

EI MONOIDE INVERSO DE MÖBIUS.

EMMANUEL JEREZ ÚSUGA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2018**

EL MONOIDE INVERSO DE MÖBIUS.

EMMANUEL JEREZ ÚSUGA

Trabajo de grado como requisito para optar al título de:

Matemático

Director:

HÉCTOR EDONIS PINEDO TAPIA

Dr. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2018

*A mi abuela Azucena Martínez de Jerez y
a mi abuelo Aquileo Jerez Méndez*

Contenido

	Pág
INTRODUCCIÓN	10
1 SEMIGRUPOS INVERSOS	1
2 EL PRODUCTO SEMIDIRECTO	16
3 LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS Y GRUPO DE MÖBIUS	25
4 EL MONOIDE INVERSO DE MÖBIUS VÍA TRIPLAS DE MCALISTER	40
BIBLIOGRAFÍA	47
ÍNDICE	48

TITULO: EL MONOIDE INVERSO DE MÖBIUS*

AUTOR: EMMANUEL JEREZ ÚSUGA**

PALABRAS CLAVES: SEMIGRUPO, MONOIDE, MÖBIUS, PRODUCTO SEMI-DIRECTO.

DESCRIPCIÓN:

Las transformaciones de Möbius se encuentran entre las funciones fundamentales de la geometría; sus aplicaciones van desde el mapeo cerebral, el procesamiento de imágenes y la criptografía hasta la Teoría de la Relatividad.

Una transformación de Möbius es una biyección parcial sobre el plano complejo. El conjunto de las transformaciones de Möbius con la composición de funciones no forma un grupo, ya que la composición de transformaciones de Möbius no siempre es una transformación de Möbius. Aun así, el resultado de la composición de transformaciones de Möbius preserva varias propiedades de dichas transformaciones, por lo que el conjunto de las transformaciones de Möbius con sus composiciones finitas forma una estructura algebraica conocida como semigrupo inverso. En particular, a esta estructura se la conoce como el monoide inverso de Möbius.

A partir de lo dicho, en este trabajo se muestra que las transformaciones de Möbius conjuntamente con la composición de funciones como operación, forman un monoide F-inverso para el cual su conjunto de elementos maximales forman un grupo que es isomorfo al grupo de Möbius. Además, se demuestra que el monoide inverso de Möbius puede ser inducido en el producto semidirecto entre un grupo por un semirretículo inferior. A partir de ello se describirá al monoide inverso de Möbius mediante triplas de McAlister como un subsemigrupo inverso del producto semidirecto entre el grupo de Möbius y el semirretículo inferior del conjunto de las restricciones de la función identidad sobre subconjuntos cofinitos del plano complejo.

*Trabajo de grado

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Hector Edonis Pinedo
Tapia, Dr. en Matemáticas.

TITLE: THE MÖBIUS INVERSE MONOID*

AUTHOR: EMMANUEL JEREZ ÚSUGA**

KEYWORDS: SEMIGROUP, MONOID, MÖBIUS, SEMIDIRECT PRODUCT.

DESCRIPTION:

The Möbius transformations are among the fundamental functions of geometry; with applications from brain mapping, image processing and cryptography to the Theory of Relativity.

A Möbius transformation is a partial bijection on the complex plane. The set of Möbius transformations with the composition of functions is not a group, since the composition of Möbius transformations is not always a Möbius transformation. Even so, the result of the composition of Möbius transformations preserves several properties of these transformations, so the set of Möbius transformations with their finite compositions forms an algebraic structure known as inverse semigroup. In particular, this structure is known as the Möbius inverse monoid.

In this work it is shown that the Möbius transformations together with the composition of functions as an operation, form an F-inverse monoid for which their set of maximal elements form a group that is isomorphic to the Möbius group. In addition, it is shown that the Möbius inverse monoid can be induced in the semidirect product of a meet semilattice by a group. We describe the Möbius inverse monoid in terms of McAlister triples as an inverse subsemigroup of semidirect product between the Möbius group and the meet semilattice of identity function restrictions on cofinite subsets of the complex plane.

*Degree work

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Hector Edonis Pinedo Tapia, Dr. en Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Las transformaciones de Möbius se encuentran entre las funciones fundamentales de la geometría; sus aplicaciones van desde el mapeo cerebral, procesamiento de imágenes y la criptografía hasta la Teoría de la Relatividad. Estas transformaciones pueden entenderse como funciones parciales del plano complejo de la siguiente forma: $\alpha(z) = (az + b)/(cz + d)$ donde a, b, c, d son números complejos y $ad - bc \neq 0$, ya que si $ad - bc = 0$ la función α será una constante, la cual no se considera una transformación de Möbius (ver Definición 1.13). Es claro que hay muchas maneras de escribir la función α , porque al multiplicar a, b, c, d por cualquier número complejo no nulo es posible obtener una forma diferente de la misma función. Este es un hecho que se debe tener en cuenta de aquí en adelante.

El conjunto de las transformaciones de Möbius con la composición de funciones no forma un grupo, ya que la composición de transformaciones de Möbius no siempre es una transformación de Möbius. Aun así, el resultado de la composición de transformaciones de Möbius preserva varias propiedades de dichas transformaciones, por lo que el conjunto de las transformaciones de Möbius con sus composiciones finitas forma una estructura algebraica conocida como semigrupo inverso (ver Definición 1.3). En particular, a esta estructura se la conoce como el *Monoide inverso de Möbius*, que se denotará por \mathcal{M} .

La primera sección de este trabajo se enfoca en proporcionar la teoría necesaria sobre semigrupos inversos para empezar a caracterizar el monoide inverso de Möbius. En las siguientes secciones se estudiará el producto semidirecto entre un grupo y un semirretículo; a partir de dicho estudio se inicia el proceso de caracterización del monoide inverso de Möbius, ya que mediante el estudio de las propiedades particulares del monoide inverso de Möbius se mostrará que este no es isomorfo al producto semidirecto entre un grupo y un semirretículo inferior; no obstante, al introducir el concepto de tripla de McAlister se mostrará que el monoide inverso de Möbius puede ser incluido en el producto semidirecto entre un grupo y un semirretículo inferior. Finalmente, en la última sección se mostrarán los resultados y los teoremas concluyentes que permiten describir el monoide inverso de Möbius como algún tipo de producto semidirecto; se emplearán las triplas de McAlister para mostrar cuál es el producto semidirecto en el cual puede

ser incluido el monoide inverso de Möbius, y, en particular, cual es el subsemigrupo inverso de dicho producto semidirecto al cual es isomorfo el monoide inverso de Möbius.

Es importante mencionar que toda la teoría desarrollada en este documento está basada en los resultados obtenidos por *M.V Lawson* en [2], además, algunas demostraciones presentadas en este trabajo fueron extraídas de [3]. Por su parte, demostraciones como la del Teorema 2.3, del Teorema 2.4 y la teoría desarrollada para el ejemplo (III) de 4.5 se realizaron de manera independiente.

Capítulo

1

SEMIGRUPOS INVERSOS

Los semigrupos inversos fueron introducidos por los matemáticos V.V.Wagner en 1952 [8] y Gordon Preston en 1954 [6]. Dicho concepto, al cual llegaron de manera independiente, se obtuvo mediante el estudio de las transformaciones parciales inyectivas de un conjunto. En esta sección se mostrará la teoría de semigrupos inversos necesaria para desarrollar apropiadamente el estudio del monoide inverso de Möbius.

Definición 1.1. Un *semigrupo* es un conjunto S con una operación \odot que cumplen:

- *Operación interna:* para toda pareja de elementos elementos de S operados bajo \odot , el resultado siempre pertenece a S . Es decir:

$$\forall x, y \in S : x \odot y \in S.$$

- *Asociatividad:* para cualesquiera elementos del conjunto S no importa el orden en que se operen las parejas de elementos, mientras no se cambie el orden de los elementos, siempre dará el mismo resultado. Es decir:

$$\forall x, y, z \in S : (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z).$$

Si un semigrupo tiene elemento identidad 1_S tal que $1_S \odot a = a \odot 1_S = a$, se dice que S es un monoide.

Definición 1.2. Sea S un semigrupo, diremos que un elemento a de S es *idempotente* si $a^2 = a$. El conjunto de todos los elementos idempotentes de S se

denotará por $E(S)$.

Definición 1.3. Un *semigrupo inverso* S es un semigrupo que satisface las siguientes dos condiciones:

- S es regular. Esto significa que para todo elemento $a \in S$ existe un elemento b , llamado un *inverso* de a , que satisface $a = aba$ y $b = bab$.
- Los elementos idempotentes de S conmutan.

Observación 1.4. Note que dado un semigrupo inverso S , para todo $a \in S$ y $b \in S$ un inverso de a se tiene que $ab = a(bab) = (ab)(ab)$, por lo que ab es idempotente.

Con la definición de semigrupo inverso notamos que la estructura de semigrupo inverso es más general que la de grupo, ya que en particular todo grupo es un semigrupo inverso pero el recíproco es falso. Un hecho interesante de mencionar es que si un semigrupo inverso tiene un único elemento idempotente entonces es un grupo.

Ejemplo 1.5. Algunos ejemplos de semigrupos inversos son:

- (I) Cualquier grupo G es un semigrupo inverso.
- (II) Un *semirretículo inferior* es un conjunto parcialmente ordenado R por la relación binaria \leq donde para todo par de elementos x y y en R existe el ínfimo del conjunto $\{x, y\}$, de esta manera la operación $x \wedge y$ es el ínfimo del conjunto $\{x, y\}$. Luego R es un semigrupo inverso con la operación \wedge .
- (III) Dado un grupo G se define:

$$\mathcal{P}_1(G) := \{A \subseteq G \mid A \text{ es finito y } 1_G \in A\}$$

Entonces:

$$\tilde{G}^R := \{(A, g) \in \mathcal{P}_1(G) \times G \mid g \in A\}$$

Con el producto $(A, g)(B, h) = (A \cup gB, gh)$ es un semigrupo inverso conocido como la *expansión de Birget-Rhodes* de G .

En efecto, sean $(A, a), (B, b), (C, c) \in \tilde{G}^R$, entonces:

$$\begin{aligned}
((A, a)(B, b))(C, c) &= (A \cup aB, ab)(C, c) \\
&= ((A \cup aB) \cup abC, abc) \\
&= (A \cup aB \cup abC, abc) \\
&= (A \cup a(B \cup bC), abc) \\
&= (A, a)(B \cup bC, bc) \\
&= (A, a)((B, b)(C, c)).
\end{aligned}$$

Por otro lado, note que los elementos idempotentes de \tilde{G}^R son de la forma $(A, 1)$ por lo tanto dados dos elementos $(A, 1), (B, 1) \in \tilde{G}^R$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
(A, 1)(B, 1) &= (A \cup 1B, 1) \\
&= (B \cup 1A, 1) \\
&= (B, 1)(A, 1).
\end{aligned}$$

Con esto \tilde{G}^R es un semigrupo inverso. Este semigrupo inverso será un ejemplo recurrente que nos permitirá visualizar varios de los resultados que se desarrollan en este trabajo.

(IV) Un ejemplo de un semigrupo regular que no es un semigrupo inverso es el siguiente:

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	3
3	1	2	3	2	3
4	1	1	1	4	5
5	1	4	5	4	5

Note que 3 y 4 son idempotentes pero $4 \cdot 3 = 1$ y $3 \cdot 4 = 2$, por lo tanto no es un semigrupo inverso.

(V) Dados p, q símbolos tales que $pq = 1$ y $qp \neq 1$, con la concatenación de letras se tiene que:

$$S := \{q^a p^b \mid a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

Es un semigrupo inverso y la operación de S queda de la siguiente manera:

$$(q^a p^b)(q^c p^d) = q^{a-b+\max\{b,c\}} p^{d-c+\max\{b,c\}}$$

Definición 1.6. Una *función parcial* de X a Y es una función $f : X' \rightarrow Y'$ donde X' es un subconjunto de X y Y' es un subconjunto de Y .

Dado C un conjunto, entonces el conjunto $Inv(C)$ de todas las funciones parciales inyectivas forma un semigrupo inverso. En efecto, sean α y β dos funciones en $Inv(C)$, $\alpha \circ \beta$ resulta inyectiva ya que α y β son inyectivas. Por otro lado la composición de funciones parciales también es asociativa. Sea $\gamma : X' \rightarrow Y'$ donde X' y Y' son subconjuntos de C , como γ es inyectiva entonces existe un $\gamma' : Y' \rightarrow X'$ tal que γ' es el inverso de γ . Finalmente, nótese que los elementos idempotentes de $Inv(C)$ resultan ser la función identidad restringida a algún subconjunto de C . En efecto, sea $\alpha \in Inv(C)$ tal que $\alpha \circ \alpha = \alpha$, si α no es una restricción de la función identidad, entonces existe $x \in \text{Dom } \alpha$ tal que $\alpha(x) = y \neq x$, de esta manera $\alpha \circ \alpha(x) = \alpha(x)$, entonces $\alpha(y) = y$ lo que contradice que α es inyectiva. Como cada elemento idempotente es una restricción de la identidad entonces conmutan.

Una pregunta natural que surge con respecto a los inversos de un elemento en un semigrupo inverso es saber si son únicos; la respuesta es afirmativa. Además es una condición necesaria y suficiente para que un semigrupo regular sea un semigrupo inverso. Antes de mostrar dicho resultado es necesario enunciar el siguiente Lema.

Lema 1.7. *En un semigrupo regular el producto de dos elementos idempotentes tiene un inverso idempotente. En particular dados e y f dos elementos idempotentes de un semigrupo regular y x un inverso de ef . El elemento fxe es un inverso de ef y es idempotente.*

Demostración. Sean e y f dos elementos idempotentes de un semigrupo regular y x un inverso de ef . El elemento fxe es idempotente ya que:

$$(fxe)^2 = f(xefx)e = fxe$$

Ademas fxe tambien es inverso de ef , en efecto:

$$(fxe)ef(fxe) = (fxe^2)(f^2xe) = fxe.$$

$$(ef)(fxe)(ef) = (ef^2)x(e^2f) = (ef)x(ef) = ef.$$

□

Con el Lema anterior podemos mostrar el siguiente resultado.

Teorema 1.8. *Sea S un semigrupo regular. Entonces S es un semigrupo inverso si y solo si para todo $a \in S$ el inverso de a es único, el cual se denotará a^{-1} .*

Demostración. Sea S un semigrupo regular tal que sus elementos idempotentes conmutan y $x \in S$, donde u, v son inversos de x . Entonces:

$$u = uxu = u(xvx)u = (ux)(vx)u$$

Como ux y vx son idempotentes se tiene que:

$$u = (ux)(vx)u = (vx)(ux)u = vxu = (v xv)xu = v(xv)(xu)$$

De la misma manera, dado que xv y xu son idempotentes :

$$u = v(xv)(xu) = v(xu)(xv) = v(xux)v = vxv = v$$

Con ello se tiene que $u = v$.

Para la segunda implicación se toma a S un semigrupo regular donde cada elemento tiene un único inverso. Se mostrará que $ef = fe$ donde e y f son idempotentes de S .

Sea $(ef)'$ un inverso de ef , del Lema 1.7 el elemento $f(ef)'e$ es un elemento idempotente e inverso de ef . Por hipótesis el inverso de un elemento es único, por lo tanto $f(ef)'e = (ef)'$, además como todo elemento idempotente es su propio inverso y ef es el inverso de $(ef)'$ se tiene que $ef = (ef)'$ y con ello ef es idempotente.

Lo anterior muestra que el producto de idempotentes es idempotente, por lo tanto fe también es idempotente. Finalmente, como $ef(fe)ef = efef = ef$ y $fe(ef)fe = fefe = fe$ entonces $ef = fe$. □

Observación 1.9. Note que si e es un idempotente de un semigrupo inverso S entonces $e = e^{-1}$.

De manera análoga a la construcción de los grupos simétricos a partir de biyecciones sobre un conjunto, siguiendo la Definición 1.6 se pueden construir semigrupos inversos a partir de biyecciones parciales, además, debido a que la función identidad es una biyección parcial estos semigrupos serán monoides, es decir la función identidad será el elemento neutro. Con lo anterior resulta natural la finalidad de la siguiente Definición.

Definición 1.10. El *monoide inverso simétrico* $I(X)$ sobre un conjunto X es el conjunto de todas las biyecciones parciales del conjunto X esto es:

$$I(X) := \{f : A \rightarrow B \mid A \subseteq X, B \subseteq X \text{ y } f \text{ es biyectiva} \}$$

Bajo la operación de composición de funciones $I(X)$ es un semigrupo inverso.

Veamos que $I(X)$ efectivamente es un semigrupo inverso.

Sean $f, g \in I(X)$, se tiene que $\text{Dom}(f \circ g) = g^{-1}(\text{Dom } f \cap \text{Im } g)$ y $\text{Im}(f \circ g) = f(\text{Dom } f \cap \text{Im } g)$, con ello vale que

$$f \circ g : g^{-1}(\text{Dom } f \cap \text{Im } g) \rightarrow f(\text{Dom } f \cap \text{Im } g)$$

por lo tanto, $f \circ g$ es sobreyectiva.

La inyectividad de $f \circ g$ se deduce del hecho de que f y g son biyecciones parciales, por lo tanto para $x, y \in X$ donde $x \neq y$ se tiene que:

$$x \neq y \Leftrightarrow g(x) \neq g(y) \Leftrightarrow f(g(x)) \neq f(g(y))$$

Lo que muestra la inyectividad.

La asociatividad se deduce del hecho de que para $f, g, h \in I(X)$ se tiene que $f \circ (g \circ h)(x) = f(g \circ h(x)) = f(g(h(x))) = f \circ g(h(x)) = (f \circ g) \circ h(x)$ y al comprobar que $\text{Dom}[f \circ (g \circ h)] = \text{Dom}[(f \circ g) \circ h]$.

Finalmente, para todo $f \in I(X)$ es una biyección parcial, por lo tanto existe f^{-1} inverso de f y este es único. De esta manera por el Teorema 1.8 el conjunto $I(X)$ es un semigrupo inverso.

Definición 1.11. Sea X un conjunto y $U \subseteq X$, si el conjunto $X \setminus U$ es finito diremos que U es un conjunto *cofinito*.

Lema 1.12. Sea X un conjunto infinito, el conjunto de todas las biyecciones parciales entre subconjuntos cofinitos de X forman un subsemigrupo inverso de $I(X)$

$$C_{I(X)} := \{f : A \rightarrow B \mid A \text{ y } B \text{ son subconjuntos cofinitos de } X \text{ y } f \text{ es biyectiva}\}$$

Además si $g \in C_{I(X)}$ diremos que g es cofinito.

Demostración. Debido a que $I(X)$ es un semigrupo inverso $C_{I(X)}$ hereda la asociatividad de este, además, dado un $\gamma \in C_{I(X)}$ tal que $\gamma : A \rightarrow B$ donde A y B son conjuntos cofinitos, entonces $\gamma^{-1} : B \rightarrow A$ y de esta manera $\gamma^{-1} \in C_{I(X)}$, con lo que solo falta verificar que para todo $\alpha, \beta \in C_{I(X)}$ su compuesta $\alpha \circ \beta \in C_{I(X)}$. Dado que α, β son biyecciones parciales se tiene que: $\text{Dom}(\alpha \circ \beta) = \beta^{-1}(\text{Dom}(\alpha) \cap \text{Im}(\beta))$ y $\text{Im}(\alpha \circ \beta) = \alpha(\text{Dom}(\alpha) \cap \text{Im}(\beta))$ como $\text{Dom}(\alpha)$ y $\text{Im}(\beta)$ son conjuntos cofinitos, entonces $\text{Dom}(\alpha \circ \beta)$ es un conjunto cofinito, además, dado que α, β son biyecciones entonces $\text{Im}(\alpha \circ \beta)$ también es un conjunto cofinito. Por lo tanto, $\alpha \circ \beta \in C_{I(X)}$. \square

Es pertinente introducir el concepto de *monoide inverso de Möbius* que es el objeto principal de estudio en este trabajo, por lo que se iniciará definiendo formalmente que es una transformación de Möbius.

Definición 1.13. Una *transformación de Möbius* es una función parcial del plano complejo $\alpha : \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ de la forma:

$$\alpha(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde a, b, c, d son números complejos que satisfacen que $ad - bc \neq 0$.

Observación 1.14. Si $ad = bc$, la función definida anteriormente es una constante:

$$\alpha(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a(cz + d)}{c(cz + d)} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)} = \frac{a}{c}$$

y esta no es considerada una transformación de Möbius.

Si $\alpha(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $\beta(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$ son transformaciones de Möbius entonces su producto se define:

$$\alpha \odot \beta = \frac{(aA + bC)z + (aB + bD)}{(cA + dC)z + (cB + dD)}$$

El resultado de esta operación es una transformación de Möbius, respecto a esta operación las transformaciones de Möbius forman un grupo M , llamado el *grupo de Möbius*.

En efecto, para comprobar que la operación \odot está bien definida basta con comprobar que para dos transformaciones de Möbius $\alpha(z) = (az + b)/(cz + d)$ y $\beta(z) = (Az + B)/(Cz + D)$, se tiene que:

$$(aA + bC)(cB + dD) - (aB + bD)(cA + dC) \neq 0$$

Para mostrar eso se debe notar que:

$$\begin{aligned} (ad - bc)(AD - BC) &= adAD - adbC - bcAD + bcBC \\ &= (aA + bC)(cB + dD) - (aB + bD)(cA + dC) \end{aligned}$$

Dado que $ad - bc \neq 0$ y $AD - BC \neq 0$, entonces $(ad - bc)(AD - BC) \neq 0$.

- **Asociatividad:** Sean $\alpha(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $\beta(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$ y $\gamma(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ transformaciones de Möbius, entonces:

$$\begin{aligned} (\alpha \odot \beta) \odot \gamma(z) &= \frac{(aA + bC)z + (aB + bD)}{(cA + dC)z + (cB + dD)} \odot \gamma(z) \\ &= \frac{((aA + bC)a' + (aB + bD)c')z + ((aA + bC)b' + (aB + bD)d')}{((cA + dC)a' + (cB + dD)c')z + ((cA + dC)b' + (cBdD)d')} \\ &= \frac{(a(Aa' + Bc') + b(Ca' + Dc'))z + (a(Ab' + Bd') + b(Cb' + Dd'))}{(c(Aa' + Bc') + d(Ca' + Dc'))z + (c(Ab' + Bd') + d(Cb' + Dd'))} \\ &= \alpha \odot (\beta \odot \gamma)(z), \text{ donde } z \in \text{Dom}((\alpha \odot \beta) \odot \gamma(z)) \end{aligned}$$

- **Elemento neutro:** Debido a que la función identidad es una transformación de Möbius $e(z) = \frac{1z+0}{0z+1} = z$ esta es el elemento neutro del conjunto con la operación \odot .
- **Existencia del inverso:** Para cada transformación de Möbius $\alpha(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ su elemento neutro es $\alpha^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$. En efecto,

$$\alpha(z) \odot \alpha^{-1}(z) = \frac{(ad - bc)z + (-ab + ab)}{(cd - cd)z + (-bc + ad)} = \frac{(ad - bc)}{(ad - bc)}z = z$$

y

$$\alpha^{-1}(z) \odot \alpha(z) = \frac{(da - bc)z + (db - db)}{(-ac + ac)z + (da - bc)} = \frac{(ad - bc)}{(ad - bc)}z = z.$$

Con esto se ha mostrado que las transformaciones de Möbius forman un grupo con la operación \odot .

De manera similar a la definición de grupo generado por un conjunto se define lo que se entiende por *semigrupo inverso generado* por un conjunto, además, se mostrarán algunos resultados en la teoría de semigrupos inversos semejantes a los obtenidos en la teoría de grupos.

Definición 1.15. Sea S un semigrupo inverso y $X \subseteq S$ se define el *semigrupo inverso generado por X* como el menor subsemigrupo inverso de S que contiene a X el cual se denotará por $G(X)$.

Lema 1.16. Sea S un semigrupo inverso y $a = a_1 a_2 \dots a_n$ donde $a_i \in S$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces $a^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1}$

Demostración. Por inducción el resultado es sencillo, sea $a = a_1 a_2$ donde $a_1, a_2 \in S$ es claro que $a^{-1} = a_2^{-1} a_1^{-1}$.

Asumamos el resultado válido para el producto de n elementos, mostremos que se cumple para el producto de $n + 1$ elementos. Sea $w = w_1 w_2 \dots w_n w_{n+1}$ tomemos $v = w_1 w_2 \dots w_n$, entonces $w = v w_{n+1}$, de esta manera por hipótesis $w^{-1} = w_{n+1}^{-1} v^{-1}$ y por la hipótesis inductiva $v^{-1} = w_n^{-1} w_{n-1}^{-1} \dots w_1^{-1}$, por lo tanto $w^{-1} = w_{n+1}^{-1} w_n^{-1} w_{n-1}^{-1} \dots w_1^{-1}$. \square

Proposición 1.17. Sea S un semigrupo inverso y $X \subseteq S$, entonces

$$G(X) := \{x \in S \mid x = \alpha_1^{z_1} \alpha_2^{z_2} \dots \alpha_n^{z_n} \text{ donde } \alpha_i \in X \text{ y } z_i \in \{-1, 1\}\}$$

Demostración. Sea

$$G'(X) := \{x \in S \mid x = \alpha_1^{z_1} \alpha_2^{z_2} \dots \alpha_n^{z_n} \text{ donde } \alpha_i \in X \text{ y } z_i \in \{-1, 1\}\}$$

Veamos que $G'(X)$ es un semigrupo inverso. Sean $a, b \in G'(X)$, por lo tanto $a = \alpha_1^{z_1} \alpha_2^{z_2} \dots \alpha_n^{z_n}$ y $b = \beta_1^{z'_1} \beta_2^{z'_2} \dots \beta_m^{z'_m}$, entonces:

$$ab = \alpha_1^{z_1} \alpha_2^{z_2} \dots \alpha_n^{z_n} \beta_1^{z'_1} \beta_2^{z'_2} \dots \beta_m^{z'_m}$$

Como $\alpha_i, \beta_i \in X$ es claro que $ab \in G'(X)$.

Sea $a \in G'(X)$ por hipótesis se tiene que $a = \alpha_1^{z_1} \alpha_2^{z_2} \dots \alpha_n^{z_n}$, además el Lema 1.16 garantiza que $a^{-1} = (\alpha_n^{z_n})^{-1} (\alpha_{n-1}^{z_{n-1}})^{-1} \dots (\alpha_1^{z_1})^{-1}$, por lo tanto $a^{-1} = \alpha_n^{s_n} \alpha_{n-1}^{s_{n-1}} \dots \alpha_1^{s_1}$ donde $s_i \in \{-1, 1\}$. Entonces $a^{-1} \in G(X)$.

Note que $G'(X) \subseteq S$, por lo que $G'(X)$ es asociativo y sus idempotentes conmutan.

Finalmente, como $G(X)$ es un semigrupo inverso, entonces $\{g^{-1} \in S \mid g \in X\} \subseteq G(X)$, por lo tanto dado $a \in G'(X)$ se tiene que $a = \alpha_1^{z_1} \alpha_2^{z_2} \dots \alpha_n^{z_n}$; como cada $\alpha_i^{z_i} \in G(X)$, entonces $a \in G(X)$. Por lo tanto, $G'(X) = G(X)$.

□

Como las transformaciones de Möbius son biyecciones parciales de \mathbb{C} podemos verlas como elementos del monoide inverso simétrico $I(\mathbb{C})$. La composición finita de transformaciones de Möbius y sus inversas forman un submonoide inverso de $I(\mathbb{C})$; en efecto, como $1_{\mathbb{C}} \in M$ y $M \subseteq I(\mathbb{C})$ la Proposición 1.17 garantiza que su generado será un submonoide inverso de $I(\mathbb{C})$ al que llamaremos el *monoide inverso de Möbius* el cual se denotará \mathcal{M} y el el objetivo principal de estudio en este trabajo.

Poder definir apropiadamente una relación de orden provee una gama importante de herramientas en el estudio de semigrupos inversos, con esto en mente y teniendo en cuenta que los elementos idempotentes de un semigrupo inverso son cruciales, se define el *orden parcial natural* a través de la siguiente proposición.

Proposición 1.18. *La relación dada por $s \leq t \Leftrightarrow s = te$ para algún elemento idempotente e es un orden parcial sobre semigrupos inversos.*

Demostración. Sea S un semigrupo inverso:

- *Reflexividad:* Para $s \in S$, entonces $s \leq s$ ya que $s = ss^{-1}s$ y $s^{-1}s$ es idempotente.
- *Antisimetría:* Dados $a, b \in S$, si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = be$ y $b = ai$ donde e, i son idempotentes, como $ei = ie$ se tiene que:

$$a = aie = aiei = bie = ai = b.$$

- **Transitividad:** Sean $a, b, c \in S$ tales que $a \leq b$ y $b \leq c$. Por lo tanto $a = be_1$ y $b = ce_2$, con lo que se concluye que $a = c(e_2e_1)$ ya que e_2e_1 es idempotente entonces, $a \leq c$.

□

Dados dos elementos a y b es un semigrupo inverso S tales que $a \leq b$ resulta importante profundizar acerca de los resultados que implican dicha relación, por ejemplo, ¿que pasa entre a^{-1} y b^{-1} ?, ¿los elementos idempotentes aa^{-1} y bb^{-1} tienen relevancia en dicha relación? El siguiente Lema responde esas preguntas y además provee varios resultados que facilitarán el desarrollo de este trabajo.

Lema 1.19. *Sea S un semigrupo inverso, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $s \leq t$,
2. $s = ft$ para algún idempotente f ,
3. $s^{-1} \leq t^{-1}$,
4. $s = ss^{-1}t$,
5. $s = ts^{-1}s$.

Demostración.

- (1) \Rightarrow (2). Si $s \leq t$ entonces $s = te$ para algún elemento idempotente e , sea $f = tet^{-1}$, f es idempotente pues

$$f^2 = (tet^{-1})(tet^{-1}) = tt^{-1}tet^{-1} = tet^{-1} = f$$

$$\text{y } ft = (tet^{-1})t = tt^{-1}te = te = s.$$

- (2) \Rightarrow (3). Dado que $s = ft$ entonces $s^{-1} = t^{-1}f$, por lo tanto $s^{-1} \leq t^{-1}$.
- (3) \Rightarrow (4). Al tener que $s^{-1} \leq t^{-1}$ entonces $s^{-1} = t^{-1}e$ para algún idempotente e , por lo tanto $s = et$. De esta manera $ss^{-1} = ett^{-1}e = ett^{-1}$, por lo tanto $s = et = (ett^{-1})t = ss^{-1}t$.
- (4) \Rightarrow (5). Como $s = ss^{-1}t$ entonces $s^{-1} = t^{-1}ss^{-1}$ y $s^{-1}s = t^{-1}ss^{-1}t$, por lo tanto $s = ss^{-1}(tt^{-1}t) = t(t^{-1}ss^{-1}t) = tss^{-1}$.

- (5) \Rightarrow (1). Inmediato por la definición del orden parcial natural.

□

Una *Congruencia* ρ en un semigrupo inverso es una relación de equivalencia que preserva productos, es decir si $a\rho b$ y $c\rho d$ entonces $ac\rho bd$. Es de interés particular la relación σ que se define a partir del orden parcial natural, como se hace a continuación.

Definición 1.20. El *mínimo grupo de congruencia* σ es definido sobre un semigrupo inverso S por $s\sigma t$, si y solo si, existe un elemento $u \in S$ tal que $u \leq s$ y $u \leq t$, siendo \leq el orden parcial natural en S .

Para un conjunto C se utilizará la notación $a, b \in C$ para representar que $a \in C$ y $b \in C$. Además se notará $a, b \leq c$ ($c \leq a, b$) para representar $a \leq c$ y $b \leq c$ ($c \leq a$ y $c \leq b$).

Veamos que σ es una relación de equivalencia sobre un semigrupo inverso S . La simetría y reflexividad son inmediatas. Se mostrará la transitividad, sean $a, b, c \in S$ tales que $a\sigma b$ y $b\sigma c$, por lo tanto existen $u, v \in S$ tales que $u \leq a, b$ y $v \leq b, c$. Con ello se tiene que $u = ae_1$; $u = b_2e_2$; $b = bi_1$; $v = ci_2$ donde $\{e_1, e_2, i_1, i_2\} \subseteq E(S)$. Por lo que se deduce:

$$ui_1 = b(e_2i_1) = (bi_1)e_2 = ve_2 = c(i_2e_2)$$

Además, se tiene que $ui_1 = ae_1i_1$ por lo tanto, $ui_1 \leq a$ y $ui_1 \leq c$, es decir $a\sigma c$. Con ello σ es una relación de equivalencia.

Ahora comprobaremos que σ es una congruencia. Sean $a, b, x, y \in S$ tales que $a\sigma b$ y $x\sigma y$, por lo tanto existen $u, v \in S$ tales que $u \leq a, b$ y $v \leq x, y$. Por el Lema 1.19 (2) se tiene que $u = ea$ para algún idempotente e , por lo tanto $ux = eax$, de esta manera por el Lema 1.19 se tiene que $ux \leq ax$. De manera análoga se obtiene que $ux \leq bx$ y $bv \leq bx, by$, entonces $ax\sigma bx$ y $bx\sigma by$, como σ es una relación de equivalencia se tiene que $ax\sigma by$ y con ello σ es una congruencia.

Lema 1.21. Sea S un semigrupo inverso y sean $a, b, c \in S$ si $a, b \leq c$ entonces $a\sigma b$.

Demostración. Como $a, b \leq c$ se tiene que $a = ce_1$ y $b = ce_2$ con $e_1, e_2 \in E(S)$. Sea $d = ce_1e_2$ entonces $d = ae_2$ y $d = be_1$, por lo tanto $d \leq a, b$, es decir $a\sigma b$. \square

Definición 1.22. Un monoide inverso es llamado *F-inverso* si cada σ -clase contiene un maximal.

Definición 1.23. Un semigrupo S se dice *E-unitario* si para todo elemento idempotente e y $s \in S$ tal que $e \leq s$ entonces s es un idempotente.

Ejemplo 1.24. Para el semigrupo inverso \tilde{G}^R definido en (III) del Ejemplo 1.5 se define el orden en $\mathcal{P}_0(G) := \{A \subseteq G \mid A \text{ es finito no vacío}\}$ de la siguiente manera: dados $A, B \in \mathcal{P}_0(G)$ diremos que $A \leq B$ si y solo si $B \subseteq A$. Con esto el orden parcial natural en \tilde{G}^R se define por $(A, g) \leq (B, h)$ si y solo si $A \leq B$ y $g = h$ para $(A, g), (B, h) \in \tilde{G}^R$.

Con ese orden \tilde{G}^R es *E-unitario* y *F-inverso*. En efecto, nótese que los elementos idempotentes son de la forma $(W, 1) \in \tilde{G}^R$ de esta manera si $(W, 1) \leq (A, g)$ entonces $g = 1$ y con ello (A, g) es idempotente esto es \tilde{G}^R es *E-unitario*.

Por otro lado, los elementos maximales de \tilde{G}^R son de la forma $(\{1, g\}, g)$, además, para $(A, g), (B, h) \in \tilde{G}^R$ tales que $(A, g)\sigma(B, h)$ existe $(W, v) \in \tilde{G}^R$ tal que $(W, v) \leq (A, g), (B, h)$, de esta manera $v = h = g$ y $v \in A \cap B$, por lo tanto $(A, g), (B, h) \leq (\{1, v\}, v)$ con esto $(A, g)\sigma(\{1, v\}, v)$ además si $(\{1, g\}, g)\sigma(\{1, v\}, v)$, entonces $v = g$. Con lo que concluimos que cada σ -clase contiene un único maximal, es decir \tilde{G}^R es *F-inverso*.

Ejemplo 1.25. Sea C el conjunto de las funciones lineales parciales en \mathbb{R} con dominio cofinito, esto es:

$$C := \{f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \mid f(x) = ax + b, \text{ donde } X \text{ es cofinito.}\}$$

Es un semigrupo inverso *E-unitario* con las composición de funciones. Note que cada función es una biyección parcial, por lo tanto existirá $f^{-1} : Y \rightarrow X$ el inverso de f , además los elementos idempotentes de C son restricciones de la función identidad por lo que estas conmutan. En efecto, sea $f \in C$ tal que $f \circ f = f$, esto es $f(f(x)) = f(x)$ por lo que si existe $w \in \text{Dom } f$ tal que $f(w) \neq w$ entonces $f(f(w)) = f(w)$, lo que contradice la inyectividad de f , por lo tanto los elementos idempotentes de C son restricciones de la función identidad, y con esto C es un semigrupo inverso *E-unitario*.

Lema 1.26. Sea S un semigrupo inverso *E-unitario*. Dados $a, b \in S$ si $a\sigma b$, entonces $a^{-1}b \in E(S)$, $ab^{-1} \in E(S)$, $a^{-1}b = b^{-1}a$ y $ab^{-1} = ba^{-1}$.

Demostración. Como $a\sigma b$ entonces existe $u \in S$ tal que $u \leq a, b$. Por (3) del Lema 1.19 se tiene que $u^{-1} \leq a^{-1}$ y $u^{-1} \leq b^{-1}$, de esta manera $u^{-1}u \leq a^{-1}b$ y $uu^{-1} \leq ab^{-1}$, como S es E -unitario, entonces $a^{-1}b$ y ab^{-1} son idempotentes, por lo tanto $a^{-1}b = (a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a$ y $ab^{-1} = (ab^{-1})^{-1} = ba^{-1}$. \square

Definición 1.27. Para un semigrupo inverso S se define S/σ como el conjunto de las σ -clases. Además, para $s \in S$ se define $\sigma(s)$ como la σ -clase que contiene a s .

Lema 1.28. Si S es un semigrupo inverso E -unitario entonces $\sigma(e) = E(S)$ para todo $e \in E(S)$. Por lo tanto, dados $e \in E(S)$ y $a \in S$, entonces $a\sigma ae$ y $a\sigma ea$.

Demostración. Sean $e, i \in E(S)$ entonces $ei \leq e$ y $ei \leq i$ de esta manera $e\sigma i$. Sea $j \in \sigma(e)$, entonces $j\sigma e$, por lo tanto existe $u \in S$ tal que $u \leq e$ y $u \leq j$, como $u \leq e$ entonces $u = ef$ para algún $f \in E(S)$, con ello $u \in E(S)$. De esta manera $j \in E(S)$ ya que S es E -unitario.

Por la primera parte se sabe que $aa^{-1}\sigma e$, entonces $aa^{-1}a\sigma ae$ es decir $a\sigma ae$, de manera análoga se obtiene que $a\sigma ea$. \square

Proposición 1.29. Sea S un semigrupo inverso E -unitario, entonces S/σ es un grupo con la operación $\sigma(a)\sigma(b) = \sigma(ab)$ y $E(S)$ es un semirretículo inferior.

Demostración. Se mostrará que S/σ es un grupo.

Sean $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$ elementos de S/σ . Veamos que $\sigma(a)\sigma(b) = \sigma(ab)$, sean $u \in \sigma(a)$ y $v \in \sigma(b)$, entonces $u\sigma a, v\sigma b$ y σ es una congruencia entonces $uv\sigma ab$, por lo tanto $uv \in \sigma(ab)$. Entonces, $\sigma(a)\sigma(b) \subseteq \sigma(ab)$.

Por otro lado, sea $s \in \sigma(ab)$, por lo tanto $s\sigma ab$, por el Lema 1.28 se tiene que $sb^{-1}\sigma a$, de esta manera $sb^{-1} \in \sigma(a)$ y $b \in \sigma(b)$, por lo tanto $s \in \sigma(a)\sigma(b)$. Entonces, $\sigma(ab) \subseteq \sigma(a)\sigma(b)$.

La asociatividad es inmediata, ya que S es un semigrupo inverso. Sean $a \in S$ y $e \in E(S)$ por el Lema 1.28 se obtiene que $\sigma(a)\sigma(e) = \sigma(ae) = \sigma(a)$ y $\sigma(e)\sigma(a) = \sigma(a)$.

Finalmente,

$$\sigma(a)\sigma(a^{-1}) = \sigma(aa^{-1}) = \sigma(e) \text{ y } \sigma(a^{-1})\sigma(a) = \sigma(a^{-1}a) = \sigma(i) = \sigma(e)$$

Donde $e, i \in E(S)$.

Mostremos ahora que $E(S)$ es un semirretículo inferior. Sean $e_1, e_2 \in E(S)$, note que $e_1e_2 \leq e_1$ y $e_1e_2 \leq e_2$. Veamos que $e_1 \wedge e_2 = e_1e_2$, sea $w \in S$ tal que $w \leq e_1$ y $w \leq e_2$, por el Lema 1.21 $w \sigma e_1e_2$, de esta manera w es idempotente. Por tanto, $w \leq e_1e_2$, con lo que se concluye que $e_1 \wedge e_2 = e_1e_2$.

□

Capítulo

2

EL PRODUCTO SEMIDIRECTO

Un tipo importante de semigrupo inverso es el producto semidirecto entre semigrupos inversos; este tipo de semigrupos ha generado una amplia gama de herramientas teóricas muy importantes en el estudio de semigrupos inversos. Por esta razón, poder caracterizar el monoide inverso de Möbius a partir de un producto semidirecto permitiría utilizar dichas herramientas para el estudio del monoide inverso de Möbius.

Definición 2.1. Sea K y T dos *semigrupos inversos*. Se dice que T actúa sobre K si para todo $t \in T$ existe una función $a \mapsto t \cdot a$ de K a sí mismo, que satisface los siguientes axiomas para todo $t, u \in T$ y para todo $a, b \in K$:

$$(A1) \quad t \cdot (ab) = (t \cdot a)(t \cdot b).$$

$$(A2) \quad (tu) \cdot a = t \cdot (u \cdot a).$$

Si T es un monoide con identidad 1 se agrega la siguiente condición:

$$(A3) \quad 1 \cdot a = a \text{ para todo } a \in K.$$

Definición 2.2. Sea G un grupo que actúa sobre un semigrupo K . El producto semidirecto $P(G, K)$ de K por G es el conjunto $K \times G$ con la multiplicación dada por:

$$(a, g)(b, h) = (a(g \cdot b), gh).$$

Una pregunta natural es saber cual es la relación entre el producto semidirecto y los semigrupos inversos. El siguiente teorema responde parte de la pregunta, mostrando que todo producto semidirecto es un semigrupo inverso con ciertas propiedades particulares.

Teorema 2.3. *Sea G un grupo y Y un semirretículo inferior entonces el producto semidirecto $P(G, Y)$ es E -unitario y para cada $a \in P(G, Y)$ y un idempotente $e \in P(G, Y)$ existe $b \in P(G, Y)$ tal que $bb^{-1} = e$ y $a^{-1}b$ es un elemento idempotente.*

Demostración. Veamos primero que $P(G, Y)$ es un semigrupo inverso: Verifiquemos que el producto de $P(G, Y)$ está bien definido. Sean (x, a) y (y, b) elementos de $P(G, Y)$. Entonces

$$(x, a)(y, b) = (x \wedge (a \cdot y), ab)$$

Como G actúa sobre Y entonces $a \cdot y \in Y$ y dado que Y es un semirretículo inferior $(x \wedge (a \cdot y)) \in Y$, además G es un grupo por lo tanto $ab \in G$. Con esto la operación de $P(G, Y)$ está bien definida.

Para verificar la *asociatividad* se toman $(x, a), (y, b), (z, c) \in Y \times G$. Entonces:

$$\begin{aligned} ((x, a)(y, b))(z, c) &= (x \wedge (a \cdot y), ab)(z, c) \\ &= ((x \wedge (a \cdot y)) \wedge (ab \cdot z), abc) \\ &= (x \wedge ((a \cdot y) \wedge (a \cdot (b \cdot z))), abc) \text{ por (A2)} \\ &= (x \wedge (a \cdot (y \wedge (b \cdot z))), abc) \text{ por (A1)} \\ &= (x, a)(y \wedge (b \cdot z), bc) \\ &= (x, a)((y, b)(z, c)) \end{aligned}$$

Por lo tanto el producto semidirecto es asociativo, y con esto $P(G, Y)$ es un semigrupo.

Veamos ahora que $P(G, Y)$ es regular y que sus elementos idempotentes conmutan. Sean $(x, a), (x', a') \in Y \times G$ tales que (x', a') es el inverso de (x, a) . Por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} (x, a)(x', a')(x, a) &= ((x \wedge (a \cdot x')) \wedge (aa' \cdot x), aa'a) = (x, a) \\ (x', a')(x, a)(x', a') &= ((x' \wedge (a' \cdot x)) \wedge (a'a \cdot x'), a'aa') = (x', a') \end{aligned}$$

Lo que significa que,

$$(x \wedge (a \cdot x')) \wedge (aa' \cdot x) = x$$

$$(x' \wedge (a' \cdot x)) \wedge (a'a \cdot x') = x'$$

y

$$aa'a = a$$

$$a'aa' = a'$$

Dado que G es un grupo, $a, a' \in G$ y a' es el inverso de a entonces $a' = a^{-1}$.
Luego,

$$(x \wedge (a \cdot x')) \wedge (aa^{-1} \cdot x') = x \wedge (a \cdot x') \wedge (1 \cdot x) = x \wedge (a \cdot x') = x$$

$$(x' \wedge (a^{-1} \cdot x)) \wedge (a^{-1}a \cdot x') = x' \wedge (a^{-1} \cdot x) \wedge (1 \cdot x') = x' \wedge (a \cdot x) = x'$$

Como Y es un semirretículo inferior

$$x \wedge (a \cdot x') = x \Leftrightarrow x \leq a \cdot x'$$

$$x' \wedge (a^{-1} \cdot x) = x \Leftrightarrow x' \leq a^{-1} \cdot x$$

De esta manera el elemento $(a^{-1} \cdot x, a^{-1})$ es un inverso de (x, a) .

Veamos como son los elementos idempotentes de $P(G, Y)$. Sea $(x, a) \in Y \times G$ un elemento idempotente de $P(G, Y)$, entonces

$$(x, a)(x, a) = (x, a) \Leftrightarrow (x \wedge (a \cdot x), aa) = (x, a) \Leftrightarrow x \wedge (a \cdot x) \text{ y } a^2 = a$$

Como $a \in G$ y G es un grupo entonces $a = 1$, con ello $x \wedge a \cdot x = x$ para cualquier $x \in Y$. De esta manera los elementos idempotentes de $P(G, Y)$ son de la forma $(x, 1)$, con $x \in Y$.

Dados dos elementos idempotentes $(x, 1), (y, 1) \in P(G, Y)$ es sencillo comprobar

que conmutan, pues

$$(x, 1)(y, 1) = (x \wedge (1 \cdot y), 1) = (y \wedge (1 \cdot x), 1) = (y, 1)(x, 1)$$

Con esto se termina de mostrar que $P(G, Y)$ es un semigrupo inverso.

El orden parcial natural sobre $P(G, Y)$ se puede entender de una manera particular para dicho semigrupo debido a que para dos elementos (x, a) y (y, a) de $P(G, Y)$ se tiene que

$$(x, a) \leq (y, b) \Leftrightarrow (x, a) = (y, b)(w, 1) = (y \wedge (b \cdot w), b)$$

Donde $w \in Y$, por lo que se concluye que $a = b$ y $x = y \wedge (b \cdot w)$, es decir $x \leq y$ con ello el orden parcial natural estará dado por

$$(x, a) \leq (y, b) \Leftrightarrow x \leq y \text{ y } a = b$$

Con lo anterior se tiene que si $(e, 1) \leq (x, a)$, entonces $e \leq x$ y $a = 1$, es decir (x, a) es idempotente y con ello $P(G, Y)$ es *E-unitario*.

Finalmente, sea $g = (x, a) \in P(G, Y)$ y $e = (z, 1) \in E(P(G, Y))$ entonces $b = (z, a)$ cumple que $bb^{-1} = e$ y $a^{-1}b$ es idempotente. \square

Lo que sigue es mostrar que para un semigrupo inverso S las propiedades que cumple un producto semidirecto son condiciones necesarias y suficientes para que S sea isomorfo a algún producto semidirecto. Para esto es importante recordar que un semirretículo inferior (superior) es un conjunto parcialmente ordenado tal que para todo subconjunto finito existe el ínfimo (supremo) de ese subconjunto.

Teorema 2.4. *Un semigrupo inverso es isomorfo a un producto semidirecto de un semirretículo por un grupo si y solo si S es *E-unitario* y para cada $a \in S$ y un idempotente $e \in S$ existe $b \in S$ tal que $bb^{-1} = e$ y $a^{-1}b$ es un elemento idempotente.*

Demostración. Si un semigrupo inverso S es isomorfo al producto semidirecto $P(G, Y)$ de un semirretículo inferior Y y de un grupo G , entonces por el Teorema 2.3 se obtiene el resultado deseado.

Para la segunda implicación, si S cumple las hipótesis la Proposición 1.29 garantiza que S/σ es un grupo y $E(S)$ un semirretículo inferior, de esta manera $P(S/\sigma, E(S))$ es un producto semidirecto. Por lo tanto, el objetivo será mostrar que S es isomorfo a $P(S/\sigma, E(S))$.

Se definen las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \phi: S &\rightarrow E(S) \times S/\sigma & \theta: S &\rightarrow E(S) \times S/\sigma \\ a &\mapsto (aa^{-1}, \sigma(a)) & a &\mapsto (a^{-1}a, \sigma(a)) \end{aligned}$$

Veamos que ϕ es biyectiva. Sean $a, b \in S$ tales que $\phi(a) = \phi(b)$, es decir $(aa^{-1}, \sigma(a)) = (bb^{-1}, \sigma(b))$ por lo tanto, $aa^{-1} = bb^{-1}$ y $a\sigma b$. De esta manera, se sigue que $a = aa^{-1}a = b(b^{-1}a)$ y $b = bb^{-1}b = a(a^{-1}b)$, y por el Lema 1.26 $b^{-1}a$ y $a^{-1}b$ son idempotentes, entonces $a \leq b$ y $b \leq a$, por lo tanto $a = b$. Con esto ϕ es inyectiva.

Comprobemos que ϕ es sobreyectiva. Sean $(e, \sigma(\alpha)) \in E(S) \times S/\sigma$ y $a \in \sigma(\alpha)$, por hipótesis existe un $b \in S$ tal que $bb^{-1} = e$ y $a^{-1}b$ es idempotente. Como $aa^{-1}b = (aa^{-1})b$ y $aa^{-1}b = a(a^{-1}b)$, entonces por el Lema 1.19 $aa^{-1}b \leq a$ y $aa^{-1}b \leq b$, por lo tanto $a\sigma b$ y de esta manera $\phi(b) = (e, \sigma(\alpha))$.

La biyectividad de θ se muestra de manera análoga.

A partir de θ se define la acción de S/σ en $E(S)$ por $\sigma(s) \cdot e = tt^{-1}$ donde $\theta(t) = (e, \sigma(s))$, la acción está bien definida porque θ es una biyección.

La identidad de S/σ es $\sigma(e)$ donde $e \in E(S)$ entonces $\sigma(e) \cdot i = i$ ya que $\theta(i) = (i, \sigma(e))$.

Sean $\sigma(u), \sigma(v) \in S/\sigma$ y $e \in E(S)$ entonces:

$$\sigma(u) \cdot (\sigma(v) \cdot e) = \sigma(u) \cdot aa^{-1} = bb^{-1}.$$

Donde $\theta(a) = (e, \sigma(v))$ y $\theta(b) = (aa^{-1}, \sigma(u))$, como $a\sigma v$ y $b\sigma u$ se tiene que $ba\sigma vu$, además:

$$a^{-1}a = a^{-1}aa^{-1}a = a^{-1}b^{-1}ba = (ba)^{-1}ba$$

Por lo tanto, $\theta(ba) = (a^{-1}a, \sigma(ba)) = (e, \sigma(uv))$. De lo que se obtiene:

$$\sigma(uv) \cdot e = (ba)(ba)^{-1} = baa^{-1}b^{-1} = bb^{-1}bb^{-1} = bb^{-1} = \sigma(u) \cdot (\sigma(v) \cdot e).$$

Sean $a \in E(S)$, $b \in E(S)$ y $\sigma(s) \in S/\sigma$. Por lo que se tiene:

$$\sigma(s) \cdot (ab) = tt^{-1}$$

donde $\theta(t) = (ab, \sigma(s))$ y

$$(\sigma(s) \cdot (a))(\sigma(s) \cdot (b)) = ww^{-1}vv^{-1}$$

donde $\theta(w) = (a, \sigma(s))$ y $\theta(v) = (b, \sigma(s))$. Por el Lema 1.26 $w^{-1}v$ es idempotente y con ello $w^{-1}v = v^{-1}w$, por lo tanto:

$$ww^{-1}vv^{-1} = w(w^{-1}v)(w^{-1}v)v^{-1} = (ww^{-1}v)(w^{-1}vv^{-1})$$

Sea $z = ww^{-1}v$, note que $z^{-1} = w^{-1}vv^{-1}$

$$\begin{aligned} (ww^{-1}v)(w^{-1}vv^{-1})(ww^{-1}) &= w(w^{-1}vw^{-1}v)v^{-1}ww^{-1}v \\ &= ww^{-1}vv^{-1}ww^{-1}v \\ &= ww^{-1}ww^{-1}vv^{-1}v \\ &= ww^{-1}v = z \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (w^{-1}vv^{-1})(ww^{-1}v)(w^{-1}vv^{-1}) &= w^{-1}(vv^{-1})(ww^{-1})(vw^{-1}vv^{-1}) \\ &= w^{-1}(ww^{-1})(vv^{-1})(vw^{-1}vv^{-1}) \\ &= (w^{-1}v)(w^{-1}v)v^{-1} \\ &= w^{-1}vv^{-1} = z^{-1} \end{aligned}$$

De esta manera, $(\sigma(s) \cdot a)(\sigma(s) \cdot b) = zz^{-1}$. Además,

$$\begin{aligned}
ab &= w^{-1}wv^{-1}v \\
&= w^{-1}w(v^{-1}w)v^{-1}v \\
&= w^{-1}w(w^{-1}v)v^{-1}v \\
&= (w^{-1}vv^{-1})(ww^{-1}) = z^{-1}z
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\sigma(z) &= \sigma(ww^{-1}v) \\
&= \sigma(ww^{-1})\sigma(v) \\
&= \sigma(v) = \sigma(s)
\end{aligned}$$

Entonces, $\theta(z) = (ab, \sigma(s))$ y como θ es inyectiva, entonces $z = t$. Por lo tanto,

$$\sigma(s) \cdot (ab) = (\sigma(s) \cdot (a))(\sigma(s) \cdot (b)).$$

Con esto \cdot es una acción de S/σ sobre $E(S)$.

Finalmente, se mostrará que ϕ es un homomorfismo. Sean $a, b \in S$ por lo tanto

$$\phi(a)\phi(b) = (aa^{-1}, \sigma(a))(bb^{-1}, \sigma(b)) = (aa^{-1} \wedge (\sigma(a) \cdot bb^{-1}), \sigma(ab))$$

Como $\sigma(a) \cdot bb^{-1} = tt^{-1}$ donde $\theta(t) = (bb^{-1}, \sigma(a))$ entonces,

$$\phi(a)\phi(b) = (aa^{-1}tt^{-1}, \sigma(ab))$$

Por otro lado, $\phi(ab) = (ab(ab)^{-1}, \sigma(ab))$.

Por lo que falta verificar que $aa^{-1}tt^{-1} = ab(ab)^{-1}$. Sabemos que $t^{-1}t = bb^{-1}$ y $t\sigma a$, por el Lema 1.19 $t^{-1}a = a^{-1}t$ y $at^{-1} = ta^{-1}$, por lo tanto $tt^{-1}a = ta^{-1}t = at^{-1}t = abb^{-1}$. De esta manera:

$$aa^{-1}tt^{-1} = tt^{-1}aa^{-1} = abb^{-1}a^{-1} = ab(ab)^{-1}.$$

Con ello, $\phi(a)\phi(b) = \phi(ab)$.

□

Definición 2.5. Sean T y K dos semigrupos inversos tales que T actúa sobre K , diremos que T actúa por *automorfismos que preservan el orden* si para todo $t \in T$ la función $\omega_t : K \rightarrow K$ definida por $\omega_t(k) = t \cdot k$ es biyectiva y la acción preserva el orden, esto es $a \leq b \Leftrightarrow g \cdot a \leq g \cdot b$.

Proposición 2.6. Si se toma la acción definida en la demostración del Teorema 2.4 se observa que para cada $\sigma(s)$ se puede definir la siguiente función:

$$\begin{aligned} \omega_{\sigma(s)} : E(S) &\rightarrow E(S) \\ e &\mapsto \sigma(s) \cdot e \end{aligned}$$

La función $\omega_{\sigma(s)}$ es una biyección. Además, la acción preserva el orden. Es decir, la acción actúa por *automorfismos que preservan el orden*.

Demostración. Sea $\sigma(s) \in S/\sigma$, comprobemos la inyectividad de $\omega_{\sigma(s)}$, sean $e, i \in E(S)$ tales que $\omega_{\sigma(s)}(e) = \omega_{\sigma(s)}(i)$, lo que significa que $\sigma(s) \cdot e = uu^{-1}$ donde $\theta(u) = (e, \sigma(s))$ y $\sigma(s) \cdot i = tt^{-1}$ donde $\theta(t) = (i, \sigma(s))$, por hipótesis se tiene que $tt^{-1} = uu^{-1}$ y como $u\sigma t$, entonces $\phi(u) = \phi(t)$, dado que ϕ es inyectiva, entonces $u = t$ y con ello $e = i$. Por otro lado, para cualquier $e \in E(S)$ existe $u \in S$ tal que $\phi(u) = (uu^{-1}, \sigma(s)) = (e, \sigma(s))$ debido a que ϕ es una biyección, de esta manera $\sigma(s) \cdot u^{-1}u = uu^{-1} = e$ ya que $\theta(u) = (u^{-1}u, \sigma(s))$. Con esto $\omega_{\sigma(s)}$ es biyectiva para cualquier $\sigma(s) \in S/\sigma$.

Veamos que la acción \cdot preserva el orden. Sean $e, f \in E(S)$ tales que $e \leq f$. Entonces, $\sigma(a) \cdot e = uu^{-1}$ y $\sigma(a) \cdot f = vv^{-1}$ para los cuales $\theta(u) = (e, \sigma(a))$ y $\theta(v) = (f, \sigma(a))$. De esta manera, $e = u^{-1}u$ y $f = v^{-1}v$ y $u\sigma v$, de lo que se sigue $u^{-1}u \leq v^{-1}v$ y $u \leq uv^{-1}v$, es decir $u = wuv^{-1}v$ donde $w \in E(S)$, como $u\sigma v$ por el Lema 1.26 uv^{-1} es idempotente, entonces por el Lema 1.19 $u \leq v$, de esta manera $u^{-1} \leq v^{-1}$ y con ello $uu^{-1} \leq vv^{-1}$, es decir $\sigma(a) \cdot e \leq \sigma(b) \cdot f$. Con esto decimos que G actúa en Y por *automorfismos que preservan el orden*. Este hecho es relevante para la demostración de los Teoremas principales. □

Observación 2.7. De la demostración del Teorema anterior podemos extraer las siguientes conclusiones. Si S es isomorfo al producto semidirecto entre un grupo y un semirretículo inferior $P(G, Y)$, entonces:

(O1) S es isomorfo a $P(S/\sigma, E(S))$.

(O2) El inverso de un elemento $(x, a) \in P(G, Y)$ es $(a^{-1} \cdot x, a^{-1})$.

(O3) Los elementos idempotentes de $P(G, Y)$ son de la forma $(e, 1) \in Y \times G$.

(O4) La relación \leq en $P(G, Y)$ está dada por $(x, a) \leq (y, b) \Leftrightarrow x \leq y$ y $a = b$.

Definición 2.8. Sea S un monoide inverso con grupo de unidades $U(S)$, esto es:

$$U(S) := \{s \in S \mid \exists t \in S : st = ts = 1_S\}.$$

Entonces se dice que S es *factorizable* si para cada $s \in S$ existe $g \in U(S)$ tal que $s \leq g$.

Corolario 2.9. Un monoide inverso S que es E -unitario y factorizable es isomorfo al producto semidirecto de un semirretículo y un grupo.

Demostración. Sean $a \in S$ y $e \in E(S)$, como S es factorizable existe $g \in U(S)$ tal que $a \leq g$, entonces $a = ga^{-1}a$. Sea $b = eg$, por lo tanto $b^{-1} = g^{-1}e$ y con ello $bb^{-1} = egg^{-1}e = e$ y $a^{-1}b = (ga^{-1}a)^{-1}(eg) = (a^{-1}a)(g^{-1}eg)$ es idempotente ya que aa^{-1} y $g^{-1}eg$ son idempotentes. Con esto se cumplen las hipótesis del Teorema 2.4, por lo tanto S es isomorfo al producto semidirecto de un semirretículo y un grupo. \square

Ejemplo 2.10. Dado un grupo G y $\mathcal{P}(G) := \{A \mid A \subseteq G\}$. Note que $\mathcal{P}(G)$ es un semirretículo inferior con el orden \subseteq . Dados $g \in G$ y $H \in \mathcal{P}(G)$ se define la acción $g \cdot H := \{gh \mid h \in H\}$. Observe que $g \cdot \emptyset = \emptyset$. Por lo tanto el Teorema 2.3 garantiza que el producto semidirecto $P(G, \mathcal{P}(G))$ es un semigrupo inverso.

Capítulo

3

LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS Y GRUPO DE MÖBIUS

El *Teorema de Cayley* nos garantiza que todo grupo es isomorfo a un subgrupo de un grupo simétrico, algo similar sucede para semigrupos inversos. El *Teorema de representación de Wagner-Preston* [3] nos dice que todo semigrupo inverso es isomorfo a un subsemigrupo inverso de un monoide inverso simétrico.

Teorema 3.1. *Sea S un semigrupo inverso, entonces existe un conjunto X y un homomorfismo inyectivo $\theta : S \rightarrow X$ tal que $a \leq b \Leftrightarrow \theta(a) \subseteq \theta(b)$.*

Si se define $\theta(a) = \theta_a$ y donde $\theta(a) = \theta_a$ y $\theta_a : a^{-1}aS \rightarrow aa^{-1}S$ para el cual $\theta_a(x) = ax$ para $X = I(S)$ la función θ será una función válida para mostrar el teorema anterior. Este hecho nos muestra que las funciones parciales son un elemento crucial en el estudio de semigrupos inversos.

Las transformaciones de Möbius son funciones parciales en el sentido que si c es diferente de 0 existe un valor para z tal que $cz + d = 0$. Dichas transformaciones forman un grupo que recibe el nombre de grupo de Möbius, cuya operación binaria se define de la siguiente manera: si $\alpha(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $\beta(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$ son transformaciones de Möbius entonces su producto se define:

$$\alpha \odot \beta(z) = \frac{(aA + bC)z + (aB + bD)}{(cA + dC)z + (cB + dD)}.$$

Varios libros cometen errores con respecto a esta definición. Por ejemplo, en [4], en la página 210, se encuentra lo siguiente:

“Möbius transformations form a group under composition of mappings”.

En [7] se encuentra:

“If one thinks of the Möbius transformation as associated with [a] matrix, then it is easily checked that the effect of composing two Möbius transformations is to multiply the corresponding matrices. The composite of two Möbius transformations is therefore another Möbius transformation”.

Para entender por qué estos comentarios están equivocados se consideran las siguientes transformaciones de Möbius:

$$\alpha(z) = \frac{2z + 1}{z - 1} \text{ y } \beta(z) = \frac{2z + 1}{z + 1}.$$

Como funciones parciales:

$$\alpha : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{2\} \text{ y } \beta : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{2\}.$$

Cuando se calcula la composición $\alpha \circ \beta$ se observa que:

$$\alpha \circ \beta : \mathbb{C} \setminus \{0, -1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{2, 5\}.$$

Lo que no es una transformación de Möbius, ya que excluye dos puntos del dominio y dos puntos del recorrido, pero una transformación de Möbius excluye a lo sumo un punto del dominio y uno del recorrido.

Un resultado importante que se puede obtener de las transformaciones de Möbius es el siguiente:

Teorema 3.2. *Una transformación de Möbius que fija tres o más puntos es la identidad. Por lo tanto, dos transformaciones de Möbius que coinciden en tres o más puntos son iguales.*

Demostración. Sea $\alpha(z) = (az + b)/(cz + d)$ una transformación de Möbius tal que $\alpha(z_1) = z_1$, $\alpha(z_2) = z_2$ y $\alpha(z_3) = z_3$, donde $z_1, z_2, z_3 \in \text{Dom } \alpha$ son diferentes entre sí. Por lo tanto, se tiene que:

$$\alpha(z_1) = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = z_1, \quad \alpha(z_2) = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} = z_2, \quad \alpha(z_3) = \frac{az_3 + b}{cz_3 + d} = z_3$$

Por lo que se tiene:

$$az_1 + b = z_1(cz_1 + d) \quad (3.1)$$

$$az_2 + b = z_2(cz_2 + d) \quad (3.2)$$

$$az_3 + b = z_3(cz_3 + d) \quad (3.3)$$

Restando (3.1)–(3.2) y (3.3)–(3.2) se obtienen:

$$a(z_1 - z_2) = c(z_1^2 - z_2^2) + d(z_1 - z_2) \quad (3.4)$$

$$a(z_3 - z_2) = c(z_3^2 - z_2^2) + d(z_3 - z_2) \quad (3.5)$$

Como $z_1 - z_2 \neq 0$ y $z_3 - z_2 \neq 0$, al dividir (3.4) y (3.5) por $z_1 - z_2$ y $z_3 - z_2$ respectivamente se obtiene:

$$a = c(z_1 + z_2) + d \quad (3.6)$$

$$a = c(z_3 + z_2) + d \quad (3.7)$$

De (3.6) y (3.7) se obtiene que $c(z_1 - z_3) = 0$ y como $z_1 \neq z_3$, entonces $c = 0$, por lo que (3.1) y (3.2) quedan de la siguiente forma:

$$\frac{a}{d}z_1 + \frac{b}{d} = z_1 \quad (3.8)$$

$$\frac{a}{d}z_2 + \frac{b}{d} = z_2 \quad (3.9)$$

Por lo que se concluye:

$$b = z_1(d - a) \quad (3.10)$$

$$b = z_2(d - a) \quad (3.11)$$

Al igualar (10) y (11).

$$(z_1 - z_2)(d - a) = 0$$

Como $z_1 \neq z_2$, entonces $d = a$ y con ello $b = 0$ con lo que se concluye que $\alpha(z) = z$.

Dadas dos transformaciones de Möbius α y β tales que $\alpha(z_i) = \beta(z_i)$ donde $i \in \{1, 2, 3\}$, se tiene que $\alpha \circ \beta^{-1}(z_i) = z_i$, por lo anterior, $\alpha \circ \beta^{-1}(z_i)$ es la función identidad, y dado que el inverso de una transformación de Möbius es único,

entonces $\alpha = \beta$.

□

Recordemos que el monoide inverso de Möbius \mathcal{M} se compone del conjunto de las transformaciones de Möbius y sus composiciones finitas. Una pregunta que surge a partir de la teoría mencionada hasta ahora es la siguiente: ¿es \mathcal{M} isomorfo a algún producto semidirecto de un semirretículo por un grupo? Para responder esto es necesario profundizar en las propiedades de \mathcal{M} , así que con el objetivo de responder la pregunta anterior este trabajo continúa.

Lema 3.3. *Los elementos idempotentes de \mathcal{M} consisten en la función identidad definida en conjuntos cofinitos de \mathbb{C} .*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathcal{M}$ tal que $\alpha \circ \alpha = \alpha$, sea $e^* = \alpha \circ \alpha^{-1}$ la función identidad restringida al dominio de α , note que $\alpha \circ e^* = \alpha$, además dado que α es idempotente $\alpha \circ \alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha \circ \alpha^{-1}$, entonces $\alpha = e^*$, por lo tanto cada elemento idempotente de \mathcal{M} es de la forma $\alpha \circ \alpha^{-1}$, donde $\alpha \in \mathcal{M}$.

Lo anterior nos muestra que los elementos idempotentes son la función identidad restringida al dominio de algún elemento de \mathcal{M} ; falta mostrar que cualquier conjunto cofinito de \mathbb{C} puede ser obtenido del dominio de alguna función $\alpha \in \mathcal{M}$.

Sea K un conjunto cofinito de \mathbb{C} , por lo tanto el conjunto $J := \mathbb{C} \setminus K$ es finito, de esta manera tomando $m \notin J$, definimos el siguiente conjunto de transformaciones de Möbius:

$$M_J := \left\{ \alpha_w(z) = \frac{z + m}{z - w} : w \in J \right\}$$

Es decir, cada transformación de Möbius $\alpha_w \in M_J$ no está definida en algún elemento $w_i \in J$. Como $\alpha = \alpha_{w_1} \circ \alpha_{w_2} \circ \dots \circ \alpha_{w_{k-1}} \circ \alpha_{w_k}$ es un elemento de \mathcal{M} , entonces $\alpha \circ \alpha^{-1}$ es la transformación identidad restringida al conjunto cofinito K .

□

Lema 3.4. *Sean α y β dos transformaciones de Möbius, entonces $\alpha \circ \beta \subseteq \alpha \odot \beta$.*

Demostración. Sean:

$$\alpha(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ y } \beta(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}$$

Por lo tanto, si $z \in \text{Dom } \beta$, entonces

$$\alpha \circ \beta(z) = \frac{a\left(\frac{Az+B}{Cz+D}\right) + b}{c\left(\frac{Az+B}{Cz+D}\right) + d} = \frac{(aA + bC)z + (aB + dD)}{(cA + dC)z + (cB + dD)} = \alpha \odot \beta(z)$$

Por otro lado, si $z \notin \text{Dom } \beta$, entonces $(z, \alpha \odot \beta(z)) \in \alpha \odot \beta$ y $(z, \alpha \circ \beta(z)) \notin \alpha \odot \beta$. Por lo tanto, $\alpha \circ \beta \subseteq \alpha \odot \beta$. Esto es $\alpha \odot \beta$ es una extensión de $\alpha \circ \beta$. \square

Lema 3.5. Si $\alpha \in \mathcal{M}$ y $\alpha \subseteq \beta, \gamma$, donde β, γ son transformaciones de Möbius entonces $\beta = \gamma$.

Demostración. Debido a que α es cofinito, entonces β y γ coinciden en al menos tres puntos, por lo tanto el Teorema 3.2 implica $\beta = \gamma$. \square

Para las transformaciones de Möbius el orden parcial natural \leq estará dado por \subseteq , esto es claro ya que los elementos idempotentes de \mathcal{M} por el Lema 3.3 son restricciones de la función identidad en un subconjunto cofinito de \mathbb{C} . De esta manera, para $\alpha, \beta \in \mathcal{M}$ tales que $\alpha \subseteq \beta$, esto es $(z, \beta(z)) \in \alpha$ para todo $z \in \text{Dom } \alpha$. Con lo que se tiene que:

$$\alpha \subseteq \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta \circ (\alpha^{-1} \circ \alpha) \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$$

Note que $\alpha^{-1} \circ \alpha$ es la función identidad restringida al dominio de α .

Proposición 3.6. Las transformaciones de Möbius con la composición de funciones parciales \circ generan un submonoide inverso E -unitario \mathcal{M} de $I(\mathbb{C})$. Los elementos maximales de \mathcal{M} son las transformaciones de Möbius y cada elemento de \mathcal{M} está contenido en un único maximal, es decir, para todo $\alpha \in \mathcal{M}$ existe una única transformación de Möbius γ tal que $\alpha \subseteq \gamma$.

Demostración. Debido a que los elementos idempotentes de \mathcal{M} son restricciones de la función identidad sobre subconjuntos cofinitos de \mathbb{C} , si $\alpha \subseteq \beta$ donde $\beta \in E(\mathbb{C})$, entonces α será una restricción de la función identidad, por lo tanto $\alpha \in E(\mathbb{C})$, con lo que se concluye que \mathcal{M} es E -unitario.

Por el Lema 3.4 para cualquier $\alpha \in \mathcal{M}$ existe una transformación de Möbius γ tal que $\alpha \subseteq \gamma$, además, por el Lema 3.5, si existe otra transformación de Möbius γ' tal que $\alpha \subseteq \gamma'$, entonces $\gamma = \gamma'$. Esto muestra que los elementos maximales del conjunto parcialmente ordenado (\mathcal{M}, \subseteq) son las transformaciones de Möbius y que cada elemento está contenido en un único maximal. \square

Antes de obtener otros resultados sobre \mathcal{M} es necesario mostrar un par de lemas relacionados con la congruencia σ .

Lema 3.7. *Dos elementos α, β de \mathcal{M} están σ -relacionados si y solo si $\alpha \subseteq \gamma$ y $\beta \subseteq \gamma$ donde γ es un elemento maximal de \mathcal{M} .*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{M}$ tales que $\alpha \sigma \beta$, por lo tanto existe $\mu \in \mathcal{M}$ tal que $\mu \subseteq \alpha$ y $\mu \subseteq \beta$, la Proposición 3.6 garantiza que existen α' y β' transformaciones de Möbius tales que $\alpha \subseteq \alpha'$ y $\beta \subseteq \beta'$, con ello por el Lema 3.5 $\alpha' = \beta'$. Para la segunda implicación el Lema 1.21 garantiza que dos elementos contenidos bajo el mismo maximal están σ -relacionados. \square

Teorema 3.8. *El monoide inverso de Möbius es F -inverso, y \mathcal{M}/σ es isomorfo al grupo de Möbius.*

Demostración. Por el Lema 3.7, \mathcal{M} es F -inverso.

Veamos que \mathcal{M}/σ es un grupo con la operación definida $\sigma(a)\sigma(b) = \sigma(a \circ b)$. Note que por la Proposición 3.6 cada σ -clase contiene un único maximal, es decir, una única transformación de Möbius. Sean $\sigma(\alpha)$ y $\sigma(\beta)$ dos σ -clases tales que contienen las dos transformaciones de Möbius α y β respectivamente, por lo tanto $\sigma(\alpha)\sigma(\beta) = \sigma(\alpha \circ \beta)$, como $\alpha \circ \beta \subseteq \alpha \odot \beta$ y $\alpha \odot \beta$ es una transformación de Möbius, entonces $\sigma(\alpha \circ \beta) = \sigma(\alpha \odot \beta)$.

Tomando a M como el grupo de Möbius

$$\begin{aligned} f: M &\rightarrow \mathcal{M}/\sigma \\ a &\mapsto \sigma(a) \end{aligned}$$

Es un isomorfismo, en efecto. Sean $a, b \in M$ tales que $f(a) = f(b)$, es decir, $\sigma(a) = \sigma(b)$. Como cada σ -clase contiene una única transformación de Möbius, entonces $a = b$. Sea $\sigma(s) \in \mathcal{M}/\sigma$, entonces existe $a \in M$ tal que $a \in \sigma(s)$, por lo tanto $\sigma(a) = \sigma(s)$ y de esta manera $f(a) = \sigma(s)$. Esto muestra que f es una biyección.

Sean $a, b \in M$, entonces:

$$f(a \circ b) = \sigma(a \circ b) = \sigma(a)\sigma(b) = f(a)f(b).$$

Por lo tanto, f es un isomorfismo. \square

Llegado este punto del trabajo ya es posible responder la pregunta mencionada anteriormente: ¿Es \mathcal{M} isomorfo a algún producto semidirecto de un semirretículo por un grupo? La respuesta se mostrará en la siguiente proposición.

Proposición 3.9. *\mathcal{M} no es isomorfo a algún producto semidirecto de un semirretículo por un grupo.*

Demostración. Sea α una transformación de Möbius tal que el punto $w \in \mathbb{C}$ es omitido del dominio de α . Si \mathcal{M} es isomorfo a $P(G, Y)$ para algún grupo G y semirretículo Y . Entonces, por el Teorema 2.4 existe $\beta \in \mathcal{M}$ tal que $\beta \circ \beta^{-1} = e$, donde e es la transformación identidad, y $\alpha^{-1}\beta$ es idempotente.

Como $\beta \in \mathcal{M}$ existe una transformación de Möbius γ tal que $\beta \subseteq \gamma$, por lo tanto $\beta \circ \beta^{-1} \circ \gamma = \gamma$ y con ello β es una transformación de Möbius. Además, como $\beta \circ \beta^{-1} = e$, entonces β es una biyección en \mathbb{C} . Como $\alpha^{-1}\beta$ es idempotente, entonces $\alpha^{-1}\beta = e^*$ donde e^* es una restricción de la identidad en algún subconjunto de \mathbb{C} . Por lo tanto, $\alpha^{-1} = e^* \circ \beta^{-1}$ es decir $\alpha^{-1} \subseteq \beta^{-1}$ y con ello $\alpha \subseteq \beta$, como α y β son transformaciones de Möbius por el Lema 3.5 $\alpha = \beta$, lo que es absurdo ya que $w \notin \text{Dom}(\alpha)$ y $w \in \text{Dom}(\beta)$. \square

Con esto se ha mostrado que \mathcal{M} no es isomorfo a algún producto semidirecto de un semirretículo por un grupo, por lo tanto ahora mostraremos que \mathcal{M} puede ser incluido en algún tipo de producto semidirecto, y a partir de ello obtener una descripción de \mathcal{M} en términos de triplas de McAlister [5]. Para esto usaremos el enfoque sofisticado de las transformaciones de Möbius.

Añadiremos un nuevo símbolo ∞ al conjunto \mathbb{C} y denotaremos $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Este nuevo símbolo necesita satisfacer las propiedades aritméticas usuales del infinito: $z + \infty = \infty = \infty + z$, para todo $z \in \mathbb{C}$; $z\infty = \infty = \infty z$, $z/\infty = 0$, $z/0 = \infty$, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y $\infty\infty = \infty$.

El semigrupo inverso $I(\mathbb{C})$ puede considerarse como un subsemigrupo inverso de $I(\mathbb{C}^*)$. Cada transformación de Möbius $\alpha(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ puede ser extendida a una biyección α^* de \mathbb{C}^* , llamada *transformación de Möbius extendida*, de la siguiente manera: si $c \neq 0$, entonces $\alpha^*(-d/c) = \infty$, $\alpha^*(\infty) = a/c$ y $\alpha^*(z) = \alpha(z)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$.

Lema 3.10.

1. Para toda transformación de Möbius α , se tiene que $\alpha = 1_{\mathbb{C}} \circ \alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}}$.
2. Si α y β son transformaciones de Möbius entonces $(\alpha \odot \beta)^* = \alpha^* \circ \beta^*$.

Demostración.

1. Sea $\alpha = (az+b)/(cz+d)$ una transformación de Möbius, si $c = 0$ el resultado es claro, ya que $\alpha^*(\infty) = \infty$. De otra manera, si $c \neq 0$ se tiene que $\text{Im}(1_{\mathbb{C}} \circ \alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ y $\text{Dom}(1_{\mathbb{C}} \circ \alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$, de esta manera $\alpha = 1_{\mathbb{C}} \circ \alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}}$
2. Note que $\alpha \circ \beta \subseteq \alpha \odot \beta$ y $\alpha \circ \beta \subseteq \alpha^* \circ \beta^*$, sea γ una transformación de Möbius tal que $\gamma^* = \alpha^* \circ \beta^*$, entonces γ y $\alpha \circ \beta$ coinciden en al menos tres puntos, por lo tanto γ y $\alpha \odot \beta$ coinciden en al menos tres puntos, de esta manera por el Teorema 3.2 $\gamma = \alpha \odot \beta$, entonces $(\alpha \odot \beta)^* = \alpha^* \circ \beta^*$.

□

Proposición 3.11. *Las transformaciones de Möbius extendidas forman un subgrupo del grupo de unidades de $I(\mathbb{C}^*)$, el cual es isomorfo al grupo de Möbius. A este grupo lo notaremos por M^* .*

Demostración. Sea M el grupo de Möbius. Entonces, por definición de transformación extendida de Möbius la siguiente función es biyectiva:

$$\begin{aligned} f: M &\rightarrow M^* \\ \alpha &\mapsto \alpha^* \end{aligned}$$

El Lema 3.10 nos garantiza que la operación en M^* está bien definida.

- **Asociatividad:** Sean α^* , β^* y γ^* transformaciones extendidas de Möbius, por el Lema 3.10 se tiene que:

$$\begin{aligned} (\alpha^* \circ \beta^*) \circ \gamma^* &= (\alpha \odot \beta)^* \circ \gamma^* \\ &= ((\alpha \odot \beta) \odot \gamma)^* \\ &= (\alpha \odot (\beta \odot \gamma))^* \\ &= \alpha^* \circ (\beta \odot \gamma)^* \\ &= \alpha^* \circ (\beta^* \circ \gamma^*) \end{aligned}$$

- *Existencia del elemento neutro:* Note que $1_{\mathbb{C}^*} = (1_{\mathbb{C}})^*$ por lo tanto $1_{\mathbb{C}^*} \in M^*$.
- *Existencia del inverso:* Sea $\alpha^* \in M^*$. Entonces por el Lema 3.10

$$\alpha^* \circ (\alpha^{-1})^* = (\alpha \odot \alpha^{-1})^* = (1_{\mathbb{C}})^* = 1_{\mathbb{C}^*}$$

De esta manera, dadas α y β dos transformaciones de Möbius, por el Lema 3.10 se tiene que:

$$\begin{aligned} f(\alpha \odot \beta) &= (\alpha \odot \beta)^* \\ &= \alpha^* \circ \beta^* \end{aligned}$$

Y f es isomorfismo. □

El grupo M^* es la base que se usará en la construcción de un producto semidirecto de un semirretículo por un grupo en el cual se podrá incluir el semigrupo inverso \mathcal{M} . Por lo tanto, es necesario explorar la relación entre M^* y \mathcal{M} .

Lema 3.12. *Cada elemento de \mathcal{M} está contenido en un único elemento de M^* .*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathcal{M}$, por la Proposición 3.6 existe una transformación de Möbius γ tal que $\alpha \subseteq \gamma$, de esta manera $\alpha \subseteq \gamma^*$, si existe una transformación extendida de Möbius μ^* tal que $\alpha \subseteq \mu^*$, entonces μ y α coinciden en al menos tres puntos, de esta manera μ y γ coinciden en al menos tres puntos y por el Teorema 3.2 $\mu = \gamma$ y con ello $\mu^* = \gamma^*$. □

Se denotará por \mathcal{M}' el subsemigrupo inverso de $I(\mathbb{C}^*)$ generado por \mathcal{M} y M^* .

Lema 3.13. *Sea S un subsemigrupo inverso de un monoide inverso I y sea H un subgrupo del grupo de unidades de I . Suponga que para todo $m \in S$ existe $h \in H$ tal que $m \leq h$. Sea S' el subsemigrupo inverso de I generado por S y H entonces S' es un monoide inverso factorizable con grupo de unidades H .*

Demostración. Para todo $m \in S$ existe $h \in H$ tal que $m \leq h$. Sea $\alpha \in S'$ tal que $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$ donde $a_i \in S \cup H$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, por lo tanto $a_i \leq \gamma_i$ para algún $\gamma_i \in H$, esto se tiene ya que si $a_i \notin H$ por hipótesis existe tal γ_i , caso contrario $\gamma_i = a_i$. De esta manera definiendo $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$ se tiene que $\alpha \leq \gamma$.

Es claro que la identidad 1_H de H es igual a la identidad $1_{S'}$ de S' , dado que H es un subgrupo de unidades de I , entonces $H \subseteq U(S')$, de esta manera con lo

previamente mostrado para todo $\alpha \in S'$ existe un $\gamma \in H \subseteq U(S')$ tal que $\alpha \leq \gamma$. Por lo tanto, S' es factorizable.

Por ultimo si $a \in U(S')$ existe $a' \in H$ tal que $a \leq a'$ entonces por el Lema 1.19 $a = a'a^{-1}a = a'$, por lo tanto $a \in H$ y de esta manera $U(S') = H$.

□

Lema 3.14. \mathcal{M}' es E -unitario, y cada elemento de \mathcal{M}' está contenido en un único elemento de M^* .

Demostración. Por definición de \mathcal{M}' y el Lema 3.12, \mathcal{M}' cumple las hipótesis del Lema 3.13, de esta manera para todo $a \in \mathcal{M}'$ existe una transformación de Möbius α tal que $a \subseteq \alpha^*$, sea γ una transformación de Möbius tal que $a \subseteq \gamma^*$. Como a y α^* son cofinitos, entonces $a \cap \alpha^*$ también es cofinito, además, α también es cofinito y por definición $\alpha \subseteq \alpha^*$, de esta manera $a \cap \alpha$ es cofinito, de manera análoga $a \cap \gamma$ es cofinito, por lo tanto α y γ coinciden en al menos tres puntos, por el Teorema 3.2 $\alpha = \gamma$ y con ello $\alpha^* = \gamma^*$.

Sean $\alpha \in \mathcal{M}'$ y $e \in E(\mathcal{M}')$ tales que $e \subseteq \alpha$, entonces, por lo mostrado anteriormente, existe una única transformación de Möbius γ tal que $\alpha \subseteq \gamma^*$, además como e es idempotente $e \subseteq 1_{\mathbb{C}^*}$. De esta manera, $e \subseteq \gamma^*$ y $e \subseteq 1_{\mathbb{C}^*}$, entonces $\gamma^* = 1_{\mathbb{C}^*}$ y con ello $\alpha \subseteq 1_{\mathbb{C}^*}$ es decir α es idempotente. Con lo que se concluye que \mathcal{M}' es E -unitario. □

Como se ha visto anteriormente, las relaciones de equivalencia resultan ser una herramienta eficaz para el desarrollo de este trabajo, por lo que se procederá a definir tres relaciones de equivalencia más que facilitarán la obtención de los resultados deseados.

Definición 3.15. Se definen las relaciones \mathcal{L} y \mathcal{R} en un semigrupo inverso S por:

$$s\mathcal{L}t \Leftrightarrow s^{-1}s = t^{-1}t \text{ y } s\mathcal{R}t \Leftrightarrow ss^{-1} = tt^{-1}.$$

Veamos que \mathcal{L} es una relación de equivalencia. Sea un semigrupo inverso S , claramente para $s, t \in S$ se tiene que $s\mathcal{L}s$ y si $s\mathcal{L}t$, entonces $t\mathcal{L}s$. Sea $s, t, z \in S$ si $s\mathcal{L}t$ y $t\mathcal{L}z$ entonces $s^{-1}s = t^{-1}t$ y $t^{-1}t = z^{-1}z$ por lo tanto $s^{-1}s = z^{-1}z$ con lo que se concluye que $s\mathcal{L}z$. De manera análoga, vemos que \mathcal{R} también es relación de equivalencia.

Es necesario recordar que si ρ y τ son relaciones en un conjunto X , entonces la relación $\rho \circ \tau$ está dada por:

$$\rho \circ \tau = \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X \text{ tal que } (x, z) \in \rho \text{ y } (z, y) \in \tau\}.$$

Con esto se define la siguiente relación.

Definición 3.16. Dado un semigrupo inverso S . Entonces, se define la relación \mathcal{D} como:

$$\mathcal{D} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}.$$

Lema 3.17. Sea $w \neq \infty$ en \mathbb{C}^* . Entonces, existe una transformación extendida de Möbius α^* tal que la imagen de $\alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}}$ es $\mathbb{C}^* \setminus \{w\}$ y el dominio de $\alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}}$ es \mathbb{C} . En particular, la identidad definida en $\mathbb{C}^* \setminus \{w\}$ está \mathcal{D} -relacionada con $1_{\mathbb{C}}$.

Demostración. Sea α^* una transformación extendida de Möbius dada por $\alpha^*(z) = wz/(z+1)$ para $w \neq 0$ y $\alpha^*(z) = 1/(z+1)$ si $w = 0$. Note que en ambos casos, por la manera como se define una transformación extendida de Möbius se tiene que $\alpha^*(-1) = \infty$ y $\alpha^*(\infty) = w$. Por lo tanto:

$$\text{Dom}(\alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}}) = 1_{\mathbb{C}}(\text{Dom } \alpha^* \cap \text{Im } 1_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}^* \cap \mathbb{C} = \mathbb{C}$$

$$\text{Im}(\alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}}) = \alpha^*(\text{Dom } \alpha^* \cap \text{Im } 1_{\mathbb{C}}) = \alpha^*(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* \setminus \{w\}$$

Sea $1_{\mathbb{C}^* \setminus \{w\}}$ la identidad en $\mathbb{C}^* \setminus \{w\}$. Entonces:

$$(\alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}})^{-1}(\alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}}) = 1_{\mathbb{C}} \circ (\alpha^*)^{-1} \circ \alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} \circ 1_{\mathbb{C}^*} \circ 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}}.$$

De esta manera, $1_{\mathbb{C}}$ esta \mathcal{L} -relacionado con $\alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}}$. Además:

$$(\alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}})(\alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}})^{-1} = \alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}} \circ \alpha^* = 1_{\mathbb{C}^* \setminus \{w\}}$$

Por lo tanto, $1_{\mathbb{C}^* \setminus \{w\}}$ esta \mathcal{R} -relacionado con $\alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}}$. Entonces $1_{\mathbb{C}}$ está \mathcal{D} -relacionado con $1_{\mathbb{C}^* \setminus \{w\}}$. □

Mediante el análisis apropiado de la teoría construida hasta este punto podemos dar una mejor caracterización de \mathcal{M}' , que, como se mostrará a continuación puede ser entendido mediante el producto semidirecto entre un semirretículo y un grupo.

Teorema 3.18.

1. \mathcal{M}' es isomorfo a algún producto semidirecto entre un semirretículo por un grupo.
2. Los idempotentes de \mathcal{M}' son los elementos idempotentes cofinitos de $I(\mathbb{C}^*)$, es decir los idempotentes tales que el complemento de su dominio es finito.
3. \mathcal{M}' es isomorfo a un producto semidirecto de un semirretículo de idempotentes cofinitos de $I(\mathbb{C}^*)$ por el grupo M^* .

Demostración.

1. Por el Lema 3.14 \mathcal{M}' es E -unitario y factorizable, ya que M^* es el grupo de unidades de \mathcal{M}' . De esta manera, por el Corolario 2.9, \mathcal{M}' es isomorfo al producto semidirecto entre un semirretículo y un grupo.
2. Por el Lema 3.17 $\mathbb{C}^* \setminus \{w\}$ es la imagen de algún elemento $\alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}}$, por lo tanto se define $e_w = (\alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}})^{-1}(\alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}})$, donde e_w resulta ser la identidad restringida al conjunto $\mathbb{C}^* \setminus \{w\}$. Sea $i \in E(\mathbb{C}^*)$ cofinito, donde $\text{Im } i = \mathbb{C}^* \setminus \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Entonces, $i = e_{w_1} \circ e_{w_2} \circ \dots \circ e_{w_n}$. De esta manera $i \in E(\mathcal{M}')$.
3. Por el Corolario 2.9 y por la parte (1) \mathcal{M}' es isomorfo a algún producto semidirecto, y por la Observación 2.7 (O1) el semigrupo inverso \mathcal{M}' es isomorfo al producto semidirecto $P(\mathcal{M}'/\sigma, E(\mathcal{M}'))$. Por la parte (2) sabemos que el conjunto de los idempotentes cofinitos de \mathbb{C}^* es $E(\mathcal{M}')$. Se mostrará que \mathcal{M}'/σ es isomorfo a M^* . Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{M}'$, por el Lema 3.14 se tiene que:

$$\alpha\sigma\beta \Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{M}' : u \subseteq \alpha \text{ y } u \subseteq \beta \Leftrightarrow \exists \gamma^* \in M^* : \alpha \subseteq \gamma^* \text{ y } \beta \subseteq \gamma^*.$$

Es decir, dos elementos de \mathcal{M}' están relacionados si y solo si están bajo el mismo maximal. Por lo tanto, M^* es isomorfo a \mathcal{M}'/σ . Finalmente, esto significa que \mathcal{M}' es isomorfo al producto semidirecto $P(M^*, E(\mathcal{M}'))$.

□

Proposición 3.19. Sea $\mathcal{F} = \mathcal{M}' \setminus M^*$. Entonces, \mathcal{F} es el producto semidirecto de M^* y el semirretículo de todos los elementos idempotentes cofinitos de $I(\mathbb{C}^*)$ excepto el elemento idempotente definido en \mathbb{C}^* .

Demostración. Note que \mathcal{F} es el conjunto \mathcal{M}' sin las biyecciones en \mathbb{C}^* , de esta manera si $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$, entonces α y β no son biyecciones en \mathbb{C}^* , por lo tanto $\alpha \circ \beta$ no será una biyección en \mathbb{C}^* , es decir, $\alpha \circ \beta \in \mathcal{F}$. Por otro lado, \mathcal{F} es E -unitario ya que \mathcal{M}' es E -unitario.

Como se vio en la demostración del Corolario 2.9, si S es factorizable, entonces para todo $s \in S$ y $e \in E(S)$ existe $b \in S$ tal que $bb^{-1} = e$ y $s^{-1}b \in E(S)$ (*). Como \mathcal{M}' es factorizable cumple la hipótesis (*). Note que si $e \neq 1_{\mathbb{C}^*}$ entonces $b \notin M^*$, ya que si $b \in M^*$ entonces $bb^{-1} = 1_{\mathbb{C}^*}$, de esta manera \mathcal{F} cumple la hipótesis (*). Entonces, \mathcal{F} es isomorfo al producto semidirecto $P(\mathcal{F}/\sigma, E(\mathcal{F}))$.

Note que cada clase de \mathcal{F}/σ esta contenida en una única clase de \mathcal{M}'/σ y estas solo difieren por el único elemento maximal de cada clase de \mathcal{M}'/σ , es decir, dado $s \in \mathcal{F}$ y $s^* \in M$ tal que $s \subseteq s^*$, entonces $\sigma_{\mathcal{F}}(s) \subseteq \sigma_{\mathcal{M}'}(s)$ y $s^* \in \sigma_{\mathcal{M}'}(s)$, pero $s^* \notin \sigma_{\mathcal{F}}(s)$. Donde $\sigma_{\mathcal{F}}$ denota la relación σ en \mathcal{F} y $\sigma_{\mathcal{M}'}$ denota la relación σ en \mathcal{M}' . De esta manera, se define:

$$g: \mathcal{F}/\sigma \rightarrow \mathcal{M}'/\sigma$$

$$\sigma_{\mathcal{F}}(s) \mapsto \sigma_{\mathcal{M}'}(s)$$

Que es un isomorfismo.

Como \mathcal{M}'/σ es isomorfo a M^* entonces \mathcal{F}/σ es isomorfo a M^* . Además $E(\mathcal{F}) = E(\mathcal{M}') \setminus \{1_{\mathbb{C}^*}\} = E$ y con esto concluye que \mathcal{F} es isomorfo al producto semidirecto $P(M^*, E)$. \square

Definición 3.20. Sea S un subsemigrupo inverso de un semigrupo inverso F . Entonces F es una *ampliación* de S si cumple las siguientes tres condiciones:

- (E1) S es un ideal de orden de F , esto es, dado (P, \leq) un conjunto parcialmente ordenado. Un subconjunto Q de P es un *ideal de orden* si $x \in Q$ y $y \leq x$ implica que $y \in Q$.
- (E2) Si $a \in F$ y $a^{-1}a, aa^{-1} \in S$, entonces $a \in S$.
- (E3) Cada elemento idempotente de F está \mathcal{D} -relacionado con un elemento idempotente de S .

Lema 3.21. *Sea S un subsemigrupo inverso de un semigrupo inverso F . Si el conjunto de idempotentes de S es un ideal de orden de $E(F)$, entonces S es un ideal de orden de F .*

Demostración. Sea $x \in S$ y $y \in F$ tal que $y \leq x$. Entonces, $y^{-1}y \leq x^{-1}x$. Como S es un semigrupo inverso, entonces $x^{-1} \in S$ y con ello $x^{-1}x \in S$. Dado que S es un ideal de orden de $E(F)$, entonces $y^{-1}y \in S$. Además $y = xy^{-1}y$ por lo tanto $y \in S$. \square

Lema 3.22. *Sea S un ideal de orden y un subsemigrupo inverso de un semigrupo inverso F . Suponga que e es un idempotente de F y a es un elemento de F tal que $e = aa^{-1}$ y $a^{-1}a \in S$. Si $f \leq e$, entonces existe un elemento $b \in F$ tal que $f = bb^{-1}$ y $b^{-1}b \in S$.*

Demostración. Es claro que f es idempotente, ya que $f = eu$ para algún idempotente $u \in F$. Definiendo $b = fa$, entonces:

$$bb^{-1} = fa(fa)^{-1} = faa^{-1}f = fef = fe$$

Como $f \leq e$ entonces $f = fe$ gracias a (4) del Lema 1.19, por lo tanto $bb^{-1} = f$. Por otro lado, note que $a^{-1}b = a^{-1}fa$ es idempotente, pues:

$$(a^{-1}fa)(a^{-1}fa) = a^{-1}aa^{-1}ffa = a^{-1}fa.$$

Por lo tanto, $a^{-1}b = b^{-1}a$. Además $bb^{-1} \leq aa^{-1}$ ya que $bb^{-1} = fe = faa^{-1}$, entonces por (4) del Lema 1.19 se obtiene que $bb^{-1} = bb^{-1}aa^{-1}$ y de esta manera $b = aa^{-1}b$ y $b^{-1} = b^{-1}aa^{-1}$. Por lo que se tiene que:

$$b^{-1}b = b^{-1}aa^{-1}aa^{-1}b = a^{-1}a(a^{-1}bb^{-1}a) = a^{-1}a(b^{-1}a).$$

Entonces, $b^{-1}b \leq a^{-1}a$. Como S es un ideal de orden de F entonces $b^{-1}b \in S$. \square

Proposición 3.23. *\mathcal{F} es una ampliación de \mathcal{M} .*

Demostración. La condición (E1) se cumple. En efecto, sea $\alpha \in E(\mathcal{F})$ tal que $\alpha \subseteq \gamma$ para algún $\gamma \in E(\mathcal{M})$, por lo tanto α es una restricción de la función identidad en un conjunto cofinito de \mathbb{C} y con ello $\alpha \in \mathcal{M}$. De esta manera, $E(\mathcal{M})$ es un ideal de orden de $E(\mathcal{F})$, entonces por el Lema 3.21 el semigrupo inverso \mathcal{M} es un ideal de orden de \mathcal{F} .

Veamos que (E2) se cumple. Sea $\alpha \in \mathcal{F}$ tal que $\alpha^{-1} \circ \alpha \in \mathcal{M}$ y $\alpha \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{M}$. Tomemos α^* la transformación extendida de Möbius tal que $\alpha \subseteq \alpha^*$, de esta manera:

$$\alpha = (\alpha \circ \alpha^{-1}) \circ \alpha^* \circ (\alpha^{-1} \circ \alpha)$$

Además, como $1_{\mathbb{C}}$ es la identidad de \mathcal{M} , se tiene que

$$\alpha = (\alpha \circ \alpha^{-1} \circ 1_{\mathbb{C}}) \circ \alpha^* \circ (1_{\mathbb{C}} \circ \alpha^{-1} \circ \alpha) = (\alpha \circ \alpha^{-1}) \circ 1_{\mathbb{C}} \circ \alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}} \circ (\alpha^{-1} \circ \alpha)$$

Por el Lema 3.10 $1_{\mathbb{C}} \circ \alpha^* \circ 1_{\mathbb{C}}$ es una transformación de Möbius, por lo tanto $\alpha \in \mathcal{M}$.

Por último se mostrará que (E3) se cumple. Los elementos maximales idempotentes de \mathcal{F} son restricciones de la función identidad en $\mathbb{C}^* \setminus \{w\}$ donde $w \in \mathbb{C}$, que notaremos como e_w . Por el Lema 3.17 cada e_w está \mathcal{D} -relacionado con $1_{\mathbb{C}}$, por lo tanto existe α_w tal que $e_w = \alpha_w^{-1} \alpha$ y $\alpha_w \alpha_w^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$. Sea $f \in \mathcal{F}$ tal que $f \leq e_w$, entonces por el Lema 3.22 existe $\beta \in \mathcal{F}$ tal que $f = \beta \beta^{-1}$ y $\beta^{-1} \beta \in \mathcal{M}$, es decir $f \mathcal{R} \beta$ y $\beta \mathcal{L} \beta^{-1} \beta$, por lo tanto $f \mathcal{D} \beta^{-1} \beta$. Entonces, cada elemento idempotente de \mathcal{F} está \mathcal{D} -relacionado con un elemento idempotente de \mathcal{M} . \square

Capítulo

4

EL MONOIDE INVERSO DE MÖBIUS VÍA TRIPLAS DE MCALISTER

Finalmente, se introducirá el concepto de tripla de McAlister, el cual permitirá describir el monoide inverso de Möbius y obtener los teoremas descritos en esta sección.

Definición 4.1. Una *tripla de McAlister* (G, X, Y) consiste de un grupo G , un conjunto parcialmente ordenado X , y un ideal de orden Y de X , que también es un semirretículo inferior, que satisfacen los siguientes axiomas:

(MT1) G actúa sobre X por automorfismos que preservan el orden.

(MT2) $GY = X$, donde $GY := \{g \cdot y \mid g \in G, y \in Y\}$

(MT3) $gY \cap Y \neq \emptyset$ para todo $g \in G$.

Teorema 4.2. Sea (G, X, Y) una tripla de McAlister. Definiendo,

$$P = P(G, X, Y) = \{(e, g) \in Y \times G : g^{-1}e \in Y\}$$

con multiplicación:

$$(e, g)(f, h) = (e \wedge g \cdot f, gh)$$

Entonces, P es un semigrupo inverso y E -unitario.

Demostración. Veamos que P es un semigrupo inverso. Sean $(e, g), (f, h) \in P$, entonces $e, f \in Y$, $g, h \in G$ y $g^{-1} \cdot e, h^{-1} \cdot f \in Y$.

Por definición $(e, g)(f, h) = (e \wedge g \cdot f, gh)$, dado que G es un grupo, entonces $gh \in G$, además, $(e \wedge g \cdot f) \leq e$ y Y es un ideal de orden, entonces $e \wedge g \cdot f \in Y$. Por otro lado:

$$(gh)^{-1}(e \wedge g \cdot f) = h^{-1}g^{-1} \cdot (e \wedge g \cdot f) = (h^{-1}g^{-1} \cdot e) \wedge (h^{-1} \cdot f).$$

Como $(h^{-1}g^{-1} \cdot e) \wedge (h^{-1} \cdot f) \leq h^{-1} \cdot f$, entonces $(gh)^{-1}(e \wedge g \cdot f) \in Y$

Veamos que la multiplicación en P es asociativa, para esto sean $(e, g), (f, h), (i, m) \in P$, entonces:

$$\begin{aligned} ((e, g)(f, h))(i, m) &= (e \wedge g \cdot f, gh)(i, m) \\ &= (e \wedge g \cdot f \wedge gh \cdot i, ghm) \\ &= (e \wedge g \cdot (f \wedge h \cdot i), g(hm)) \\ &= (e, g)(f \wedge h \cdot i, hm) \\ &= (e, g)((f, h)(i, m)) \end{aligned}$$

Sea $(e, g) \in P$, entonces $(g^{-1} \cdot e, g^{-1}) \in P$, además, $(g^{-1} \cdot e, g^{-1})$ es un inverso de (e, g) . En efecto, observe que:

$$\begin{aligned} (e, g)(g^{-1} \cdot e, g^{-1})(e, g) &= (e \wedge g \cdot (g^{-1} \cdot e), 1_G)(e, g) \\ &= (e, 1_G)(e, g) \\ &= (e \wedge 1_G \cdot e, g) \\ &= (e, g). \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} (g^{-1} \cdot e, g^{-1})(e, g)(g^{-1} \cdot e, g^{-1}) &= (g^{-1} \cdot e, g^{-1})(e \wedge g \cdot (g^{-1} \cdot e), 1_G) \\ &= (g^{-1} \cdot e, g^{-1})(e, 1_G) \\ &= (g^{-1} \cdot e \wedge g^{-1} \cdot e, g^{-1}1_G) \\ &= (g^{-1} \cdot e, g^{-1}). \end{aligned}$$

Como todo elemento idempotente es su propio inverso, se tiene que si (e, g) es idempotente, entonces $(e, g) = (g^{-1} \cdot e, g^{-1})$, por lo tanto $g = 1_G$. Con esto todo elemento idempotente es de la forma $(e, 1_G)$, donde $e \in Y$. Como dados $e, f \in Y$ se tiene que $e \wedge f = f \wedge e$, entonces todos los elementos idempotentes de P conmutan. Por lo tanto, P es un semigrupo inverso.

Por definición:

$$(e, g) \leq (f, h) \Leftrightarrow (e, g) = (e, g)(e, g)^{-1}(f, h) = (e, 1)(f, h) = (e \wedge f, h)$$

Por lo tanto, $(e, g) \leq (f, h) \Leftrightarrow e \leq f$ y $g = h$, de esta manera si $(w, 1) \leq (i, m)$, entonces $m = 1$ y con ello (i, m) es idempotente, es decir P es E -unitario. \square

Los semigrupos de la forma $P(G, X, Y)$ son llamados P -semigrupos, y son una generalización del producto semidirecto entre un semirretículo por un grupo, además, si $X = Y$ es un semirretículo, entonces $P(G, X, X) = P(G, X)$.

Ejemplo 4.3. Sea G un grupo y $\mathcal{P}(G)$ el conjunto potencia de G , como se vio en el Ejemplo 2.10 el producto semidirecto $P(G, \mathcal{P}(G))$ es un semigrupo inverso. En particular $(G, \mathcal{P}(G), \mathcal{P}(G))$ es una tripla de McAlister y con ello $P(G, \mathcal{P}(G), \mathcal{P}(G))$ es un semigrupo inverso.

Ejemplo 4.4. Para el grupo $(\mathbb{Z}, +)$ y $X := \{A \subseteq \mathbb{Z} \mid A \text{ es finito no vacío}\}$ y $Y := \{A \subseteq \mathbb{Z} \mid A \text{ es finito y } 0 \in A\}$, con el orden definido por $A \leq B$ si y solo si $B \subseteq A$ (con ese orden X y Y son semirretículos inferiores). Se mostrará que (\mathbb{Z}, X, Y) es una tripla de McAlister, por lo tanto el Teorema 4.2 garantizará que $P(\mathbb{Z}, X, Y)$ es un P -semigrupo inverso. Observe que Y es un ideal de orden de X , ya que para todo $H \in X$ y $K \in Y$ tales que $H \leq K$ entonces $K \subseteq H$, como $0 \in K \subseteq H$ entonces $H \in Y$.

Primero veamos que la acción de \mathbb{Z} sobre X definida por $z \cdot H = z + H = \{z + h \mid h \in H\}$, donde $z \in \mathbb{Z}$ y $H \in X$, actúa por automorfismos que preservan el orden.

Se verificará que la función $\omega_z : X \rightarrow X$ dada por $\omega_z(H) = z + H$ es una biyección para todo $z \in \mathbb{Z}$. Sea $z \in \mathbb{Z}$, dados H y H' diferentes en X se puede suponer que existe $a \in H$ tal que $a \notin H'$, por lo tanto $z + a \in z + H$ y $z + a \notin H'$, ya que caso contrario existiría $w \in H'$ tal que $z + w = z + a$, como \mathbb{Z} es un grupo entonces $w = a$ y con ello $a \in H'$ lo que es absurdo. Con esto la función ω_z es inyectiva. Por otro lado, para todo $H \in X$ el conjunto $-z + H \in X$, por lo tanto $\omega_z(-z + H) = H$, lo que verifica la sobreyectividad de ω_z . Es claro que la acción preserva el orden, ya que si $H, H' \in X$ tales que $H \subseteq H'$ entonces $z + H \subseteq z + H'$. Con esto la acción actúa por automorfismos que preservan el orden, verificando (MT1) de la Definición 4.1.

Sea $H \in X$, como H es no vacío existe $w \in H$ por lo tanto $-w + H \in Y$, de

esta manera $w + (-w + H) = H$, por lo que $GY = X$, lo que verifica (MT2) de la Definición 4.1.

Finalmente note que $\{0, -z\} \in Y$ por lo tanto $z + \{0, -z\} = \{z, 0\} \in z + Y = zY$, con esto $z + \{0, -z\} \in zY \cap Y$ para todo $z \in \mathbb{Z}$, verificando (MT3) de la Definición 4.1.

Entonces, (\mathbb{Z}, X, Y) es una tripla de McAlister y por el Teorema 4.2 $P(\mathbb{Z}, X, Y)$ es un semigrupo inverso.

Ejemplo 4.5. Nuevamente se toma el semigrupo inverso \tilde{G}^R definido en (III) del Ejemplo 1.5 con el orden definido en el Ejemplo 1.24. Note que $\mathcal{P}_0(G)$ es un semirretículo inferior y que $\mathcal{P}_1(G)$ es un ideal de orden de $\mathcal{P}_0(G)$ el cual también es un semirretículo inferior. En efecto, sean $A \in \mathcal{P}_0(G)$ y $A_1 \in \mathcal{P}_1(G)$ tales que $A \leq A_1$, esto implica que $A_1 \subseteq A$ por lo tanto $1_G \in A$ y como A es finito, entonces $A \in \mathcal{P}_1(G)$. Mostraremos que $(G, \mathcal{P}_0(G), \mathcal{P}_1(G))$ es una tripla de McAlister.

Se define la acción de G sobre $\mathcal{P}_0(G)$ por $g \cdot A = gA := \{ga \mid a \in A\}$, donde $g \in G$ y $A \in \mathcal{P}_0(G)$; veamos que G actúa por automorfismos que preservan el orden sobre $\mathcal{P}_0(G)$. Sea $g \in G$, veamos que la siguiente función es una biyección:

$$\begin{aligned} \omega_g: \mathcal{P}_0(G) &\rightarrow \mathcal{P}_0(G) \\ A &\mapsto g \cdot A = gA \end{aligned}$$

Sean $A, B \in \mathcal{P}_0(G)$ tales que $gA = gB$ como G es un grupo, entonces es evidente que $A = B$ y esto muestra la inyectividad. La sobreyectividad es inmediata ya que para todo $A \in \mathcal{P}_0(G)$ se tiene que $g^{-1}A \in \mathcal{P}_0(G)$, por lo tanto $\omega_g(g^{-1}A) = A$. Con esto ω_g es biyectiva. Por otro lado, dados $A, B \in \mathcal{P}_0(G)$ tales que $A \leq B$ se tiene que $B \subseteq A$, entonces $gB \subseteq gA$ por lo que se concluye que $g \cdot A \leq g \cdot B$. De esta manera, G actúa por automorfismos que preservan el orden sobre $\mathcal{P}_0(G)$. Esto muestra (MT1) de 4.1.

Veamos que $G\mathcal{P}_1(G) = \mathcal{P}_0(G)$, sea $A \in \mathcal{P}_0(G)$ y se puede tomar $g \in A$ ya que A es no vacío, como $g^{-1}g = 1_G$, entonces $g^{-1}A \in \mathcal{P}_0(G)$, de esta manera $\mathcal{P}_0(G) \subseteq G\mathcal{P}_1(G)$, además, gW es finito para todo $g \in G$ y $W \in \mathcal{P}_1(G)$, por lo que se concluye que $G\mathcal{P}_1(G) = \mathcal{P}_0(G)$. Lo que confirma (MT2) de 4.1.

Finalmente, se toma $g \in G$. Veamos que $g\mathcal{P}_1(G) \cap \mathcal{P}_1(G) \neq \emptyset$ note que $\{1, g^{-1}\} \in \mathcal{P}_1(G)$ y $\{1, g\} \in \mathcal{P}_1(G)$, de esta manera $g\{1, g^{-1}\} = \{1, g\} \in g\mathcal{P}_1(G)$, por lo

tanto $g\mathcal{P}_1(G) \cap \mathcal{P}_1(G) \neq \emptyset$. Lo que verifica (MT3) de 4.1.

Lo anterior muestra que $(G, \mathcal{P}_0(G), \mathcal{P}_1(G))$ es una tripla de McAlister y que $P(G, \mathcal{P}_0(G), \mathcal{P}_1(G))$ es un semigrupo inverso E -unitario. Por ultimo, observe que $g \in A$ si y solo si $g^{-1}A \in \mathcal{P}_1(G)$, por lo que se obtiene:

$$\{(A, g) \in \mathcal{P}_1(G) \times G \mid g \in A\} = \{(A, g) \in \mathcal{P}_1(G) \times G \mid g^{-1}A \in \mathcal{P}_1(G)\}$$

Lo que significa que $\tilde{G}^R = P(G, \mathcal{P}_0(G), \mathcal{P}_1(G))$.

Teorema 4.6. *Sea F el producto semidirecto de un semirretículo inferior X por un grupo H . Sea S un semigrupo de F tal que F es una ampliación de S . Sea $Y = \{y \in X : (y, 1) \in E(S)\}$. Entonces, (H, X, Y) es una tripla de McAlister y $S = P(H, X, Y)$.*

Demostración. Se tiene que $F = P(H, X)$. Veamos que Y es un ideal de orden de X , sea $y \in Y$ y $x \in X$ tal que $x \leq y$, por la Observación 2.7 (O4):

$$(x, a) \leq (y, b) \Leftrightarrow x \leq y \text{ y } a = b.$$

Por lo tanto, $(x, 1) \leq (y, 1)$, como $(y, 1) \in M$, entonces $(x, 1) \in M$ por (E1), de esta manera $x \in Y$. Entonces, Y es un ideal de orden de X .

Verifiquemos que las condiciones de la Definición 4.1 se cumplen. La condición (MT1) se cumple ya que por la Proposición 2.6 H actúa en X por automorfismos que preservan el orden.

Veamos que (MT2) se cumple. Sea $x \in X$. Entonces, $(x, 1) \in E(F)$. Por (E3) de la Definición 3.20 se tiene que $(x, 1)\mathcal{D}(y, 1)$ para algún $(y, 1) \in E(S)$. Entonces, existe $(z, g) \in F$ tal que $(z, g)(z, g)^{-1} = (x, 1)$ y $(z, g)^{-1}(z, g) = (y, 1)$. Por lo tanto, $x = z$ y $y = g^{-1}z$ y con ello $x = gy$.

Verifiquemos que (MT3) se cumple. Sean $g \in H$, $x \in X$ y $y \in Y$. Sea:

$$w = (y, 1)(x, g)(y, 1) = (y \wedge x, g)(y, 1) = (y \wedge x \wedge (g \cdot y), g)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
ww^{-1} &= (y \wedge x \wedge (g \cdot y), g)(g^{-1}(y \wedge x \wedge (g \cdot y)), g^{-1}) \\
&= (y \wedge x \wedge (g \cdot y), 1) \\
&= ((g \cdot y) \wedge x \wedge y, 1) \\
&= w^{-1}w
\end{aligned}$$

Como $y \wedge x \wedge (g \cdot y) \leq y$, entonces $y \wedge x \wedge (g \cdot y) \in Y$, porque Y es un ideal de orden de X . De esta manera, $ww^{-1} \in M$ y $w^{-1}w \in S$, por lo tanto por (E2) $w \in S$. Con ello $g^{-1} \cdot (y \wedge x \wedge (g \cdot y)) \in Y$, sea $y' = y \wedge x \wedge (g \cdot y)$, entonces $y', g^{-1} \cdot y' \in Y$, por lo tanto $gY \cap Y \neq \emptyset$ ya que $y' \in gY \cap Y$.

Por ultimo, para $P = P(H, X, Y)$ por (E2) de la Definición 3.20 se tiene que:

$$(e, g) \in P \Leftrightarrow e, g^{-1} \cdot e \in Y \Leftrightarrow (e, 1), (g^{-1} \cdot e, 1) \in E(S) \Leftrightarrow (e, g) \in E(S).$$

Por lo tanto, $S = P(H, X, Y)$ □

Finalmente, se tienen las herramientas necesarias para mostrar que \mathcal{M} resulta ser un P -semigrupo, que es el objetivo final de este trabajo. Procederemos a enunciar el teorema principal de este trabajo.

Teorema 4.7. *Sea M^* el grupo extendido de las transformaciones de Möbius definidas en \mathbb{C}^* , y X como el conjunto parcialmente ordenado de todos los elementos cofinitos idempotentes de $I(\mathbb{C}^*)$ excluyendo el idempotente definido de \mathbb{C}^* sobre sí mismo. Se define como Y el subconjunto de X que consiste de los elementos idempotentes cofinitos de $I(\mathbb{C})$. Entonces (M^*, X, Y) es una tripla de McAlister y \mathcal{M} es isomorfo al semigrupo inverso $P(M^*, X, Y)$.*

Demostración. Veamos que \mathcal{M} es isomorfo a $P(M^*, X, Y)$. Basta comprobar las hipótesis del Teorema 4.6.

- Note que $X = E(\mathcal{M}') \setminus \{1_{\mathbb{C}^*}\}$. Por la Proposición 3.6 \mathcal{F} es isomorfo a $F = P(M^*, X)$.
- \mathcal{F} es una ampliación de \mathcal{M} por la Proposición 3.23. De esta manera, \mathcal{M} es isomorfo a algún subsemigrupo inverso S de F donde F es una ampliación de S .
- Note que $Y = E(\mathcal{M})$.

Finalmente, se concluye que $(M^*, X, Y) = (M^*, E(\mathcal{M}') \setminus \{1_{\mathbb{C}}\}, E(\mathcal{M}))$ es una tripla de McAlister y por el Teorema 4.6 se concluye que $S = P(M^*, X, Y)$. Entonces, \mathcal{M} es isomorfo a $P(M^*, X, Y)$, como se quería mostrar. \square

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. M. Howie, *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press, San Diego, 1976.
- [2] M. V. Lawson, *The Möbius Inverse Monoid*. Journal of algebra **200**, 428-438 (1998).
- [3] M. V. Lawson, *Inverse semigroups, The Theory of Partial Symmetries*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1998).
- [4] D. Pedoe, *Geometry*. Dover, New York, 1988.
- [5] M. Petrich, *Inverse Semigroups*,. Wiley, New York, 1984.
- [6] G. B. Preston, *inverse semi-groups*. Journal of the London Mathematical Society 29 (1954), 396-403.
- [7] J. Roe, *Elementary Geometry*. Oxford Univ. Press, London, 1993.
- [8] V. V. Wagner, *Generalized groups*. Doklady akademii Nauk SSSR 84 (1952), 1119-1122 (Russian).

ÍNDICE

- S/σ , 14
- \mathbb{C}^* , 31
- \mathcal{F} , 36
- Acción entre semigrupos inversos, 16
- Ampliación, 37
- automorfismos que preservan el orden, 23
- Cofinito, 6
- Congruencia, 12
- congruencia σ , 12
- E-unitario, 13
- Expansión de Birget-Rhodes \tilde{G}^R , 2
- F-inverso, 13
- Factorizable, 24
- Función parcial, 4
- Grupo de las transformaciones extendidas de Möbius M^* , 32
- Grupo de Möbius, 8
- Grupo de unidades $U(S)$, 24
- Ideal de orden, 37
- Idempotente, 1
- monoide inverso simétrico, 6
- orden parcial natural, 10
- P-semigrupo, 45
- Producto semidirecto, 16
- Relación \mathcal{D} , 35
- Relaciones \mathcal{L} y \mathcal{R} , 34
- Semigrupo, 1
- Semigrupo inverso, 2
- Semigrupo inverso generado, 9
- Semigrupo Regular, 2
- semirretículo inferior, 2
- Transformación de Möbius, 7
- Transformación extendida de Möbius (α^*) , 31
- Tripla de McAlister, 40