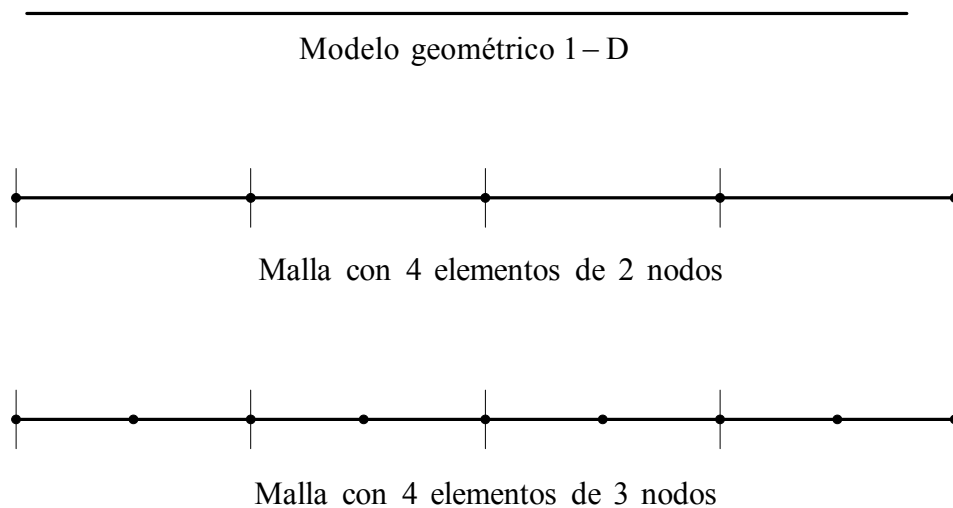


⁶⁴ ZIENCKIEWICK, O. C. El Método de los Elementos Finitos. Buenos Aires, Argentina, Editorial Reverte, 1980.

6.5.8 Nudo. Puntos donde se va a encontrar la solución del problema para después extenderla al resto del dominio interpolando dicha solución. Puede estar en los vértices o dentro del elemento (ver Figura 74, 75, 76).

6.5.9 Variables primarias. *Variables necesarias para describir completamente el estado de un punto del dominio*⁶⁵. Para el caso de flexión de una viga, el estado de un punto de la viga queda determinado por la magnitud de la deflexión vertical (w) y la magnitud de la pendiente de la curva que forma la viga deflectada (θ).

Figura 75. Modelo geométrico y malla de elementos finitos 1-D



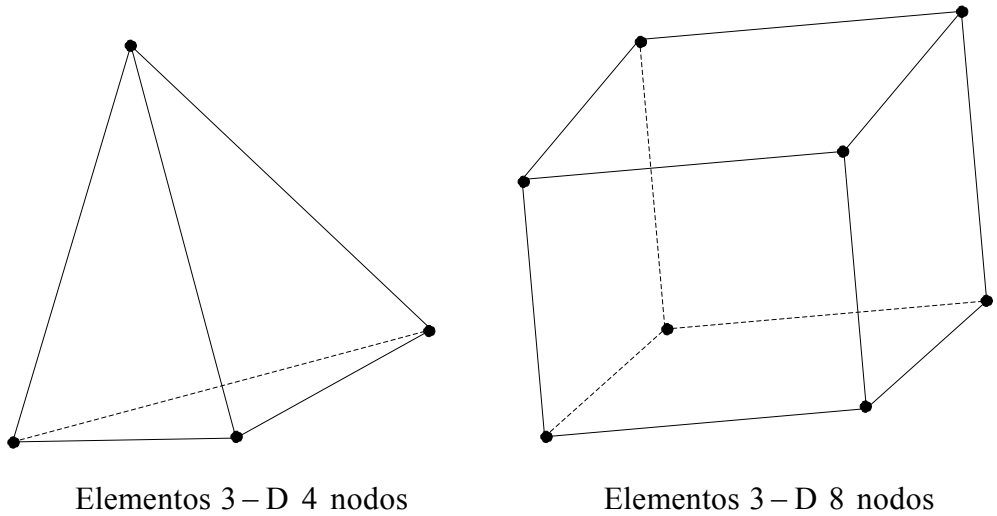
6.5.10 Variables secundarias. Variables derivadas de las primarias, en la flexión de la viga, las variables secundarias son el momento (M) y la fuerza cortante (V).

⁶⁵ Department of Aerospace Engineering Sciences, AFEM; Advanced Finite Element Methods, University of Colorado at Boulder, 1990

6.5.11 Grados de libertad.

- **De un nodo:** número de variables primarias del problema. Determinan el sistema completamente. En el problema de la flexión de la viga cada nodo tiene dos grados de libertad. El problema general de elasticidad, en tres dimensiones cada nodo tiene seis grados de libertad, los desplazamientos en las direcciones x, y, z y las rotaciones alrededor de los ejes en estas direcciones.

Figura 76. Tipos de elementos 3-D



- **De la malla de elementos finitos:** es el número de grados de libertad de un nodo, multiplicado por el número de nodos de la malla, o mejor la suma de grados de libertad del sistema, pues existen problemas en los cuales se presentan diferentes clases de nodos, cada clase con un determinado número de grados de libertad.

6.5.12 Funciones de interpolación. *Funciones para extender, al resto del dominio, la solución obtenida para los nodos⁶⁶.* En elementos finitos se utilizan polinomios; el grado mínimo de estos que se pueden utilizar en un problema dado esta definido por el número de grados de libertad y de nodos de un elemento. Este concepto, así como los de variable primaria y secundaria ahora pueden parecer confusos, pero se aclaran mejor en los próximos apartados cuando se profundice en la mecánica del método.

6.5.13 Funciones de prueba. *Son funciones usadas en los métodos variacionales, como auxiliares para transformar la ecuación diferencial, a su forma variacional⁶⁷, que es una ecuación en donde el orden de las derivadas de la variable principal se reduce a la mitad, y las funciones de prueba también llamadas, (según el método variacional usado), de ponderación o de peso, aparecen derivadas la mismo orden que el que ahora tiene la variable principal. Es decir que el orden total de la ecuación diferencial inicial, es compartido mitad y mitad, en la forma variacional de la ecuación diferencial, entre la función de prueba y la variable principal.*

Como en algunos métodos variacionales, sobre todo en los más usados, pueden llegar a elegirse las funciones de interpolación exactamente iguales a las funciones de prueba, pueden llegar a confundirse estos conceptos, por eso se aclara que en muchos problemas las funciones de interpolación son diferentes de las de prueba.

6.5.14 Condiciones de frontera. Para que un problema pueda ser resuelto es necesario conocer en cada punto de de la frontera, los valores de las variables primarias y/o secundarias. Generalmente la frontera esta dividida en secciones, en cada una de las cuales son conocidos algunos de los valores de las variables.

⁶⁶ Department of Aerospace Engineering Sciences, Op. cit., p 38.

En el problema de la viga las condiciones de frontera son determinadas por el tipo de apoyo y de carga a que este sometida la viga.

- **Los desplazamientos** w , conocidos en ciertos puntos; por ejemplo en empotramientos, articulaciones y apoyos simples, w vale cero.
- **Pendientes** $\theta = \frac{\partial w}{\partial x}$ conocidas; en empotramientos la curva de la deflexión en el punto de empotramiento, conserva el valor de antes de la deformación.
- **Momentos** $M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ conocidos; en los extremos libres el momento vale cero, al igual que en los punto de apoyo de rótula.
- **Fuerzas cortantes** $V = EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$; en los extremos libres la fuerza cortante vale cero.

6.5.15 Condiciones de frontera esenciales (Condiciones de contorno en desplazamientos)⁶⁸. Las condiciones de frontera esenciales corresponden a los datos conocidos de antemano sobre las variables primarias. Por ejemplo, en el problema de la viga en flexión, el valor del desplazamiento o de la pendiente en un punto, constituyen las condiciones de frontera esenciales. Sin embargo este concepto tiene una rigurosa definición matemática, cuya aplicación en algunos casos, muy pocos en realidad no coincide con la definición que para términos prácticos se acaba de presentar.

⁶⁷ Ibid., p 41

⁶⁸ CHANDRUPPATLA, Op. cit. , p. 3

6.5.16 Condiciones de frontera natural (Condiciones de contorno en tensiones). De la misma manera que para las condiciones de frontera esenciales, existe una definición rigurosa, desprendida de la formulación variacional de una ecuación diferencial. Para términos prácticos en la mayoría de los casos las condiciones de frontera naturales son los valores de las variables secundarias conocidas de antemano. En el problema de la viga, cualquier momento o fuerza concentrada en un punto constituyen condiciones de frontera naturales.

6.5.17 Combinación lineal. Este es un concepto del Algebra lineal. Debido a la frecuencia con que va aparecer en los siguientes capítulos, es oportuno hacer un comentario sobre él en este lugar. El concepto tiene aplicación para todo tipo de objetos matemáticos pero ahora nos interesa su aplica a funciones. Se dice que una función f es combinación lineal de otras dos, g y h , si es posible encontrar números escalares, k_1 y k_2 que para los límites de esta tesis equivale a decir dos números reales, que permitan expresarla de la siguiente manera:

$$f = k_1g + k_2h \quad (6.2)$$

- La función $f(x) = 4x + 2$ es combinación lineal de las funciones $g(x) = x$ y $h(x) = 1$.
- $f(x) = 3\text{sen}(x) + 2\text{cos}(x)$ es combinación lineal de las funciones $g(x) = \text{sen}(x)$ y $h(x) = \text{cos}(x)$.

6.6 PASOS EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA CON ELEMENTOS FINITOS

En general la mayoría de los autores consultados, consideran que le método de los elementos finitos aplicado a problemas del continuo esta compuesto de los

siguientes seis pasos, a saber: Discretización del dominio, derivación de las ecuaciones del elemento, planteamiento del sistema de ecuaciones, imposición de las condiciones de frontera, solución de las ecuaciones y postproceso de solución.

6.6.1 Discretización del dominio. *Es el proceso de transformar el dominio geométrico continuo en una malla de elementos finitos.* Aquí debe determinarse el tipo de elemento⁶⁹, la forma y el tamaño (no deben ser necesariamente del mismo tamaño y forma). En este paso se determinan las propiedades de cada elemento a partir de la geometría del problema, de los datos de carga y naturaleza del material. Se realiza además una numeración de la malla, teniendo en cuenta, que cada elemento de la malla tiene un número de identificación y cada nodo una numeración local dentro del elemento y una numeración global dentro de la malla de elementos finitos.

En cuanto a la selección de la forma de los elementos, los criterios primarios con los que se debe hacer este enmallado tienen que ver con minimizar el error de discretización, es decir, que se minimice la región del dominio que quede por fuera de la malla de elementos finitos y el tiempo de computador necesario para encontrar la solución al problema; esto, debido a que entre mas fina sea la malla, mas exactos serán los resultados pero mayor será el tiempo de computación.

En cada problema hay un tamaño de elemento óptimo a partir del cual los niveles de exactitud prácticamente no varían, por lo tanto, representa perdida de tiempo computacional intentar una malla mas fina. Los programas de computador que trabajan con elementos finitos, disponibles comercialmente, presentan opciones para discretizar automáticamente (generación automática de mallas), los cuales utilizan algoritmos de geometría computacional. Estos permiten al programador realizar rápida y eficazmente un proceso que de otra manera resultaría lento y

⁶⁹ CHANDRUPPATLA, Op. cit., p.47.

engorroso en dominios complejos, como son los dominios en problemas de ingeniería.

6.6.2 Derivación de las ecuaciones para un elemento de la malla⁷⁰. Una vez construida la malla de elementos finitos se procede a aplicar, a cada elemento, las ecuaciones diferenciales y las condiciones de frontera del problema. Sobre cada uno de los elementos se aplica la formulación integral representante del problema (esta formulación puede ser un correspondiente principio variacional, una expresión energética o una expresión integral de ponderación), para ello el método de los elementos finitos considera que las variables dependientes pueden ser escritas como función lineal de variable de funciones de aproximación (Ver Anexo A) tales como funciones logarítmicas, trigonométricas, exponenciales o polinómicas, estas últimas son las funciones más empleadas dadas las propiedades de continuidad y facilidad del tratamiento para diversas operaciones que exige el método; de esta manera la solución real $\phi(x, y, z)$ es supuesta mediante una solución aproximada $\hat{\phi}(x, y, z)$, es decir $\hat{\phi}$ es la aproximación de la variable dependiente en cualquier punto del elemento y por ende del dominio.

Para ejemplificar como se puede abordar este paso desde el punto de vista de formulación de un método variacional se utilizara una breve descripción del método de Ritz por estar intuitivamente más cerca a las ideas con las que trabaja el ingeniero.

Este método se apoya filosóficamente en la tendencia que tiene los sistemas en la naturaleza buscar los estados de equilibrio que corresponden a los de mínima energía. La ciencia ha obtenido un buen dominio del concepto de energía, lográndose que en un gran número de fenómenos exista la posibilidad de analizar cualitativa y cuantitativamente los estados y los cambios de energía.

⁷⁰ ZIENCKIEWICK, Op. cit., p 65.

El “funcional de energía” es un concepto teórico definido como la diferencia entre la energía potencial almacenada en el sistema y el trabajo hecho por todas las fuerzas que actúan sobre el sistema. El principio de la mínima acción postula que el estado de equilibrio de un sistema es aquel en el cual la primera variación del potencial de energía es con respecto al desplazamiento es igual o cero. Este concepto es análogo al de máximo o mínimo de una función en el cálculo diferencial se que se obtiene tomando la primera derivada de la función e igualándolo a cero. En el método de Ritz se construye el funcional de energía para un elemento y luego se toma la primera variación, que al ser igualada a cero se obtiene un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los valores de la solución del problema en los nodos del elemento.

Para la construcción del potencial de energía se introducen las funciones de interpolación (Ver Anexo B), las cuales permiten estimar el valor de la solución en un punto como el promedio ponderado de los valores de la solución en los nodos. Para el problema 1-D de la flexión de una viga los polinomios más simples o de más bajo grado que se pueden utilizar son polinomios cúbicos:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 \\
 \psi_2 &= -x\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \\
 \psi_3 &= 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 \\
 \psi_4 &= -x\left[\left(\frac{x}{h}\right)^2 - \frac{x}{h}\right]
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Donde h es la longitud del elemento.

A cada elemento se le debe realizar el mismo proceso, de modo que al final de este paso se tengan tantos sistemas de ecuaciones como elementos haya en la malla. Normalmente en un problema resuelto, la discretización puede llegar hasta

cientos y aun miles de elementos. En la flexión de una viga, un sistema típico para un elemento con dos nodos es:

$$\frac{2EI}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

6.6.3 Ensamble de las ecuaciones de elemento. El siguiente paso en el proceso consiste en ensamblar en un solo sistema los pequeños sistemas obtenidos anteriormente. Como el dominio geométrico del elemento es continuo, entonces el modelo de elementos finitos debe cumplir condiciones de continuidad en las fronteras entre elementos. La aplicación de esta idea permite reducir el número de incógnitas a resolver, consiguiendo ensamblar una gran ecuación matricial cuya dimensión es igual al número de incógnitas a resolver, consiguiendo ensamblar una gran ecuación matricial cuya dimensión es igual al número de nodos de la malla por el número de grados de libertad de cada nodo.

Para el problema de la viga, usando elementos de dos nodos, en la malla de 100 elementos habrá 101 nodos y como existen dos grados de libertad por cada nodo la dimensión de la matriz será de 202×202 .

6.6.4 Imposición de las condiciones de frontera. El sistema de ecuaciones ensamblado es singular, de ahí que para obtener una única solución se deben establecer las condiciones de frontera del problema, estas nos dan de antemano los valores de las variables primarias y/o de las variables secundarias en los nodos de la frontera. En el ejemplo que se viene analizando, los valores de w son conocidos en los nodos correspondientes a $x = 0$ y $x = L$; esto constituye una reducción de 4 filas y 4 columnas del sistema ensamblado.

Los programas de elementos finitos usan un algoritmo que permite reducir el tamaño de la ecuación matricial al eliminar los datos conocidos del vector columna de incógnitas. Dependiendo de lo extenso de la frontera y de la información que se tenga de ella es posible reducir, en este paso, la dimensión de la ecuación matricial hasta más de la mitad.

6.6.5 Solución de las ecuaciones. A continuación se debe resolver el sistema matricial de ecuaciones ya reducido. Los algoritmos computacionales en elementos finitos logran aumentar la eficiencia de este proceso, utilizando las propiedades de estas matrices, las cuales siempre son simétricas y bandedas. Esta última propiedad se refiere a que solamente una banda diagonal de la matriz tiene cifras distintas de cero.

6.6.6 Postproceso de solución. Se calculan los valores de las variables secundarias; se interpolan los valores de la propiedad sobre puntos interesantes que no coincidan con los nodos; se grafican y analizan los resultados. Para la viga, el postproceso consiste en calcular el momento y la fuerza cortante en cada elemento, construir los diagramas de momento y cortante, las curvas elásticas, y determinar los puntos con niveles de esfuerzos críticos.

A continuación se presenta una manera matemática de ver el proceso:

La ecuación diferencial valida en un dominio Ω es:

$$A(\phi) - f = 0$$

Donde A es el operador diferencial, ϕ es la variable dependiente y f contiene los términos independientes. De acuerdo al procedimiento descrito, el dominio Ω es subdividido en elementos, en los cuales se aplica la formulación integral haciendo uso de, por ejemplo, los residuos ponderados (método de Galerkin), donde la variable ϕ es aproximada mediante una función $\hat{\phi}$,

$$\phi \cong \hat{\phi} = \sum_{i=1}^m \psi_i(x, y) \phi_i$$

Donde ψ_i son funciones conocidas que tienen por objeto aproximar la variable dependiente a todo el dominio, con base en un número finito de puntos, m es el número de grados de libertad del elemento y ϕ_i son los valores de la variable desconocida en unos puntos determinados (nodos). Dada la aproximación se genera un residuo $R(\hat{\phi})$,

$$A(\hat{\phi}) - f = R(\hat{\phi}) \neq 0$$

El cual es ponderado para todo el dominio mediante una función W , de allí se constituye la formulación integral para un elemento.

$$\int_{\Omega^e} W [A(\hat{\phi}) - f] d\Omega \cong 0$$

La función que multiplica los integrandos es conocida como “función de prueba o función de peso”. En el método de Galerkin se escogen funciones de prueba W_i iguales a las funciones ψ_i involucradas en la aproximación propuesta. Como resultado de este proceso se obtiene un sistema de m ecuaciones lineales con m incógnitas, el cual lo podemos representar como sigue:

$$[K]^{(e)} \{\phi\}^{(e)} = \{F\}^{(e)}$$

Donde $[K]^{(e)}$ representa la matriz de rigidez del elemento, $\{\phi\}^{(e)}$ es el vector de variables desconocidas y $\{F\}^{(e)}$ el vector de fuerzas nodales.

En el paso anterior, para un solo elemento se obtuvo un sistema $m \times m$. Si la malla de elementos finitos tiene E elementos, habrá E sistemas de $m \times m$. Sumando los sistemas de ecuaciones para E elementos y tomando una numeración única para los nodos, se obtiene el sistema de ecuaciones ensamblado $n \times n$, donde n es el número total de grados de libertad en la malla, es decir:

$$[K] = \sum_{e=1}^E [K]^{(e)} \quad ; \quad [F] = \sum_{e=1}^E [F]^{(e)}$$

Donde:

$$[K]\{\Phi\} = \{F\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se hallan los valores de la variable dependiente en los puntos nodales definido de la malla.

6.7 FORMULACIÓN PARA PROBLEMAS UNIDIMENSIONALES⁷¹

A continuación se ilustrara la mecánica del método de elementos finitos mediante dos ejemplos, explícitamente explicados. El primero es un problema cuya ecuación diferencial de segundo orden, mientras que el segundo ejemplo muestra una ecuación diferencial de cuarto orden, ambos unidimensionales, es decir que en las ecuaciones aparece únicamente una coordenada y el dominio puede ser representado por una línea.

6.7.1 Elementos finitos para ecuaciones de segundo orden unidimensionales. Considere el problema de encontrar la función $u(x)$ que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx} \left[a \frac{du}{dx} \right] + f = 0; \quad 0 < L > x \quad (6.5 a)$$

Y las condiciones de frontera

$$u|_{x=0} = 0; \quad a \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = P \quad (6.5 b)$$

Donde $a = a(x)$, $f = f(x)$, y P son los datos del problema. De acuerdo al significado de los datos del problema, esta ecuación podría representar la deformación axial de una barra sometida a cargas de tensión o compresión,

ejemplo que se supondrá para ilustrar el modelo matemático anterior, donde P corresponde a una fuerza axial de tensión a la cual esta sometida la barra, y f es una fuerza axial distribuida que podría representar el peso de la barra, si esta en posición vertical, o una fuerzas de rozamiento sobre la superficie.

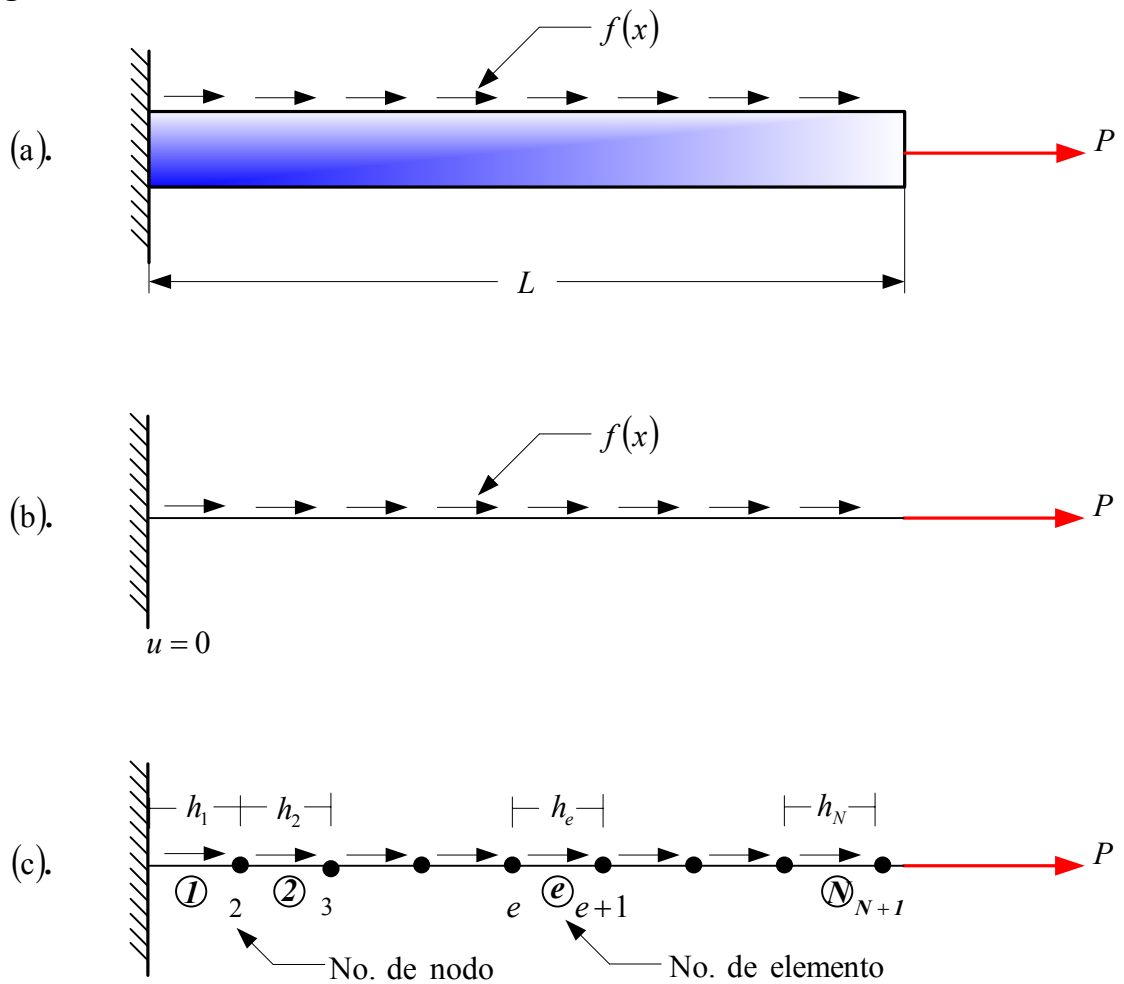
- **Discretización del dominio en elementos.** El dominio continuo $\Omega \equiv (0, L)$ del problema, se divide en segmentos de línea, llamados los **elementos finitos** del problema. El modelo final resultante consta de N elementos y $N + 1$ nodos como se muestra en la Figura 77. En el modelo de los elementos finitos cada electo se conecta a dos nodos. El número de elementos usados en un problema depende principalmente del tipo de elemento usado (con 2,3 o mas nodos), de la exactitud deseada y de la herramienta computacional disponible. Al aumentar el número de elementos es posible obtener un grado de exactitud mayor en la solución, sin embargo para no incurrir en considerables perdidas de tiempo de computo se sugiere investigar la convergencia de la solución con el refinamiento de la malla, pues en casi la totalidad de los casos hay una cantidad determinada de elementos que proporcionan la solución mas exacta y prácticamente inmejorable.

Una practica numeración de elementos y nodos en un modelo de elementos finitos facilitan el desarrollo del método. En este texto se utilizara la nomenclatura comúnmente usada que corresponde a números encerrados por círculos para los elementos para diferenciarlos de los números de los nodos. En un problema unidimensional se permite que cada nodo se desplace solo en la dirección $\pm x$.

Así cada nodo tiene solo un grado de libertad. Cada elemento tiene dos nodos; por lo tanto, la información sobre la **conectividad de los elementos** puede representarse convenientemente como lo muestra la Figura 78 en la tabla de conectividad. En esta tabla los encabezados 1 y 2 representan los *números*

⁷¹ CHANDRUPPATLA, Op. cit., p. 48..

Figura 77. Discretización del dominio en elementos



locales que simplemente representan, respectivamente el nodo inicial y final de cada elemento, y los números que representan los nodos sobre el modelo general se llaman *números globales*. La conectividad es así la correspondencia local-global, es decir a un elemento (e) le corresponden los nodos e y $e+1$ (números globales) donde al nodo e le corresponde el número local 1 (nodo inicial del elemento) y al nodo $e+1$ le corresponde el número local 2.

Los conceptos de grado de libertad y conectividad, son clave en el método de los elementos finitos y deben entenderse con toda claridad.

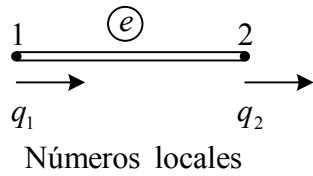
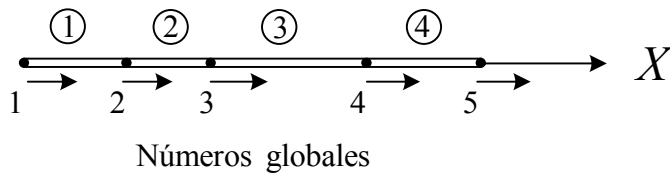
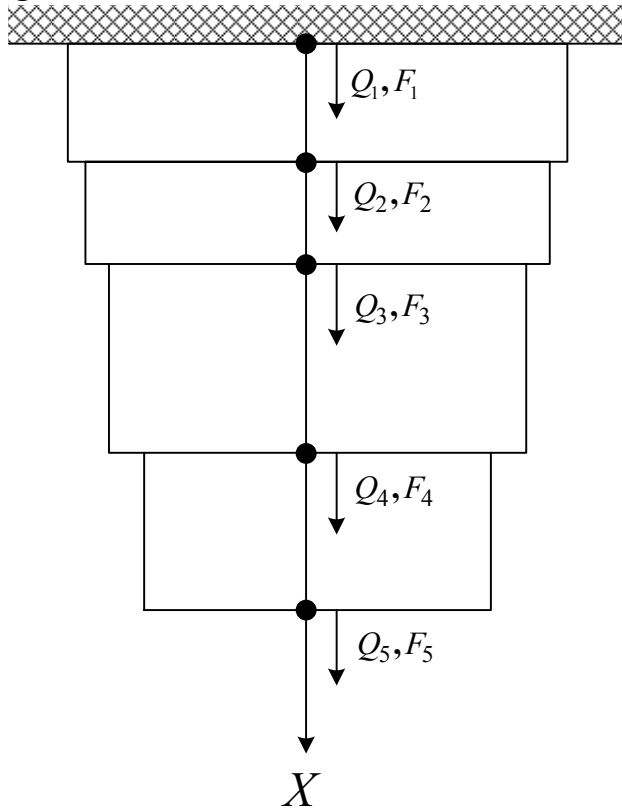
- **Derivación de las ecuaciones del elemento**⁷². Un elemento típico $\Omega^e = (x_A, x_B)$ es decir un segmento determinado por las coordenadas x_A y x_B es aislado de la malla, supóngase que este es el elemento e -ésimo. Se aplica la ecuación dada sobre el elemento, usando cualquiera de los métodos variacionales, descritos en el Anexo C. Las ecuaciones resultantes de este proceso son ecuaciones lineales que relacionan las *variables primarias*, es decir las variables relacionadas con las *condiciones de frontera esenciales*, con las *variables secundarias*, que están vinculadas a las *condiciones de frontera naturales*. Para la solución del problema es posible emplear como referencia sistemas de coordenadas globales que toman por origen el punto de coordenada cero del dominio, o sistemas de coordenadas locales que toman como origen el nodo al que le corresponde el número local 1, es decir el nodo inicial del elemento, en este último caso las ecuaciones del elemento, tienen por lo general una forma más sencilla y mucho más manejable, primeramente se presentarán las expresiones en coordenadas globales, para después pasar a coordenadas locales y no usar las primeras sino cuando sea rigurosamente necesario o a lo sumo conveniente.

Las coordenadas locales se nombrarán con una rayita sobre el valor de la coordenada.

Los tres pasos que continuación se muestran describen la formulación de los elementos finitos de la ecuación sobre el elemento típico.

⁷² Department of Aerospace Engineering Sciences, AFEM; Advanced Finite Element Methods, University of Colorado at Boulder, 1990

Figura 78. Conectividad de los elementos



Elementos	Nodos	
e	1	2
①	1	2
②	2	3
③	3	4
④	5	6

- **Formulación variacional de la ecuación diferencial sobre un elemento.**
Como se menciona anteriormente, la forma variacional de una ecuación diferencial se construye, multiplicando todos los términos de la ecuación, por una *función de prueba, de peso o ponderación*, W , e integrando sobre el dominio

$$\int_{x_A}^{x_B} W \left\{ \frac{d}{dx} \left[a \frac{du}{dx} \right] + f \right\} dx = 0 \quad (6.6)$$

Integrando por partes

$$\int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{dW}{dx} \frac{du}{dx} - Wf \right] dx + \left[W \left(-a \frac{du}{dx} \right) \right]_{x_A}^{x_B} = 0 \quad (6.7)$$

Los datos conocidos de antemano para la variable principal, u , sobre la frontera, $(x = x_A \text{ y } x = x_B)$, constituyen las condiciones de frontera esenciales del problema.

Los datos conocidos de antemano para la variable secundaria, $(a \, du/dx)$, sobre la frontera, $(x = x_A \text{ y } x = x_B)$, constituyen las condiciones de frontera naturales del problema.

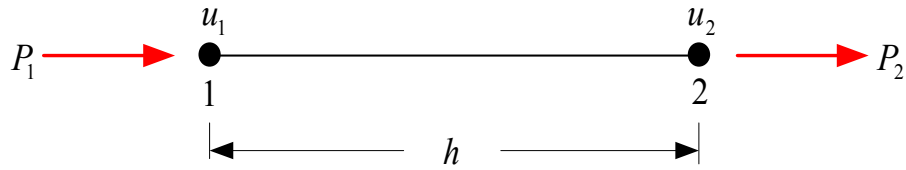
Las incógnitas en los nodos del elemento son la variable principal u , y la variable secundaria $(a \, du/dx)$:

$$u(x_A) \equiv u_1^{(e)} \quad u(x_B) \equiv u_2^{(e)} \quad (6.8)$$

$$\left(-a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_A} \equiv P_1^{(e)} \quad \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_B} \equiv P_2^{(e)}$$

Donde $u_1^{(e)}, u_2^{(e)}$ y $P_1^{(e)}, P_2^{(e)}$ representan los desplazamientos y los esfuerzos nodales en el elemento típico e -ésimo (ver Figura 79).

Figura 79. Desplazamientos y fuerzas nodales para el elemento axial



Reemplazando (6.7) en (6.6), se tiene:

$$\int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{dW}{dx} \frac{du}{dx} - Wf \right] dx - P_1^{(e)} W(x_A) - P_2^{(e)} W(x_B) = 0 \quad (6.9)$$

$$\int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{dW}{dx} \frac{du}{dx} \right] dx = P_1^{(e)} W(x_A) + P_2^{(e)} W(x_B) + \int_{x_A}^{x_B} Wf dx$$

Que es la forma variacional buscada.

- **Aproximación variacional de la ecuación sobre un elemento.** El siguiente paso en el proceso consiste en suponer que la solución de la ecuación, $u_e(x)$, es de la forma:

$$u_e(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(e)} \psi_j^{(e)}(x) \quad (6.10)$$

Donde las constantes $\alpha_j^{(e)}$ son las incógnitas a determinar, y las funciones $\psi_j^{(e)}$ son seleccionadas o construidas por quien resuelve el problema. En el método de Galerkin, las funciones de ponderación o de peso W se escogen iguales a $\psi_j^{(e)}$. Esta es una de las razones que han popularizado el método de Galerkin, ya que en otros métodos de residuos ponderados, las funciones de prueba W se escogen diferentes de las funciones de interpolación, alargando y complicando el proceso, aunque en algunas situaciones, mejorando la aproximación.

Reemplazando $u_e(x)$ y $W(x)$ en la ecuación (6.8):

$$\int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_i^{(e)}}{dx} \frac{d}{dx} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^{(e)} \psi_j^{(e)}(x) \right) \right] dx = P_1^{(e)} \psi_i^{(e)}(x_A) + P_2^{(e)} \psi_i^{(e)}(x_B) + \int_{x_A}^{x_B} \psi_i^{(e)} f dx \quad (6.10)$$

Es significativo observar aquí la presencia de 2 índices, i y j , que varían entre 1 y n . Su presencia significa que la ecuación anterior en realidad es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. El índice j , recorre las incógnitas en cada ecuación; mientras que el índice i , recorre las ecuaciones, esto se vera más claro en cuanto se avance en el desarrollo del ejemplo. La ecuación (6.10) se puede escribir como sigue:

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_{x_A}^{x_B} a \frac{d\psi_i^{(e)}}{dx} \frac{d\psi_j^{(e)}}{dx} dx \right) \alpha_j = P_1^{(e)} \psi_i^{(e)}(x_A) + P_2^{(e)} \psi_i^{(e)}(x_B) + \int_{x_A}^{x_B} \psi_i^{(e)} f dx \quad (6.12)$$

Que se puede reescribir más simplificada como:

$$\sum_{j=1}^n K_{ij}^{(e)} \alpha_j = F_{ij}^{(e)} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$K_{ij}^{(e)} = \sum_{j=1}^n \left(\int_{x_A}^{x_B} a \frac{d\psi_i^{(e)}}{dx} \frac{d\psi_j^{(e)}}{dx} dx \right) \quad (6.13)$$

$$F_{ij}^{(e)} = P_1^{(e)} \psi_i^{(e)}(x_A) + P_2^{(e)} \psi_i^{(e)}(x_B) + \int_{x_A}^{x_B} \psi_i^{(e)} f dx$$

En lenguaje de álgebra lineal esto se representa así:

$$[K^{(e)}] \{\alpha^{(e)}\} = \{F^{(e)}\} \quad (6.14)$$

- **Derivación de las funciones de aproximación para un elemento⁷³.** Las funciones de aproximación deben hacer, deben hacer a $u_e(x)$ **diferenciable**, al menos tanto como la derivada de mayor grado que aparezca en la forma variacional, en este ejemplo, una vez. Deben formar un conjunto **linealmente independiente** y **completo** y deben satisfacer las condiciones de **frontera**

⁷³ ZIENCKIEWICK, Op. cit., p 106.

esenciales. Todas estas condiciones pueden cumplirse si se escoge una solución de esta forma

$$u_e(x) = c_1 + c_2x = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 \quad (6.15)$$

$\phi_1 = 1$ y $\phi_2 = x$ son linealmente independientes, continuas sobre el intervalo del elemento y forman un conjunto completo, es decir, que cualquier polinomio de grado uno puede construirse como una combinación lineal de esas dos funciones.

Ahora u_e deben satisfacer las condiciones esenciales de frontera:

$$\begin{aligned} u_e(x) &\equiv u_1^{(e)} = c_1 + c_2x_e \\ u_{e+1}(x) &\equiv u_1^{(e)} = c_1 + c_2x_{e+1} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Que puede ser escrito en forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_e \\ 1 & x_{e+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (6.17)$$

Resolviendo para c_1 y c_2 en términos de $u_1^{(e)}$ y $u_2^{(e)}$, se tiene:

$$c_1 = \frac{u_1^{(e)}x_{e+1} - u_2^{(e)}x_e}{x_{e+1} - x_e} \quad c_2 = \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{x_{e+1} - x_e} \quad (6.18)$$

Con lo que la función solución aproximada, puede escribirse:

$$u_e(x) = \frac{u_1^{(e)}x_{e+1} - u_2^{(e)}x_e}{x_{e+1} - x_e} + \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{x_{e+1} - x_e} x \quad (6.19)$$

Que se puede reorganizar como:

$$\begin{aligned} u_e(x) &= \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e} u_1^{(e)} + \frac{x - x_e}{x_{e+1} - x_e} u_1^{(e)} \\ &= \sum_{j=1}^2 u_j^{(e)} \psi_j^{(e)} \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\psi_1^{(e)} = \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e} \quad \psi_2^{(e)} = \frac{x - x_e}{x_{e+1} - x_e} \quad x_e \leq x \leq x_{e+1}$$

Comparando la ecuación (6.20) con la ecuación (6.10) se ve que $\alpha_j^{(e)} = u_j^{(e)}$. Las funciones $\psi_j^{(e)}$ que se han encontrado una propiedad especial, $u(x) = u_1^{(e)}$ en el nodo 1 ($x_A = x_e$) y $u(x) = u_2^{(e)}$ en el nodo 2 ($x_B = x_{e+1}$). Es decir, interpolan la función $u(x)$ en el intervalo $x_e \leq x \leq x_{e+1}$, entre los valores $u_1^{(e)}$ y $u_2^{(e)}$, por eso son llamadas familia Lagrangiana de funciones de interpolación.

La familia Lagrangiana de funciones de interpolación, tiene las siguientes propiedades

$$1. \quad \psi_i^{(e)}(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad x_1 = x_e \quad x_2 = x_{e+1}$$

$$2. \quad \sum_{i=1}^2 \psi_i^{(e)}(x) = 1$$

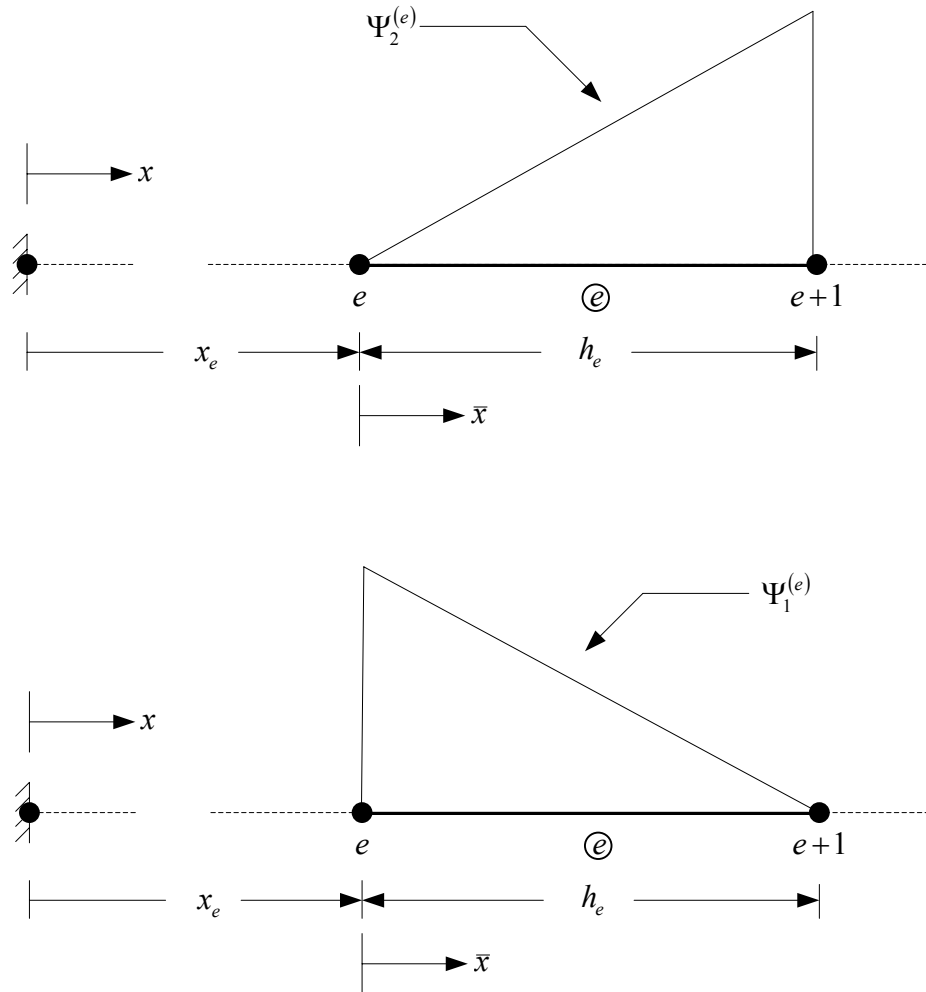
La propiedad número 1 indica que una de las funciones evaluada en un nodo da cero, y evaluada en el otro nudo da uno, mientras que a la otra le ocurre a la inversa, en el nudo en que la primera valía cero, esta vale uno, y en el nudo en que la otra valía uno, esta vale cero. Por fuera de los nodos, pero dentro del intervalo, estas funciones toman valores entre cero y uno. Por fuera del intervalo valen cero, como se muestra en la Figura 80.

La propiedad 2 significa que en cada punto del intervalo la suma de los valores que toman las dos funciones es siempre 1.

Para el ejemplo que estamos analizando cualquier pareja de polinomios, uno de orden cero y otro de orden uno, servirían como funciones de interpolación o aproximación obteniendo buenos resultados. Sin embargo, la importancia del uso de la familia Lagrangiana de funciones radica en la comodidad de trabajar con ellas que se desprende de las propiedades anteriormente enumeradas, en

espacial la propiedad de ser cero en un nodo y uno en el otro facilita en gran manera la realización de cálculos como evaluación de funciones e integrales.

Figura 80. Grafico de las funciones de interpolación para elementos 1-D



- **Funciones de aproximación para un elemento en coordenadas locales.**
Un sistema local de coordenadas (es decir un sistema de coordenadas del elemento) da una manera más cómoda de derivar las funciones de interpolación; \bar{x} , denota la coordenada local con respecto al nodo de número local 1, extremo izquierdo, del elemento. La formula que relaciona la coordenada local \bar{x} , con la coordenada global x , es:

$$x - x_e = \bar{x} \quad (6.21)$$

En el sistema de coordenadas locales, la función aproximada que satisface la ecuación diferencial toma la forma:

$$u(\bar{x}) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 \bar{x} \quad (6.22)$$

Las condiciones de frontera se vuelven:

$$\begin{aligned} u_1^{(e)} &\equiv u(0) = \hat{c}_1 \\ u_2^{(e)} &\equiv u(h_e) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 h_e \end{aligned} \quad (6.23)$$

Donde se puede obtener las funciones de aproximación en coordenadas locales, repitiendo el proceso que se siguió para su obtención en coordenadas globales:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & h_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{Bmatrix} \quad h_e = x_{e+1} - x_e \\ \hat{c}_1 &= u_1^{(e)} \quad \hat{c}_2 = \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{h_e} \end{aligned} \quad (6.24)$$

Y finalmente:

$$\begin{aligned} u_e &= \sum_{j=1}^2 u_j^{(e)} \psi_j^{(e)}(\bar{x}) \\ \psi_1^{(e)}(\bar{x}) &= 1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \quad \psi_2^{(e)}(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{h_e} \quad 0 \leq \bar{x} \leq h_e \end{aligned} \quad (6.25)$$

Una vez construidas las funciones de aproximación, el siguiente paso es la evaluación de las integrales de la ecuación (6.13) que se reduce, cambiando α_j por u_j , haciendo $n = 2$ y simplificando los términos de P_1 y P_2 con la evaluación de las funciones de aproximación que los acompañan, a:

$$\sum_{j=1}^2 \left(\int_{x_A}^{x_B} a \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx \right) u_j = P_i^{(e)} + \int_{x_A}^{x_B} \psi_i f dx \quad (6.26)$$

Lo cual se puede escribir matricialmente como

$$\begin{bmatrix} \int_{x_A}^{x_B} a \frac{d\psi_1}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} dx & \int_{x_A}^{x_B} a \frac{d\psi_1}{dx} \frac{d\psi_2}{dx} dx \\ \int_{x_A}^{x_B} a \frac{d\psi_2}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} dx & \int_{x_A}^{x_B} a \frac{d\psi_2}{dx} \frac{d\psi_2}{dx} dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^{(e)} + \int_{x_A}^{x_B} \psi_1 f dx \\ P_2^{(e)} + \int_{x_A}^{x_B} \psi_2 f dx \end{Bmatrix} \equiv [K^{(e)}] \{u^{(e)}\} = \{F^{(e)}\} \quad (6.27)$$

Después de calcular las integrales con las funciones de interpolación construidas aquí, tanto en coordenadas globales como locales, se obtienen los siguientes resultados

$$[K^{(e)}] = \frac{a_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \{F^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} P_1^{(e)} \\ P_2^{(e)} \end{Bmatrix} + \frac{f_e h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.28)$$

- **Ensamble de las ecuaciones del elemento** ⁷⁴. Al terminar el paso anterior por cada elemento de la malla habrá un sistema de ecuaciones como el descrito en la sección anterior. Es posible ensamblar en un solo sistema de ecuaciones, más fácil de manejar. Este procedimiento está basado en suposición inicial de continuidad real del dominio, y que debe conservar el modelo de elementos finitos, como igualdad entre variables de diferentes elementos en puntos sobre la frontera entre los elementos.

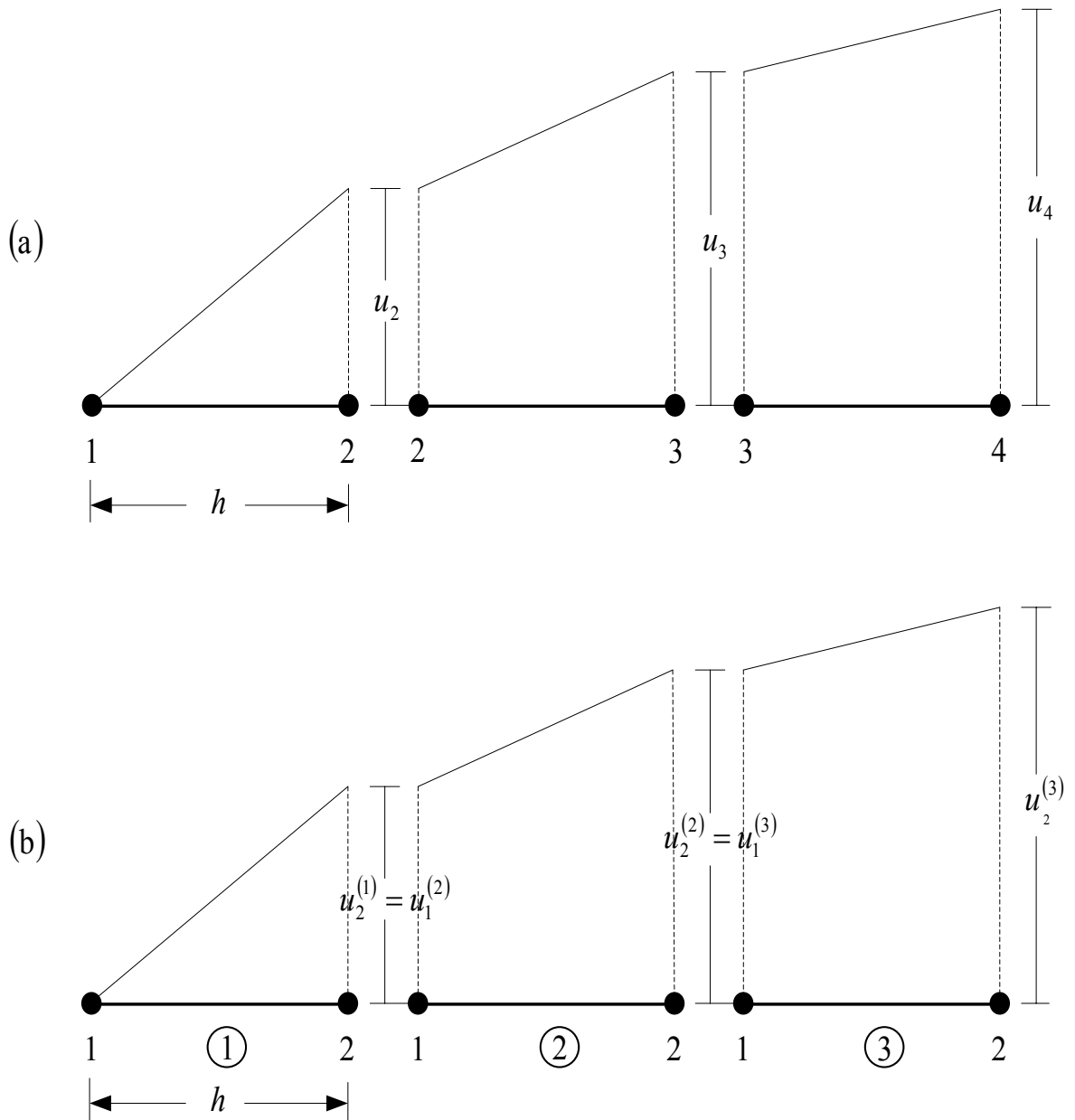
Para ilustrar la mecánica de este paso se dividirá el dominio del ejemplo en tres elementos de dos nodos cada uno.

Como puede verse en la Figura 81 existe la siguiente correspondencia entre los valores locales de la variable principal, y los valores globales

$$u_1^{(1)} = u_1 \quad u_2^{(1)} = u_2 = u_1^{(2)} \quad u_2^{(2)} = u_3 = u_1^{(3)} \quad u_2^{(3)} = u_4 \quad (6.29)$$

⁷⁴ ZIENCKIEWICK, Op. cit., p 128

Figura 81. Correspondencia entre los valores de la variable principal en los nodos. a). Notación global. b) Notación Local



De lo anterior podemos ver la importancia del concepto de conectividad dado anteriormente. Estas relaciones de conectividad pueden ser expresadas en un arreglo matricial llamado *matriz de conectividad booleana*, la cual es una matriz

cuyo número de filas es igual al número de elementos en la malla y cuyo número de columnas es igual al número de nodos en cada elemento. Para la malla en análisis la matriz de conectividad booleana es:

$$[B] = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

Esta matriz de conectividad es muy importante en la implementación de algoritmos computacional del método de elementos finitos, pues permite construir sistemáticamente la matriz ensamblada del sistema a partir de las matrices de cada elemento. Los números que forman la matriz de conectividad sirven para armar la diagonal de la matriz ensamblada.

En el presente problema, el primer valor de la diagonal de la matriz ensamblada corresponde al primer valor de la diagonal de la matriz del primer elemento, por que el número 1, tiene coordenadas (1,1); la primera coordenada indica el elemento y la segunda indica el orden en la diagonal de la matriz del elemento:

$$\begin{bmatrix} K_{1,1}^1 & & & \\ & K_{2,2}^1 + K_{1,1}^2 & & \\ & & K_{2,2}^2 + K_{1,1}^3 & \\ & & & K_{2,2}^3 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

El segundo valor de la diagonal de la matriz ensamblada corresponde a la suma de dos valores, porque el número 2 aparece 2 veces en la matriz de conectividad; las coordenadas de estos números 2, dan los valores de las diagonales de las matrices de elementos, que se unen para formar el elemento de la diagonal de la matriz ensamblada. En la matriz ensamblada el superíndice indicada el elemento del cual proviene una cantidad, y los subíndices, la posición que ocupaban en la diagonal de la matriz del elemento.

Los valores fuera de la diagonal se completan por correspondencia entre los índices de la diagonal; por ejemplo, el elemento (1,2) de la matriz ensamblada corresponde a $K_{1,2}^1$ por que en al primera fila de la matriz ensamblada figura un número de superficies 1, y en la segunda columna también, los subíndices corresponden a la fila y a la columna también, los subíndices coincidentes entre los elementos de la diagonal de la misma fila y la misma columna, se coloca cero.

$$\begin{bmatrix} K_{1,1}^1 & K_{1,2}^1 & 0 & 0 \\ & K_{2,2}^1 + K_{1,1}^2 & K_{1,2}^2 & 0 \\ & & K_{2,2}^2 + K_{1,1}^3 & K_{1,2}^3 \\ & & & K_{2,2}^3 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

En los elementos finitos todas las matrices son simétricas, es decir a ambos lados de la diagonal aparecen los mismos valores, resto de la matriz, se construye haciendo uso de esta propiedad

$$\begin{bmatrix} K_{1,1}^1 & K_{1,2}^1 & 0 & 0 \\ K_{2,1}^1 & K_{2,2}^1 + K_{1,1}^2 & K_{1,2}^2 & 0 \\ 0 & K_{2,1}^2 & K_{2,2}^2 + K_{1,1}^3 & K_{1,2}^3 \\ 0 & 0 & K_{2,1}^3 & K_{2,2}^3 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Otra forma de obtener la matriz ensamblada es por medio de la suma de matrices; el sistema de ecuaciones del primer elemento escrito en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} K_{1,1}^1 & K_{1,2}^1 \\ K_{2,1}^1 & K_{2,2}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \end{Bmatrix} \quad (6.34)$$

Que también se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} K_{1,1}^1 & K_{1,2}^1 & 0 & 0 \\ K_{2,1}^1 & K_{2,2}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ó} \quad \frac{a_1}{h_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{f_1 h_1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.35)$$

De la misma forma se puede expresar los sistemas de ecuaciones del segundo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{1,1}^2 & K_{1,2}^2 & 0 \\ 0 & K_{2,1}^2 & K_{2,2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ó} \quad \frac{a_2}{h_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{f_2 h_2}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ P_1^2 \\ P_2^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.36)$$

Y del tercer termino:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{1,1}^2 & K_{1,2}^2 \\ 0 & 0 & K_{2,1}^2 & K_{2,2}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ó} \quad \frac{a_2}{h_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{f_3 h_3}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1^3 \\ P_2^3 \end{Bmatrix} \quad (6.37)$$

Ahora sumando las ecuaciones (6.34), (6.35) y (6.36) se obtiene la ecuación matricial del sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{a_1}{h_1} & -\frac{a_1}{h_1} & 0 & 0 \\ -\frac{a_1}{h_1} & \frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{h_2} & -\frac{a_2}{h_2} & 0 \\ 0 & -\frac{a_2}{h_2} & \frac{a_2}{h_2} + \frac{a_3}{h_3} & -\frac{a_3}{h_3} \\ 0 & 0 & -\frac{a_3}{h_3} & \frac{a_3}{h_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} f_1 h_1 \\ f_1 h_1 + f_2 h_2 \\ f_2 h_2 + f_3 h_3 \\ f_3 h_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^2 \\ P_1^2 + P_2^1 \\ P_2^2 + P_1^3 \\ P_2^3 \end{Bmatrix} \quad (6.38)$$

- **Imposición de las condiciones de frontera.** El sistema matricial obtenido, tiene una dimensión igual al número de nodos en la malla. Sin embargo algunos de los valores de las variables de los nodos, que aparecen en este sistema como incógnitas, son conocidos de antemano como parte de las condiciones de frontera; gracias a este hecho es posible reducir la dimensión del sistema de ecuaciones. La ecuación matricial obtenida hasta ahora es valida para cualquier problema descrito por la ecuación diferencial de la que se partió; lo que singulariza un problema específico son las condiciones de frontera.

Las condiciones de naturales de frontera están incluidas en el vector columna $\{F^{(e)}\}$ a través de $P_j^{(e)}$. En todos los nodos interiores de malla, (nodos que no forman parte de la frontera del dominio), la suma de las contribuciones de las condiciones de frontera natural del nodo 2 del elemento e y el nodo 1 del elemento $e+1$ debe ser igual al valor dado de la variable secundaria ($a du/dx$) en el nodo en cuestión $P_2^{(e)} + P_1^{(e)} = \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=x_{e+1}}$ valor de la fuerza aplicada externamente.

Como en el presente problema no hay cargas concentradas aplicadas en los nodos 2 y 3, $P_2^1 + P_1^2 = 0$ y $P_2^2 + P_1^3 = 0$. Este resultado puede ser interpolado como la suma de las fuerzas internas en la sección de la barra a tensión, la cual es cero, a menos que haya una fuerza externa aplicada en la sección.

En el nodo 1, parece una reacción, que es desconocida, y que continuara siendo incógnita del problema hasta la ultima fase de solución; en el nodo 4 hay aplicada una fuerza externa concentrada en ese nodo de valor P . Las condiciones de frontera esenciales, son más sencillas de aplicar, solo basta reemplazar el valor conocido por la respectiva incógnita del sistema de ecuaciones; en este problema el único valor nodal de variable principal conocido es u_1 . El sistema de ecuaciones, después de aplicadas las condiciones de frontera se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \frac{a_1}{h_1} & -\frac{a_1}{h_1} & 0 & 0 \\ -\frac{a_1}{h_1} & \frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{h_2} & -\frac{a_2}{h_2} & 0 \\ 0 & -\frac{a_2}{h_2} & \frac{a_2}{h_2} + \frac{a_3}{h_3} & -\frac{a_3}{h_3} \\ 0 & 0 & -\frac{a_3}{h_3} & \frac{a_3}{h_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} f_1 h_1 \\ f_1 h_1 + f_2 h_2 \\ f_2 h_2 + f_3 h_3 \\ f_3 h_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^2 \\ 0 \\ 0 \\ P_2^3 \end{Bmatrix} \quad (6.39)$$

• **Solución del sistema de ecuaciones.** A continuación debe resolverse el sistema de ecuaciones resultante. Para este proceso puede ser utilizado un algoritmo tradicional como *Gauss-Jordan*, pero es posible simplificar los cálculos basándose en el hecho de que las matrices que resultan son *bandedas* y *simétricas* y que además algunas de las “incógnitas” son conocidas de antemano. Puesto que u_1 ya es conocida, es posible eliminar la fila y la columna que se relacionan con esta, pero restando a cada elemento de la columna de fuerzas, el valor de u_1 multiplicado por el coeficiente eliminado en esa fila. Como en este caso u_1 es cero, este proceso simplemente equivale a eliminar la primera fila y al primera columna, quedando

$$\begin{bmatrix} \frac{a_1 + a_2}{h_1} + \frac{a_2}{h_2} & -\frac{a_2}{h_2} & 0 \\ -\frac{a_2}{h_2} & \frac{a_2}{h_2} + \frac{a_3}{h_3} & -\frac{a_3}{h_3} \\ 0 & -\frac{a_3}{h_3} & \frac{a_3}{h_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} f_1 h_1 + f_2 h_2 \\ f_2 h_2 + f_3 h_3 \\ f_3 h_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (6.40)$$

Hasta ahora en todo el desarrollo de este ejercicio se ha supuesto que los elementos tienen longitudes y propiedades físicas y geométricas diferentes, para hacerlo general. En este punto se presentara una solución, para el caso particular en que todos los elementos tienen la misma constante a , la misma longitud $L/3$ y f constante a lo largo de todo el dominio.

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{5fL^2 + 6PL}{18a} \\ u_3 &= \frac{4fL^2 + 6PL}{9a} \\ u_4 &= \frac{fL^2 + 2PL}{2a} \end{aligned} \quad (6.41)$$

Una vez resuelto este sistema, quedan determinadas las incógnitas correspondientes a las variables principales, resta determinar las incógnitas

correspondientes a las variables secundarias. En este caso, solo hay un valor de variable secundaria por determinar; la fuerza P_1^1 de la primera ecuación:

$$P_1^1 = \left(-a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} = -(fL + P) \quad (6.42)$$

De esta manera esta resuelto el problema y solo queda presentar como queda la función $u(x)$ después de reemplazar los valores de u_j

$$u(x) = \sum_{e=1}^3 \left(\sum u_i^{(e)} \psi_i^{(e)} \right) \equiv \sum u_i \phi_i(x) \quad (6.43)$$

Donde $\phi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, son las funciones de interpolación globales definidas como:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \psi_2^{i-1}(x) & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \psi_1^i(x) & x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases} \quad (6.44)$$

Para propósitos computacionales, la expresión final para $u(x)$ puede ser escrita:

$$u(x) = \begin{cases} u_1 \psi_1^1(x) + u_2 \psi_2^1(x) & 0 \leq x \leq \frac{L}{3} \\ u_2 \psi_1^2(x) + u_3 \psi_2^2(x) & \frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3} \\ u_3 \psi_1^3(x) + u_4 \psi_2^3(x) & \frac{2L}{3} \leq x \leq L \end{cases} \quad (6.45)$$

• **Postproceso de solución.** La solución de las ecuaciones de los elementos finitos proporciona los valores nodales para las variables primarias o incógnitas (deformación o desplazamiento, velocidades o temperaturas, según el problema). En el postproceso de los resultados se realizan algunas de las siguientes tareas:

- Computo de las variables secundarias (primera derivada de la variable primaria o derivadas de orden superior). La primera derivada de la variable principal se calcula así

$$\frac{du_e}{dx} = \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{h_1} \quad e = 1,2,3 \quad (6.46)$$

- Interpretación de los resultados para saber si la solución tiene sentido, la experiencia e intuición son las guías cuando no se cuenta con otros resultados.

- Tabular y graficar los resultados obtenidos.

6.7.2 Elementos finitos para ecuaciones de cuarto orden unidimensionales.

El caso a considerar en esta sección es el de una viga de un material elástico lineal sometida a cargas de flexión, cuyo modelo matemático esta descrito por una ecuación diferencial de cuarto orden. La solución de este problema por el método de los elementos finitos es fundamentalmente igual a la expuesta en la sección anterior, la disimilitud radica básicamente en el segundo paso, es decir en la formulación variacional. Considere la ecuación diferencial de cuarto orden:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[b \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + f = 0; \quad 0 \leq x \leq L \quad (6.47)$$

Donde $b = b(x)$ y $f = f(x)$ son funciones dadas de x , es decir datos, y w es la variable dependiente. En el caso de la flexión pura en vigas, b denota el producto entre el modulo de elasticidad, E , y el momento de inercia de la sección transversal de la viga, I ; por otra parte f denota la carga distribuida transversalmente (positiva hacia abajo) y w es la deflexión transversal de la viga (positiva hacia arriba). Además para satisfacer la ecuación diferencial, w debe satisfacer condiciones apropiadas de frontera, y puesto que la ecuación es de cuarto orden, son necesarias cuatro condiciones de frontera para resolverla. Aunque los primeros tres pasos no requieren el conocimiento de las condiciones de frontera, para propósitos de describir completamente el problema desde un comienzo se seleccionarán las siguientes condiciones de frontera

correspondientes al caso de una viga en voladizo sometida a una carga F_0 y un momento M_0 en el extremo libre:

$$w(0) = 0; \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \left(b \frac{d^2w}{dx^2} \right) \right|_{x=L} = M_0; \quad \left. \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2w}{dx^2} \right) \right|_{x=L} = F_0 \quad (6.48)$$

- **Discretización del dominio en elementos.** El dominio es dividido en un conjunto de N elementos, cada elemento es un segmento de línea y tienen por lo menos dos nodos. Aun que geométricamente elemento es el mismo que el usado en la ecuación de segundo orden, el número y la forma de las variables primarias en cada nodo es dictado por la formulación variacional de la ecuación diferencial.

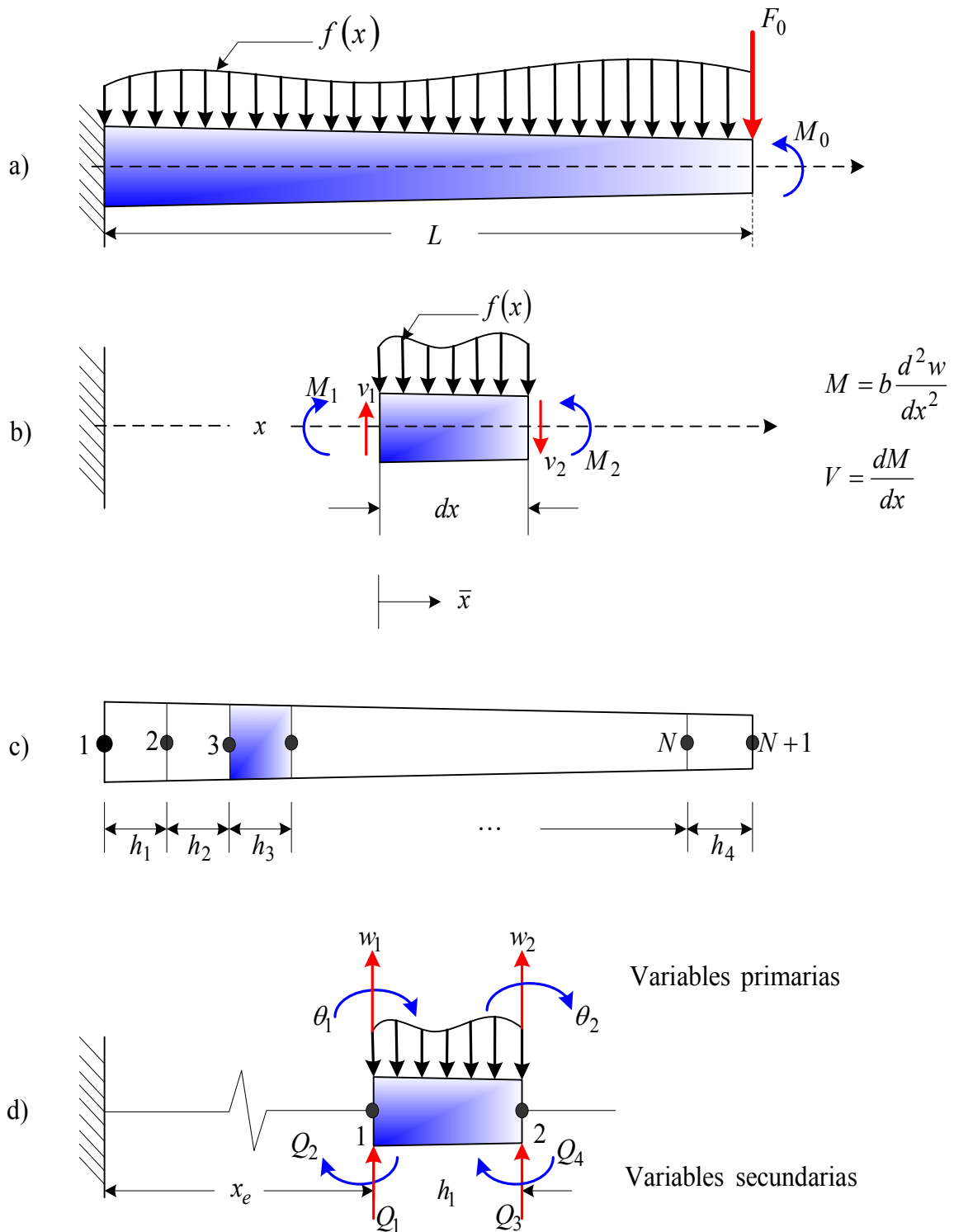
- **Derivación de las ecuaciones de elemento.** En este paso se aísla un elemento típico, para construir la formulación variacional sobre el elemento. Con ayuda de la formulación variacional, se definirán las variables primarias y secundarias del problema. Las variables primarias se expresarán en términos de funciones de interpolación, para luego derivar las ecuaciones de elemento.

- **Formulación variacional de la ecuación sobre un elemento típico.** Siguiendo el mismo procedimiento de la ecuación de segundo orden, primero se multiplica la ecuación diferencial por una función de prueba o de ponderación y se integra sobre todo el dominio. Este paso corresponde a la utilización del método de Galerkin, y rigurosamente lo que se hace es integrar los errores ponderados, sobre todo el dominio, buscando funciones de prueba que permitan igualar a cero el error promedio sobre todo el dominio.

$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} v \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2w}{dx^2} \right) + f \right] dx = 0 \quad (6.49)$$

Aplicando la fórmula de integración por partes al primer término:

Figura 82. Viga sometida a cargas transversales. Nomenclatura para el análisis por elementos finitos



$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[-\frac{dv}{dx} \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + vf \right] dx + \left[v \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x=x_e}^{x=x_{e+1}} = 0 \quad (6.50)$$

De nuevo integrando por partes el término

$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[\left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + vf \right] dx + \left[v \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{dv}{dx} b \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x=x_e}^{x=x_{e+1}} = 0 \quad (6.51)$$

Recuérdese que v es una *función de prueba* que debe cumplir la condición de ser diferenciable, hasta por lo menos el máximo orden de derivada que aparezca en la *formulación variacional* de la ecuación diferencial, es decir 2 veces para este ejemplo. Analizado el término de frontera

$$\left[v \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{dv}{dx} b \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x=x_e}^{x=x_{e+1}} \quad (6.52)$$

por aparecer v y dv/dx se concluye que las condiciones de frontera esenciales, son los valores dados de w y dw/dx ; y que las condiciones de frontera naturales corresponden a los valores dados de $b d^2 w/dx^2$ y de $(d/dx)(b d^2 w/dx^2)$ en los puntos extremos del elemento, de modo que hay 2 condiciones de frontera esenciales y 2 naturales por lo tanto w y dw/dx son las *variables primarias del problema*, para que las condiciones de frontera esenciales queden incluidas en la interpolación.

Las condiciones naturales de frontera constituyen el vector fuerza de la ecuación matricial. Por conveniencia matemática se introducirá la siguiente notación

$$\frac{dw}{dx} = -q \quad (6.53.a)$$

$$Q_1^{(e)} \equiv \left[\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x=x_e} \quad (6.53.b)$$

$$Q_2^{(e)} \equiv \left[b \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x=x_e} \quad (6.53.c)$$

$$Q_3^{(e)} \equiv - \left[\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x=x_{e+1}} \quad (6.53.d)$$

$$Q_2^{(e)} \equiv - \left[b \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x=x_{e+1}} \quad (6.53.e)$$

Para la flexión de una viga $Q_1^{(e)}$ y $Q_3^{(e)}$ denotan la fuerza cortante en la sección de la viga, donde se encuentran los nodos extremos, y $Q_2^{(e)}$ y $Q_4^{(e)}$ denotan los momentos flectores en las mismas secciones. Con esta notación la formulación variacional se vuelve

$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[\left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + v f \right] dx - v(x_e) Q_1^{(e)} - \left[- \frac{dv}{dx}(x_e) \right] Q_2^{(e)} - v(x_{e+1}) Q_3^{(e)} - \left[- \frac{dv}{dx}(x_{e+1}) \right] Q_4^{(e)} = 0 \quad (6.54)$$

- **Derivación de las funciones de interpolación.** La forma variacional (6.54) requiere que las funciones de interpolación, sean continuas con derivadas continuas hasta el tercer orden, para que Q_1 y Q_3 no sea cero, y que satisfaga las condiciones de frontera esenciales para un elemento

$$\begin{aligned} w(x_e) &= w_1 & w(x_{e+1}) &= w_2 \\ \theta(x_e) &= \theta_1 & \theta(x_{e+1}) &= \theta_2 \end{aligned} \quad (6.55)$$

Se debe escoger un polinomio de cuarto orden como aproximación de $w(x_e)$ debido a que hay cuatro condiciones de frontera esenciales

$$w(x_e) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \quad (6.56)$$

Ahora se deben expresar los parámetros c_i en términos de w_1, w_2, θ_1 y θ_2 de tal forma que las condiciones (6.55) queden satisfechas

$$w_1 = w(x_e) = c_1 + c_2 x_e + c_3 x_e^2 + c_4 x_e^3 \quad (6.57.a)$$

$$\theta_1 = -\left(\frac{dw}{dx}\right)\Big|_{x=x_e} = -c_2 - 2c_3 x_e - 3c_4 x_e^2 \quad (6.57.b)$$

$$w_2 = w(x_{e+1}) = c_1 + c_2 x_{e+1} + c_3 x_{e+1}^2 + c_4 x_{e+1}^3 \quad (6.57.c)$$

$$\theta_2 = -\left(\frac{dw}{dx}\right)\Big|_{x=x_{e+1}} = -c_2 - 2c_3 x_{e+1} - 3c_4 x_{e+1}^2 \quad (6.57.d)$$

O expresándose este sistema de 4 ecuaciones lineales con 4 incógnitas en forma de ecuación matricial:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_e & x_e^2 & x_e^3 \\ 0 & -1 & -2x_e & -3x_e^2 \\ 1 & x_{e+1} & x_{e+1}^2 & x_{e+1}^3 \\ 0 & -1 & -2x_{e+1} & -3x_{e+1}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \quad (6.58)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales se obtiene c_1, c_2, c_3 y c_4 en términos de w_1, w_2, θ_1 y θ_2 y sustituyendo los resultados en la ecuación (6.58) se obtiene:

$$w_e(x) = \phi_1^{(e)} w_1^{(e)} + \phi_2^{(e)} \theta_1^{(e)} + \phi_3^{(e)} w_2^{(e)} + \phi_4^{(e)} \theta_2^{(e)} = \sum u_j \phi_j^{(e)} \quad (6.59)$$

Donde $u_1 = w_1$, $u_2 = \theta_1$, $u_3 = w_2$ y las funciones de interpolación globales están dadas por:

$$\phi_1^{(e)} = 1 - 3\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^2 + 2\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^3 \quad (6.60.a)$$

$$\phi_2^{(e)} = -(x-x_e)\left(1 - \frac{x-x_e}{h_e}\right)^2 \quad (6.60.b)$$

$$\phi_3^{(e)} = 3\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^2 - 2\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^3 \quad (6.60.c)$$

$$\phi_4^{(e)} = -(x - x_e) \left[\left(\frac{x - x_e}{h_e} \right)^2 - \frac{x - x_e}{h_e} \right] \quad (6.60.d)$$

O en términos de las coordenadas locales:

$$\phi_1^{(e)} = 1 - 3 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 + 2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^3 \quad (6.61.a)$$

$$\phi_2^{(e)} = -(\bar{x}) \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 \quad (6.61.b)$$

$$\phi_3^{(e)} = 3 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 - 2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^3 \quad (6.61.c)$$

$$\phi_4^{(e)} = -(\bar{x}) \left[\left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right] \quad (6.61.d)$$

Las primeras dos condiciones de la ecuación (6.55) implican que:

$$\phi_1^{(e)}(x_e) = 1 \text{ y } \phi_i^{(e)}(x_e) = 0 \quad i = 1 \quad (6.62.a)$$

$$\phi_3^{(e)}(x_{e+1}) = 1 \text{ y } \phi_i^{(e)}(x_{e+1}) = 0 \quad i = 3 \quad (6.62.b)$$

Lo cual quiere decir que solo la función ϕ_1 da 1 cuando es evaluada en el primer nodo del elemento, y que solo la función ϕ_2 da cero cuando es evaluada en el segundo nodo de elemento.

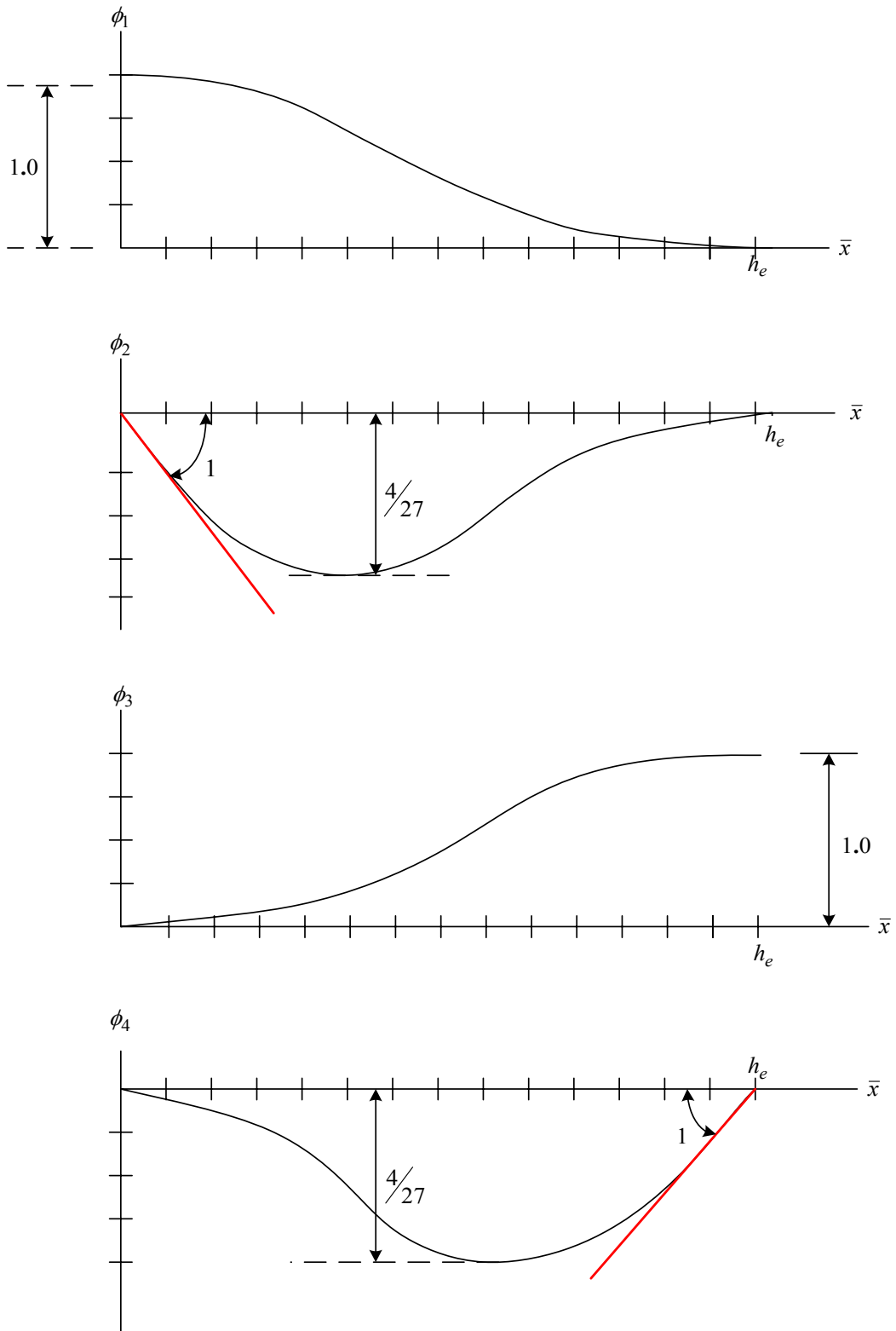
Las últimas dos condiciones de la ecuación (6.55) implican que:

$$-\frac{d\phi_2^{(e)}}{dx} \Big|_{x=x_e} = 1 \text{ y } -\frac{d\phi_i^{(e)}}{dx} \Big|_{x=x_e} = 0 \quad i \neq 2 \quad (6.63.a)$$

$$-\frac{d\phi_4^{(e)}}{dx} \Big|_{x=x_{e+1}} = 1 \text{ y } -\frac{d\phi_i^{(e)}}{dx} \Big|_{x=x_{e+1}} = 0 \quad i \neq 4 \quad (6.63.b)$$

Lo que quiere decir que ϕ_2 es la única de las cuatro funciones cuya derivada da uno cuando es evaluada en el primer nodo, y ϕ_4 es la única cuya derivada es uno

Figura 83. Funciones de interpolación para la ecuación de cuarto orden



cuando es evaluada en el segundo nodo. Estas funciones pueden verse graficadas en la Figura 83.

- **Modelo de los elementos finitos de la ecuación.** Usando la aproximación (6.56) para w y haciendo $v = \phi_i$, la forma variacional se reduce, teniendo en cuenta que los últimos términos de esta se simplifican con la ayuda de las propiedades de la función de interpolación y sus derivadas en los nodos del elemento, quedando:

$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[\left(b \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{j=1}^4 u_j \phi_j \right) \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \right) + \phi_i f \right] dx - Q_i^{(e)} = 0 \quad (6.64)$$

Aplicando las propiedades de intercambiabilidad entre las integrales y sumatorias, la ecuación anterior se reduce a:

$$\sum_{j=1}^4 \left[\int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} dx \right] u_j^{(e)} + \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i f dx - Q_i^{(e)} = 0 \quad (6.65)$$

Que abreviadamente:

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij}^{(e)} u_j^{(e)} = F_i^{(e)} \quad (6.66)$$

Donde:

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} b \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} dx \quad (6.67.a)$$

$$F_i^{(e)} = - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i f dx + Q_i^{(e)} \quad (6.67.b)$$

Para el caso en que b y f son constantes sobre un elemento, las matrices de rigidez $[K^{(e)}]$ (rigidez) y $\{F^{(e)}\}$ (fuerza generalizada); están dados por la siguiente expresión:

$$[K^{(e)}] = \frac{2b}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \quad \{F^{(e)}\} = -\frac{fh}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h \\ 6 \\ h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} \quad (6.68)$$

Cada elemento de la matriz se ha obtenido evaluando las integrales anteriores reemplazando las funciones de interpolación obtenidas en (6.61).

- **Ensamble de las ecuaciones de elemento.** Para mostrar el procedimiento de ensamble, se seleccionara un modelo de dos elementos, asumiendo que $b = EI$ y f son constantes. Entonces hay un total de tres nodos globales y un total de seis variables primarias, lo mismo que secundarias; existe la siguiente correspondencia entre los grados de libertad locales y los grados de libertad globales:

$$\begin{aligned} u_1^1 = w_1^1 = u_1 \quad u_2^1 = \theta_1^1 = u_2 \quad u_3^1 = w_2^1 = w_1^2 = u_3 \\ u_4^1 = \theta_2^1 = \theta_1^2 = u_4 \quad u_5^2 = w_2^2 = u_5 \quad u_6^2 = \theta_2^2 = u_6 \end{aligned} \quad (6.66)$$

La matriz de conectividad para esta malla y esta numeración, esta dada por:

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

Como hay dos variables primarias o grados de libertad por nodo, la repetición de un número en $[B]$ indica que los coeficientes asociados con ambos grado de libertad se suman. La repetición del número 2, el cual corresponde a los grados de libertad 3 y 4 en $[B]$, indica que los elementos de la matriz de rigidez global, K_{33}, K_{34}, K_{43} y K_{44} tienen contribución tanto del elemento 1 como del elemento 2:

$$\begin{aligned}
K_{33} &= K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34} &= K_{34}^1 + K_{12}^2 \\
K_{43} &= K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44} &= K_{44}^1 + K_{22}^2
\end{aligned}
\tag{6.71}$$

La notación de los nodos y sus variables en forma local y global se encuentra señalada en la Figura 84. La ecuación matricial del elemento se construye en notación local, pero al construir la matriz ensamblada del sistema es necesario hacer la correspondencia respectiva de las variables locales con las globales, la ecuación matricial de el primer elemento es:

$$\frac{2b}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \end{Bmatrix} = -\frac{fh}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h \\ 6 \\ h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 \\ Q_4^1 \end{Bmatrix}
\tag{6.72}$$

Que expresada en notación global es:

$$\frac{2b}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h & 0 & 0 \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 & 0 & 0 \\ -6 & 3h & 6 & 3h & 0 & 0 \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = -\frac{fh}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h \\ 6 \\ h \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 \\ Q_4^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\tag{6.73}$$

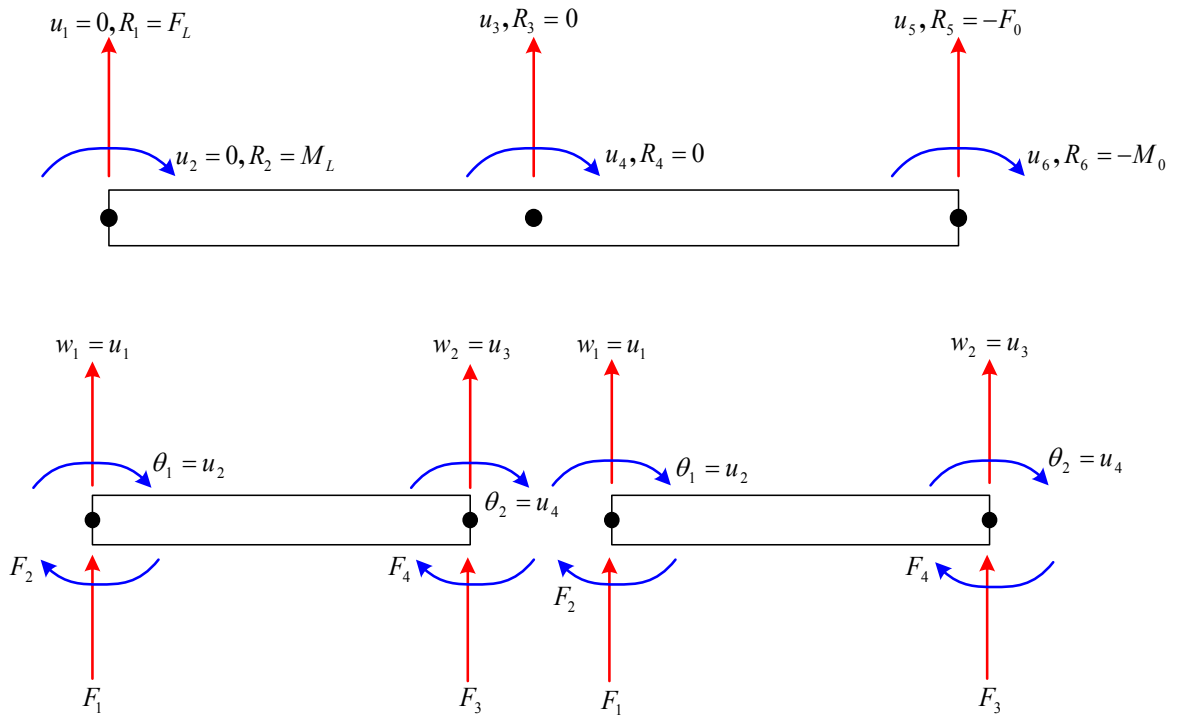
Para el elemento 2 la ecuación matricial en notación local es:

$$\frac{2b}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \end{Bmatrix} = -\frac{fh}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h \\ 6 \\ h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^2 \\ Q_2^2 \\ Q_3^2 \\ Q_4^2 \end{Bmatrix}
\tag{6.74}$$

Y en notación global:

$$\frac{2b}{h^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3h & -6 & -3h \\ 0 & 0 & -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ 0 & 0 & -6 & 3h & 6 & 3h \\ 0 & 0 & -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = -\frac{fh}{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ h \\ 6 \\ -h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1^2 \\ Q_2^2 \\ Q_3^2 \\ Q_4^2 \end{Bmatrix}
\tag{6.75}$$

Figura 84. Ensamble de los elementos de la viga



Sumando las ecuaciones matriciales globales del elemento 1 y del elemento 2 :

$$\frac{2b}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h & 0 & 0 \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 & 0 & 0 \\ -6 & 3h & 12 & 0 & -6 & -3h \\ -3h & h^2 & 0 & 4h^2 & 3h & h^2 \\ 0 & 0 & -6 & 3h & 6 & 3h \\ 0 & 0 & -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = -\frac{fh}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h \\ 12 \\ 0 \\ 6 \\ -h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 + Q_1^2 \\ Q_4^1 + Q_2^2 \\ Q_3^2 \\ Q_4^2 \end{Bmatrix} \quad (6.76)$$

- **Imposición de las condiciones de frontera.** La condición de equilibrio para las variables secundarias, implican que en el nodo 1 Q_1^1 y Q_2^1 , correspondientes a la fuerza cortante F_L y al momento flector M_L , son incógnitas del problema.

En el nodo global 2 no hay fuerzas cortantes ni momentos flectores externamente aplicados, por lo tanto:

$$Q_3^1 + Q_1^2 = 0 \quad Q_4^1 + Q_2^2 = 0 \quad (6.77)$$

En el nodo global 3 la fuerza cortante es dada como F_0 y el momento flector es dado como M_0 así que:

$$Q_3^2 \equiv - \left[- \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x=L} = -F_0 \quad (6.78.a)$$

$$Q_4^2 \equiv - \left[b \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x=L} = -M_0 \quad (6.78.b)$$

Ahora, para las variables primarias, se sabe que la viga esta empotrada en el nodo global 1, por lo tanto se sabe que la deflexión y la pendiente son cero en este nodo:

$$\begin{aligned} u_1^1 &\equiv w_1^1 = u_1 = 0 \\ u_2^1 &\equiv \theta_1^1 = u_2 = 0 \end{aligned} \quad (6.79)$$

Usando estas condiciones de frontera, la ecuación del sistema se reduce a:

$$\frac{2b}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h & 0 & 0 \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 & 0 & 0 \\ -6 & 3h & 12 & 0 & -6 & -3h \\ -3h & h^2 & 0 & 4h^2 & 3h & h^2 \\ 0 & 0 & -6 & 3h & 6 & 3h \\ 0 & 0 & -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = -\frac{fh}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ -h \\ 12 \\ 0 \\ 6 \\ -h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_L \\ M_L \\ 0 \\ 0 \\ -F_0 \\ -M_0 \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

- **Solución de las ecuaciones.** El sistema anterior de 6×6 con la imposición de las condiciones de frontera, se puede reducir a uno de 4×4 , ya que las dos primeras incógnitas, han sido determinadas como datos del problema. El algoritmo para esta operación consiste en eliminar las filas de las variables ya conocidas, en este caso las dos primeras, y las columnas del mismo orden, además de restar en el término derecho de la ecuación, el valor de cada variable multiplicado por el

elemento diagonal de la misma fila. Como en este caso las variables conocidas equivalen a cero, esto equivale a eliminar sin más ni más las dos primeras columnas y las dos primeras filas del sistema matricial.

$$\frac{2b}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & -3h \\ 0 & 4h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = -\frac{fh}{12} \begin{Bmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \\ h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_0 \\ -M_0 \end{Bmatrix} \quad (6.81)$$

Computacionalmente se usan algoritmos más eficientes que el tradicional Gauss-Jordan, que aprovechan las propiedades de simetría y de bandeado de estas matrices. Para este ejemplo, usando los métodos de algebra elemental, la solución es:

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{h}{6I} \left(-5h^2 F_0 + 3hM_0 - \frac{17}{4} fh^3 \right) \\ u_4 &= \frac{h}{6I} (9hF_0 - 6M_0 + 7fh^2) \\ u_5 &= \frac{h}{6I} (-16h^2 F_0 + 12hM_0 - 12fh^3) \\ u_6 &= \frac{h}{6I} (12hF_0 - 12M_0 + 8fh^2) \end{aligned} \quad (6.82)$$

A partir de lo cual es posible determinar los valores de las variables secundarias incógnitas F_L y M_L :

$$\begin{aligned} F_L &= F_0 + 2fh \\ M_L &= -2h(F_0 + fh) + M_0 \end{aligned} \quad (6.83)$$

• **Postproceso de solución.** La solución por elementos finitos $w(x)$ esta dada por:

$$w_e(x) = \begin{cases} u_3\phi_3^1 + u_4\phi_4^1 & \text{para } 0 \leq x \leq h \\ u_3\phi_1^2 + u_4\phi_2^2 + u_5\phi_3^2 + u_6\phi_4^2 & \text{para } h \leq x \leq 2h \end{cases} \quad (6.84)$$

La solución exacta de esta ecuación puede ser obtenida por integración directa y esta dada por:

$$w(x) = \frac{1}{24EI} \left[-F(L-x)^4 + F_0(x-L)^3 + 12M_0x^2 - (4FL^3 + 12F_0L^2)x + fL^4 + 4F_0L^3 \right]$$

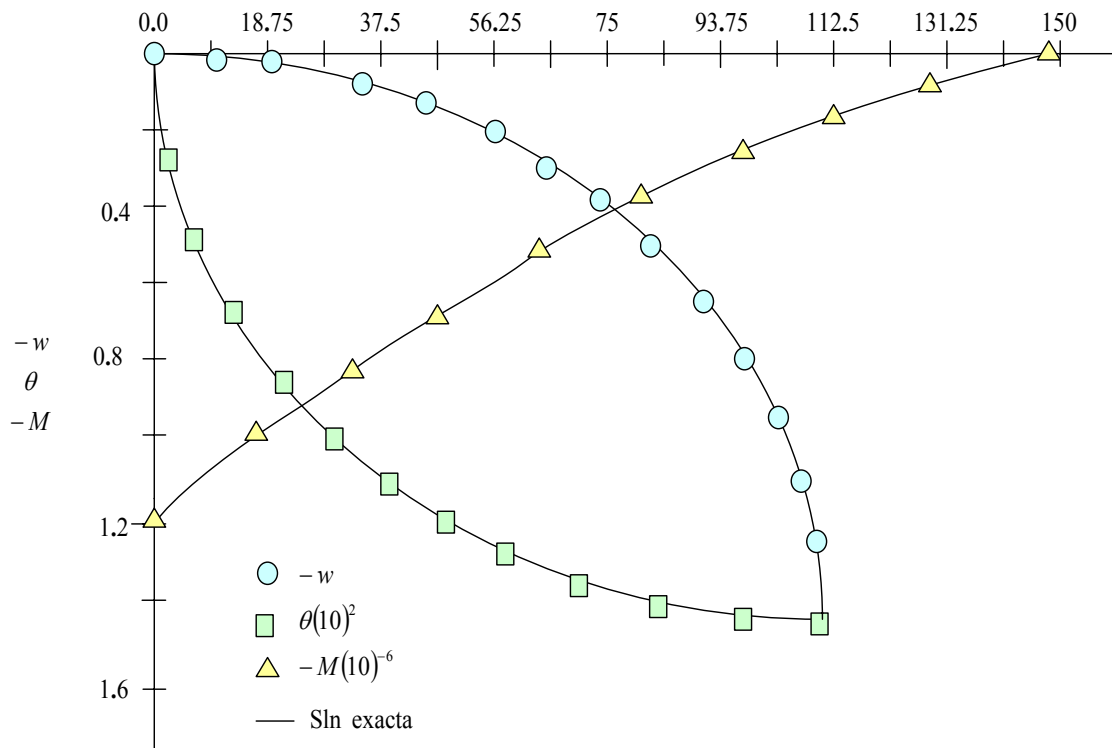
(6.85.a)

$$\theta(x) = \frac{1}{6EI} \left[-f(L-x)^3 - 3F_0(x-L)^2 - 6M_0x + (fL^3 + 3F_0L^2) \right] \quad (6.85.b)$$

$$M(x) = -\frac{f}{2}(L-x)^2 + F_0(x-L) + M_0 \quad \text{Para } 0 \leq x \leq L \quad (6.85.c)$$

La solución de elementos finitos y la solución de exacta son presentadas en la Figura 86. La solución con elementos finitos coincide con la solución exacta en los nodos, por fuera de estos, la mayor diferencia no pasa del 2%, por lo cual no puede apreciarse en la grafica.

Figura 86. Comparación entre las soluciones por elementos finitos, para la función incógnita y sus tres primeras derivadas



7. ELASTICIDAD LINEAL PLANA

Como se vio en el ...capítulo 5... desde el punto de vista matemático, el problema elástico consiste en un sistema de EDP's que debe ser resuelto en el espacio y en el tiempo. Sin embargo, existen ciertas situaciones en las que dicho problema puede ser simplificado, reduciéndose el problema a dos dimensiones espaciales, además de, eventualmente la dimensión temporal. La posibilidad de esta simplificación reside en que, en ciertos casos, la propia geometría y las condiciones de contorno del problema permitan identificar una *dirección irrelevante* (asociada a una de las dimensiones *espaciales* del problema) de forma tal que pueden plantearse *a priori* soluciones del problema elástico *independientes de dicha dimensión*.

Si se considera un sistema local de coordenadas $\{x, y, z\}$ en el que dicha dimensión irrelevante (supuesta constante) coincide con la dirección z , el análisis queda reducida al plano $\{x, y\}$, y de ahí el nombre de elasticidad plana con el que suele denominarse este tipo de problemas. A su vez, éstos suelen dividirse en dos grandes grupos asociados a dos familias de hipótesis simplificativas:

- Problemas de *tensión plana*.
- Problemas de *deformación plana*.

7.1 ESTADO DE TENSION PLANA

El estado de tensión plana queda caracterizado por las siguientes hipótesis simplificativas:

- *El estado tensional de la siguiente forma:*

$$[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

- Las tensiones no nulas (es decir, las asociadas al plano $x-y$) no dependen de la variable z :

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y, z) ; \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y, z) ; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z) \quad (7.2)$$

Para analizar bajo que condiciones las anteriores hipótesis resultan razonables, consideremos un medio elástico plano cuyas dimensiones y forma asociadas al plano $x-y$ (que denominaremos *plano de análisis*) son arbitrarias y tal que la tercera dimensión (que denominaremos *espesor* de la pieza) queda asociada al eje z (ver Figura 87). Supondremos que se dan las siguientes circunstancias sobre el medio elástico en cuestión:

- El espesor e es mucho menor que al dirección típica asociada al plano de análisis $x-y$:

$$e \ll L \quad (7.3)$$

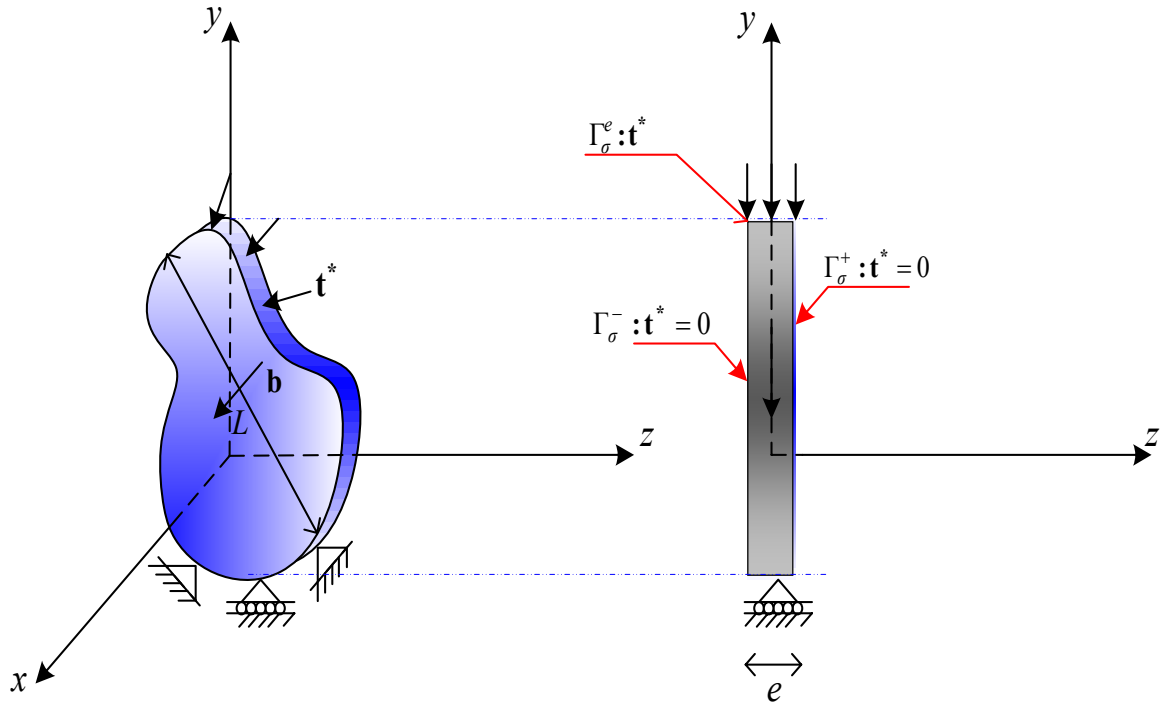
- Las acciones (fuerzas másicas $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, desplazamientos impuestos $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ y un vector tracción $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$) están contenidas en el plano de análisis $x-y$ (su componente z es nula) y, además, no dependen de la tercera dimensión:

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x(x, y, t) \\ b_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Gamma_u : \mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} u_x^*(x, y, t) \\ u_y^*(x, y, t) \\ - \end{Bmatrix} \quad \Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma^+ \cup \Gamma_\sigma^- \cup \Gamma_e = \begin{Bmatrix} t_x^*(x, y, t) \\ t_y^*(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.4)$$

El vector tracción $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$ solo es distinto de cero sobre el contorno del espesor de la pieza (contorno Γ_e), mientras que sobre las superficies laterales Γ_σ^+ y Γ_σ^- es nulo (ver Figura 87).

$$\Gamma_{\sigma}^+ \cup \Gamma_{\sigma}^- : \mathbf{t}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

Figura 87. Esquema representativo del problema elástico lineal plano



La pieza con geometría y acciones definidas por las ecuaciones (7.3) y (7.4) y el estado de tensión plana, indicado por las ecuaciones (7.1) y (7.2) y esquematizado en la Figura 87 resultan compatibles.

En efecto, aplicando las condiciones de contorno Γ_{σ} sobre la pieza se obtiene:

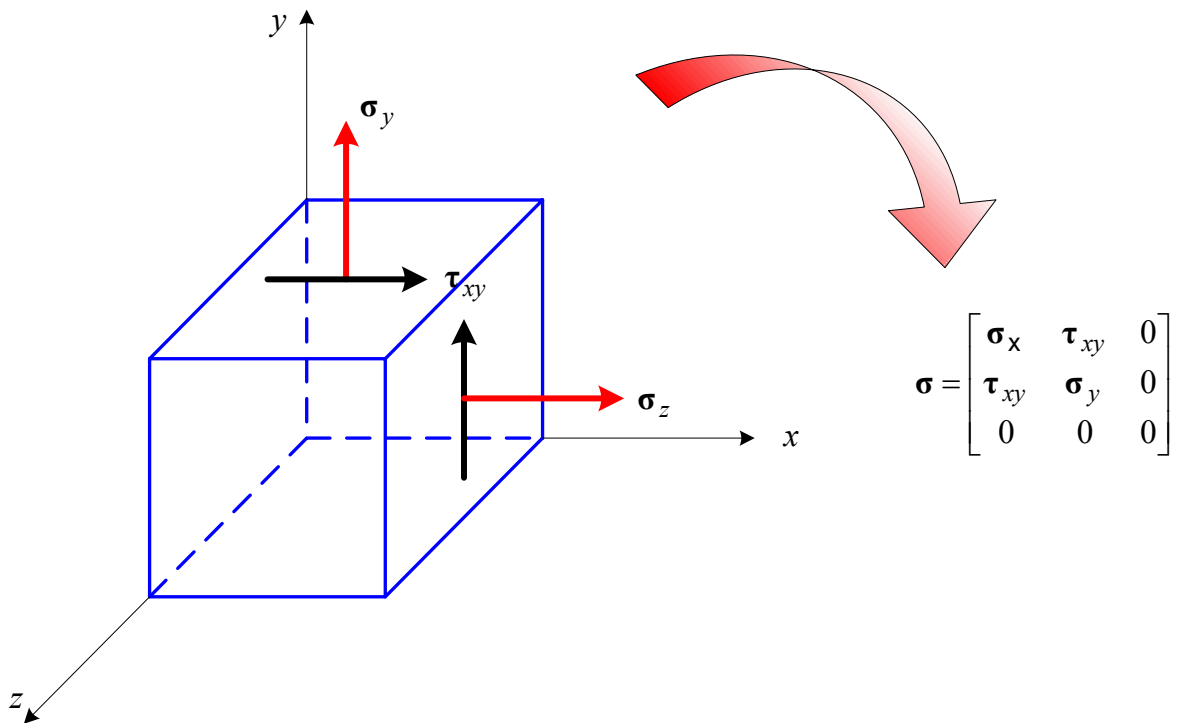
- *Superficies laterales:* Γ_{σ}^+ y Γ_{σ}^- :

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} \quad \sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- *Canto* Γ_{σ}^e :

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_x(x, y, t) \\ t_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Figura 88. Hipótesis simplificativa de la teoría de elasticidad lineal plana



7.1.1 Campo de deformaciones. Ecuación constitutiva⁷⁵. Considere ahora la notación ingenieril para las componentes de los tensores de tensión de deformación como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \end{aligned} \quad (7.6)$$

⁷⁵ OLIVELLA, Op. cit., p. 217.

Teniendo en cuenta las condiciones $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y] & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} = 0 \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} [\sigma_x + \sigma_y] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} = 0\end{aligned}\quad (7.7)$$

En vista de las ecuaciones (7.2) y (7.7) puede concluirse que tampoco las deformaciones dependen de la coordenada z ($\Rightarrow \varepsilon = \varepsilon(x, y, t)$). Asimismo, en la ecuación (7.7) puede resolverse la deformación ε_z como:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (7.8)$$

En definitiva el tensor de deformaciones para el caso de tensión plana resulta:

$$\varepsilon(x, y, t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (7.9)$$

y la sustitución de la ecuación (7.8) en la ecuación (7.7), tras algunas operaciones algebraicas se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}\end{aligned}\quad (7.10)$$

Que puede reescribirse como:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}} = \frac{E}{1-\nu^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^{T.P.}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} \Rightarrow \{\sigma\} = \mathbf{C}^{T.P.} \cdot \{\varepsilon\} \quad (7.11)$$

7.1.2 Campo de desplazamientos⁷⁶. Las ecuaciones geométricas del problema (ver ecuación (5.23)) pueden descomponerse en dos grupos:

- Las que no afectan al desplazamiento u_z (y que serian hipotéticamente integrables en \mathbf{R}^2 , en el dominio $x - y$):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x(x, y, t) &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y(x, y, t) &= \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \gamma_{xy}(x, y, t) = 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{aligned} \right\} \text{integración en } \mathbf{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} u_x = u_x(x, y, t) \\ u_y = u_y(x, y, t) \end{cases} \quad (7.12)$$

- Aquellas en las que interviene el desplazamiento u_z :

$$\begin{aligned} \varepsilon_z(x, y, t) &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \gamma_{xz}(x, y, t) = 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{yz}(x, y, t) = 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

La observación de las ecuaciones (7.1) a (7.13) sugiere la consideración de un problema elástico ideal de tensión plana reducido a las dos dimensiones del plano de análisis y caracterizado por las siguientes incógnitas:

⁷⁶ OLIVELLA, Op. cit., p. 219.

$$\mathbf{u}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon\}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\sigma\}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7.14)$$

En el que las incógnitas adicionales respecto al problema general, o bien son nulas, o bien son calculables en función de las (7.14), o bien no intervienen en el problema reducido:

$$\begin{aligned} \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} &= 0 \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ u_z(x, y, t) &\rightarrow \text{No interviene en el problema} \end{aligned} \quad (7.15)$$

7.2 DEFORMACION PLANA⁷⁷

El estado de deformación plana se caracteriza por las siguientes hipótesis simplificadoras:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u_x(x, y, t) \\ u_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.16)$$

También en éste caso resulta ilustrativo analizar en que situaciones dichas hipótesis resultan plausibles. Consideremos, por ejemplo, un medio elástico cuya geometría y acciones puede generarse a partir de una sección bidimensional (asociado al plano $x-y$ y con las acciones $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$ contenidas en dicho plano) que se traslada sobre un generatriz recta perpendicular a la misma, asociada al eje z (ver Figura 89).

Las acciones del problema pueden caracterizarse entonces como:

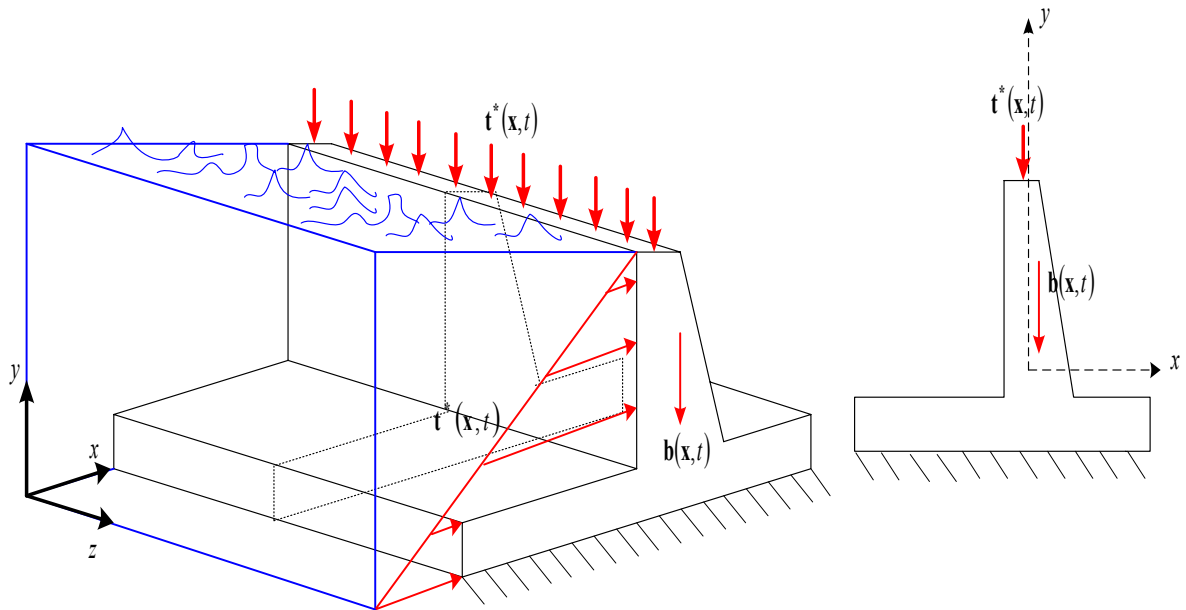
⁷⁷ LAI, Op. cit., p. 162.

$$\mathbf{b} \equiv \begin{Bmatrix} b_x(x, y, t) \\ b_x(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Gamma_u : \mathbf{u}^* \equiv \begin{Bmatrix} u_x^*(x, y, t) \\ u_y^*(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Gamma_\sigma : \mathbf{t}^* \equiv \begin{Bmatrix} t_x^*(x, y, t) \\ t_y^*(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.17)$$

y en la sección central (que presenta simetría respecto al eje z) se cumple que:

$$u_z = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \quad (7.18)$$

Figura 89. Ejemplo de estado de deformación plana



y, por tanto, el campo de desplazamientos en dicha sección central es de tipo:

$$\mathbf{u}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} u_x(x, y, t) \\ u_x(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.19)$$

En conclusión para el caso de deformación plana la hipótesis simplificativa se basa en el hecho de que una de las dimensiones del elemento de análisis es mucho mayor que las otras dos (en este caso la dimensión paralela al eje z) y además tiene las cargas distribuidas uniformemente a lo largo de dicho eje.

7.2.1 Campos de deformaciones y de tensiones. Al campo de desplazamientos propio del estado de deformación plana (7.19) le corresponde el siguiente campo de deformaciones:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x(x, y, t) &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \varepsilon_z(x, y, t) &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\
 \varepsilon_y(x, y, t) &= \frac{\partial u_y}{\partial x} & \gamma_{xz}(x, y, t) &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{xy}(x, y, t) &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & \gamma_{yz}(x, y, t) &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

Con lo que el tensor de deformaciones es de la siguiente forma:

$$\varepsilon(x, y, t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

Aplicando la ecuación constitutiva elástica lineal (5.22) al campo de deformaciones (7.20) proporciona las tensiones como:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu\varepsilon_x = \varepsilon_x(\lambda + 2\mu) + \lambda\varepsilon_y & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
 \sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu\varepsilon_y = \varepsilon_y(\lambda + 2\mu) + \lambda\varepsilon_x & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = 0 \\
 \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = 0
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

En vista de las ecuaciones (7.20) y (7.22) puede concluirse que tampoco las tensiones dependen de la coordenada z ($\Rightarrow \sigma = \sigma(x, y, t)$). Asimismo, en la ecuación (7.22) puede resolverse la deformación σ_z como:

$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}(\sigma_x + \sigma_y) = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \tag{7.23}$$

Y el tensor de tensiones para el caso de deformación plana resulta:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \tag{7.24}$$

Donde las componentes no nulas del tensor de tensiones (7.24) se escriben:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= (\lambda + 2G)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_y \right] \\
\sigma_y &= (\lambda + 2G)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_x \right] \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}
\end{aligned} \tag{7.25}$$

La ecuación (7.25) puede escribirse en forma matricial como:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^{D.P.}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} \Rightarrow \{\sigma\} = \mathbf{C}^{D.P.} \cdot \{\varepsilon\} \tag{7.26}$$

Similarmente a lo que ocurre en el problema de tensión plana, las ecuaciones (7.19), (7.20) y (7.24) sugieren la consideración de un problema elástico de deformación plana reducido a las dimensiones del plano de análisis $x-y$ y caracterizado por las siguientes incógnitas:

$$\mathbf{u}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon\}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\sigma\}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{7.27}$$

En el que las incógnitas adicionales respecto al problema general, o bien son nulas, o bien son calculables en función de las (7.27):

$$\begin{aligned}
u_z &= 0 \\
\varepsilon_z &= \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\
\sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y)
\end{aligned} \tag{7.28}$$

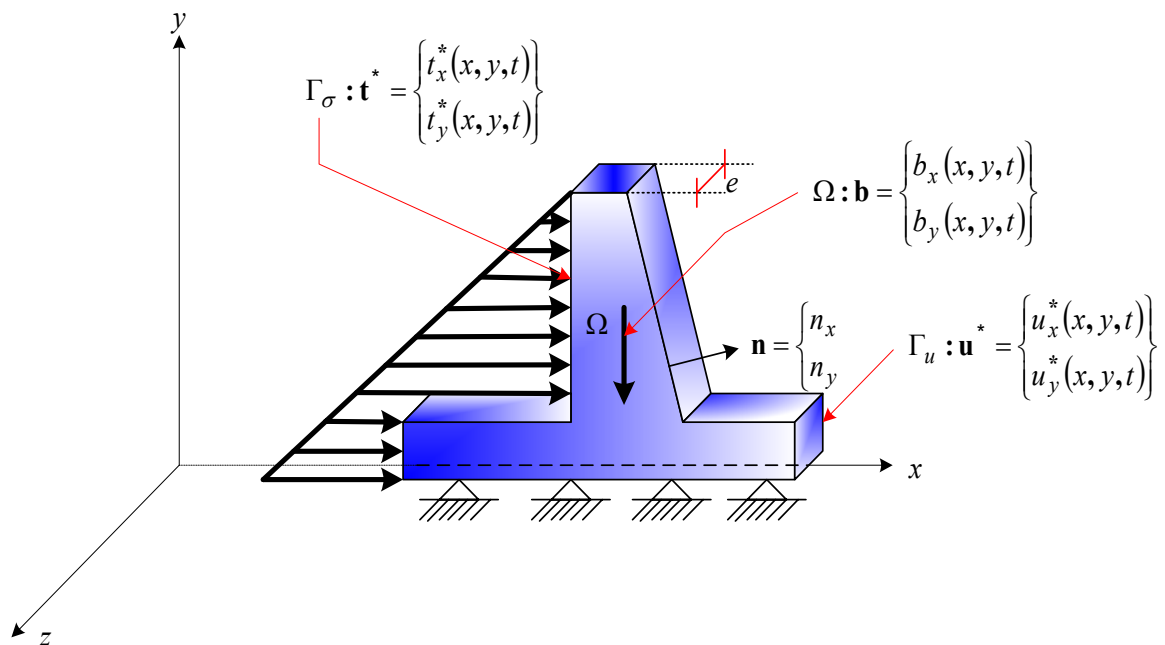
7.3 APLICACIÓN DEL PROBLEMA ELASTICO LINEAL

De acuerdo a lo anterior el análisis de deformaciones en tuberías puede ser abordado como un problema de **deformación plana**. La Figura 90 esquematiza la

idealización para este caso, donde las cargas están aplicadas sobre el plano $x - y$; y donde la dimensión sobre dirección z puede que sea muy grande ($z \rightarrow \infty$), o que dicha dimensión sea reducida pero el desplazamiento en la dirección correspondiente este impedido en los extremos. En cualquiera de los dos casos las deformaciones en la dirección z son despreciables, por lo tanto:

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$

Figura 90. Esquema del problema elástico lineal



A continuación se procede a plantear el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el problema. Para realizar este modelo matemático sigamos los siguientes pasos:

a) Ecuación de Cauchy: que en este caso corresponde a las ecuaciones de equilibrio interno:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho b_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho b_y = 0 \end{cases}$$

Donde $\rho b_x = f_x^*$ y $\rho b_y = f_y^*$.

b) Las expresiones de deformación-desplazamiento se reducen a:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

c) Las condiciones de frontera quedan así:

$$\underline{\text{Condiciones de contorno en tensiones}} \rightarrow \begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = t_x^* \\ \sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x = t_y^* \end{cases}$$

$$\underline{\text{Condiciones de contorno en desplazamiento}} \rightarrow \begin{cases} u_x^* = \hat{u}_x \\ u_y^* = \hat{u}_y \end{cases}$$

d) las relaciones esfuerzo-deformación quedan definidas como:

$$\sigma_x = C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y$$

$$\sigma_y = C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y$$

$$\tau_{xy} = C_{33}\gamma_{xy}$$

Donde C_{ij} son las constantes elásticas del material definidas así para el caso de deformación plana

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad C_{12} = C_{21} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad C_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

e) Sustituyendo **b)** en **d)**:

$$\sigma_x = C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \sigma_y = C_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \tau_{xy} = C_{33} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

f) Reemplazando **e)** en **a)** y **e)** en **c)** se obtiene el modelo matemático que de este fenómeno el cual consta de un sistema de EDP's y el conjunto de condiciones de frontera (3. y 4.), en términos de los desplazamientos u_x y u_y :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] + C_{33} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] + f_x^* &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[C_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] + C_{33} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] + f_y^* &= 0 \end{aligned} \right\} \text{en } \Omega \quad (7.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] n_x + C_{33} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] n_y &= t_x^* \\ \left[C_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] n_y + C_{33} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] n_x &= t_y^* \end{aligned} \right\} \text{en } \Gamma \quad (7.30)$$

7.4 FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL PROBLEMA DE DEFORMACION PLANA

Como se tienen 2 ecuaciones diferenciales, es necesario introducir 2 funciones de prueba o de ponderación, para la construcción de la formulación variacional del sistema de ecuaciones.

Para la ecuación 1. se tiene:

$$\int_{\Omega^e} w_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] + C_{33} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] + f_x^* \right\} d\Omega = 0 \quad (7.31)$$

Aplicando el teorema de Green:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} w_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Omega^e} \frac{\partial w_1}{\partial x} \left(C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) dx dy = \\ \oint_{\Gamma^e} w_1 \left(C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) n_x d\Gamma \end{aligned} \quad (7.32)$$

Luego, la ecuación (7.29) puede escribirse como:

$$\int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial w_1}{\partial x} \left(C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + C_{33} \frac{\partial w_1}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - w_1 f_x^* \right] dx dy - \oint_{\Gamma^e} w_1 \left[\left(C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) n_x + C_{33} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) n_y \right] d\Gamma = 0 \quad (7.33)$$

Reemplazando (7.30) en (7.33), se tiene:

$$\int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial w_1}{\partial x} \left(C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + C_{33} \frac{\partial w_1}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - w_1 f_x^* \right] dx dy - \oint_{\Gamma^e} w_1 t_x^* d\Gamma = 0 \quad (7.34)$$

Mediante un procedimiento análogo para la segunda ecuación de (7.29), se tiene:

$$\int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial w_2}{\partial y} \left(C_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + C_{33} \frac{\partial w_2}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - w_2 f_y^* \right] dx dy - \oint_{\Gamma^e} w_2 t_y^* d\Gamma = 0 \quad (7.35)$$

Ahora aproximando las variables dependientes mediante unas funciones de interpolación para elementos finitos bidimensionales, y cambiado la nomenclatura $u_x = u$ y $u_y = v$ por comodidad, se tiene:

$$u^{(e)} = \sum_{j=1}^n u_j^{(e)} \psi_j^{(e)} \quad v^{(e)} = \sum_{j=1}^n v_j^{(e)} \psi_j^{(e)} \quad (7.36)$$

Para este análisis se estudiarán el elemento triangular lineal de tres nodos ($n = 3$) y el elemento rectangular de cuatro nodos ($n = 4$).

Aplicando el método de Galerkin ($w_i = \psi_i$) y ordenando términos, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{aligned} [K^{11}] \{u\} + [K^{12}] \{v\} &= \{F^1\} \\ [K^{21}] \{u\} + [K^{22}] \{v\} &= \{F^2\} \end{aligned} \quad (7.37)$$

Que puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad [K] \{\Delta\} = \{F\} \quad (7.38)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{11} &= \int_{\Omega^e} \left(C_{11} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy \\
K_{ij}^{12} &= K_{ij}^{21} = \int_{\Omega^e} \left(C_{12} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + C_{33} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) dx dy \\
K_{ij}^{22} &= \int_{\Omega^e} \left(C_{33} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy \\
F_i^1 &= \int_{\Omega^e} \psi_i f_x^* dx dy + \oint_{\Gamma} \psi_i t_x^* d\Gamma \\
F_i^2 &= \int_{\Omega^e} \psi_i f_y^* dx dy + \oint_{\Gamma} \psi_i t_y^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{7.39}$$

La matriz $[K]$ de rigidez es de orden $2n \times 2n$, donde n es el número de nodos por elemento. El vector de fuerza $\{F\}$ de orden $2n$, contiene las cargas nodales equivalentes debidas a las fuerzas de cuerpo y a las fuerzas de superficie debidas a las fuerzas de superficie. Las variables nodales Δ_i están dadas:

- Para el elemento triangular por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{7.40}$$

- Y para el elemento rectangular por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{7.41}$$

Esta forma de ordenamiento conlleva a un aumento en el trabajo y en el almacenamiento requerido para la solución del sistema. Por tal motivo para propósitos computacionales se reordenan los grados de libertad nodales, de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta_{2n} \\ \Delta_{2n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \quad (7.42)$$

Para ilustrar como se hace este ordenamiento de los grados de libertad nodales, consideremos el sistema de ecuaciones correspondientes al elemento triangular:

$$\begin{aligned} K_{11}^{11}u_1 + K_{12}^{11}u_2 + K_{13}^{11}u_3 + K_{11}^{12}v_1 + K_{12}^{12}v_2 + K_{13}^{12}v_3 &= F_1^1 \\ K_{21}^{11}u_1 + K_{22}^{11}u_2 + K_{23}^{11}u_3 + K_{21}^{12}v_1 + K_{22}^{12}v_2 + K_{23}^{12}v_3 &= F_2^1 \\ K_{31}^{11}u_1 + K_{32}^{11}u_2 + K_{33}^{11}u_3 + K_{31}^{12}v_1 + K_{32}^{12}v_2 + K_{33}^{12}v_3 &= F_3^1 \\ K_{11}^{21}u_1 + K_{12}^{21}u_2 + K_{13}^{21}u_3 + K_{11}^{22}v_1 + K_{12}^{22}v_2 + K_{13}^{22}v_3 &= F_1^2 \\ K_{21}^{21}u_1 + K_{22}^{21}u_2 + K_{23}^{21}u_3 + K_{21}^{22}v_1 + K_{22}^{22}v_2 + K_{23}^{22}v_3 &= F_2^2 \\ K_{31}^{21}u_1 + K_{32}^{21}u_2 + K_{33}^{21}u_3 + K_{31}^{22}v_1 + K_{32}^{22}v_2 + K_{33}^{22}v_3 &= F_3^2 \end{aligned} \quad (7.43)$$

Ahora:

$$\Delta_1 = u_1 \quad \Delta_2 = v_1 \quad \Delta_3 = u_2 \quad \Delta_4 = v_2 \quad \Delta_5 = u_3 \quad \Delta_6 = v_3 \quad (7.44)$$

Y reorganizando las ecuaciones (7.43), se obtiene:

$$\begin{aligned} K_{11}^{11}\Delta_1 + K_{12}^{12}\Delta_2 + K_{13}^{11}\Delta_3 + K_{12}^{12}\Delta_4 + K_{13}^{11}\Delta_5 + K_{13}^{12}\Delta_6 &= F_1^1 \\ K_{11}^{21}\Delta_1 + K_{11}^{22}\Delta_2 + K_{12}^{21}\Delta_3 + K_{12}^{22}\Delta_4 + K_{13}^{21}\Delta_5 + K_{13}^{22}\Delta_6 &= F_1^2 \\ K_{21}^{11}\Delta_1 + K_{21}^{12}\Delta_2 + K_{22}^{11}\Delta_3 + K_{22}^{12}\Delta_4 + K_{23}^{11}\Delta_5 + K_{23}^{12}\Delta_6 &= F_2^1 \\ K_{21}^{21}\Delta_1 + K_{22}^{22}\Delta_2 + K_{22}^{21}\Delta_3 + K_{22}^{22}\Delta_4 + K_{23}^{21}\Delta_5 + K_{23}^{22}\Delta_6 &= F_2^2 \\ K_{31}^{11}\Delta_1 + K_{31}^{12}\Delta_2 + K_{32}^{11}\Delta_3 + K_{32}^{12}\Delta_4 + K_{33}^{11}\Delta_5 + K_{33}^{12}\Delta_6 &= F_3^1 \\ K_{31}^{21}\Delta_1 + K_{31}^{22}\Delta_2 + K_{32}^{21}\Delta_3 + K_{32}^{22}\Delta_4 + K_{33}^{21}\Delta_5 + K_{33}^{22}\Delta_6 &= F_3^2 \end{aligned} \quad (7.45)$$

O en forma matricial:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (7.46)$$

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 7.1. Considere un elemento lineal, triangular mostrado en la Figura 91. Evaluar $[K]$ y $\{F\}$ para dicho elemento.

Solución:

Con las coordenadas del triangulo se construyen sus funciones de interpolación, haciendo uso de las formulas dadas en el Anexo B, dando como resultado:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{12}(40 - 3x - 4y) \\ \psi_2 &= \frac{1}{12}(-16 + 4x) \\ \psi_3 &= \frac{1}{12}(-8 - x + 4y) \end{aligned} \quad (7.47)$$

Una vez definidas las funciones de interpolación, el siguiente paso consiste en calcular las integrales que dan como resultado los coeficientes de las matrices buscadas. Dichas integrales se obtienen a partir de las ecuaciones (7.39). El resultado de estos tediosos cálculos es:

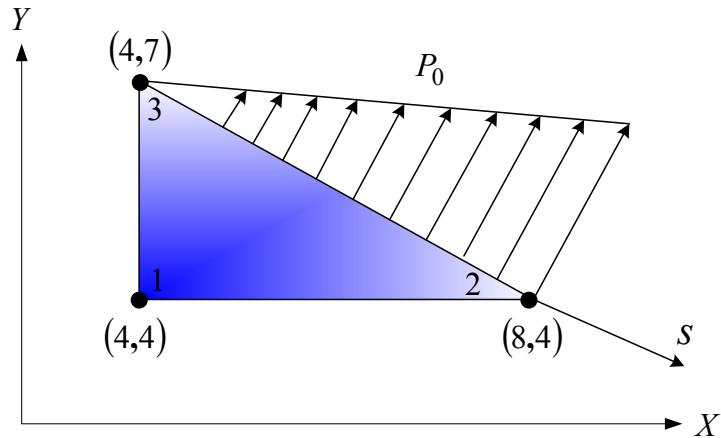
$$[K] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{9}{4}C_{11} + 4C_{33} & 3(C_{12} + C_{33}) & -3C_{11} & -4C_{33} & \frac{3}{4}C_{11} - 4C_{33} & C_{33} - 3C_{12} \\ & 4C_{22} + \frac{9}{4}C_{33} & -4C_{12} & -3C_{33} & C_{12} - 3C_{33} & \frac{3}{4}C_{33} - 4C_{22} \\ & & 4C_{11} & 0 & -C_{11} & 4C_{12} \\ & & & 4C_{33} & 4C_{33} & -C_{33} \\ & & & & 4C_{33} + \frac{1}{4}C_{11} & -(C_{12} + C_{33}) \\ & & & & & 4C_{22} + \frac{1}{4}C_{33} \end{bmatrix} \quad (7.48)$$

El vector de fuerza $\{F\}$ tiene contribución solamente de la segunda integral de contorno. Los lados 1-2 y 3-1 son frontera entre elementos, y el lado 2-3 es la

frontera del problema sobre la cual el esfuerzo normal t_n es especificado como se

muestra en la Figura 91. Primero se computa la integral de frontera $f_i = \int_0^5 \left(P_0 \frac{s}{5} \right)$

Figura 91. Elementos a ser analizados en el ejemplo 7.1



Que da por resultado:

$$f_3 = \frac{5P_0}{6} \quad f_2 = \frac{10P_0}{6} \quad (7.50)$$

Ahora se computan las componentes en las direcciones x y y de f_i en los nodos 2 y 3. Obteniendo:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{2y} = f_2(0.8) = \frac{4}{3}P_0 & \quad \hat{F}_{2x} = f_2(0.6) = P_0 \\ \hat{F}_{3y} = f_3(0.8) = \frac{2}{3}P_0 & \quad \hat{F}_{2y} = f_2(0.6) = \frac{1}{2}P_0 \end{aligned} \quad (7.51)$$

Y armando el vector $\{F^{(e)}\}$ queda:

$$\{F^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ \hat{F}_{2x} + \tilde{F}_{2x} \\ \hat{F}_{2y} \\ \hat{F}_{3x} + \tilde{F}_{3x} \\ \hat{F}_{2y} \end{Bmatrix} \quad (7.52)$$

Donde \tilde{F}_{2x} y \tilde{F}_{3x} son la componentes de las fuerzas internan de los lados 1-2 y 3-1.

Para una placa de acero isotropico se tiene:

$$E_1 = E_2 = E = 30 \times 10^6 \text{ lb/in}^2 \quad \nu_{12} = \nu_{21} = \nu = 0.3 \quad (7.53)$$

Así que:

$$c_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = 32.967h \times 10^6 \quad c_{12} = c_{11} \nu_{12} = 9.89h \times 10^6 \quad (7.54)$$

$$c_2 = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = 32.967h \times 10^6 \quad c_{33} = G_{12} = 9.89h \times 10^6$$

Reemplazando estos valores en la expresión (7.48) se encuentra la matriz buscada, únicamente en función de h (el espesor del elemento, o en este caso, de la placa):

$$[K] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1.5041 & 0.8036 & -1.2363 & -0.5769 & -0.2679 & -0.2226 \\ & 1.9729 & -0.4945 & -0.4327 & -0.3091 & -1.5041 \\ & & 1.6484 & 0.0 & -C_{11} & 0.4945 \\ & \text{simétrica} & & 0.5769 & 0.5769 & -0.1442 \\ & & & & 0.6799 & -0.2679 \\ & & & & & 1.6484 \end{bmatrix} \quad (7.55)$$

8. APLICACION

8.1 TUBERIAS

El uso de tuberías enterradas como redes vitales de transporte para diferentes tipos de fluidos como agua potable, aguas servidas, gas, petróleo, entre otros, ha sido primordial para mejorar la calidad de vida humana desde los inicios de la civilización.

Pero solo en las últimas décadas ha sido posible el diseño de conductos sobre una base racional con un grado comparable al obtenido en diseño estructural.

Debido a la importancia del uso de tuberías enterradas como elementos claves en el desarrollo y mantenimiento de asentamientos humanos, y teniendo en cuenta los innumerables casos de fallas que pueden afectar tanto a usuarios como a empresas prestadoras de servicios, se hace valedero analizar el comportamiento mecánico de las tuberías que se fabrican en nuestro medio, frente a las diferentes tipos de carga a los cuales pueden estar sometidos.

A continuación se presentaran el fundamento teórico que permite calcular las condiciones que actúan sobre un conducto enterrado, luego se procederá a analizar las deformaciones y esfuerzos producidos por dichas cargas mediante el uso del software ANSYS, esto aplicado a cargas que no escapan de la realidad.

8.2 CLASIFICACION DE TUBERIAS

Las tuberías pueden clasificarse en dos grandes categorías dependiendo de la respuesta que presenten frente a cargas, es decir, a su relación esfuerzo-deformación.

8.2.1 Tuberías Rígidas. Son tuberías hechas de materiales como concreto, asbesto-cemento y gres. El comportamiento de estas tuberías se caracteriza por soportar cargas altas permitiéndose deformaciones muy pequeñas antes de llegar a la falla. Estos materiales fallan a tensión, a valores relativamente bajos de deformación unitaria, a compresión suelen alcanzar esfuerzos últimos mas elevados que a tensión. Estas características hacen que estos materiales presenten un comportamiento frágil.

8.2.2 Tuberías flexibles. La presencia de un elevado punto de fluencia seguido de grandes deformaciones plásticas, absorbiendo grandes cantidades de energía antes de que ocurra la fractura, esto constituye unas características importantes de este tipo de materiales. Una ventaja de la ductilidad es que pueden presentarse traumatismos visibles si las cargas se vuelven muy grandes, permitiendo tomar acciones correctivas antes de que ocurra la fractura.

8.3 ECUACION MATEMATICA PARA EL ANALISIS ELASTICO

Como se menciona en el capítulo anterior el modelo matemático que representa el comportamiento elástico lineal plano de cualquier material sometido a una serie de cargas externas y condiciones de frontera dadas, es el siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] + C_{33} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] + f_x^* &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[C_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] + C_{33} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] + f_y^* &= 0 \end{aligned} \right\} \text{en } \Omega$$

$$\left. \begin{aligned} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] n_x + C_{33} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] n_y &= t_x^* \\ \left[C_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] n_y + C_{33} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] n_x &= t_y^* \end{aligned} \right\} \text{en } \Gamma$$

En esta sección se analizara el comportamiento elástico de tuberías sometidas a ciertas condiciones de carga haciendo uso del software ANSYS, este programa utiliza este modelo para hacer análisis de tipo estructural a materiales isotropicos de comportamiento elástico lineal.

8.4 COEFICIENTES DE ELASTICIDAD Y POISSON PARA DIVERSOS MATERIALES

Para realizar una análisis elástico de los materiales, es necesario conocer las propiedades de cada uno de ellos, para efectos del trabajo realizado, se presenta a continuación el modulo de elasticidad (E) y coeficiente de Poisson (ν) para algunos materiales que son de gran interés en el área de la ingeniería.

Tabla 2. Coeficiente de elasticidad y Poisson

MATERIAL	E	ν
	Mpa	
Concreto reforzado	20700	0.15
Suelo compacto	34.5	0.4
Suelo ligeramente compacto	20.7	0.4
Suelo suelto	10.3	0.42

Asbesto cemento	18000	0.15
Hierro galvanizado	96600	0.25
Hierro fundido	96600	0.25
Hierro dúctil	165600	0.25
NovaForm	750	0.4
Acero	207000	0.3

8.5 APLICACION A CONDUCTOS ENTERRADOS

8.5.1 Cargas sobre conductos enterrados. Las cargas a las cuales los conductos enterrados están sometidos en servicio y sus esfuerzos de soporte bajo varias condiciones de instalación pueden ser determinadas por medio de la teoría de Marston de cargas sobre tuberías enterradas.

Esta teoría se fundamenta en el concepto de que la columna de suelo encima de la tubería enterrada se modifica por la acción arco, en la cual una parte del peso se transfiere a los lados del prisma adyacente dando como resultado que en algunos casos la carga sobre el conducto pueden incrementarse por la acción arco invertida, en la cual la carga de los lados del prisma puede transmitirse al suelo que esta encima del conducto.

La teoría desarrollada por Marston se basa en un conjunto de hipótesis básicas relativas a la mecánica de los materiales involucrados. Estas hipótesis son:

Hipótesis 1: la carga sobre el conducto desarrolla asentamientos que tanto en el caso de conductos en zanja como en conductos en terraplén, el relleno no se compacta a la misma densidad del terreno circundante.

Hipótesis 2: la carga sobre una tubería enterrada es el peso de la columna de suelo sobre las tubería o menos las fuerzas de cortante verticales de los planos

imaginarios verticales que son tangentes al tubo y se proyectan hasta la parte superior del suelo.

Hipótesis 3: no hay cohesión por: transcurre mucho tiempo antes de que ocurra la cohesión y el no considerar la cohesión es un caso crítico de máxima carga sobre el conducto.

Hipótesis 4: en conductos rígidos los rellenos laterales pueden ser realmente compresibles pues en este caso de la tubería, toda, soportara toda la carga desarrollada sobre el ancho completo de la zanja.

Marston, mediante la aplicación de principios racionales de mecánica de suelos, concluyo que las cargas que actúan sobre tuberías enterrados están influenciados por:

- El asentamiento del suelo colocado sobre el conducto.
- El asentamiento del suelo colocado a los lados.
- El ancho de la zanja.
- Relación entre la altura de relleno y el ancho de la zanja.
- La clase de material de lecho.
- El grado de apisonamiento de terraplén.
- Flexibilidad del conducto.

8.5.2 Condiciones de construcción.

- **Condiciones de Zanja.** Un conducto en zanja es aquel el cual se instala en una zanja relativamente angosta en un suelo natural o inalterado y que se cubre con un relleno de tierra. La carga constitutiva por el peso del relleno queda reducida en parte por la resistencia al deslizamiento que se genera contra las paredes al asentarse dicho relleno.

Las tuberías de gres y cemento para alcantarillado sanitario se instalan generalmente en condiciones de zanja.

En este sistema, el suelo de relleno se consolida y presenta un movimiento relativo hacia abajo cerca de las paredes de la zanja. De esta forma el suelo de los lados presenta una resistencia a dicho movimiento a través de una componente de fricción hacia arriba. La diferencia entre el peso del relleno y la fricción de las paredes de la zanja es la carga que debe soportar el conducto en la base de la zanja.

- **Ancho de transición.** Al aumentar el ancho de la zanja aumenta el peso sobre la tubería hasta llegar a un punto en que el peso permanece constante aunque la zanja se amplié más. Este límite es llamado *ancho de transición*.

En condición de zanja B_d es ligeramente mayor que B_c ; la altura H es considerablemente mayor que B_d y que B_c .

- **Rigidez de la tubería.** Para establecer si en el sistema suelo-tubería se presenta un caso en que la tubería es rígida o flexible, es necesario tener en cuenta no solo la rigidez de la tubería sino que también hay que considerar, al mismo tiempo, las propiedades mecánicas del material donde se encuentra embebido el conducto.

Cuando un conducto tiene mayor rigidez que el material de relleno adyacente, la tubería soportara mayor carga que la que soporta el material de relleno.

Un conducto puede considerarse elástico cuando bajo la acción de una misma carga su deformación vertical es superior a la deformación del relleno a ambos lados del conducto.

Para determinar la relación comparativa entre la rigidez del suelo y la del conducto, Voellmy establece que:

$$n = \frac{E_S}{E_R} \left(\frac{r_m}{e} \right)^3$$

Donde:

n : Coeficiente de rigidez.

E_R : Modulo de elasticidad de la tubería $\left(\frac{Kg}{cm^2} \right)$.

E_S : Coeficiente de rigidez del terreno $\left(\frac{Kg}{cm^2} \right)$.

e : Espesor de la pared del conducto (m).

r_m : Radio medio del conducto (m).

Si $n < 1$, el conducto es más rígido que el terreno.

Si $n > 1$, el conducto es más elástico que el terreno.

Las tuberías de asbesto-cemento y metal flexible corrugadas pueden considerarse como flexibles bajo espesores de pared limite dados y cuando el terreno de relleno lateral y superior ha sido compactado a no menos del 90% de Proctor modificado.

- **Conductos en condición de terraplén o proyección.** Cuando un tubo se encuentra en el fondo de una excavación cuyo ancho es grande en comparación con la altura del relleno, o cuando el mismo y las adyacencias del terreno sobre el cual se apoya son cubiertas por una capa uniforme de material de relleno se considera que esta instalado en condiciones de terraplén. En este caso interviene en la producción del empuje vertical sobre el tubo, no solo el peso del prisma de

tierra que descansa directamente encima, sino también las diferencias de asentamiento entre dicho prisma y el relleno del terreno a ambos lados. Si como ocurre en la mayor parte de los casos de tubos de asbesto-cemento, este último asentamiento es mayor que el del prisma de tierra superior al tubo, se produce un efecto de arrastre hacia abajo que se concreta en una sollicitación adicional. La incidencia de estos diversos asentamientos de los rellenos es tratada en cada uno de los diversos casos de instalación.

Tabla 3. Coeficientes de rigidez del terreno $\left(\frac{Kg}{cm^2}\right)$

MATERIAL	MINIMO	MAXIMO
Pedregullo compacto	1000	2000
Arena compacta	500	800
Arena floja	100	200
Arena fina	30	100
Arcilla semi-resistente	80	150
Arcilla plástica firme	40	80
Arcilla plástica floja	15	40
Terreno empapado (lodo)	5	30
Turba	1	5

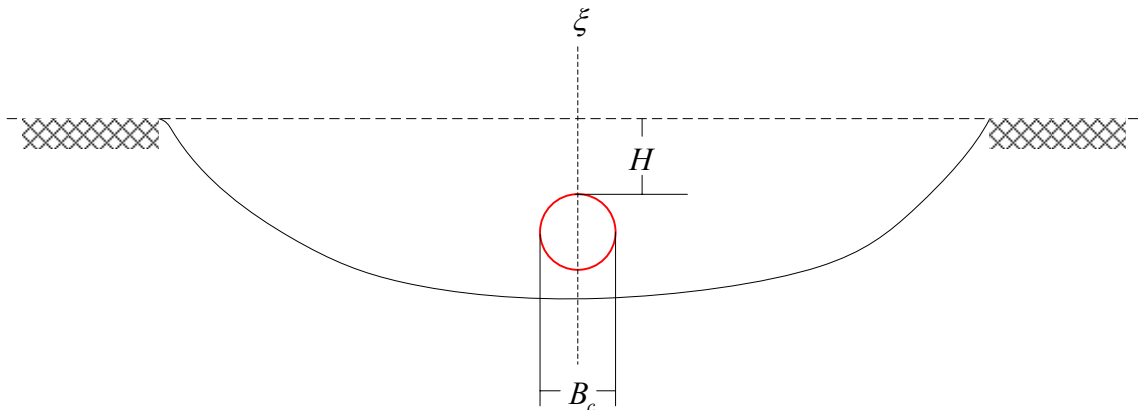
Las principales variantes de instalación de una tubería en la condición de terraplén, son las siguientes:

- **Conductos en proyección positiva.** Es el caso de un tubo que descansa sobre el terreno natural al que se recubre con un relleno parejo de altura H sobre la generatriz superior del tubo. Esta condición es muy común en alcantarillados de carreteras de acuerdo como se asiente el terreno natural

y del relleno y también teniendo en cuenta la rigidez del tubo puede considerarse en condición de zanja o terraplén.

- **Conductos en proyección negativa.** Un conducto esta en condición de terraplén, en negativa, cuando descansa en una zanja angosta rellena sin compactar hasta el nivel del terreno natural el cual a su vez se recubre con un relleno hasta una altura H , medida a partir de la generatriz superior del tubo. Esta es una condición de instalación más favorable y resulta aun mas efectiva cuando más suelto sea el suelo con que se rellena la zanja.
- **Ancho de zanja.** Ocurre cuando el ancho de la zanja es bastante mayor que la altura del relleno de manera que su condición de carga se considera igual que la condición del terraplén.

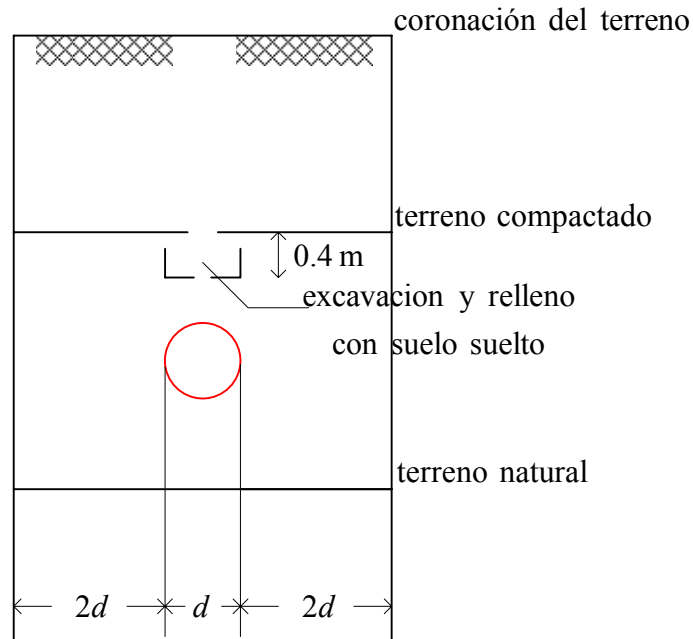
Figura 92. Zanja ancha



- **Zanja imperfecta.** Para tener un conducto en la condición de zanja imperfecta se procede de la siguiente manera: se comienza por instalarlo en la condición de proyección positiva y luego que el material de relleno es colocado y bien apisonado hasta una altura determinada se excava una zanja en el terraplén compactado directamente arriba del tubo. El ancho de esta zanja debe ser igual al diámetro exterior y la excavación debe

detenerse a unos 30 cm. por encima de la clave del tubo. Esta zanja se vuelve a rellenar con material suelto y sin compactar, a veces mezclado con paja, hojas... Finalmente se completa el terraplén hasta la altura final.

Figura 93. Zanja imperfecta



8.5.3 Cálculo de la carga vertical sobre el tubo en condición de zanja. Teoría de Marston.

- **Cargas en conductos rígidos.** Las expresiones desarrolladas por Marston para este caso son:

$$W_c = C_d * \gamma * B_d^2; \quad C_d = \frac{1 - e^{-2KU' \left(\frac{h}{B_d} \right)}}{2KU'}$$

Donde:

W_c : Carga vertical sobre el conducto en $\left(\frac{Kg}{m} \right)$.

γ : Peso específico del material de relleno $\left(\frac{Kg}{m^3}\right)$.

B_c : Ancho horizontal exterior del conducto en m.

B_d : Ancho horizontal de la zanja en la clave del conducto en m.

h : Altura vertical desde la superficie del terreno hasta cualquier plano horizontal del relleno en m.

KU' : Relación entre la presión unitaria lateral activa y presión unitaria vertical.

Cargas en conductos flexibles. Se considera que existe una reducción de carga sobre el conducto flexible que es una función de la relación que existe entre la tubería y la del relleno lateral adyacente. La expresión es la siguiente:

$$W_c = C_d * \gamma * B_d * B_c * m; \quad m = \frac{5 + 3n}{(1 + n)(3 + n)}; \quad n = \frac{E_S}{E_R} \left(\frac{r_m}{e}\right)^3$$

Donde:

n : Coeficiente de rigidez.

E_R : Modulo de elasticidad del conducto $\left(\frac{Kg}{cm^2}\right)$.

E_S : Coeficiente de rigidez del terreno $\left(\frac{Kg}{cm^2}\right)$.

r_m : Radio medio del conducto (m).

8.5.4 Calculo de la carga vertical sobre el tubo en condición de terraplén.

Conductos en proyección positiva. Marston derivó una ecuación para calcular la carga vertical sobre un conducto en proyección positiva, expresada por:

$$W_c = C_c * \gamma * B_c^2$$

Donde los valores de la constante C_c se calculan de acuerdo a las siguientes expresiones, formuladas para cada uno de los casos en que se subdividen los conductos en proyección positiva como sigue:

Conductos en proyección positiva en condición de proyección completa:

$$C_c = \frac{e^{2KU\left(\frac{H}{B_c}\right)^{-1}}}{2KU}$$

Conductos en proyección positiva en condición de proyección incompleta:

$$C_c = \frac{e^{2KU\left(\frac{H}{B_c}\right)^{-1}}}{2KU} + \left(\frac{H - H_e}{B_c}\right) e^{2KU\left(\frac{H_e}{B_c}\right)}$$

La notación general es la siguiente:

C_c : Coeficiente de carga

H_e : Altura del plano de igual asentamiento m .

El resto de las variables fueron definidas anteriormente. El cálculo de H_e puede ser tedioso debido a su dificultad y tiempo empleado en resolverlo, debido a esto en este trabajo, se emplearan unos gráficos que expresan C_c en función de H , B_c , r_{sd} y P , estos últimos dos términos se definen como sigue:

Factor de proyección (P): El factor de proyección establece el grado de hundimiento del conducto en el terreno de apoyo (ver figura 95) El factor de proyección tiene el siguiente valor:

$$P = 1 - 0.5 \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

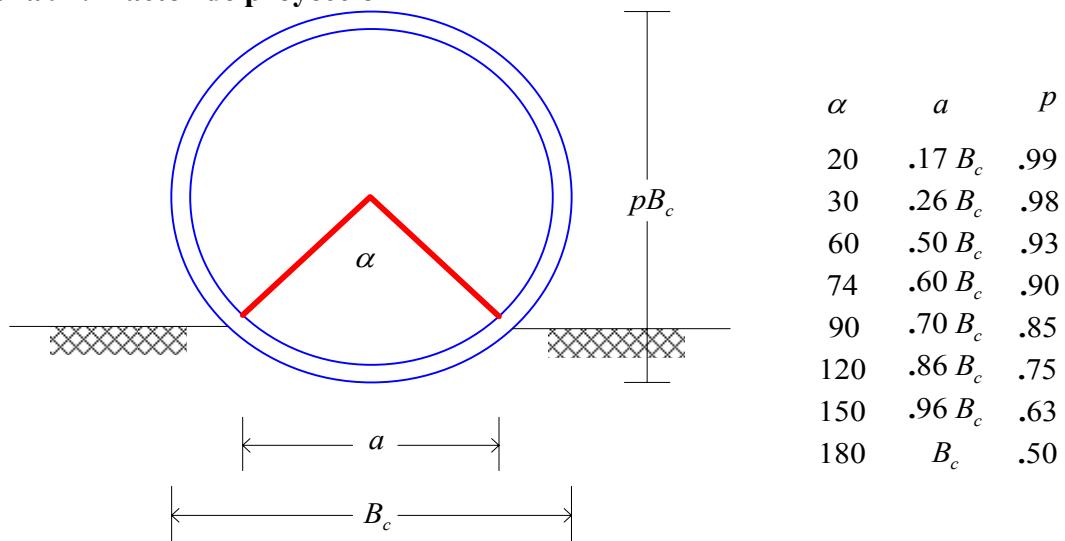
Razón o coeficiente de asentamiento (r_{sd}): El coeficiente de asentamiento (r_{sd}), expresa la relación entre el movimiento relativo del

plano horizontal tangente al tubo en su clave y el acortamiento del terraplén a los lados del tubo. Este valor puede ser establecido mediante la siguiente tabla:

Tabla 4. Valores de la razón de asentamiento r_{sd}

Condiciones	Razón de asentamiento
Alcantarilla rígida sobre fundación de roca o terreno incompresible.	$r_{sd} : +1.0$
Alcantarilla rígida sobre fundación de suelo ordinario.	$r_{sd} : +0.5$ a $+0.8$
Alcantarilla rígida sobre fundación de materiales flexibles con respecto al terreno natural adyacente.	$r_{sd} : 0.0$ a $+5$
Alcantarilla flexible con rellenos laterales débilmente compactados	$r_{sd} : -0.4$ a 0.0
Alcantarilla flexible con rellenos laterales bien compactados	$r_{sd} : -0.2$ a $+0.8$

Figura 94. Factor de proyección



Conductos en proyección negativa. La formula derivada por Marston para el cálculo de cargas verticales sobre un conducto en proyección negativa es:

$$W_c = C_n * \gamma * B_d^2$$

Los valores del coeficiente de carga C_n para los casos en que se subdividen los conductos en la condición de proyección negativa son:

Conductos en proyección negativa en condición de proyección completa:

$$C_n = \frac{e^{-2KU\left(\frac{H}{B_d}\right)-1}}{2KU}$$

Conductos en proyección negativa en condición de proyección incompleta:

$$C_n = -\frac{e^{-2KU\left(\frac{H}{B_d}\right)-1}}{2KU} + \left(\frac{H - H_e}{B_d}\right) e^{-2KU\left(\frac{H_e}{B_d}\right)}$$

Para la conducción de zanja incompleta, el valor de C_n puede ser estimado mediante el uso de graficas que relacionan el coeficiente de asentamiento (r_{sd}), con el cociente entre la altura de relleno y el ancho de la zanja.

8.5.4 Ejemplo. A continuación se plantea una conducción enterrada, en la cual se presentaran diversas secciones las cuales serán analizadas mediante el programa ANSYS:

Caso 1 ($K_0 + 0.64$):

Se encuentra la tubería de concreto con las siguientes condiciones.

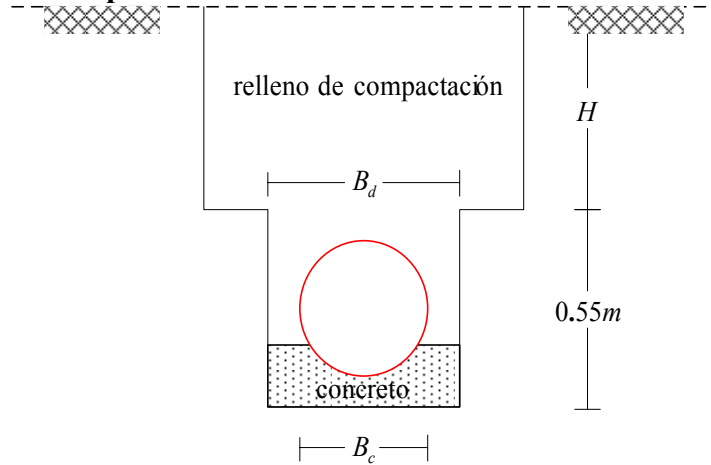
$$\phi_{nominal} = 12''$$

$$\phi_{int} = 0.30m$$

$$\phi_{ext} = 0.35m$$

$$B_d = 0.75m$$

Figura 95. Condiciones para tramo tubería ($K_0 + 0.64$)



Profundidad sobre el tubo = 3.40 m

$$\gamma_{relleno} = 1764 \frac{kg}{m^3}$$

$$KU = 0.1650$$

$$espesor = 0.025m$$

Este caso corresponde a una conducción en condición de zanja por lo tanto se calcula la carga resultante de las acciones externas sobre el conducto de la siguiente manera:

Calculo de los coeficientes:

$$W_c = C_d * \gamma * B_d^2; \quad C_d = \frac{1 - e^{-2KU' \left(\frac{h}{B_d} \right)}}{2KU'}$$

$$C_d = \frac{1 - e^{-2(0.165) \left(\frac{3.4}{0.75} \right)}}{2(0.165)} = 2.35$$

$$W_c = 2.35 * 1764 * (0.75)^2 = 2333.2 \frac{kg}{m}$$

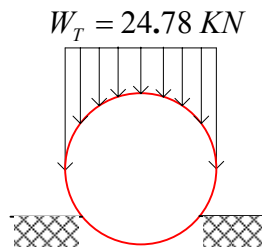
La carga viva es la siguiente:

$$W_l = 145.15 \frac{kg}{m}$$

Donde la carga total se calcula como:

$$W_T = W_c + W_l$$

Por lo tanto el diagrama del cuerpo libre para esta sección era la siguiente:



Se procede a utilizar el programa ANSYS de la siguiente manera:

Se define la geometría y se enmalla por medio de elementos triangulares de 6 nodos quedando de la siguiente manera:

Figura 96. Sección discretizada con elementos triangulares

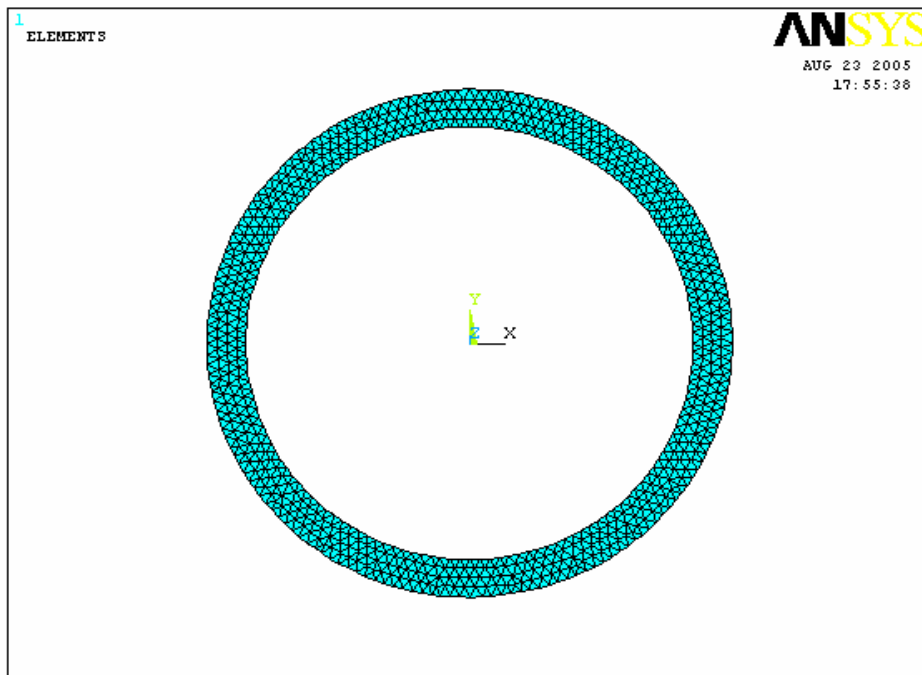
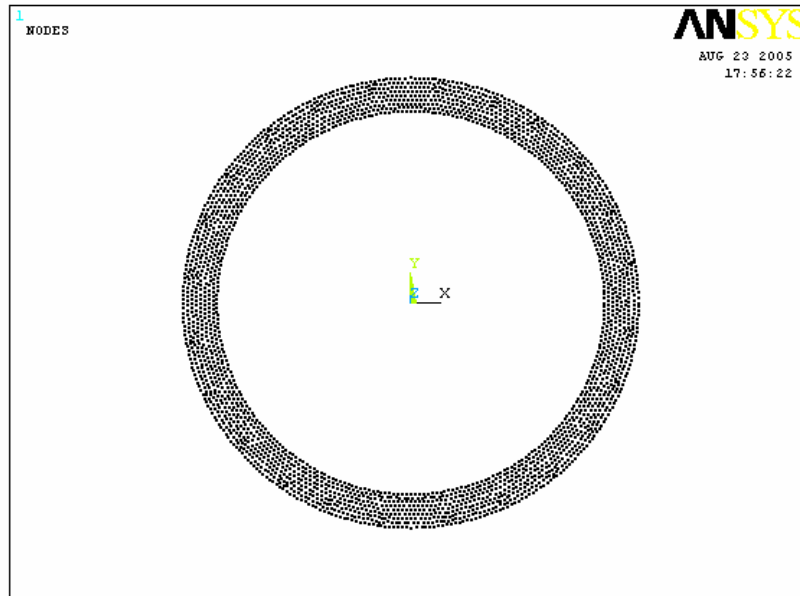
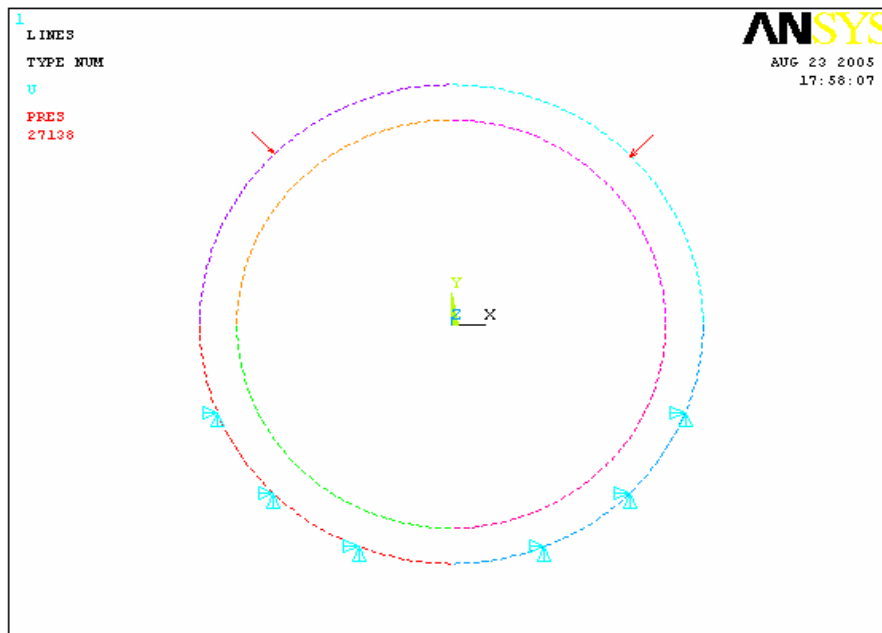


Figura 97. Nodos de la sección discretizada



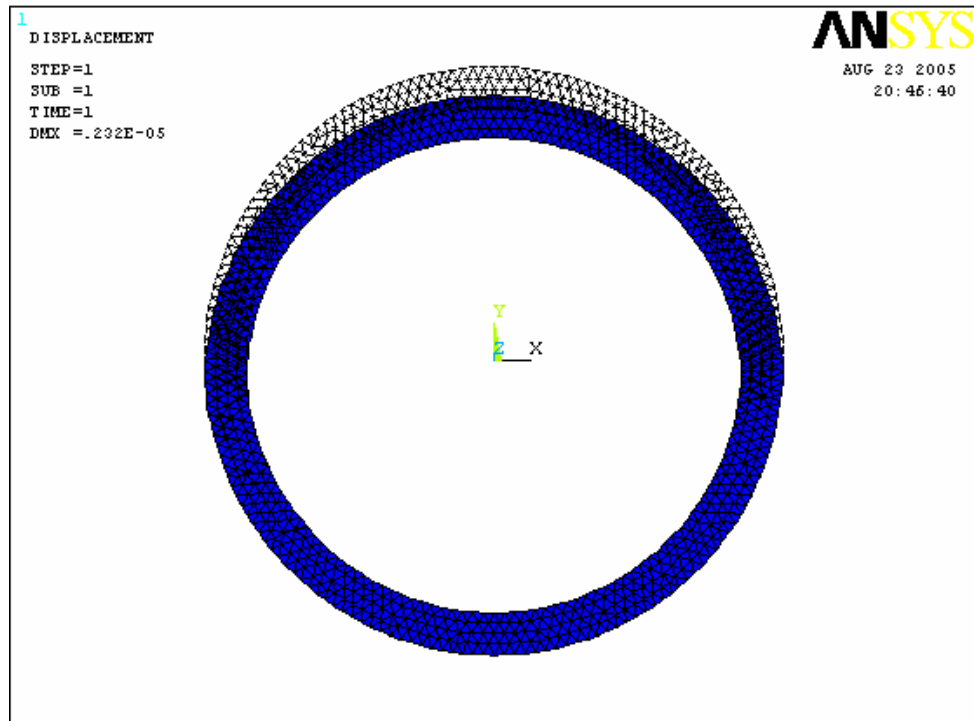
Definidos los elementos se procede a asignar las cargas y a restringir los desplazamientos de la siguiente manera:

Figura 98. Aplicación de cargas y restricciones de desplazamientos



Una vez ingresados los valores de las fuerzas y las restricciones a los desplazamientos, se calcula la solución y se observan los desplazamientos obtenidos ante las condiciones dadas:

Figura 99. Sección deformada caso 1

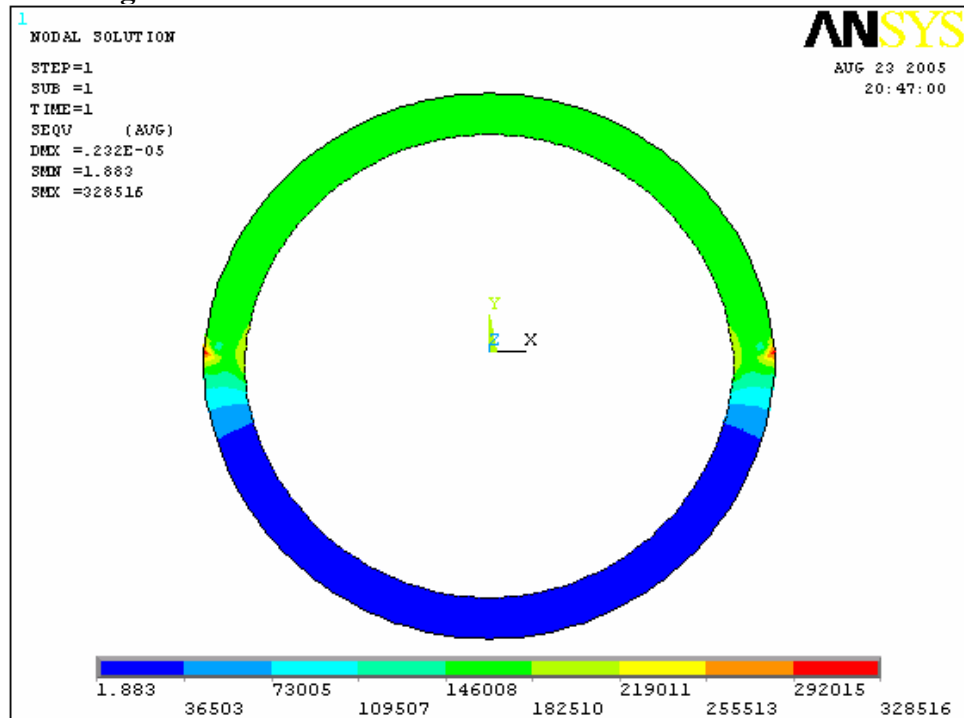


De esta manera se puede apreciar las deformaciones producidas en la sección de la tubería de concreto.

Haciendo este mismo análisis para otros materiales como los son novaform y hierro fundido, se obtiene:

	Concreto	Novaform	Hierro fundido
Deformación máxima en metros.	2.32E-06	6.28E-05	4.93E-07

Figura 100. Diagrama de von Mises caso 1



Como se esperaba, debido a las propiedades mecánicas de cada material como lo es el modulo de elasticidad y el modulo de Poisson; en el novaform se produjeron mayores deformaciones.

Caso 2 ($K_0 + 150$):

Se encuentra la tubería de concreto con las siguientes condiciones:

$$\phi_{nominal} = 12''$$

$$\phi_{int} = 0.30m$$

$$\phi_{ext} = 0.35m$$

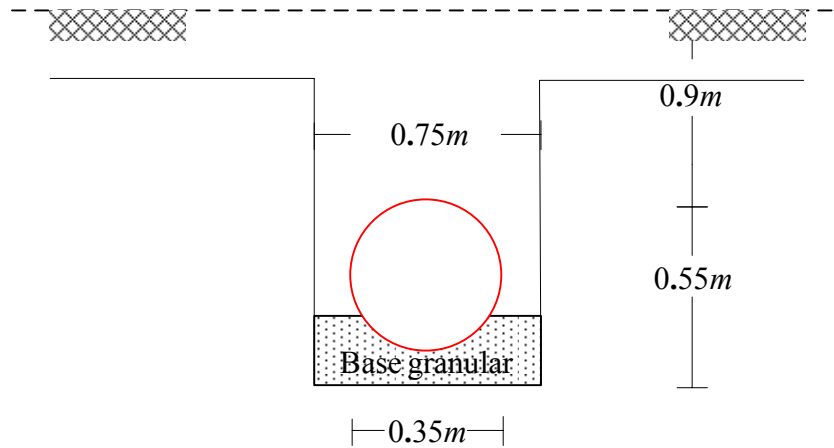
$$B_d = 0.75m$$

Profundidad sobre el tubo = 0.9 m

$$\gamma_{relleno} = 2084 \frac{kg}{m^3}$$

$$espesor = 0.025m$$

Figura 101. Condiciones para tramo tubería ($K_0 + 150$)



Este caso corresponde a una conducción en proyección negativa en condición de zanja completa, por lo tanto se calcula la carga resultante de las acciones externas sobre el conducto de la siguiente manera:

$$W_T = W_c + W_l$$

La carga producida por el material sobre la tubería se calcula como:

$$W_c = C_d * \gamma * B_d^2$$

Donde C_d para las condiciones dadas tendrá un valor de:

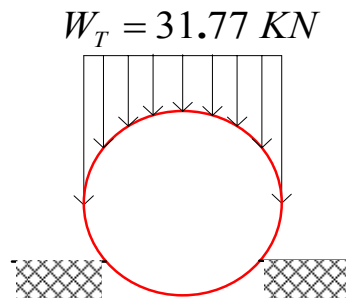
$$C_d = 1.70$$

$$W_c = 1.7 * 2084 * (0.35)^2 = 433.9 \frac{kg}{m}$$

La carga viva es la siguiente:

$$W_l = 2743.3 \frac{kg}{m}$$

Por lo tanto el diagrama del cuerpo libre para esta sección es el siguiente:



Se procede a utilizar el programa ANSYS de manera similar al caso anterior y se obtienen los siguientes resultados:

Figura 102. Sección deformada caso 2

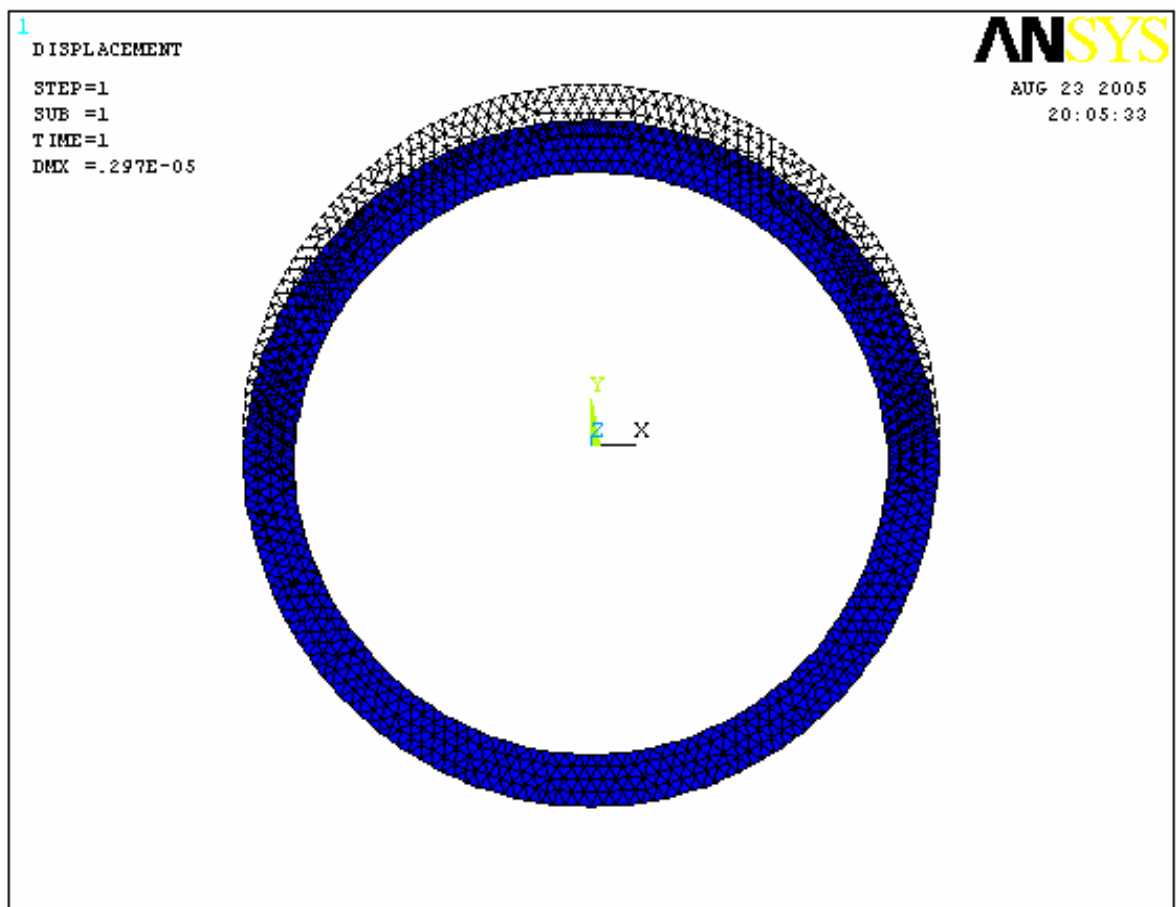
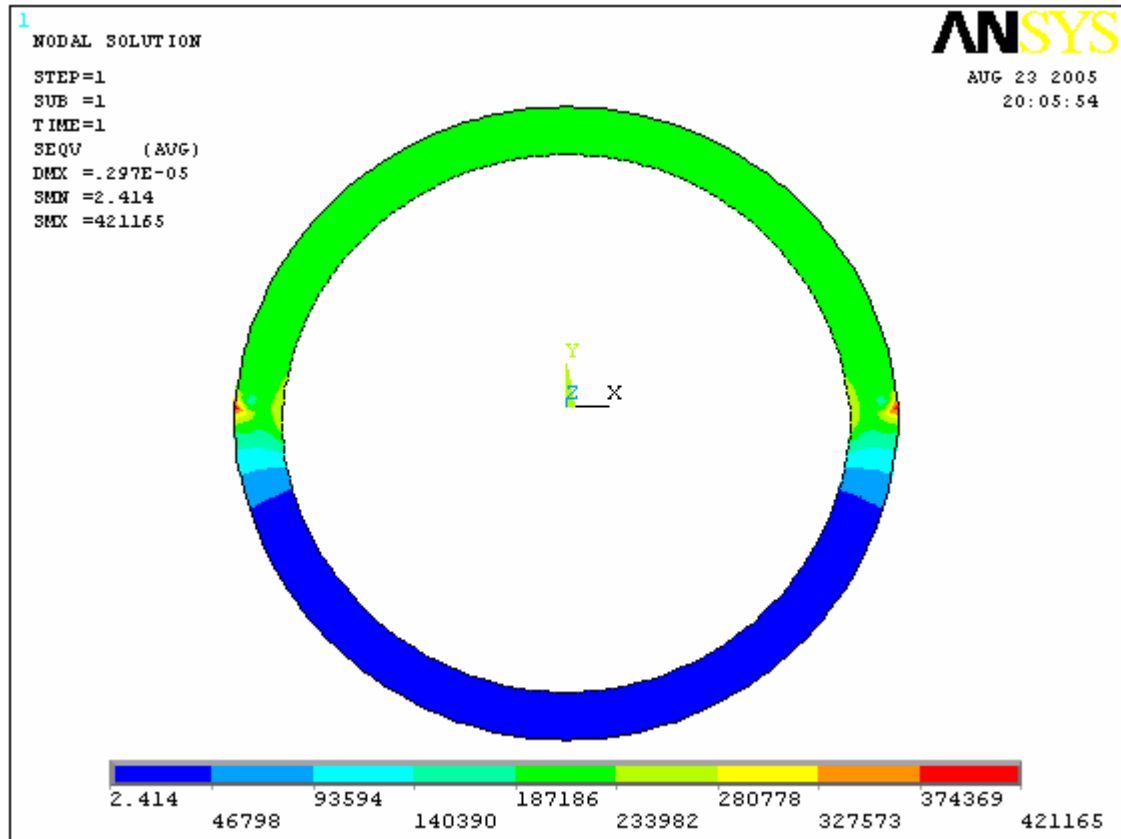


Figura 103. Diagrama de von Mises caso 2



Haciendo este mismo análisis para otros materiales como los son Novaform y hierro fundido, se obtiene:

	Concreto	Novaform	Hierro fundido
Deformación máxima en metros.	2.97E-06	8.05E-05	6.33E-7

Caso 3 ($K_0 + 500$):

Se encuentra la tubería de concreto con las siguientes condiciones:

$$\phi_{nominal} = 14''$$

$$\phi_{int} = 0.36m$$

$$\phi_{ext} = 0.42m$$

$$B_d = 0.87m$$

Profundidad sobre el tubo = 2.2 m

$$\gamma_{relleno} = 1602 \frac{kg}{m^3}$$

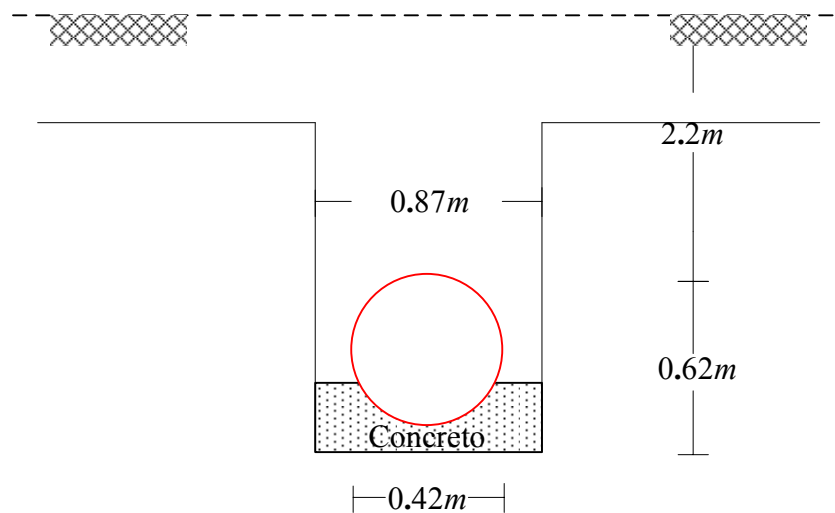
$$espesor = 0.03m$$

$$KU = 0.187$$

Pendiente = 13 %

$$C_c = 8.80$$

Figura 104. Condiciones para tramo tubería ($K_0 + 500$)



Este caso corresponde a una conducción en proyección negativa en condición de proyección incompleta, por lo tanto se calcula la carga resultante de las acciones externas sobre el conducto de la siguiente manera:

$$W_T = W_c + W_i$$

Calculo de las cargas:

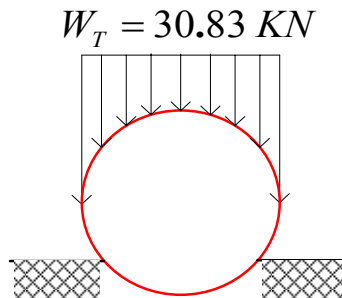
$$W_c = C_c * \gamma * B_d^2$$

$$W_c = 8.8 * 1602 * (0.42)^2 = 2486.8 \frac{kg}{m}$$

La carga viva es la siguiente:

$$W_l = 596.72 \frac{kg}{m}$$

Por lo tanto el diagrama del cuerpo libre para esta sección era la siguiente:



Se procede a utilizar el programa ANSYS de manera similar al caso anterior y se obtienen los siguientes resultados:

Figura 105. Sección deformada caso 3

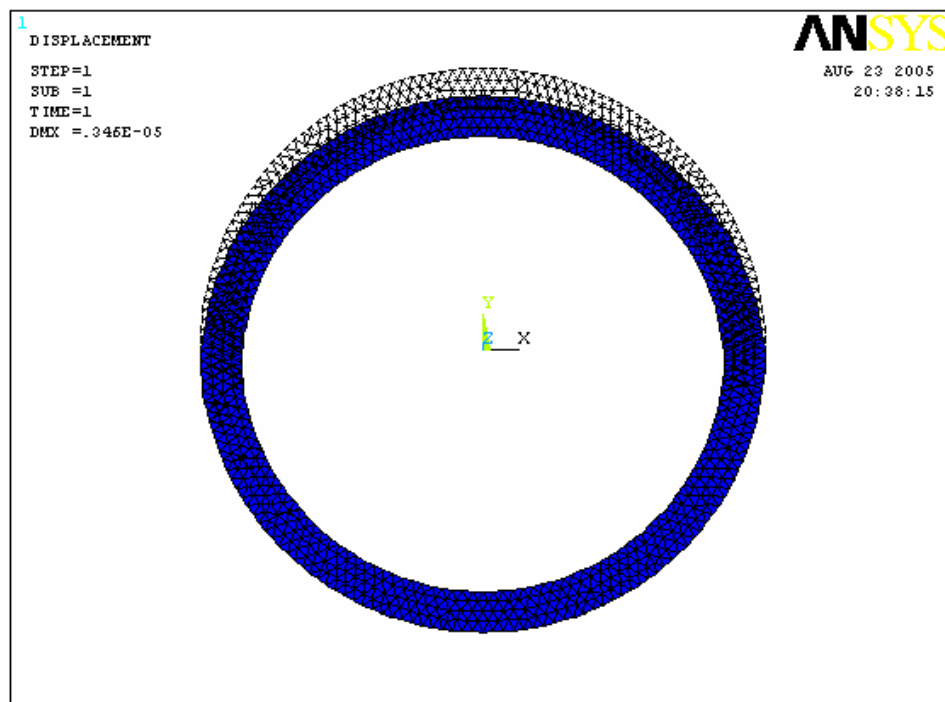
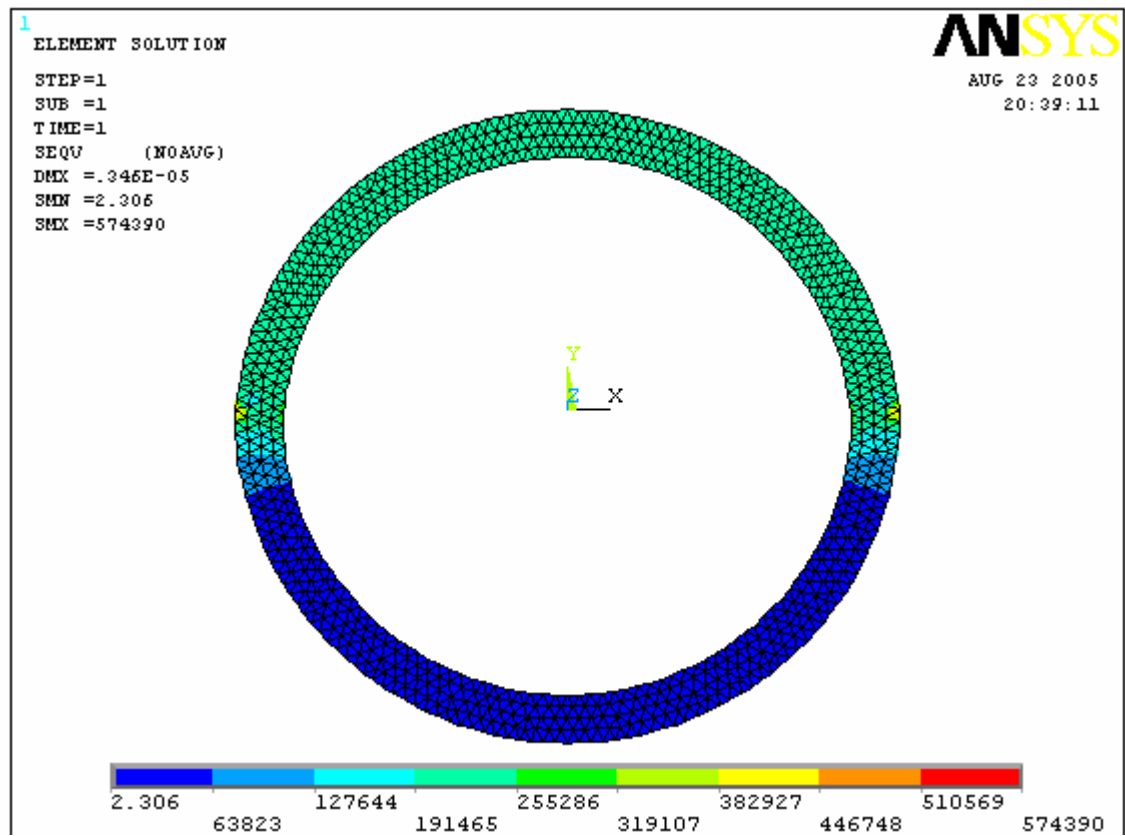


Figura 106. Diagrama de von Mises caso 3



Haciendo este mismo análisis para otros materiales como los son Novaform y hierro fundido, se obtiene:

	Concreto	Novaform	Hierro fundido
Deformación máxima en metros.	3.46E-06	9.38E-05	7.36E-07

Caso 4 ($K_0 + 720$):

Se encuentra la tubería de concreto con las siguientes condiciones:

$$\phi_{nominal} = 18''$$

$$\phi_{int} = 0.46m$$

$$\phi_{ext} = 0.54m$$

Profundidad sobre el tubo = 4.5 m

$$\gamma_{relleno} = 2084 \frac{kg}{m^3}$$

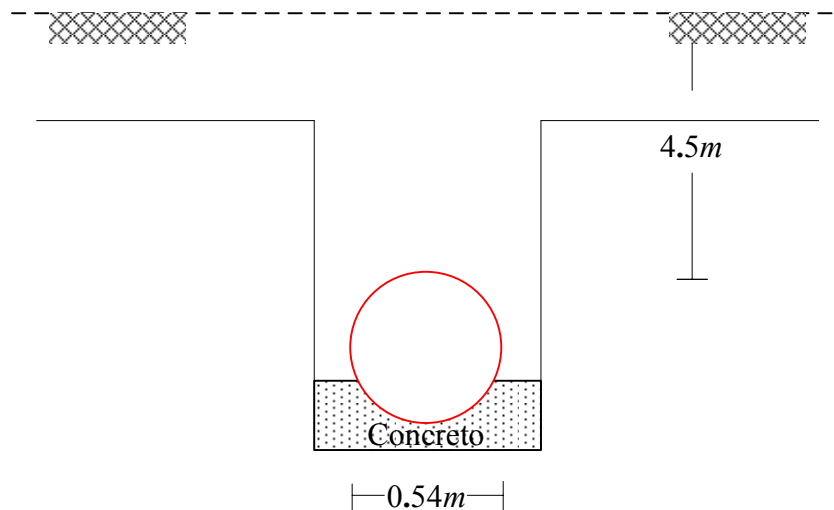
$$espesor = 0.04m$$

$$r_{ds} = -0.5$$

Pendiente = 16 %

$$C_n = 4.2$$

Figura 107. Condiciones para tramo tubería ($K_0 + 720$)



Este caso corresponde a una conducción en proyección negativa en condición de zanja incompleta, por lo tanto se calcula la carga resultante de las acciones externas sobre el conducto de la siguiente manera:

$$W_T = W_c + W_l$$

Calculo de las cargas:

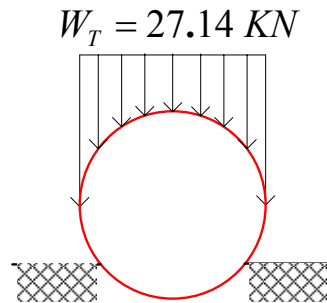
$$W_c = C_n * \gamma * B_d^2$$

$$W_c = 4.2 * 2084 * (0.54)^2 = 2552.5 \frac{kg}{m}$$

La carga viva es la siguiente:

$$W_l = 161.3 \frac{kg}{m}$$

Por lo tanto el diagrama del cuerpo libre para esta sección era la siguiente:



Se procede a utilizar el programa ANSYS de manera similar al caso anterior y se obtienen los siguientes resultados:

Figura 108. Sección deformada caso 4

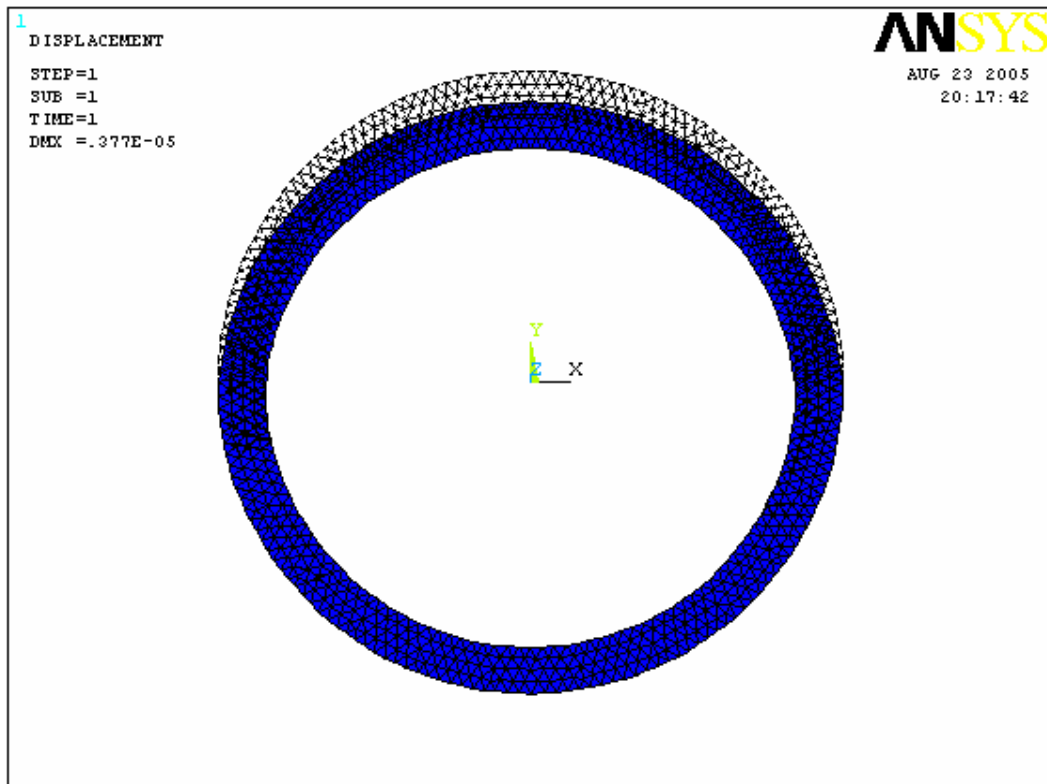
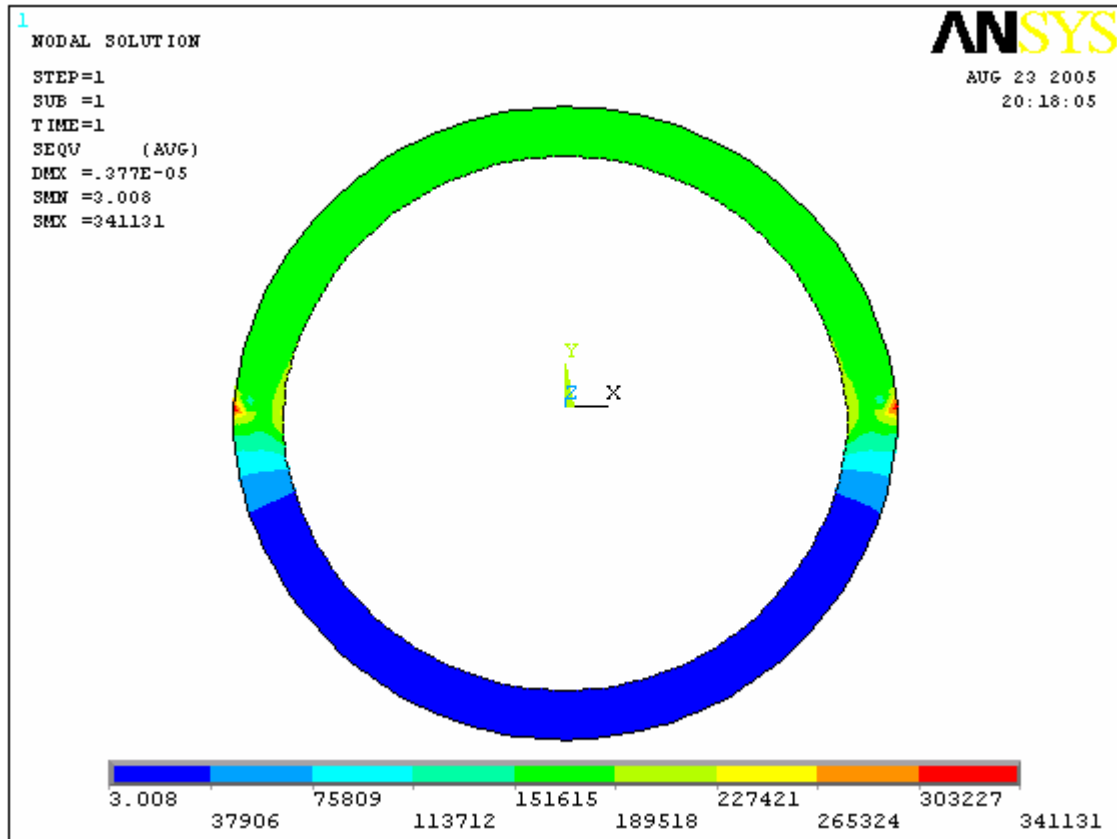


Figura 109. Diagrama de von Mises caso 4



Haciendo este mismo análisis para otros materiales como los son Novaform y hierro fundido, se obtiene:

	Concreto	Novaform	Hierro fundido
Deformación máxima en metros.	3.77E-06	1.02E-04	8.03E-07

Caso 5 ($K_0 + 980$):

Se encuentra la tubería de concreto con las siguientes condiciones:

$$\phi_{nominal} = 16''$$

$$\phi_{int} = 0.41m$$

$$\phi_{ext} = 0.48m$$

Profundidad sobre el tubo = 1.7 m

$$\gamma_{relleno} = 1602 \frac{kg}{m^3}$$

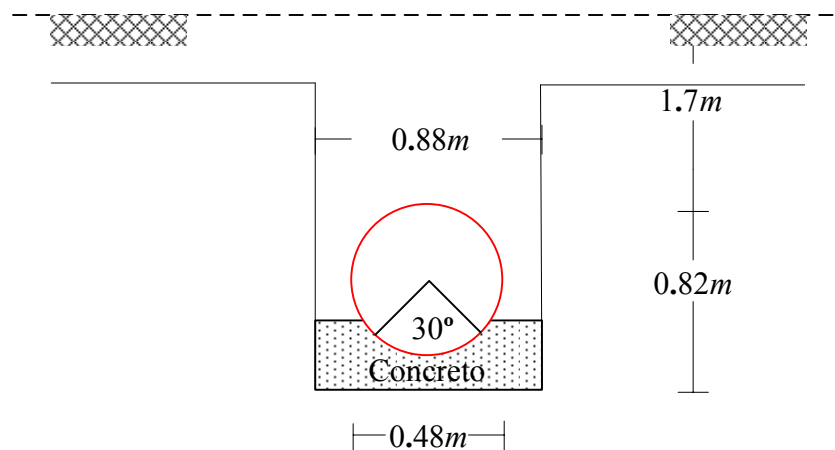
$$espesor = 0.035m$$

$r_{ds} = 1.0$ Alcantarilla rígida sobre fundación de roca o terreno incompresible.

Pendiente = 9.2 %

$$KU = 0.187$$

Figura 110. Condiciones para tramo tubería ($K_0 + 980$)



Este caso corresponde a una conducción en proyección positiva en condición de proyección completa, por lo tanto se calcula la carga resultante de las acciones externas sobre el conducto de la siguiente manera:

Calculo de los coeficientes:

$$W_c = C_c * \gamma * B_d^2$$

Donde C_c para las condiciones dadas tendrá un valor de:

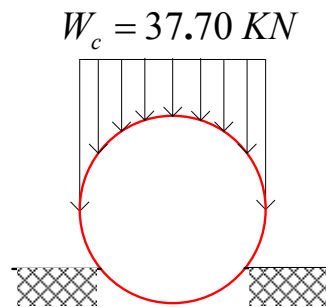
$$C_c = 7.90$$

$$W_c = 7.9 * 1602 * (0.48)^2 = 2915.6 \frac{kg}{m}$$

La carga viva es la siguiente:

$$W_c = 854.78 \frac{kg}{m}$$

Por lo tanto el diagrama del cuerpo libre para esta sección era la siguiente:



Se procede a utilizar el programa ANSYS de manera similar al caso anterior y se obtienen los siguientes resultados:

Figura 111. Sección deformada caso 5

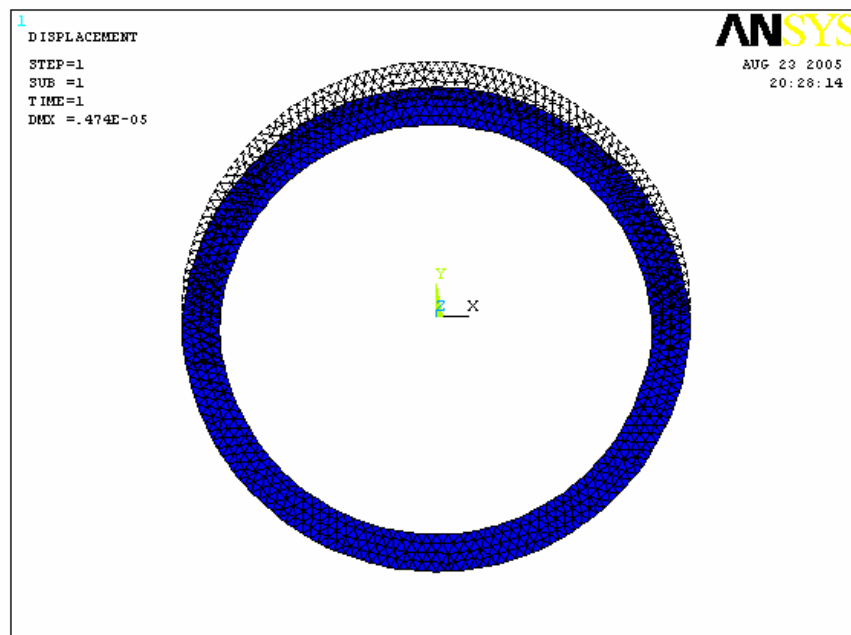
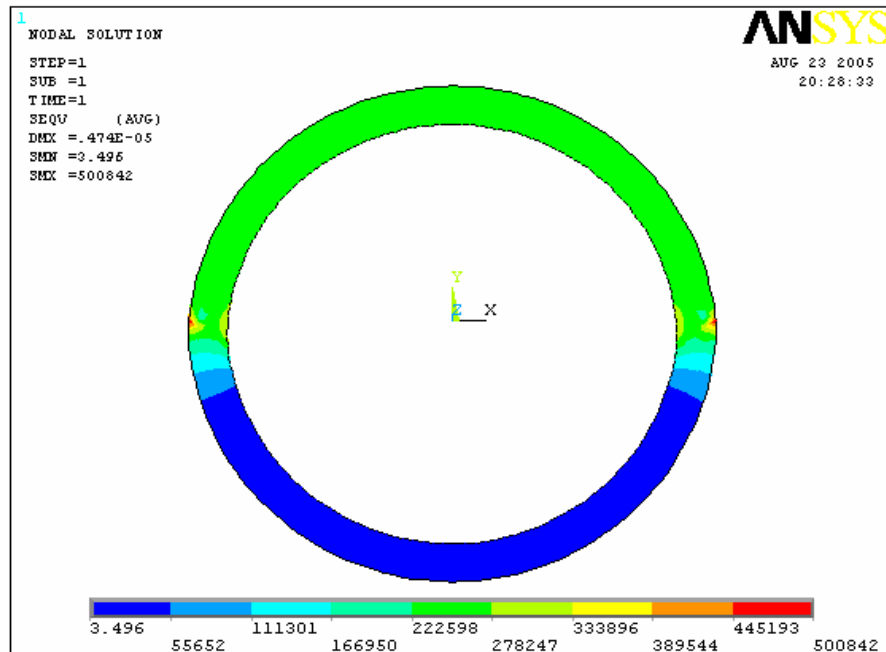


Figura 112. Diagrama de von Mises caso 5



Haciendo este mismo análisis para otros materiales como los son Novaform y hierro fundido, se obtiene:

	Concreto	Novaform	Hierro fundido
Deformación máxima en metros.	4.74E-06	1.28E-04	1.01E-06

En de cada uno de los casos anteriores se conservo el mismo comportamiento de cada uno de los materiales modelados, es decir las mayores deformaciones se obtuvieron como se esperaba para la tubería flexible (novaform) y las menores fueron para las tuberías de hierro fundido, lo cual sugiere una mayor ductilidad del primer material que del segundo, factor importantísimo a la hora de hacer selección de materiales.

8.6 APLICACION A PILOTES

8.6.1 PILOTES. Un pilote es un elemento estructural usado generalmente para garantizar la estabilidad de una masa de suelo que requiera una cimentación relativamente profunda.

Los pilotes han sido utilizados en ocasiones para la estabilización de deslizamientos activos, siendo su uso apropiado en deslizamientos poco profundos y suelos que no fluyan entre los pilotes. En este caso los pilotes están sometidos a fuerzas horizontales que sugieren un análisis por flexión para su diseño.

Considerando la importancia que pueden llegar a tener los pilotes como elementos estructurales en obras de tierra se analizara a continuación las deformaciones y esfuerzos de la sección transversal de un pilote hincado usado en estabilización de un deslizamiento activo. Dicho análisis se realizara con ayuda del software ANSYS, el cual usando el modelo matemático de elasticidad lineal y el método de los elementos finitos simulara el efecto de las cargas sobre la sección transversal del pilote.

8.6.2 Ejemplo. A continuación se analizaran las deformaciones de una sección transversal del pilote de acero considerando las siguientes condiciones:

$$\text{Diámetro exterior: } d_{\text{int}} = 8\frac{5}{8} \text{ in} = 219 \text{ mm} = 0.219 \text{ m}$$

$$\text{Espesor de pared: } e = .0125 \text{ in} = 3.17 \text{ mm} = 3.17 \text{ E} - 3 \text{ m}$$

$$\text{Diámetro interior: } d_{\text{int}} = 212.6 \text{ mm} = 0.212 \text{ m}$$

$$\text{Inercia de la sección: } I_p = 2.02 \text{ E} - 4 \text{ m}^4$$

$$\text{Modulo de Young: } E = 207 \text{ E}6 \text{ kN/m}$$

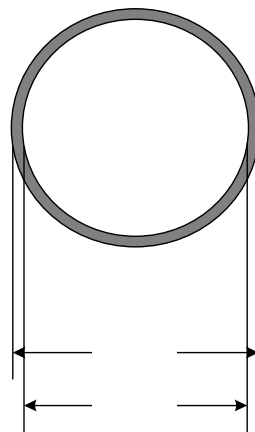
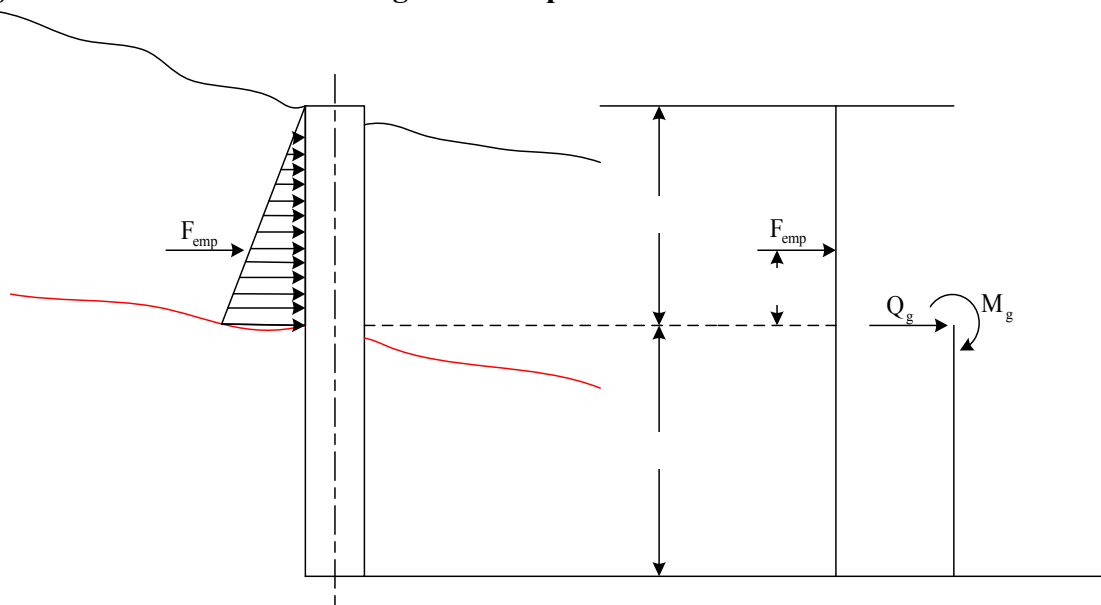
$$\text{Modulo de Poisson: } \nu = 0.3$$

Modulo de reacción horizontal del suelo: $n_h = 16700 \text{ kN/m}^3$

Peso específico del suelo en movimiento: $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$

Con estos datos se tiene que la fuerza de empuje del suelo en movimiento aplicada sobre el pilote es $F_{\text{emp}} = 68.04 \text{ kN}$. Lo cual redunda en una fuerza horizontal $Q_g = 68.04 \text{ kN}$ y un momento $M_g = 88.45 \text{ kN} \cdot \text{m}$ aplicados a una profundidad de 4.0 m bajo la superficie.

Figura 113. Condiciones de carga sobre el pilote



Masa en movimiento

Ahora utilizando el método de Matlock y Reese (1960) se calculan los momentos y fuerzas cortantes a cualquier profundidad mediante las siguientes ecuaciones:

$$M_z(z) = A_m Q_g T + B_m M_g \quad , \quad V_z(z) = A_v Q_g + B_v \frac{M_g}{T}$$

Donde:

A_m, A_v, B_m, B_v son coeficientes

$T = \sqrt[5]{\frac{E_p I_p}{n_h}}$, es la longitud característica del sistema suelo-pilote

Se calculan el momento y fuerza cortante cada 0.5 m a partir del inicio del estrato estable, los resultados obtenidos se muestran en la tabla que sigue.

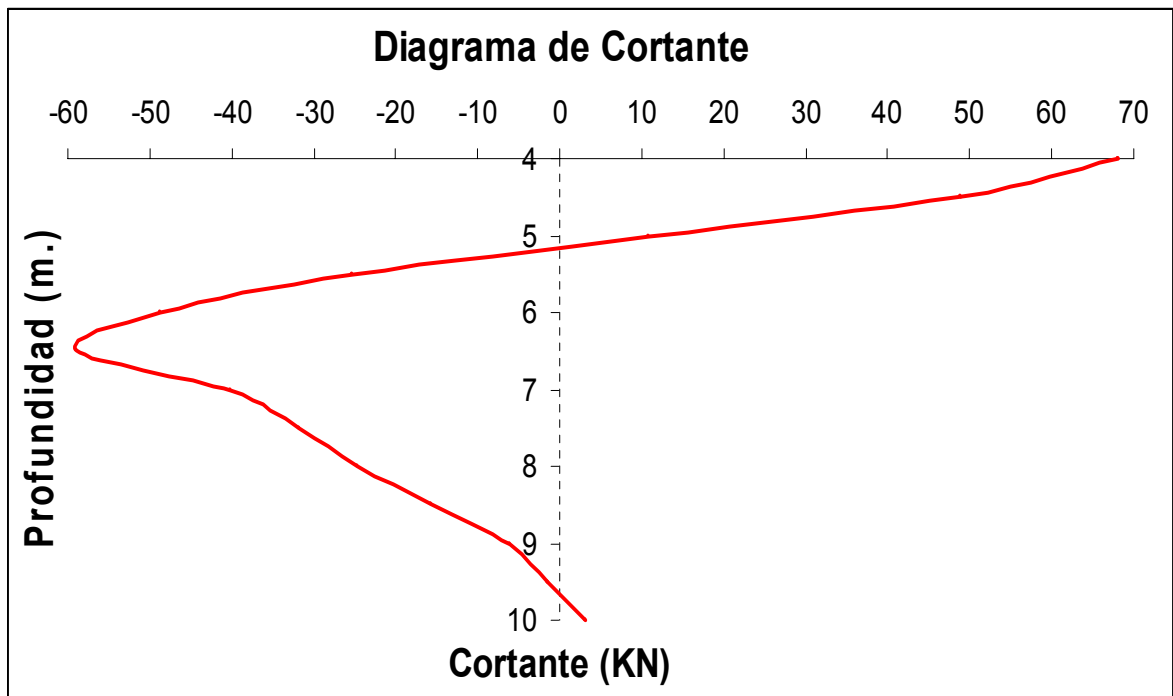
Tabla 5. Valores de momento y fuerza cortante para la sección del pilote

z	Z	Am	Bm	Av	Bv	Mz	Vz
4	0	0	1	1	0	88.45	68.04
4.5	0.416	0.379	0.99	0.82	-0.095	118.51	48.79
5	0.833	0.653	0.905	0.465	-0.282	113.364	10.852
5.5	1.25	0.769	0.725	0.095	-0.43	126.915	-25.231
6	1.666	0.721	0.515	-0.2	-0.477	104.421	-48.767
6.5	2.083	0.615	0.404	-0.371	-0.456	85.948	-58.854
7	2.5	0.51	0.2	-0.36	-0.213	59.331	-40.194
7.5	2.916	0.23	0.082	-0.349	-0.109	26.032	-31.78
8	3.333	0.185	0	-0.199	-0.15	15.105	-24.596
8.5	3.75	0.025	-0.1	-0.175	-0.05	-6.803	-15.592

9	4.166	0.005	-0.042	-0.11	0.02	-3.306	-6.010
9.5	4.853	-0.016	-0.3	-0.05	0.025	-27.841	-1.559
10	5	-0.033	-0.026	0.015	0.029	-4.994	3.158

El diagrama de cortante del pilote a partir del estrato estable queda como se muestra en la siguiente figura:

Figura 114. Diagrama de cortante del pilote



Realizando un análisis a la sección transversal del pilote por medio del programa ANSYS, en el punto de mayor esfuerzo, que ocurre cuando la profundidad es igual a 4 metros se tiene:

Figura 115. Sección del pilote discretizada con elementos triangulares

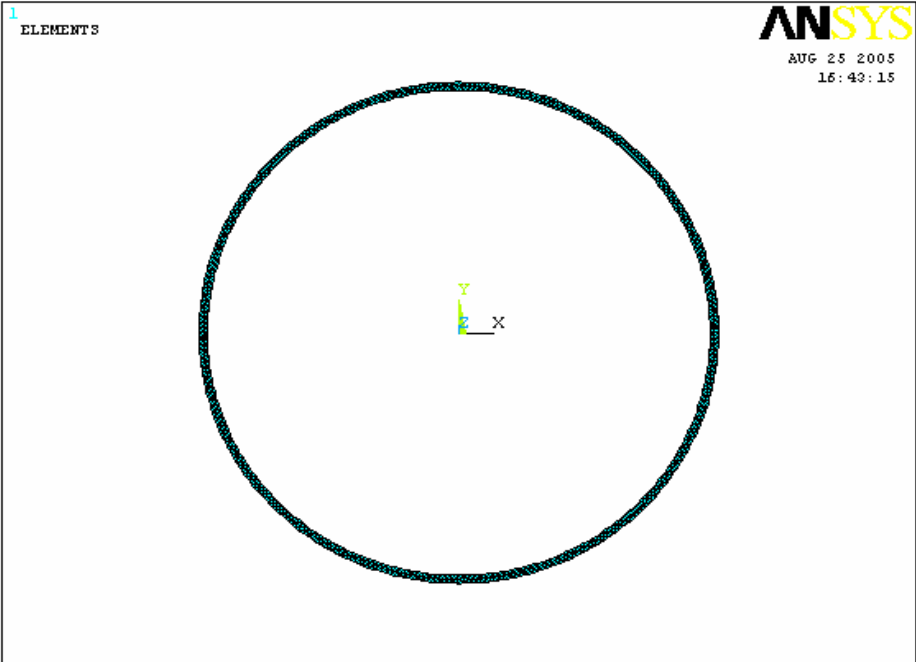


Figura 116. Aplicación de cargas y restricciones de desplazamientos

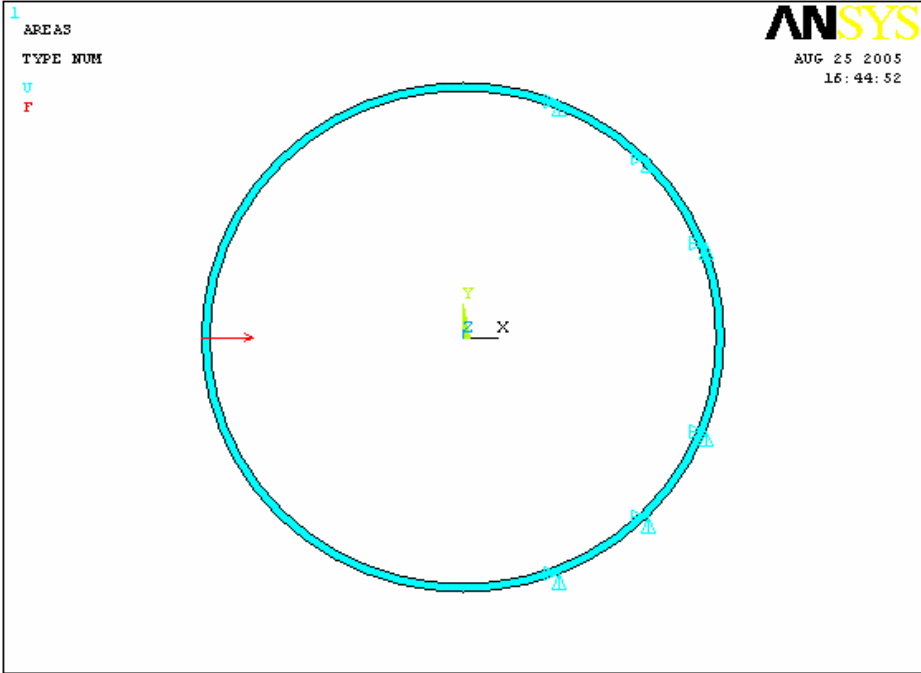


Figura 117. Sección deformada

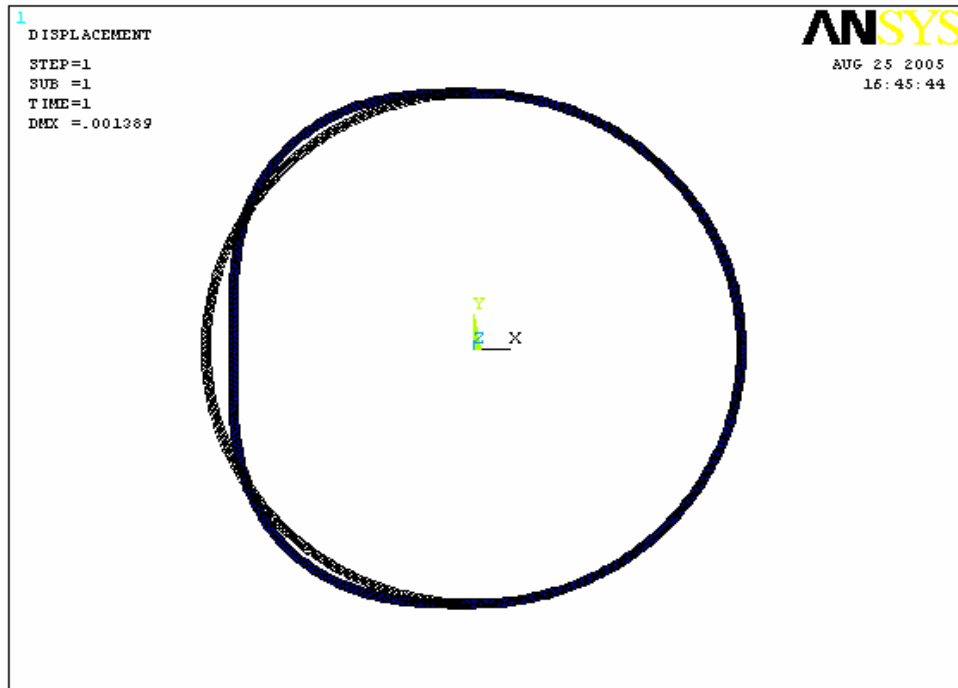
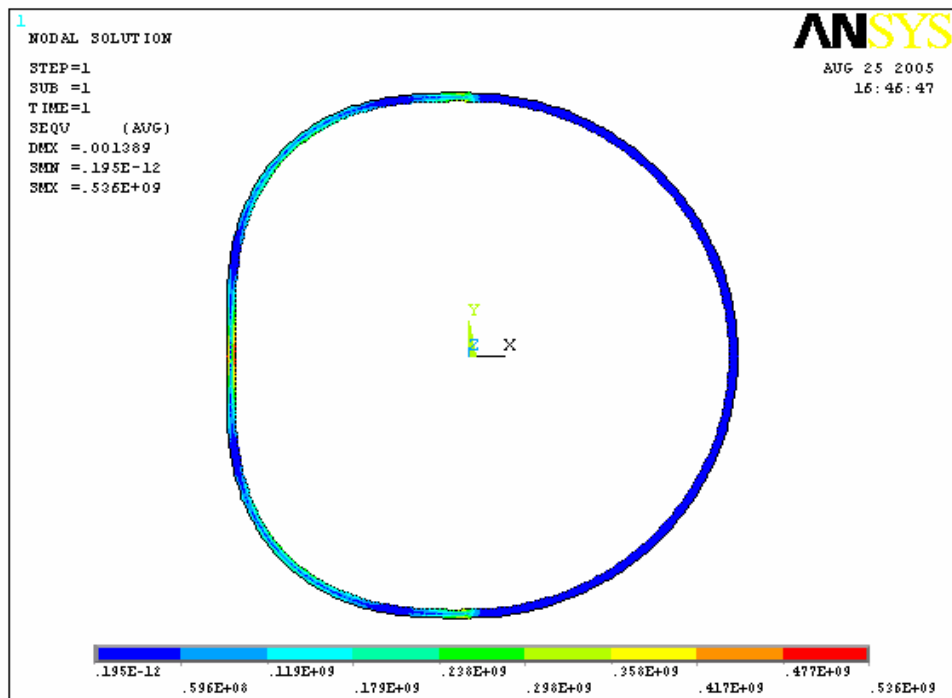


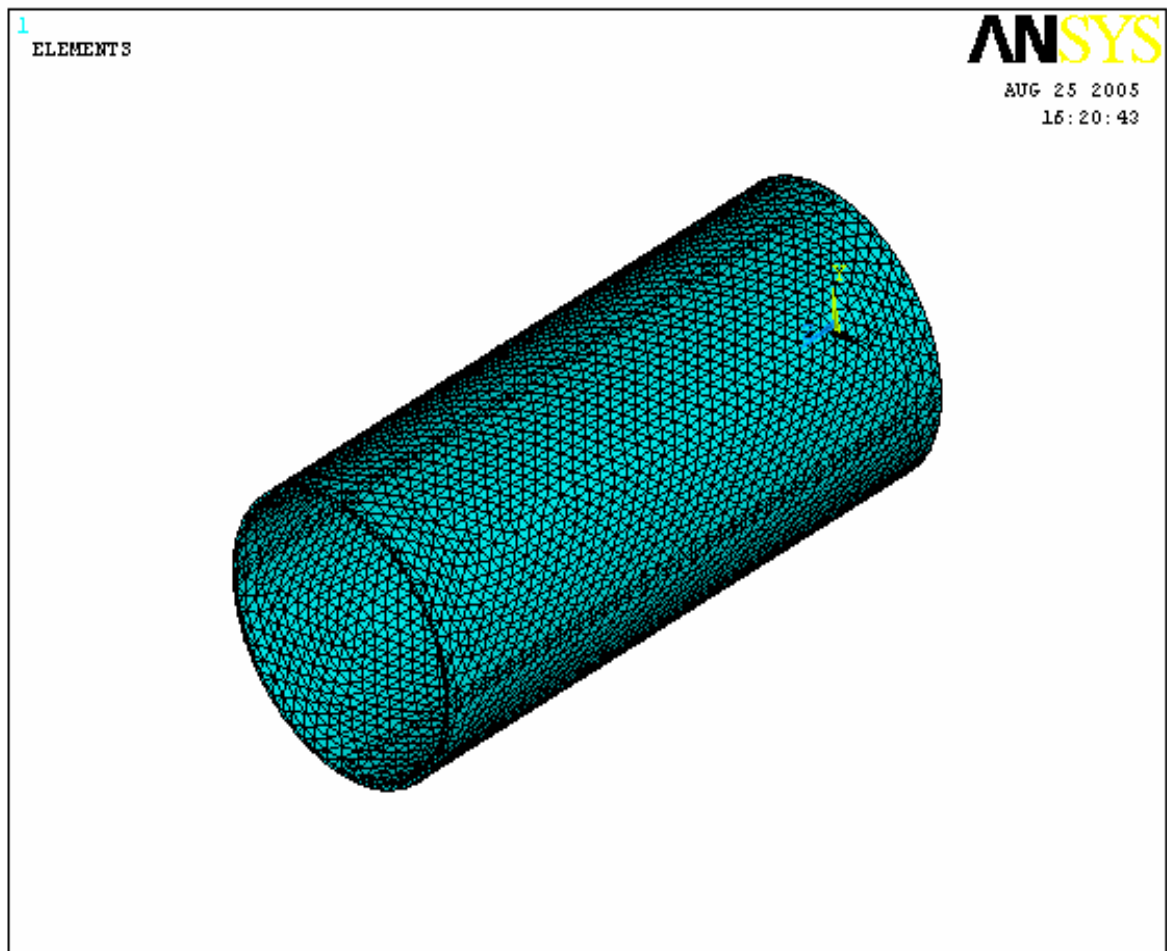
Figura 118. Diagrama de von Mises



Este desplazamiento máximo se presenta en la sección del pilote de acero, para un esfuerzo cortante de 68.04 KN.

Ahora, se observa que el tramo correspondiente las profundidades de 4 a 4.5 metros, es el tramo con mayor sollicitación a esfuerzos cortantes, por tanto analizamos este tramos en 3-D en el programa ANSYS, discretizando la sección en elementos de 10 nodos.

Figura 119. Tramo del pilote discretizado con elementos de 10 nodos



Aplicando los valores de cortante a lo largo de la sección se observan los siguientes desplazamientos:

Figura 120. Sección del tramo del pilote deformado

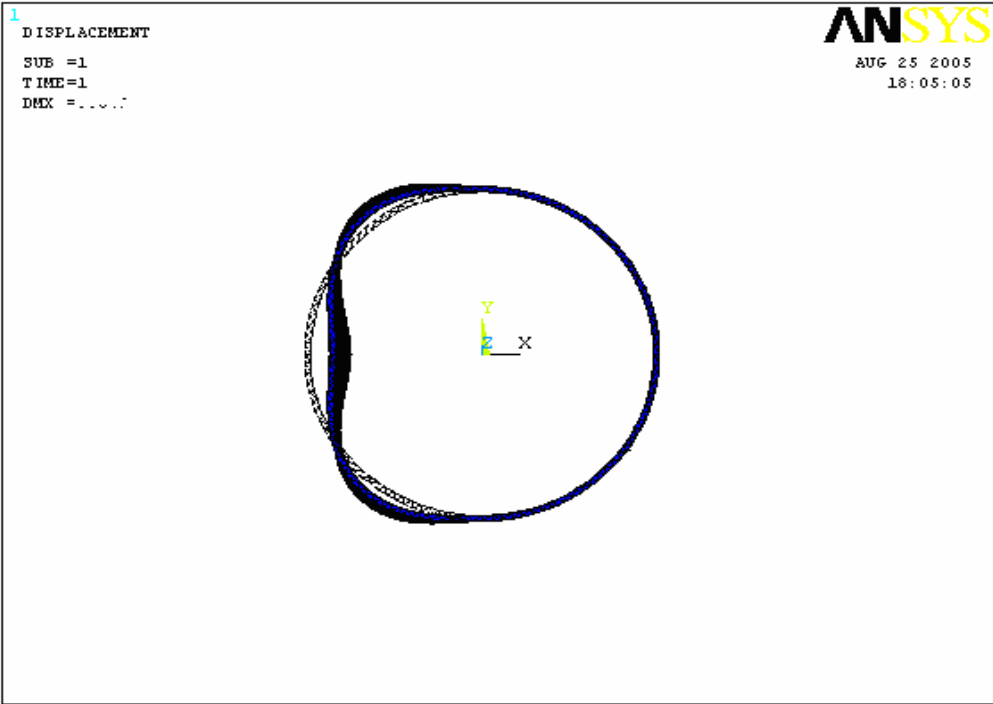


Figura 121. Tramo deformado del pilote

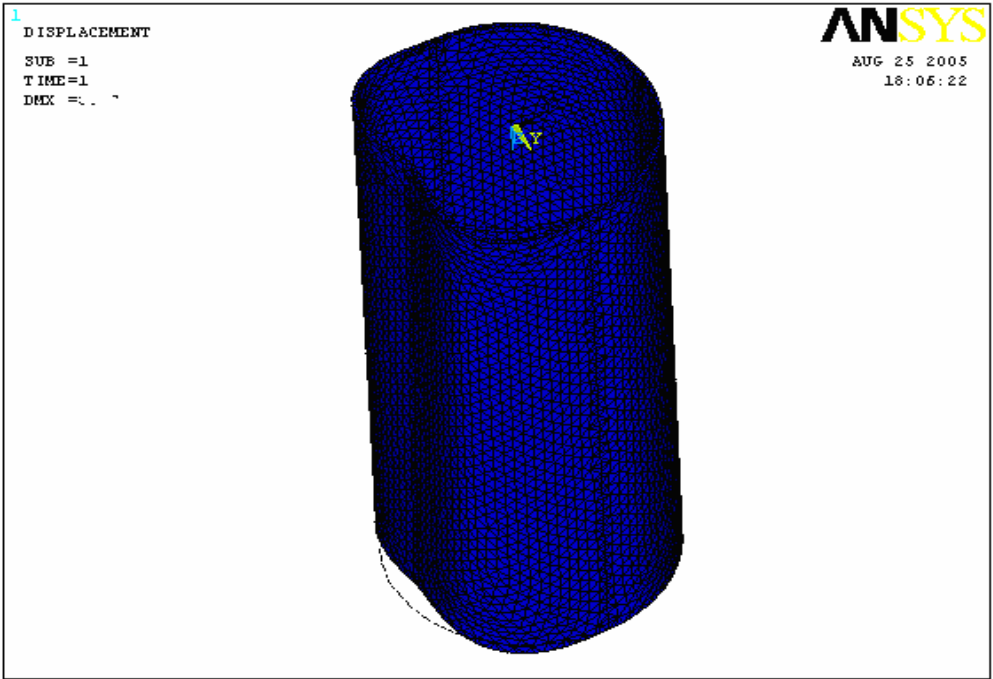
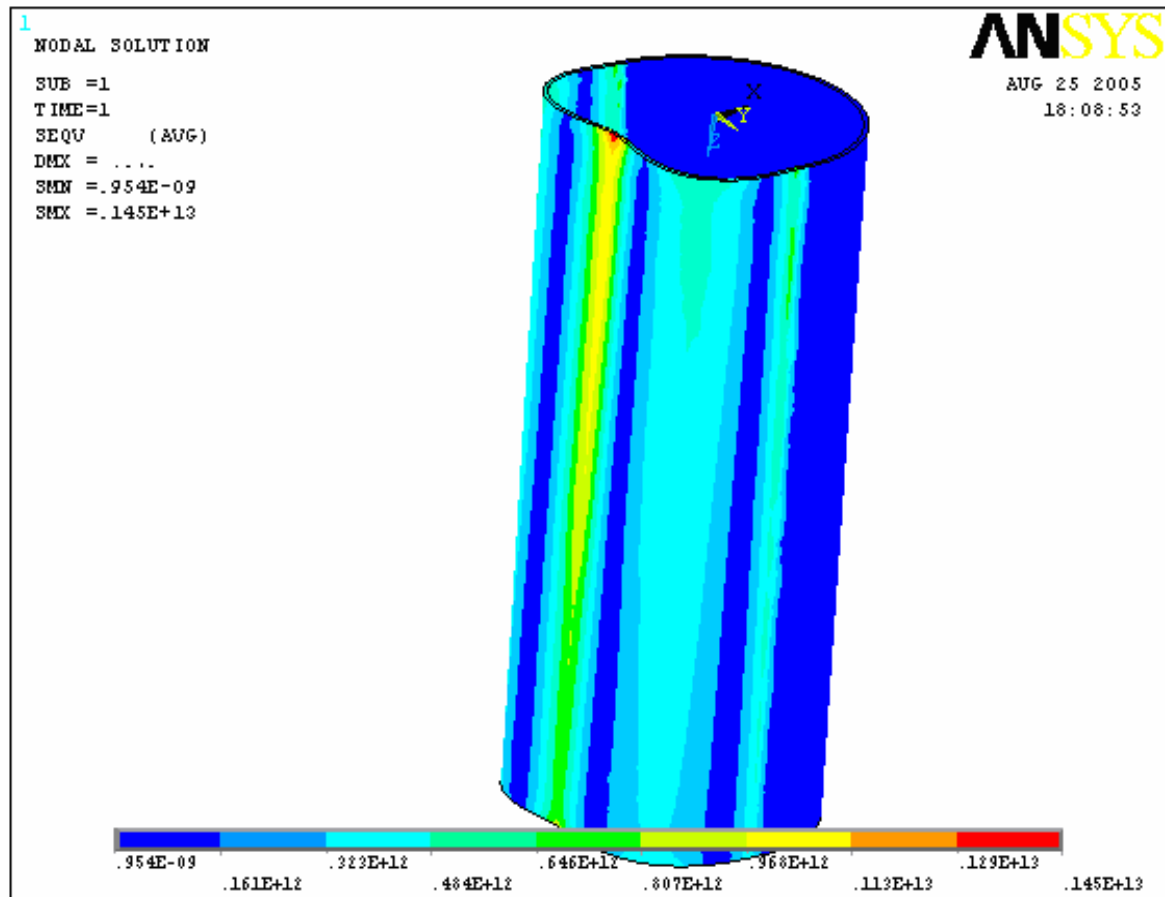


Figura 122. Diagrama de von Mises para el tamo del pilote



8.7 VARIACION DE CARGAS EN UNA TUBERIA DE DIAMETRO CONSTANTE

Para realizar el siguiente análisis, se aplicaron diferentes cargas en KN a una sección de tubería de $\phi_{nom} = 12''$, con $\phi_{ext} = 0.35m$ y $\phi_{int} = 0.30m$, además de esto se probaron con cuatro materiales distintos como lo son el concreto, el novaform, el hierro fundido y el acero.

Los resultados obtenidos de deformación máxima aparecen en la siguiente tabla:

Tabla 6. Carga aplicada Vs deformación máxima obtenida

Fuerza aplicada (KN)	Deformación máxima obtenida en (m)			
	Concreto	Novaform	Hierro	Acero
10	9.35E-07	2.53E-05	1.99E-07	9.25E-08
20	1.87E-06	5.07E-05	3.98E-07	1.85E-07
30	2.81E-06	7.60E-05	5.97E-07	2.78E-07
40	3.74E-06	1.01E-04	7.96E-07	3.70E-07
50	4.68E-06	1.27E-04	9.95E-07	5.01E-07
75	7.02E-06	1.90E-04	1.49E-06	6.94E-07
150	1.40E-05	3.80E-04	2.98E-06	1.39E-06
500	4.68E-05	0.001267	9.95E-06	4.63E-06
1000	9.35E-05	0.002534	1.99E-05	9.25E-06
10000	9.35E-04	0.025337	1.99E-04	9.24E-05
100000	0.009355	0.253369	0.00199	9.25E-04

Cabe resaltar que se asumió que el rango de cargas reales posiblemente aplicadas sobre un conducto enterrado está entre los 10 y 75 kN.

8.8 COMPARACION DE LOS DIAGRAMAS DE VON MISES PARA LOS CUATRO MATERIALES.

Ahora se procede a comparar para una misma sollicitación de cargas y un mismo diámetro, como se distribuyen los esfuerzos de acuerdo a la teoría de von Mises, de el concreto, el novaform y el hierro fundido, para el caso 3 visto...en la sección 8.5.4...

Figura 123. Comparacion de los diagramas de von mises para los cuatro materiales

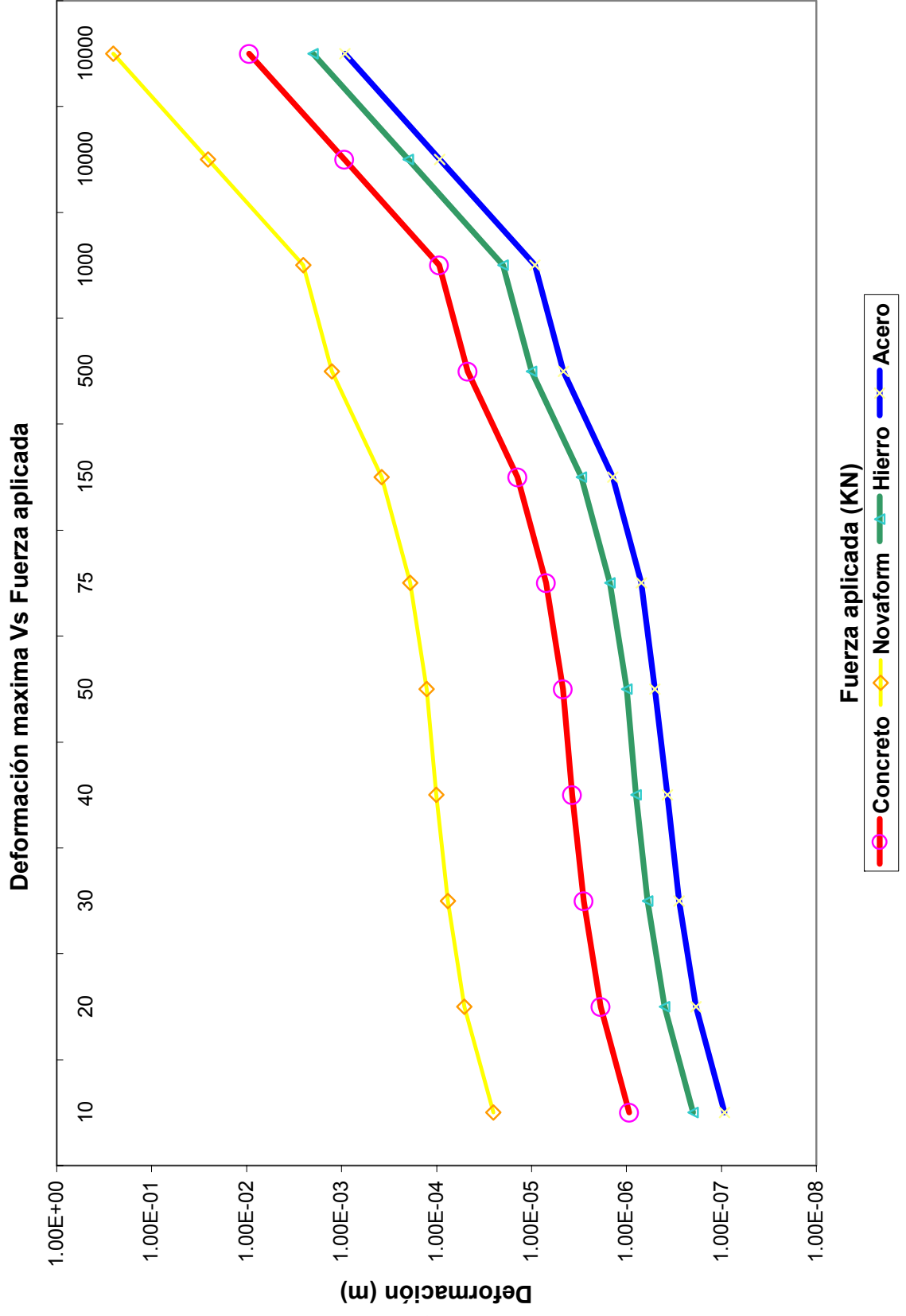


Figura 124. Diagrama de von Mises para el concreto

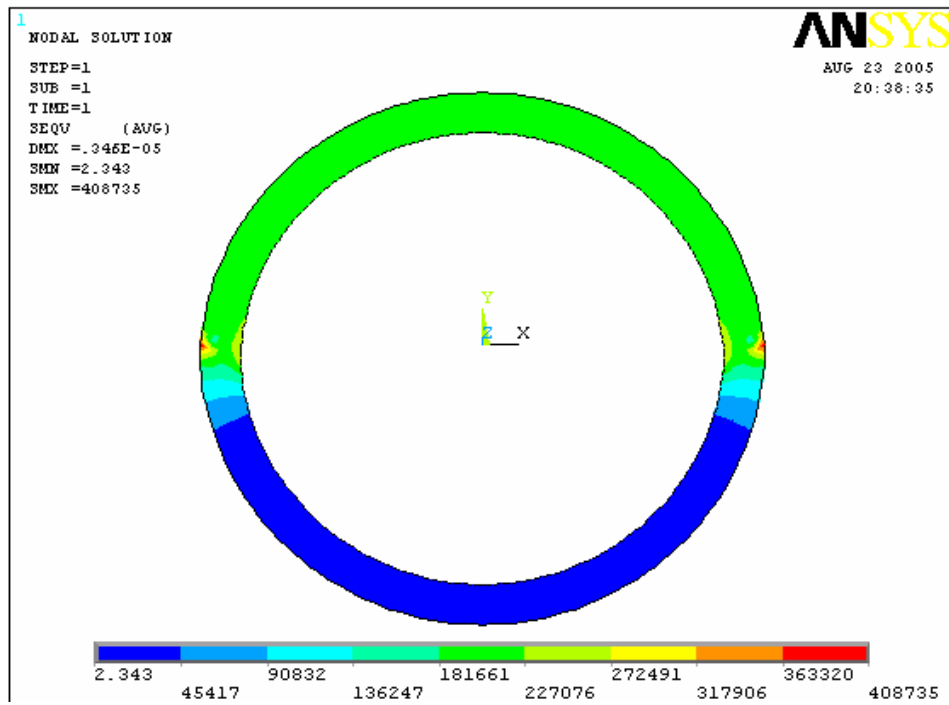


Figura 125. Diagrama de von Mises para el novaform

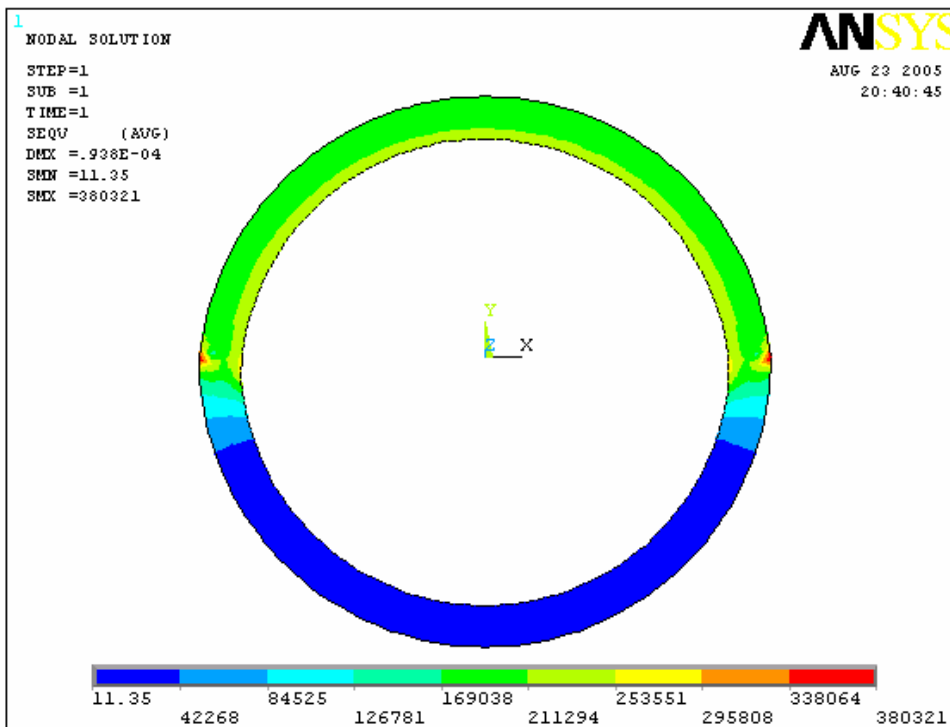
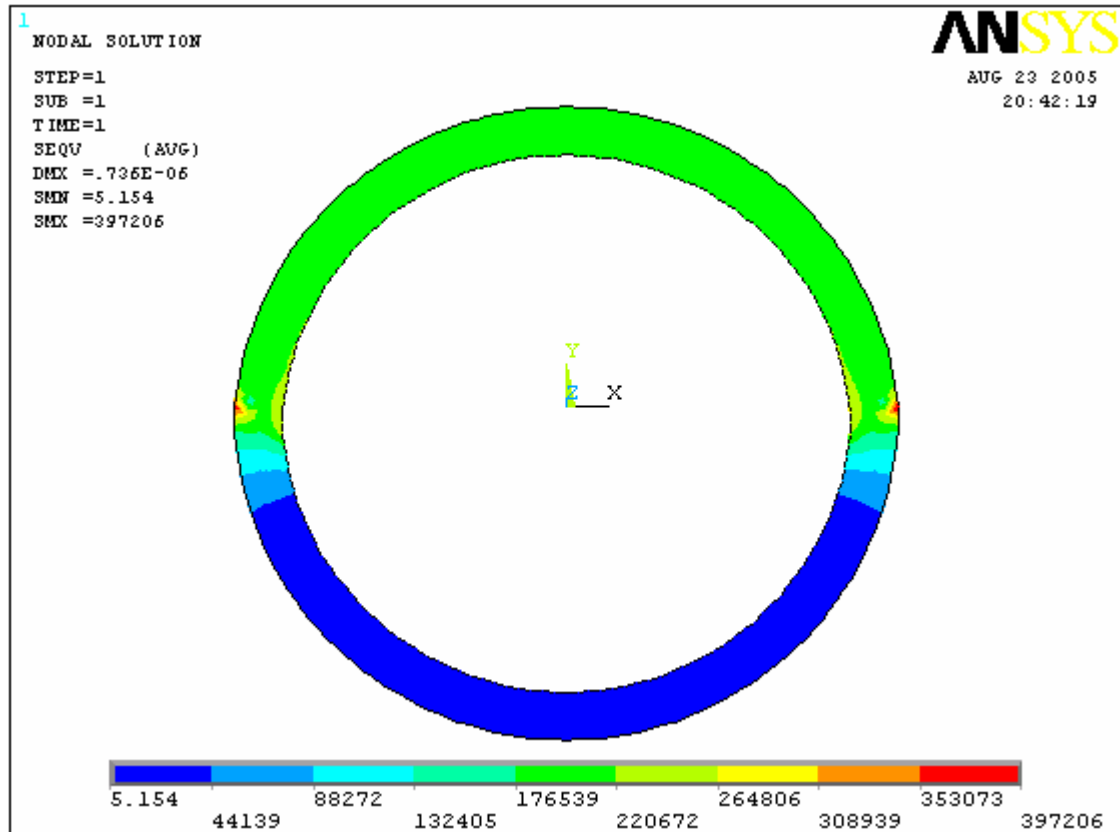


Figura 126. Diagrama de von Mises para el hierro fundido



9. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se reconoce la importancia de la Mecánica del Medio Continuo como uno de los fundamentos del modelamiento matemático en ingeniería de materiales. Aunque en este trabajo solo se estudio una pequeña parte del contenido total de la Mecánica del Medio Continuo es importante resaltar que los temas tocados en la recopilación bibliográfica, en general la Teoría de Elasticidad Lineal, conforman una fracción substancial del una de las áreas de desempeño en ingeniería civil como lo es el análisis estructural.

La recopilación bibliografica referente a la Mecánica del Medio Continuo presentada en este trabajo se apunto especificamente orientada a la ingeniería, intentando mantener un equilibrio entre la rigurosidad de la formulación matemática y la claridad de los fenómenos físicos tratados.

La fundamentación matemática requerida para comprender los conocimientos impartidos en un curso de Mecánica del Medio Continuo debe ser lo suficientemente idónea, pues como se vio, se manejan conceptos matemáticos que normalmente no se tienen en cuneta en la formación impartida el ciclo básico de ingenierías de la UIS. Por lo cual se recomienda que al iniciar el curso de la asignatura Mecánica del Medio Continuo, como esta proyectado en el nuevo programa de la escuela, se dedique el tiempo suficiente para estudiar dicha fundamentación.

El uso de los métodos numéricos, específicamente el método de los elementos finitos, fue de prima importancia en la solución del modelo matemático

correspondiente a la teoría general de elasticidad lineal, pues gracias a este se dio una solución más rápida y con la suficiente aproximación a la solución real del modelo estudiado.

Con el desarrollo de las nuevas tecnologías computacionales, es posible generar modelos que tienen en cuenta cada vez más variables, permitiendo que el modelo se acerque más a las condiciones reales, en esto, el uso del Software ANSYS 8.0 fue de primordial importancia pues nos permitió utilizar una cantidad suficiente de elementos discretos, generando una solución bastante aproximada a la esperada en el mundo real.

Es de gran importancia que las compañías fabricantes de tuberías de nuestro medio empleen herramientas computacionales que les permitan simular las condiciones reales a las cuales están sometidas las tuberías, para así poder modelar el comportamiento de sus productos, favoreciendo esto a obtener elementos de mejor calidad que brinden una seguridad eficiente, teniendo en cuenta la importancia de las tuberías como elemento que contribuye al mejoramiento de la calidad de vida.

Para los casos de la aplicación de conductos enterrados, las deformaciones que se obtuvieron para las condiciones de carga, materiales y geometrías dadas, estuvieron alrededor del orden de $10^{-6} m$ para el caso de la tubería de concreto, $10^{-7} m$ para el caso de tubería en hierro fundido y $10^{-4} m$ para el caso de tubería en novaform.

El caso de máxima deformación de los materiales analizados se presentó en el novaform y fue de $1.02^{-4} m$ lo cual es aceptable de acuerdo a las normas.

Para la aplicación en el pilote, se obtuvo una deformación del orden de 1.3 mm al aplicar una carga de 70 kN , deformación que comparada con el espesor de la sección que es de 3.17 mm se considera significativa.

Al comparar la deformación obtenida en los distintos materiales analizados, con una tubería de diámetro $12''$, y variando la carga, se observó que la tubería que tuvo las mayores deformaciones fue la de novaform y en orden descendente concreto, hierro fundido y acero, como se esperaba, debido a la diferencia de sus propiedades elásticas.

Para los gráficos 124, 125 y 126; donde se comparan para una misma sección y una misma carga aplicada en diferentes materiales, la distribución de esfuerzos de fallas de von Mises, se pueden observar dos comportamientos importantes, el primero hace referencia a que los esfuerzos máximos en las tres secciones se encuentran ubicados muy cercanos a la superficie exterior y a la altura media del diámetro de la tubería, y el segundo es que para la tubería novaform se observa esfuerzos considerables en la cara interior de la sección comparado a los otros dos materiales.

Debido al comportamiento mostrado en la tubería de novaform en los modelos simulados, deseamos resaltar la importancia que puede tener el uso de este tipo de material en obras civiles, ya que este muestra un comportamiento dúctil que le permite deformarse, absorbiendo energía antes de una posible rotura, esta deformación puede llegar a ser perceptible por los sentidos, de modo que se sea posible tomar acciones correctivas y así evitar casos indeseables tanto para los usuarios como para las empresas prestadoras de estos servicios.

Es importante que la bibliografía de mecánica de los medios continuos resaltada en este trabajo sea consultada por aquellos estudiantes que tomen el curso en su momento dado, ya que les servirá de refuerzo. Además es notorio la importancia de esta asignatura como también la asignatura de métodos numéricos en el ejercicio de nuestra profesión, permitiéndonos modelar un sin número de situaciones reales, concernientes a nuestro campo de accionar.

BIBLIOGRAFIA

LAI, Michael, RUBIN, David, KREMPL, Erhard. Introduction to Continuum Mechanics. Pergamon Press, 1978.

GOICOLEA R., José M. Mecánica del medio continuo: resumen de álgebra y cálculo tensorial. Madrid: Universidad politécnica de Madrid.2002.

SHARIPOV, R. A. Quick introduction to analysis tensorial. Russia: 2004

OLIVELLA, Xavier, AGUELET, Carlos. Mecánica de Medios Continuos para Ingenieros. Edicions UPC. Barcelona, España. 2002.

NARANJO, Jorge Alberto. Introducción a la Mecánica De los Medios Continuos. Facultad de Minas. Universidad Nacional de Colombia, Postgrado de Recursos Hidráulicos. Medellín, 1992.

ABAD M, Pablo. Elementos de Estudio en Elasticidad y Mecánica de Medios Continuos. Facultad de Ciencias, Departamento de Física. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, 1986.

POLANCO F, Jorge Eduardo. Elementos de Mecánica del Medio Continuo, Primera Parte. Facultad de Minas. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, 1992.

HEINBOCKEL, J. H. Introduction to tensor calculus and continuum mechanics. U.S.A: Old Dominion university, 1996.

BACKUS, George. Continuum mechanics. Golden, Colorado st: Samizdat press.1997.

KENNET, B. L. Introduction of continuum mechanics. Research School of Earth Sciences .Canberra: Australian National University, 2000.

CHANDRUPPATLA, Tirupathi y BELEGUNDU, Ashok. Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería. 2ª edición. México: Prentice Hall. 1999

CALCOTE, Lee R. Introduction to Continuum Mechanics, D. Van Nostrand Company Inc, 1968.

ZIENCKIEWICK, O. C. El Método de los Elementos Finitos. Buenos Aires, Argentina, Editorial Reverte, 1980.

REDDY, J. N. An Introduction to the Finite Element Method. New York. McGraw-Hill Book Company, 1984.

Department of Aerospace Engineering Sciences, AFEM; Advanced Finite Element Methods, University of Colorado at Boulder, 1990.

ANEXOS

ANEXO A. FUNCIONES DE APROXIMACIÓN

Una vez configurada la malla del sistema, se definen sobre cada elemento aproximaciones a la solución. Estas aproximaciones representan el comportamiento de la variable dependiente dentro del elemento. El desarrollo de estas aproximaciones se realiza generalmente utilizando funciones polinómicas, ya que estas son fáciles de generar y formalizar; Los polinomios son de cálculo fácil y sus sumas, diferencias y productos son también polinomios, pueden ser fácilmente diferenciados e integrados. Si el origen del sistema de coordenadas se traslada, la transformación de los polinomios vuelve a ser polinomios. Además es posible mejorar la precisión de los resultados incrementando el orden del polinomio, como se muestra en la Figura A.1. Teóricamente un polinomio de orden infinito corresponde a la solución exacta.

Al seleccionar un polinomio como función de aproximación, su orden estará determinado por el número de grados de libertad del elemento. En otras palabras, el número de coeficientes en el polinomio debe ser igual al número de variables nodales asignadas al elemento. De esta manera se determina la función completamente.

Así por ejemplo para el caso de un elemento de viga. La cual tiene dos grados de libertad por nodo (w, θ) , la función de aproximación seleccionada debe tener cuatro términos, tal como:

$$w(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (\text{A.1})$$

En términos generales, la función de aproximación polinomial para un elemento unidimensional esta dada como:

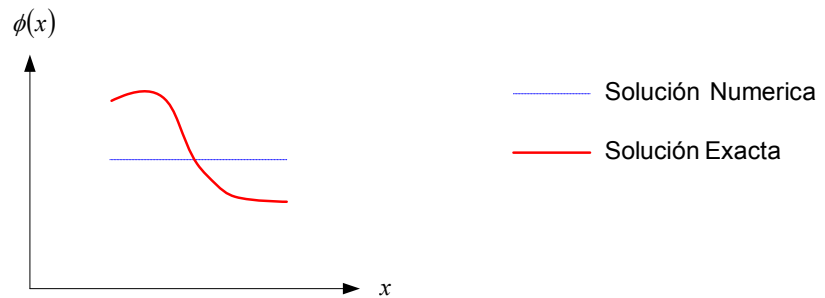
$$\phi^{(e)}(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots + \alpha_m x^n \quad (\text{A.2})$$

Donde ϕ es la variable dependiente, m es el número de grados de libertad del elemento, n el grado del polinomio y α_i los coeficientes polinomiales.

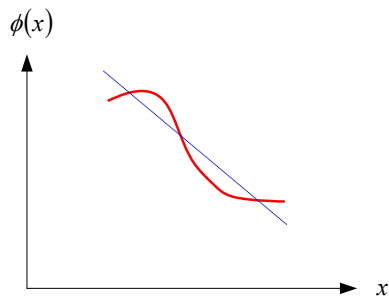
Expresando la ecuación (A.2) en forma vectorial, se tiene:

$$\phi^{(e)}(x) = \begin{Bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{Bmatrix}^T \quad (\text{A.3})$$

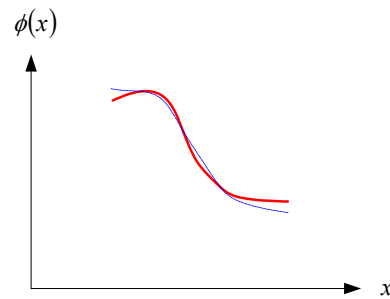
Figura A.1. Funciones de aproximación en una dimensión



(a) Aproximación por una constante : $\phi(x) = \alpha_1$



(b) Aproximación lineal : $\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$



(c) Aproximación cuadrática : $\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$

Ahora, los coeficientes polinomiales deben ser expresados en términos de los grados de libertad nodales del elemento, evaluando los valores de la función de aproximación ϕ en cada uno de estos. Así:

$$\phi^{(e)}(x) = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{Bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Luego, invirtiendo la matriz de (A.4), para expresar los términos de α_i en términos de ϕ_i y sustituyendo en (A.2), se obtiene:

$$\phi^{(e)}(x) = \psi_1 \phi_1 + \psi_2 \phi_2 + \cdots + \psi_m \phi_m \quad \text{ó} \quad (\text{A.5})$$

$$\phi^{(e)}(x) = \sum_{j=1}^m \phi_j \psi_j$$

Donde ϕ_j son los valores que toma la función ϕ (y posiblemente sus derivadas) en los puntos nodales del elemento, ψ_j son las funciones de interpolación anexas al valor de ϕ_j .

Ya que dentro de un elemento esta definida la variable dependiente por la ecuación (A.5), la solución global para todo el dominio Ω formado por p elementos interconectados entre sí, se expresa de la siguiente manera:

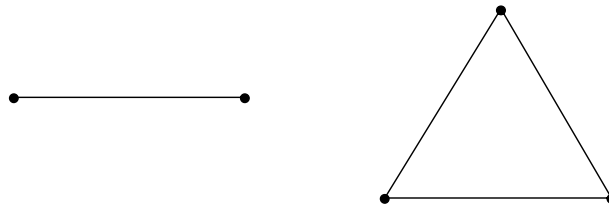
$$\phi(x) = \sum_{e=1}^p \left(\sum_{j=1}^m \phi_j \psi_j \right) \equiv \sum_{I=1}^N \Phi_I \Psi_I(x) \quad (\text{A.6})$$

Donde N es el número total de grados de libertad en la malla. Si tenemos un solo grado de libertad por nodo, N equivale al número de nodos en la malla, Φ_I y Ψ_I son los valores de la variable dependiente y las funciones de interpolación asociadas al nodo I respectivamente.

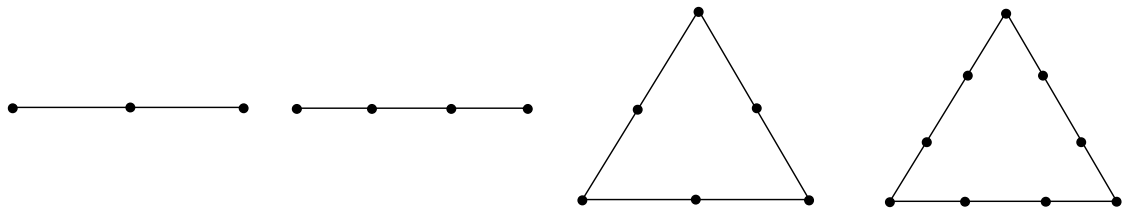
Ahora bien, los elementos finitos pueden ser clasificados de acuerdo al orden del polinomio utilizado en la función de aproximación de elementos simples, complejos y multicomplejos (Véase Figura A.2) *Los elementos simples*, son aquellos para los

cuales la función de aproximación consiste de términos constantes y lineales. Su figura geométrica se obtiene por la unión de $n+1$ nodos en un espacio n -dimensional.

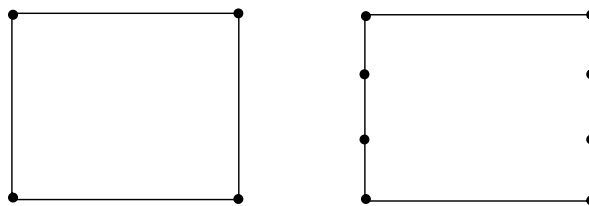
Figura A.2. Clasificación de los elementos



(a) Elementos Simples



(b) Elementos Complejos



(c) Elementos Multicomplejos

En un elemento simple los vértices del elemento son tomados como nodos. Por ejemplo, el elemento simple bidimensional es un triángulo con tres nodos. *Los elementos complejos*, son aquellos para los cuales la función de aproximación

consiste en términos cuadráticos, cúbicos o de orden mayor. Pueden tener la misma forma de los elementos simples, pero con nodos adicionales en la frontera y algunas veces nodos internos. Por ejemplo al emplear una función de aproximación cuadrática bidimensional, tal como:

$$\phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 \quad (\text{A.7})$$

Con seis coeficientes, el elemento complejo correspondiente debe tener seis nodos. Por lo tanto un elemento triangular con un nodo en cada vértice y un nodo en el punto medio de cada lado satisface este requerimiento. *Los elementos multicomplejos*, son aquellos elementos que no pueden tener una orientación arbitraria y por lo tanto sus fronteras son paralelas a los ejes coordenados. Las funciones de aproximación utilizadas aquí contienen términos de alto orden. El elemento rectangular es un ejemplo de este tipo de elementos en dos dimensiones.

Para los otros tipos de elementos sus fronteras no necesariamente tienen que ser paralelas a los ejes coordenados.

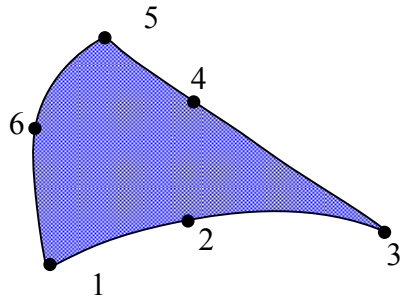
Cuando la función de aproximación polinomial es de segundo orden o mayor, el elemento seleccionado es conocido en la literatura como un “elemento de alto orden”. Si los elementos tienen los lados rectos, son conocidos como elementos lineales y si tienen los lados curvos son conocidos como elementos isoparamétricos (Véase Figura.). Estos últimos son elementos de alto orden.

A.1 SELECCIÓN DEL ORDEN DE LA FUNCIÓN DE APROXIMACION

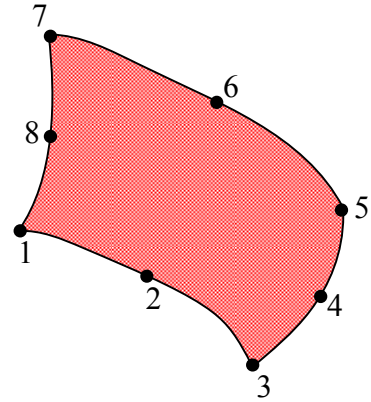
La función de aproximación seleccionada, debe satisfacer ciertos criterios a saber⁷⁸:

⁷⁸ RAO, S.S. The Finite Element Method in Engineering. London, 1982. Pag. 56.

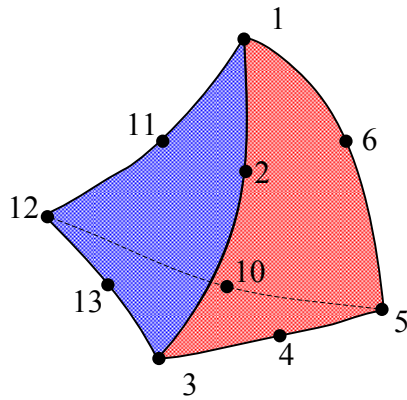
Figura A.3. Elementos Isoparamétricos



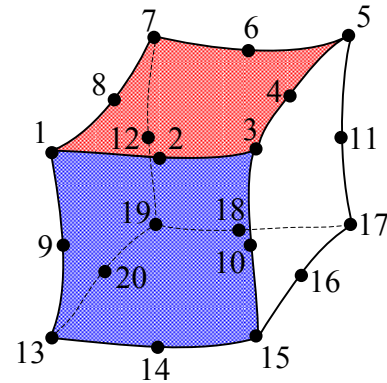
(a) Triangulares



(b) Cuadriláteros



(c) Tetrahedros



(d) Hexahedros

Satisfacer los requerimientos de convergencia. Para garantizar que la solución converja a la solución correcta, se debe cumplir:

Si la variable dependiente es continua, la función de aproximación también lo debe ser en el elemento. Los polinomios cumplen inherentemente esta condición.

El polinomio debe entregar un valor constante de la variable dependiente dentro del elemento cuando los valores nodales sean numéricamente idénticos. Además, cuando la región del dominio es dividida en elementos cada vez más pequeños, las derivadas parciales de la variable dependiente hasta el mayor orden que aparece en la forma débil deben aproximarse a un valor constante dentro de cada elemento. Así que no podemos obtener convergencia a la solución exacta, a menos que la función de aproximación permita este aspecto.

La variable dependiente $\hat{\phi}$ y sus derivadas parciales hasta un orden menor que el mayor orden de la derivada que aparece en la forma débil debe ser continua en los límites e interfaces del elemento. Se vera en el procedimiento de Galerkin (Ver anexo C) que durante su desarrollo es necesario determinar integrales de la forma:

$$\int_0^H \frac{d^r \phi}{dx^r} dx \quad (\text{A.8})$$

Para que esta integral sea definida, $\hat{\phi}$ debe ser continua hasta el orden $(r-1)$ como mínimo. Este requerimiento significa que la primera derivada de la función de aproximación debe ser continua entre los elementos si la integral contiene términos de segunda derivada $r=2$. Para las integrales con términos de primera derivada (elementos de barra), $\hat{\phi}$ debe ser continua entre elementos, pero sus derivadas no tienen que ser continuas. La continuidad en la derivada es requerida para los elementos de viga.

Aquellos elementos cuya función de aproximación satisfagan el primer y el ultimo requerimiento de convergencia son llamados “compatible o conforming” y si la función cumple con la segunda condición, entonces se denominan “completos”. Además si la r -ésima derivada de la variable dependiente $\hat{\phi}$ es continua,

entonces se dice que posee continuidad C^r . Otra forma de observar claramente lo que es un elemento completo es empleando el triangulo de Pascal; un polinomio de grado p es completo si contiene todos los términos que hacen parte del polinomio $p=0$ hasta el polinomio de grado p inclusive; ver Figura A.3. Por ejemplo, para un polinomio cuadrático bidimensional ($p = 2$):

$$\hat{\phi}(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 x^2 \quad (\text{A.9})$$

Se identifica que al ser de grado dos y observar el triangulo de pascal se concluye que es completo puesto que contiene todos los términos lineales y cuadráticos. En términos de esta notación la complementariedad implica que $\hat{\phi}$ debe tener continuidad C^r dentro del elemento, mientras que la compatibilidad implica que $\hat{\phi}$ debe tener continuidad C^{r-1} en las interfaces del elemento.

Si el polinomio de aproximación satisface los tres requerimientos, la solución aproximada converge a la correcta cuando refinamos la malla y se emplea un mayor número de elementos pequeños, pero el refinamiento que ha de realizarse debe cumplir:

Las anteriores mallas han de estar contenidas en la nueva malla.

Los elementos deben ser cada vez más pequeños de tal manera que cada punto del dominio este siempre dentro del elemento.

La forma del polinomio de aproximación debe mantenerse invariante durante el proceso de refinamiento.

Sin embargo, cuando se tienen dominios con “fronteras curvas” las dos primeras condiciones no se cumplen al emplearse elementos con lados rectos y lo más recomendable es trabajar con elementos isoparamétricos de lados curvos.

El patrón de comportamiento de la variable dependiente resultante del modelo polinomial ha de ser independiente del sistema de coordenadas.

La representación de la variable dependiente dentro del elemento no debe cambiar con una variación del sistema de coordenadas (cuando una transformación lineal es realizada de un sistema a otro). Esta propiedad es llamada isotropía geométrica o invarianza geométrica o isotropía espacial; para ello el polinomio debe contener términos que no violen la geometría del triángulo de Pascal (para dos dimensiones) o la del tetraedro de Pascal (para tres dimensiones). Así es que para el caso de un elemento simple bidimensional (triángulo), el polinomio de interpolación debería incluir además del término constante, términos que contenga tanto a x como a y pero no a uno de ellos. Para un elemento complejo bidimensional, si no se tiene en cuenta el término x^2 ó x^3 y por cualquier razón, no se debería incluir y^3 ó xy^2 tampoco, con el fin de mantener la isotropía del modelo.

Figura A.4. Arreglo de términos en un polinomio completo en dos dimensiones

Triángulo de Pascal	Grado del Polinomio	Expresión	Número de Términos
1	0	Constante	1
$x \quad y$	1	Lineal	3
$x^2 \quad xy \quad y^2$	2	Cuadrática	6
$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$	3	Cúbica	10
$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$	4	Cuartica	15
$x^5 \quad x^4y \quad x^3y^2 \quad x^2y^3 \quad xy^4 \quad y^5$	5	Quintica	21

ANEXO B. FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN

Las funciones de interpolación, tienen por objeto extender los valores de la variable dependiente ϕ de los dos nodos, a todo el dominio. Estas funciones que son conocidas, no dependen del problema; sino de la geometría del elemento, el número de nodos en el elemento y el número de grados de libertad por nodo. Las funciones de interpolación son siempre polinomios del mismo orden de la función de aproximación original. Si la función de aproximación es cuadrática las funciones de interpolación deben ser también cuadráticas.

B.1 DERIVACION DE LAS FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN PARA EL ELEMENTO LINEAL DE PRIMER ORDEN⁷⁹

La representación de la variable dependiente ϕ sobre un elemento lineal con dos nodos y un solo grado de libertad por nodo, esta dada de la siguiente manera:

$$\phi^{(e)}(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (\text{B.1})$$

Donde ϕ varia linealmente entre los nodos (Véase Figura B.1).

Los coeficientes α_1 y α_2 son determinados evaluando la expresión (B.1) en los dos nodos:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 & \text{en} & \quad x = x_1 \\ \phi &= \phi_2 & \text{en} & \quad x = x_2 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

En donde se obtiene un sistema de dos ecuaciones necesarias para resolver los parámetros α_i en términos de las coordenadas de los nodos y de los valores nodales de ϕ en el elemento.

⁷⁹ SEGERLIND, L. J. Applied Finite Element Analysis. New Cork, 1984. Pag. 18.

$$\begin{aligned}\phi(x_1) &\equiv \phi_1^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 \\ \phi(x_2) &\equiv \phi_2^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2 x_2\end{aligned}\tag{B.3}$$

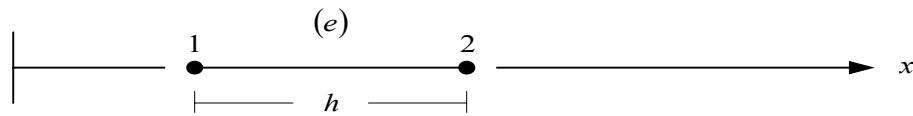
En forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \phi_1^{(e)} \\ \phi_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}\tag{B.4}$$

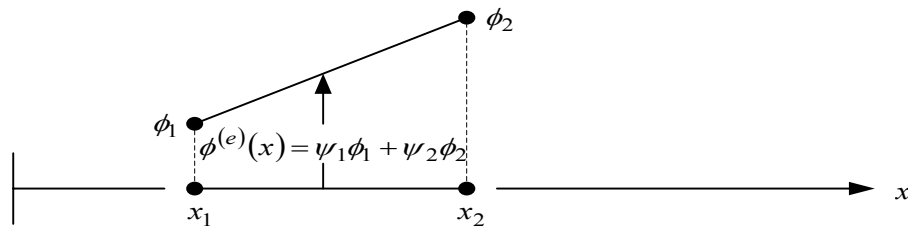
Resolviendo tenemos:

$$\alpha_1 = \frac{\phi_1^{(e)} x_2 - \phi_2^{(e)} x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \frac{\phi_2^{(e)} - \phi_1^{(e)}}{x_2 - x_1}\tag{B.5}$$

Figura B.1. Representación de la variable dependiente ϕ sobre un elemento



(a) Elemento Lineal Unidimensional



(b) Variación Lineal sobre el elemento

Sustituyendo la ecuación (B.5) en la ecuación (B.1) y reordenando términos obtenemos:

$$\phi^{(e)}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \phi_1^{(e)} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \phi_2^{(e)}\tag{B.6}$$

Siendo $x_2 - x_1$ la magnitud h del elemento.

En la ecuación (B.6) los valores nodales locales del elemento son multiplicados por funciones lineales de x , las cuales son llamadas funciones de forma o funciones de interpolación. Estas funciones son denotadas con la letra ψ y un subíndice que indica el nodo en el cual la función de interpolación esta asociada, así:

$$\begin{aligned}\phi^{(e)}(x) &= \psi_1\phi_1 + \psi_2\phi_2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \phi_i^{(e)}\psi_i^{(e)}\end{aligned}\tag{B.7}$$

Donde:

$$\psi_1^{(e)} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}; \quad \psi_2^{(e)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; \quad x_1 \leq x \leq x_2\tag{B.8}$$

Expresando (B.7) en forma matricial:

$$\phi^{(e)}(x) = \{\psi^{(e)}\}^T \{\phi^{(e)}\}\tag{B.9}$$

Donde $\{\psi^{(e)}\}^T = \{\psi_1^{(e)} \quad \psi_2^{(e)}\}^T$ es el vector fila de las funciones de interpolación y $\{\phi^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \phi_1^{(e)} \\ \phi_2^{(e)} \end{Bmatrix}$ es el vector columna de los valores nodales local del elemento.

Se puede ver de la ecuación (B.8) que las funciones de interpolación cumplen con las siguientes propiedades:

Las funciones de interpolación están definida para un elemento y son iguales a cero en cualquier otro elemento del dominio.

La función ψ_i refiriéndose al nodo i , toma el valor de uno cuando es evaluada en el nodo i y el valor de cero cuando es evaluada en el otro nodo del elemento;

$$\psi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}\tag{B.10}$$

Las dos funciones de forma suman uno;

$$\sum_{i=1}^2 \psi_i(x) = 1 \quad (\text{B.11})$$

Las derivadas de las funciones de forma con respecto a x suman cero.

Ahora, si tenemos una malla formada por tres elementos de igual tamaño y un número total de cuatro nodos en la malla, la solución global para el dominio completo se obtiene sumando todos los elementos, así:

$$\Phi(x) = \sum_{e=1}^3 \left(\sum_{i=1}^2 \phi_i^{(e)} \psi_i^{(e)} \right) \equiv \sum_{I=1}^4 \Phi_I \Psi_I(x) \quad (\text{B.12})$$

Donde Φ_I son los valores nodales global de la variable dependiente, los cuales están relacionados con los valores locales, de la siguiente manera:

$$\Phi_1 = \phi_1^{(1)} \quad \Phi_2 = \phi_2^{(1)} = \phi_1^{(2)} \quad \Phi_3 = \phi_2^{(2)} = \phi_1^{(3)} \quad \Phi_4 = \phi_2^{(3)} \quad (\text{B.13})$$

y Ψ_I son las funciones de interpolación global, tal que:

$$\Psi_I(x) = \begin{cases} \psi_2^{(I-1)}(x) & x_{I-1} \leq x \leq x_I \\ \psi_1^{(I)}(x) & x_I \leq x \leq x_{I+1} \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

Es decir, la función de interpolación global para el nodo I , consiste de las funciones de interpolación asociadas con el nodo I .

En la Figura B.2 se ilustran las funciones de interpolación para un elemento y las funciones de interpolación global para una malla de tres elementos.

Las funciones de interpolación pueden ser expresadas en diferentes sistemas de coordenadas, a saber, coordenadas locales y coordenadas naturales. Esto con el fin de simplificar su evaluación y eliminar las dificultades de integración y diferenciación que se presentan durante la formulación por elementos finitos.

El *sistema de coordenadas local* o del elemento, sitúa su origen sobre un extremo del elemento. El *sistema de coordenadas natural*, es un caso particular de un sistema local, el cual sitúa su origen en el centro del elemento; adicionalmente sus coordenadas son normalizadas, es decir, permiten especificar un punto dentro del elemento por un número adimensional, cuyos valores están siempre comprendidos entre -1 y 1. Este último sistema de coordenadas además de las anteriores ventajas facilita la integración numérica, razón por la cual es utilizada en los programas de elementos finitos.

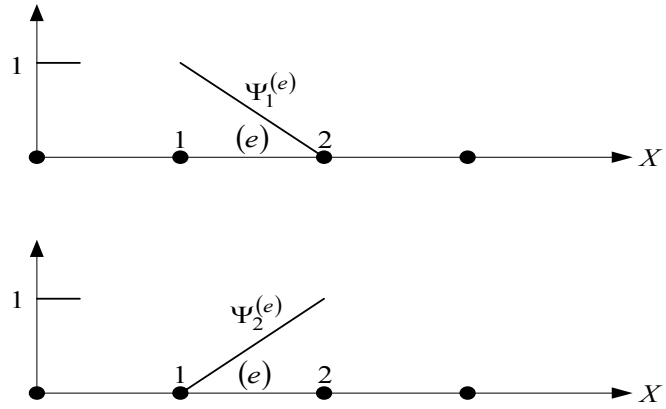
Las funciones de interpolación para diferentes elementos unidimensionales expresadas en coordenadas locales y naturales satisfacen las propiedades (B.9) y (B.10) y son conocidas en la literatura como las funciones de interpolación de *Lagrange*. La representación gráfica de estas funciones se muestran en la Figura B.3.

Los polinomios utilizados para construir las funciones de interpolación, para la cual la primera derivada es continua, son conocidos como polinomios *Hermitianos*. Estas funciones cumplen las siguientes propiedades:

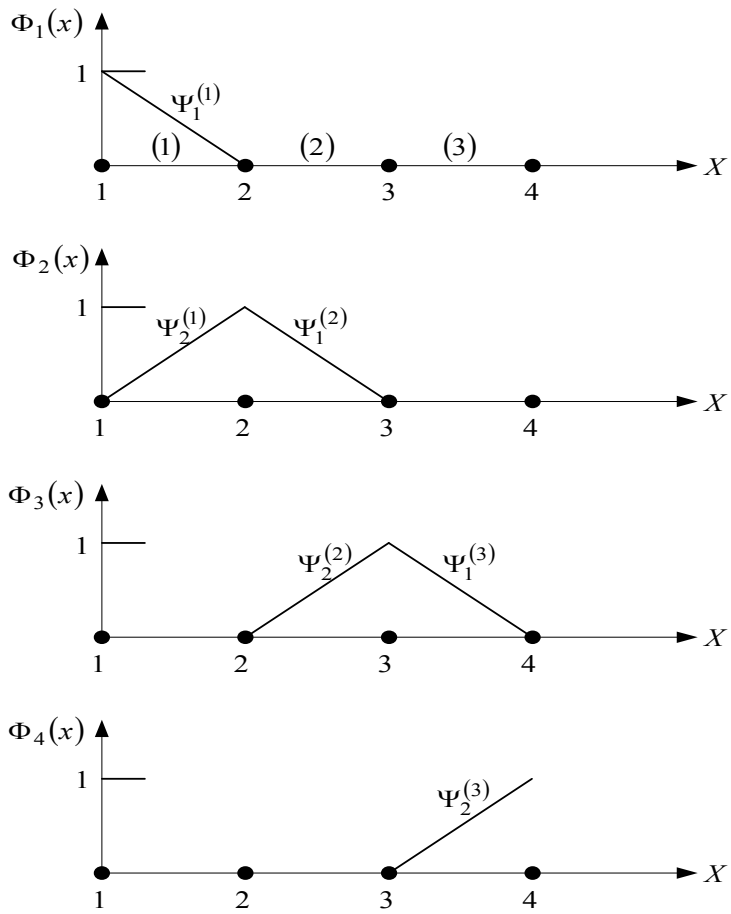
$$\begin{aligned} \psi_{2i-1}^{(e)}(\bar{x}_j) &= \delta_{ij} & \psi_{2i}^{(e)}(\bar{x}_j) &= 0 & \sum_{i=1}^2 \psi_{2i-1}^{(e)} &= 1 \\ \frac{d\psi_{2i-1}^{(e)}}{dx}(\bar{x}_j) &= 0 & \frac{d\psi_{2i}^{(e)}}{dx}(\bar{x}_j) &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

En la tabla B.2 se resumen las funciones de interpolación Hermitianas, en coordenadas local y natural para un elemento unidimensional de dos nodos. La representación gráfica de estas funciones se muestra en la Figura B.4.

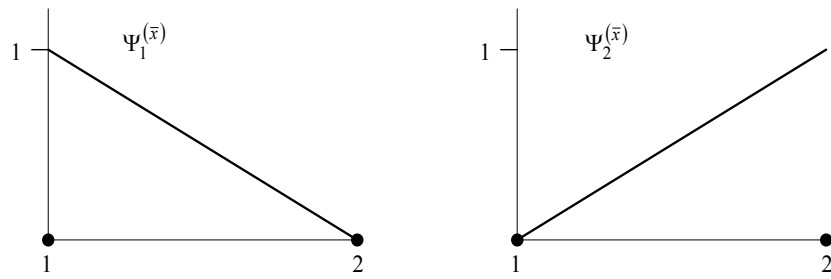
Figura B.2. Funciones de interpolación locales y globales



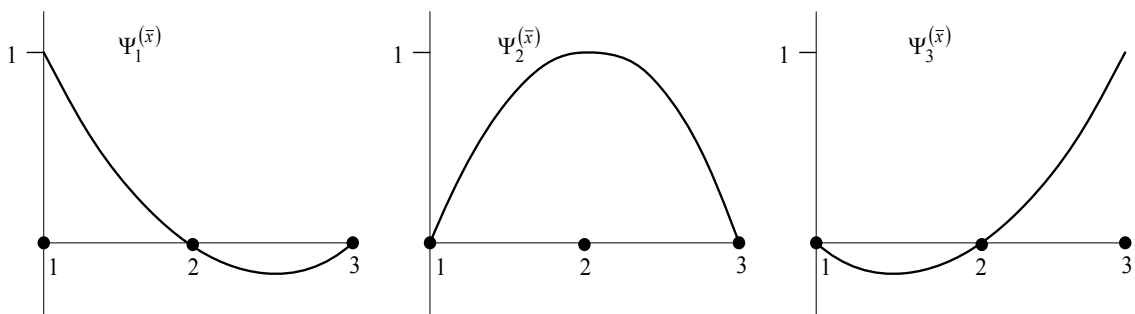
(a) Funciones de Interpolación para el elemento (e)



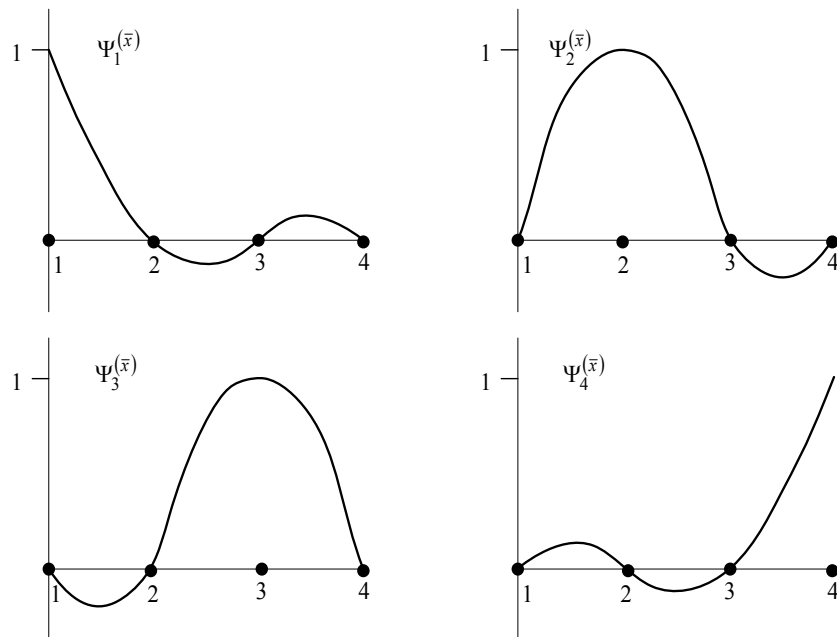
(b) Funciones de Interpolación global



(a) Funciones de Interpolación lineales



(b) Funciones de Interpolación cuadráticas



(b) Funciones de Interpolación cúbicas

Figura B.3. Funciones de interpolación Lagrangianas

Tabla B.2. Funciones de interpolación Hermitianas para el elemento unidimensional de dos nodos

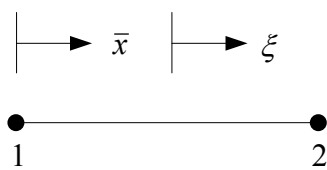
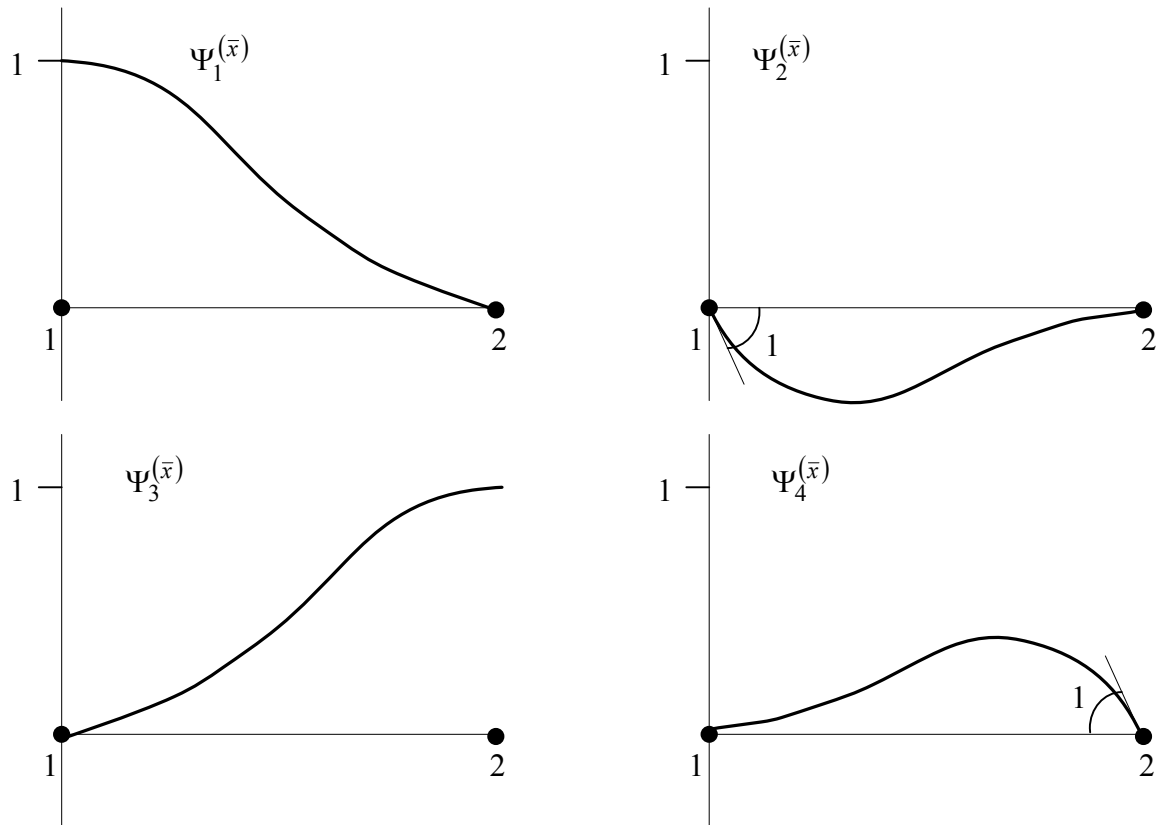
FUNCIÓN DE APROXIMACION	FUNCIONES DE INTERPOLACION	
	Coordenada Local (\bar{x})	Coordenada Natural (ξ)
 <p>Cúbica</p> $\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$ $= \sum_{i=1}^4 \phi_i \psi_i$	$\psi_1 = 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{h}\right)^3$ $\psi_2 = -\bar{x}\left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right)^2$ $\psi_3 = 3\left(\frac{\bar{x}}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{h}\right)^3$ $\psi_4 = -\bar{x}\left[\left(\frac{\bar{x}}{h}\right)^2 - \frac{\bar{x}}{h}\right]$	$\psi_1 = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3)$ $\psi_2 = -\frac{h}{8}(1 - \xi)(1 - \xi^2)$ $\psi_3 = \frac{1}{4}(2 - 3\xi - \xi^3)$ $\psi_4 = \frac{h}{8}(1 + \xi)(1 - \xi^2)$

Figura B.4. Funciones de Interpolación cúbicas Hermitianas



B.2 DERIVACION DE LAS FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN PARA ELEMENTOS TRIANGULARES DE PRIMER ORDEN*

La función de aproximación esta definida como:

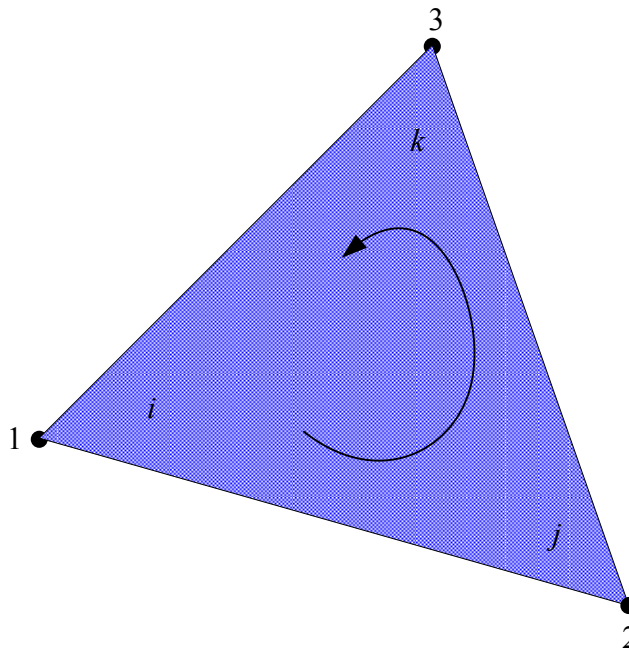
$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (\text{B.16})$$

Evaluando la función de aproximación en los nodos i, j y k se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

La numeración de los nodos en el elemento se hace en sentido antihorario como se muestra en la Figura B.5.

Figura B.5. Numeración de los nodos en un elemento triangular



Resolviendo el sistema de ecuaciones (B.17), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{2A} [u_1(x_2y_3 - x_3y_2) + u_2(x_3y_1 - x_1y_3) + u_3(x_1y_2 - x_2y_1)] \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2A} [u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)] \\
\alpha_3 &= \frac{1}{2A} [u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)]
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Donde A es el área del triángulo, definida como:

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{B.19}$$

Substituyendo (B.18) en (B.16) y reorganizando, se obtiene la ecuación de aproximación u en términos de las funciones de interpolación $\psi_i^{(e)}$ en coordenadas globales:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= u_1\psi_1(x, y) + u_2\psi_2(x, y) + u_3\psi_3(x, y) \\
&= \sum_{i=1}^3 u_i\psi_i^{(e)}
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Donde:

$$\psi_i^{(e)} = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \tag{B.21}$$

Y a_i, b_i y c_i son las siguientes constantes:

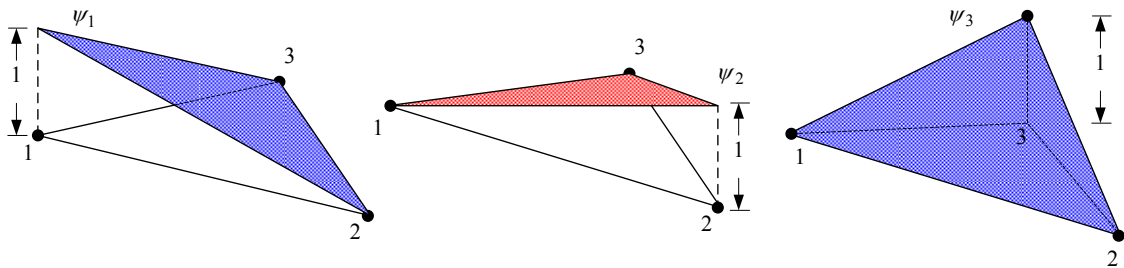
$$\begin{aligned}
a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\
b_i &= y_j - y_k \\
c_i &= x_k - x_j
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Donde $i \neq j \neq k$, los cuales permutan en orden natural y en sentido antihorario.

Las funciones de interpolación $\psi_i^{(e)}$ son mostradas en la Figura B.6. Note que $\psi_i^{(e)}$ tiene las siguientes propiedades:

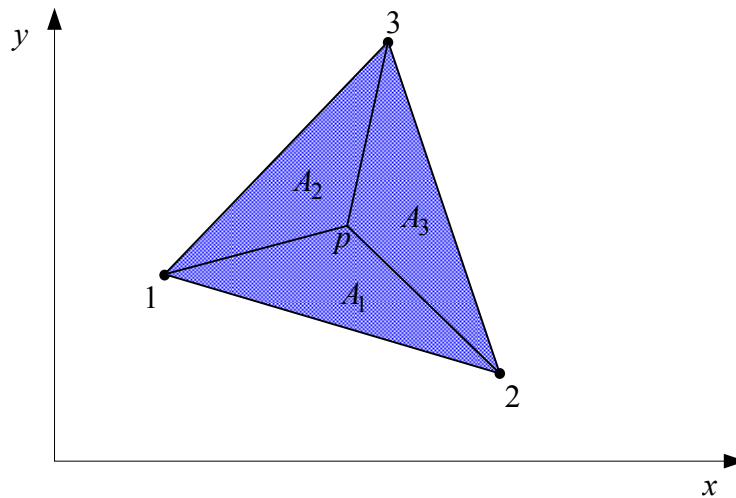
$$\begin{aligned}
\psi_i(x_j, y_j) &= \delta_{ij} \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3 \\
\sum_{i=1}^3 \psi_i^{(3)} &= 1
\end{aligned} \tag{B.23}$$

Figura B.6 Funciones de Interpolación para el elemento triangular de tres nodos



La derivación de funciones de interpolación para elementos triangulares se puede simplificar con el uso de coordenadas de área (coordenadas naturales), las cuales se obtienen definiendo las siguientes relaciones (véase Figura B.7)

Figura B.7 Definición de las coordenadas de área



$$L_1 = \frac{A_1}{A} \quad ; \quad L_2 = \frac{A_2}{A} \quad ; \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (B.24)$$

Donde $A_i (i=1,2,3)$ es el área del triángulo formado por los nodos j y k y el punto P y A es el área total del triángulo. Estas relaciones tienen las siguientes características:

L_1, L_2, L_3 son funciones de x y y .

Toman valores entre 0 y 1. L_1 es igual a 1 cuando el punto P está en el nodo 1 y cero en los otros nodos. Lo mismo se cumple para L_2 y L_3 .

En cualquier punto se cumple que la suma de L_1, L_2 y L_3 es igual a uno.

Expandiendo L_1, L_2 y L_3 en función de las coordenadas de los nodos y el punto P se obtiene:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ L_2 &= \frac{1}{2A} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ L_3 &= \frac{1}{2A} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Comparando las ecuaciones (B.25) con (B.21), se concluye que:

$$L_1 = \psi_1^{(e)}, \quad L_2 = \psi_2^{(e)}, \quad L_3 = \psi_3^{(e)} \quad (\text{B.26})$$

B.3 DERIVACION DE LAS FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN PARA ELEMENTOS CUADRANGULARES DE PRIMER ORDEN*

Utilizando un sistema de coordenadas locales (\bar{x}, \bar{y}) para un elemento cuadrangular de lados a y b , como se muestra en la Figura B.8.

La función de aproximación queda definida como:

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_1 + \alpha_2 \bar{x} + \alpha_3 \bar{y} + \alpha_4 \bar{x}\bar{y} \quad (\text{B.27})$$

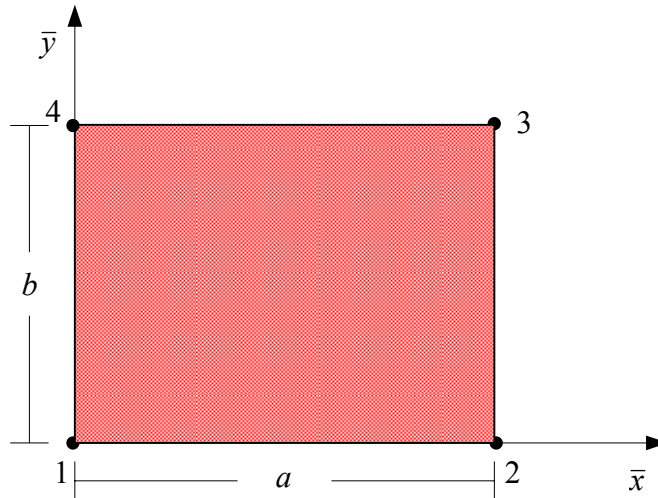
Para un elemento cuadrangular de cuatro nodos tenemos que:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(0,0) = \alpha_1 \\ u_2 &= u(a,0) = \alpha_1 + \alpha_2 a \\ u_3 &= u(a,b) = \alpha_1 + \alpha_2 a + \alpha_3 b + \alpha_4 ab \\ u_4 &= u(0,b) = \alpha_1 + \alpha_3 b \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

De donde podemos obtener, resolviendo (B.28) y reemplazando en (B.27):

$$\begin{aligned} u(\bar{x}, \bar{y}) &= \begin{Bmatrix} 1 & \bar{x} & \bar{y} & \bar{x}\bar{y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^4 u_i \psi_i^{(e)}(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Figura B.8. Elemento cuadrangular de cuatro nodos



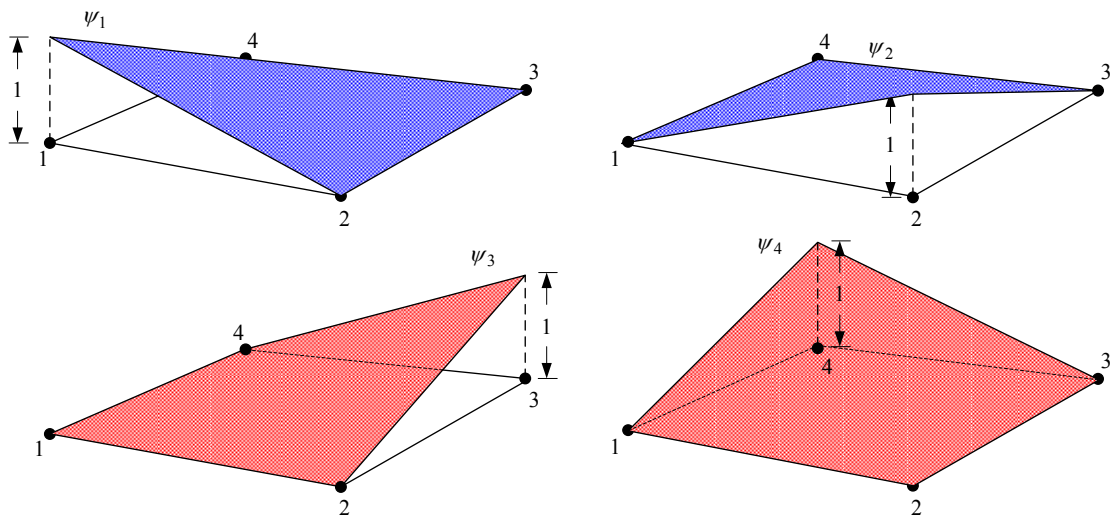
Donde las funciones de interpolación $\psi_i^{(e)}$ quedan expresadas así:

$$\begin{aligned}
 \psi_1(\bar{x}, \bar{y}) &= \left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right) \left(1 - \frac{\bar{y}}{b}\right) \\
 \psi_2(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{\bar{x}}{a} \left(1 - \frac{\bar{y}}{b}\right) \\
 \psi_3(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{\bar{x}}{a} \frac{\bar{y}}{b} \\
 \psi_4(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{\bar{y}}{b} \left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right)
 \end{aligned}
 \tag{B.30}$$

Las funciones de interpolación se pueden ver en la Figura B.9. Note que $\psi_i^{(e)}$ tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
 \psi_i(x_j, y_j) &= \delta_{ij} \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3, 4 \\
 \sum_{i=1}^4 \psi_i &= 1
 \end{aligned}
 \tag{B.31}$$

Figura B.9. Funciones de interpolación lineales para elementos cuadrangulares



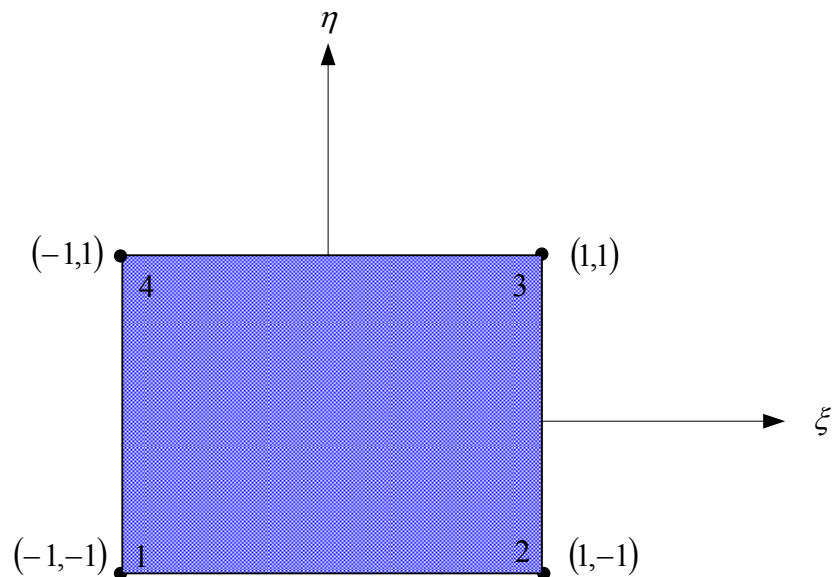
Para expresar las funciones de interpolación en coordenadas naturales, el origen del sistema se encuentran en el centro del elemento y las coordenadas corresponden a las relaciones de longitud:

$$\xi = \frac{\bar{x}}{a} \quad y \quad \eta = \frac{\bar{y}}{b} \quad (\text{B.32})$$

Las funciones de interpolación quedan expresadas así:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ \psi_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ \psi_3 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ \psi_4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Figura B.10. Elemento cuadrangular de cuatro nodos en coordenadas naturales



Los valores de ξ y η varían así:

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

$$-1 \leq \eta \leq 1$$

ANEXO C. METODOS VARIACIONALES

En un método variacional la función incógnita, o variable dependiente de un problema, es aproximada por una combinación lineal de funciones seleccionadas aproximadamente:

$$u(x) = \sum c_j \phi_j \quad (\text{C.1})$$

Donde c_j son constantes determinadas a partir de la minimización del funcional de energía del problema, o de satisfacer la formulación débil del problema. No es posible hablar de los métodos variacionales sin introducir algunos conceptos de matemática avanzada, específicamente la rama de las matemáticas conocida como *Cálculo de Variaciones*, cuya comprensión total no está al alcance de

quienes inician el estudio de los elementos finitos. Sin embargo es posible abordar la teoría de los elementos finitos aplazando la comprensión de los dos o tres conceptos que se presentaran a continuación, muy superficialmente, esperando que quienes estén interesados en profundizar en el estudio de los elementos finitos, más adelante adquieran los fundamentos del cálculo de variaciones que les permitan tener un dominio más racional y matemáticamente riguroso que intuitivo, de los siguientes conceptos. Se considera que este es el único tópico cuya teoría podría ser vista como obstáculo por estudiantes de Ingeniería de pregrado, pues la matemática restante es familiar para todos, por estar incluida en las materias del ciclo básico, y con un pequeño repaso, así existe la motivación adecuada, se estará al día.

C.1 FUNCIONAL

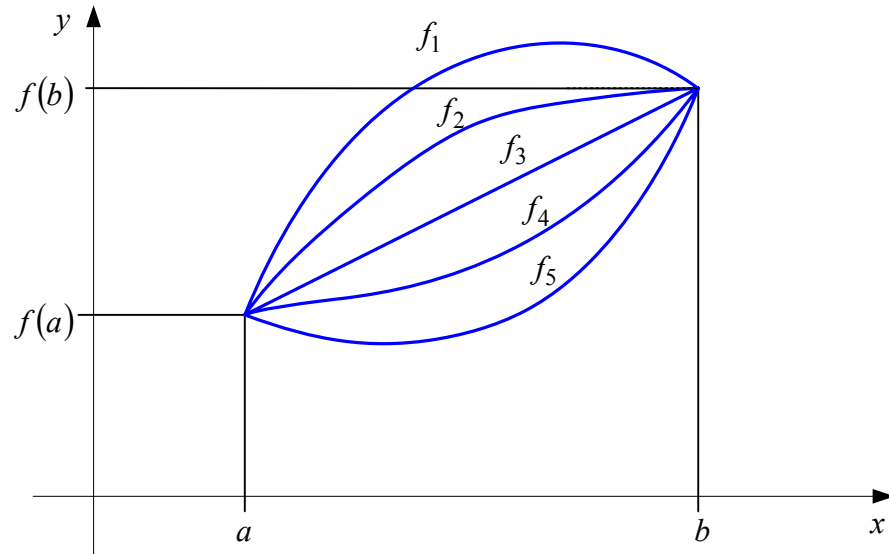
Es un concepto análogo al de función. La variable y se denomina *función* de la variable x , lo cual se designa $y = f(x)$ si a cada valor de x corresponde un valor de y . La variable v se llama *funcional* dependiente de la función $y(x)$, lo cual se designa $v = v[y(x)]$, si a cada función $y(x)$ de un conjunto de funciones le corresponde un valor v . Análogamente se definen también las *funcionales* dependientes de varias funciones, y las *funcionales* dependientes de funciones de varias variables.

C.1.1 Ejemplos de funcionales.

La funcional más conocida es la longitud de una curva $y(x)$, entre dos de sus puntos, definida por:

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (\text{C.2})$$

Figura C.1. Arco entre dos puntos sobre diferentes funciones



Para ilustrar este ejemplo numéricamente se consideran las curvas que pasan por los puntos (0,0) y (1,1):

Tabla C.1. Funcional del arco entre dos puntos

$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$	
$y(x)$	$l[y(x)]$
x	$\sqrt{2}$
x^2	1.479
x^3	1.548
$\sin \frac{\pi x}{2}$	1.464

El tiempo $t[y(x)]$ invertido en el desplazamiento por cierta curva $y(x)$ desde el punto $A(x_0, y_0)$ hasta el punto $B(x_1, y_1)$, si la velocidad $\frac{ds}{dt} = v(y')$ depende solo de y' , es una funcional de la forma:

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y')} dx \quad (C.3)$$

El área de la superficie $z(x, y)$ limitada por el contorno C , esta dada por el funcional:

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (C.4)$$

En elementos finitos, se utiliza el funcional de energía, que para el caso de la mecánica de los sólidos, se construye, desde el punto de vista de la física, como la diferencia entre la *energía potencial* almacenada en el sistema y el *trabajo hecho por las fuerzas externas*, y desde el punto de vista de las matemáticas a partir de la expresión:

$$I(u) = \frac{1}{2} B(u, u) - l(u) \quad (C.5)$$

Cuyo significado comentaremos en la definición de la formulación variacional de una ecuación diferencial.

C.2 VARIACION

El concepto de variación es el calculo variacional, lo que el de derivada es al calculo diferencial. La *variación de un funcional* es análoga a la derivada de una

función. La minimización o maximización de un *funcional* se logra tomando su primera variación e igualándola a cero.

Por ejemplo, para encontrar la curva que da a la distancia más corta entre dos puntos, le tomamos la primera variación al funcional del arco (ecuación (C.2)), y como resultado obtenemos, como es lógico, la recta que une a los dos puntos.

C.3 FORMULACION VARIACIONAL O DEBIL DE UNA ECUACION DIFERENCIAL

El orden de una ecuación esta definido por la máxima derivada con que aparezca la función incógnita o variable dependiente, o variable primaria en ella.

$$\frac{d}{dx} \left[EA \frac{du}{dx} \right] + f = 0: \quad \text{Segundo orden}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + f = 0: \quad \text{Cuarto orden}$$

Este orden obliga a la función solución a cumplir el requisito de ser variable un número de veces igual al orden de la ecuación. Derivable quiere decir que la derivada de la función exista y sea diferente de cero. Como en los siguientes ejemplos:

$$f(x) = x \quad \text{derivable una vez } (C^1).$$

La segunda derivada y todas las siguientes son cero.

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 \quad \text{derivable dos veces } (C^2).$$

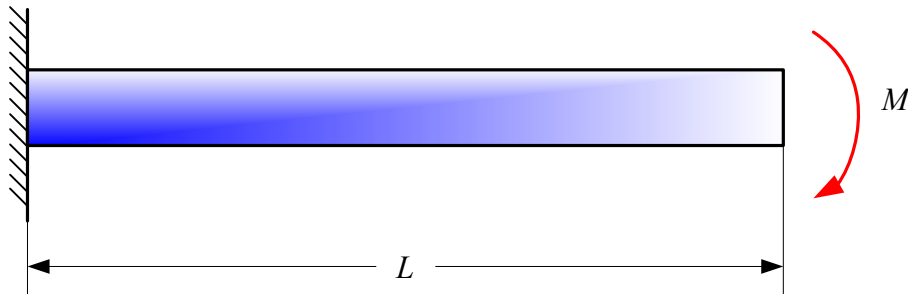
$f(x) = \sin(x)$ derivable infinitamente (C^∞).

La formulación débil de una ecuación diferencial es un ingenio matemático que busca encontrar funciones que satisfagan aproximadamente la ecuación, pero que tengan un grado más bajo de derivabilidad. En cuanto mayor sea el grado de derivabilidad que debe poseer una función, más difícil será encontrar la que satisfaga la ecuación. La formulación variacional de una ecuación, construida con la ayuda de la fórmula de integración por partes, en el caso de 1-D, y con la ayuda del teorema de Green, en el caso de 2-D, permite resolver más fácil la ecuación a cambio de perder exactitud en la solución; por ello se denomina formulación débil, a la ecuación integral que resulta de introducir una función de prueba, con la cual se comparte la derivabilidad de la función solución de la ecuación, como se explicara mejor en el siguiente ejemplo:

Considérese la ecuación diferencial de una viga sometida a cargas de flexión:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + f = 0 \quad (\text{C.6}^a)$$

Figura C.2 Viga sometida a cargas de flexión



Con las condiciones de frontera:

$$w(0)=0; \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{d^2w}{dx^2} \right|_{x=L} = \frac{M}{EI}; \quad \left. \frac{d^3w}{dx^3} \right|_{x=L} = 0 \quad (\text{C.6b})$$

Una solución analítica exacta encontrada con los métodos tradicionales de resolución de ecuaciones diferenciales es:

$$w(x) = \frac{2M - fL^2}{4b}x^2 + \frac{fL}{6b}x^3 - \frac{f}{24b}x^4 \quad (\text{C.7})$$

Se puede ver claramente que esta función es derivable máximo 4 veces (C^4), como lo exige el orden de la ecuación; la quinta derivada es ya cero.

Para hallar la formulación variacional de esta ecuación, el primer paso consiste en multiplicar todos los términos de la ecuación por una *función auxiliar* $v(x)$, denominada *función de prueba*, *función de peso* o *función de ponderación*, en los distintos textos según el contexto y el autor. Esta función debe ser derivable por lo menos hasta la mitad del orden de la ecuación, pues sobre ella se descargara la mitad de la derivabilidad de la función incógnita o variable dependiente y debe satisfacer las *condiciones de frontera esenciales*.

$$w(0)=0; \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{C.8})$$

La ecuación queda entonces así:

$$v \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2w}{dx^2} \right] + vf = 0 \quad (\text{C.9})$$

El segundo paso es integrar sobre todo el dominio, que en este caso es una recta de longitud L, matemáticamente correspondiente al intervalo $(0, L)$:

$$\int_0^L v \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2w}{dx^2} \right] dx + \int_0^L v f dx = 0 \quad (\text{C.10})$$

Aplicando la integración por partes al primer término:

$$v \frac{d}{dx} \left[EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right] \Big|_0^L - \int_0^L \frac{dv}{dx} \frac{d}{dx} \left[EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right] dx + \int_0^L v f dx = 0 \quad (C.11)$$

Nuevamente se aplica la integración por partes al segundo término de esta última ecuación:

$$v \frac{d}{dx} \left[EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right] \Big|_0^L - \frac{dv}{dx} \left[EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right] \Big|_0^L + \int_0^L EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx + \int_0^L v f dx = 0 \quad (C.12)$$

Aplicando las condiciones de frontera y las condiciones impuestas a v esta ecuación queda reducida a:

$$\frac{dv}{dx} \Big|_L M + \int_0^L EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx + \int_0^L v f dx = 0 \quad (C.13)$$

Esta última ecuación es llamada *la forma débil, variacional o generalizada* de la ecuación diferencial de la viga. Nótese como se ha reducido el máximo orden de derivada de la función incógnita $w(x)$ a 2, y como el orden de derivada de la función de prueba se ha aumentado a 2.

También se puede escribir la forma variacional de esta ecuación así:

$$\frac{dv}{dx} \Big|_L M + \int_0^L v f dx = - \int_0^L EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx \quad (C.14)$$

Como se ve, el primer miembro de la ecuación depende únicamente de v y es lineal, mientras que el segundo miembro depende de v y w y es lineal con respecto de cualquiera de las dos por separado, pero no de las dos al tiempo, por lo cual se denomina *bilineal*. Estos dos términos B y l son la base para la definición de energía desde el punto de vista matemático así:

$$I(w) = \frac{1}{2} B(w, w) - l(w) \quad (C.15)$$

Pero, para no complicar tanto las cosas, cuando se haga uso del funcional de energía, se partirá de su definición física, *diferencia entre la energía potencial y*

el trabajo hecho sobre el sistema, que esta más al alcance de la comprensión de un ingeniero, que la abstracta definición matemática que se acaba de presentar, a manera de información.

C.4 EL METODO DE RITZ

Este método consiste en encontrar la *función extremal* que maximice o minimice el *funcional de energía* de un fenómeno. Haciendo uso del Cálculo Variacional, esta función corresponde a la que satisface la ecuación que resulta de tomar la primera variación, δI , e igualarla a cero. Análogamente al proceso del Cálculo Diferencial de encontrar los valores extremos de una función.

La solución aproximada que se busca es de la forma:

$$w_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (\text{C.16})$$

El valor de N es escogido arbitrariamente, según el grado de exactitud, que se desee y determina el número de constantes c_j , que pasan a ser las incógnitas del problema pues las funciones ϕ_j son escogidas arbitrariamente entre las funciones que satisfagan una serie de condiciones que se enumeraran a continuación; si $N=1$ habrá un solo parámetro c_1 por determinar pero la solución será muy inexacta.

C.4.1 Requisitos que deben satisfacer las funciones ϕ_j

La función ϕ_0 debe satisfacer las *condiciones de frontera esenciales* del problema. $\phi_0 = 0$ Cuando las condiciones de frontera esenciales dadas en son homogéneas, es decir iguales a cero, lo que sucede muy frecuentemente.

Las funciones ϕ_j deben ser suficientemente derivables como lo exija la máxima derivada en el funcional.

ϕ_j debe satisfacer al menos la forma homogénea de las condiciones esenciales del problema.

Para cualquier N el conjunto de funciones ϕ_j debe ser *linealmente independientes*, es decir que ninguna de ellas se pueda expresar como *combinación lineal* una de las otras.

El conjunto de las funciones ϕ_j debe ser *completo*.

C.5 METODO DE LOS RESIDUOS PONDERADOS

En este método la solución es aproximada de la misma manera que en el método de Ritz, por expresiones de la forma:

$$w_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (\text{C.17})$$

Donde ϕ_0 debe satisfacer todas las condiciones de contorno dadas en el problema, y ϕ_j debe satisfacer en general las condiciones de la sección C.4.1.

De nuevo se considera el problema de la flexión de la viga definido por la ecuación:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + f = 0 \quad (\text{C.18})$$

Al sustituir la solución aproximada en esta ecuación resulta el residuo:

$$\hat{E} \equiv \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + f \neq 0 \quad (\text{C.19})$$

Después de que ϕ_0 y ϕ_j son seleccionados, \hat{E} es solamente función de las variables independientes o coordenadas, y las constantes c_j . En el método de los residuos ponderados, las constantes c_j son determinadas igualando a cero la integral sobre todo el dominio, de los *residuos ponderados* de las *aproximaciones*:

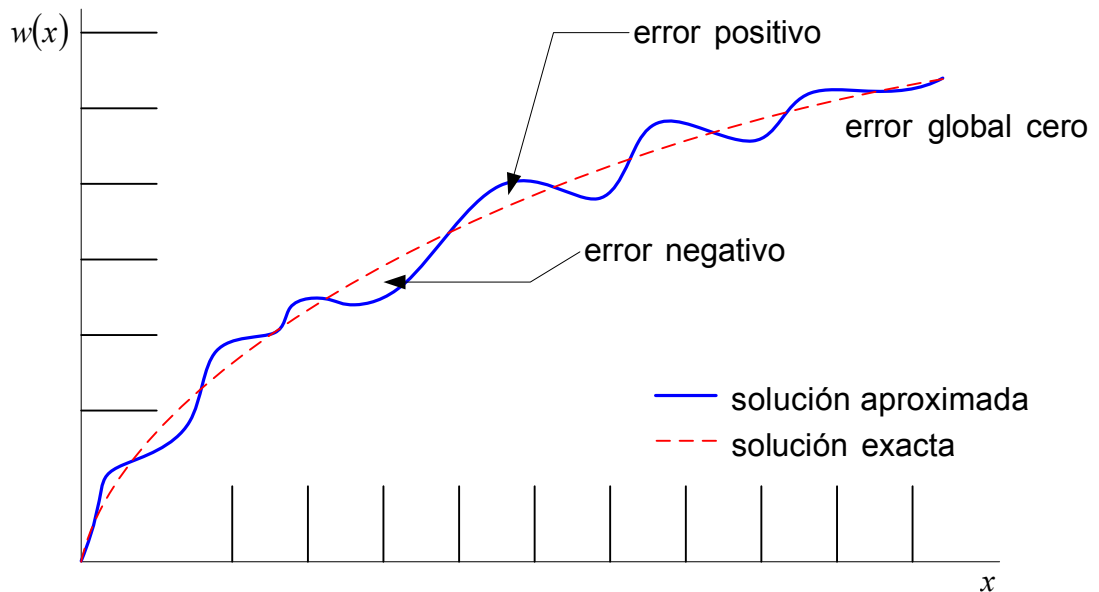
$$\int_{\Omega} \psi_i(x) \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \right) \right] + f \right\} dx = 0 \quad (\text{C.20})$$

ó $\int_{\Omega} \psi_i(x) \hat{E}(x, c_j) dx = 0$

Al igual que en el método de Ritz, se obtiene un sistema de N ecuaciones con N incógnitas ($c_j, j=1 \dots N$), una ecuación por cada función $\phi_j (i=1 \dots N)$, por ello es que estas funciones deben formar un conjunto linealmente independiente, o de otra forma el sistema sería insoluble. La filosofía de este método consiste en encontrar una solución aproximada en cada punto del dominio, de tal forma tal que el error global ponderado, sobre todo el dominio sea cero.

Esto es precisamente el significado de la última ecuación integral, que es equivalente al primer paso para la obtención de la forma variacional o débil de una ecuación diferencial; por lo tanto el proceso para resolver una ecuación sobre un dominio con condiciones de frontera establecidas, es el señalado anteriormente en la definición de la forma débil o variacional, como segundo paso para la solución de un problema por el método de los elementos finitos.

Figura C.3. Ilustración de la filosofía del método de los residuos ponderados



C.6 METODO DE GALERKIN

El método de Galerkin constituye la base matemática bajo la cual se construye el método de los elementos finitos. Este método es obtenido fácilmente del método de los residuos ponderados, seleccionando las funciones de base iguales a las funciones de interpolación.

El proceso de solución mediante este método se puede detallar de la siguiente manera:

Se supone que se tiene el siguiente modelo matemático para un problema físico:

$$A(\phi) - f = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad (\text{Ecuación diferencial}) \quad (\text{C.21})$$

Usaremos el símbolo Ω para denotar un dominio arbitrario y Γ para denotar su frontera.

La ecuación diferencial (C.21) esta sujeta a unas condiciones de frontera, las cuales especifican el valor de la variable dependiente o sus derivadas en los límites de la región, como por ejemplo:

$$B(\phi) = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_1 \quad (\text{Condición de frontera natural}) \quad (\text{C.22})$$

$$\phi = \phi_0 \quad \text{en} \quad \Gamma_2 \quad (\text{Condición de frontera esencial}) \quad (\text{C.23})$$

Donde B es un operador diferencial de orden menor que el operador A . la frontera Γ es la suma de Γ_1 y Γ_2 .

La ecuación (C.21) esta definida en todo el dominio solución. Sin embargo, esta ecuación es valida para cualquier colección de puntos que definan un subdominio arbitrario o elemento del dominio total. Ahora esta ecuación diferencial se multiplica por una función arbitraria W (función de prueba) y se integra el producto sobre el dominio del elemento:

$$\int_{\Omega^{(e)}} W [A(\phi) - f] d\Omega = 0 \quad (\text{C.24})$$

Nótese que la forma de la integral en la ecuación (C.24) contiene el mismo orden de las derivadas en la ecuación diferencial inicial.

Aplicando la integración por partes para la expresión integral (C.24), se pueden obtener expresiones que contienen derivadas de orden menor.

En una dimensión, donde el dominio de interés es $a \leq x \leq b$ la integración por partes es:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (\text{C.25})$$

Donde en la ecuación (C.24) identificamos a u como la función de peso W y dv con las derivadas en el operador diferencial A . La integración por partes en dos dimensiones es conocida como el teorema de Green's. Para un dominio Ω bidimensional con frontera Γ la integración por partes es:

$$\int_{\Omega} u(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) d\Omega = \int_{\Gamma} u(\vec{V} \cdot \hat{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u d\Omega \quad (C.26)$$

Donde identificamos a u como la función de peso W y $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ con las derivadas en el operador diferencial A . En la ecuación (C.26) $\vec{\nabla}$ es el vector operador *del*, definido como:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j \quad (C.27)$$

Y \hat{n} es un vector normal unitario a la frontera:

$$\hat{n} = n_x i + n_y j \quad (C.28)$$

Dependiendo de la forma del operador diferencial A , y mediante la integración por partes se obtiene una expresión equivalente de la forma:

$$\int_{\Omega^{(e)}} [H(W)G(\phi) - Wf] d\Omega + \int_{\Gamma^{(e)}} WP(\phi) d\Gamma = 0 \quad (C.29)$$

Donde $H(W)$, $G(\phi)$ y $P(\phi)$ tendrán términos diferenciales de orden menor que $A(\phi)$ y por lo tanto las funciones que se propongan aquí para representar a ϕ , tendrán menos requisitos de continuidad en sus derivadas que aquellas que se propongan en la expresión inicial (C.21); además podemos ver que la función W necesitará tener continuidad en las derivadas de orden un grado menos que las diferenciales que la afecten en la expresión $H(W)$. Por lo anterior, se observa que al ser más fácil de representar la ecuación (C.27) en cuanto a requisitos de la expresión (C.21), se le conoce con el nombre de “forma débil”. Nótese que en este proceso surgen los términos de frontera, los cuales determinan la naturaleza de las condiciones de frontera* (natural o esencial). Como regla general, los coeficientes que acompañan a W y sus derivadas en la integral de frontera constituye la condición de frontera natural (o dinámica). La especificación de la variable dependiente en la misma forma en que aparece la función arbitraria W y sus derivadas en la integral de frontera constituye la condición de frontera esencial (geométrico o estática). Las variable involucradas en la condición de frontera

Ya que dentro de un elemento esta definida la variable dependiente (C.30), entonces este sistema de ecuaciones $m \times m$ esta definido sobre un solo elemento. Por lo tanto al discretizar el dominio en una cantidad E de elementos interconectados entre si por los nodos (donde se definen los valores de la variable dependiente), y al aplicar el anterior procedimiento a cada elemento, se obtiene E sistemas de $m \times m$. Si se ensamblan todos los sistemas, partiendo de las condiciones de continuidad entre elementos vecinos es posible obtener un único gran sistema de $n \times n$ donde n es el número de grados de libertad total de la malla. Es posible llevar el anterior sistema de ecuaciones a la siguiente forma matricial, donde se obtiene la solución de la variable ϕ en todos los nodos del sistema.

$$[K]\{\Phi\} = \{F\} \quad (C.34)$$

Donde:

$[K]$ = Es la matriz de rigidez global.

$\{\Phi\}$ = Es el vector de valores nodales.

$\{F\}$ = Es el vector de fuerzas globales

ANEXO D. FENOMENOS MODELADOS CON AYUDA DE LOS METODOS NUMERICOS

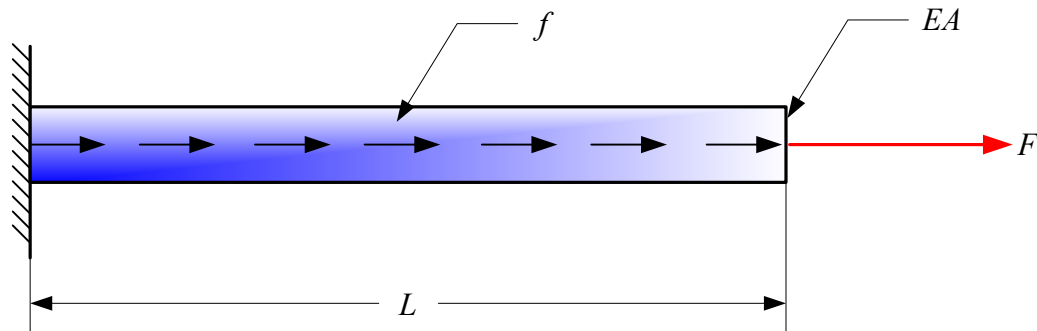
Los fenómenos de ingeniería más comunes en cuya solución se usan los métodos numéricos, serán descritos a continuación. Este listado de problemas es presentado más con la intención de familiarizar al lector con el tipo de problemas que se atacan con elementos finitos, que de hacer un estudio detallado de ellos. Solo se presentara el enunciado, la ecuación diferencial y las condiciones de

frontera que definen el modelo, y el significado y notación de las funciones o constantes que definen las características naturales de las sustancia objeto de representación.

D.1 DEFORMACIÓN AXIAL DE UNA BARRA

Este problema consiste en determinar la deformación axial u , y el estado de esfuerzos de un punto de coordenada x , de una barra de longitud L , sección transversal A , y un modulo de elasticidad E , sometida a una fuerza axial de tensión o de compresión F , y a una fuerza axial distribuida por unidad de longitud f .

Figura D.1. Barra sometida a cargas axiales



El modelo matemático de este problema consiste en la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dx} \left[EA \frac{du}{dx} \right] + f = 0 \quad (D.1)$$

Y las condiciones de frontera:

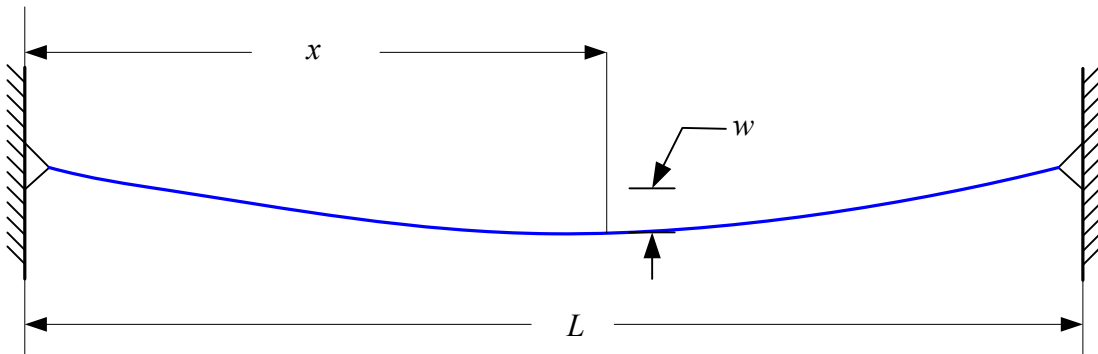
$$u|_{x=0} = 0; \quad EI \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = F \quad (D.2)$$

Este problema es del dominio de la mecánica de sólidos y de interés para los ingenieros mecánicos y civiles.

D.2 DEFORMACIÓN TRANSVERSAL DE UN CABLE

Un cable fijo a dos puntos separados una longitud L , se deforma debido a su propio peso por unidad de longitud f , generando una tensión T . La deflexión w , de un punto de coordenada horizontal x , queda determinada por la ecuación:

Figura D.2. Deflexión transversal de un cable



$$\frac{d}{dx} \left[T \frac{dw}{dx} \right] + f = 0 \quad (D.3)$$

Y las condiciones de frontera:

$$w|_{x=0} = 0; \quad w|_{x=L} = 0 \quad (D.4)$$

D.3 FLUJO A TRAVÉS DE TUBERÍAS

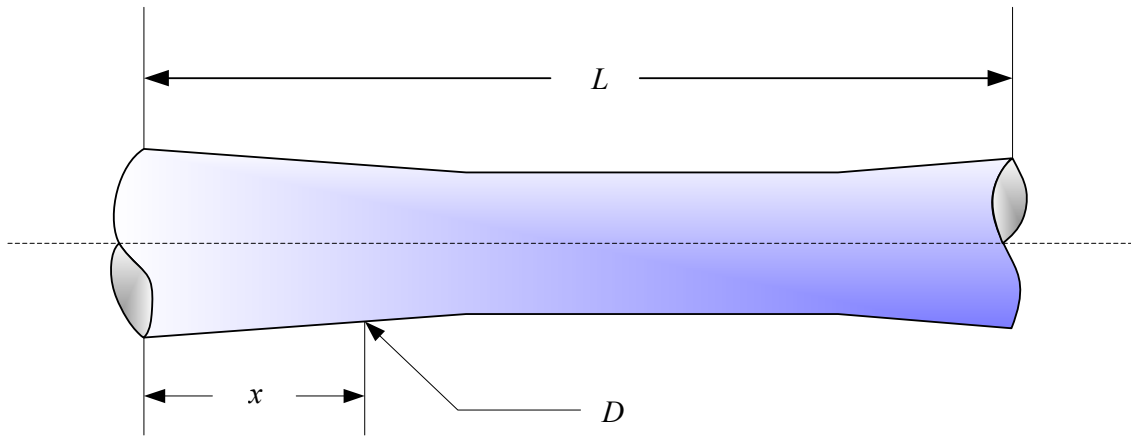
Determinar la posición promedio P , en la sección de una tubería de diámetro D . El fluido tiene una viscosidad dinámica μ y Q es la rata de flujo en una sección. La ecuación que define es estado de presiones en este problema de especial importancia para las Ingenierías de petróleos y mecánica es:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\pi D^4}{128 \mu} \frac{dP}{dx} \right] + f = 0 \quad (D.5)$$

Y las condiciones de frontera:

$$P|_{x=0} = 0; \quad \frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{dP}{dx} \Big|_{x=L} = Q \quad (D.6)$$

Figura D.3. Tubería de sección variable



D.4 FLUJO LAMINAR INCOMPRESIBLE A TRAVÉS DE UN CANAL BAJO GRADIENTE DE PRESIÓN CONSTANTE

Aquí se trata de encontrar la distribución de velocidades a través de una sección de un canal rectangular. La suposición de gradiente de presión f constante, independiza la solución, de la variable x , quedando las ecuaciones dependiendo únicamente de la coordenada y . V es la velocidad horizontal de una partícula de fluido a una distancia y del centro del canal, ρ es la densidad del fluido y t es el esfuerzo normal axial promedio, en una sección del canal.

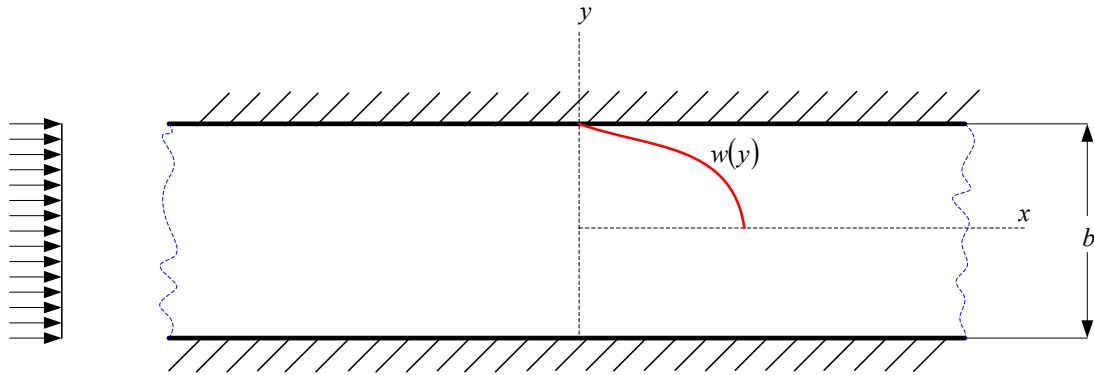
La ecuación que rige este fenómeno es:

$$\frac{d}{dy} \left[\mu \frac{dV}{dy} \right] + f = 0 \quad (D.7)$$

Y las condiciones de frontera:

$$V\Big|_{y=\frac{b}{2}} = 0; \quad V\Big|_{y=-\frac{b}{2}} = 0; \quad \mu \frac{dV}{dy}\Big|_{y=L} = t\rho \quad (\text{D.8})$$

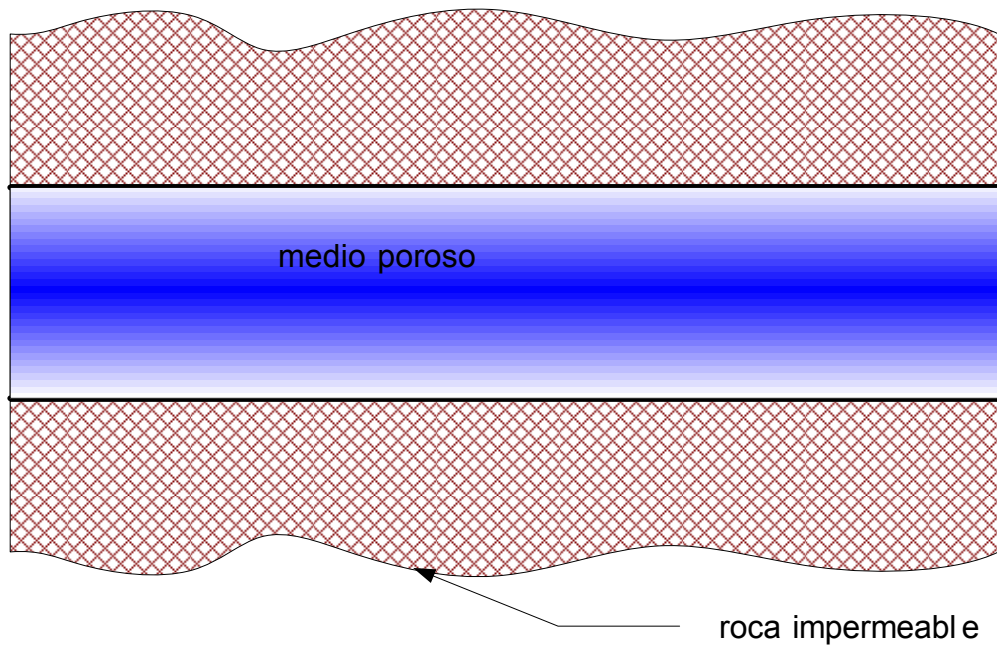
Figura D.4. Distribución de velocidades en la sección de una tubería que conduce un flujo laminar



D.5 FLUJO A TRAVÉS DE MEDIOS POROSOS

Es el problema de los acuíferos. Consiste en determinar la cabeza de presión ϕ , presión relativa respecto a un punto de referencia medida en columna de agua, del movimiento de una sustancia a través de un medio poroso, tal como en una corriente subterránea. En este caso, se supondrá un acuífero confinado en un canal de roca impermeable, de modo que el flujo ocurre en una sola dirección.

Figura D.5. Acuífero extendido longitudinalmente. Vista superior



K , es el coeficiente de permeabilidad del terreno, f son las fuentes de fluido dentro del acuífero y Q , es el caudal en un punto. La idealización que se ha hecho de la geometría del acuífero, como un canal subterráneo, permite establecer la siguiente ecuación para la determinación de la cabeza de presión en una sección ϕ :

$$\frac{d}{dx} \left[K \frac{d\phi}{dx} \right] + f = 0 \quad (D.9)$$

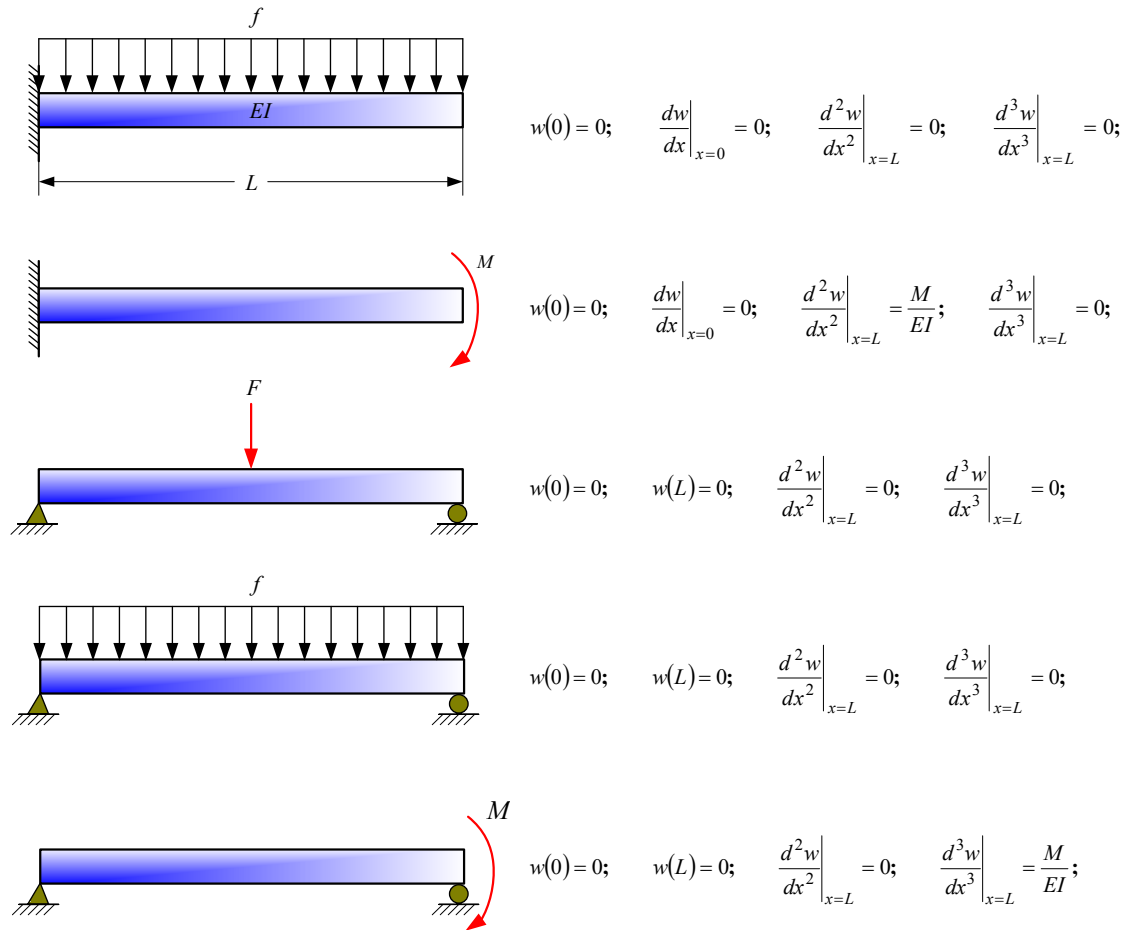
Y las condiciones de frontera:

$$\phi|_{x=0} = \phi_0; \quad \phi|_{x=L} = \phi_1; \quad K \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=L} = Q \quad (D.10)$$

D.6 FLEXIÓN DE UNA VIGA SOMETIDA A CARGAS TRANSVERSALES

Una viga de momento de inercia I , modulo de elasticidad E , longitud L , se somete a cargas concentradas F , distribuidas por unidad de longitud f , y momentos M .

Figura D.6. Condiciones de frontera para diferentes tipos de apoyo en vigas sometidas a cargas transversales



La deflexión vertical u y la pendiente de la curva de deflexión θ , en un punto de coordenada x , quedan determinados por la ecuación diferencial de cuarto orden:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + f = 0; \quad \theta = \frac{dw}{dx} \tag{D.11}$$

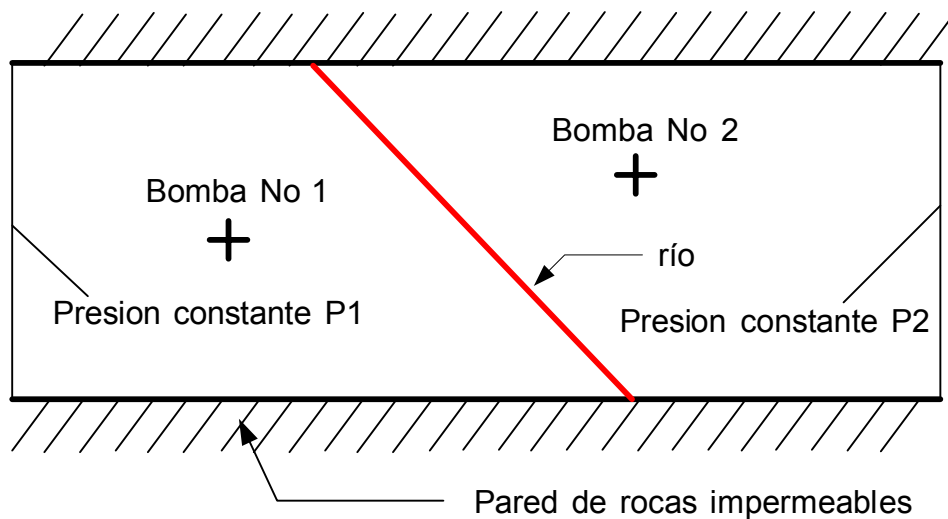
Y las condiciones de frontera mostradas en la Figura D.6.

Este modelo es unidimensional y de cuarto orden.

D.7 FLUJO EN MEDIOS POROSOS EN UN DOMINIO BIDIMENSIONAL

Una extensión a dos dimensiones del problema del acuífero presentado...en la sección D.5...

Figura D.7. Acuífero Bidimensional



La ecuación que rige este fenómeno deducida de la Ley de Darcy y de la ecuación de continuidad, que expresa la conservación de la masa, es:

$$K \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] + f = 0; \quad \text{ó} \quad K \nabla^2 \phi + f = 0 \quad (\text{D.12})$$

Y las condiciones de frontera:

$$\phi|_{x=0} = p_1; \quad \phi|_{x=L} = p_2; \quad K \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0; \quad K \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 \quad (\text{D.13})$$

f representa las fuentes de fluido dentro del dominio, que en este problema son las bombas y el río. Se supone a K constante para todas las direcciones y todos los puntos.

D.8 EL PROBLEMA DE ELASTICIDAD PLANA

Este es el equivalente en 2-D del problema de la barra sometida a fuerzas axiales. Se trata de un sólido con comportamiento linealmente elástico, es decir que cumple la Ley de Hooke, de espesor uniforme h , limitado por dos planos y por una superficie cerrada Γ . Si el espesor h es muy grande el problema se considera de deformación plana, y si h es pequeño comparado con las dimensiones laterales, el problema es considerado de esfuerzo plano.

Ambas situaciones son simplificaciones de problemas de elasticidad tridimensional, bajo la suposición de que las cargas aplicadas no tienen componente, ni variación, en la dirección del espesor z .

La suposición de que los esfuerzos son cero sobre los planos paralelos, implica para problemas de esfuerzo plano (el cuerpo es muy delgado) que los esfuerzos en la dirección z son despreciablemente pequeños.

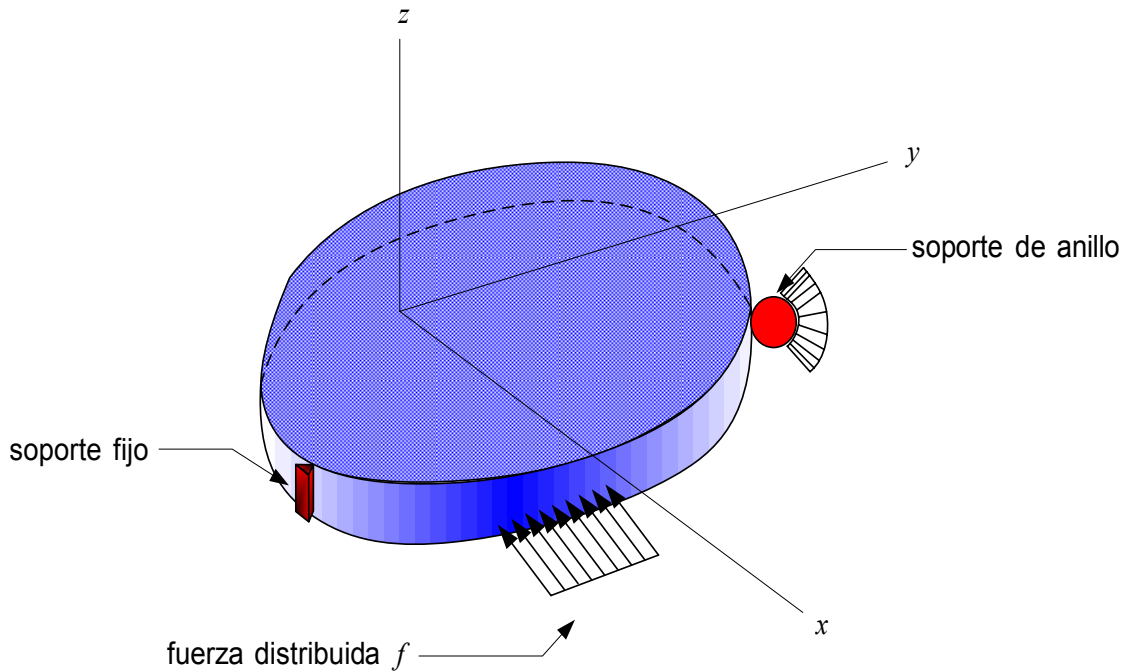
Para problemas de deformación plana, donde el cuerpo es muy grueso en la dirección z , la suposición es que las deformaciones unitarias en la dirección z son cero.

El modelo de este fenómeno consta del sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + c_{33} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] + f_x = 0 \quad (\text{D.14})$$

$$c_{33} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + f_y = 0 \quad (\text{D.15})$$

Figura D.8. Cuerpo plano sometido a cargas coplanares



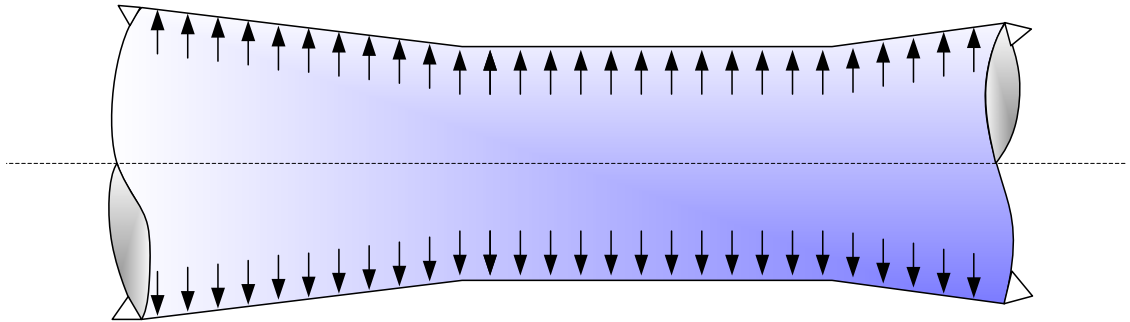
Y las condiciones de frontera:

$$\left[c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right] n_x + c_{33} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] n_y = \hat{t}_x \quad (\text{D.16})$$

$$c_{33} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] n_x + \left[c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right] n_y = \hat{t}_y \quad (\text{D.17})$$

n_x y n_y son los cósenos directores de la normal a la superpie Γ en el punto (x, y) en cuestión, u y v son los desplazamientos del punto, t_x y t_y son los esfuerzos conocidos en un punto de la frontera.

Figura D.9. Tubería sometida a presión interna uniforme y con restricciones a la deformación en dirección axial



c_{11} , c_{12} , c_{22} , c_{33} son constantes que dependen de las propiedades mecánicas del material así:

En esfuerzo plano

$$c_{11} = c_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}; \quad c_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}; \quad c_{33} = \frac{E}{2(1 - \nu)} \quad (\text{D.18})$$

En deformación plana:

$$c_{11} = c_{22} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad c_{12} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad c_{33} = \frac{E}{2(1 - \nu)} \quad (\text{D.19})$$

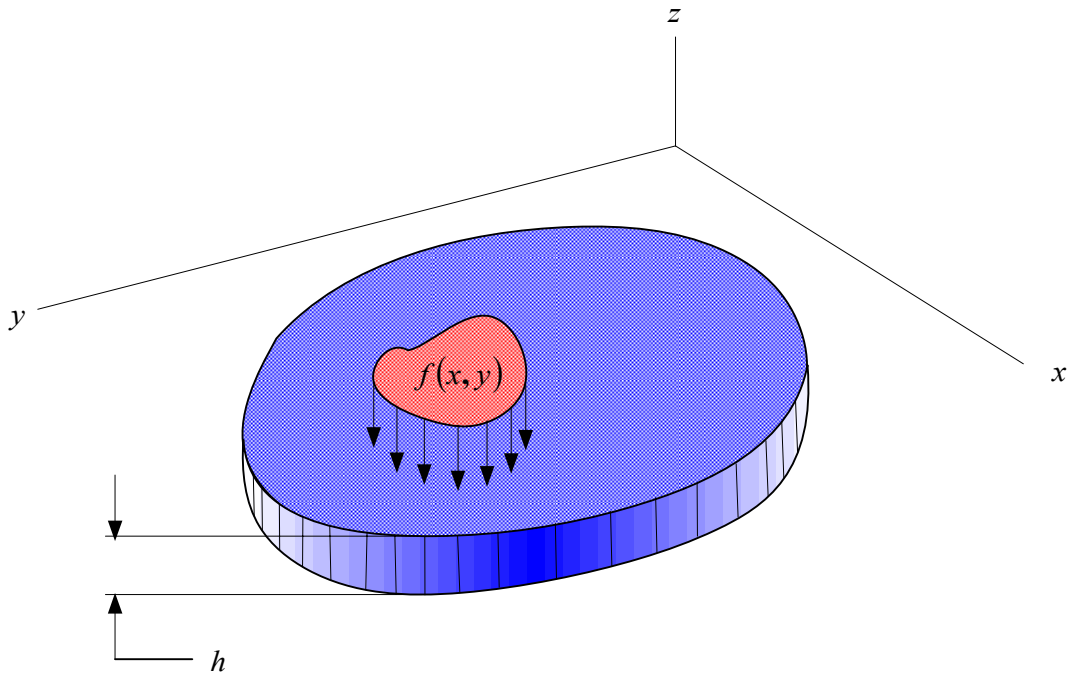
Donde E es el modulo de Young, y ν es la constante de Poisson.

D.9 FLEXIÓN DE PLACAS ELÁSTICAS ORTOTRÓPICAS

Aquí se extiende a dos dimensiones el problema de la viga. La palabra placa es usada para nombrar cuerpos limitados por dos planos paralelos cuyas dimensiones laterales son grandes comparadas con la separación entre estos dos planos. A diferencia de lo que se conoce en la literatura de la mecánica de sólidos como membrana, una placa si puede soportar cargas de flexión. La expresión ortotrópica se refiere a que las propiedades del material son diferentes para cada dirección de los ejes principales del material definidos por la orientación de sus fibras. La placa isotropita es un caso especial de este, y sus ecuaciones se

consiguen sustituyendo los valores de las propiedades del material en cada dirección por un valor constante en todas las direcciones.

Figura D.10. Placa sometida a carga transversal $f(x, y)$



El conjunto de 3 ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento de la placa es:

$$D_{44} \frac{\partial}{\partial x} \left[S_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right] + D_{55} \frac{\partial}{\partial y} \left[S_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right] + f = 0 \quad (\text{D.20})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[D_{11} \frac{\partial S_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial S_y}{\partial y} \right] + D_{33} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial x} \right] + D_{44} \left[S_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right] = 0 \quad (\text{D.21})$$

$$D_{33} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[D_{12} \frac{\partial S_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial S_y}{\partial y} \right] + D_{55} \left[S_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right] = 0 \quad (\text{D.22})$$

Donde f es la carga distribuida transversalmente, por lo general es el peso. Las tres funciones incógnitas del sistema son:

$w(x, y)$: La deflexión en un punto.

S_x : La pendiente de un punto en la dirección x .

S_y : La pendiente de un punto en la dirección y .

$$D_{44} = G_{13}hk; \quad D_{55} = G_{23}hk; \quad D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (\text{D.23})$$

$$D_{22} = \frac{E_2 D_{11}}{E_1}; \quad D_{12} = \nu_{12} D_{12} = \nu_{21} D_{11}; \quad D_{33} = \frac{G_{12} h^3}{12} \quad (\text{D.24})$$

E_1 y E_2 son los módulos de elasticidad en las direcciones x y y respectivamente; ν_{12} y ν_{21} las constantes de Poisson; G_{12} , G_{13} , G_{23} son los módulos de corte del material en los planos xy , xz y yz ; h es el espesor de la placa y k es un factor de corrección igual a $\frac{5}{6}$.

ANEXO E. PROGRAMA COMPUTACIONAL ANSYS

E.1 DESCRIPCION GENERAL

ANSYS Inc. ha diseñado, desarrollado y comercializado una serie de paquetes de software que generan el soporte de las soluciones a una cantidad de inquietudes, que permite a sus clientes para la simulación de todo el ciclo de desarrollo productivo. La herramienta simula, de forma realista y eficiente, tanto las condiciones de trabajo del diseño propuesto como el propio proceso de fabricación, cubriendo un amplio abanico de sectores industriales.

El conjunto de soluciones ofertado por ANSYS es **integrado, modular y extensible**.

Es **integrado** porque permite la generación de sinergias entre las distintas tecnologías necesarias para el desarrollo de un producto sin abandonar una única plataforma. Por otro lado, su nivel de integración permite utilizarse desde los sistemas CAD más avanzados del mercado, con posibilidad de transferencia de información bi-direccional y asociativa. Por último, su capacidad de integración permite incluirle sin dificultad en sistemas de gestión de documentación propios de cada empresa.

La **modularidad** de ANSYS permite que muchos de nuestros clientes comiencen instalando una aplicación para el análisis inicial de sus componentes, bajo hipótesis de trabajo sencillas. A medida que el diseño avanza y que la confianza en la solución aumenta, se requieren análisis más complejos hasta llegar al proceso de validación. Los distintos módulos que componen las soluciones ANSYS permiten la adaptación sencilla del programa a las necesidades reales del usuario.

Por último, ANSYS es **extensible** porque permite el desarrollo de las denominadas “aplicaciones verticales” o adaptaciones del programa a las necesidades específicas de cada cliente. Estas adaptaciones van desde la simple estandarización de la metodología de cálculo o la generación automática de informes normalizados según especificaciones de la empresa, hasta la generación de herramientas altamente especializadas y adaptadas a un determinado sector industrial, como puede ser CivilFEM, la solución basada en ANSYS desarrollada y comercializada por Ingeciber S.A. para el sector civil.

A continuación se hará una breve descripción técnica del programa y su modo de empleo.

E.2 DESCRIPCION TECNICA

E.2.1 Interfaz. Hay dos métodos para utilizar ANSYS. El primero es por medio del interfaz gráfico o GUI gráfico. Este método sigue las convenciones del popular Windows y de los programas basados X-Windows.

El segundo está por medio de archivos de comando. El uso de los archivos de comandos tienen poca aceptación por los usuarios debido a la complejidad que puede presentarse durante su uso, pero tiene la ventaja que un análisis entero se puede describirse en un archivo pequeño del texto, típicamente en menos de 50 líneas de comandos.

E.2.2 Ambiente. El ambiente de ANSYS para ANSYS 8,0 contiene 2 ventanas: la ventana principal y una ventana de la salida. Cabe resaltar, que esto es algo diferente de la versión anterior de ANSYS, que hizo uso 6 diversas ventanas.

Ventana principal. Esta ventana principal tiene cinco subdivisiones, las cuales son:

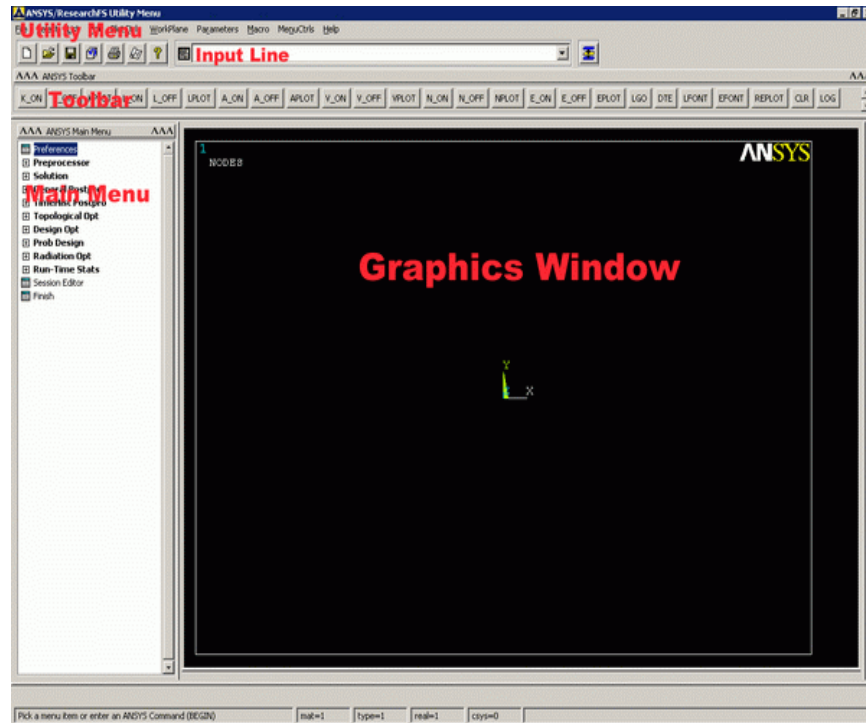
Menú general: El menú general contiene las funciones que están disponibles a través de la sesión de ANSYS, tal como controles del archivo, de las selecciones, los controles gráficos y los parámetros.

Entrada Lindow: La línea de entrada permite que el usuario introduzca comandos como ordenes directas.

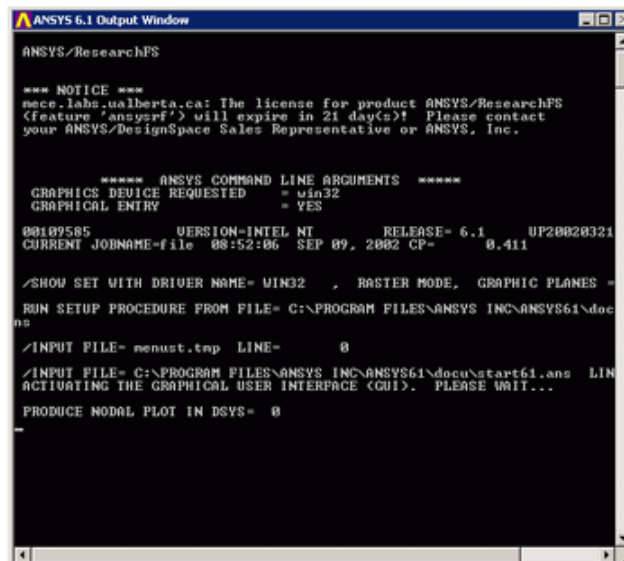
Toolbar. El Toolbar contiene los botones que ejecutan los comandos comúnmente usados de ANSYS. Si se desea es posible agregar mas botones.

Menú Principal: El menú principal contiene las funciones primarias de ANSYS, organizadas en preprocesador, solución, postprocesador general, optimizador del diseño. En este menú se encuentran la mayoría de comandos que se utilizan para realizar un modelamiento. Aquí es de donde usted observará el cambio más grande entre las versiones anteriores ANSYS y la versión 8.0. Sin embargo, mientras que las versiones aparecen diferentes, la estructura del menú no ha cambiado.

Ventana De los Gráficos: La ventana gráfica es donde se muestran los gráficos de entrada y de salida del problema.



E.2.2.2 Ventana de salida. La ventana de la salida muestra el texto que genera el programa, tal como listado de los datos etc. Se coloca generalmente detrás de la ventana y del pantallazo principal.



E.2.3 Archivo de Ansys. ANSYS crea una gran cantidad de archivos necesarios para su funcionamiento. A continuación se especificaran solo alguno de los mas relevantes para el debido funcionamiento del programa:

frame.db Archivo de base de datos (binario). Este archivo almacena la geometría, condiciones de límite y cualquier solución.

frame.dbb Reserva del archivo de base de datos (binario).

frame.err Archivo de error (texto). Lista de todo el error y mensajes de alerta.

frame.out Salida de todas las operaciones de ANSYS (texto). Esto es lo que normalmente las volutas en la ventana de la salida durante una sesión de ANSYS.

frame.log Logfile o listado de los comandos de ANSYS (texto). Listado de todos los comandos equivalentes de la línea de comando de ANSYS usados durante la sesión actual