

Estudio numérico de la separación de flujo en toberas convergentes-divergentes bidimensionales axisimétricas diseñadas mediante el Método de las Características, con y sin corrección por capa límite

Juan Esteban García Uribe y Andrés Esneider Parra Villamil

Trabajo de Grado para Optar el Título de Ingeniero Mecánico

Director

Manuel de Jesús Martínez

PhD. Ingeniería Mecánica

Codirector

Omar Andrés Fuentes Manrique

Ingeniero Mecánico

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas

Escuela de Ingeniería Mecánica

Ingeniería Mecánica

Bucaramanga

2026

### **Dedicatoria**

#### ***Juan Esteban***

*Primeramente, a Dios, por permitirme alcanzar este objetivo.*

*A William, Gloria, Andrés y Sara, por su apoyo, su confianza y por estar presentes en cada etapa de mi vida.*

*A Maria Juliana, por su amor, su paciencia y su motivación incondicional; por ser mi calma y mi compañía en los momentos más exigentes de este recorrido.*

#### ***Andrés Parra***

*Dedico este trabajo a mi familia, por ser mi apoyo constante en cada etapa de este proceso.*

*Gracias por brindarme su amor, comprensión, respaldo emocional y apoyo económico, elementos que fueron fundamentales para llegar hasta este momento.*

*A ustedes, que estuvieron presentes en los días de esfuerzo, cansancio, dudas y también de alegrías, les dedico este logro con todo mi cariño, porque de una u otra forma también hicieron parte de este camino.*

### **Agradecimientos**

#### ***Juan Esteban***

*Al profesor Manuel de Jesús Martínez y a Omar Andrés Fuentes Manrique, por su valiosa orientación, acompañamiento y apoyo durante el desarrollo de este trabajo, siendo fundamentales en nuestro último paso para alcanzar el objetivo propuesto.*

*A Andrés Esneider, así como a mis amigos y futuros colegas, quienes me acompañaron a lo largo de este proceso y con quienes compartí una etapa exigente pero satisfactoria, haciéndola más llevadera y significativa.*

#### ***Andrés Parra***

*Agradezco profundamente a mi familia, por su apoyo incondicional, emocional y económico durante este proceso. Su compañía, comprensión y confianza fueron fundamentales para mantenerme firme y culminar esta etapa.*

*A mis amigos, gracias por las experiencias compartidas, por los momentos vividos y por hacer parte de este camino con su apoyo y cercanía.*

*A la universidad, por brindarme los conocimientos y espacios necesarios para mi formación profesional; y a los docentes, por orientar mi aprendizaje y motivarme a cuestionar aspectos importantes de mi vida académica y personal.*

*De manera especial, agradezco a Juan Esteban, mi compañero de tesis, por su apoyo, compromiso y trabajo en equipo. Su ayuda fue muy valiosa para alcanzar este logro.*

*A todos quienes hicieron parte de este proceso, gracias por contribuir, de una u otra forma, a la culminación de esta etapa.*

## Tabla de Contenido

|                                                                                                                                               | <b>Pág.</b> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Introducción .....                                                                                                                            | 14          |
| 1. Objetivos .....                                                                                                                            | 17          |
| 1.1 Objetivo General .....                                                                                                                    | 17          |
| 1.2 Objetivos Específicos.....                                                                                                                | 17          |
| 2. Marco Referencial.....                                                                                                                     | 18          |
| 2.1 Marco Teórico.....                                                                                                                        | 18          |
| 2.1.1 Fundamentos del flujo compresible y régimen supersónico.....                                                                            | 18          |
| 2.1.2 Toberas convergentes – divergentes .....                                                                                                | 24          |
| 2.1.3 Método de las características (MoC) .....                                                                                               | 26          |
| 2.1.4 Capa límite y separación de flujo en toberas .....                                                                                      | 30          |
| 2.1.5 Método de Thwaites.....                                                                                                                 | 36          |
| 3. Metodología .....                                                                                                                          | 41          |
| 3.1 Diseño geométrico de la tobera mediante el Método de las Características.....                                                             | 41          |
| 3.2 Implementación de la corrección de capa límite mediante el método de Thwaites.....                                                        | 42          |
| 3.3 Simulación numérica y análisis comparativo en Ansys Fluent .....                                                                          | 50          |
| 3.4 Procedimiento de cálculo y comparación del espesor de desplazamiento entre el modelo analítico (Thwaites) y el modelo numérico (CFD)..... | 56          |
| 3.5 Métodos de verificación del modelo CFD .....                                                                                              | 60          |
| 4. Resultados y Análisis.....                                                                                                                 | 62          |
| 4.1 Método integral de Thwaites .....                                                                                                         | 62          |
| 4.1.1 Espesor de desplazamiento $\delta^*$ .....                                                                                              | 62          |

|                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1.2 Corrección geométrica .....                                                           | 64  |
| 4.2 Análisis del espesor de desplazamiento .....                                            | 67  |
| 4.2.1 Resultados CFD .....                                                                  | 67  |
| 4.2.2 Alcance del modelo de Thwaites frente a los resultados CFD .....                      | 70  |
| 4.3 Comparación CFD entre geometrías.....                                                   | 73  |
| 4.3.1 Distribución del número de Mach.....                                                  | 73  |
| 4.3.2 Distribución de Presión en la pared .....                                             | 76  |
| 4.3.3 Coeficiente de fricción ( $C_f$ ) en la pared.....                                    | 77  |
| 4.3.4 Análisis de las geometrías con dominio de aire (flujo externo).....                   | 79  |
| 4.4 Análisis de la separación del flujo .....                                               | 85  |
| 4.4.1 Predicción del comportamiento para diferentes NPR .....                               | 86  |
| 4.4.2 Comparación geométrica entre la tobera base MoC y la corregida mediante Thwaites..... | 90  |
| 4.5 Análisis del empuje.....                                                                | 91  |
| 4.6 Validación de la convergencia .....                                                     | 93  |
| 4.6.1 Criterios de convergencia .....                                                       | 93  |
| 4.6.2 Tobera base diseñada mediante MoC .....                                               | 96  |
| 4.6.3 Tobera con corrección de capa límite (Thwaites).....                                  | 105 |
| 4.7 Validación de Resultados.....                                                           | 114 |
| 4.7.1 Comparación con la literatura.....                                                    | 115 |
| 4.7.2 Coherencia física de los resultados .....                                             | 117 |
| 4.7.3 Validación indirecta del modelo de corrección de la capa límite (Thwaites).....       | 118 |
| 5. Conclusiones .....                                                                       | 121 |
| 6. Recomendaciones .....                                                                    | 125 |

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| Referencias Bibliográficas ..... | 126 |
|----------------------------------|-----|

**Lista de Tablas**

|                                                                                                               | <b>Pág.</b> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Tabla 1 Seguimiento numérico de la corrección de capa límite y actualización de propiedades                   | 46          |
| Tabla 2 Comparación de los parámetros de salida de la tobera MoC y tobera corregida por capa límite .....     | 66          |
| Tabla 3 Espesor de desplazamiento ( $\delta^*$ ) obtenido mediante Ansys Fluent y el modelo de Thwaites ..... | 69          |
| Tabla 4 Comparación del empuje entre configuraciones.....                                                     | 91          |
| Tabla 5 Parámetros de entrada y salida en los puntos de diseño desde Ansys Workbench .....                    | 102         |
| Tabla 6 Parámetros de entrada y salida en los puntos de diseño desde Ansys Workbench .....                    | 111         |
| Tabla 7 Índice de convergencia de malla para el número de Mach máximo.....                                    | 114         |
| Tabla 8 Comparación cualitativa de los resultados CFD con la literatura.....                                  | 117         |

### Lista de Figuras

|                                                                                                         | <b>Pág.</b> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Figura 1 Ondas de choque normales y oblicuas.....                                                       | 21          |
| Figura 2 Expansión Prandtl-Meyer.....                                                                   | 22          |
| Figura 3 Tobera de Laval.....                                                                           | 24          |
| Figura 4 Región de separación de flujo .....                                                            | 31          |
| Figura 5 Regímenes de flujo en una tobera CD en función de la relación de presiones (NPR) ..            | 35          |
| Figura 6 Diagrama de flujo general del código de la corrección de capa límite .....                     | 44          |
| Figura 7 Evaluación de propiedades locales del flujo inviscido en la pared de la tobera.....            | 45          |
| Figura 8 Bucle cálculo de propiedades en cada punto de la pared .....                                   | 48          |
| Figura 9 Diagrama de flujo del código del método integral Thwaites .....                                | 49          |
| Figura 10 Geometría axisimétrica de la tobera con particiones definidas para control del mallado .....  | 51          |
| Figura 11 Malla estructurada con refinamiento en la región de la pared y la garganta de la tobera ..... | 52          |
| Figura 12 Esquema de extracción de datos en el contorno divergente .....                                | 57          |
| Figura 13 Representación gráfica del cálculo del espesor de desplazamiento .....                        | 58          |
| Figura 14 Espesor de desplazamiento vs x (Método de Thwaites).....                                      | 63          |
| Figura 15 Comparación de contornos sin corrección y con corrección de capa límite. ....                 | 65          |
| Figura 16 Perfil de velocidad axial .....                                                               | 68          |
| Figura 17 Espesor de desplazamiento de la tobera MoC según Ansys Fluent. ....                           | 70          |
| Figura 18 Comparación de tendencias espesor de desplazamiento a lo largo de la tobera .....             | 71          |
| Figura 19 Distribución del número de Mach en la geometría basada en MoC.....                            | 74          |

|                                                                                                                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 20 Distribución del número de Mach en la geometría con corrección de capa límite (Thwaites) .....                                                                                    | 75  |
| Figura 21 Distribución de la presión estática a lo largo de la pared de la tobera para las dos configuraciones .....                                                                        | 76  |
| Figura 22 Gráfica comparativa del coeficiente de fricción en la pared de la tobera para las dos configuraciones .....                                                                       | 78  |
| Figura 23 Comparación de la distribución del número de Mach entre las geometrías sin corrección y con corrección de capa límite .....                                                       | 80  |
| Figura 24 Distribución de la presión estática en la pared de la tobera para las geometrías basada en MoC y corregida mediante el método de Thwaites, considerando dominio de aire .....     | 82  |
| Figura 25 Distribución del coeficiente de fricción en la pared de la tobera para las geometrías basada en MoC y corregida mediante el método de Thwaites, considerando dominio de aire .... | 84  |
| Figura 26 Distribución de presión para diferentes NPR .....                                                                                                                                 | 87  |
| Figura 27 Distribución de número de Mach para diferentes NPR .....                                                                                                                          | 89  |
| Figura 28 Residuales de las ecuaciones de flujo en la simulación CFD – geometría no corregida .....                                                                                         | 96  |
| Figura 29 Gráfica del estado estacionario de la presión promedio – geometría no corregida .....                                                                                             | 97  |
| Figura 30 Gráfica del estado estacionario de la temperatura promedio – geometría no corregida .....                                                                                         | 98  |
| Figura 31 Gráfica del estado estacionario del número de Mach máximo – geometría no corregida .....                                                                                          | 98  |
| Figura 32 Desequilibrio y diferencia de masa entre la entrada y la salida – geometría no corregida .....                                                                                    | 100 |

|                                                                                                                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 33 Número de Mach vs número de elementos .....                                                                                                          | 103 |
| Figura 34 Residuales de las ecuaciones de flujo en la simulación CFD – geometría corregida.                                                                    | 106 |
| Figura 35 Gráfica del estado estacionario de la presión promedio – geometría corregida.....                                                                    | 107 |
| Figura 36 Gráfica del estado estacionario de la temperatura promedio – geometría corregida .                                                                   | 108 |
| Figura 37 Gráfica del estado estacionario del número de Mach máximo – geometría corregida<br>.....                                                             | 109 |
| Figura 38 Desequilibrio y diferencia de masa entre la entrada y la salida – geometría corregida<br>.....                                                       | 110 |
| Figura 39 Número de Mach contra número de elementos.....                                                                                                       | 112 |
| Figura 40 Contornos de número de Mach en una tobera supersónica con separación de flujo<br>obtenidos mediante simulaciones CFD reportadas por Peri (2021)..... | 116 |

**Lista de Apéndices**

Apéndice A. Código base MoC y bloque de exportación de datos para la corrección por capa límite.

Apéndice B. Códigos de corrección geométrica por capa límite

Apéndice C. Códigos de postprocesamiento de resultados CFD

## Resumen

**Título:** Estudio numérico de la separación de flujo en toberas convergentes-divergentes bidimensionales axisimétricas diseñadas mediante el Método de las Características, con y sin corrección por capa límite.

**Autores:** Juan Esteban García Uribe, Andrés Esneider Parra Villamil

**Palabras Clave:** toberas CD, método de las características, capa límite, método de Thwaites, separación de flujo, dinámica de fluidos computacional.

**Descripción:** Este trabajo presenta un análisis numérico de la separación de flujo en toberas convergente-divergente (CD) bidimensionales y axisimétricas diseñadas mediante el Método de las Características (MoC). A diferencia de enfoques inviscidos empleados en el diseño de toberas supersónicas, se incorpora una corrección asociada al desarrollo de la capa límite para considerar la reducción efectiva del área de flujo y su influencia en la distribución de presión y el número de Mach.

Se construyeron dos geometrías comparables: una obtenida mediante el MoC bajo la hipótesis de flujo inviscido y otra con una corrección geométrica basada en la estimación del crecimiento de la capa límite mediante el método integral de Thwaites. Ambas configuraciones se analizaron mediante simulaciones CFD estacionarias y compresibles en Ansys Fluent, empleando un modelo axisimétrico bidimensional, malla estructurada con refinamiento en pared y el modelo de turbulencia SST  $k-\omega$ . Se mantuvieron idénticas condiciones de contorno y criterios de convergencia para asegurar una comparación consistente.

Los resultados se evaluaron mediante los campos de presión, la distribución del número de Mach y la estructura de ondas de choque, permitiendo estimar la región de desprendimiento de la capa límite bajo condiciones de sobreexpansión. La inclusión de la corrección por capa límite modifica la predicción de la posición y extensión de la separación, así como la distribución de presión en la pared, evidenciando la importancia de considerar efectos viscosos desde etapas tempranas del diseño de toberas supersónicas.

### Abstract

**Title:** Numerical study of flow separation in two-dimensional axisymmetric convergent-divergent nozzles designed using the method of characteristics, with and without boundary layer correction.

**Authors:** Juan Esteban García Uribe, Andrés Esneider Parra Villamil

**Keywords:** CD nozzle, method of characteristics, boundary layer, Thwaites method, flow separation, computational fluid dynamics.

**Description:** This work presents a numerical analysis of flow separation in two-dimensional and axisymmetric converging-diverging (CD) nozzles designed using the Method of Characteristics (MoC). Unlike inviscid approaches commonly employed in supersonic nozzle design, a correction associated with boundary-layer development is incorporated to account for the effective reduction in flow area and its influence on the pressure distribution and Mach number.

Two comparable geometries were developed: one obtained using the MoC under the inviscid-flow assumption and another incorporating a geometric correction based on boundary-layer growth estimated through Thwaites' integral method. Both configurations were analyzed using steady-state, compressible computational fluid dynamics (CFD) simulations in Ansys Fluent, employing a two-dimensional axisymmetric model, a structured mesh with near-wall refinement, and the SST  $k-\omega$  turbulence model. Identical boundary conditions and convergence criteria were maintained to ensure a consistent comparison.

The results were evaluated in terms of pressure fields, Mach number distribution, and shock-wave structure, allowing the boundary-layer separation region under overexpanded conditions to be estimated. The inclusion of the boundary-layer correction modifies the predicted location and extent of flow separation, as well as the wall-pressure distribution, highlighting the importance of considering viscous effects during the early stages of supersonic nozzle design.

### **Introducción**

El flujo compresible, objeto de estudio en ingeniería mecánica, es fundamental para comprender el comportamiento de los gases en aplicaciones de alta velocidad y, en particular, en los sistemas de propulsión aeroespaciales y en los dispositivos de aceleración del flujo. Es en este marco donde las toberas convergentes-divergentes desempeñan un papel fundamental, ya que convierten la energía térmica y de presión en energía cinética, lo que permite acelerar el fluido a velocidades cercanas a la del sonido (Anderson, 2003).

El diseño de toberas se realiza en algunas ocasiones bajo supuestos de flujo estacionario, inviscido e isentrópico. En este contexto, el Método de las Características (MoC) se ha consolidado como una herramienta útil para trazar contornos supersónicos y obtener distribuciones de flujo más uniformes en la sección de salida (Prince, 1982). No obstante, al comparar este enfoque con el comportamiento físico real, se observan restricciones significativas.

La formación de capa límite sobre las paredes internas reduce el área efectiva disponible para el flujo, altera la distribución de presión y puede favorecer la separación del flujo en condiciones de sobreexpansión. Este fenómeno afecta el desempeño de la tobera y puede generar oscilaciones de presión y cargas laterales que comprometen la estabilidad del sistema (Olson & Lele, 2013).

Este problema ha sido abordado desde distintos enfoques. Almqvist (2005) propuso un modelo semiempírico para predecir la separación en toberas de cohete, mientras que Xiao et al. (2007) analizaron mediante dinámica de fluidos computacional (CFD, por sus siglas en inglés Computational Fluid Dynamics) la estructura del flujo y la distribución de presión en regímenes sobreexpandidos. Más recientemente, Peri (2021) comparó una tobera 2D con y sin corrección por capa límite, mostrando su influencia en la predicción del punto de separación.

En la Universidad Industrial de Santander, la tesis de Fuentes (2019) constituyó un antecedente relevante al desarrollar una metodología detallada para el diseño de toberas mediante el MoC y contrastarla con simulaciones CFD en Ansys Fluent. Sin embargo, dicho trabajo no evaluó el efecto de una corrección geométrica por capa límite desde la etapa de diseño, por lo que dejó abierta la posibilidad de incorporar efectos viscosos para obtener geometrías más representativas del comportamiento físico del flujo.

Aunque Fuentes (2019) estableció una base geométrica y numérica para el diseño de toberas mediante MoC, su trabajo no evaluó la incorporación de una corrección por capa límite desde la etapa de diseño. Por ello, esta investigación extiende dicha metodología mediante una corrección geométrica preliminar basada en el espesor de desplazamiento estimado con el método integral de Thwaites.

Con esto, se busca analizar si una modificación sencilla del contorno altera de forma físicamente coherente la presión en pared, el número de Mach, el coeficiente de fricción, la ubicación del desprendimiento y el empuje global.

A partir de la problemática expuesta, esta investigación busca determinar la influencia que tiene la incorporación de una corrección geométrica por capa límite, basada en el método integral de Thwaites, sobre la predicción de la separación del flujo en toberas supersónicas diseñadas mediante el Método de las Características. En este contexto, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo afecta la incorporación de una corrección geométrica por capa límite basada en el método integral de Thwaites la predicción de la separación de flujo en toberas supersónicas diseñadas mediante el Método de las Características?

Para responder esta pregunta, en este trabajo se implementa una corrección por capa límite sobre una tobera diseñada mediante el Método de las Características. Para ello, se generaron dos

configuraciones: una basada en el diseño isentrópico y otra corregida a partir del crecimiento de la región viscosa. Ambas fueron analizadas mediante simulaciones CFD estacionarias y compresibles en Ansys Fluent con el modelo de turbulencia SST ( $k-\omega$ ), debido a su buen desempeño en fenómenos cercanos a la pared (DeBonis, 2010).

La relevancia de esta investigación radica en que integra, dentro de una misma metodología, el diseño inviscido mediante el Método de las Características, una corrección geométrica basada en el espesor de desplazamiento de la capa límite y la evaluación posterior mediante simulación CFD.

Esta integración permite analizar no solo la geometría resultante, sino también el efecto que una corrección viscosa preliminar puede tener sobre la predicción de separación en una tobera supersónica. Por lo tanto, el valor del trabajo no se centra en proponer un nuevo modelo de capa límite ni en optimizar de manera definitiva el desempeño de la tobera. En cambio, se orienta a evaluar el alcance de una corrección geométrica sencilla como herramienta de diseño preliminar.

La tesis se estructura en seis capítulos. En el Capítulo 1 se presentan los objetivos del estudio, mientras que el Capítulo 2 desarrolla el marco referencial y el estado del arte. El Capítulo 3 describe la metodología empleada para el diseño geométrico y la simulación numérica. En el Capítulo 4 se exponen los resultados y su análisis, incluyendo la evaluación del comportamiento del flujo y la validación de los modelos. Finalmente, en los Capítulos 5 y 6 se presentan las conclusiones y recomendaciones del trabajo.

## **1. Objetivos**

### **1.1 Objetivo General**

Implementar una corrección geométrica por efectos de capa límite en toberas supersónicas convergente-divergente (CD) diseñadas mediante el Método de las Características, con el fin de evaluar su influencia en la predicción de la separación de flujo, comparando el comportamiento del flujo para diseños con y sin dicha corrección a través de simulaciones numéricas.

### **1.2 Objetivos Específicos**

Desarrollar una extensión del código de diseño de tobera supersónica CD axisimétrica mediante el Método de las Características desarrollado por Fuentes (2019), con el fin de incorporar una corrección geométrica por capa límite en la determinación del contorno de la tobera.

Generar las geometrías de una tobera supersónica CD axisimétrica correspondientes a la configuración base MoC y a la configuración con corrección por capa límite utilizando el código modificado, asegurando condiciones de diseño equivalentes en ambos casos para una comparación consistente.

Predecir la separación de flujo mediante simulaciones CFD en las geometrías generadas, evaluando su ubicación, estructura del flujo y efectos sobre la distribución de presión en la tobera.

## 2. Marco Referencial

### 2.1 Marco Teórico

#### 2.1.1 *Fundamentos del flujo compresible y régimen supersónico*

El flujo compresible permite analizar gases en aplicaciones de alta velocidad, como toberas supersónicas y sistemas de propulsión. Anderson (2003) lo estudia desde la dinámica de gases, mientras que Shapiro (1953) lo aborda desde el análisis unidimensional de conductos. En ambos casos, las variaciones de presión, temperatura y densidad son esenciales para describir la aceleración del fluido dentro de una tobera.

La magnitud adimensional que permite clasificar el régimen del flujo es el número de Mach, definido como la relación entre la velocidad local del fluido y la velocidad del sonido en el medio. Cuando  $M < 1$ , el flujo es subsónico; si  $M = 1$ , es sónico; para  $1 < M < 5$ , se considera supersónico; y para  $M > 5$ , hipersónico (Anderson, 2003; Liepmann & Roshko, 2001). Esta clasificación es esencial en el análisis de toberas convergente-divergentes, ya que determina la forma en que el flujo responde a cambios geométricos, expansiones y ondas de choque.

En el régimen supersónico aparecen ondas de choque, abanicos de expansión y reflexiones que modifican la estructura del flujo y el desempeño de la tobera. Liepmann y Roshko (2001) explican estos fenómenos desde su interpretación física, mientras que Zucrow y Hoffman (1976) los relacionan con aplicaciones de propulsión. Esta relación permite conectar la teoría del flujo supersónico con el análisis de separación en toberas convergente-divergentes.

**2.1.1.1 Ecuaciones de conservación (continuidad, momento y energía).** El análisis de flujos compresibles se basa en la formulación de las ecuaciones de conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía. Para flujos unidimensionales y en régimen estacionario, estas ecuaciones permiten estudiar con precisión la evolución del flujo a lo largo de un conducto, como

ocurre en las toberas convergente-divergentes utilizadas en aplicaciones aeronáuticas y espaciales (Shapiro, 1953; Anderson, 2003).

La Conservación de la masa (Continuidad) para un flujo unidimensional se expresa como:

$$\frac{d(\rho u A)}{dx} = 0 \quad (1)$$

Donde:

- $\rho$  es la densidad del fluido ( $kg/m^3$ ).
- $u$  es la velocidad del flujo ( $m/s$ ).
- $A$  es el área de la sección transversal del ducto ( $m^2$ ).
- $x$  es la coordenada longitudinal.

Esta ecuación implica que el flujo másico ( $\dot{m} = \rho u A$ ), se mantiene constante a lo largo del eje de la tobera, lo cual es esencial para diseñar geometrías que garanticen una transición controlada entre los regímenes subsónico y supersónico.

La ecuación de cantidad de movimiento (forma de Euler) para flujo unidimensional, sin fricción ni fuerzas externas, se reduce a:

$$\frac{dp}{dx} + \rho u \frac{du}{dx} = 0 \quad (2)$$

Esta relación permite analizar cómo la presión y la velocidad varían en respuesta a los cambios geométricos y termodinámicos, y resulta fundamental en la determinación de las condiciones necesarias para la aceleración o desaceleración del flujo en función de su número de Mach.

Bajo la hipótesis de flujo adiabático y sin trabajo mecánico adicional, la energía total por unidad de masa se conserva. La forma integral de la ecuación de conservación de la energía es:

$$h_o = h + \frac{u^2}{2} = cte \quad (3)$$

Donde:

- $h_o$  es la entalpía total o estancamiento (J/kg).
- $h$  es la entalpía estática.
- $u$  es la velocidad del flujo.

Esta expresión establece que cualquier incremento en la velocidad del flujo se produce a expensas de la energía interna, es decir, de una reducción en la temperatura y presión estáticas del fluido.

En conjunto, las ecuaciones de conservación describen la aceleración del flujo y la conversión de energía dentro de una tobera. Sin embargo, bajo hipótesis unidimensionales, inviscidas y adiabáticas, representan principalmente el comportamiento ideal del núcleo del flujo. Por ello, el diseño mediante el Método de las Características debe complementarse con modelos que consideren los efectos viscosos cercanos a la pared, como el crecimiento de la capa límite y su posible desprendimiento.

**2.1.1.2 Fenómenos característicos del régimen supersónico.** El comportamiento del flujo supersónico está regido por fenómenos específicos como los conos de Mach, las ondas de choque y expansión, y la reflexión de ondas, los cuales modifican significativamente la estructura del flujo (Zucrow & Hoffman, 1976).

**2.1.1.2.1 Cono de Mach.** Cuando un objeto se desplaza a velocidad supersónica, genera un frente de ondas denominado cono de Mach, cuyo ángulo se relaciona inversamente con el número de Mach. Este fenómeno delimita el área de influencia de las perturbaciones del cuerpo en

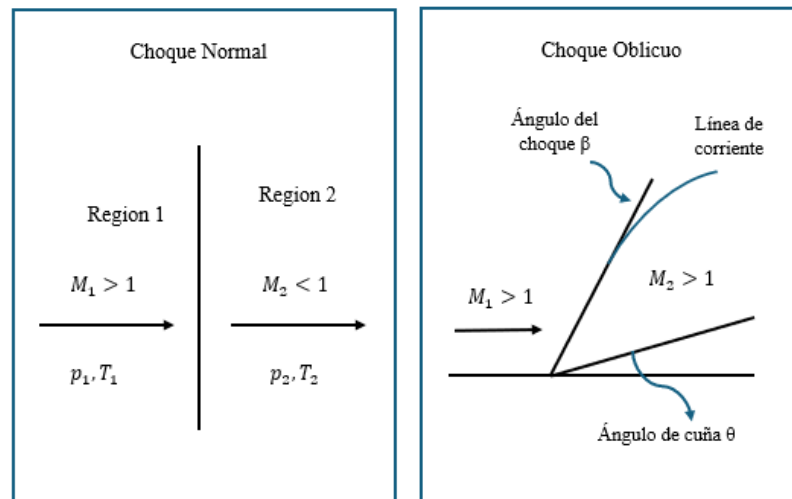
movimiento (Hill & Peterson, 1992). El ángulo de apertura se calcula mediante la relación (4) (Anderson, 2003).

$$\mu = \sin^{-1} \left( \frac{1}{M} \right) \quad (4)$$

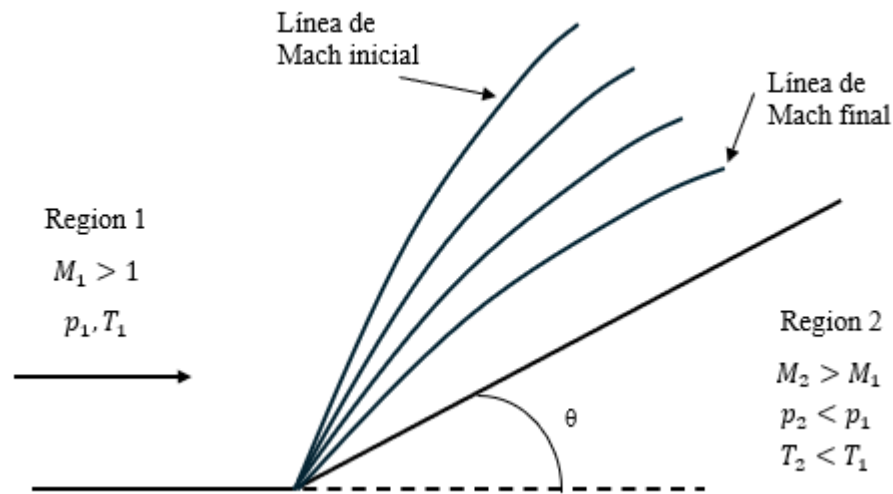
**2.1.1.2.2 Ondas de choque y expansión de Prandtl-Meyer.** Los cambios abruptos en la geometría del conducto provocan ondas de choque oblicuas, donde el flujo experimenta aumentos en presión y temperatura, y una disminución en la velocidad. Por el contrario, las expansiones suaves generan abanicos de expansión que aceleran el flujo, descritos mediante la función de Prandtl-Meyer (Liepmann & Roshko, 2001; Anderson, 2003). Estos fenómenos son fundamentales para el diseño eficiente de toberas supersónicas.

**Figura 1**

*Ondas de choque normales y oblicuas*



*Nota.* El choque normal vuelve el flujo subsónico; el choque oblicuo débil lo comprime y puede mantenerlo supersónico. Adaptado de *Compressible Fluid Flow* (p. 293), por M. A. Saad, 1985.

**Figura 2***Expansión Prandtl-Meyer*

*Nota.* En una expansión de Prandtl–Meyer, el flujo supersónico gira sobre una esquina convexa, se expande, aumenta su número de Mach y disminuyen la presión y la temperatura estáticas. Adaptado de *Modern Compressible Flow* (p. 168), por J. D. Anderson, 2003.

**2.1.1.2.3 Reflexión de Ondas.** Las ondas generadas en el flujo supersónico pueden reflejarse al interactuar con paredes sólidas u otras ondas. La reflexión puede clasificarse en regular, Mach o compleja, dependiendo del ángulo de incidencia y las condiciones del flujo (Zucrow & Hoffman, 1976). Comprender estas interacciones es clave para evitar pérdidas en la eficiencia del sistema propulsivo.

**2.1.1.2.4 Relación de presión en la tobera (NPR).** La relación de presión de la tobera (NPR, por sus siglas en inglés *Nozzle Pressure Ratio*) es uno de los parámetros más importantes en el análisis y diseño de toberas convergente–divergentes, ya que controla el proceso de expansión

del flujo y condiciona de manera directa el empuje disponible. Se define como la razón entre la presión total a la entrada de la tobera y la presión ambiente, es decir:

$$NPR = \frac{P_{t,in}}{P_0} \quad (5)$$

Donde  $P_{t,in}$  representa la presión total de entrada y  $P_0$  la presión estática del medio externo. Este parámetro expresa el potencial de expansión del gas desde el estado de estancamiento en la cámara hasta las condiciones del entorno (Mattingly et al., 2002; DeBonis, 2010).

A medida que el NPR aumenta, el flujo acelera dentro de la tobera hasta alcanzar condiciones sónicas en la garganta. Existe entonces un valor crítico, denominado NPR crítico, a partir del cual la tobera se encuentra estrangulada y el flujo másico deja de depender de la presión de salida. En esa condición, la garganta opera con  $M=1$ , mientras que variaciones adicionales en la contrapresión afectan principalmente la expansión del chorro en la sección divergente (DeBonis, 2010; Farokhi, 2014).

Desde el punto de vista físico, el NPR permite distinguir entre diferentes estados de operación de la tobera. Cuando el valor de diseño se ajusta de tal manera que la presión de salida coincide con la presión ambiente, la expansión es nominal y el empuje se aproxima al máximo ideal. En cambio, si la presión de salida resulta mayor que la ambiente, el flujo se encuentra subexpandido; si es menor, aparece el régimen sobreexpandido, el cual es especialmente importante en esta investigación porque favorece la formación de ondas de choque internas, la interacción choque–capa límite y el posible desprendimiento del flujo (Škorpík, 2018).

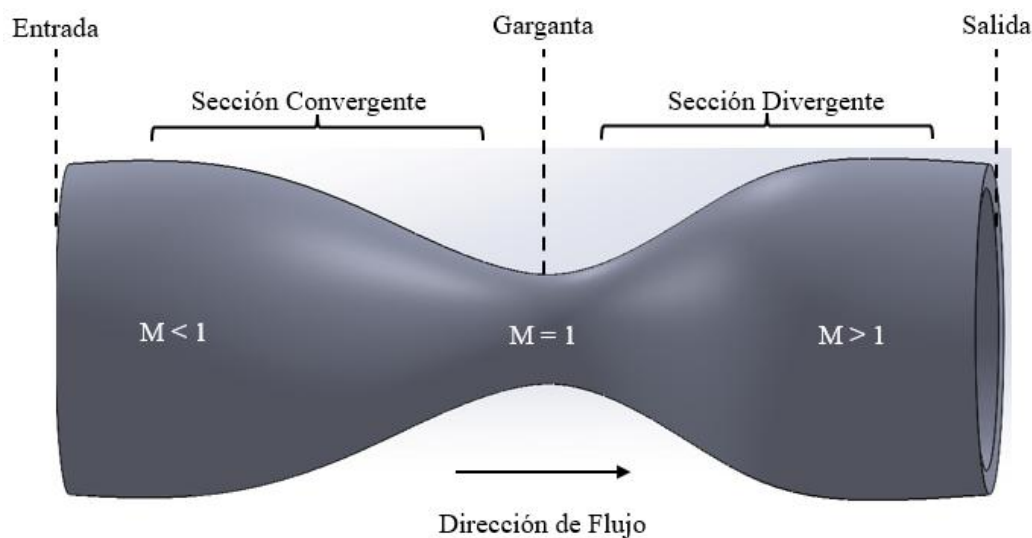
Por esta razón, el NPR no solo es un parámetro de operación, sino también una variable de referencia para interpretar el comportamiento aerodinámico de la tobera. Su variación permite

identificar cambios en la posición de las ondas de choque, en la distribución de presión de pared y en la transición entre distintos patrones de separación. En el presente trabajo, este parámetro resulta especialmente útil porque permite analizar cómo una misma condición de operación puede producir respuestas diferentes en una geometría diseñada mediante MoC y en otra corregida por efectos de capa límite.

### 2.1.2 Toberas convergentes – divergentes

**Figura 3**

*Tobera de Laval*



*Nota.* Elaboración propia donde se muestra el comportamiento del flujo en una tobera de Laval:

$M < 1$  en la sección convergente,  $M = 1$  en la garganta y  $M > 1$  en la sección divergente.

Las toberas convergentes-divergentes (C-D), también conocidas como toberas de Laval, son dispositivos diseñados para acelerar un flujo de gas desde un régimen subsónico hasta un régimen supersónico mediante una adecuada modificación de la sección transversal. Estas toberas constituyen un elemento fundamental en sistemas de propulsión, especialmente en motores cohete, donde se requiere la expansión eficiente de gases para maximizar el empuje (Hill & Peterson,

1992). Su diseño se basa en principios de dinámica de gases compresibles, donde el número de Mach, la relación de presiones y el área de la sección transversal determinan el comportamiento del flujo.

**2.1.2.1 Consideraciones geométricas del contorno.** La geometría de una tobera C-D se divide en tres secciones: una convergente subsónica, una garganta transónica y una divergente supersónica. El diseño adecuado de cada sección es determinante para el rendimiento de la tobera y para evitar fenómenos indeseados como la separación del flujo.

**2.1.2.1.1 Sección convergente (subsónica).** En esta sección, el área transversal disminuye gradualmente. De acuerdo con la ecuación de continuidad para flujo unidimensional isentrópico, cuando la velocidad es subsónica (número de Mach menor a 1), una reducción del área induce una aceleración del flujo (Anderson, 2003). Esta aceleración ocurre sin generar ondas de choque, dado que el flujo aún no ha alcanzado la velocidad del sonido. El perfil de esta sección suele diseñarse suavemente curvado para evitar pérdidas por fricción y minimizar el desarrollo prematuro de la capa límite (Zucrow & Hoffman, 1976).

**2.1.2.1.2 Garganta (transónica).** La garganta es el punto de mínima área en la tobera y es el sitio donde, idealmente, el flujo alcanza el número de Mach igual a 1. Según la teoría de flujo compresible, si la presión en la cámara de combustión es suficientemente alta en comparación con la presión de salida, se alcanza el condicionamiento sónico (choking), es decir, el flujo no puede aumentar su caudal más allá de ese punto incluso si se disminuye la presión de salida (Liepmann & Roshko, 2001). Esta condición fija el flujo másico y es crítica para el diseño de motores cohete.

**2.1.2.1.3 Sección divergente (supersónica).** Después de la garganta, el área de la tobera comienza a expandirse. Contrario a la intuición newtoniana, en flujo supersónico una expansión

del área produce una aceleración adicional del flujo. Esto ocurre gracias al fenómeno de expansión isentrópica descrito por la función de Prandtl-Meyer, la cual establece que el flujo se adapta suavemente a la geometría mediante ondas de expansión (Anderson, 2003). El diseño del contorno divergente debe evitar cambios bruscos de sección para prevenir la formación de ondas de choque internas o la separación de la capa límite. Perfiles optimizados, como los de tipo bell o parabólico, se emplean para maximizar la eficiencia de expansión y minimizar las pérdidas por fricción y por separación (Huzel & Huang, 1992).

### ***2.1.3 Método de las características (MoC)***

**2.1.3.1 Fundamentos y formulación del MoC para flujo 2D isentrópico.** En un flujo bidimensional, compresible e isentrópico, las ecuaciones de conservación se simplifican bajo el supuesto de que no existen fenómenos disipativos (como fricción o conducción térmica), y que la entropía se mantiene constante a lo largo de las trayectorias de partícula. En este contexto, el sistema de ecuaciones se puede transformar en dos ecuaciones características independientes que describen la evolución del flujo a lo largo de direcciones específicas denominadas líneas características.

Estas líneas se definen como curvas tangentes a la dirección del flujo más o menos un ángulo relacionado con la velocidad local del sonido, lo cual permite transformar el sistema de ecuaciones hiperbólicas en relaciones características más simples. En este escenario, las variables del flujo (velocidad, presión, temperatura, número de Mach) se actualizan en función de relaciones a lo largo de dichas líneas, reduciendo el problema a un sistema de ecuaciones algebraicas (Parpia et al., 1988).

En resumen, la formulación del MoC para flujos 2D parte de:

- Las ecuaciones de Euler para flujo compresible.

- La hipótesis de flujo isentrópico ( $dS = 0$ ).
- La identificación de líneas características  $C^+$  y  $C^-$  en el plano  $x$ - $y$ .

Esta formulación es especialmente útil para diseñar toberas que favorezcan un desarrollo suave del flujo, sin ondas de choque internas, asegurando una expansión eficiente hasta el régimen supersónico deseado (Liepmann & Roshko, 2001).

**2.1.3.2 Ecuaciones características y líneas  $C^+$  y  $C^-$ .** En el método, las ecuaciones características representan combinaciones particulares de las ecuaciones de movimiento que permanecen constantes a lo largo de trayectorias específicas en el campo de flujo. Estas trayectorias, o líneas características, se dividen en dos familias:

Líneas  $C^+$ : Se propagan en una dirección determinada por el ángulo  $\theta$  del flujo más el ángulo de Mach  $\mu$ . Líneas  $C^-$ : Se propagan en dirección  $\theta$  menos  $\mu$ .

El ángulo de Mach  $\mu$  se define como el arcoseno del inverso del número de Mach local, es decir,  $\mu = \arcsin\left(\frac{1}{M}\right)$ . Estas líneas corresponden a trayectorias de propagación de pequeñas perturbaciones dentro del flujo (Anderson, 2003).

Las variables invariantes a lo largo de cada familia de líneas son:

- A lo largo de  $C^+$ :  $K^+ = \theta + v(M)$
- A lo largo de  $C^-$ :  $K^- = \theta - v(M)$

Donde:  $\theta$  es el ángulo del flujo respecto al eje de referencia,  $v(M)$  es la función de Prandtl-Meyer, que relaciona el número de Mach con el ángulo de expansión isentrópica necesario para alcanzarlo desde condiciones sónicas.

Estas ecuaciones permiten construir paso a paso la solución en un dominio discreto, calculando puntos de intersección de líneas  $C^+$  y  $C^-$  para determinar la evolución del flujo (Parpia et al., 1988).

**2.1.3.3 Discretización numérica del método.** La discretización del Método de las Características (MoC) permite transformar las ecuaciones diferenciales que gobiernan el flujo isentrópico bidimensional en expresiones algebraicas apropiadas para su resolución numérica. El enfoque empleado en esta investigación se basa en el uso de un esquema predictor-corrector tipo Euler modificado, ampliamente documentado en la literatura (Anderson, 2003; Courant & Friedrichs, 1948).

En primer lugar, las líneas características  $C^+$  y  $C^-$  se definen mediante las siguientes pendientes:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta \mp \mu) = \lambda_{\pm} \quad (6)$$

Donde  $\theta$  es el ángulo del flujo y  $\mu$  el ángulo de Mach. Estas pendientes permiten calcular el desplazamiento vertical correspondiente a un incremento horizontal arbitrario  $\Delta x_{\pm}$  a lo largo de cada característica:

$$\Delta y_{\pm} = \Delta x_{\pm} \cdot \lambda_{\pm} \quad (7)$$

Posteriormente, se aplica la ecuación de compatibilidad a lo largo de cada característica:

$$Q_{\pm} \cdot \Delta u_{\pm} + R_{\pm} \cdot \Delta v_{\pm} - S_{\pm} \cdot \Delta x_{\pm} = 0 \quad (8)$$

Donde los coeficientes  $Q_{\pm}$ ,  $R_{\pm}$  y  $S_{\pm}$  dependen de las propiedades locales del flujo y están definidas como:

$$Q_{\pm} = u^2 - c^2 \quad (9)$$

$$R_{\pm} = 2uw - (u^2 - c^2)\lambda \quad (10)$$

$$S_{\pm} = \frac{u}{y} \cdot c^2 \quad (11)$$

Estos coeficientes se calculan en los puntos iniciales conocidos (por ejemplo, los nodos 1 y 2), cuyas propiedades  $u$ ,  $v$ ,  $c$ , y han sido previamente determinadas. A partir de dichos puntos se trazan las líneas características hasta su intersección estimada en el punto 3, cuyas coordenadas  $(x_3, y_3)$  se obtienen igualando las ecuaciones de ambas rectas:

$$y = y_1 + \lambda + (x_3 - x_1) \quad (12)$$

$$y = y_2 + \lambda - (x_3 - x_2) \quad (13)$$

Igualando ambas expresiones y despejando  $x_3$ , se halla el punto de intersección. Una vez conocidas sus coordenadas, se procede a estimar los valores de  $u_3$  y  $v_3$  mediante un promedio de los coeficientes de compatibilidad y resolución del sistema algebraico ( $q^{+-}$ ).

Este procedimiento se repite de forma secuencial para cada nuevo nodo en el dominio computacional. Dado que el MoC requiere condiciones de contorno completas para iniciar el cálculo, se deben proporcionar dos puntos contiguos en la línea de entrada, desde los cuales se puedan trazar las primeras características.

El Método de las Características se emplea en este trabajo porque permite diseñar el contorno supersónico de la tobera a partir de una expansión controlada del flujo, evitando la formación de ondas de choque internas bajo condiciones ideales. Aunque existen alternativas como

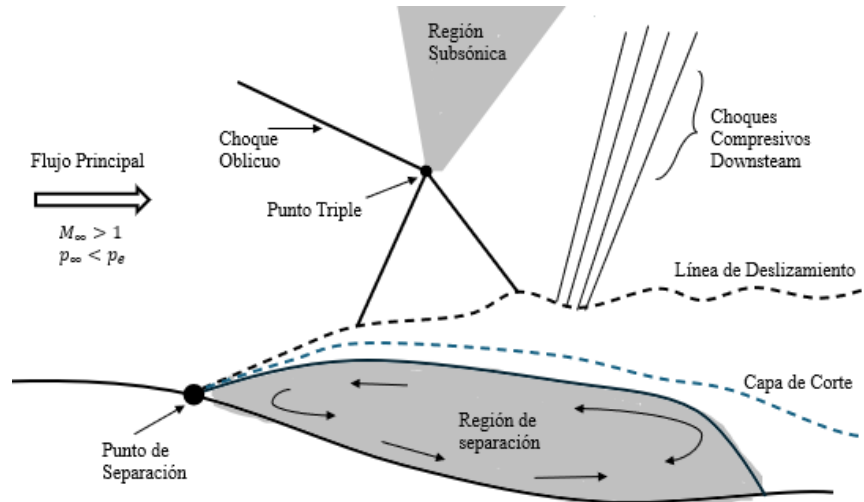
los contornos tipo Rao, bell o TOP, el MoC resulta adecuado para este estudio porque proporciona una geometría base directamente asociada a las propiedades locales del flujo.

No obstante, el MoC se fundamenta en hipótesis de flujo inviscido e isentrópico, por lo que no representa el crecimiento de la capa límite ni la interacción choque-capo límite. Esto no invalida su uso como herramienta de diseño preliminar, pero sí limita su capacidad para describir fenómenos viscosos cercanos a la pared. Estos efectos pueden modificar la distribución de presión y la separación del flujo en condiciones reales, lo que justifica incorporar posteriormente una corrección geométrica por capa límite.

Para la generación automática de la geometría basada en flujo inviscido mediante el trazado de líneas características, se adoptó una rutina computacional en MATLAB desarrollada por Fuentes (2019), la cual permitió obtener las coordenadas teóricas y las propiedades termodinámicas en la pared. Estos resultados sirvieron como datos de entrada para la implementación del método integral de Thwaites programado específicamente para este estudio, con el fin de obtener el contorno corregido final.

#### ***2.1.4 Capa límite y separación de flujo en toberas***

En las toberas convergentes-divergentes, el comportamiento real difiere del modelo ideal debido a la formación de una capa límite sobre la pared interna. Esta región viscosa modifica progresivamente el área efectiva disponible para la expansión del gas y altera la distribución de presión, el número de Mach y la localización del desprendimiento. Por ello, su análisis resulta necesario cuando se busca pasar de un diseño puramente isentrópico a una aproximación más cercana al comportamiento físico del sistema (Anderson, 2003; Schlichting & Gersten, 2017).

**Figura 4***Región de separación de flujo*

*Nota.* La separación del flujo genera una región de recirculación y estructuras de choque asociadas. Adaptada de Fundamental investigation of supersonic nozzle flow separation (p. 13), de Papamoschou y Zill (2004).

**2.1.4.1 Desarrollo de la capa límite en toberas supersónicas.** La capa límite se desarrolla como consecuencia de la viscosidad del fluido y de la condición de no deslizamiento en la pared. En su interior, la velocidad varía desde cero en la superficie hasta aproximarse al valor de la corriente externa. En toberas supersónicas, este fenómeno adquiere especial relevancia en la sección divergente, donde el crecimiento de la región viscosa reduce el área efectiva disponible y altera el proceso de expansión.

El estudio de la capa límite puede abordarse mediante diferentes enfoques con distintos niveles de complejidad. En un extremo, los métodos basados en dinámica de fluidos computacional resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes, generalmente mediante formulaciones promediadas como RANS o técnicas más avanzadas como LES. Estos enfoques permiten capturar con alto nivel

de detalle fenómenos asociados a la turbulencia y a fuertes gradientes de presión, pero requieren un elevado costo computacional y mallas refinadas en la región cercana a la pared (White, 2011).

Como alternativa, las ecuaciones de capa límite propuestas por Prandtl constituyen una simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos con altos números de Reynolds, en los cuales los efectos viscosos se concentran en una región delgada. Estas ecuaciones permiten obtener el perfil de velocidades con menor costo computacional, aunque su solución sigue requiriendo esquemas numéricos relativamente elaborados (Schlichting & Gersten, 2017).

En este contexto, los métodos integrales representan una estrategia intermedia que permite describir el comportamiento global de la capa límite sin resolver explícitamente el perfil de velocidades. Estos métodos se fundamentan en la ecuación integral de cantidad de movimiento de von Kármán (Schlichting & Gersten, 2017), la cual relaciona el crecimiento del espesor de momento con el gradiente de velocidad del flujo externo y el esfuerzo cortante en la pared. Su formulación general puede expresarse como:

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U_e}(2 + H)\frac{dU_e}{dx} = \frac{C_f}{2} \quad (14)$$

Donde  $\theta$  es el espesor de momento,  $H = \delta^*/\theta$  es el factor de forma,  $U_e$  es la velocidad del flujo externo y  $C_f$  es el coeficiente de fricción en la pared. La resolución de esta ecuación requiere relaciones de cierre adicionales, lo que da lugar a distintos métodos integrales, entre los cuales destacan los enfoques de Pohlhausen y Bryan Thwaites.

En el presente trabajo se adopta el método de Thwaites debido a su balance entre simplicidad, bajo costo computacional y utilidad para estimar tendencias de crecimiento de la capa límite. A diferencia de otros enfoques que asumen perfiles de velocidad específicos, este método utiliza correlaciones empíricas que permiten describir el comportamiento de la capa límite de

forma más robusta frente a variaciones en el gradiente de presión. Además, su formulación reduce el problema a una integración sencilla, lo que facilita su implementación computacional y su acoplamiento con herramientas de diseño como el Método de las Características.

Otra ventaja relevante es su utilidad en condiciones de aceleración del flujo, características de la sección divergente de una tobera supersónica en régimen de diseño. Aunque el método fue desarrollado para flujo laminar e incompresible, en este trabajo se emplea como una aproximación preliminar.

La actualización de propiedades locales permite incorporar de forma simplificada el efecto de la compresibilidad, sin convertirlo en un modelo completo de flujo turbulento o de interacción choque-capa límite (White, 2011).

En este sentido, el método de Thwaites constituye una herramienta adecuada para estimar el crecimiento del espesor de desplazamiento y su efecto sobre la geometría efectiva de la tobera, permitiendo capturar la tendencia global del fenómeno con un costo computacional significativamente menor que los métodos basados en la resolución completa del campo de flujo.

**2.1.4.2 Causas y consecuencias de la separación de flujo.** La separación ocurre cuando la capa límite pierde adherencia a la pared debido a un gradiente adverso de presión suficientemente intenso. En toberas sobreexpandidas, este fenómeno suele estar asociado a la aparición de ondas de choque internas, cuya interacción con la capa límite frena el flujo cercano a la pared y puede originar regiones de recirculación. Entre sus principales consecuencias se encuentran la alteración de la distribución de presión, la modificación del campo de Mach, la reducción de la eficiencia de expansión y la posible aparición de cargas laterales e inestabilidades en el sistema (Frey & Hagemann, 1999).

**2.1.4.3 Predicción de la separación de flujo.** Predecir la separación del flujo implica determinar la ubicación a lo largo de la superficie donde la capa límite pierde adherencia debido a la acción de un gradiente de presión adverso suficientemente intenso. Este fenómeno ocurre cuando el esfuerzo cortante en la pared tiende a cero y el fluido cercano a la superficie pierde momento en la dirección del flujo, generando inversión local de velocidad y desprendimiento de la capa límite (Schlichting & Gersten, 2017; White, 2011).

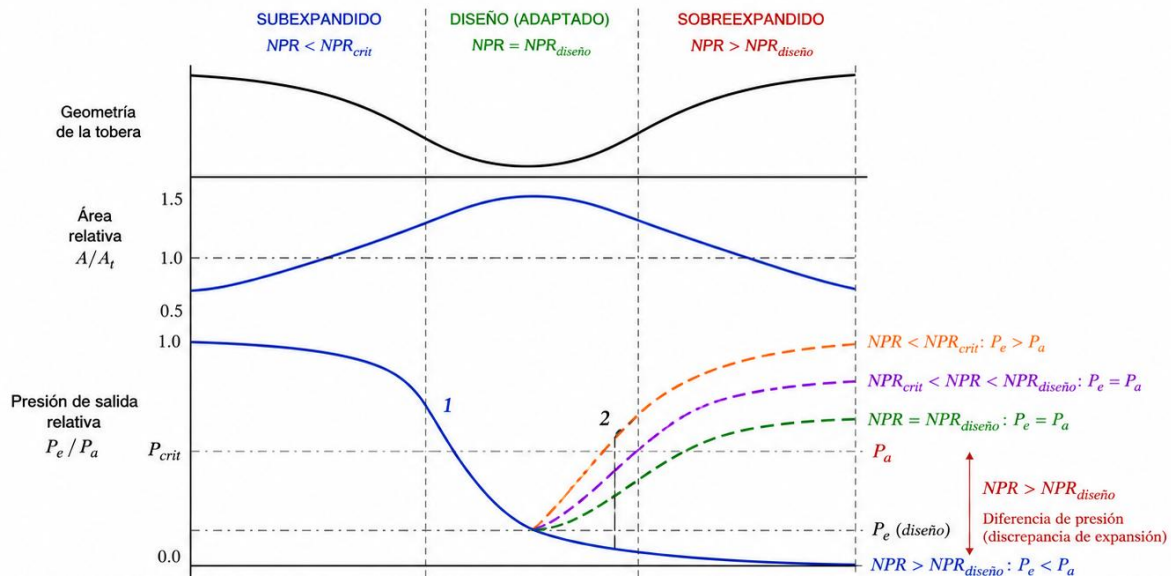
En toberas supersónicas, la predicción de la separación adquiere especial relevancia, ya que está estrechamente relacionada con la presencia de ondas de choque internas y con el reajuste del flujo frente a la contrapresión impuesta. Estos efectos pueden inducir regiones de recirculación, pérdidas de empuje y cargas no uniformes sobre la pared, afectando directamente el desempeño del sistema (Xiao et al., 2007).

La identificación de la separación no depende únicamente de un solo parámetro, sino de la relación entre el comportamiento de la presión, la pérdida de momento del flujo cercano a la pared y la respuesta de la capa límite ante la recompresión del flujo. Por esta razón, en toberas supersónicas resulta necesario analizar este fenómeno mediante criterios físicos complementarios que permitan interpretar de forma coherente la aparición del desprendimiento.

Desde el punto de vista metodológico, la predicción de la separación puede abordarse mediante diferentes enfoques. Los modelos empíricos o semiempíricos permiten estimar la ubicación de la separación en función de parámetros globales como la relación de presiones (NPR), el número de Mach y la geometría de la tobera. Este comportamiento se ilustra de manera esquemática en la Figura 5.

**Figura 5**

*Regímenes de flujo en una tobera CD en función de la relación de presiones (NPR)*



*Nota.* Basada en la teoría de operación de toberas convergentes-divergentes y la variación de la relación de presiones NPR.

En segundo lugar, los métodos integrales de capa límite permiten estimar la evolución del flujo cercano a la pared mediante ecuaciones de momento integradas. En este enfoque, la separación se identifica cuando el coeficiente de fricción en la pared tiende a cero ( $c_f = 0$ ) o cuando el factor de forma alcanza valores críticos asociados a condiciones de gradiente de presión adverso. Métodos como el de Thwaites permiten capturar estas tendencias de manera eficiente, siendo especialmente útiles en etapas preliminares de diseño (White, 2011; Schlichting & Gersten, 2017).

Finalmente, las simulaciones numéricas basadas en la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes proporcionan una descripción detallada del fenómeno, permitiendo identificar la separación a partir de la distribución del esfuerzo cortante en la pared, líneas de corriente o inversión del flujo cercano a la superficie. Este enfoque permite capturar efectos complejos

asociados a la compresibilidad y a la turbulencia, aunque con un mayor costo computacional (Versteeg & Malalasekera, 2007).

### 2.1.5 Método de Thwaites

El método de Thwaites es una formulación integral utilizada para estimar el desarrollo de la capa límite laminar a partir de las condiciones del flujo externo. Su principal ventaja radica en que permite obtener parámetros característicos de la capa límite, como el espesor de desplazamiento, mediante una formulación simplificada, evitando la resolución completa de las ecuaciones diferenciales de Navier-Stokes.

En el contexto del presente trabajo, este método resulta especialmente útil como una herramienta intermedia entre el diseño inviscido de la tobera mediante el Método de las Características y el análisis detallado del flujo mediante simulación numérica. De esta manera, se logra incorporar de forma eficiente los efectos viscosos en etapas preliminares del diseño (White, 2011; Schlichting & Gersten, 2017).

**2.1.5.1 Fundamento teórico.** El método, propuesto por B. Thwaites (1949), se basa en la ecuación integral de cantidad de movimiento para la capa límite laminar bidimensional, expresada como:

$$\frac{d\theta^2}{dx} + \frac{\theta^2 dU_e}{U_e dx} = \frac{C_f}{2} \quad (15)$$

Donde:  $\theta$  es el espesor de momento,  $U_e$  es la velocidad externa al borde de la capa límite,  $C_f$  es el coeficiente de fricción de pared.

A partir de esta ecuación, Thwaites introdujo un parámetro adimensional que caracteriza el efecto del gradiente de presión sobre la capa límite:

$$\lambda = \frac{\theta^2 dU_e}{\nu dx} \quad (16)$$

Este parámetro permite determinar el comportamiento del flujo dentro de la capa límite, así como estimar magnitudes como el esfuerzo cortante, el factor de forma y el espesor de desplazamiento mediante correlaciones empíricas.

Aunque el método original de Thwaites fue formulado para capa límite laminar e incompresible, en este trabajo se emplea como una aproximación integral preliminar. Su adaptación al caso compresible se realiza mediante la actualización de propiedades locales del flujo, siguiendo el enfoque de métodos integrales simplificados aplicados a capas límite laminares compresibles.

Por tanto, el método no se utiliza como modelo completo de flujo turbulento ni como predictor directo de la separación supersónica. Su función es estimar una tendencia inicial del espesor de desplazamiento para generar una corrección geométrica, cuyos efectos se evalúan posteriormente mediante simulaciones CFD.

**2.1.5.2 Formulación del método.** El método evita la resolución directa del perfil de velocidad dentro de la capa límite y, en su lugar, emplea relaciones integrales para obtener sus propiedades globales. A partir del parámetro  $\lambda$ , se utilizan correlaciones empíricas para determinar:

- El factor de forma  $H = \delta^*/\theta$
- El coeficiente de fricción  $C_f$
- El espesor de desplazamiento  $\delta^*$

Estas correlaciones dependen del signo y magnitud de  $\lambda$ , permitiendo distinguir entre gradientes de presión favorables y adversos.

**2.1.5.3 Implementación numérica.** Desde el punto de vista computacional, el método de Thwaites no requiere una discretización espacial compleja. En su lugar, se implementa mediante un esquema de marcha (marching method) a lo largo de la superficie, en el cual las variables se actualizan punto a punto. Por lo tanto, la discretización en este contexto no corresponde a la construcción de una malla bidimensional, sino a la evaluación numérica de integrales y derivadas a lo largo de una única dimensión espacial.

El procedimiento general consiste en:

Obtener las propiedades del flujo externo ( $U_e, M, P, T$ ) a lo largo de la superficie, las cuales se utilizan para obtener:

- Densidad local:

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad (17)$$

- Viscosidad dinámica:

$$\mu = \mu_o \left( \frac{T}{T_o} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{T_o + T}{T + S} \right) \quad (18)$$

Para adaptar el método al flujo compresible, se emplea la solución que integra el efecto de la aceleración del flujo desde la garganta  $x = 0$  hasta la salida. El valor de  $\theta$  en cada nodo se obtiene mediante:

$$\theta^2(x) = \frac{0.45v}{U_e^6} \int_0^x U_e^5 dx \quad (20)$$

donde  $\theta(x)$  es el espesor de cantidad de movimiento en la posición axial  $x$ ,  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido, y  $U_e$  corresponde a la velocidad del flujo externo en el borde de la capa límite.

Luego, se calcula el gradiente de velocidad local  $\frac{dU}{dx}$  empleando un esquema de diferencias finitas progresivas o centradas entre los nodos de la superficie:

$$\left(\frac{dU_e}{dx}\right)_i = \frac{U_{e,i+1} - U_{e,i}}{x_{i+1} - x_i} \quad (21)$$

Con este valor y el espesor de momento se determina el parámetro  $\lambda$ . Se evalúan las correlaciones empíricas para obtener  $H$ ,  $C_f$  y  $\delta^*$ .

$$\delta^* = H(\lambda) \cdot \theta(x) \quad (22)$$

Este enfoque permite resolver el problema de forma eficiente sin necesidad de construir mallas bidimensionales dentro de la capa límite, lo que reduce significativamente el costo computacional.

**2.1.5.4 Parámetros característicos y criterio de separación.** A partir del método se obtienen los principales parámetros que describen la capa límite:

- Espesor de desplazamiento ( $\delta^*$ ): representa la reducción efectiva del área de flujo debido a la capa límite.
- Parámetro de Thwaites ( $\lambda$ ): indica la influencia del gradiente de presión.
- Factor de forma ( $H$ ): describe la forma del perfil de velocidad.

El inicio de la separación laminar se identifica cuando el parámetro  $\lambda$  alcanza un valor crítico cercano a:

$$\lambda \approx -0.09 \quad (23)$$

Este criterio indica que el esfuerzo cortante en la pared tiende a cero, lo que sugiere que la capa límite pierde adherencia y se inicia el desprendimiento.

En aplicaciones a toberas supersónicas, este método constituye una herramienta útil para estimar de manera preliminar la evolución de la capa límite y posibles condiciones asociadas al inicio de separación, permitiendo incorporar efectos viscosos en el diseño sin incurrir en el costo computacional de simulaciones completas.

### 3. Metodología

El presente trabajo corresponde a un estudio computacional y comparativo orientado al análisis del efecto de la corrección por capa límite en el diseño de toberas supersónicas convergentes-divergentes. La metodología se basa en la implementación de algoritmos numéricos guiados por modelos teóricos establecidos y en la evaluación de su desempeño mediante simulaciones CFD.

La metodología se estructuró en cuatro etapas: definición de las condiciones de diseño de la tobera, aplicación de la corrección geométrica debido al crecimiento de la capa límite mediante el método de Thwaites, simulación numérica de ambas configuraciones (con y sin corrección) en Ansys Fluent y comparación de resultados en términos de distribución de presión, Mach y localización de la separación de flujo.

#### 3.1 Diseño geométrico de la tobera mediante el Método de las Características

En la primera etapa se trabajó con la misma geometría base empleada en la tesis de Fuentes (2019), cuya solución fue previamente contrastada mediante la comparación entre resultados obtenidos con el Método de las Características y simulaciones CFD en Ansys Fluent. En dicho trabajo se reportaron diferencias menores al 1 % en propiedades termodinámicas a la salida de la tobera, lo que respalda la consistencia del modelo numérico utilizado. Esta elección permitió establecer una base de comparación confiable, sobre la cual se incorporaron las modificaciones requeridas, garantizando coherencia entre los casos de estudio con y sin corrección.

Antes de incorporar la corrección por capa límite, se verificó el funcionamiento del código original desarrollado por Fuentes (2019). Para ello, se ejecutó la rutina base sin modificaciones y se compararon sus resultados principales con los valores reportados en dicho trabajo, incluyendo

el número de Mach de salida, el área de salida, las coordenadas del contorno y las propiedades termodinámicas en la pared.

Esta verificación permitió comprobar que la geometría inviscida obtenida mediante el Método de las Características se reproducía de forma consistente antes de introducir nuevas rutinas de cálculo. Posteriormente, la modificación del código se limitó a exportar las variables necesarias y aplicar la corrección geométrica por espesor de desplazamiento, manteniendo intacta la solución MoC original como caso base de comparación.

Se mantuvieron los mismos parámetros termodinámicos y condiciones de contorno del flujo, de modo que las diferencias observadas se atribuyen únicamente a los efectos asociados al desarrollo de la capa límite.

### **3.2 Implementación de la corrección de capa límite mediante el método de Thwaites**

En esta etapa se extendió el código de diseño de toberas supersónicas CD axisimétricas basado en el MoC desarrollado por Fuentes (2019). La modificación consistió en incorporar una corrección geométrica por capa límite en la determinación del contorno, empleando el espesor de desplazamiento calculado mediante el método integral de Thwaites. Este procedimiento permite representar, de forma indirecta, el crecimiento de la región viscosa sobre la pared sin recurrir inicialmente a simulaciones numéricas completas.

La metodología parte de la solución inviscida obtenida mediante el Método de las Características, a partir de la cual se dispone de las propiedades del flujo externo necesarias para evaluar el desarrollo de la capa límite a lo largo de la sección divergente de la tobera. Posteriormente, mediante el método integral de Thwaites, se calculan parámetros característicos como el espesor de cantidad de movimiento, el espesor de desplazamiento y el criterio de

separación, los cuales permiten estimar la influencia de la viscosidad sobre la geometría efectiva del flujo.

En este contexto, el espesor de desplazamiento  $\delta^*$  no representa el espesor físico real de la capa límite, sino una distancia equivalente asociada a la reducción del caudal efectivo producida por la región viscosa cercana a la pared. Físicamente,  $\delta^*$  puede interpretarse como el desplazamiento ficticio que tendría que experimentar la pared inviscida para generar el mismo efecto de bloqueo que produce la capa límite sobre el flujo externo.

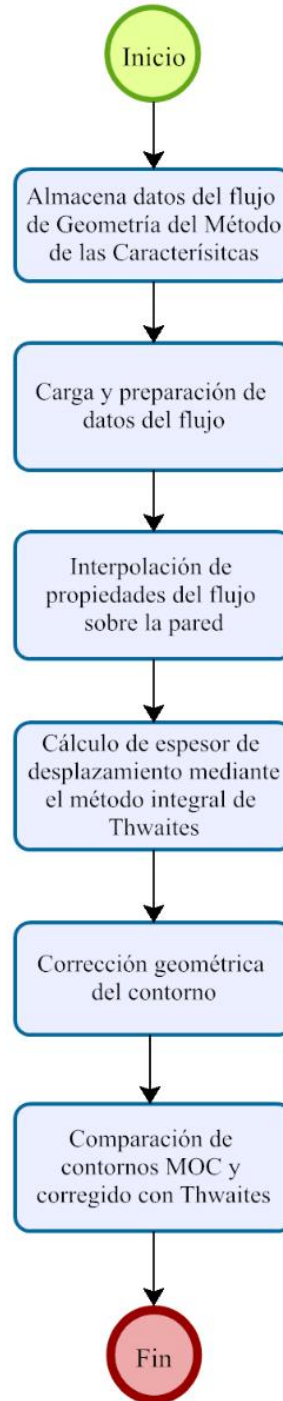
Con base en esta interpretación, la corrección geométrica se aplicó desplazando el contorno inviscido una distancia equivalente a  $\delta^*$  en cada punto axial. Esta modificación no debe entenderse como una representación directa del espesor real de la capa límite, sino como una aproximación del contorno efectivo disponible para el flujo. De esta manera, se obtiene una geometría corregida que permite evaluar el efecto preliminar del bloqueo viscoso sobre la expansión interna de la tobera.

Este procedimiento permite mantener una conexión directa entre el diseño inviscido obtenido mediante el MoC y la corrección viscosa aplicada posteriormente. De esta forma, las propiedades calculadas sobre la pared sirven como datos de entrada para estimar el crecimiento de la capa límite y modificar el contorno de manera consistente con el efecto de bloqueo producido por la región viscosa.

La Figura 6 presenta el diagrama de flujo general de la metodología implementada para la corrección geométrica mediante el método de Thwaites. Para enlazar el código MoC con el análisis de capa límite, se añadió en TDNozzle.m un bloque que exporta las variables necesarias al archivo `datos_moc_finales.mat`, como se muestra en el Apéndice A ubicado en los archivos complementarios.

**Figura 6**

*Diagrama de flujo general del código de la corrección de capa límite*

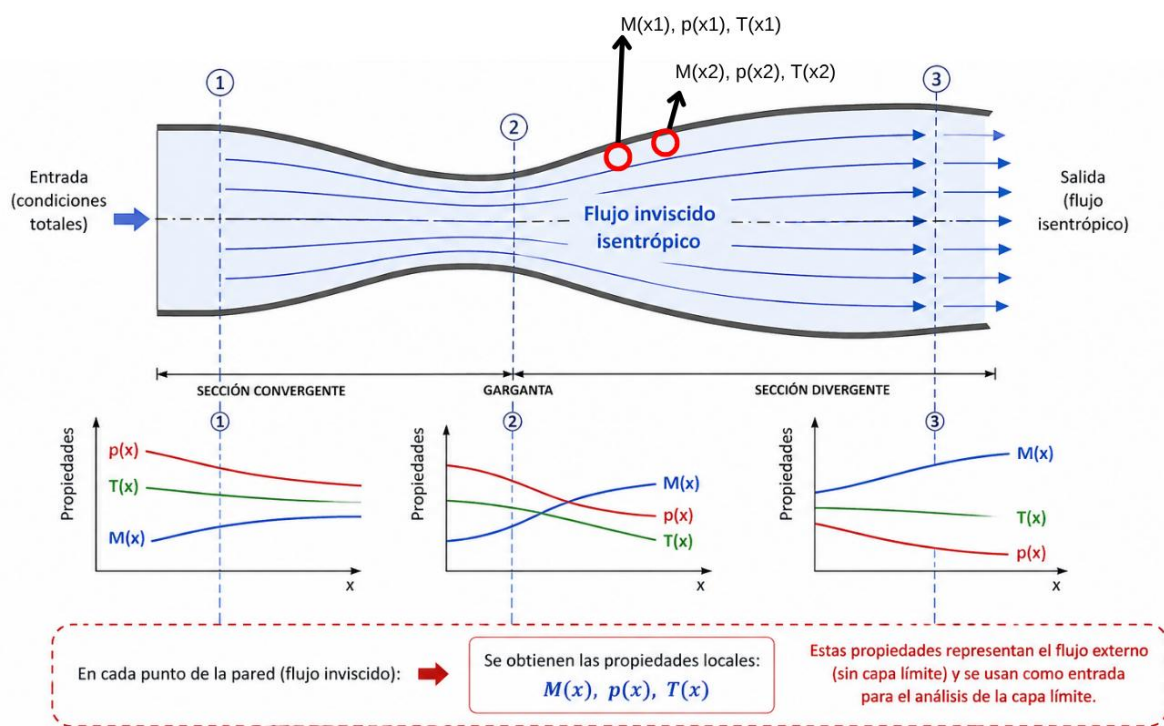


*Nota.* El diagrama corresponde a la implementación numérica del procedimiento de corrección geométrica basada en el método integral de Thwaites.

Para implementar la corrección de contorno, se desarrollaron rutinas adicionales en Matlab que leen el archivo `datos_moc_finales.mat` generado desde el código MoC. Con esta información se calcula la evolución de la región viscosa sobre la pared interna mediante el método integral de Thwaites. Si bien este método fue originalmente formulado para flujos incompresibles, en el presente trabajo se empleó una aproximación al caso compresible mediante la actualización de las propiedades termodinámicas locales del flujo en cada punto de la superficie como se muestra en la siguiente figura.

**Figura 7**

*Evaluación de propiedades locales del flujo inviscido en la pared de la tobera*



*Nota.* A partir de la solución inviscida obtenida mediante el Método de las Características, se extraen las propiedades locales del flujo (número de Mach, presión y temperatura) a lo largo de la pared de la tobera.

Como se observa en la Figura 7, la corrección se implementó conservando la estructura del método, pero utilizando propiedades locales del flujo en cada punto de la pared. En lugar de asumir valores constantes, el modelo se alimentó con información proveniente del diseño MoC, incluyendo el número de Mach, la presión y la temperatura del flujo externo, los cuales actúan como condiciones de borde para el método de Thwaites.

A partir de estas variables, la densidad se obtuvo mediante la ecuación de estado del gas ideal, la viscosidad dinámica mediante la ley de Sutherland y la velocidad a partir del número de Mach local. Con estas propiedades, se resolvió la ecuación integral de momento para estimar el espesor de desplazamiento a lo largo de la pared de la tobera.

La implementación en Matlab se realizó de forma discreta, evaluando punto a punto la solución obtenida con el MoC. Para ilustrar el procedimiento numérico, la Tabla 1 presenta la trazabilidad del cálculo en estaciones representativas de la sección divergente.

**Tabla 1**

*Seguimiento numérico de la corrección de capa límite y actualización de propiedades*

| Estación (i) | Posición x [m] | Mach local<br>(Me) | Presión (Pe)<br>[Pa] | Viscosidad ( $\mu_e$ )<br>[Pa·s] | Espesor $\delta^*$<br>[mm] |
|--------------|----------------|--------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------------|
| 1            | 0              | 1.14               | $3.36 \times 10^6$   | $7.21 \times 10^{-5}$            | 0                          |
| 14           | 0.4499         | 1.56               | $1.89 \times 10^6$   | $6.85 \times 10^{-5}$            | 0.084                      |
| 26           | 2.1480         | 2.06               | $8.38 \times 10^5$   | $6.36 \times 10^{-5}$            | 0.2232                     |
| 39           | 4.7895         | 2.42               | $4.38 \times 10^5$   | $5.99 \times 10^{-5}$            | 0.3907                     |
| 51           | 7.6673         | 2.58               | $3.25 \times 10^5$   | $5.83 \times 10^{-5}$            | 0.5698                     |

*Nota.* Ejemplo seguimiento numérico para el cálculo de la corrección de capa límite en régimen compresible

Como se observa en los datos obtenidos, el algoritmo actualiza la viscosidad dinámica ( $\mu_e$ ) y la densidad local en cada paso de integración. Esto permite que el método de Thwaites incorpore, de forma simplificada, la variación local de las propiedades del flujo en expansión, donde el aumento del número de Mach y la caída de presión dictan el crecimiento del espesor de desplazamiento  $\delta^*$ , el cual alcanza los 0.5698 mm en la sección de salida.

Por lo tanto, la corrección geométrica se realizó modificando el contorno original de la tobera a partir del espesor de desplazamiento calculado en cada punto de la pared. En este trabajo, la corrección se aplicó hacia el interior del dominio de flujo porque el espesor de desplazamiento representa una reducción del área efectiva disponible para la corriente principal. Por tanto, el desplazamiento del contorno no corresponde al espesor geométrico real de la capa límite, sino a una pared equivalente que reproduce, de forma preliminar, el efecto de bloqueo generado por la región viscosa.

Los datos de entrada del procedimiento corresponden a las propiedades del flujo inviscido obtenidas mediante el Método de las Características, específicamente las coordenadas de la pared de la tobera y las variables locales del flujo (número de Mach, presión y temperatura).

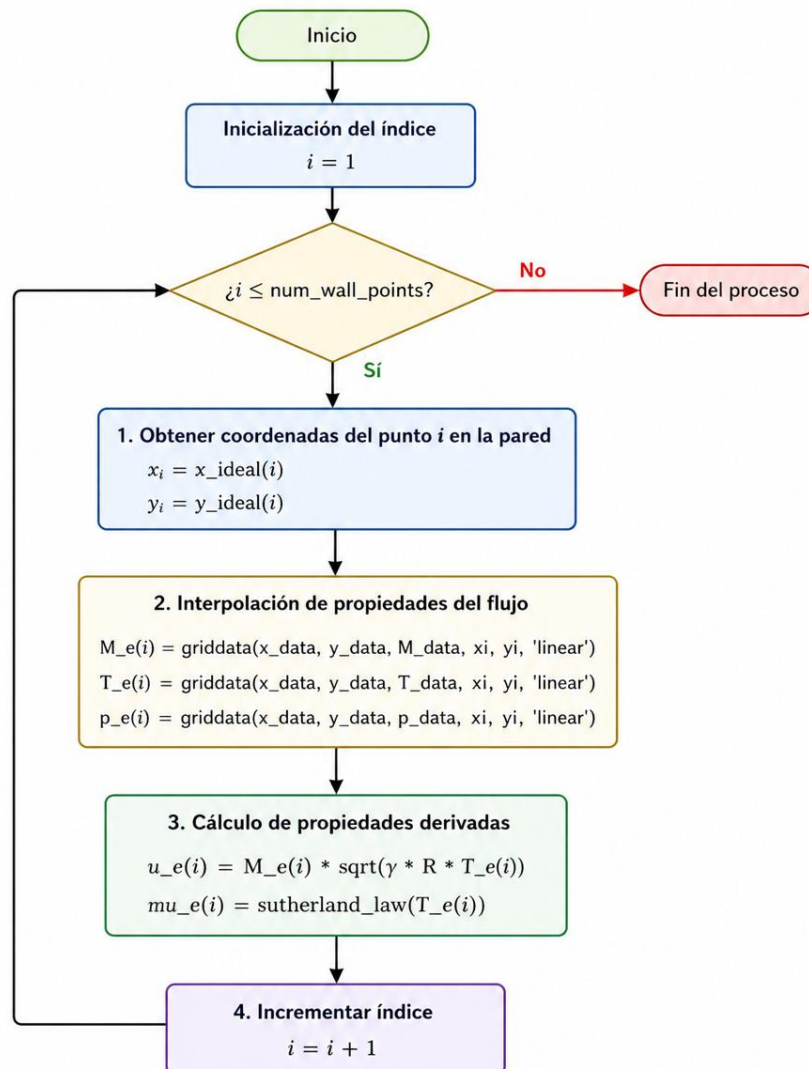
A partir de estas, se calculan propiedades derivadas como la velocidad, la densidad y la viscosidad del fluido, las cuales son necesarias para la aplicación del método integral de Thwaites. En la implementación en Matlab, estas variables se obtienen del archivo generado por el MoC y se interpolan en cada punto discreto de la pared, permitiendo evaluar localmente las condiciones del flujo.

Los códigos desarrollados para esta etapa incluyen el análisis de la corrección por capa límite, el cálculo del espesor de desplazamiento mediante Thwaites y la evaluación de la viscosidad mediante la ley de Sutherland. Estos archivos se presentan en el Apéndice B.

La Figura 8 presenta el procedimiento de cálculo empleado.

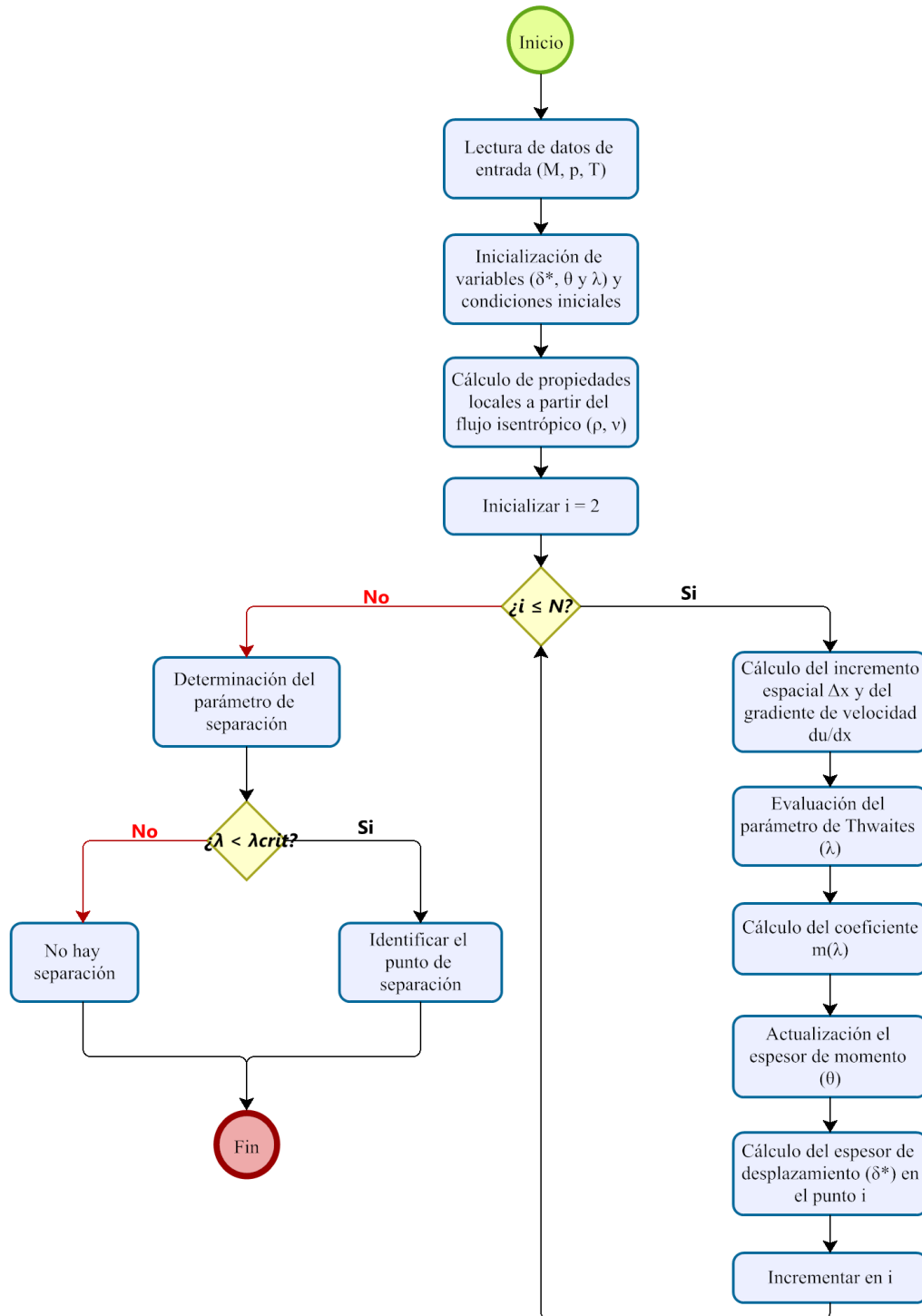
**Figura 8**

*Bucle cálculo de propiedades en cada punto de la pared*



*Nota.* Este bucle se ejecuta para todos los puntos de la pared a lo largo de la tobera.

Con el objetivo de que el procedimiento numérico empleado sea más claro, la Figura 9 presenta el diagrama de flujo correspondiente a la implementación del método integral de Thwaites. En este se detallan las etapas de interpolación de las propiedades del flujo inviscido sobre la pared de la tobera.

**Figura 9***Diagrama de flujo del código del método integral Thwaites**Nota.* Procedimiento iterativo para el cálculo del espesor de desplazamiento mediante Thwaites.

El método de Thwaites proporciona una estimación integral del efecto de la capa límite y no describe en detalle el perfil de velocidades en su interior. No obstante, su bajo costo computacional y su capacidad para capturar tendencias globales del flujo, como el crecimiento del espesor de desplazamiento y la aparición de condiciones de separación, lo convierten en una herramienta adecuada para etapas preliminares de diseño. Los resultados obtenidos se emplean posteriormente en la corrección geométrica del contorno y en la comparación con simulaciones numéricas, permitiendo evaluar la validez del enfoque adoptado.

En esta investigación se diferencia entre la estimación preliminar de la capa límite y la predicción del desprendimiento del flujo. El método de Thwaites se emplea únicamente para estimar el crecimiento del espesor de desplazamiento y modificar el contorno de la tobera; no se considera un modelo completo del flujo viscoso real. En cambio, la separación del flujo se identifica a partir de los resultados CFD, mediante la distribución de presión, el coeficiente de fricción en pared y los campos de número de Mach.

### **3.3 Simulación numérica y análisis comparativo en Ansys Fluent**

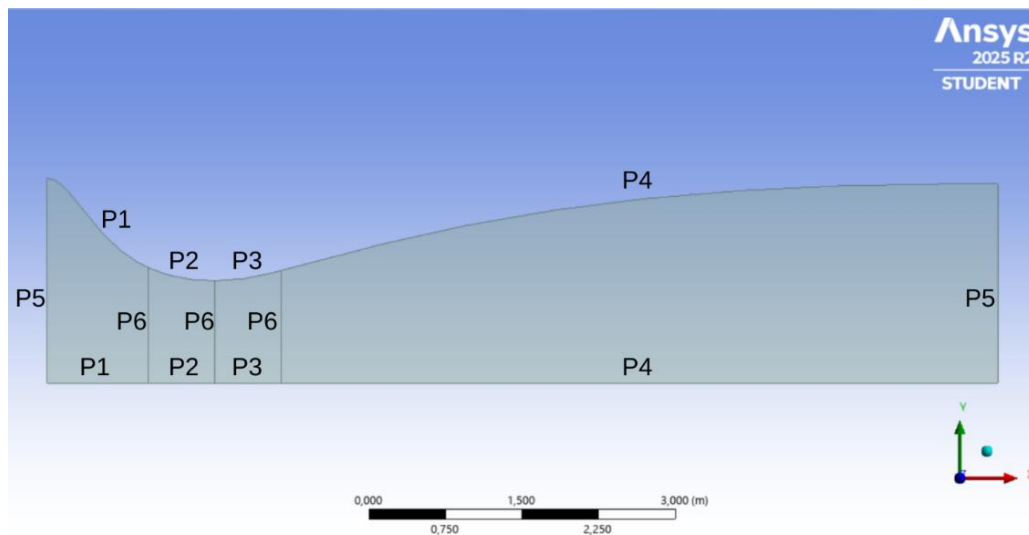
La tercera etapa consistió en la simulación numérica del flujo interno en ambas geometrías, con y sin corrección de capa límite, mediante el uso del software Ansys Fluent. El objetivo de esta etapa es evaluar el comportamiento del flujo bajo condiciones más realistas, incorporando efectos viscosos, compresibilidad y posibles fenómenos de separación que no son capturados completamente en las etapas previas de diseño.

Las coordenadas del contorno de cada tobera fueron exportadas en archivos de texto e importadas al entorno de Ansys DesignModeler, donde se construyó el dominio bidimensional axisimétrico correspondiente. Esta simplificación permite representar adecuadamente la física del problema manteniendo un costo computacional moderado.

Con el fin de garantizar una adecuada resolución del flujo, especialmente en la región cercana a la garganta donde se presentan fuertes gradientes de las propiedades (zona transónica), se introdujeron líneas de partición (*face split*) en puntos estratégicos del dominio. Adicionalmente, se numeraron los puntos del contorno para facilitar el control del mallado y asegurar una correcta distribución de los elementos en las regiones de interés. La Figura 10 muestra la geometría empleada junto con las divisiones implementadas para el proceso de mallado.

**Figura 10**

*Geometría axisimétrica de la tobera con particiones definidas para control del mallado*



*Nota.* Se muestran las regiones P1–P6 empleadas para la asignación diferenciada del tamaño de elemento en el mallado estructurado, con especial refinamiento en la zona de la garganta y la región divergente.

Posteriormente, se generó una malla estructurada, aplicando un refinamiento progresivo en la región de la pared mediante capas de inflación, técnica ampliamente utilizada en simulaciones de toberas para capturar adecuadamente el crecimiento de la capa límite. Se emplearon los siguientes parámetros de mallado:

- *First layer height:*  $1 \times 10^{-5} m$

- *Número máximo de capas:* 20
- *Growth rate:* 1.2

Asimismo, se definieron particiones específicas a lo largo del contorno, asignando un mayor número de elementos en la sección divergente y en las regiones de mayor gradiente de presión. La discretización de los bordes se realizó de la siguiente manera:

Secciones P5 y P6: 100 elementos cada una

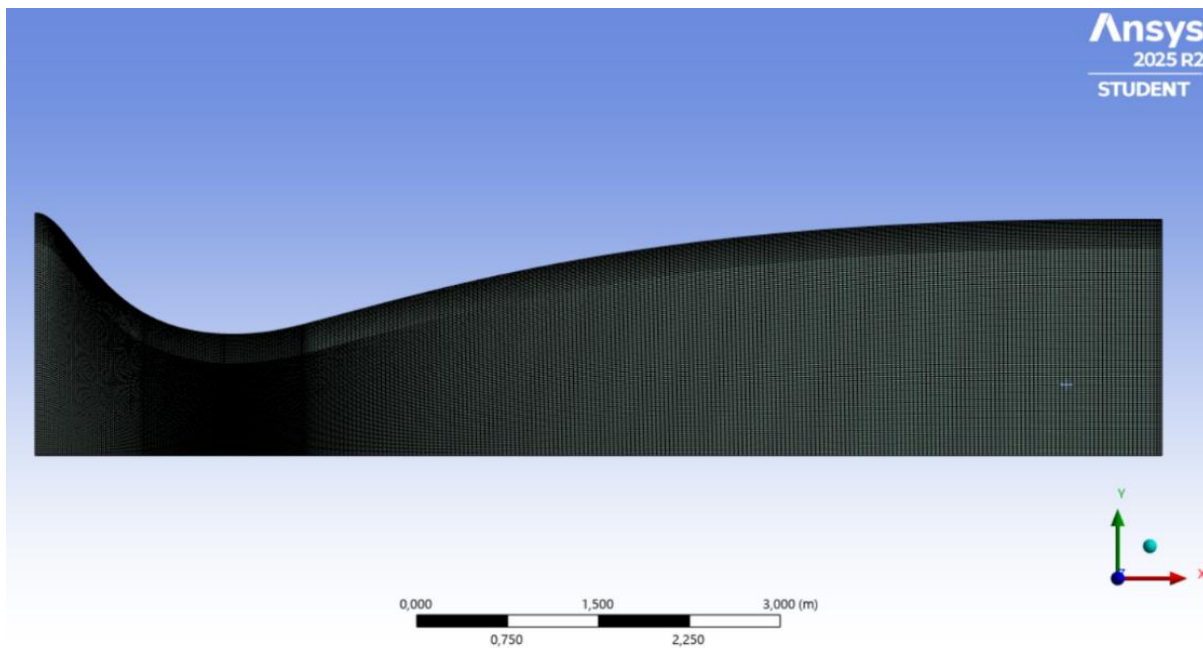
Sección divergente (P4): 200 elementos

Regiones restantes (P1, P2, P3): 50 elementos cada una

Generando la malla como se muestra en la figura 11.

**Figura 11**

*Malla estructurada con refinamiento en la región de la pared y la garganta de la tobera*



*Nota.* Se observa la aplicación de capas de inflación en la pared para capturar el desarrollo de la capa límite, así como el refinamiento en la región transónica y divergente.

Para el dominio de aire solo se realizó un sizing de 300 elementos en la parte del eje (parte inferior) con un factor Bias de 5.

En la configuración del solver se seleccionó un modelo axisimétrico bidimensional, estacionario, con formulación basada en presión (*pressure-based solver*) y doble precisión. Se activó la ecuación de energía y se empleó el modelo de turbulencia SST  $k - \omega$ , debido a su utilidad para representar flujos con gradientes adversos de presión, tendencia a la separación e interacciones choque–capa límite en regímenes compresibles.

A diferencia del modelo  $k - \varepsilon$  estándar, el cual presenta deficiencias documentadas para predecir el desprendimiento del flujo bajo fuertes gradientes de presión adversos y tiende a sobreestimar los esfuerzos cortantes frente a ondas de choque (Wilcox, 2006), el modelo SST  $k - \omega$  emplea una función de mezcla. Esta formulación activa el modelo  $k - \omega$  en la región cercana a la pared para resolver la subcapa viscosa, y transiciona suavemente al modelo  $k - \varepsilon$  en la región del flujo libre, mitigando así la alta sensibilidad del  $k - \omega$  estándar a las condiciones de frontera externas (Menter et al., 2003).

Esta capacidad resulta útil en toberas supersónicas, ya que el modelo SST  $k - \omega$  permite representar flujos con gradientes adversos de presión y tendencia a la separación. No obstante, la precisión de los resultados cercanos a la pared depende de la resolución de la malla, por lo que el análisis del coeficiente de fricción debe interpretarse considerando la verificación de  $y^+$ .

Dado que el modelo SST  $k - \omega$  es sensible a la resolución de la región cercana a la pared, se evaluó el parámetro  $y^+$  sobre la superficie interna de la tobera. El valor promedio obtenido fue  $y_{prom}^+ = 202.45$ , lo cual indica que la primera celda se encuentra fuera del rango recomendado para resolver directamente la subcapa viscosa.

Por esta razón, los resultados asociados al coeficiente de fricción en pared y a la ubicación exacta del desprendimiento deben interpretarse de manera cualitativa. En este trabajo, la separación se analiza a partir de la coherencia entre la distribución de presión, los campos de número de Mach y la tendencia del coeficiente de fricción, más que como una predicción cuantitativa exacta del punto de separación.

El aire fue modelado como gas ideal, considerando la variación de densidad asociada a los cambios locales de presión y temperatura. La viscosidad dinámica se evaluó mediante la ley de Sutherland, con el fin de representar la dependencia de la viscosidad con la temperatura en el flujo compresible. Las propiedades termodinámicas fueron las siguientes:

$$C_p = 1722.24 \left[ \frac{J}{kg} \right]$$

$$Peso\ molecular = 28 \left[ \frac{kg}{kmol} \right]$$

Las condiciones de frontera se establecieron de forma consistente con el diseño original. En la entrada se impuso una condición de flujo másico con presión y temperatura totales específicas:

$$mass_{actual} = 15280.8 \left[ \frac{kg}{s} \right]$$

$$p = 6906400 [Pa]$$

$$T = 2993.3 [K]$$

En la salida se estableció una presión estática elevada con el propósito de inducir una condición de sobreexpansión en la tobera, lo cual favorece la aparición de separación de flujo. Esta condición se genera cuando la presión de salida impuesta es mayor que la presión de diseño de la tobera, provocando un ajuste del flujo mediante la formación de ondas de choque internas y un fuerte gradiente adverso de presión que favorece la separación de la capa límite.

$$p = 954886.7 [Pa]$$

$$T = 1798.43 [K]$$

Esta condición corresponde a un NPR de 7,23, valor que se encuentra por debajo del NPR de diseño y por encima del NPR crítico, ubicando el flujo en un régimen de sobreexpansión.

La pared de la tobera se modeló con condición de no deslizamiento (*no-slip*), mientras que el eje se definió como línea de simetría.

Las variables de referencia para la normalización de los resultados se tomaron en la sección de salida.

$$\rho = 0.6294 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$$

$$p = 954886.7 [Pa]$$

$$T = 1798.43 [K]$$

$$V = 2034.41 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

$$\gamma = 1.2$$

Para la discretización espacial se empleó un esquema *second-order upwind*, el cual permite reducir la difusión numérica y mejorar la precisión en la resolución de gradientes pronunciados del flujo, siendo adecuado para capturar fenómenos como ondas de choque en flujos compresibles (Versteeg & Malalasekera, 2007). Adicionalmente, se utilizó un acoplamiento presión velocidad de tipo *coupled*, que resuelve de manera simultánea los campos de presión y velocidad, lo que favorece la estabilidad y acelera la convergencia en flujos altamente compresibles con fuertes interacciones no lineales (ANSYS Inc., 2026).

La inicialización se realizó desde la entrada del dominio. Las simulaciones se ejecutaron hasta alcanzar convergencia, permitiendo un máximo de 1500 iteraciones en ambos casos. Se monitorearon los residuos y la estabilización de variables características del flujo, como el número de Mach y la presión estática.

$$\rho = 0.6294 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$$

$$p = 6906400 [Pa]$$

$$T = 1798.43 [K]$$

$$V = 152.1 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

Finalmente, los resultados obtenidos permitieron comparar la distribución de presión, el número de Mach y la localización del desprendimiento de la capa límite en ambas geometrías, evaluando así la influencia de la corrección de contorno sobre la predicción de la separación de flujo.

### **3.4 Procedimiento de cálculo y comparación del espesor de desplazamiento entre el modelo analítico (Thwaites) y el modelo numérico (CFD)**

Como parte de la evaluación del modelo implementado, se realizó una comparación entre los resultados obtenidos mediante el método integral de Thwaites y aquellos provenientes de simulaciones CFD en Ansys Fluent. Para ello, se seleccionaron ubicaciones representativas a lo largo de la región divergente de la tobera sin corrección, en las cuales se extrajeron perfiles de velocidad, presión y temperatura.

En cada una de estas ubicaciones se definieron secciones axiales, entendidas como cortes perpendiculares al eje de la tobera, que permiten analizar la variación de las propiedades del flujo en la dirección normal a la pared.

Para ello, se empleó una coordenada adimensional, tal como se muestra en la siguiente ecuación:

$$x^* = x - x_t \quad (24)$$

$$\frac{x^*}{L_d} \quad (25)$$

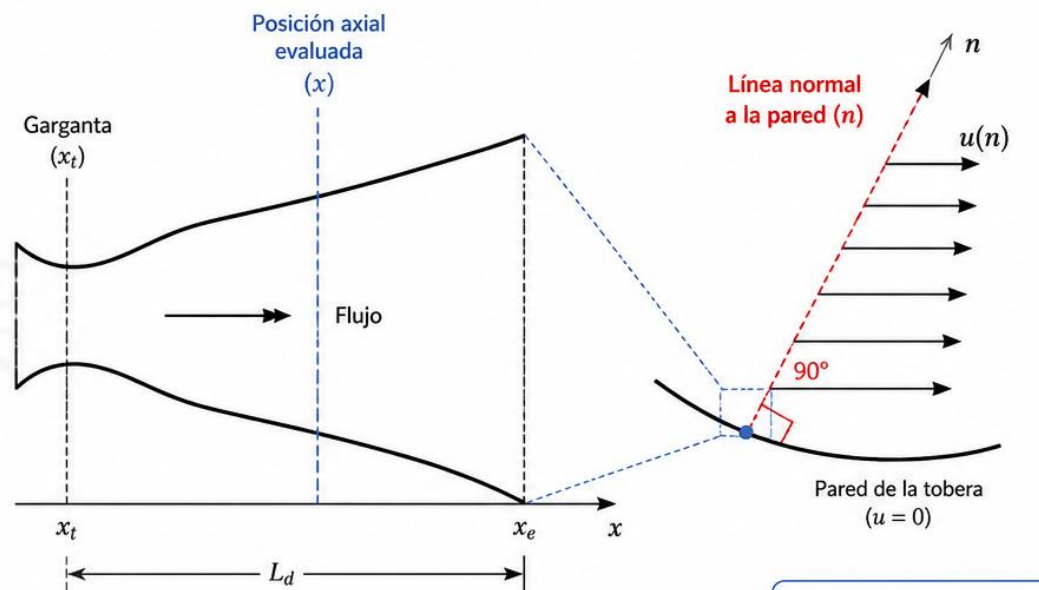
Donde:  $x_t$  = Coordenada de la garganta en x,  $L_d$  = Longitud de la parte divergente

El espesor de desplazamiento  $\delta^*$  se determinó a partir de los perfiles de velocidad obtenidos mediante simulación CFD. Para ello, se integró el perfil de velocidad normal a la pared desde la superficie sólida hasta la posición donde la velocidad alcanza el 99 % de la velocidad externa ( $U_e$ ), criterio utilizado para definir el borde de la capa límite.

Para ilustrar este procedimiento de extracción y análisis, la Figura 12 detalla esquemáticamente la ubicación de la estación axial evaluada y la dirección de la línea normal a la pared ( $n$ ) sobre la cual se extrae el perfil de velocidades en el entorno de simulación.

**Figura 12**

*Esquema de extracción de datos en el contorno divergente*

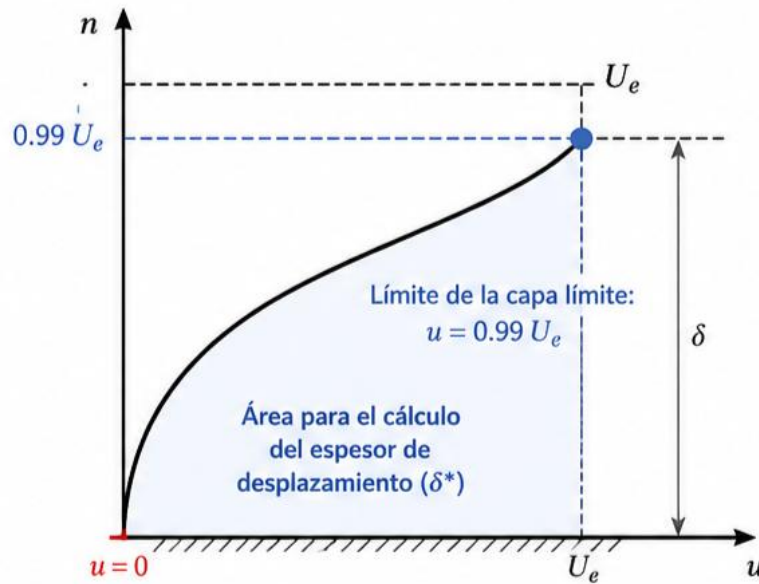


*Nota.* Representación de la estación axial y la línea normal a la pared empleada en el modelo CFD para la extracción del perfil de velocidades.

Seguidamente, la Figura 13 presenta la representación conceptual de dicho perfil extraído, indicando el límite superior de integración correspondiente al borde de la capa límite  $u = 0.99U$  y el área equivalente que define el espesor de desplazamiento.

**Figura 13**

*Representación gráfica del cálculo del espesor de desplazamiento*



*Nota.* El área sombreada ilustra la región de integración numérica hasta el límite de la capa límite ( $u = 0.99U$ ) para determinar la magnitud de  $\delta^*$

Por lo tanto, en cada ubicación axial se extrajeron los datos correspondientes al perfil de velocidad normal a la pared. Posteriormente, estos fueron almacenados en archivos independientes con nomenclatura descriptiva, tales como *vel\_x05Ld.dat*, *vel\_x20Ld.dat*, entre otros.

Para el cálculo del espesor de desplazamiento, los archivos exportados desde Ansys Fluent fueron procesados mediante rutinas de postprocesamiento desarrolladas en Matlab, incluyendo el script *postproceso\_delta\_star\_ansys.m*. Estos códigos se presentan en el Apéndice C. Para cada perfil de velocidad se identificó la posición de la pared como el punto donde la velocidad axial es aproximadamente nula, en concordancia con la condición de no deslizamiento. A partir de esta referencia, se definió la coordenada normal relativa  $h = y - y_{\text{pared}}$ , con  $h = 0$  en la pared.

La velocidad del flujo externo  $U_e$  se determinó como el valor máximo de la velocidad axial del perfil. Con el objetivo de evitar la influencia del ruido numérico del flujo libre, el cálculo del espesor de desplazamiento se restringió a la región donde la velocidad satisface  $u < 0.99 U_e$ , criterio comúnmente empleado para identificar el borde efectivo de la capa límite. Su cálculo ( $\delta^*$ ) se ejecutó mediante la definición integral exacta de acuerdo con la formulación presentada por Çengel y Cimbala en *Mecánica de fluidos: fundamentos y aplicaciones* (2021).

$$\delta^* = \int_0^{y_{max}} \left( 1 - \frac{u(y)}{U_e} \right) dy \quad (26)$$

La integración se realizó numéricamente mediante el método del trapecio, utilizando únicamente los puntos contenidos dentro de la región de capa límite. Para evitar contribuciones no físicas, los valores negativos del integrando asociados a pequeñas oscilaciones numéricas fueron eliminados.

Se realizó una comparación de tendencias entre el espesor de desplazamiento obtenido mediante el método integral de Thwaites y simulaciones CFD en Ansys mediante la normalización de los valores de  $\delta^*$  con respecto a su valor máximo a lo largo de la región divergente de la tobera. Esta normalización permite eliminar las diferencias de escala entre los métodos y centrar el análisis en la evolución relativa del crecimiento de la capa límite. El espesor de desplazamiento normalizado se definió como:

$$\delta_{norm}^* = \frac{\delta^*}{\delta_{max}^*} \quad (27)$$

donde  $\delta^*$  es el *espesor de desplazamiento local* y  $\delta_{max}^*$  corresponde al valor máximo obtenido para cada conjunto de datos. Este tipo de normalización es ampliamente utilizado en estudios de dinámica de fluidos para comparar resultados obtenidos mediante metodologías distintas,

especialmente cuando el interés radica en la tendencia del fenómeno más que en su magnitud absoluta (Schlichting & Gersten, 2017).

El criterio de comparación empleado no busca establecer una coincidencia punto a punto entre el método integral de Thwaites y los resultados CFD. En su lugar, la comparación se limita a evaluar la consistencia cualitativa de la tendencia de crecimiento del espesor de desplazamiento a lo largo de la sección divergente.

Por tanto, se considera que existe concordancia de tendencia cuando ambos enfoques muestran un aumento progresivo de  $\delta^*$  en la dirección del flujo, aun cuando sus magnitudes absolutas sean diferentes. Esta decisión responde a la distinta naturaleza de los métodos comparados: Thwaites corresponde a un modelo integral aproximado, mientras que el CFD obtiene el espesor de desplazamiento a partir de perfiles de velocidad resueltos numéricamente.

### **3.5 Métodos de verificación del modelo CFD**

Con el fin de comprobar la consistencia numérica de las simulaciones CFD realizadas en Ansys Fluent, se definieron criterios de verificación aplicables a las dos configuraciones analizadas: la tobera base diseñada mediante el Método de las Características y la tobera con corrección geométrica por capa límite mediante Thwaites.

En primer lugar, se realizó el seguimiento de los residuales RMS de las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento, energía y turbulencia. Este criterio permitió verificar que el proceso iterativo presentara una tendencia descendente y estable, sin incrementos sostenidos que indicaran divergencia numérica.

En segundo lugar, se monitorearon variables representativas del flujo, como la presión promedio, la temperatura promedio y el número de Mach máximo. La estabilización de estas

variables fue utilizada como criterio para comprobar que la solución alcanzara un comportamiento estacionario.

En tercer lugar, se evaluó el balance de masa entre la entrada y la salida del dominio computacional. Para ello se revisó el desequilibrio de masa o mass imbalance, verificando que el flujo másico neto tendiera a valores cercanos a cero. Este criterio permitió comprobar el cumplimiento de la conservación de masa dentro del dominio.

En cuarto lugar, se realizó un análisis de independencia de malla mediante el índice de convergencia de malla, GCI, usando el número de Mach máximo como variable de referencia. Este análisis permitió estimar la incertidumbre asociada a la discretización espacial y verificar que los resultados no dependieran significativamente del tamaño de la malla.

Finalmente, se revisó la coherencia física de los resultados obtenidos, analizando la distribución del número de Mach, la recuperación de presión en la pared, el coeficiente de fricción y la formación de estructuras de choque. Esta revisión permitió comprobar que el comportamiento del flujo fuera consistente con el fenómeno esperado en toberas supersónicas sobreexpandidas.

Estos criterios se aplicaron a ambas geometrías bajo condiciones de contorno equivalentes, con el fin de garantizar que la comparación entre la tobera base y la tobera corregida estuviera sustentada en soluciones numéricamente estables y físicamente coherentes.

## 4. Resultados y Análisis

### 4.1 Método integral de Thwaites

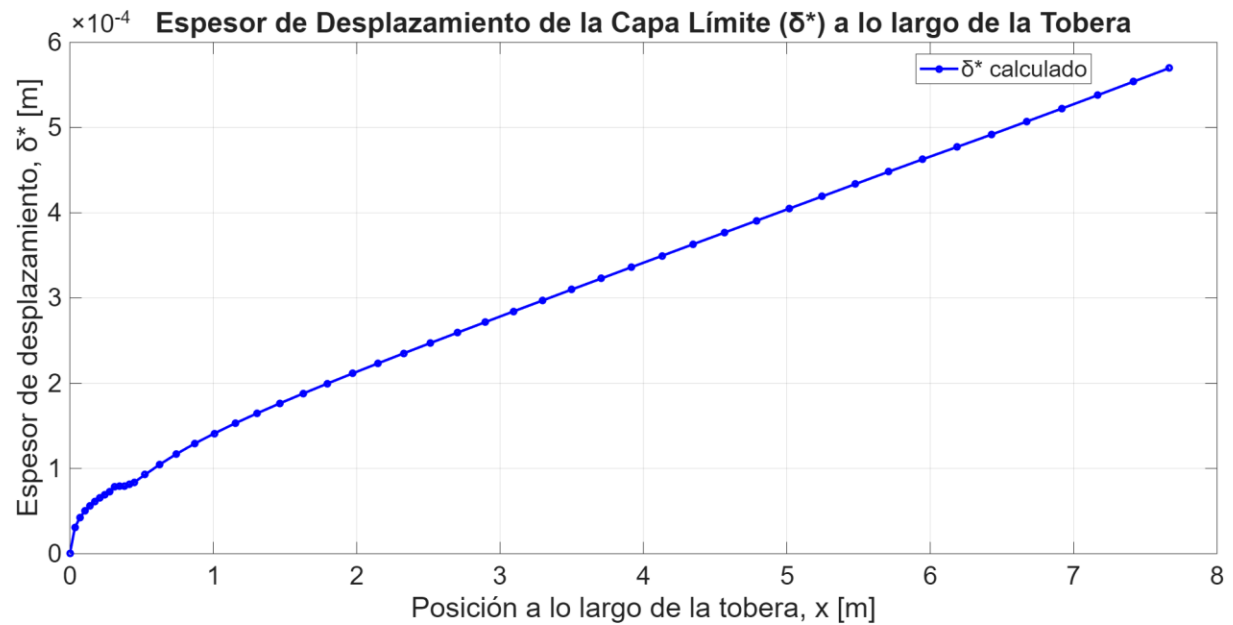
#### 4.1.1 Espesor de desplazamiento $\delta^*$

En esta sección se presentan los resultados obtenidos a partir del modelo integral de Thwaites. Este modelo se implementó mediante un código desarrollado en Matlab, el cual, permitió estimar el espesor de desplazamiento de la capa límite y analizar su influencia sobre los parámetros de desempeño del flujo.

En una tobera supersónica, el desarrollo de la capa límite está influenciado por la expansión interna, la variación de presión a lo largo de la pared y, bajo condiciones de sobreexpansión, por gradientes adversos asociados a ondas de choque internas. Estos efectos pueden favorecer el engrosamiento de la región viscosa y conducir al desprendimiento, como se discute en la literatura clásica de capa límite (Schlichting & Gersten, 2017).

Por esta razón, el análisis del espesor de desplazamiento se centra exclusivamente en la región divergente, donde los efectos viscosos resultan más relevantes para el desempeño global de la tobera.

El espesor de desplazamiento ( $\delta^*$ ), se calculó mediante el método integral de Thwaites, el cual permite estimar la evolución de la capa límite laminar a partir de la velocidad del flujo externo y su gradiente espacial (ecuación 24). Por lo tanto, la Figura 14 muestra la distribución del espesor de desplazamiento a lo largo del eje axial de la tobera. Se observa un crecimiento progresivo de  $\delta^*$  en la dirección del flujo, lo cual es consistente con el desarrollo de la capa límite sobre la pared.

**Figura 14***Espesor de desplazamiento vs x (Método de Thwaites)*

*Nota.* El espesor de desplazamiento  $\delta^*$  se obtuvo a partir de las propiedades del flujo externo isentrópico calculadas mediante el MoC. La coordenada axial x representa la posición a lo largo de la sección divergente de la tobera.

En la región cercana a la garganta, el espesor de desplazamiento presenta valores muy pequeños y un crecimiento inicial rápido. Esto se debe a que la capa límite comienza a desarrollarse desde una condición prácticamente nula, generando altos gradientes de velocidad en esta zona. Como consecuencia, la variación de  $\delta^*$  es más pronunciada y los puntos discretos aparecen más cercanos entre sí en la gráfica.

A medida que el flujo avanza a lo largo de la sección divergente, la capa límite se desarrolla progresivamente y su crecimiento tiende a estabilizarse. En esta región, la variación del espesor de desplazamiento se vuelve más uniforme, lo que se refleja en una distribución aproximadamente lineal y en una mayor separación aparente entre los puntos de la curva.

Este comportamiento es característico de una capa límite en desarrollo bajo condiciones de flujo acelerado, donde los efectos viscosos dominan el engrosamiento progresivo de la capa límite, incluso en presencia de un gradiente de presión favorable asociado a la expansión del flujo supersónico.

En este contexto, el método integral de Thwaites permite estimar de manera preliminar la tendencia global de crecimiento del espesor de desplazamiento, constituyendo una herramienta de bajo costo computacional para proponer una corrección geométrica inicial del contorno de la tobera.

#### ***4.1.2 Corrección geométrica***

A partir del código modificado, se generaron dos geometrías de la tobera supersónica CD axisimétrica: una configuración base obtenida mediante el Método de las Características y una configuración corregida por capa límite. Esta última se construyó desplazando el contorno diseñado con MoC en dirección normal hacia el interior del dominio una distancia equivalente a  $\delta^*$ , con el fin de representar de forma preliminar la reducción del área efectiva disponible para el flujo.

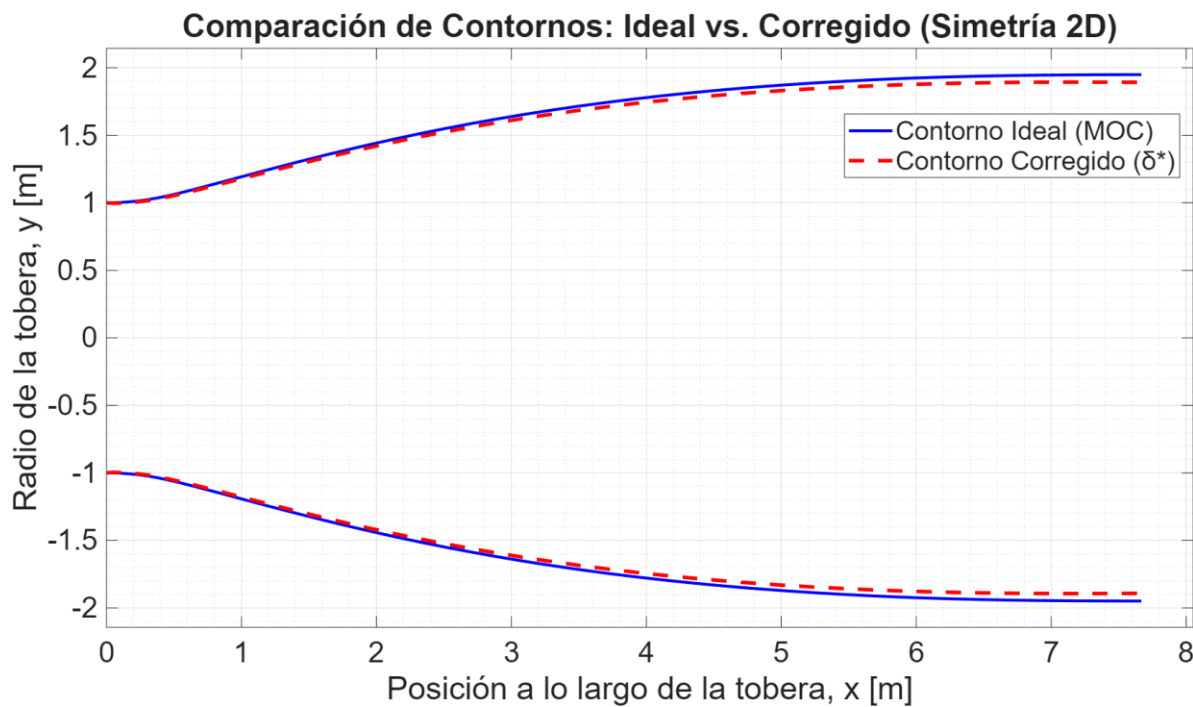
Esta modificación geométrica refleja el efecto del crecimiento de la capa límite sobre el flujo, ya que el desplazamiento del contorno reduce progresivamente la sección efectiva disponible para la expansión. Aunque la magnitud del espesor de desplazamiento es pequeña en comparación con las dimensiones globales de la tobera, su acumulación a lo largo de la pared puede generar variaciones apreciables en las propiedades del flujo, especialmente en la sección divergente.

Para asegurar una comparación consistente entre ambas configuraciones, se mantuvieron las mismas condiciones de diseño y se modificó únicamente el contorno asociado a la corrección

por capa límite. La comparación entre la geometría base MoC y la geometría corregida se muestra en la Figura 15.

**Figura 15**

*Comparación de contornos sin corrección y con corrección de capa límite.*



Nota. El contorno corregido se obtuvo a partir del espesor de desplazamiento ( $\delta^*$ ) calculado mediante el método de Thwaites. La corrección geométrica se muestra con simetría bidimensional y se ha aplicado un factor de exageración únicamente con fines de visualización.

Dado que la magnitud de  $\delta^*$  es pequeña en comparación con las dimensiones globales de la tobera, se aplicó un factor de exageración únicamente con fines de visualización. A pesar de su baja magnitud relativa, la corrección geométrica representa una disminución progresiva del área efectiva disponible para el flujo en la sección divergente, lo cual es coherente con el efecto de desplazamiento asociado al desarrollo de la capa límite. El contorno corregido conserva la

suavidad y la continuidad del perfil original, lo cual es esencial, ya que se utilizará posteriormente en simulaciones y análisis de separación del flujo.

Para verificar que las dos geometrías conservan condiciones de diseño equivalentes, se compararon los principales parámetros de salida de la tobera base MoC y de la tobera con corrección por capa límite. En particular, se analizaron el número de Mach de salida, la presión estática de salida y el área efectiva de salida, ya que estos parámetros permiten evaluar si la comparación entre configuraciones es consistente.

La Tabla 2 presenta los valores obtenidos para ambos modelos, junto con la diferencia porcentual relativa entre ellos.

**Tabla 2**

*Comparación de los parámetros de salida de la tobera MoC y tobera corregida por capa límite*

| <b>Parámetro</b>        | <b>Tobera<br/>MoC</b> | <b>Tobera con<br/>corrección</b> | <b>Diferencia<br/>porcentual</b> |
|-------------------------|-----------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| Mach de Salida          | 2.5848                | 2.5793                           | -0.2128%                         |
| Presión de Salida       | 324890                | 328210                           | 1.0219%                          |
| Área efectiva de salida | 11.935                | 11.928                           | -0.0587%                         |

Nota. La diferencia porcentual se calculó con respecto al modelo MoC.

A partir de los resultados obtenidos, se observa una disminución leve del número de Mach de salida, del orden de 0.2 %, asociada con la reducción de la sección efectiva disponible para la expansión. De manera complementaria, la presión estática aumenta aproximadamente 1 %, lo cual es coherente con una menor aceleración del gas al incorporar el efecto del espesor de desplazamiento.

Por su parte, el área efectiva de salida disminuye menos de 0.1 %. Aunque esta modificación geométrica es pequeña frente a las dimensiones globales del conducto, produce cambios medibles en las propiedades de salida. Estos resultados indican que el contorno corregido representa de manera más realista el efecto viscoso sin alterar de forma significativa el diseño global.

Adicionalmente, el efecto de la corrección geométrica puede interpretarse en términos de desempeño global de la tobera. Aunque las variaciones en los parámetros de salida son de baja magnitud, estas tienen un impacto acumulativo en el empuje generado. En este sentido, los resultados obtenidos muestran una variación limitada del empuje para la geometría corregida. Por tanto, la corrección geométrica se interpreta principalmente como una herramienta para analizar cambios en la estructura del flujo y en la predicción del desprendimiento, más que como una optimización directa del desempeño global. Un análisis detallado del empuje se presenta en la Sección 4.5.

## **4.2 Análisis del espesor de desplazamiento**

### ***4.2.1 Resultados CFD***

Las secciones axiales fueron seleccionadas con base en la evolución física de la capa límite a lo largo de la tobera. Se definieron cinco ubicaciones representativas aguas abajo de la garganta, abarcando el inicio de la región de aceleración, el régimen de flujo completamente supersónico y la zona cercana a la salida, donde los efectos de la capa límite son más pronunciados:  $x^*/L_d = 0.05, 0.2, 0.4, 0.6$  y  $0.75$

En este contexto,  $L_d$  fue definido a partir del código desarrollado en Matlab como 7.6673 m, correspondiente a la longitud de la región divergente medida desde la garganta.

Se resuelve la ecuación para cada caso:

$$S1: x = x_t + 0.05L_d = 1.637 + 0.05 * 7.6673 = 2.0204 \text{ [m]}$$

$$S2: x = x_t + 0.2L_d = 1.637 + 0.2 * 7.6673 = 3.1705 \text{ [m]}$$

$$S3: x = x_t + 0.4L_d = 1.637 + 0.4 * 7.6673 = 4.7039 \text{ [m]}$$

$$S4: x = x_t + 0.6L_d = 1.637 + 0.6 * 7.6673 = 6.2373 \text{ [m]}$$

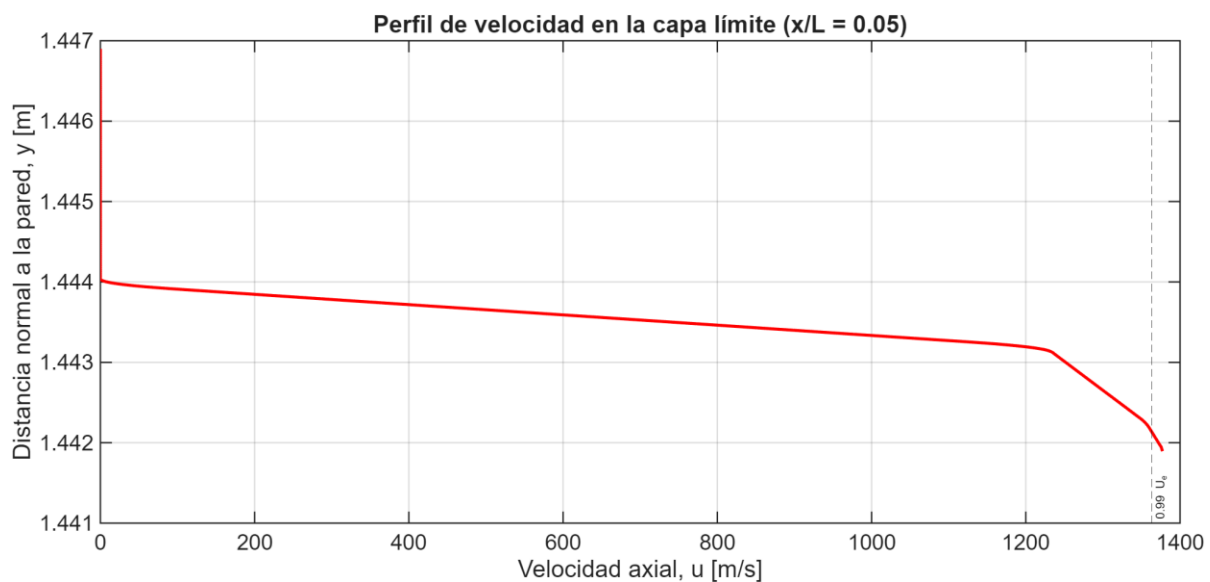
$$S5: x = x_t + 0.75L_d = 1.637 + 0.75 * 7.6673 = 7.3875 \text{ [m]}$$

A partir de los resultados obtenidos mediante CFD, se verificó que para  $y_{max} = 0.005m$  el perfil de velocidad se encontraba fuera de la capa límite, y que valores superiores no generaban variaciones apreciables en el valor de  $\delta^*$ .

La Figura 16 presenta el perfil de velocidad axial obtenido sobre una línea normal al contorno de la tobera, correspondiente a la posición  $x/L=0.05$  dentro de la región divergente. En la gráfica se muestra la variación de la velocidad axial  $u$  en función de la coordenada normal  $y$ .

**Figura 16**

*Perfil de velocidad axial*



Nota. Gráfica de Ansys Fluent de una línea normal al contorno de la tobera.

Se identifica una zona cercana a la pared de la tobera donde la velocidad axial es prácticamente nula, seguida de un aumento progresivo hasta alcanzar un valor casi constante correspondiente al flujo externo. Este comportamiento es característico de la capa límite viscosa, debido a la condición de no deslizamiento en la pared.

Asimismo, se observa que la capa límite se desarrolla hacia valores menores de la coordenada normal, lo que genera una región de velocidad reducida cada vez más extensa. Este patrón se mantiene en los perfiles obtenidos en distintas posiciones axiales, evidenciando el crecimiento progresivo de la capa límite a lo largo de la tobera.

### Cálculo del espesor de desplazamiento

Con el procedimiento descrito en la sección metodológica, se determinó el espesor de desplazamiento  $\delta^*$  en cinco posiciones axiales a lo largo de la región divergente de la tobera. Para facilitar el contraste entre ambos enfoques, la Tabla 3 presenta conjuntamente los valores obtenidos a partir de las simulaciones en Ansys Fluent y mediante el modelo integral de Thwaites.

**Tabla 3**

*Espesor de desplazamiento ( $\delta^*$ ) obtenido mediante Ansys Fluent y el modelo de Thwaites*

| Posición |        | Ansys Fluent    | Thwaites        |
|----------|--------|-----------------|-----------------|
| x/L      | x[m]   | $\delta^*$ [mm] | $\delta^*$ [mm] |
| 0.05     | 20.204 | 34.236          | 0.21472         |
| 0.2      | 31.705 | 3.872           | 0.28909         |
| 0.4      | 47.039 | 41.929          | 0.38537         |
| 0.6      | 62.374 | 43.158          | 0.48022         |
| 0.75     | 73.875 | 43.221          | 0.57637         |

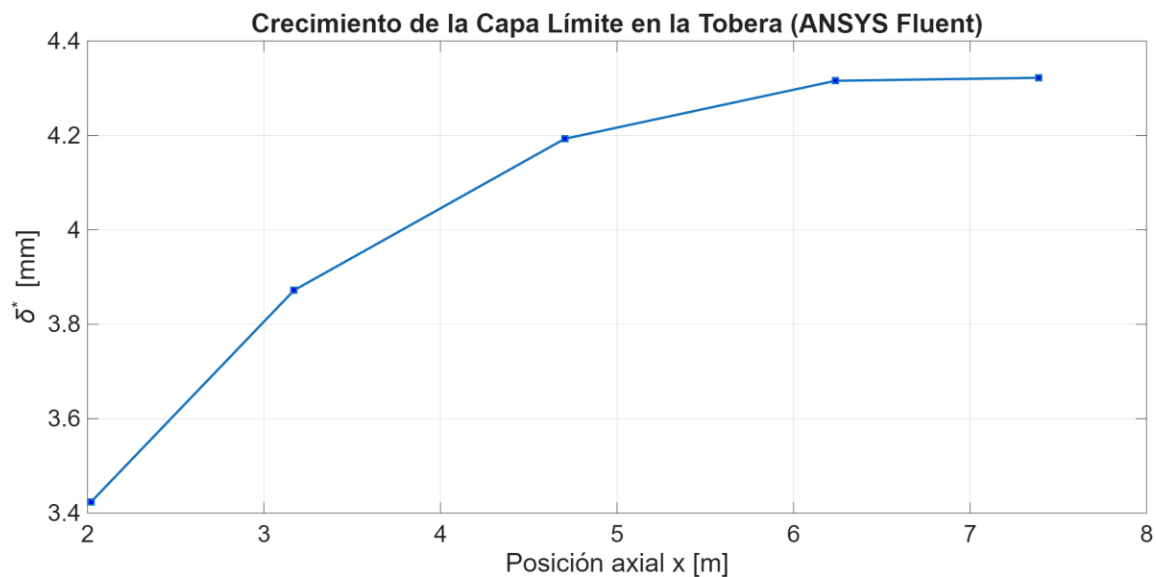
*Nota.*  $\delta^*$  calculado mediante integración numérica de los perfiles de velocidad CFD, considerando como borde de la capa límite el criterio.

$$u = 0.99U_e \quad (28)$$

A partir de los resultados obtenidos mediante Ansys Fluent, se observa la evolución del espesor de desplazamiento en la geometría de la tobera MoC, como se muestra en la Figura 17.

**Figura 17**

*Espesor de desplazamiento de la tobera MoC según Ansys Fluent.*



*Nota.* Los valores de  $\delta^*$  aumentan a lo largo de la zona divergente y tienden a estabilizarse al final. Datos de Ansys Fluent.

#### 4.2.2 Alcance del modelo de Thwaites frente a los resultados CFD

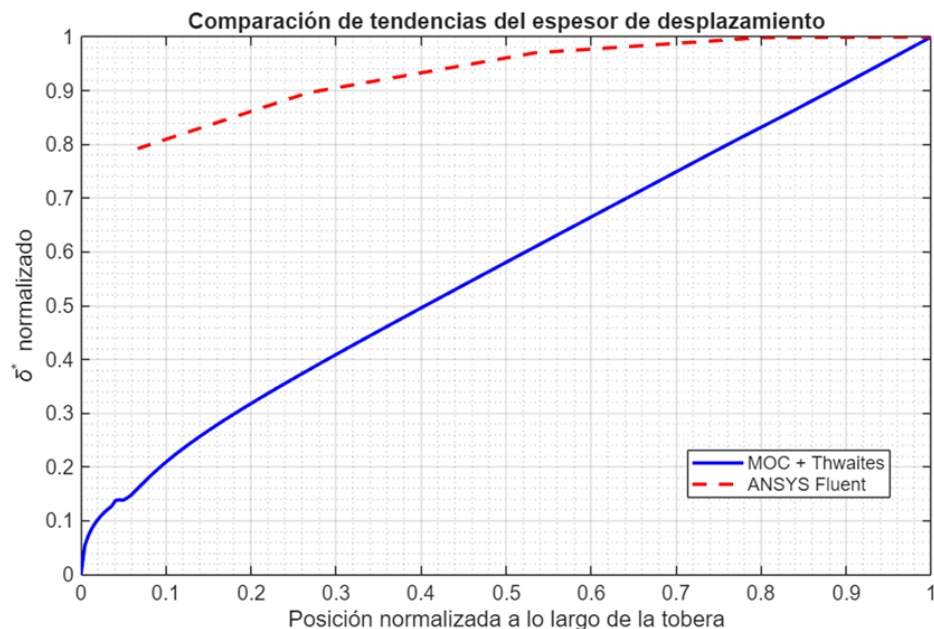
Con el fin de evaluar el alcance del modelo integral implementado, se contrastaron los resultados obtenidos mediante el método de Thwaites con aquellos provenientes de la simulación numérica. Debido a que el método de Thwaites corresponde a un modelo integral aproximado, mientras que el modelo CFD resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas mediante un enfoque RANS con modelo de turbulencia SST  $k-\omega$ , no se espera una coincidencia exacta en los valores absolutos de  $\delta^*$  (Thwaites, 1949; White, 2011). Por esta razón, la comparación entre ambos

enfoques se orienta principalmente al análisis de la tendencia de crecimiento del espesor de desplazamiento a lo largo de la sección divergente.

Esto permite evaluar si el modelo integral reproduce de manera cualitativa la tendencia global de crecimiento de la capa límite, sin asumir equivalencia cuantitativa con los resultados CFD. La comparación se presenta en la Figura 18.

**Figura 18**

*Comparación de tendencias espesor de desplazamiento a lo largo de la tobera*



*Nota.* Comparación normalizada de la evolución relativa del espesor de desplazamiento. La normalización permite comparar tendencias, pero no representa coincidencia en magnitud entre ambos métodos.

Como se observó en la Tablas 3, el método integral de Thwaites no reproduce la magnitud del espesor de desplazamiento obtenido mediante CFD. En las estaciones evaluadas, los valores calculados a partir de los perfiles de velocidad CFD se encuentran entre 3.4236 mm y 4.3221 mm, mientras que los valores estimados mediante Thwaites varían entre 0.21472 mm y 0.57637 mm.

Por ejemplo, en la estación  $x = 7.3875$  m, el valor obtenido mediante CFD es aproximadamente 7.5 veces mayor que el calculado con Thwaites. Por tanto, este contraste no debe interpretarse como una validación cuantitativa del modelo integral.

No obstante, ambos métodos presentan una tendencia creciente del espesor de desplazamiento a lo largo de la región divergente. En el CFD, el crecimiento tiende a estabilizarse hacia la salida, mientras que Thwaites muestra un aumento continuo, acorde con su formulación simplificada. Esta concordancia cualitativa permite emplear el modelo integral como una herramienta preliminar para introducir una corrección geométrica basada en el crecimiento relativo de la capa límite, sin asumir equivalencia física punto a punto con los resultados CFD.

En consecuencia, la corrección geométrica basada en Thwaites debe interpretarse como una modificación preliminar de diseño, no como una reconstrucción exacta del espesor de desplazamiento real. La validez del enfoque se evalúa posteriormente mediante el comportamiento CFD de la geometría corregida, observando si la modificación del contorno produce cambios físicamente coherentes en la presión de pared, el número de Mach, el coeficiente de fricción y la región asociada al desprendimiento.

Las diferencias observadas se atribuyen principalmente a las hipótesis del método de Thwaites, originalmente formulado para capas límite laminares. Aunque en este trabajo se incorporan propiedades locales del flujo para aproximar el efecto de la compresibilidad, el modelo conserva una formulación integral simplificada. En contraste, el CFD permite representar con mayor detalle la turbulencia, la curvatura geométrica, los gradientes de presión, la compresibilidad y la interacción choque–capa límite.

Como señalan Cebeci y Bradshaw (1977), los métodos integrales permiten estimar parámetros globales de la capa límite, pero pueden diferir de soluciones más completas cuando

existen gradientes de presión intensos, efectos turbulentos o variaciones importantes de las propiedades del flujo.

En consecuencia, el uso de Thwaites en este trabajo se limita a una estimación preliminar del efecto de desplazamiento de la capa límite sobre el contorno de la tobera. Su pertinencia no se evalúa por coincidencia puntual con el CFD, sino por su capacidad para generar una corrección geométrica que posteriormente produce cambios físicamente coherentes en la distribución de presión, el número de Mach, el coeficiente de fricción y la ubicación de la separación del flujo.

### **4.3 Comparación CFD entre geometrías**

Con el objetivo de evaluar el efecto de la corrección geométrica de la capa límite sobre el comportamiento del flujo, se realizaron simulaciones numéricas del flujo interno en una tobera convergente-divergente. Estas simulaciones permiten incorporar de manera explícita los efectos de la viscosidad y la turbulencia, los cuales, durante la etapa de diseño basada en el método de Thwaites, son considerados de forma aproximada mediante un enfoque integral.

El análisis se llevó a cabo en dos configuraciones geométricas: la tobera base diseñada mediante el MoC, bajo el supuesto de flujo inviscido, y la tobera con corrección geométrica, obtenida a partir del espesor de desplazamiento de la capa límite. La comparación entre ambas geometrías se realizó bajo condiciones de contorno equivalentes, de manera que las diferencias observadas en los resultados puedan atribuirse directamente al efecto de la corrección viscosa incorporada en la etapa de diseño.

#### ***4.3.1 Distribución del número de Mach***

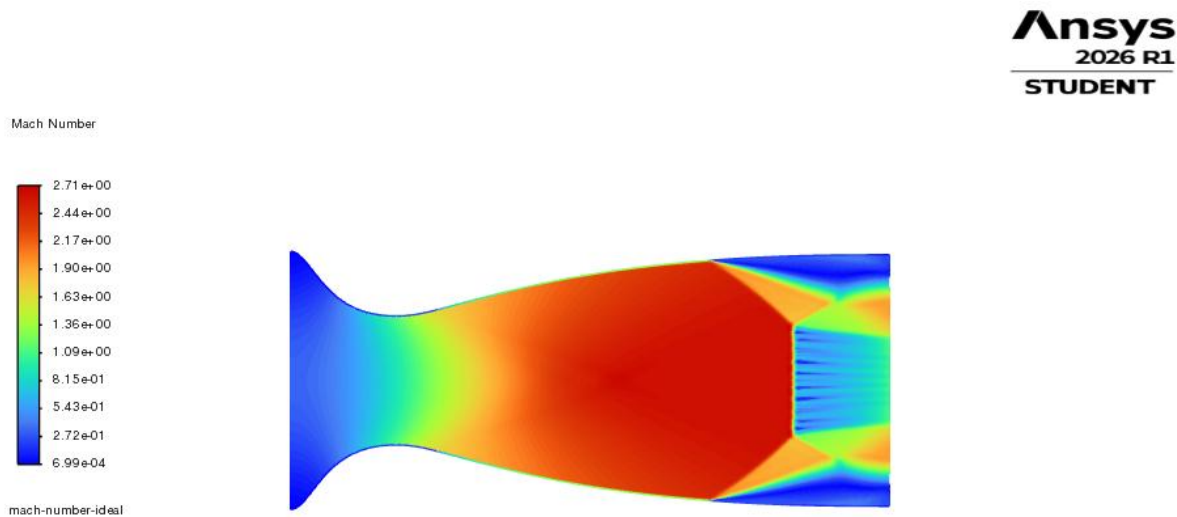
Con el fin de analizar el comportamiento global del flujo dentro de la tobera y establecer un marco de referencia para la evaluación del desprendimiento de la capa límite, se estudió la distribución del número de Mach obtenida a partir de las simulaciones para ambas geometrías.

Este parámetro permite identificar las regiones de aceleración y desaceleración del flujo, así como la posible aparición de ondas de choque internas que afectan la estabilidad del flujo cercano a la pared.

La Figura 19 presenta la comparación de la distribución del número de Mach a lo largo de la tobera para la tobera basada en MoC.

### Figura 19

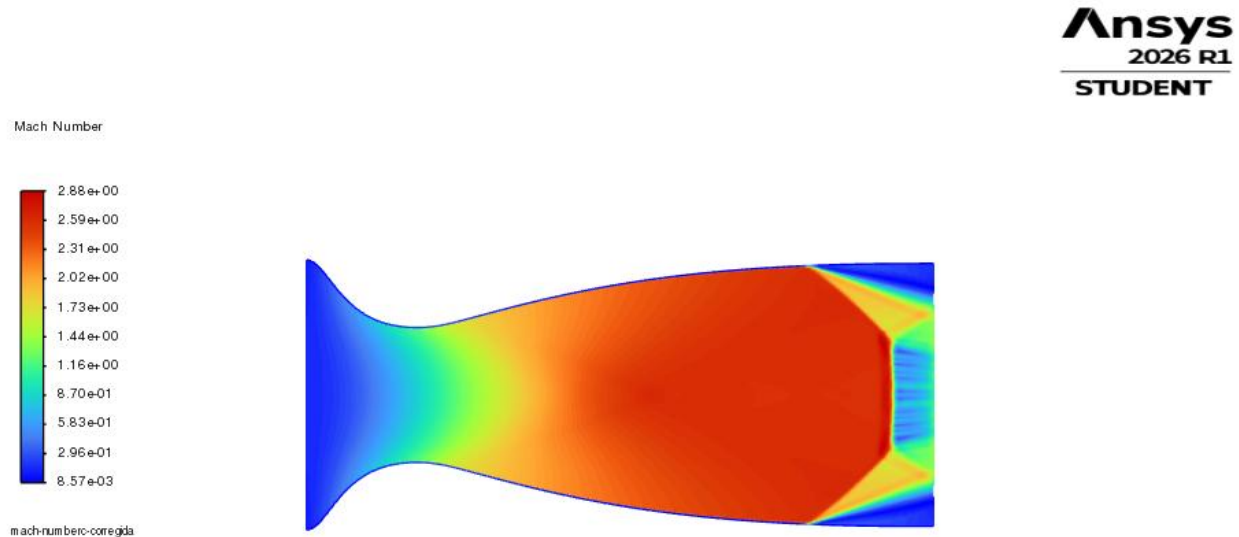
*Distribución del número de Mach en la geometría basada en MoC*



Nota. Se observa la aceleración supersónica del flujo y la aparición de una región de separación asociada a la interacción choque–capa límite en la sección divergente.

**Figura 20**

*Distribución del número de Mach en la geometría con corrección de capa límite (Thwaites)*



*Nota.* La corrección geométrica por capa límite retrasa la aparición de la separación del flujo, modificando la distribución del número de Mach en la sección divergente.

En ambos casos se observa la aceleración del flujo desde condiciones subsónicas antes de la garganta hasta un régimen supersónico en la sección divergente, en concordancia con el comportamiento esperado de una tobera convergente-divergente bajo condiciones de diseño. Sin embargo, en la tobera sin corrección se evidencia la aparición de ondas de choque oblicuas asociadas a gradientes de presión adversos, las cuales interactúan con la capa límite y generan una separación prematura del flujo cerca de la pared.

Por el contrario, la tobera corregida mediante el espesor de desplazamiento presenta una distribución del número de Mach con diferencias apreciables respecto a la geometría base. En este caso, la región asociada al desprendimiento se desplaza aguas abajo y presenta menor extensión en los contornos CFD. Este comportamiento indica que la corrección geométrica modifica la

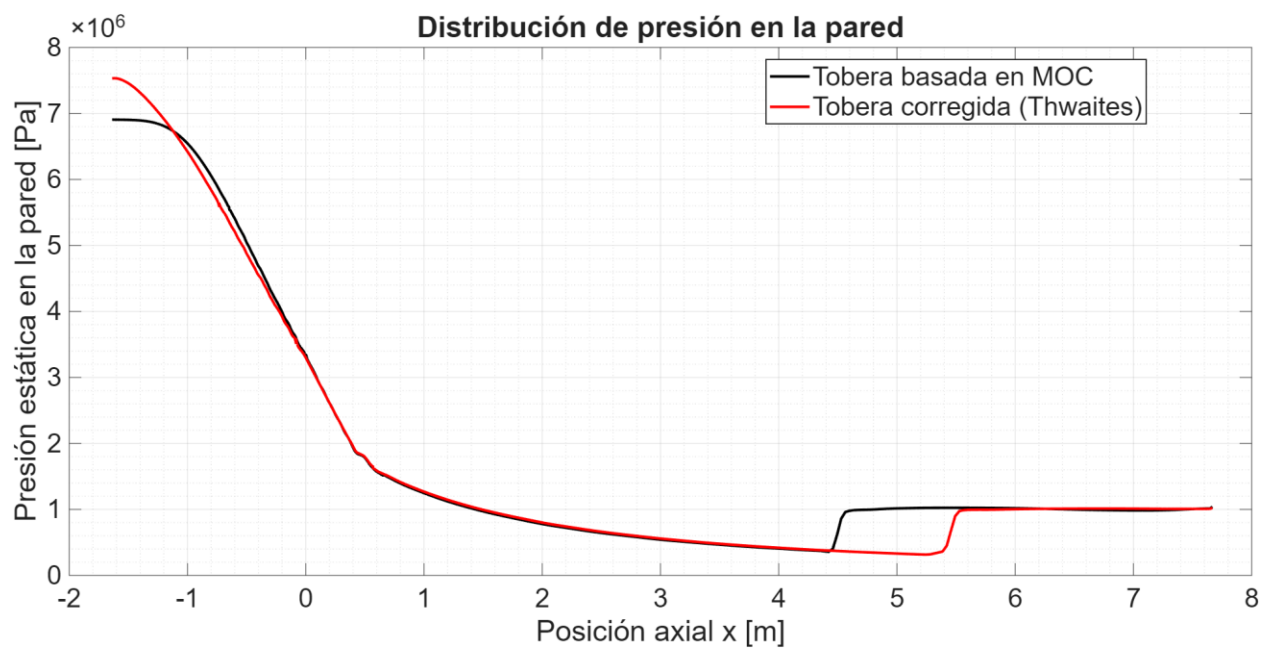
estructura interna del flujo y afecta la ubicación de la interacción choque-cap límite, sin que ello implique una optimización definitiva del desempeño de la tobera.

#### 4.3.2 Distribución de Presión en la pared

La distribución de la presión estática a lo largo de la pared de la tobera es un indicador clave para identificar fenómenos de separación en flujo supersónico. En la Figura 21 se presenta la comparación entre ambas configuraciones geométricas, con el fin de analizar las diferencias en el comportamiento del flujo.

**Figura 21**

*Distribución de la presión estática a lo largo de la pared de la tobera para las dos configuraciones*



*Nota.* El eje horizontal representa la posición axial a lo largo de la tobera, mientras que el eje vertical corresponde a la presión estática en la pared. Resultados obtenidos mediante simulaciones CFD en Ansys Fluent.

En la región divergente, la presión disminuye progresivamente como resultado de la expansión supersónica. Sin embargo, se observa que los valores de presión son ligeramente menores en la geometría corregida, lo cual se asocia con una mayor aceleración del flujo cerca de la pared debido a la reducción del área efectiva.

Hacia la parte final de la sección divergente se evidencia un incremento de presión en ambas configuraciones, asociado a la presencia de una onda de choque normal. Este fenómeno genera una interacción con la capa límite que favorece la separación del flujo. En el caso de la geometría base, la recuperación de presión ocurre más tempranamente, mientras que en la geometría corregida este incremento se desplaza aguas abajo. Este comportamiento indica que la corrección geométrica atenúa el efecto del gradiente de presión adverso, permitiendo una expansión más estable antes de la separación.

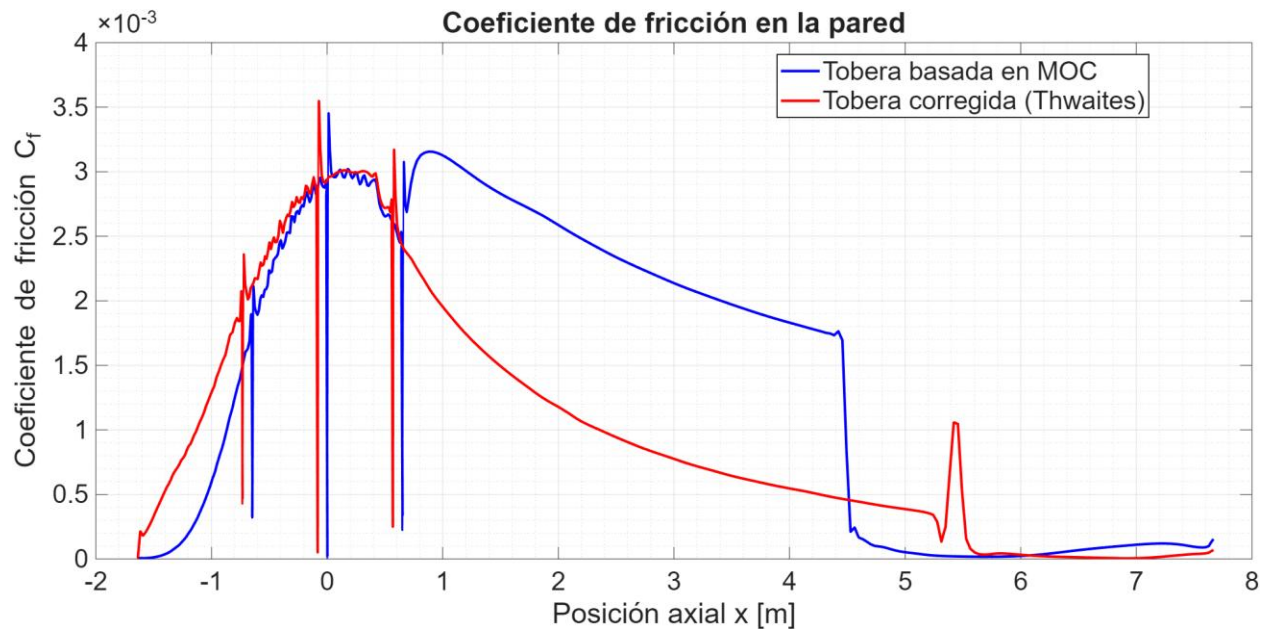
En conjunto, los resultados muestran que la modificación del contorno influye directamente en la distribución de presión, desplaza la región asociada a la interacción choque-capla límite y modifica la predicción del comportamiento del flujo en la sección divergente.

#### ***4.3.3 Coeficiente de fricción ( $C_f$ ) en la pared***

El análisis del coeficiente de fricción en la pared permite evaluar de manera directa la evolución de la capa límite a lo largo de la tobera y constituye un criterio fundamental para la identificación de regiones con posible desprendimiento del flujo. En la Figura 22 se presenta la distribución del coeficiente de fricción en función de la coordenada axial, comparando los resultados obtenidos para la geometría sin corrección (azul) y para la geometría corregida por capa límite (rojo), superpuestos en una misma gráfica.

**Figura 22**

*Gráfica comparativa del coeficiente de fricción en la pared de la tobera para las dos configuraciones*



*Nota.* La disminución progresiva del coeficiente de fricción  $c_f$  refleja el debilitamiento del esfuerzo cortante en la pared, mientras que valores próximos a cero indican la posible localización del desprendimiento de la capa límite debido a gradientes de presión adversos.

En la sección convergente, el coeficiente de fricción aumenta progresivamente debido al incremento del gradiente de velocidad cerca de la pared, alcanzando valores máximos en la zona próxima a la garganta. Este comportamiento es consistente con la aceleración del flujo y el adelgazamiento de la capa límite. En esta región, la geometría corregida presenta valores ligeramente superiores, lo que refleja una mayor influencia de los efectos viscosos.

A partir de la garganta, en la sección divergente, las diferencias se vuelven más notorias. En la geometría base, el coeficiente de fricción se mantiene elevado durante una mayor distancia

antes de presentar una caída abrupta, lo que sugiere un desprendimiento repentino del flujo debido a un gradiente de presión adverso pronunciado.

Por el contrario, en la geometría corregida se observa una disminución más gradual del coeficiente de fricción a lo largo de la región divergente. Esta tendencia indica una reducción progresiva del esfuerzo cortante en la pared y sugiere que el flujo se adapta de manera más suave al gradiente de presión adverso. El punto en el cual  $c_f$  se aproxima a cero, lo cual indica que el inicio del desprendimiento se desplaza aguas abajo respecto a la geometría sin corrección, evidenciando que la corrección geométrica contribuye a retrasar la separación de la capa límite.

Finalmente, aguas abajo de la región de desprendimiento, ambas curvas presentan valores muy bajos de  $c_f$ , lo que confirma la existencia de una zona de flujo separado con escaso intercambio de cantidad de movimiento entre el fluido y la pared. Este resultado es coherente con el comportamiento observado en la distribución de presión en pared y sugiere que la corrección basada en el método integral de Thwaites, aunque aproximada, captura adecuadamente la tendencia global del desarrollo de la capa límite y su influencia sobre la estabilidad del flujo interno.

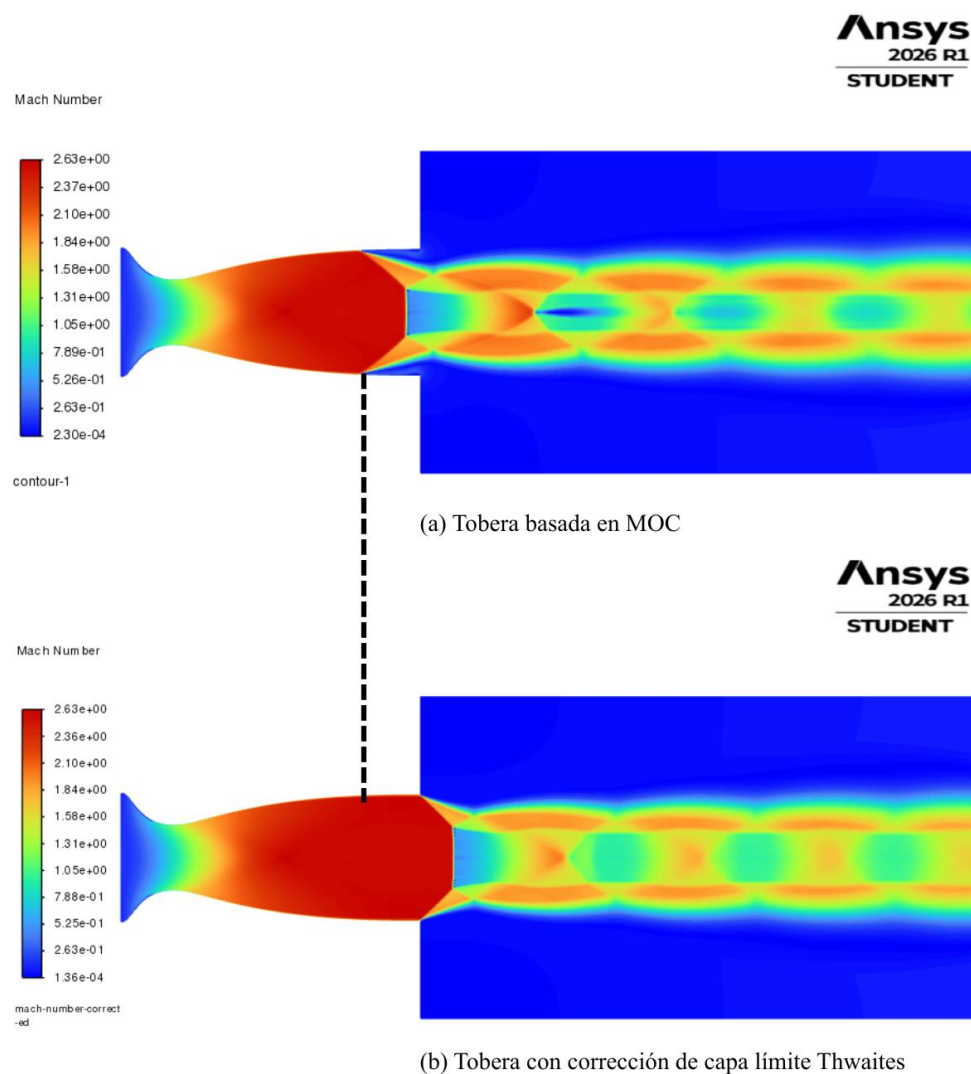
#### ***4.3.4 Análisis de las geometrías con dominio de aire (flujo externo)***

Con el fin de analizar el comportamiento del flujo fuera de la tobera, se extendió el dominio de simulación incluyendo una región de aire alrededor de la salida. Esta configuración permite capturar la interacción entre el chorro supersónico y el ambiente, así como la formación de estructuras de choque externas características de regímenes sobreexpandidos, las cuales no pueden ser observadas cuando el dominio se limita únicamente al interior de la tobera.

La Figura 23 presenta el campo de Mach obtenido mediante simulaciones CFD, donde se comparan la geometría base generada mediante el Método de las Características y la geometría con corrección de capa límite, ambas bajo las mismas condiciones de operación.

### Figura 23

*Comparación de la distribución del número de Mach entre las geometrías sin corrección y con corrección de capa límite*



*Nota.* Distribución del número de Mach obtenida mediante simulación en Ansys Fluent. Ambas configuraciones fueron evaluadas bajo las mismas condiciones de operación.

En las dos configuraciones se observa la aceleración del flujo desde condiciones subsónicas en la sección convergente hasta un régimen supersónico en la región divergente, alcanzando valores máximos de Mach cercanos a 2.6 en la salida de la tobera. Este comportamiento es consistente con el proceso de expansión esperado en toberas convergente–divergente operando bajo condiciones de sobreexpansión.

Al considerar el dominio extendido, se evidencia la formación de estructuras periódicas de choque en el exterior de la tobera, asociadas a la adaptación del chorro supersónico a la presión del ambiente. En la geometría basada en MoC, estas estructuras aparecen inmediatamente a la salida y presentan una mayor intensidad, con una contracción más pronunciada del núcleo supersónico, lo que indica una interacción más fuerte entre el chorro y el entorno.

Por otro lado, en la geometría con corrección de capa límite se observa un núcleo supersónico más uniforme y ligeramente más extendido aguas abajo. Las estructuras de choque externas se presentan con menor intensidad y mayor espaciamiento, lo que sugiere una transición más gradual del flujo hacia las condiciones del ambiente. Esta diferencia indica que la corrección geométrica favorece una mejor adaptación del flujo a la presión externa.

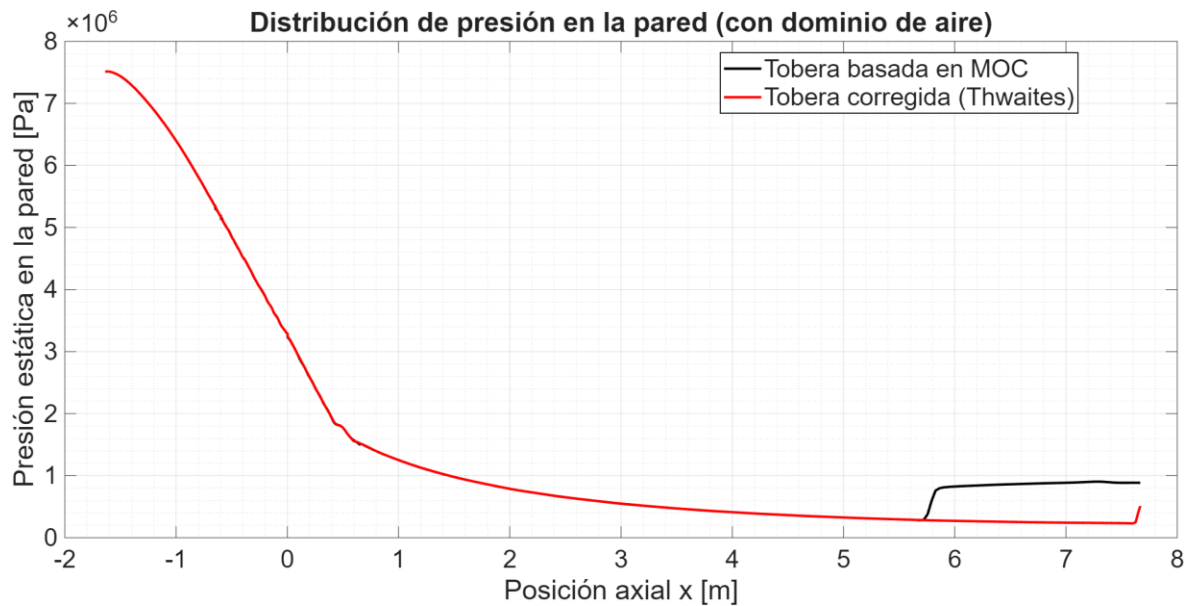
Adicionalmente, se aprecia que la región de flujo con altos valores de Mach se conserva por una mayor distancia en la geometría corregida, mientras que en la geometría basada en MoC la disipación del núcleo supersónico ocurre de forma más temprana. En particular, la longitud característica del primer patrón de choque (distancia entre la salida de la tobera y el primer punto de recompresión del chorro) es aproximadamente un 16 % mayor en la geometría corregida, lo que confirma una adaptación más progresiva del flujo a las condiciones del ambiente.

Con el fin de analizar la evolución del flujo a lo largo de la pared de la tobera bajo condiciones más realistas, se estudió la distribución de la presión estática en la pared para ambas

geometrías considerando el dominio extendido con aire. Esta variable permite identificar de manera directa la presencia de gradientes adversos de presión y su relación con el desprendimiento de la capa límite.

### Figura 24

*Distribución de la presión estática en la pared de la tobera para las geometrías basada en MoC y corregida mediante el método de Thwaites, considerando dominio de aire*



*Nota.* Resultados obtenidos mediante simulaciones CFD en Ansys Fluent bajo condiciones compresibles y régimen turbulento.

En ambas configuraciones se observa una disminución progresiva de la presión a lo largo de la sección convergente y divergente, asociada a la aceleración del flujo hasta condiciones supersónicas. Sin embargo, las diferencias entre las geometrías se hacen evidentes en la región final de la tobera.

En la geometría basada en MoC, la presión en la pared presenta un incremento abrupto alrededor de  $x = 5.8 \text{ m}$ , pasando de valores cercanos a  $3 \times 10^5 \text{ Pa}$  a aproximadamente

$8 \times 10^5 \text{ Pa}$  en una corta distancia axial. Este comportamiento es característico de la presencia de una onda de choque fuerte asociada a la interacción choque–capa límite, lo que induce una separación temprana del flujo.

Por el contrario, en la geometría corregida, la presión continúa disminuyendo de manera más gradual a lo largo de la sección divergente, alcanzando valores inferiores a  $3 \times 10^5 \text{ Pa}$  antes de presentar una leve recuperación cerca de la salida. Este incremento ocurre más aguas abajo y con menor intensidad, lo que indica que el gradiente adverso de presión es menos severo y que la separación del flujo se retrasa.

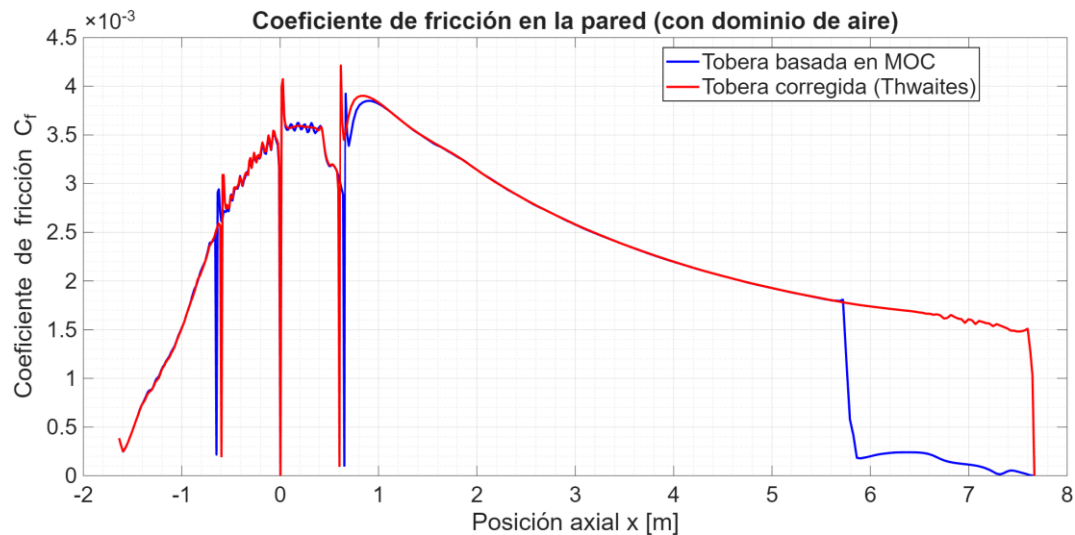
La diferencia en la ubicación del incremento de presión entre ambas configuraciones es del orden de  $\Delta x \approx 1.5 \text{ m}$ , lo que evidencia el efecto directo de la corrección geométrica en el control del desprendimiento. En conjunto, estos resultados muestran que la geometría corregida permite una expansión más estable del flujo, reduciendo la intensidad de las interacciones choque–capa límite y desplazando la separación hacia regiones más alejadas de la garganta.

Con el propósito de analizar el comportamiento de la capa límite a lo largo de la pared de la tobera, se evaluó la distribución del coeficiente de fricción  $C_f$  para ambas geometrías considerando el dominio extendido con aire. Esta variable permite identificar directamente la transferencia de cantidad de movimiento en la pared y constituye un criterio preciso para determinar la localización del desprendimiento del flujo.

Con el fin de complementar el análisis de la distribución de presión y evaluar de manera más directa el comportamiento de la capa límite, se presenta la evolución del coeficiente de fricción a lo largo de la pared para ambas configuraciones. Este parámetro permite identificar con mayor precisión las regiones donde el flujo pierde adherencia y proporciona un criterio claro para la localización del desprendimiento.

**Figura 25**

*Distribución del coeficiente de fricción en la pared de la tobera para las geometrías basada en MoC y corregida mediante el método de Thwaites, considerando dominio de aire*



*Nota.* Resultados obtenidos mediante simulaciones CFD en Ansys Fluent bajo condiciones compresibles y régimen turbulento.

En ambas configuraciones, el coeficiente de fricción aumenta progresivamente en la sección convergente debido al incremento del gradiente de velocidad cerca de la pared, alcanzando valores máximos en la vecindad de la garganta, del orden de  $Cf = 3.5 \times 10^{-3}$ , lo cual es consistente con el adelgazamiento de la capa límite en esta región.

A partir de la sección divergente, las diferencias entre ambas geometrías se hacen más evidentes. En la tobera basada en MoC, el coeficiente de fricción presenta una caída abrupta alrededor de  $x = 5.8m$ , alcanzando valores cercanos a cero en una corta distancia axial. Este comportamiento indica la pérdida del esfuerzo cortante en la pared y, por tanto, la ocurrencia del desprendimiento de la capa límite en esta región.

En contraste, la tobera corregida muestra una disminución más gradual de  $C_f$  a lo largo de la sección divergente, manteniendo valores positivos durante una mayor extensión axial. El coeficiente de fricción se aproxima a cero únicamente cerca de  $x = 7.6m$ , lo que evidencia que la separación del flujo se retrasa aproximadamente  $\Delta x = 1.8 m$  respecto a la geometría sin corrección.

Adicionalmente, la evolución más suave de  $C_f$  en la geometría corregida sugiere una adaptación más progresiva de la capa límite frente al gradiente adverso de presión, reduciendo la severidad del desprendimiento. En cambio, la caída brusca observada en la geometría basada en MoC indica una separación más repentina e intensa, coherente con la interacción choque–capa límite identificada previamente en la distribución de presión.

En conjunto, estos resultados sugieren que la corrección geométrica modifica el comportamiento del flujo cercano a la pared, retrasando la región estimada de separación y favoreciendo una evolución más gradual del coeficiente de fricción en la sección divergente. Debido a la resolución cercana a la pared, este resultado se interpreta de manera cualitativa y comparativa entre geometrías.

#### **4.4 Análisis de la separación del flujo**

La separación del flujo en una tobera supersónica no debe interpretarse como un fenómeno aislado, sino como el resultado de la interacción entre la expansión interna, la distribución de presión, el desarrollo de la capa límite y las condiciones de operación impuestas al sistema. Por esta razón, en esta sección se analiza la separación de flujo mediante simulaciones CFD en las geometrías generadas, correspondientes a la configuración base MoC y a la configuración corregida por capa límite.

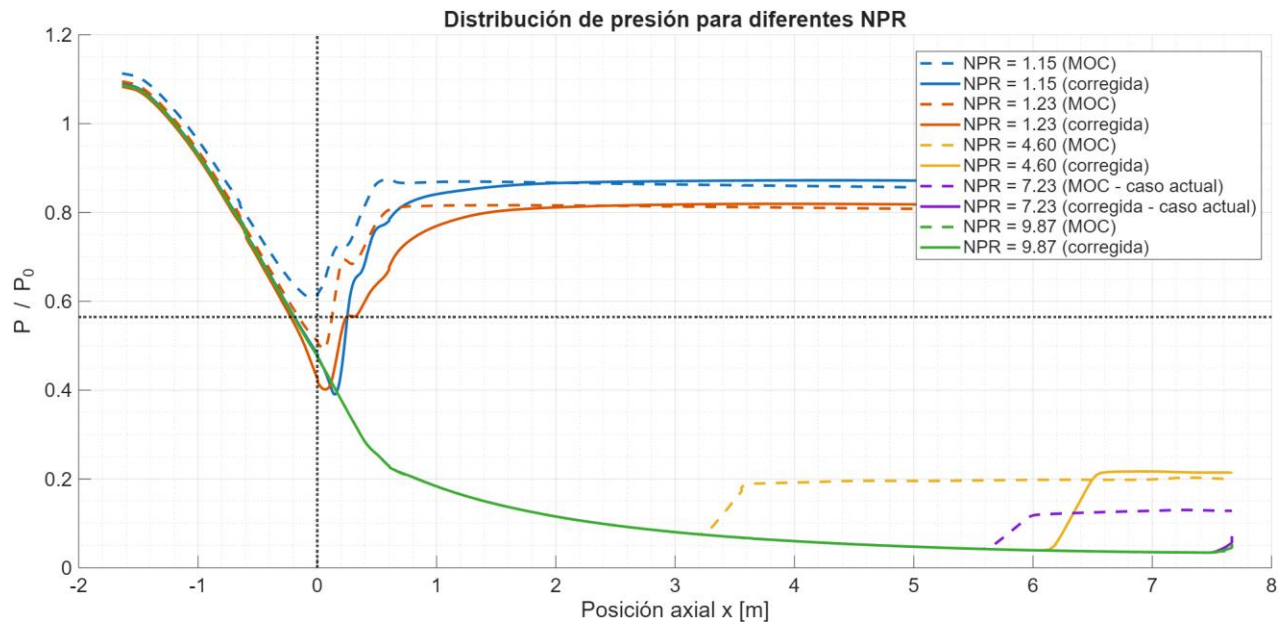
Para identificar la separación del flujo se empleó un criterio combinado basado en la distribución de presión en pared, los contornos de número de Mach y la tendencia del coeficiente de fricción. En particular, la región de separación se asoció con la aparición de una recuperación abrupta de presión, una disminución local del número de Mach y una reducción significativa del coeficiente de fricción hacia valores cercanos a cero.

Debido a la resolución cercana a la pared alcanzada por la malla, la ubicación del desprendimiento no se interpreta como un punto exacto, sino como una región estimada donde los indicadores CFD muestran de manera coherente la interacción choque-capa límite. Por esta razón, el desplazamiento de la separación entre la geometría base y la geometría corregida se analiza de forma comparativa y cualitativa, más que como una predicción cuantitativa exacta.

#### ***4.4.1 Predicción del comportamiento para diferentes NPR***

Con el fin de evaluar la ubicación y evolución de la separación bajo distintas condiciones de operación, se analizó mediante CFD la respuesta de las geometrías generadas para diferentes valores de la relación de presión (NPR). Para ello, se mantuvo constante la presión de entrada en  $6.906.400 \text{ Pa}$  y se variaron las presiones de salida, obteniendo los casos  $NPR = 1.15, 1.23, 4.6, 7.23$  y  $9.87$ . La presión crítica estimada para el estrangulamiento fue de  $3'898.663 \text{ Pa}$ , aproximadamente  $3.9 \text{ MPa}$ .

Esta comparación permite observar cómo el cambio en la contrapresión modifica la recuperación de presión en la pared y desplaza la región donde pueden aparecer fenómenos asociados a la separación del flujo. La evolución de la presión en pared para los diferentes valores de NPR se presenta en la Figura 26.

**Figura 26***Distribución de presión para diferentes NPR*

*Nota.* Los valores de NPR analizados fueron 1.15, 1.23, 4.6, 7.23 y 9.87. La línea vertical punteada indica la posición de la garganta ( $x = 0$ ).

La Figura 26 muestra que, para valores bajos de NPR, la recuperación de presión ocurre poco después de la garganta. Esto indica que el flujo no logra sostener una expansión supersónica prolongada dentro de la sección divergente y que el reajuste hacia la contrapresión impuesta se produce tempranamente. En términos físicos, esta respuesta corresponde a condiciones cercanas al régimen crítico, en las que la región supersónica es reducida y la separación, si aparece, tenderá a ubicarse más próxima a la garganta.

A medida que el NPR aumenta y se supera la condición crítica, el flujo se estrangula en la garganta y se desarrolla una región supersónica en la sección divergente. En estos casos, la recuperación de presión (asociada a la presencia de ondas de choque internas) se desplaza progresivamente aguas abajo. Este desplazamiento indica que el flujo mantiene la expansión

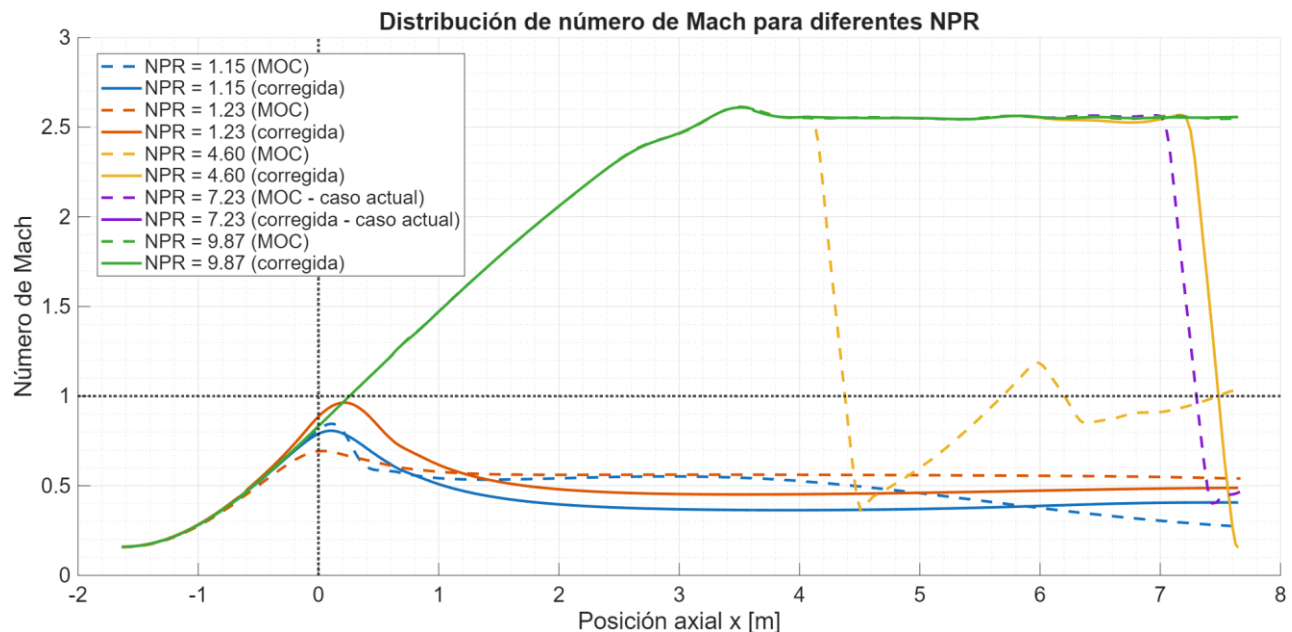
durante una mayor longitud antes de experimentar un gradiente de presión adverso significativo, el cual puede inducir la separación de la capa límite (White, 2011).

La comparación entre la geometría base diseñada mediante MoC y la geometría corregida mediante Thwaites muestra además que, para un mismo NPR, la tobera corregida retrasa la recuperación de presión respecto al caso sin corrección. Físicamente, esto indica que la corrección geométrica permite una expansión más estable dentro de la tobera y reduce la severidad del reajuste interno del flujo. En consecuencia, la distribución de presión sugiere que la corrección por capa límite modifica la predicción de la región donde la separación puede presentarse.

Para complementar el análisis de presión y evaluar la estructura del flujo, se presenta la distribución del número de Mach para ambas configuraciones. Este parámetro permite identificar las regiones donde el flujo mantiene o pierde el régimen supersónico, así como las zonas asociadas a recompresión y posible separación.

Además de la distribución de presión, el número de Mach permite complementar la interpretación del comportamiento del flujo dentro de la tobera. Este parámetro ayuda a identificar si el flujo mantiene una expansión supersónica sostenida o si experimenta una desaceleración asociada al reajuste impuesto por la contrapresión.

Al comparar los distintos valores de NPR, es posible observar cómo cambia la extensión de la región supersónica y la posición aproximada de las zonas de aceleración, recompresión y posible separación. De esta manera, la variación de la contrapresión puede alterar la ubicación de las ondas de choque internas y la región donde la capa límite tiende a separarse. Estos cambios se presentan en la Figura 27.

**Figura 27***Distribución de número de Mach para diferentes NPR*

*Nota.* La línea vertical punteada representa la posición de la garganta ( $x = 0$ ). El caso  $\text{NPR}=7.23$  corresponde a la condición principal analizada en detalle en esta investigación.

Se puede destacar que para NPR bajos, el flujo acelera cerca de la garganta, pero el número de Mach disminuye rápidamente en la sección divergente. Esto indica que la región supersónica es corta y que el choque interno aparece de manera temprana.

Por otro lado, cuando el NPR aumenta, la caída abrupta del número de Mach se desplaza aguas abajo. Desde el punto de vista físico, esto significa que la tobera puede mantener el flujo supersónico durante una mayor longitud axial. En consecuencia, la región crítica donde se desarrolla la onda de choque se desplaza hacia la salida de la tobera, provocando que la zona susceptible a la separación del flujo también se ubique más aguas abajo.

La comparación entre ambas geometrías muestra que, para un mismo NPR, la tobera corregida mediante Thwaites mantiene valores altos de Mach durante una mayor distancia axial

que la tobera base diseñada mediante MoC. Esto sugiere que la corrección geométrica favorece una expansión más gradual y modifica la predicción de la posición donde el flujo deja de sostener el régimen supersónico. Por tanto, la distribución de Mach respalda lo observado en la distribución de presión y demuestra que la geometría corregida retrasa el desarrollo de las condiciones que favorecen la separación.

#### ***4.4.2 Comparación geométrica entre la tobera base MoC y la corregida mediante Thwaites***

La geometría corregida se obtuvo a partir del espesor de desplazamiento calculado mediante el método integral de Thwaites, incorporando de manera indirecta la reducción del área efectiva asociada a la región viscosa. Aunque la modificación del contorno es pequeña en términos geométricos, su efecto sobre el comportamiento interno del flujo resulta relevante.

En la configuración base diseñada mediante MoC, al no considerar la reducción del área efectiva, el gradiente adverso de presión en la región divergente aparece de forma más temprana y favorece la interacción entre las ondas de choque y la capa límite. En cambio, el contorno corregido modifica la expansión interna del flujo y desplaza aguas abajo la región asociada al desprendimiento.

A partir de la comparación entre ambas configuraciones, se observa que la región asociada al desprendimiento se desplaza aguas abajo en la tobera corregida. Este desplazamiento se estimó a partir de la coincidencia entre la recuperación de presión, la caída local del número de Mach y la reducción del coeficiente de fricción en pared.

La diferencia observada corresponde aproximadamente a un 25 % de la longitud de referencia considerada. Sin embargo, debido a las limitaciones asociadas a la resolución cercana a la pared y al carácter cualitativo del criterio empleado, este valor debe interpretarse como una

estimación comparativa del desplazamiento de la región de separación, no como una medición exacta del punto de desprendimiento.

#### 4.5 Análisis del empuje

Con el fin de evaluar el impacto de la corrección geométrica sobre el desempeño global de la tobera, se realizó el cálculo del empuje a partir de las simulaciones CFD. Para ello, se consideraron las contribuciones de presión y esfuerzos viscosos sobre la pared interna de la tobera, así como las propiedades del flujo en la sección de salida. Adicionalmente, se extrajeron los resultados de las simulaciones en Ansys Fluent, los cuales se presentan en la Tabla 4.

**Tabla 4**

*Comparación del empuje entre configuraciones*

| Geometría                         | Flujo másico<br>(kg/s) | Velocidad<br>salida (m/s) | Presión<br>salida (Pa) | Empuje (N)          |
|-----------------------------------|------------------------|---------------------------|------------------------|---------------------|
| Tobera base<br>(MoC)              | -15007.76              | 200.23                    | 964701                 | $5.495 \times 10^7$ |
| Tobera<br>corregida<br>(Thwaites) | -15273.99              | 222.44                    | 951696                 | $5.523 \times 10^7$ |

*Nota.* Empuje calculado en Ansys Fluent con fuerzas de presión y esfuerzos viscosos axiales. La velocidad corresponde al promedio en la salida.

Es importante señalar que el signo negativo del flujo másico reportado en la Tabla 5 responde a la convención de orientación de las superficies empleada por Ansys Fluent. Por tanto, para efectos de comparación entre ambas configuraciones, el análisis se realiza considerando la magnitud absoluta del flujo másico.

A partir de los resultados presentados, se observa que la corrección geométrica por capa límite genera variaciones en las condiciones de salida del flujo. En particular, la tobera corregida presenta un incremento en la velocidad promedio de salida del orden del 11 %, acompañado de una ligera disminución en la presión estática de salida. Asimismo, la magnitud del flujo másico muestra un aumento cercano al 1.8 %, lo cual es consistente con la modificación del área efectiva inducida por la corrección geométrica.

En términos de empuje, ambas configuraciones presentan valores del mismo orden de magnitud, con una diferencia relativa inferior al 1 %. Este resultado indica que, aunque la corrección geométrica modifica de manera apreciable la estructura del flujo interno y la localización del desprendimiento, su impacto sobre la magnitud global del empuje es limitado.

Este comportamiento indica que la corrección geométrica no produce una mejora sustancial del desempeño global de la tobera en términos de empuje, ya que la diferencia relativa entre ambas configuraciones es inferior al 1 %. Por tanto, su principal aporte no radica en aumentar de manera significativa la fuerza generada, sino en modificar la predicción del comportamiento interno del flujo, especialmente la distribución de presión, la estructura de Mach y la región asociada al desprendimiento.

Adicionalmente, se realizó una verificación de consistencia entre la velocidad del flujo y el número de Mach promedio en la salida del dominio. A partir de los resultados obtenidos en la simulación, se tiene una velocidad de salida del orden de 220 m/s y un número de Mach promedio de 0.226.

Empleando la relación  $M = V/a$ , se estima una velocidad del sonido local cercana a 970 m/s, lo cual es considerablemente mayor que el valor correspondiente a condiciones estándar. Este

resultado es coherente con las altas temperaturas del flujo compresible obtenidas en la simulación, del orden de 1800 K.

Por lo tanto, se confirma que los valores de velocidad y número de Mach son físicamente consistentes, y que la desaceleración del flujo observada en la salida está asociada a la recompresión generada por las ondas de choque presentes en el régimen sobreexpandido.

## **4.6 Validación de la convergencia**

### ***4.6.1 Criterios de convergencia***

Dado que los problemas de dinámica de fluidos son altamente no lineales, las soluciones obtenidas mediante CFD son aproximaciones numéricas que requieren un proceso iterativo sobre un dominio discretizado. Al trabajar con un número finito de puntos en la malla, los resultados están intrínsecamente ligados a dos tipos de errores: el error de truncamiento, que surge al omitir términos de orden superior en las series de Taylor, y el error de redondeo, causado por la precisión finita con la que las computadoras procesan los decimales.

En teoría, al refinar la malla reducimos el error de truncamiento. Sin embargo, una malla excesivamente densa aumenta drásticamente el número de operaciones, lo que puede disparar el error de redondeo y el costo computacional. Por esta razón, el objetivo de esta sección es encontrar ese punto de equilibrio "óptimo" donde la solución sea precisa y estable.

Para garantizar que los resultados presentados en esta tesis sean confiables y que la simulación ha llegado a un estado estacionario definitivo, se establecieron los siguientes criterios de validación:

- **Residuales (RMS):** Los residuales RMS (Root Mean Square) permiten cuantificar el error acumulado en la resolución de las ecuaciones de gobierno para cada celda del dominio (Anderson, 1995). Representan la precisión con la que se cumplen los

balances de masa, momentum y energía en cada iteración del proceso numérico. De acuerdo con la documentación técnica de ANSYS Inc. (2026), la convergencia numérica se evalúa mediante el descenso y estabilización de los residuales por debajo de umbrales predefinidos, junto con el monitoreo de variables físicas representativas del flujo. En este estudio, se adoptó como criterio de convergencia que los residuales descendieran y se estabilizaran alrededor de  $10^{-4}$ , complementando este criterio con la estabilidad de las variables monitoreadas y el balance de masa.

- **Estabilidad de las variables de interés:** En simulaciones de flujo estacionario (steady-state), la convergencia se valida cuando las propiedades físicas del sistema dejan de presentar cambios significativos entre iteraciones sucesivas. Debido a que el descenso de los residuales es una condición necesaria pero no suficiente para asegurar la exactitud (Versteeg & Malalasekera, 2007), resulta fundamental monitorear variables físicas clave a lo largo del proceso. Este seguimiento garantiza que la solución representa un estado estable y físicamente coherente, más allá de la tolerancia numérica del solver.
- **Balances de masa y energía:** La validez de una solución en CFD está supeditada al estricto cumplimiento de las leyes de conservación (Anderson, 1995). En flujos compresibles, es necesario verificar que la diferencia neta entre los flujos de entrada y salida (imbances) sea despreciable. Aunque los métodos numéricos introducen errores de discretización que impiden un balance de cero absoluto, una solución convergente debe demostrar que las tasas de flujo de masa y energía se han

estabilizado dentro de un umbral de tolerancia aceptable (Versteeg & Malalasekera, 2007).

- **Independencia de malla:** El estudio de independencia de la malla es un procedimiento crítico para garantizar que la solución numérica no sea dependiente de la resolución de la grilla de cálculo (Versteeg & Malalasekera, 2007). Este proceso consiste en refinar progresivamente la densidad de elementos en el dominio hasta que las variables de interés, como el número de Mach o la presión, alcancen un valor asintótico.

De acuerdo con Anderson (1995), la eliminación del error de discretización mediante este análisis es lo que permite asegurar que los resultados capturan fielmente la física del fenómeno y no son un artefacto de la configuración del mallado. En la práctica de ingeniería, se considera que se ha alcanzado la independencia cuando la variación relativa entre una malla y su refinamiento posterior es lo suficientemente pequeña para ser despreciable bajo los criterios de precisión del estudio.

Adicionalmente, se incorporó el Índice de Convergencia de Malla o Grid Convergence Index (GCI) como criterio cuantitativo para estimar la incertidumbre asociada al error de discretización espacial. A diferencia de los residuales, que permiten evaluar la convergencia iterativa del solver, el GCI permite cuantificar la sensibilidad de una variable de interés frente al refinamiento de la malla, siguiendo una estimación basada en el procedimiento recomendado por Celik et al. (2008).

En este trabajo se seleccionó el número de Mach máximo como variable de referencia, debido a su sensibilidad frente a la resolución espacial en flujos supersónicos con ondas de choque y regiones de recompresión. Para el cálculo se empleó un factor de seguridad  $F_s = 1.25$ , una

razón de refinamiento basada en el número total de elementos y un orden de convergencia  $p = 2$ , consistente con el esquema de discretización second-order upwind empleado en las simulaciones.

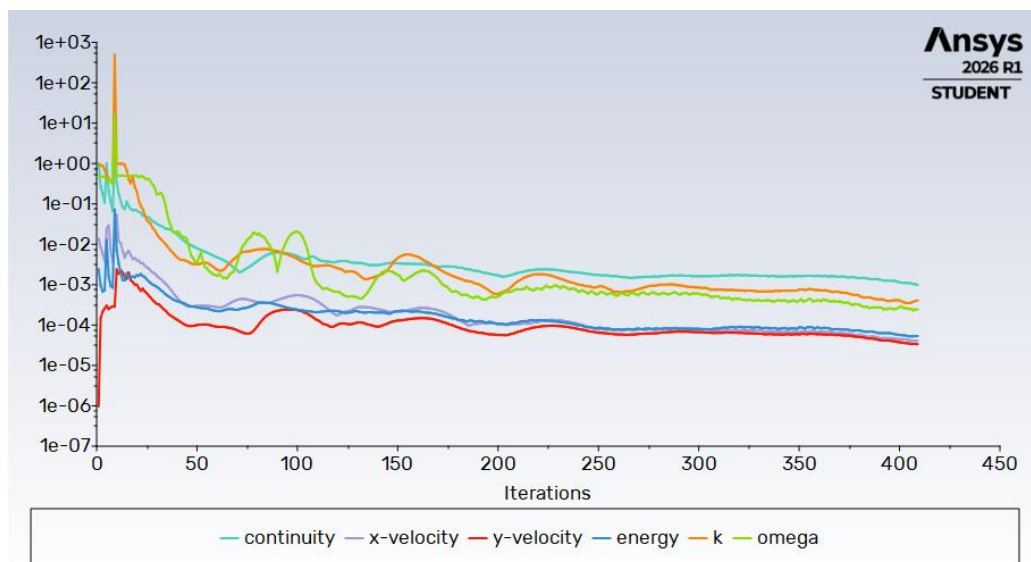
#### 4.6.2 Tobera base diseñada mediante MoC

##### Valores residuales RMS

Como se muestra en la Figura 28 se presenta el comportamiento de los residuales RMS para la simulación de la tobera base. Se observa que, tras superar un periodo de inestabilidad inicial durante las primeras 150 iteraciones causado por el establecimiento de los frentes de onda de choque dentro del dominio, todas las ecuaciones de gobierno muestran una tendencia monótona descendente y una estabilización posterior.

**Figura 28**

*Residuales de las ecuaciones de flujo en la simulación CFD – geometría no corregida*



*Nota.* Los residuales disminuyen durante el proceso iterativo y tienden a estabilizarse, indicando convergencia numérica de la simulación para la geometría no corregida.

Los residuales de las componentes de velocidad ( $x$ ,  $y$ ), energía y las variables de transporte de turbulencia ( $k$  y  $\omega$ ) alcanzaron valores por debajo del umbral de  $10^{-4}$  y  $10^{-5}$ , lo que indica

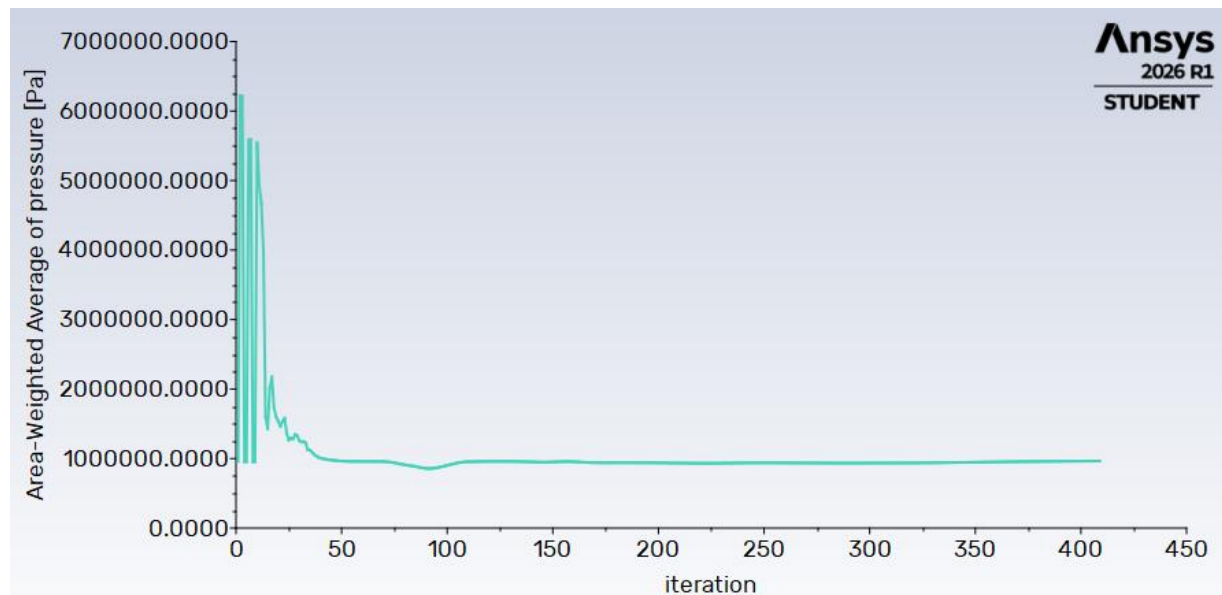
una alta precisión en la resolución de estos campos. Por otro lado, el residual de continuidad se estabilizó en el orden de  $10^{-3}$ . De acuerdo con Anderson (1995), este comportamiento es común en flujos compresibles de alta velocidad, donde la presencia de gradientes severos y ondas de choque genera un ruido numérico que limita el descenso de la continuidad. Sin embargo, la horizontalidad de las curvas a partir de la iteración 300 garantiza que la solución ha convergido y que no existen variaciones significativas en el campo de flujo.

### Estabilidad de las variables de interés

Para complementar el análisis de convergencia, se monitoreó el comportamiento de la presión promedio, la temperatura promedio y el número de Mach máximo en función de las iteraciones.

#### Figura 29

*Gráfica del estado estacionario de la presión promedio – geometría no corregida*

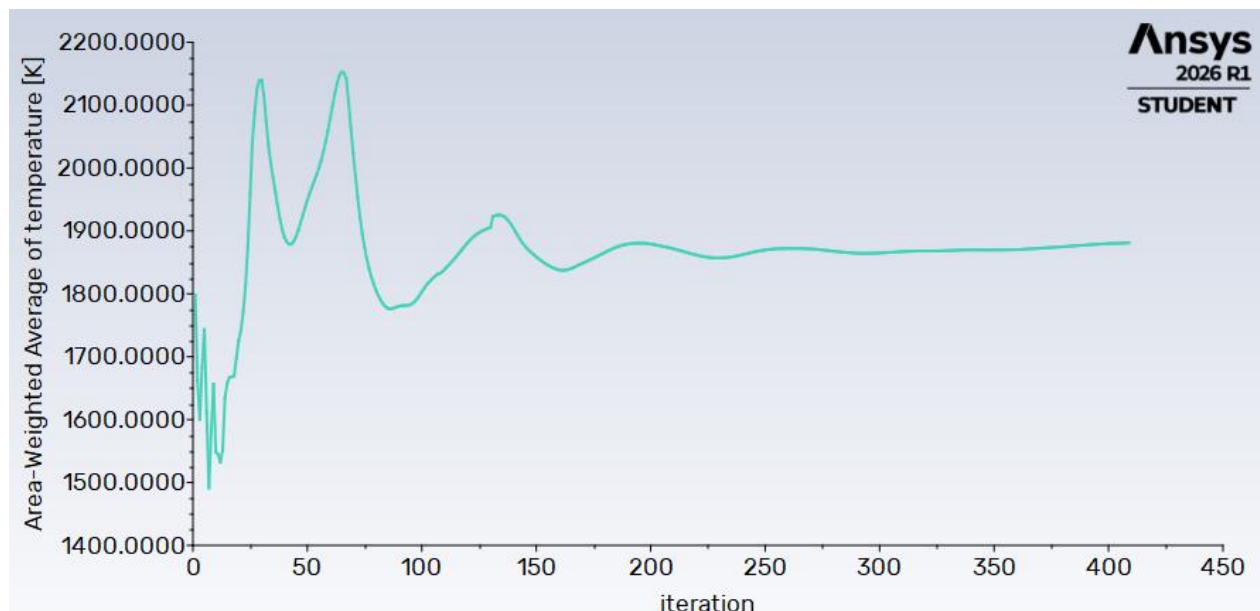


*Nota.* La presión promedio presenta fluctuaciones iniciales asociadas al ajuste del campo de flujo y posteriormente alcanza un comportamiento estable.

En la Figura 29 se observa que, durante las primeras iteraciones, la presión promedio presenta fluctuaciones pronunciadas. Este comportamiento es esperado, ya que el solver ajusta progresivamente las condiciones iniciales impuestas, la distribución de presión dentro del dominio y la posición de las estructuras de choque. Posteriormente, la variable disminuye de manera progresiva hasta alcanzar una tendencia prácticamente constante.

### Figura 30

*Gráfica del estado estacionario de la temperatura promedio – geometría no corregida*

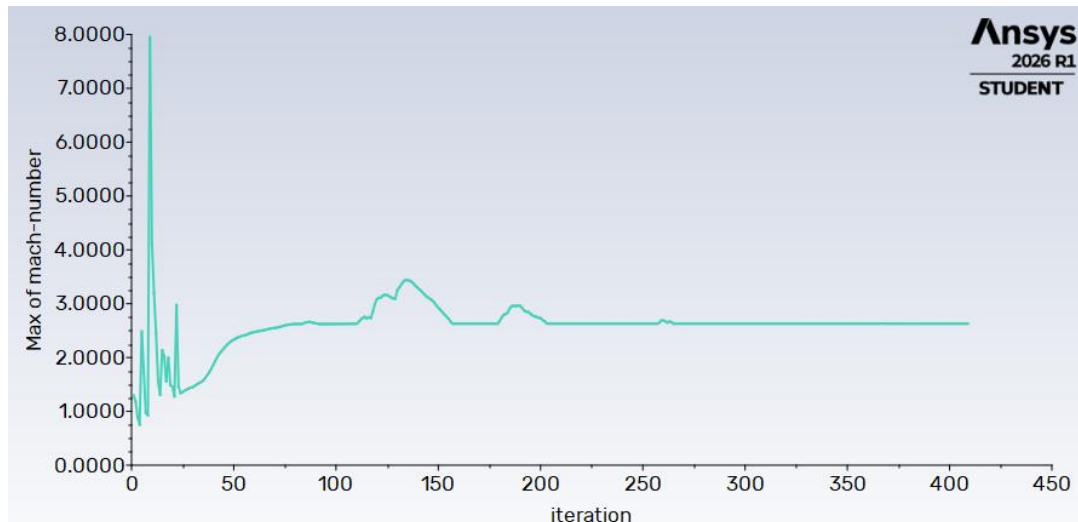


*Nota.* La temperatura promedio muestra oscilaciones iniciales y una posterior estabilización, evidenciando el establecimiento progresivo del régimen estacionario.

A partir de este comportamiento, se considera que la temperatura promedio alcanza una condición estable después de las oscilaciones iniciales. Esto indica que el campo térmico se ajusta progresivamente a las condiciones de operación impuestas y acompaña la convergencia general de la solución numérica.

**Figura 31**

*Gráfica del estado estacionario del número de Mach máximo – geometría no corregida*



*Nota.* El número de Mach máximo se estabiliza después de las oscilaciones iniciales, lo que indica una solución estacionaria para la geometría no corregida.

Como se observa en las Figuras 29, 30 y 31, las tres variables presentan un comportamiento oscilatorio pronunciado durante las primeras 200 iteraciones. Estas fluctuaciones son el resultado del ajuste numérico del solver al establecer las condiciones de flujo compresible y la posición de los choques dentro de la tobera. A partir de la iteración 250, se evidencia una estabilización asintótica en todos los monitores. El número de Mach máximo se estabiliza en un valor de 2.628.

La ausencia de gradientes o tendencias de cambio en el último tramo de la simulación (iteraciones 300 a 410) confirma que la solución ha alcanzado un estado estacionario definitivo. De acuerdo con Versteeg y Malalasekera (2007), esta invariabilidad de las variables globales es el indicador más robusto de que el proceso iterativo ha convergido satisfactoriamente a una solución físicamente coherente.

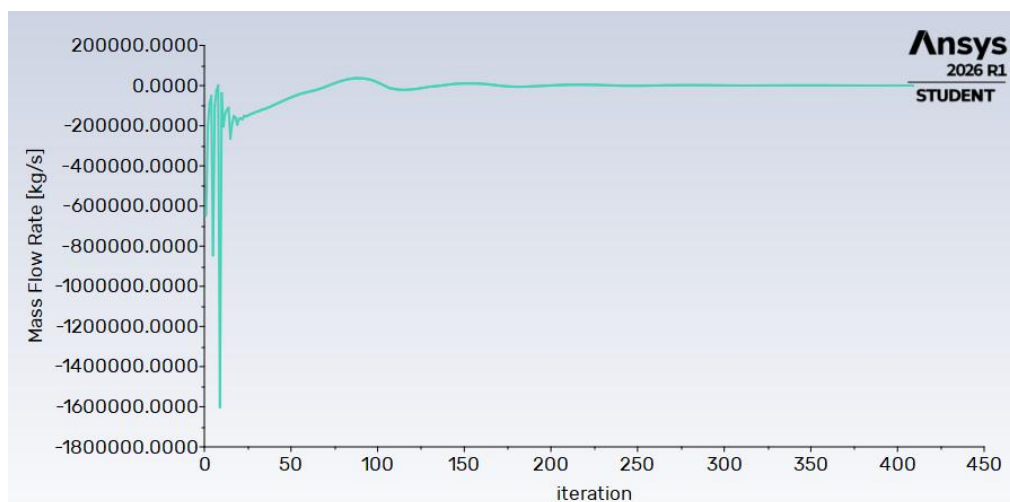
### Balances de masa (Imbalances)

El balance de masa constituye un criterio adicional para verificar el cumplimiento de la conservación de masa dentro del dominio computacional. En la Figura 32 se observa el comportamiento del flujo másico neto a lo largo de las iteraciones. Tras un periodo de inestabilidad numérica inicial, aproximadamente entre las iteraciones 0 y 100, en el cual el solver ajusta las condiciones de contorno y el campo de flujo dentro del dominio, el valor del balance converge progresivamente hacia cero.

Este resultado indica que el flujo másico que ingresa al dominio se compensa adecuadamente con el flujo másico que sale de la tobera, considerando la convención de signos empleada por Ansys Fluent. Por tanto, la convergencia del balance de masa hacia valores cercanos a cero respalda la consistencia física de la simulación y complementa los criterios de convergencia basados en residuales y variables monitoreadas.

### Figura 32

*Desequilibrio y diferencia de masa entre la entrada y la salida – geometría no corregida*



*Nota.* El desequilibrio de masa tiende a valores cercanos a cero, lo que indica conservación de masa entre la entrada y la salida del dominio.

Un desequilibrio de masa cercano al 0 % constituye un indicador importante de que el método de volúmenes finitos satisface adecuadamente la conservación de masa en el dominio computacional. Este resultado, junto con la estabilidad de los residuales y de las variables globales monitoreadas, permite considerar que la simulación de la tobera base es físicamente consistente y que los campos de presión y velocidad obtenidos son representativos del comportamiento del flujo.

### **Independencia de la malla**

Para asegurar que los resultados no dependieran de la resolución espacial del dominio, se realizó un estudio de independencia de malla mediante ocho niveles de refinamiento o Design Points, variando la densidad de elementos desde 6,116 hasta 401,034. Este procedimiento permitió evaluar la sensibilidad de las variables principales frente al aumento progresivo del número de elementos y verificar si la solución tendía a estabilizarse al refinar la malla.

El uso de varios niveles de refinamiento permite observar la evolución de la solución a medida que aumenta la densidad de la malla. Si las variaciones entre configuraciones sucesivas disminuyen progresivamente, se puede considerar que la solución tiende a independizarse de la discretización espacial y que los resultados obtenidos no dependen únicamente del tamaño de los elementos.

En la Tabla 5 se presentan los valores del número de Mach, presión y temperatura obtenidos para cada configuración. Estas variables fueron seleccionadas porque representan el comportamiento global del flujo dentro de la tobera y permiten identificar si los cambios observados entre mallas sucesivas son significativos o si la solución alcanza una condición prácticamente independiente de la discretización.

**Tabla 5***Parámetros de entrada y salida en los puntos de diseño desde Ansys Workbench*

| Design Point      | Input Parameter                     |                          |                              |                          | Output Parameters |                |                  |                    |
|-------------------|-------------------------------------|--------------------------|------------------------------|--------------------------|-------------------|----------------|------------------|--------------------|
|                   | Edge<br>sizing 1<br>(P1, P2,<br>P3) | Edge<br>sizing 2<br>(P4) | Edge<br>sizing 3<br>(P5, P6) | Edge<br>sizing 4<br>(P7) | N<br>elements     | Mach<br>number | Pressure<br>[Pa] | Temperature<br>[K] |
| DP 3              | 80                                  | 320                      | 160                          | 750                      | 401034            | 2.7783         | 942397.20        | 1867.363           |
| DP 2              | 70                                  | 280                      | 140                          | 550                      | 272037            | 2.6442         | 949438.74        | 1871.050           |
| DP 1              | 60                                  | 240                      | 120                          | 400                      | 179437            | 2.6377         | 962986.39        | 1879.684           |
| DP 0<br>(Current) | 50                                  | 200                      | 100                          | 300                      | 118047            | 2.6286         | 964701.00        | 1880.952           |
| DP 4              | 40                                  | 160                      | 80                           | 225                      | 74172             | 2.6308         | 947291.60        | 1882.057           |
| DP 5              | 30                                  | 120                      | 60                           | 150                      | 40310             | 2.6299         | 945949.37        | 1882.243           |
| DP 6              | 20                                  | 80                       | 40                           | 75                       | 16840             | 2.6288         | 946793.32        | 1883.307           |
| DP 7              | 10                                  | 40                       | 20                           | 50                       | 6116              | 2.6243         | 949466.20        | 1885.114           |

*Nota.* DP0 corresponde a la malla seleccionada para la geometría no corregida, al presentar estabilidad en el número de Mach y un equilibrio adecuado entre precisión numérica y costo computacional.

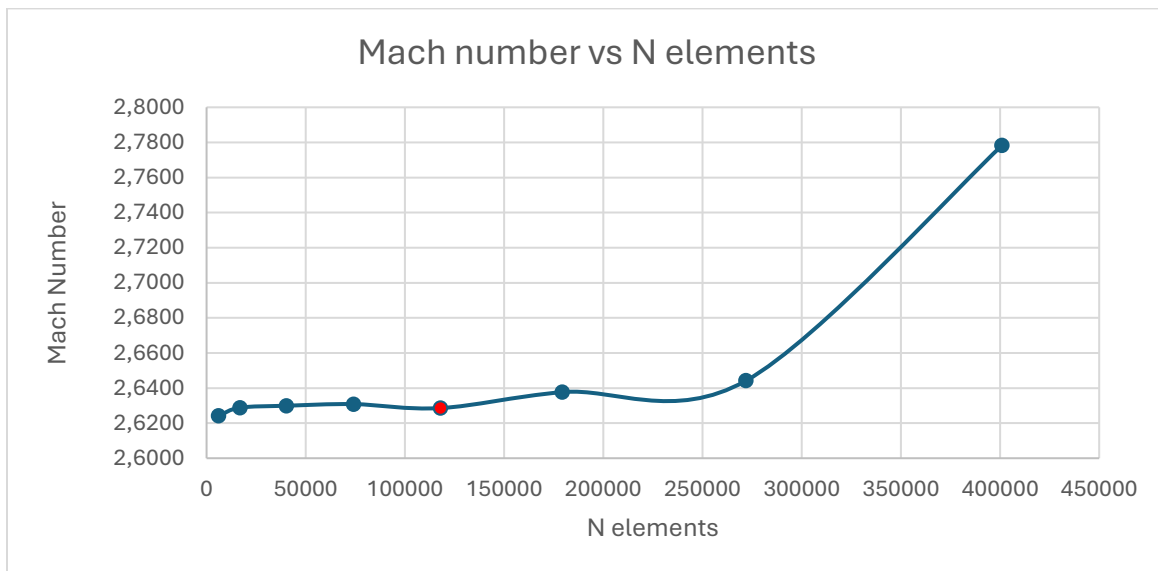
Se seleccionó el DP 0, correspondiente a 118,047 elementos, como malla de trabajo debido a que presenta un equilibrio adecuado entre estabilidad numérica, precisión de los resultados y costo computacional. La comparación entre los puntos de diseño evidencia una región de estabilidad en las mallas intermedias, donde el número de Mach máximo presenta variaciones reducidas. Aunque la malla más fina, correspondiente al DP 3, muestra un comportamiento atípico

respecto a la tendencia general, este resultado se interpreta con cautela y no se toma como criterio principal para la selección de la malla.

En la Figura 33 se presenta la curva de sensibilidad del Número de Mach máximo frente al conteo de elementos (N elements). Esta gráfica de dispersión es fundamental para validar la simulación, ya que permite visualizar la tendencia de la solución a medida que se refina la malla de cálculo.

**Figura 33**

*Número de Mach vs número de elementos*



*Nota.* La variación del número de Mach máximo frente al número de elementos permite evaluar la independencia de malla para la geometría no corregida. El punto resaltado corresponde a la malla seleccionada.

Se observa que entre los 16,840 y los 179,437 elementos, la variable de estudio (Mach) presenta una estabilidad notable, oscilando en un rango estrecho entre 2.62 y 2.64. Este comportamiento permite considerar que la solución presenta baja sensibilidad al refinamiento dentro del intervalo de mallas intermedias. Por tanto, la malla DP 0 se adoptó como malla de

trabajo, al cumplir simultáneamente con estabilidad de las variables monitoreadas, convergencia de residuales, balance de masa adecuado y un costo computacional razonable.

Para complementar el análisis de independencia de malla, se calculó el Índice de Convergencia de Malla (GCI) tomando como referencia el número de Mach máximo. Se comparó la malla de trabajo DP0, con 118047 elementos, frente a la malla inmediatamente más gruesa DP4, con 74172 elementos.

Como la simulación es 2D axisimétrica, el tamaño característico de malla puede estimarse como:

$$h_i = \left( \frac{1}{N_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

donde  $N_i$  es el número de elementos de la malla.

Por lo tanto, la razón de refinamiento entre dos mallas es:

$$r = \frac{h_2}{h_1} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^{1/2} \quad (30)$$

donde:

- $N_1$ : número de elementos de la malla más fina.
- $N_2$ : número de elementos de la malla más gruesa.

El error relativo aparente es:

$$e_a = \left| \frac{\phi_1 - \phi_2}{\phi_1} \right| \quad (31)$$

donde  $\phi$  es la variable evaluada. En este caso:

$$\phi = M_{\max} \quad (32)$$

Finalmente, el GCI se calcula como:

$$GCI = \frac{F_s e_a}{r^p - 1} \times 100 \quad (33)$$

Entonces:

$$r = \left( \frac{118047}{74172} \right)^{1/2} = 1.2616$$

$$e_a = \left| \frac{2.6286 - 2.6308}{2.6286} \right| \times 100 = 0.0837\%$$

$$GCI = 0.1769\%$$

Es decir, para la tobera base, la incertidumbre de discretización estimada para el Mach máximo entre DP0 y DP4 es aproximadamente:  $GCI \approx 0.18\%$ .

La razón de refinamiento obtenida fue  $r = 1.2616$ , mientras que el error relativo aparente fue de  $0.0837\%$ . A partir de estos valores, el GCI calculado fue de  $0.1769\%$ , lo que indica una baja incertidumbre asociada a la discretización espacial para la variable evaluada. Por tanto, la malla seleccionada presenta una independencia de malla adecuada para el análisis comparativo desarrollado.

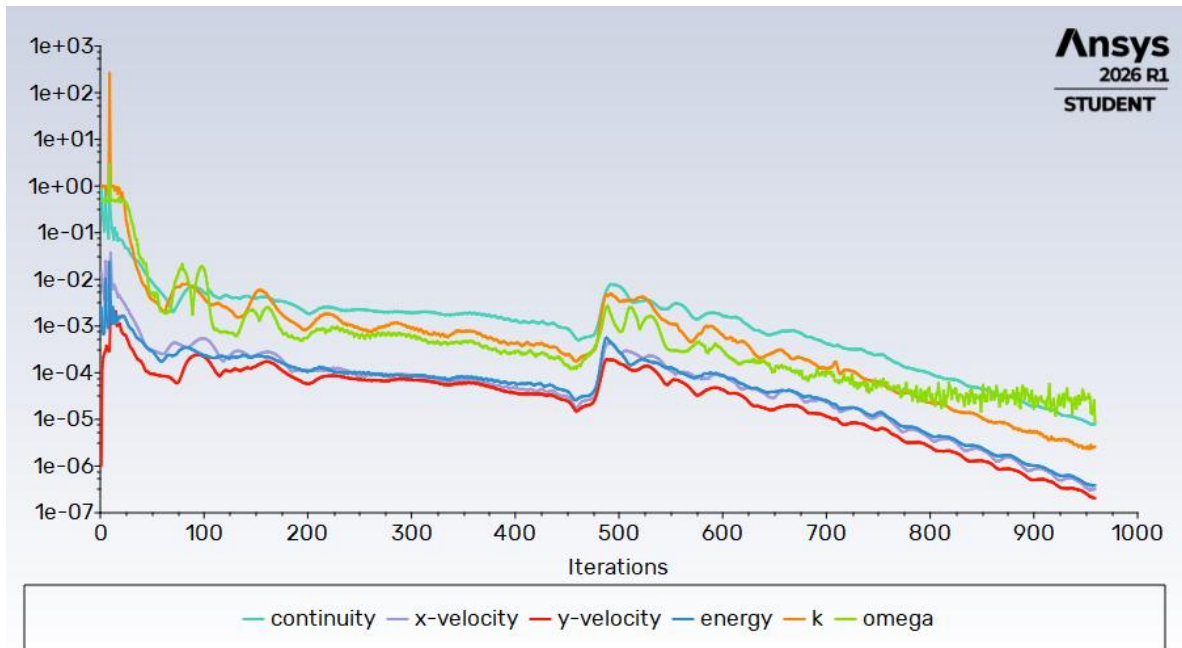
#### ***4.6.3 Tobera con corrección de capa límite (Thwaites)***

##### **Valores residuales RMS**

Para problemas complejos de flujo compresible, se considera que niveles de  $10^{-4}$  representan una convergencia ligera,  $10^{-5}$  una buena convergencia y  $10^{-6}$  una convergencia estricta. Como se observa en la Figura 34, los residuales de la simulación muestran un comportamiento descendente y estable. Aunque se presentan oscilaciones iniciales, asociadas al ajuste del flujo compresible y de las estructuras de choque, las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento, energía y turbulencia alcanzan valores bajos y sin tendencias crecientes. Este comportamiento indica que el proceso iterativo evoluciona hacia una solución numéricamente estable para la geometría corregida.

**Figura 34**

*Residuales de las ecuaciones de flujo en la simulación CFD – geometría corregida*



*Nota.* Los residuales presentan una reducción progresiva y alcanzan niveles adecuados de convergencia para la simulación de la geometría corregida.

Continuidad y Energía: Alcanzaron niveles cercanos a  $1 \times 10^{-5}$  y  $1 \times 10^{-7}$  respectivamente, lo que indica una adecuada resolución de las ecuaciones de continuidad y energía.

Velocidad (x, y): Los residuales de velocidad descendieron por debajo de  $1 \times 10^{-6}$ , demostrando que el campo de flujo se ha estabilizado correctamente.

A pesar de que el proceso iterativo presentó algunas oscilaciones iniciales (comunes en flujos supersónicos debido al desarrollo de las ondas de choque), la solución final se estabilizó después de las 900 iteraciones, cumpliendo con los criterios de convergencia establecidos.

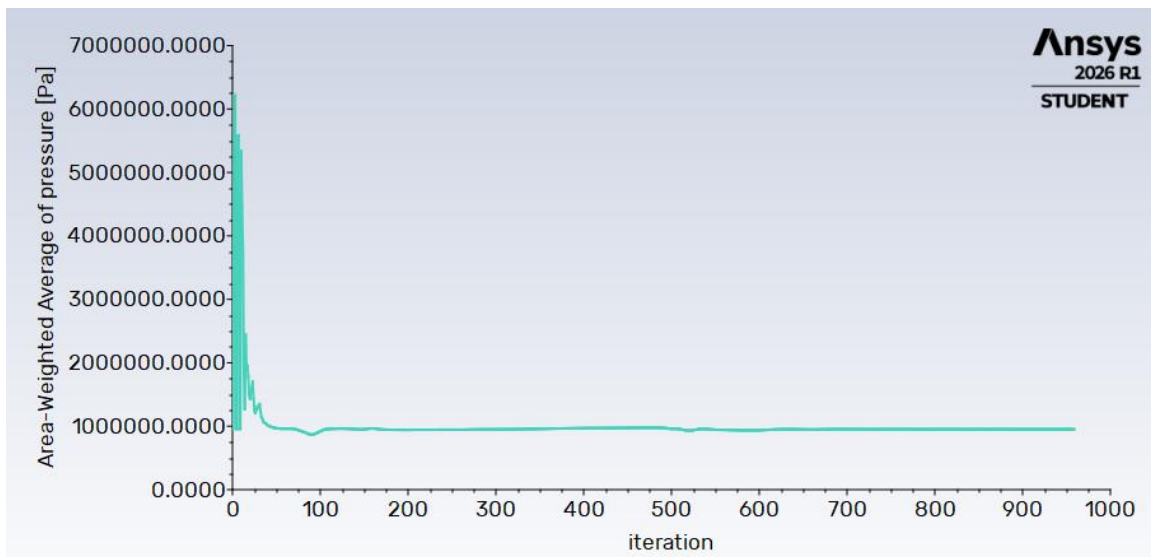
### **Estabilidad de las variables de interés**

En esta simulación, se realizó el seguimiento de la presión promedio, la temperatura promedio y el número de Mach máximo. Como se documenta en las gráficas de monitoreo

La presión promedio se monitoreó como una variable representativa del ajuste del campo de flujo dentro de la tobera corregida. En flujos compresibles sobreexpandidos, esta variable es especialmente relevante, ya que está asociada con la expansión del flujo, la recompresión y la ubicación de las estructuras de choque. Por tanto, su estabilización permite verificar que el campo de presión alcanza una condición estacionaria antes de analizar los resultados finales de la simulación.

### Figura 35

*Gráfica del estado estacionario de la presión promedio – geometría corregida*

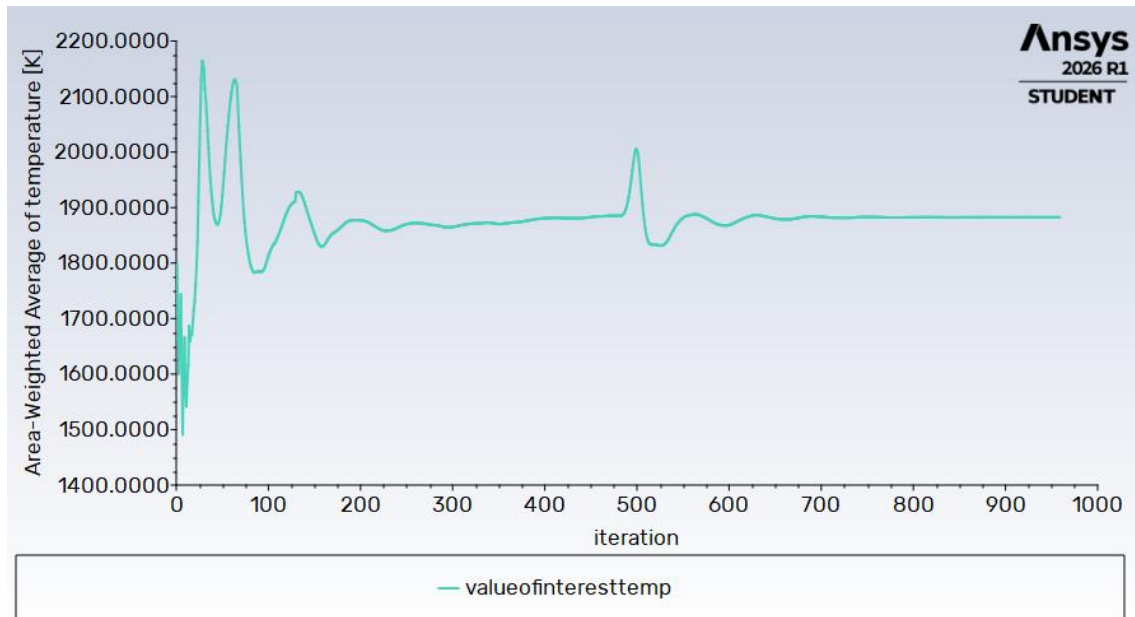


*Nota.* La presión promedio se estabiliza después de las fluctuaciones iniciales, indicando el establecimiento del campo de presión en la geometría corregida.

Tras un periodo de alta inestabilidad inicial (0-100 iteraciones) donde el campo de presiones busca equilibrarse con las condiciones de contorno, la variable alcanza una estabilidad absoluta aproximadamente a las 200 iteraciones.

**Figura 36**

*Gráfica del estado estacionario de la temperatura promedio – geometría corregida*



*Nota.* La temperatura promedio alcanza un comportamiento estable después del ajuste inicial del solver, lo que respalda la convergencia térmica de la simulación.

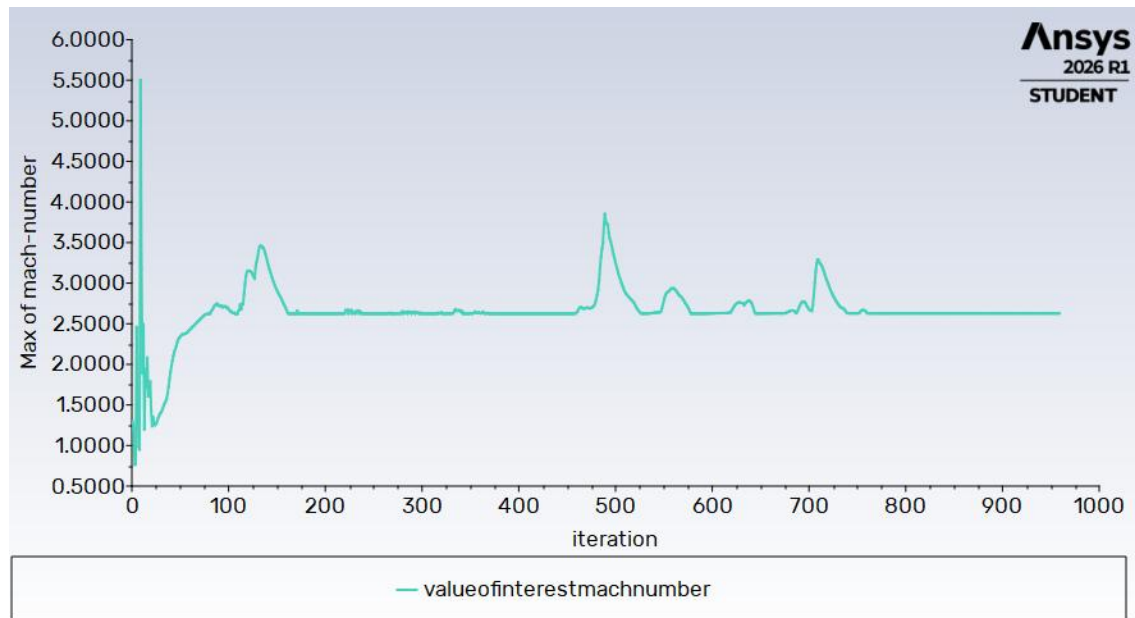
La gráfica de la temperatura presenta un comportamiento similar al observado en la presión, con oscilaciones iniciales que se atenúan progresivamente a medida que avanza el proceso iterativo. Se aprecia un ligero reajuste alrededor de la iteración 500, lo cual puede asociarse a la estabilización de las estructuras de flujo internas, particularmente en regiones donde se presentan cambios abruptos de propiedades. Posteriormente, la solución converge hacia un valor estacionario cercano a 1882 K, indicando que el campo térmico ha alcanzado un estado estable y consistente con la convergencia global del modelo.

De manera complementaria, resulta relevante analizar la evolución del número de Mach máximo durante el proceso iterativo, ya que este parámetro permite verificar la estabilidad del

régimen supersónico dentro de la tobera y la correcta captura de las características del flujo como se muestra en la figura 37.

### Figura 37

*Gráfica del estado estacionario del número de Mach máximo – geometría corregida*



*Nota.* El número de Mach máximo presenta oscilaciones iniciales asociadas al ajuste del flujo compresible y posteriormente se estabiliza en la solución final.

Número de Mach Máximo es la variable más sensible en flujos supersónicos. La figura 37 muestra que, tras superar los picos transitorios donde el chorro se está estableciendo, el Mach máximo se estabiliza en un valor de 2.628 (para la malla base). Las pequeñas "jorobas" observadas antes de la iteración 800 representan el ajuste fino del solver para capturar la posición exacta de los diamantes de choque.

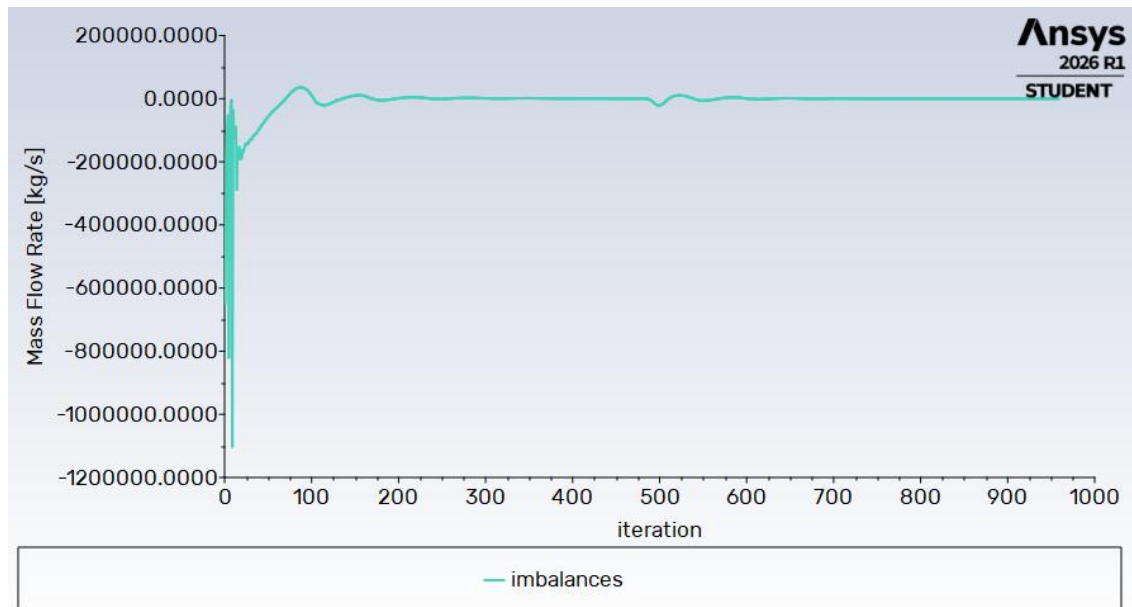
### Balances de masa (Imbalances)

Como las simulaciones de flujos compresibles se rigen por las ecuaciones de conservación, es fundamental asegurar que la solución final respete estos principios. Aunque en un enfoque

numérico los desequilibrios (imbalances) difícilmente son cero absolutos, deben ser lo suficientemente pequeños para validar la convergencia.

### Figura 38

*Desequilibrio y diferencia de masa entre la entrada y la salida – geometría corregida*



*Nota.* El desequilibrio de masa disminuye y se mantiene cercano a cero, evidenciando consistencia en la conservación de masa para la geometría corregida.

Como se observa en la Figura 38, el desequilibrio de masa fluctúa al inicio y luego converge hacia valores cercanos a cero. Esto indica una adecuada conservación de masa y respalda la consistencia física de la simulación.

### Independencia de la malla

Aunque una simulación haya convergido en residuales e imbalances, es fundamental garantizar que la solución sea independiente de la resolución de la malla. Un error común en CFD es dar por válidos resultados que aún cambian si se refina la grilla; por ello, este estudio es vital para asegurar que los resultados físicos obtenidos sean confiables.

Se ejecutaron 7 puntos de diseño adicionales (Design Points) variando la densidad de la malla desde una configuración muy gruesa hasta una extremadamente fina, como se muestra en la tabla 6.

**Tabla 6**

*Parámetros de entrada y salida en los puntos de diseño desde Ansys Workbench*

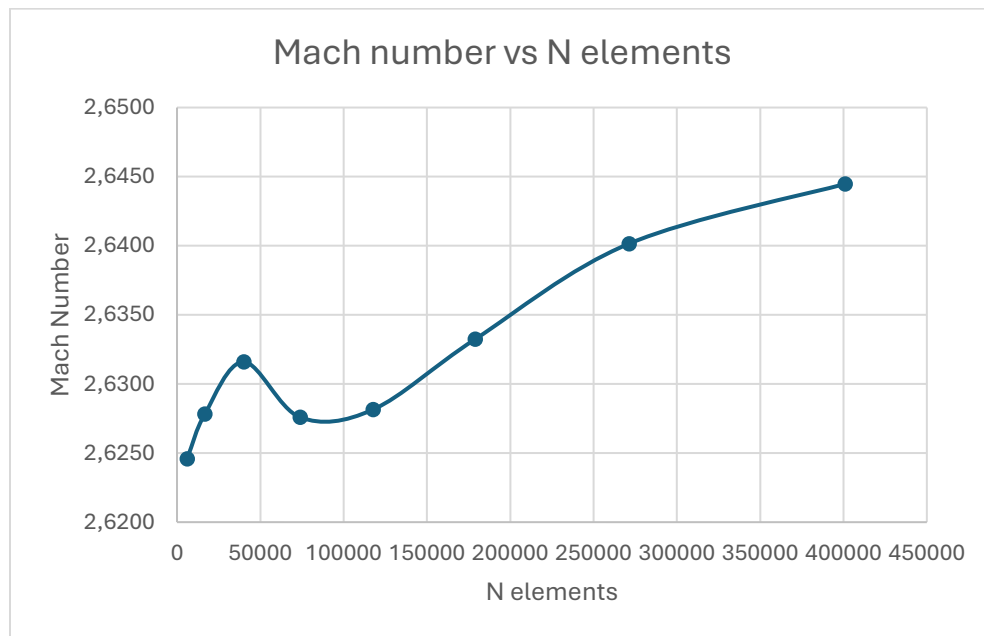
| Design Point      | Input Parameter |             |             |             | Output Parameters |             |               |                 |
|-------------------|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------------------|-------------|---------------|-----------------|
|                   | Edge sizing     | Edge sizing | Edge sizing | Edge sizing | N elements        | Mach number | Pressure [Pa] | Temperature [K] |
|                   | 1 (P1, P2, P3)  | 2 (P4)      | 3 (P5, P6)  | 4 (P7)      |                   |             |               |                 |
| DP 3              | 80              | 320         | 160         | 750         | 400989            | 2.6445      | 953701.63     | 1882.416        |
| DP 2              | 70              | 280         | 140         | 550         | 271339            | 2.6402      | 954360.44     | 1872.381        |
| DP 1              | 60              | 240         | 120         | 400         | 178979            | 2.6332      | 952690.22     | 1882.369        |
| DP 0<br>(Current) | 50              | 200         | 100         | 300         | 117669            | 2.6281      | 951696.34     | 1882.334        |
| DP 4              | 40              | 160         | 80          | 225         | 73900             | 2.6276      | 950639.29     | 1882.211        |
| DP 5              | 30              | 120         | 60          | 150         | 40090             | 2.6316      | 948876.22     | 1882.392        |
| DP 6              | 20              | 80          | 40          | 75          | 16700             | 2.6278      | 949075.53     | 1883.664        |
| DP 7              | 10              | 40          | 20          | 50          | 6014              | 2.6246      | 951921.42     | 1885.174        |

*Nota.* DP0 corresponde a la malla seleccionada para la geometría corregida, al presentar estabilidad en las variables monitoreadas y una adecuada relación entre precisión y costo computacional.

En la Figura 39 se presenta la evolución del número de Mach máximo en función de la densidad de elementos de la malla. El comportamiento de la curva permite identificar tres fases críticas en el proceso de validación:

### Figura 39

*Número de Mach contra número de elementos*



*Nota.* La variación del número de Mach máximo con el número de elementos permite verificar la independencia de malla para la geometría corregida.

A partir del DP 0, correspondiente a 117,669 elementos, se observa una reducción en la sensibilidad del número de Mach máximo frente al refinamiento del dominio. Esta malla presenta un equilibrio adecuado entre estabilidad numérica, precisión de los resultados y costo computacional. Aunque las mallas más finas muestran variaciones ligeras, la tendencia general permite considerar que la solución obtenida es suficientemente representativa para el análisis comparativo desarrollado.

De forma análoga, se calculó el Índice de Convergencia de Malla (GCI) para la geometría corregida mediante Thwaites. En este caso se comparó la malla de trabajo DP0, con 117669 elementos, frente a la malla DP4, con 73900 elementos.

De la Tabla 7:

- DP0:  $N = 117669$ ,  $M_{\max} = 2.6281$
- DP4:  $N = 73900$ ,  $M_{\max} = 2.6276$

Entonces:

$$r = \left( \frac{117669}{73900} \right)^{1/2} = 1.2619$$

$$e_a = \left| \frac{2.6281 - 2.6276}{2.6281} \right| \times 100 = 0.0190\%$$

$$GCI = 0.0402\%$$

Es decir, para la tobera corregida, la incertidumbre de discretización estimada para el Mach máximo es aproximadamente:

$$GCI \approx 0.04\%$$

La razón de refinamiento fue  $r = 1.2619$ , y el error relativo aparente del número de Mach máximo fue de 0.0190 %. El GCI obtenido fue de 0.0402 %, lo que evidencia una incertidumbre de discretización muy baja para la variable analizada. En consecuencia, la malla seleccionada puede considerarse adecuada para representar el comportamiento global del flujo en la geometría corregida.

Finalmente, los valores del GCI se consolidaron en la Tabla 7, con el fin de evaluar de manera comparativa la independencia de malla en ambas configuraciones.

**Tabla 7***Índice de convergencia de malla para el número de Mach máximo*

| Geometría        | Malla fina | Malla gruesa | Mmax1  | Mmax2  | (r)    | (ea) [%] | GCI [%] |
|------------------|------------|--------------|--------|--------|--------|----------|---------|
| Tobera base MoC  | 118047     | 74172        | 2.6286 | 2.6308 | 1.2616 | 0.0837   | 0.1769  |
| Tobera corregida | 117669     | 73900        | 2.6281 | 2.6276 | 1.2619 | 0.0190   | 0.0402  |

*Nota.* El GCI se calculó de forma aproximada tomando como variable de interés el número de Mach máximo. Se consideró  $p = 2$ , correspondiente al esquema de discretización *second-order upwind*, y un factor de seguridad  $F_s = 1.25$ .

Los valores obtenidos, inferiores al 1 %, indican que la variación del número de Mach máximo frente al refinamiento de malla es reducida, por lo que las mallas seleccionadas presentan un nivel adecuado de independencia para el análisis comparativo desarrollado.

Aunque el análisis de independencia de malla se realizó tomando como variable representativa el número de Mach máximo, este parámetro permite evaluar la estabilidad global de la solución en una región sensible del flujo compresible. No obstante, variables locales como la presión en pared y la ubicación exacta de la separación pueden presentar mayor sensibilidad al refinamiento cercano a la pared. Por esta razón, dichos resultados se interpretan de manera comparativa entre geometrías y se complementan con el análisis cualitativo de presión, número de Mach y coeficiente de fricción.

#### **4.7 Validación de Resultados**

Con el fin de evaluar la confiabilidad de los resultados obtenidos mediante CFD, se llevó a cabo un proceso de validación cualitativa y de verificación de coherencia física, complementado con el análisis de convergencia numérica e independencia de malla presentado previamente. Debido a que el presente trabajo no cuenta con datos experimentales propios, la validación no debe

interpretarse como una comprobación experimental absoluta, sino como una evaluación de consistencia frente a tendencias físicas reportadas en la literatura y frente al comportamiento esperado en toberas supersónicas operando bajo condiciones de sobreexpansión.

En este sentido, la validación se abordó mediante tres enfoques complementarios: i) comparación cualitativa con literatura especializada, ii) verificación de la coherencia física del fenómeno de separación de flujo y iii) análisis indirecto del efecto de la corrección geométrica basada en el método integral de Thwaites.

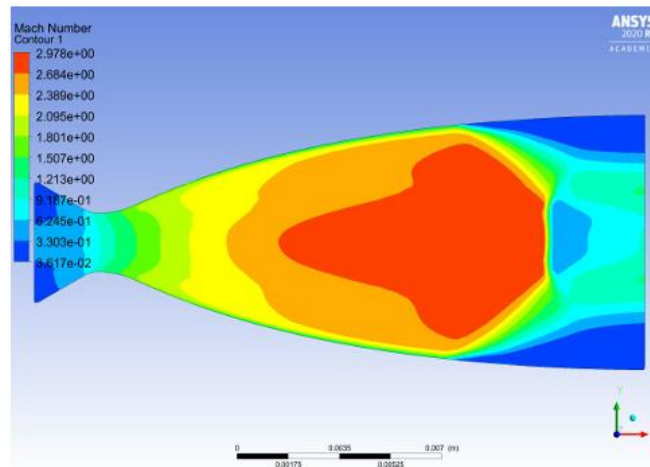
#### ***4.7.1 Comparación con la literatura***

Los resultados obtenidos presentan tendencias consistentes con estudios previos sobre separación de flujo en toberas supersónicas operando en régimen de sobreexpansión. En particular, investigaciones como la de Peri (2021) reportan que la interacción entre ondas de choque y capa límite genera regiones de separación caracterizadas por la aparición de choques internos en la sección divergente, incrementos localizados de presión en la pared, zonas de flujo recirculante y desplazamiento del punto de separación según las condiciones de operación y la geometría de la tobera.

La Figura 40 presenta los contornos de número de Mach reportados por Peri (2021) para una tobera supersónica diseñada mediante el Método de las Características bajo condiciones de separación. Esta referencia permite realizar una comparación cualitativa de la estructura del flujo, incluyendo ondas de choque internas, recuperación de presión y zonas asociadas al desprendimiento de la capa límite.

**Figura 40**

*Contornos de número de Mach en una tobera supersónica con separación de flujo obtenidos mediante simulaciones CFD reportadas por Peri (2021).*



*Nota.* Adaptado de Peri (2021).

En la Figura 40 se observa un patrón de distribución de número de Mach similar al obtenido en el presente trabajo, donde la interacción choque–capa límite produce una reorganización del campo de flujo.

De esta manera, en los resultados de las simulaciones realizadas se observa que:

- Se identifican estructuras de choque dentro de la tobera
- Se evidencia separación del flujo en la región divergente
- Se observa un desplazamiento del punto de separación entre ambas geometrías

En particular, la geometría con corrección de capa límite muestra un retraso en la aparición de la separación, lo cual concuerda con lo reportado en la literatura para configuraciones que incorporan efectos viscosos en la etapa de diseño.

Con el fin de sintetizar la comparación con la literatura, la Tabla 8 resume los principales fenómenos reportados en estudios previos y su correspondencia cualitativa con los resultados obtenidos en este trabajo.

**Tabla 8***Comparación cualitativa de los resultados CFD con la literatura*

| Aspecto evaluado                   | Literatura                                                                                                           | Resultado de esta tesis                                                                        | Coincidencia |
|------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Ondas de choque internas           | En toberas sobreexpandidas se forman ondas de choque internas como mecanismo de reajuste del flujo.                  | Los contornos de Mach muestran estructuras de choque en la sección divergente.                 | Alta         |
| Interacción choque-capas límite    | La separación suele originarse por la interacción entre ondas de choque, gradiente adverso de presión y capa límite. | La región de separación coincide con recuperación de presión, caída de Mach y reducción de Cf. | Alta         |
| Recuperación de presión en pared   | La literatura reporta aumentos locales de presión asociados a recompresión del flujo.                                | La presión en pared aumenta en la zona donde se identifica la separación.                      | Alta         |
| Separación en sobreexpansión       | El régimen sobreexpandido favorece el desprendimiento de la capa límite.                                             | Las simulaciones muestran una región asociada al desprendimiento del flujo.                    | Alta         |
| Efecto de la corrección geométrica | La modificación del contorno puede alterar la estructura del flujo y la ubicación de la separación.                  | La tobera corregida desplaza aguas abajo la región estimada de separación.                     | Media-alta   |
| Empuje global                      | Los cambios en la estructura interna del flujo no siempre producen variaciones grandes en el empuje.                 | La diferencia de empuje entre configuraciones fue inferior al 1 %.                             | Consistente  |

*Nota.* La comparación se presenta como una verificación cualitativa de coherencia física, no como una validación cuantitativa directa, debido a que no se dispone de datos experimentales propios para la geometría analizada.

#### **4.7.2 Coherencia física de los resultados**

Desde el punto de vista físico, el comportamiento del flujo es consistente con la teoría clásica de toberas supersónicas operando en condiciones de sobreexpansión. En este régimen, la presión estática del flujo en la sección divergente tiende a ser menor que la presión impuesta aguas abajo, por lo que el flujo debe ajustarse mediante la formación de ondas de choque internas. Estas ondas producen un incremento localizado de presión y generan un gradiente adverso que interactúa con la capa límite desarrollada sobre la pared.

Como consecuencia de esta interacción, el flujo cercano a la pared pierde cantidad de movimiento, el esfuerzo cortante disminuye progresivamente y el coeficiente de fricción tiende a valores cercanos a cero. Esta condición se utiliza como indicador del inicio del desprendimiento de la capa límite, ya que refleja la pérdida de adherencia del flujo sobre la superficie de la tobera.

Este comportamiento se refleja en las variables analizadas durante la simulación. La distribución de presión en la pared permite identificar los incrementos asociados a la presencia de ondas de choque; el coeficiente de fricción permite estimar la ubicación del desprendimiento mediante la reducción del esfuerzo cortante; y los contornos de número de Mach permiten visualizar la reorganización del campo de flujo y la formación de regiones asociadas a la separación.

Adicionalmente, a partir del análisis conjunto de la distribución de presión en pared, el coeficiente de fricción y los contornos de número de Mach, se estimó la ubicación del punto de separación en ambas geometrías. En la configuración sin corrección, el desprendimiento se presenta aproximadamente en  $x = 5.7$  m, mientras que en la geometría corregida se desplaza hasta cerca de  $x = 7.6$  m. Este desplazamiento aguas abajo, equivalente a un retraso aproximado del 25 %, evidencia que la corrección geométrica contribuye a mejorar la estabilidad del flujo interno y a reducir la severidad de la interacción choque – capa límite.

Asimismo, el análisis del flujo externo muestra la formación de estructuras tipo “diamantes de choque”, características de chorros supersónicos sobreexpandidos, lo cual refuerza la coherencia global de la solución obtenida.

#### ***4.7.3 Validación indirecta del modelo de corrección de la capa límite (Thwaites)***

Dado que el método de Thwaites es un modelo integral desarrollado originalmente para capas límite laminares, y considerando que en este trabajo se aplica a una tobera supersónica bajo

condiciones compresibles, su evaluación debe interpretarse de manera indirecta. En este sentido, no se busca demostrar una coincidencia exacta con resultados CFD ni con datos experimentales, sino verificar que la corrección geométrica basada en el espesor de desplazamiento reproduce tendencias físicas coherentes con el desarrollo de la capa límite y con el desplazamiento del punto de separación.

En este contexto, la evaluación del modelo se centra en verificar que la corrección geométrica basada en el espesor de desplazamiento permita:

- Reducir el área efectiva de flujo.
- Modificar la distribución de presión.
- Desplazar el punto de separación.

Teniendo esto en cuenta, se verifica que los resultados obtenidos muestran un retraso en la separación del flujo para la geometría corregida por capa límite. Asimismo, las variaciones observadas en la presión y en el coeficiente de fricción indican una modificación del desarrollo interno del flujo, asociada con un comportamiento más estable de la región cercana a la pared.

Por otro lado, el empuje global no presenta cambios significativos entre ambas configuraciones. Este resultado es relevante, ya que indica que, para las condiciones analizadas, la corrección por capa límite no afecta de manera importante la magnitud total de la fuerza generada, sino que influye principalmente en la localización de la separación y en la evolución interna del flujo.

Esta interpretación es consistente con estudios numéricos sobre separación en toberas supersónicas sobreexpandidas. En estos trabajos se ha mostrado que la estructura del flujo separado depende de la interacción entre la capa límite, el sistema de ondas de choque y la distribución de presión en la pared. Por ejemplo, Xiao et al. (2007) analizaron la separación del

flujo en una tobera convergente-divergente mediante simulaciones RANS. Sus resultados resaltan la importancia de predecir adecuadamente la ubicación del choque y la distribución de presión en la pared.

De manera similar, Olson y Lele (2013) estudiaron la separación no estacionaria en toberas sobreexpandidas, relacionando este fenómeno con la dinámica del flujo separado y la aparición de inestabilidades. Además, Peri (2021) comparó la predicción de separación en una tobera 2D con y sin corrección por capa límite, lo cual respalda la pertinencia de analizar el efecto de dicha corrección sobre la posición de la separación del flujo.

## 5. Conclusiones

En el presente trabajo se implementó una corrección geométrica por efectos de capa límite en una tobera convergente-divergente supersónica diseñada mediante el Método de las Características. Esta corrección se desarrolló a partir del método integral de Thwaites, utilizando el espesor de desplazamiento como parámetro para modificar el contorno original de la tobera. De esta manera, fue posible incorporar de forma aproximada los efectos viscosos desde la etapa preliminar de diseño, sin recurrir inicialmente a simulaciones CFD de alto costo computacional.

A partir de la metodología desarrollada, se obtuvieron dos configuraciones geométricas comparables: una tobera base diseñada mediante el Método de las Características bajo la hipótesis de flujo inviscido, y una tobera corregida geométricamente considerando el crecimiento de la capa límite. Ambas geometrías fueron evaluadas bajo las mismas condiciones de operación y de frontera, lo que permitió aislar el efecto de la corrección geométrica sobre el comportamiento del flujo y establecer una comparación consistente entre los dos casos de estudio.

Los resultados obtenidos mediante simulaciones CFD en Ansys Fluent evidenciaron que ambas configuraciones desarrollan flujo supersónico en la sección divergente y presentan fenómenos característicos de operación en régimen sobreexpandido, tales como ondas de choque internas, gradientes adversos de presión e interacción choque–capa límite. La separación del flujo fue identificada mediante el análisis conjunto de la distribución de presión en la pared, el coeficiente de fricción y los contornos del número de Mach, lo cual permitió establecer una interpretación física coherente del fenómeno.

La corrección por capa límite modificó de manera clara la predicción de la separación del flujo. A partir del análisis conjunto de presión en pared, coeficiente de fricción y contornos de Mach, la región asociada a la separación se estimó aproximadamente en  $x = 5.7$  m para la

geometría base MoC y en  $x = 7.6$  m para la geometría corregida mediante Thwaites. Este desplazamiento representa un retraso cercano al 25 %, lo que sugiere que la corrección geométrica modifica la interacción choque–capa límite y favorece una evolución más gradual del flujo en la sección divergente. No obstante, debido a la resolución cercana a la pared alcanzada por la malla, esta ubicación debe interpretarse como una región estimada de separación y no como un punto exacto de desprendimiento.

El análisis para diferentes relaciones de presión permitió verificar que el NPR condiciona directamente la respuesta del flujo y la aparición de fenómenos de separación. Para valores bajos de NPR, como 1.15 y 1.23, la recuperación de presión se presentó cerca de la garganta, indicando que el flujo no logra sostener una expansión supersónica prolongada. En cambio, para valores mayores, como 7.23 y 9.87, la expansión se mantiene durante una mayor longitud de la sección divergente y la recompresión se desplaza aguas abajo. Este comportamiento confirma que la variación de la contrapresión modifica la estructura del flujo, la ubicación de las ondas de choque y la tendencia al desprendimiento de la capa límite.

Asimismo, se observó que la geometría corregida favorece una expansión más gradual del flujo en la sección divergente. Esto se reflejó en una recuperación de presión menos abrupta, una disminución más progresiva del coeficiente de fricción y una distribución del número de Mach más uniforme en comparación con la tobera base. Estos resultados sugieren una menor intensidad de la interacción choque–capa límite y una modificación físicamente coherente del comportamiento del flujo cercano a la pared.

Por otro lado, el análisis entre la geometría base MoC y la geometría corregida por capa límite mostró que la corrección produjo cambios bajos en los parámetros globales de diseño, pero apreciables en la predicción del flujo interno. En los parámetros de salida del modelo geométrico,

el número de Mach pasó de 2.5848 a 2.5793, equivalente a una reducción de 0.2128 %, mientras que la presión estática aumentó de 324890 *Pa* a 328210 *Pa*, con una variación de 1.0219 %. El área efectiva de salida disminuyó de 11.935 a 11.928, correspondiente a una reducción de 0.0587 %. Estos valores indican que la corrección no altera significativamente la geometría global de la tobera, pero sí introduce una modificación medible en las condiciones de expansión del flujo.

En cuanto al desempeño global, el empuje calculado para la tobera base MoC fue de  $5.495 \times 10^7$  N, mientras que para la tobera corregida fue de  $5.523 \times 10^7$  N, lo que representa un incremento aproximado de 0.51 %. Asimismo, la velocidad promedio de salida aumentó de 200.23 *m/s* a 222.44 *m/s* y la magnitud del flujo másico pasó de 15007.76 *kg/s* a 15273.99 *kg/s*. A pesar de estas variaciones, el cambio en el empuje global fue inferior al 1 %, por lo que se concluye que el principal efecto de la corrección por capa límite no está en aumentar la fuerza total generada, sino en modificar la estructura interna del flujo, favorecer una evolución más gradual en la sección divergente y desplazar la región estimada de separación hacia una zona más alejada de la garganta.

La comparación del espesor de desplazamiento evidenció diferencias importantes entre el modelo integral de Thwaites y los valores obtenidos mediante CFD. En las estaciones evaluadas, el espesor calculado aumentó de 3.4236 *mm* a 4.3221 *mm*, mientras que el modelo de Thwaites pasó de 0.21472 *mm* a 0.57637 *mm*. Aunque los valores absolutos no coinciden debido a las simplificaciones del modelo integral, ambos enfoques mostraron una tendencia creciente a lo largo de la sección divergente. Por tanto, el método de Thwaites resulta útil como herramienta preliminar para representar la tendencia global del desarrollo de la capa límite, pero no como una predicción exacta de su magnitud.

Finalmente, los resultados obtenidos fueron coherentes con las tendencias reportadas en la literatura especializada sobre separación de flujo en toberas supersónicas sobreexpandidas. La presencia de ondas de choque internas, el incremento localizado de presión en la pared, la disminución del coeficiente de fricción y el desplazamiento de la región estimada de separación corresponden con el comportamiento físico esperado para este tipo de flujo. En conjunto, se concluye que la metodología propuesta permite incorporar de manera eficiente los efectos de capa límite en la etapa inicial de diseño, modificando de forma físicamente coherente la predicción del comportamiento interno de la tobera sin incrementar de forma considerable la complejidad computacional del proceso.

## 6. Recomendaciones

A partir de los resultados obtenidos en el presente trabajo, se identifican varias líneas de desarrollo que podrían ampliar y fortalecer el estudio del comportamiento del flujo en toberas supersónicas diseñadas mediante el Método de las Características.

En primer lugar, se recomienda complementar el análisis realizado mediante la implementación de modelos más avanzados de capa límite o métodos de interacción viscosa–inviscida que permitan mejorar la estimación del crecimiento de la capa límite en condiciones de flujo compresible. Esto permitiría refinar la corrección geométrica aplicada al contorno de la tobera y evaluar con mayor precisión su influencia sobre la predicción del desprendimiento del flujo.

Adicionalmente, sería de interés realizar simulaciones numéricas utilizando modelos de turbulencia de mayor fidelidad, como simulaciones híbridas RANS–LES o técnicas de simulación de grandes remolinos (LES), con el fin de analizar con mayor detalle la interacción choque–capa límite y la dinámica de la región de separación en la sección divergente de la tobera.

Como extensión del presente trabajo, también se sugiere desarrollar un estudio paramétrico que analice el efecto de variables como la relación de presiones, el número de Reynolds o la geometría de la sección divergente sobre la ubicación y el patrón de separación del flujo.

Finalmente, una validación experimental mediante ensayos en túnel de viento o instalaciones de flujo compresible permitiría contrastar los resultados obtenidos mediante simulación numérica y fortalecer la aplicación de esta metodología en el diseño de toberas supersónicas para aplicaciones aeroespaciales.

### Referencias Bibliográficas

- Almqvist, M. (2005). Semi-empirical model for supersonic flow-separation in rocket nozzles. Luleå University of Technology.
- Anderson, J. D., Jr. (1995). Computational fluid dynamics: The basics with applications. McGraw-Hill.
- Anderson, J. D., Jr. (2003). Modern compressible flow: With historical perspective (3rd ed.). McGraw-Hill.
- ANSYS Inc. (2026). ANSYS Fluent Theory Guide (Release 2026 R1).
- Cebeci, T., & Bradshaw, P. (1977). Momentum transfer in boundary layers. Hemisphere Publishing Corporation.
- Celik, I. B., Ghia, U., Roache, P. J., Freitas, C. J., Coleman, H., & Raad, P. E. (2008). Procedure for estimation and reporting of uncertainty due to discretization in CFD applications. *Journal of Fluids Engineering*, 130(7), 078001. <https://doi.org/10.1115/1.2960953>
- Çengel, Y. A., & Cimbala, J. M. (2021). Fluid mechanics: Fundamentals and applications (5th ed.). McGraw-Hill.
- Courant, R., & Friedrichs, K. O. (1948). Supersonic flow and shock waves. Interscience Publishers.
- DeBonis, J. (2010). Nozzle flow and CFD modeling. NASA Glenn Research Center.
- Farokhi, S. (2014). Aircraft propulsion (2nd ed.). John Wiley & Sons.
- Frey, M., & Hagemann, G. (1999). Flow separation and side-loads in rocket nozzles. En 35th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit. American Institute of Aeronautics and Astronautics. <https://doi.org/10.2514/6.1999-2815>

- Fuentes Manrique, O. A. (2019). Methodology for designing and analyzing an ideal convergent-divergent nozzle [Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander]. Universidad Industrial de Santander.
- Hill, P. G., & Peterson, C. R. (1992). Mechanics and thermodynamics of propulsion (2nd ed.). Addison-Wesley.
- Huzel, D. K., & Huang, D. H. (1992). Modern engineering for design of liquid-propellant rocket engines. American Institute of Aeronautics and Astronautics.  
<https://doi.org/10.2514/4.866197>
- Liepmann, H. W., & Roshko, A. (2001). Elements of gasdynamics. Dover Publications.
- Mattingly, J. D., Heiser, W. H., & Pratt, D. T. (2002). Aircraft engine design (2nd ed.). American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Menter, F. R. (1994). Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8), 1598–1605. <https://doi.org/10.2514/3.12149>
- Menter, F. R., Kuntz, M., & Langtry, R. (2003). Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. En *Turbulence, heat and mass transfer 4* (pp. 625–632).
- Oates, G. C. (1997). Aerothermodynamics of gas turbine and rocket propulsion (3rd ed.). American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Olson, B. J., & Lele, S. K. (2013). A mechanism for unsteady separation in over-expanded nozzle flow. *Physics of Fluids*, 25, 110809. <https://doi.org/10.1063/1.4819349>
- Papamoschou, D., & Zill, A. (2004). Fundamental investigation of supersonic nozzle flow separation. En *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. American Institute of Aeronautics and Astronautics. <https://doi.org/10.2514/6.2004-1111>

- Parpia, I. H., Kentzer, C. P., & Williams, M. H. (1988). Multidimensional time-dependent method of characteristics. *Computers & Fluids*, 16(1), 105–117. [https://doi.org/10.1016/0045-7930\(88\)90041-2](https://doi.org/10.1016/0045-7930(88)90041-2)
- Peri, S. H. P. (2021). Prediction of nozzle flow separation in 2D MOC nozzle with and without boundary layer correction. En *AIAA Scitech 2021 Forum*. American Institute of Aeronautics and Astronautics. <https://doi.org/10.2514/6.2021-1761>
- Prince, D. C. (1982). Method of characteristics for supersonic nozzle design. NASA Technical Report.
- Roache, P. J. (1998). Verification and validation in computational science and engineering. Hermosa Publishers.
- Rott, N., & Crabtree, L. F. (1952). Simplified laminar boundary-layer calculations for bodies of revolution and yawed wings. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 19(8), 561–570. <https://doi.org/10.2514/8.2381>
- Saad, M. A. (1985). Compressible fluid flow. Prentice-Hall.
- Schlichting, H., & Gersten, K. (2017). Boundary-layer theory (9th ed.). Springer.
- Shapiro, A. H. (1953). The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow (Vol. 1). Ronald Press.
- Škorpík, J. (2018). Analysis of pressure distributions in rocket nozzles. *Acta Polytechnica*, 58(3), 155–164. <https://doi.org/10.14311/AP.2018.58.0155>
- Thwaites, B. (1949). Approximate calculation of the laminar boundary layer. *Aeronautical Quarterly*, 1(3), 245–280.
- Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (2007). An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method (2nd ed.). Pearson Education.

- White, F. M. (2011). Fluid mechanics (7th ed.). McGraw-Hill.
- Wilcox, D. C. (2006). Turbulence modeling for CFD (3rd ed.). DCW Industries.
- Xiao, Q., Tsai, H. M., & Papamoschou, D. (2007). Numerical investigation of supersonic nozzle flow separation. *AIAA Journal*, 45(3), 532–541. <https://doi.org/10.2514/1.20073>
- Zucrow, M. J., & Hoffman, J. D. (1976). Gas dynamics: Vol. 1. John Wiley & Sons.