ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN ESTUDIANTES DE NOVENO GRADO CUANDO REALIZAN ACTIVIDADES QUE PROMUEVEN EL TRÁNSITO ENTRE LOS PENSAMIENTOS ANALÍTICO-ARITMÉTICO Y SINTÉTICO - GEOMÉTRICO

SULEGNA RAMOS JAIMES
YENIS MARÍA ORDOSGOITIA ESCORCIA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2011

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN ESTUDIANTES DE NOVENO GRADO CUANDO REALIZAN ACTIVIDADES QUE PROMUEVEN EL TRÁNSITO ENTRE LOS PENSAMIENTOS ANALÍTICO-ARITMÉTICO Y SINTÉTICO - GEOMÉTRICO

SULEGNA RAMOS JAIMES
YENIS MARÍA ORDOSGOITIA ESCORCIA

DIRECTOR:
DR. JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA

CODIRECTORA:
M. EN C. SOLANGE ROA FUENTES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2011

"Si una persona es perseverante,

aunque sea dura de entendimiento,

se hará inteligente; y aunque sea débil

se transformará en fuerte."

Leonardo Da Vinci

AGRADECIMIENTOS

A mi ***Dios***, que me diste la oportunidad de vivir, de regalarme una familia maravillosa, por todas las bendiciones recibidas y por darme la fuerza necesarias para terminar mi especialización.

Con mucho cariño, principalmente a mi madre **ELISENIA ROSA ESCORCIA** quien me dio la vida y ha estado conmigo en todo momento. Gracias por todo mamá, por tu amor incondicional, por tu gran apoyo en mis momentos difíciles.

A mis Hijos, ***EDWIN, YESNNY, FABER, DWINER, JENZON*** *y a mi esposo,* ***EDWIN HOYOS,*** gracias por tu gran apoyo, por tu comprensión, por la ayuda permanente que me diste, eres muy importante para mí. Y a mi **HIJOS** que son el motor de mi vida mi aliento y mi vida entera a quien le dedico todo lo que soy ahora, mil gracias a todos.

A **SULEGNA RAMOS,** por su gran apoyo en momentos difíciles y por no dejarme desfallecer y por su entereza para salir adelante en nuestra meta.
A mis profesores, gracias por sus enseñanzas que son hoy su legado. Y no me puedo ir sin antes decirles, que les agradezco a todos ustedes por haber llegado a mi vida y por compartir sus conocimientos, ustedes nos hacen crecer y valorar a las personas que nos rodean.

Yenis María Ordosgoitia Escorcia

DEDICATORIA

Dedicado a la gran matemática manifestada en el universo,
de la cual solo con comprender una ínfima porción,
me hace sentir reverencia por el gran creador que lo formó,
quien me dio la oportunidad al concederme la vida y
las fuerzas para terminar este proyecto.

Dedicado a mi madre **FANNY JAIMES** que siempre me ha dado estimulo y ha despertado en mí el deseo constante de superación.

Sulegna Ramos Jaimes

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

TITULO:

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN ESTUDIANTES DE NOVENO GRADO CUANDO REALIZAN ACTIVIDADES QUE PROMUEVEN EL TRÁNSITO ENTRE LOS MODOS DE PENSAMIENTO ANALÍTICO-ARITMÉTICO Y SINTÉTICO-GEOMÉTRICO.*

AUTORES:

ORDOSGOITIA ESCORCIA Yenis María, RAMOS JAIMES Sulegna**

Palabras claves:
Modos de pensamiento, Sistemas de ecuaciones lineales, analítico-aritmético, sintético-geométrico.

El presente trabajo pretende dar respuesta al siguiente planteamiento. ¿Elaborar actividades que faciliten el tránsito entre los modos de pensamiento mejora la comprensión que tienen los estudiantes de los sistemas de ecuaciones lineales?

En nuestro país el Ministerio de Educación Nacional (MEN), ha dado referentes en cuanto a los contenidos temáticos asignados para cada nivel. Teniendo en cuenta estos estándares de competencia encontramos que para los niveles de 8° y 9° los jóvenes deberían iniciar el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, mediante la modelación y solución de situaciones relacionadas con esta temática. Sin embargo, los estudiantes tienen dificultades a medida que las ecuaciones van haciéndose más complejas o cuando deben representar más de una ecuación lineal en un mismo plano.

Para el desarrollo de este trabajo se realizó el diseño de una secuencia de actividades que permitieran al educando valerse de diferentes representaciones para comprender un sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución. Estas representaciones se apoyaron en los modos de pensamiento sintético – geométrico (SG) y analítico – aritmético (AA) planteados por Sierpinska (2000), debido a que el tránsito entre estos modos de pensamiento son considerados como un indicador de aprendizaje en el caso del álgebra.

Se aplicó una entrevista didáctica a tres de los estudiantes que habían resuelto la secuencia anterior con el fin de reconocer las evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento.

Finalmente se presentan los análisis de las actividades y de las entrevistas a la luz del marco teórico y de los antecedentes.

---

*Trabajo de Grado

**Facultad de Ciencias –Escuela de Matemáticas-Especialización en Educación Matemática-Director: CAMARGO GARCÍA, Javier Enrique – Codirectora: ROA FUENTES, Solange

ABSTRACT

TITLE:

ANALYSIS OF THE UNDERSTANDING OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS IN NINTH GRADE STUDENTS WHEN IMPLEMENT ACTIVITIES THAT PROMOTE THE TRANSITION BETWEEN MODES OF THOUGHT ANALYTICAL-ARITHMETIC AND SYNTHETIC-GEOMETRIC*.

AUTHORS:

ESCORCIA ORDOSGOITIA Yenis María, RAMOS JAIMES Sulegna **

Keywords:
Modes of thought, systems of linear equations, arithmetic-analytic, synthetic-geometric

This project aims to answer the following approach. Do you produce activities that facilitate the transition between modes of thought that have improved student understanding of systems of linear equations?

In our country, the Ministry of National Education (MEN), hasrelated in terms of the topics assigned for each level. Given thesestandards of competence found that levels of 8 ° and 9 young people should begin to study systems of linear equations, by modeling and solving situations related to this issue. However, students have difficulties as the equations are becoming morecomplex or when they represent more than one linear equation inthe same plane.

For the development of this work was carried out to design a sequence of activities that allow the learner to make use of different representations for understanding a system of linear equations and its solution set. These representations were based on synthetic modes of thought - geometric (SG) and analytical - arithmetic (AA) raised by Sierpinska (2000), because the transition between these modes of thought are considered an indicator of learning in the case of algebra.

We applied a teaching interview to three of the students that they had solved the above sequence to recognize the evidence of transition between modes of thought.

Finally, we present the analysis of activities and interviews in the light of the theoretical framework and background.

---

*Thesis

**Science Faculty- Mathematics school – Specialization in Mathematical Education- Director CAMARGO GARCÍA, Javier Enrique – Codirectora: ROA FUENTES, Solange

INTRODUCCIÓN

En nuestro país el Ministerio de Educación Nacional (MEN), ha dado referentes en cuanto a los contenidos temáticos asignados para cada nivel. Teniendo en cuenta estos estándares de competencia encontramos que para los niveles de 8° y 9° los jóvenes deberían iniciar el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, mediante la modelación y solución de situaciones relacionadas con esta temática. Sin embargo, los estudiantes tienen dificultades a medida que las ecuaciones van haciéndose más complejas o cuando deben representar más de una ecuación lineal en un mismo plano. Como lo han reportado algunos trabajos (Ochoviet, 2009; Ramírez, 2008; Ardila y Montañez, 2010) la manera tradicional en la que se desarrolla la temática, haciendo énfasis en los métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales genera aprendizajes erróneos sobre el sistema de ecuaciones y su solución.

Estas dificultades que encuentran los estudiantes a la hora de interpretar la solución de un sistema de ecuaciones lineales, están relacionadas con el tránsito de una manera de pensar a otra, que está ligada a la representación de los conceptos. Estas representaciones están asociadas con los modos de pensamiento planteados por Sierpinska (2000); tal como ella lo postula, una verdadera comprensión de los conceptos debe permitir que los estudiantes transiten sin dificultad de un tipo de representación a otra.

Por esta razón, en este trabajo nos propusimos dar respuesta al siguiente planteamiento: ¿Elaborar actividades que faciliten el tránsito entre los modos de pensamiento mejora la comprensión que tienen los estudiantes de los sistemas de ecuaciones lineales? Inicialmente realizamos el diseño de una secuencia de actividades que permitieran al educando valerse de diferentes representaciones para comprender un sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución. Estas representaciones se establecieron en los modos de pensamiento sintético –

geométrico (SG) y analítico – aritmético (AA) planteados por Sierpinska (2000), el tránsito entre estos modos de pensamiento son considerados como un indicador de aprendizaje en el caso del álgebra.

Por lo anterior, estudiamos estos modos de pensamiento (Sierpinska, 2000), y diseñamos actividades para iniciar en los estudiantes la noción de sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución mediante el tránsito entre los modos de pensamiento SG y AA. Aplicamos la propuesta diseñada a los estudiantes del grado noveno del Colegio Nuestra Señora de la Paz, del municipio de San Vicente de Chucurí (Santander). Y luego analizamos los resultados a la luz de los antecedentes, del marco teórico y del análisis a priori de las situaciones planteadas con el fin de reconocer el logro del tránsito entre los modos de pensamiento planteados y la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales.

En última instancia pudimos comprobar que las actividades diseñadas en este trabajo, contribuyeron a la reflexión alrededor de la problemática planteada y promovieron la necesidad de desarrollar actividades orientadas a generar el desarrollo del pensamiento matemático.

1. JUSTIFICACIÓN

Una parte fundamental de la labor como educadores es hacer una constante reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del área. Para esto, se deben escoger los temas que sean más relevantes con el propósito de desarrollar habilidades que les permitan a los estudiantes entender las situaciones cambiantes de la vida diaria. Uno de ellos son los sistemas de ecuaciones lineales, debido a que en los procesos diarios, se trabajan de manera inconsciente. Para evaluar la forma de enseñarlo, se empieza detectando las falencias en la metodología aplicada por los docentes, con base en las dificultades que tienen los estudiantes para comprender los conceptos. Si se habla de álgebra lineal, y en especial de los sistemas de ecuaciones lineales, existe como referente los modos de pensamiento planteados por Sierpinska (2000) y el tránsito entre estos como un indicador de la comprensión. Sin embargo, se han detectado deficiencias que tienen los educandos para transitar entre estos modos de pensamiento. Estas pueden ser causadas porque los docentes orientan las clases de una manera mecánica, mediante la memorización de pasos, sin dar una fundamentación estructural.

Del mismo modo, es probable que la falta de interés y la costumbre, evite que se haga una reflexión crítica al interior de las instituciones, sobre la importancia de darles más herramientas a los estudiantes para mejorar su desempeño en el álgebra lineal, y es notorio que algunos no reconocen esta necesidad; así que dirigen sus clases apoyándose en las actividades que encuentran en los libros que hay en el mercado. Estos libros, lamentablemente, exponen el tema de ecuaciones lineales de forma tradicional y no disponen de actividades para motivar el tránsito entre los modos de pensamiento. Incluso los ejemplos que dan sobre los sistemas de ecuaciones lineales se quedan cortos, debido a que se dedican a mostrar aquellos sistemas que tienen única solución y no se exponen configuraciones diferentes, como es el caso de los sistemas que tienen infinitas soluciones o no tienen solución. Cuando decimos de forma tradicional, estamos haciendo referencia a que se profundiza en los métodos algebraicos para resolver los sistemas, y aunque enseñan el método gráfico, nunca se establece una relación con los resultados obtenidos entre uno y otro método. Esta falta de generalidad sobre el tipo de sistemas produce concepciones muy pobres en los estudiantes, ideas que se aferran a sus construcciones matemáticas y que en niveles superiores dificultan la generalización.

Dada la problemática es fundamental plantear algunas actividades que mejoren la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales a través del tránsito entre los modos de pensamiento AA al SG y viceversa, y que favorezcan el aprendizaje significativo para que los educandos puedan abordar con éxito situaciones que involucran sistemas de ecuaciones lineales. Consideramos que mediante el estudio de esta temática por el referente mencionado, es posible desarrollar verdadero pensamiento matemático en nuestros educandos en donde tengan la posibilidad de pensar más allá de la pura mecanización.

2. ANTECEDENTES

En medio de las dificultades existentes para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (específicamente para este caso, en el álgebra lineal), encontramos que los jóvenes no logran transitar entre los distintos modos de pensamiento (Ardila y Montañez 2010); estos modos de pensamiento son las diferentes formas que podemos tener de comprender un objeto matemático. Por ejemplo, un vector puede ser visto como un segmento rectilíneo en el plano cartesiano con dirección, magnitud y sentido, lo que nos daría un punto de vista geométrico; pero, también puede ser visto como una pareja ordenada de la forma (x, y) si estamos en el plano bidimensional, este modo de percibirlo nos da un punto de vista aritmético. Sin embargo, si pensamos en el vector como un elemento de un espacio vectorial, estamos haciendo uso de un pensamiento estructural. Sierpinska (2000) menciona que es muy importante para la comprensión y el manejo adecuado de los conceptos en álgebra lineal, que el estudiante utilice los distintos modos de pensamiento dependiendo del contexto en el que este aparece. Una de las dificultades detectadas por diversas investigaciones es el tránsito de un modo de pensamiento a otro. Ya que las propiedades que se perciben en los tipos de pensamiento no son las mismas y es el estudiante quien debe determinar qué tipo de representación le ofrece la información pertinente para resolver un problema.

Oaxaca y Sánchez (2008) propusieron que las dificultades que presentan los estudiantes para transitar de un pensamiento AA a uno SG están relacionadas con el hecho de que no logran construir una ecuación, dada una gráfica. Es decir, están habituados a determinar una gráfica a partir de una ecuación, analizando la información que ofrece la ecuación para determinar su representación grafica. También afirman los autores, que parte de la responsabilidad es de nosotros los docentes, debido a que utilizamos más el pensamiento AA que otro. Es decir, en el caso de los sistemas de ecuaciones lineales enseñamos cómo solucionar el sistema por diferentes métodos aritméticos o algebraicos y no analizamos la relación que estos tienen por ejemplo, con su representación gráfica. Tampoco es común que en el aula de clase se analicen situaciones donde sea necesario obtener una ecuación partiendo de una gráfica, ni la interpretación que tiene la solución de un sistema de ecuaciones en diversas situaciones.

Por otra parte, en los libros de texto el tema es abordado de manera incompleta, solo trabajando el pensamiento AA y no están elaborados para propiciar el tránsito de un pensamiento a otro.

En este mismo sentido, Ramírez (2008) analiza las concepciones que tienen los estudiantes de educación superior acerca de los sistemas de ecuaciones lineales utilizando como marco teórico los modos de pensamientos de Sierpinska (2000). Para este trabajo aplicaron primero, una prueba piloto a dos estudiantes del nivel bachillerato en Canadá y por medio de ésta realizan todas las correcciones correspondientes para elaborar la entrevista que le realizaron a cinco estudiantes de primer año de la universidad en México y escogieron a los de mejor nota después de haber terminado el curso de matemáticas I.

Primeramente se les plantea a los estudiantes una actividad para identificar si tienen claro el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales y si son capaces de identificar el número posible de soluciones utilizando una representación gráfica. Para este caso, tres de los cinco estudiantes tienen dificultad de transitar del pensamiento SG al AA, ya que mediante el proceso visual, no son capaces de decir cuántas soluciones tiene un sistema de ecuaciones lineales, debido a que no contemplan la posibilidad de las rectas coincidentes. Igualmente un estudiante confunde los puntos de corte en los ejes x y y, con la solución del sistema al indicar estos puntos sobre la gráfica como puntos solución. Del mismo modo se muestra que dos de los estudiantes tienen dificultad de pasar del pensamiento AA al SG, ya que no fueron capaces de identificar los tres casos posibles de solución dado un sistema de ecuaciones de dos por dos. En este caso un estudiante busca valores para x dándole a y el valor de cero y luego encuentra el valor de y dándole a x el valor de cero; lo que realmente encuentra éste estudiante son los interceptos con los ejes indicando que el sistema tiene dos soluciones $(x, 0)$; $(0, y)$; para éste estudiante la solución de un sistema existe si hay intersección (Ramírez, 2008). Esta es la relación incorrecta que los estudiantes establecen entre la solución del sistema de ecuaciones y los interceptos de las rectas que los representan, con los ejes coordenados del plano cartesiano. Parte de la explicación que nos da la autora, es que los estudiantes se basan únicamente en la figura para responder las preguntas, es decir, se quedan en el pensamiento SG, y no hacen el transito a un pensamiento AA. Por citar un ejemplo; cuando se les presenta una grafica en la que hay dos rectas superpuestas y otra atravesándolas, los estudiantes consideraron que el sistema asociado a esta grafica tenía más de una solución.

Ramírez (2008), también analiza que los estudiantes tanto en el modo de pensamiento SG y AA, tienen la dificultad en identificar cuándo un sistema de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones. Esto se debe a que los estudiantes tienen en cuenta sólo la percepción visual del problema donde únicamente existe una recta y al parecer no hay un sistema de ecuaciones que lo represente. Por ejemplo, cuando buscan la solución por cualquier método algebraico y llegan a la identidad $0 = 0$, dicen que son rectas paralelas y el sistema no tiene solución. En otro caso, una estudiante afirma que el sistema no tiene solución ya que solo hay una ecuación y para ella, no hay un sistema de ecuaciones porque no hay intersección con otra recta. Estos estudiantes en el transcurso de la entrevista siempre tienen la misma concepción y para ellos un sistema de ecuaciones cuya representación gráfica sea una recta, no tiene solución porque no hay punto de corte.

Después de analizar el caso de sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas, se observó que los estudiantes tienen dificultad para transitar del pensamiento SG al AA, ya que estos identifican cada punto de corte con la solución del sistema, es decir, para ellos el punto de corte de cada par de rectas es la solución del sistema y no tiene solución cuando son rectas paralelas. Esta respuesta es coherente con las anteriores, puesto que siguen asociando punto de corte de las rectas con solución del sistema, y revela que los estudiantes presentan dificultad para identificar las posibles soluciones de un sistema de 3 x 2 (Ramírez, 2008).

Ramírez (2008) presentó a los estudiantes una actividad donde les pide resolver un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas; una de las estudiantes tiene dificultad, ya que para ella el sistema tiene tres soluciones, a pesar de usar un método aritmético no toma en cuenta que para que sea solución debe verificar las tres ecuaciones, llama la atención de Ramírez (2008) que ella anteriormente había identificado los posibles casos de solución del sistema en una forma gráfica. Así que se puede concluir que ésta estudiante tiene los modos de pensamientos SG y AA en forma independiente y no realiza el tránsito entre estos pensamientos. A través de la entrevista y con la realización de las actividades ésta estudiante sigue afirmando que en el sistema el corte de cada par de recta es un punto de solución, diciendo que el sistema tiene tres soluciones tanto gráficamente como aritméticamente.

Durante toda la entrevista se observó que se planteaban preguntas muy similares pero presentadas desde el pensamiento SG o desde el pensamiento AA, esto inhibe que los estudiantes hagan el transito entre un pensamiento y otro.

De igual forma, el trabajo de Ochoviet (2010), reitera la dificultad de transitar entre el pensamiento AA y SG. El objetivo de esta investigación fue reconocer las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de los conceptos de sistemas de ecuaciones lineales y solución de un sistema de ecuaciones. Para lograr este objetivo plantearon una metodología que incluyó analizar los libros de texto donde se presenta el tema, observar clases donde los docentes lo exponen y luego presentar un cuestionario a los estudiantes. El cuestionario fue aplicado a dos grupos, el primer grupo de 26 alumnos con edades entre los 14 y 15 años; el segundo grupo de 21 alumnos con edades entre los 17 y 18 años. Para darle un orden al análisis de las respuestas de los estudiantes se clasificaron en 3 grupos dependiendo de la respuesta que dieron a la primera pregunta. El primer grupo son aquellos que respondieron que el sistema no tiene solución, el segundo los que dijeron que el sistema tiene tres soluciones y por último los que dieron otras respuestas. Uno a uno se fue entrevistando algunos estudiantes para que expusieran las razones de sus respuestas, la entrevistadora les pedía argumentar y además les hacía nuevas preguntas para que lograran relacionar los modos de pensamiento SG y AA, y de esta manera llegar a una respuesta correcta. La secuencia inicia con una situación en donde se presentan las líneas con una configuración igual que la mostrada en la figura 1.1 y se les pide que digan cuántas soluciones tiene el sistema y por qué.

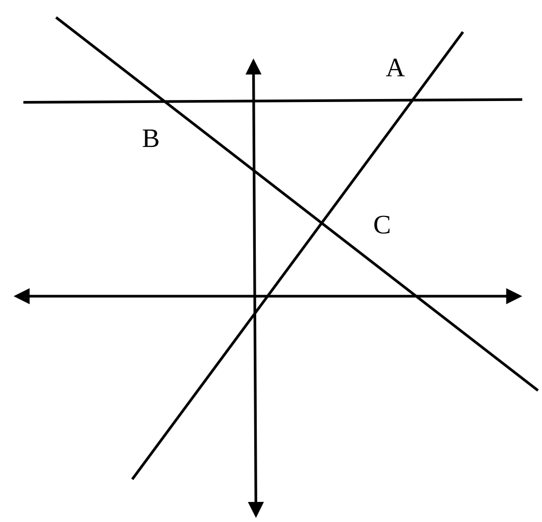


Figura 1. Representación en el plano cartesiano de un sistema de ecuaciones de 3x2 (Ochoviet, 2010, p.31)

Ante esto los estudiantes responden que la solución del sistema consiste en los puntos A, B y C de la gráfica, aunque la respuesta es errónea, hace evidente que están interpretando la solución de un sistema como puntos de intersección entre las rectas, y en vista de no contar con las ecuaciones de las rectas, los estudiantes no pueden comprobar si estos puntos hacen verdaderas las tres ecuaciones. Este mismo problema ya había sido discutido por Ramírez (2008), y cabe añadir que los estudiantes, logran definir correctamente la solución de un sistema de ecuaciones lineales si se les pide que la expliquen usando sus propias palabras. Sin embargo, en la gráfica presentan confusión. Esto indica que hay una clara dificultad en transitar de un pensamiento AA a uno SG. Después que el joven responde las demás preguntas de la secuencia, empieza a comparar el concepto que tiene de manera intuitiva (es decir, recurre a la definición gráfica del concepto de solución para responder las primeras 3 preguntas) con el concepto que tiene de manera algebraica.

Es muy interesante la forma como está diseñada la secuencia, porque el orden en que se plantean las preguntas ayuda a la construcción de conocimiento. Vinner (1991) afirma que cuando un estudiante se enfrenta a situaciones matemáticas, lo ideal es que recurra a la definición del objeto matemático en cuestión, pero en realidad los estudiantes recurren a *la imagen* que se han formado de este objeto matemático. Si esta imagen es incompleta muy seguramente el estudiante cometerá ciertos errores en sus respuestas, sin embargo si ésta imagen involucra varios aspectos y propiedades del objeto matemático el estudiante tendrá las herramientas para dar respuestas correctas y deducir nuevos conceptos. Ochoviet (2010) construyó la secuencia teniendo como referencia las afirmaciones de Vinner; y abarcó en ella situaciones que enfrentaban al estudiante a contextos nuevos para él, obligándolo a reevaluar la imagen que se había formado del concepto de sistemas de ecuaciones y de solución de sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, en la primera pregunta (figura 1) algunos estudiantes presentaron dudas en cuanto a si la gráfica hacía referencia a un sistema de ecuaciones lineales o no; esto se debe a que en las clases solamente se habían presentado ejemplos con sistemas de ecuaciones 2x2 y nunca habían visto la configuración de 3x2. Al final, muchos entienden que la configuración de 3x2 que estamos analizando efectivamente sí representa un sistema de ecuaciones lineales pero sin solución.

Se estudiaron cada una de las respuestas y gráficas dadas por los estudiantes, tratando de identificar los modos de pensamiento que eran manejados por ellos y el tránsito entre el SG y AA. Se buscaron las posibles justificaciones de los errores y se dieron recomendaciones para enseñar este tema de una forma más práctica (Ochoviet, 2010).

Con miras a utilizar varias de las conclusiones que se muestran en este trabajo, nos permitimos contar parte del análisis realizado por Ochoviet (2010): Para empezar se menciona que las preguntas 1, 2 y 3 están planteadas desde un modo de pensamiento geométrico y que esta manera de plantear la pregunta inhibe el proceso de pensamiento analítico aritmético, porque a pesar de que el muchacho conoce el significado de solución de un sistema de ecuaciones, es decir, él entiende la solución de sistema de ecuaciones como la pareja que verifica todas las ecuaciones. Sin embargo, no recurre a esta definición para responder las preguntas, sino que se basa en la imagen, esto ya que la pregunta está planteada de manera geométrica, esto lo lleva a utilizar un modo intuitivo para responder. Cuando se les está desarrollando la clase, el profesor les explica uno de los métodos para hallar la solución; se aplica el método, se encuentra un punto y luego se devuelven a las ecuaciones y se reemplaza el punto para saber si verifica todas las ecuaciones, si lo hace es porque la pareja encontrada es la solución del sistema, de lo contrario deben revisar en dónde se ha cometido un error. Esto quiere decir, que los profesores enseñan el método de resolución de sistema de ecuaciones enmarcado en el modo de pensamiento AA, dándole prioridad a los sistemas que tienen única solución.

En el pensamiento SG no se utiliza ninguna actividad para mostrarles a los estudiantes que un punto es o no solución, por ejemplo actividades que permitan articular la noción de pertenencia con la noción de sistema de ecuaciones. La relación de pertenencia contribuye a una adecuada representación del concepto de solución y se refiere a identificar que el punto pertenece a cada una de las rectas, que representan las ecuaciones del sistema y luego que el punto efectivamente es la solución del sistema porque pertenece a todas las rectas del sistema. Esto nos lleva a deducir que no es incorrecto que piensen en la solución de un sistema como el punto de corte de las líneas, siempre y cuando tengan en cuenta que es el punto *común* a todas las líneas. Al decir que es el punto común, le está asignando una propiedad especial, no es sencillamente un punto de corte, sino que además de ser punto de corte, es *el mismo* para todas las rectas.

Por lo que se refiere a aquellos estudiantes que respondieron bien toda la prueba, Ochoviet (2010) muestra que fueron aquellos que lograron un tránsito entre los dos modos de pensamiento SG al AA y además manejaron muy bien la posición relativa de dos rectas en un plano cartesiano. Al empezar a analizar que solamente existen tres posibilidades (infinitas soluciones, sin solución o única solución), ellos se dieron cuenta que al decir que es el *punto común* le concedían una propiedad de unicidad; es decir, llegaron a la conclusión de que es el único punto que puede hacer verdaderas todas las ecuaciones. El concederle una propiedad especial al punto de solución de un sistema de ecuaciones lleva a que el estudiante empiece a pasarse al pensamiento AE.

Por otra parte Ochoviet (2010) muestra que en el caso de los estudiantes que no respondieron adecuadamente las preguntas, se llegó a la conclusión que les faltan más herramientas en cuanto a las propiedades de los conceptos. Cuando un estudiante no tiene clara la propiedad, recurre a la imagen que se ha formado del concepto, como en algunos casos los docentes se quedan con solamente dar ejemplos de gráficas con sistemas de 2x2, y no presentan contraejemplos de los conceptos. Entonces tienen una imagen muy reducida de sistemas de ecuaciones lineales, así que cuando se le presenta una gráfica donde hay un sistema de tres líneas, primero, tienen dudas en cuanto a si esto es o no un sistema, y luego dan una respuesta explicando que el sistema tiene solución, pero tomando las rectas dos a dos.

Algo muy interesante, es que el estudiante logra responder acertadamente las preguntas para sistemas 2x2, teniendo el concepto de solución de un sistema como el punto de corte entre las rectas, aunque es un concepto erróneo. En cambio, si nos pasamos a un sistema más amplio, como en el caso de 3x2, ese concepto hace que cometa errores. Se observa que algunas veces se producen errores porque una propiedad que es correcta en un contexto, se aplica en otro contexto para el cual no es válida. Por eso, el mismo concepto al ser expuesto a un estilo de preguntas diferentes, llevó a que los estudiantes revelaran su asociación directa de punto de corte con solución de un sistema de ecuaciones. Otro de los errores, es que los estudiantes relacionan la solución de un sistema, con el grado de las ecuaciones, debido a que son ecuaciones lineales, esto es, de grado uno; piensan que por esta razón el sistema tiene una solución y se les olvida que puede tener infinitas soluciones o ninguna (Ochoviet, 2010).

Recordemos que la solución de un sistema de ecuaciones lineales en el plano cartesiano, va a ser un par ordenado con coordenadas (x, y); sin embargo, para algunos de los estudiantes ésta solución es considerada como dos elementos y responden que el sistema tiene dos soluciones, una en x y otra en y. También se pudo notar la confusión que presentaron los estudiantes entre solución del sistema y las raíces de la función lineal, cuando los estudiantes están hablando de solución, utilizaron la palabra la raíz del sistema indicando como solución del sistema los puntos de corte con el eje x del plano cartesiano.

En las dos últimas preguntas de la secuencia se les pidió a los estudiantes que escribieran en sus palabras lo que para ellos era un sistema de ecuaciones lineales y solución de un sistema de ecuaciones lineales. Se descubrió que no hay una relación entre lo que escriben y la forma como responden las preguntas, por ejemplo escriben una definición muy aproximada, pero a la hora de responder las preguntas de la secuencia no contestaron adecuadamente; o por el contrario respondieron muy bien la secuencia pero al momento de redactar las definiciones no eran concretos.

Cabe añadir que otros errores, presentados por Ochoviet (2010) provienen de interpretar de forma inadecuada la representación de los objetos matemáticos, por ejemplo, cuando se les pide a los estudiantes que representen un sistema de ecuaciones que no tenga solución, los estudiantes dibujan dos líneas que parecen no cortarse, pero sabemos que al prolongarlas se van a intersecar, sin embargo, para ellos una recta es igual que un segmento.

De la misma manera se resalta que en los colegios se estudian solamente los sistemas 2x2 y 3x3, lo que hace que los estudiantes consideren que solo existen estas dos clases de sistemas de ecuaciones, y supongan que hablar de la solución de estos sistemas de ecuaciones es lo mismo que hablar de los puntos de corte de las rectas. Se trabaja el método gráfico solo al principio, se miran las dos rectas si se pueden cortar o no. Si se cortan y no se identifica claramente el punto de corte entonces se introduce en los métodos de resolución algebraicos para encontrar con precisión la solución, entonces se enseñan los métodos algebraicos privilegiando los sistemas donde hay única solución. Si se mantiene en este contexto de sistemas 2x2, el estudiante da respuestas correctas a las preguntas relacionadas con cuándo un sistema tiene o no solución, pero en el momento de enfrentarse a contextos diferentes a las graficas que ya se han analizado se revela el error de asociar solución de un sistema con el punto de corte. Preguntas como: “Dibuje un sistema de 3 ecuaciones con una solución” lo lleva a imaginarse una gráfica en donde hay tres rectas que se cortan en un solo punto, es decir, la imagen que tiene del concepto de solución de un sistema le permite responder acertadamente esta pregunta, sin embargo, al darle al estudiante la configuración triángulo se hace evidente la asociación porque afirma que el sistema de 3x2 tiene 3 soluciones.

El trabajo elaborado por Ardila y Montañez (2010), con estudiantes de noveno grado de secundaria y segundo semestre de universidad, también prueba cómo los estudiantes al mostrarles graficas de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, no están preparados para analizar qué para que el sistema tenga solución, las tres rectas deben intersecarse en un único punto. Por ejemplo trabajaron la siguiente actividad:

> *Teniendo en cuenta la representación gráfica de tres rectas en el plano, escribe el sistema de ecuaciones lineales correspondiente. ¿El sistema tiene solución única? ¿Por qué? ¿El sistema tiene infinitas soluciones? ¿Por qué? ¿El sistema no tiene solución? ¿Por qué?*

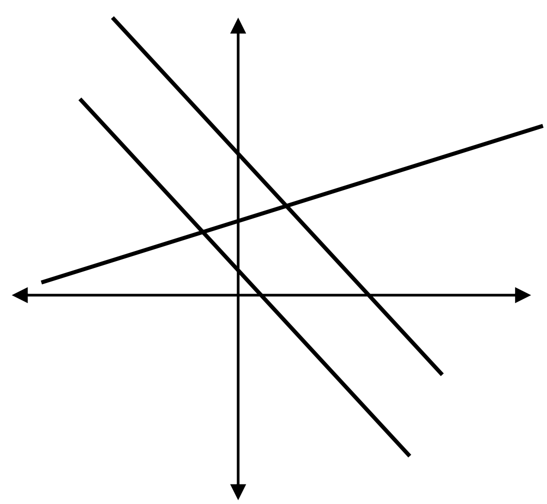


Figura 2. Representación de tres rectas en el plano. (Ardila y Montañez, 2010 p.73).

Los estudiantes no tenían claridad en cuanto al significado geométrico de la solución de un sistema de ecuaciones, no asociaron el proceso algebraico con lo que ven en la gráfica y esto los llevó a dar respuestas equivocadas. En este caso, los estudiantes no lograron extraer las características de cada recta de tal manera que pudieran determinar las ecuaciones. Las dificultades que se mencionan se relacionan con la falta de una escala sobre los ejes para determinar puntos de la recta, su ecuación y aplicar algún algoritmo para determinar la solución del sistema. Después de analizar las respuestas de tres estudiantes se logró concluir que las respuestas erróneas se deben a que no se presenta un tránsito entre los modos de pensamiento AA y SG. Por lo tanto este trabajo nos recomienda desarrollar la capacidad de transitar entre los modos de pensamiento como una fortaleza para el aprendizaje y la representación de los objetos matemáticos. En este caso de los sistemas de ecuaciones. En este trabajo se presentaron actividades con gráficas en el plano cartesiano pero sin valores numéricos, con el fin de que los estudiantes trataran de proponer una generalización. A modo de conclusiones, se establece que los estudiantes del grado noveno tienen dificultad en el manejo algebraico de las ecuaciones y ubicación en el plano cartesiano. Además se sugiere brindar la oportunidad de que los estudiantes apliquen diferentes procedimientos, expliquen o justifiquen sus pasos para que logren analizar sus conclusiones. Por otra parte se menciona la importancia de enseñar las representaciones gráficas y las características de estas representaciones sin ligadas a las coordenadas.

Los trabajos que hemos mencionado nos sirvieron como soporte en la elaboración de nuestro proyecto. Puesto que consideramos varias de las dificultades de los estudiantes para hablar sobre sistemas de ecuaciones lineales y encontrar su solución, en la elaboración de muestras actividades y proporcionar experiencias enriquecedoras en el manejo de los diferentes modos de representar los sistemas y claridad sobre la información que cada representación ofrece sobre el tema.

3. OBJETIVOS DEL TRABAJO

Objetivo general: Analizar la comprensión que de los sistemas de ecuaciones lineales, generan estudiantes de noveno grado cuando son sometidos a un proceso de instrucción basado en el tránsito entre los modos de pensamiento AA y SG.

Por lo tanto, tomamos como guía para nuestro trabajo los siguientes objetivos específicos:

a. Diseñar y aplicar actividades que favorezcan el uso y tránsito de los modos de pensamiento SG y AA y viceversa, en los estudiantes del grado noveno, para el caso de sistemas de ecuaciones lineales.

b. Realizar una entrevista para determinar el nivel de comprensión de los estudiantes después de haber desarrollado las actividades propuestas.

c. Analizar los resultados obtenidos en la aplicación de las actividades en relación con el logro del tránsito del pensamiento SG y AA y viceversa y la comprensión de solución de sistema de ecuaciones lineales.

4. MARCO TEÓRICO

Ya que buscamos analizar la manera como los estudiantes inician su comprensión sobre los sistemas de ecuaciones lineales por el tránsito entre los modos de pensamiento, es importante aclarar que comprender un concepto implica ir más allá de la memorización o mecanización de métodos aritméticos; comprender significa que los estudiantes puedan pensar y actuar con flexibilidad sobre los sistemas de ecuaciones y su conjunto solución, es decir que puedan elaborar conclusiones y justificar sus respuestas.

Para lograr nuestro objetivo es necesario que inicialmente aclaremos los aspectos teóricos que nos servirán como referente para nuestro trabajo. Estos aspectos están divididos en dos componentes importantes que son: los modos de pensamiento planteados por Sierpinska y los sistemas de ecuaciones lineales.

4.1 Los modos de pensar en álgebra lineal

De manera general, podemos decir que una de las dificultades detectadas en estudiantes universitarios al enfrentarse con los conceptos del álgebra lineal está relacionada con la variedad de representaciones que pueden ser tratados. Dorier y otros (2000, tomado de Roa-Fuentes, 2008) discuten los problemas relacionados con la naturaleza abstracta del álgebra lineal y las dificultades de los estudiantes para comprender los conceptos más allá del trato algorítmico. Por ejemplo, se plantea el trabajo de Hillel (2000, tomado de Roa-Fuentes 2008), quien propone que los problemas del álgebra lineal se forjan por la existencia de variados lenguajes o modos de descripción, el problema de la representación y la aplicabilidad de la teoría en general. Hillel describe básicamente tres modos de representación del álgebra lineal que generalmente se incluyen en un curso básico y de alguna manera coexisten y son intercambiables pero no equivalentes. Estos modos son:

El modo abstracto: Uso del lenguaje de la teoría formal de los espacios vectoriales, que incluye: espacios vectoriales, subespacios, dimensión y operadores entre otros.

El modo algebraico: Uso del lenguaje y conceptos específicamente sobre el espacio R^n, que incluye: énuplas, matrices, rango, solución de sistemas de ecuaciones lineales, entre otros.

El modo geométrico: uso del lenguaje y conceptos sobre los espacios de dimensión dos y tres, que incluye: segmentos de recta dirigidos, puntos, líneas, planos y transformaciones geométricas (Hillel, 2000).

Estos modos de representación generan de manera directa modos de pensar, en donde los estudiantes pueden comprender la información que ofrece cada tipo de representación de un objeto matemático. Sin embargo, en el aula de matemáticas los docentes pasamos de una manera de representar a otra sin hacer énfasis en la información que ofrece cada representación.

De acuerdo con lo mencionado, consideramos que el fundamento teórico que plantea Sierpinska (2000) sobre los modos de pensar relacionados con las representaciones descritas, representa un punto de apoyo para entender cómo los estudiantes pueden comprender los conceptos en álgebra lineal; particularmente, en cómo ir y venir de un modo de pensar a otro puede llevarlos a la construcción exitosa de los conceptos involucrados.

4.2 El caso de los sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales es un tema que aparece en el currículo de matemáticas en el grado noveno. Pero sólo se vuelve hacer énfasis en este tema, en los cursos de Álgebra Lineal I de primer semestre de programas de matemáticas e ingenierías y, en los cursos de Ecuaciones Diferenciales en el segundo año. Igualmente este concepto toma importancia al tratar la comprensión de otros como: Transformaciones lineales, bases, sistemas de ecuaciones no lineales, planteo de problemas de análisis funcional con sistemas de infinitas ecuaciones e infinitas incógnitas, sistemas de ecuaciones diferenciales, por mencionar algunos. Sin embargo el énfasis en una única forma de representar este concepto ha generado serias dificultades en los estudiantes y más aún el paso entre una y otra forma de representación sin advertencia alguna.

En los primeros años escolares se hace un tratamiento puramente numérico o puramente geométrico pero no se relaciona la información que ofrece cada tipo de representación. Es el profesor, quien dispone sobre cómo abordar situaciones relacionadas con el concepto. Igualmente, sólo se hace énfasis en los sistemas de ecuaciones lineales que tienen solución única y no en aquellos que no tienen solución o tienen infinitas soluciones y las implicaciones que tienen estas relaciones en su representación geométrica.

Por tanto, hemos tomado como marco teórico los modos de pensamiento de Sierpinska (2000): Sintético geométrico, analítico aritmético y analítico estructural. Según Sierpinska, estos modos de pensamiento corresponden a la manera secuencial como evolucionaron las matemáticas. Cada uno de los tres modos de pensamiento en álgebra lineal maneja un sistema específico de representaciones, es decir, cada uno hace uso de las características propias de los objetos matemáticos (Sierpinska, 2000).

- El modo de pensamiento sintético – geométrico SG, utiliza las características de las figuras geométricas, las representaciones gráficas de: puntos, planos, líneas, etc.

- En el modo de pensamiento analítico – aritmético AA, las figuras geométricas son entendidas como conjunto de “n – uplas” de números que satisfacen ciertas condiciones que son escritas, por ejemplo, en la forma de sistemas de ecuaciones o desigualdades.

- El modo de pensamiento analítico – estructural AE, sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de toda una estructura, es decir, las propiedades son más importantes que la naturaleza de sus componentes numéricos.

Presentaremos ejemplos para ilustrar la manera en que los estudiantes usan los modos de pensamiento para resolver preguntas relacionadas con los sistemas de ecuaciones. Supongamos que le mostramos a un estudiante la representación gráfica de dos rectas en el plano, como se muestra en la siguiente figura 3:

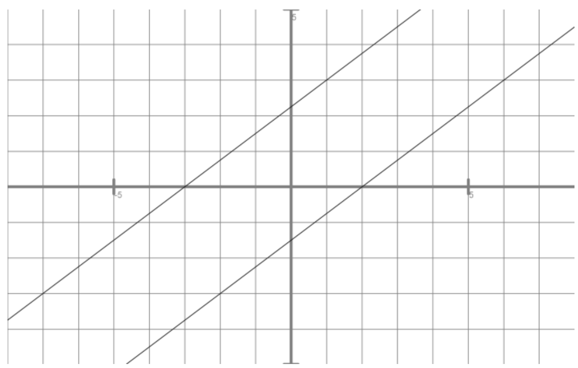


Figura 3. Dos rectas paralelas en el plano.

Ahora, podemos pedirle que determine si el sistema de ecuaciones lineales asociado a las rectas representadas en el plano tiene solución. Mediante la observación de la figura el estudiante puede percibir que las rectas son paralelas y concluir que el sistema no tiene solución. Para responder, se ha valido de una representación gráfica del sistema de ecuaciones lineal y de la implicación que dicha propiedad geométrica tiene sobre el sistema asociado. Esta manera de ir y venir entre un tipo de pensamiento y otro (del SG al AA) es una señal del nivel de comprensión que puede lograr sobre el concepto. De tal manera que relaciona propiedades presentas en una representación geométrica y las fusiona para dar cuenta del sistema que puede verse de manera AA.

Por otra parte, supongamos que se le pide al estudiante que resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

Para resolverlo el estudiante puede utilizar algún método algebraico como reducción, igualación o sustitución y hallar el conjunto solución, en este caso él estaría haciendo una interpretación AA del problema que tal vez podría relacionar con una forma SG y determinar previo a la aplicación de un algoritmo de solución que las rectas no son paralelas ni equivalentes y por tanto el sistema tendrá única solución,

En el caso del pensamiento AE Se le muestra al estudiante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Si el estudiante observa que las rectas son paralelas, fijándose en que los coeficientes que acompañan a las variables son iguales y da respuesta que el sistema no tiene solución, ahí estaría utilizando este modo pensamiento. En realidad, este tercer modo de pensamiento es el más complejo, debido a que requiere que el estudiante pueda generalizar propiedades sobre los objetos involucrados.

A continuación daremos un acercamiento acerca de la manera en que se encuentran caracterizados los modos de pensamientos sintético-geométrico, analítico-aritmético, y analítico-estructural.

"La principal diferencia entre los modos de pensamiento sintético y analítico con respecto a los objetos matemáticos es que, en el modo sintético los objetos matemáticos, de alguna manera, son dados directamente a la mente la cual trata de describirlos, es decir, de manera natural, en tanto que, en el modo analítico estos objetos son dados indirectamente, de hecho, tales objetos solamente se construyen con las definiciones de la propiedades de sus elementos" (Sierpinska, 2000; tomado de Cutz, 2005).

Podemos pensar en tres planos que se intersecan en una línea recta, y ahora pensar en un sistema de ecuaciones 3x3 que determine dichos planos. Podríamos considerar un sistema de ecuaciones particular o un sistema general (valores arbitrarios de los coeficientes) que bajo ciertas condiciones cumpla las condiciones iníciales. Estas son dos formas distintas de considerar el problema y obedecen a diferentes maneras de pensar. Como lo muestran algunos trabajos (Cutz, 2005) los problemas se presentan al considerar la solución del sistema, ya que de manera tradicional están acostumbramos a dar valores específicos de x y y .

Sierpinska (2000), plantea que en muchas ocasiones no es posible determinar si los procedimientos de un estudiante obedecen a uno u otra forma de pensar. Ya que éstos pueden realizar acciones intermedias. Sin embargo, consideramos que lo relevante de nuestro trabajo bajo esta perspectiva, no es realizar una clasificación. Sino propiciar el ir y venir de un modo de pensamiento al otro de tal manera que los estudiantes tengan una visión completa de la situación y puedan determinar cuál es la mejor manera de abordarla.

Ya que aunque los estudiantes pueden llegar a tener acceso de cada uno de los tres modos de pensamiento en cierto grado, ellos no ven la necesidad de utilizar uno u otro modo de pensamiento de manera específica, más bien prefieren usar algunas formas intermediarias las cuales les parecen más convenientes y que tienen mayor sentido para ellos (Sierpinska, 2000; tomado de Cutz, 2005).

Por tanto nos interesa, con los elementos descritos promover en los estudiantes novatos en el trato con los sistemas de ecuaciones lineales el tránsito entre los modos SG y AA, de tal manera que no tengan una visión limitada de las situaciones y puedan relacionar uno y otro modo de pensar en la solución de problemas matemáticos.

4.3 Sistemas de ecuaciones lineales.

Partiremos de la definición de una ecuación lineal dada por Poole (2004) en donde se aclara que una ecuación lineal de n variables $x_1, x_2, \dots x_n$ es una ecuación que puede escribirse de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ donde los coeficientes $a_1, a_2, \dots a_n$ y el término constante b son constantes. En esta definición se explicita que los coeficientes son constantes y si están definidos sobre el conjunto de los números reales, pueden ser cualquier valor no necesariamente valores enteros. Esto es importante, porque aunque la definición es general, como en el caso de la presentada en Hoffman y Kunze (1973) en donde se parte de las propiedades de un cuerpo para pasar a definir un sistema de ecuaciones, los libros de texto de los colegios siempre se limitan a las ecuaciones cuyos coeficientes son valores enteros. Aunque no podemos negar que los estudiantes presentan más dificultades al trabajar con ejercicios donde aparecen los números racionales, aunque en el caso de las ecuaciones, una ecuación de coeficientes racionales puede transformarse en una equivalente de coeficientes enteros.

Igualmente, si vamos a graficar una ecuación lineal como por ejemplo $2x + 3y = 4$ se encuentran ante la dificultad de que el intercepto con el eje y es un número racional y esto les genera confusión. Pero esta dificultad no debería evitar que se mostraran ejemplos donde las ecuaciones lineales tengan coeficientes reales no enteros, como:

$$5{,}3x_1 + 3{,}8x_2 = 6x_3 \qquad\qquad \sqrt{5}x_1 - cos\frac{\pi}{3}x_2 = 12$$

$$\frac{3}{2}x - \frac{5}{7}y + \frac{z}{10} = 5$$

También se pueden destacar ejemplos de ecuaciones no lineales como:

$$5x_1x_2 + 2{,}2x_3 = -2 \qquad\qquad sen x_1 - cos\left(\frac{\pi}{3}x_2\right) = 12$$

$$-\frac{x}{y} + \frac{z}{10} = 25$$

En el caso de las ecuaciones lineales la mayoría de los libros de texto escolar como Álgebra y Geometría II (2004), Aciertos (2008) e Hipertexto (2010), abordan el tema de ecuaciones lineales partiendo de la función lineal. Por lo que los jóvenes se acostumbran a despejar la variable y para luego diferenciar de la ecuación explícita de la recta el valor de la pendiente y el intercepto. Después se muestra la ecuación lineal como si fuera una mirada diferente de la misma función lineal en el plano cartesiano, de esta manera ellos se quedan con la idea reducida que una ecuación lineal es la misma función lineal, es decir, sigue siendo el mismo objeto matemático, una recta, pero con otra presentación.

Para entender posteriormente la solución de un sistema de ecuaciones, se requiere repasar las soluciones de una ecuación lineal. Apoyándonos nuevamente en Pool (2004) una solución de una ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ se define como un vector $[s_1, s_2, \ldots s_n]$ cuyos componentes satisfacen la ecuación cuando se sustituye $x_1 = s_1, x_2 = s_2 \ldots x_n = s_n$. Para el caso que nos interesa, la solución de una ecuación lineal de dos variables $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ serían todos los vectores (s_1, s_2) que satisfacen la ecuación. En cuanto a los libros de texto escolar, son muy pocos los que en algún momento siquiera mencionan el concepto de solución de una ecuación; como lo indicaba antes, se limitan a trabajar la gráfica de la ecuación lineal, pero no usando puntos solución de la ecuación como herramienta para construir la gráfica, sino construyendo una tabla de valores después de tener despejada la variable y.

Uno de los libros más utilizado en las aulas como Baldor (1941), introduce problemas en los que se pide encontrar algunas soluciones enteras de una ecuación lineal, como por ejemplo el siguiente:

¿De cuántas maneras es posible pagar \$65000 utilizando billetes de \$10000 y de \$5000? (Baldor, 1941, p. 315)

Estos problemas contribuyen a que los estudiantes aprendan a construir una ecuación lineal a partir de la información dada, realicen una representación gráfica de la ecuación lineal que está asociada a la situación y por último que encuentren las soluciones enteras del problema. Además ayudan a percibir que las soluciones de una ecuación lineal son infinitas, pues corresponden a los infinitos puntos que cumplen la condición dada en la ecuación.

Ahora pasemos a hablar de la definición de un sistema de ecuaciones lineales. Poole (2004) presenta esta definición:

"Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto finito de ecuaciones lineales, cada una con las mismas variables. La solución de este sistema de ecuaciones es un vector que *simultáneamente* es solución de cada ecuación del sistema. El conjunto solución del sistema es el conjunto de todas las soluciones del sistema." (Poole, 2004, p. 59)

Para el caso que nos interesa en este trabajo, se usarán ecuaciones lineales definidas en el plano bidimensional, es decir, con dos variables. En Grossman (2007) se introduce el tema de los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables al presentar una definición que se apoya en los dos modos de pensamientos AA y SG al definir el sistema de la siguiente manera general:

Considere el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 \; y \; b_2$ son números dados. Cada una de estas ecuaciones corresponde a una línea recta. Una solución del sistema es un par de números, denotados por (x, y), que satisface el sistema. (Grossman, 2007, p.2)

En esta definición se están involucrando los dos modos de pensamiento porque le recuerda al lector que la representación de cada una de estas ecuaciones es una línea recta y a su vez presenta la solución desde el punto de vista aritmético. A continuación el autor nos muestra dos hechos que se cumplen en el caso de las ecuaciones lineales, sin darnos la explicación, ya que se supone que está implícito que éste sistema ha sido definido sobre el conjunto de los números reales, el cual actúa como un cuerpo ordenado por ser un cuerpo (Hoffman y Kunze, 1973), podemos aplicar ciertas propiedades que nos ayudarán a resolver el sistema; estas propiedades son:

1. Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$
2. Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces $ca = cb$

A continuación haremos un análisis de las soluciones de un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones con dos variables.
Dado el sistema:

$$(1)$$

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

Por la propiedad 2 y suponiendo que c no es cero, podemos multiplicar la primera ecuación por a_{22} y la segunda ecuación por a_{12} para obtener el siguiente sistema equivalente al anterior:

$$(2)$$

$$a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = a_{22}b_1$$
$$a_{21}a_{12}x + a_{22}a_{12}y = a_{12}b_2$$

Debido a que son equivalentes cualquier solución del sistema (2) es solución del sistema (1). Para resolver (2) de la primera ecuación le restamos la segunda y obtenemos una nueva ecuación:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

En este momento llegamos a un punto muy interesante, recordemos que la división por cero no está definida, por lo tanto el valor de $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$ debe ser diferente de cero para que el sistema tenga única solución, de otro modo el sistema tendrá infinitas soluciones o no tendrá solución. Si $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \neq 0$ podemos despejar el valor de la variable x:

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Reemplazando este valor en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema (1) y haciendo algunas operaciones algebraicas elementales se obtiene el valor de la variable y:

$$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Por lo tanto estos serían los valores de (x, y) que hacen verdaderas las dos ecuaciones del sistema (1).

Supongamos que $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$, vamos a demostrar que las rectas dadas en el sistema de ecuaciones (1) son paralelas. Vamos a suponer que $a_{12} \neq 0 \ \wedge \ a_{22} \neq 0$.

Si $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$ entonces $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$, como $a_{12} \neq 0 \ \wedge \ a_{22} \neq 0$ podemos dividir la ecuación anterior por $a_{12}a_{22}$, luego nos queda: $\frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{22}} = \frac{a_{21}a_{12}}{a_{12}a_{22}}$ si simplificamos ambos lados de la ecuación tenemos: $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}}$ (3)

Para la primera ecuación hallamos el valor de la pendiente, despejando la variable y:

$$y = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x$$

Luego la pendiente $m_1 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$

Repetimos el mismo procedimiento para la segunda ecuación y hallamos el valor de $m_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}$

Por (3) podemos decir que $m_1 = m_2$. Por lo tanto las rectas son paralelas.

Tenemos entonces una conclusión muy interesante que Grossman llama teorema de resumen.

Teorema Resumen: El sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

i. Tiene única solución si $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \neq 0$
ii. No tiene solución o tiene infinitas soluciones si $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0$

Para ilustrarlo veamos algunos ejemplos con valores enteros:

Ejemplo 1. Sea el sistema

$$2x + 3y = 5$$
$$4x + 6y = 10$$

Si encontramos el valor de $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ tenemos que es igual a cero, por lo tanto no tiene única solución, pero para identificar si las ecuaciones son paralelas o coincidentes tenemos que utilizar algún método de solución.

Si comparamos las dos ecuaciones se puede ver que la segunda ecuación es dos veces la primera, por lo tanto las dos ecuaciones son equivalentes y el sistema tiene infinitas soluciones. Si no es posible determinar a simple vista el hecho anterior se puede identificar el intercepto con el eje y de las ecuaciones despejando la variable y en cada una:

$$y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x$$

$$y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x$$

Esto indica que las ecuaciones son equivalentes por lo tanto la representación gráfica es la misma recta y el sistema tiene infinitas soluciones.

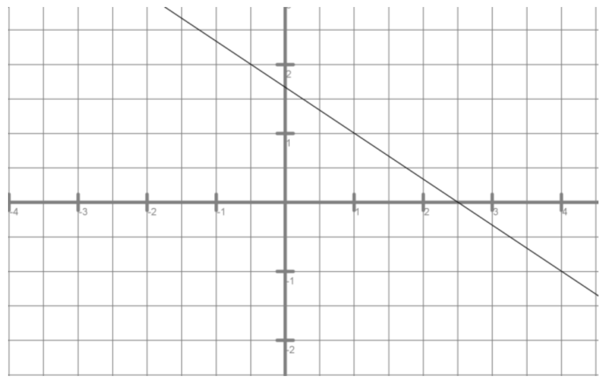


Figura 4. Representación gráfica de un sistema de infinitas soluciones.

Ejemplo 2. Con sencillamente cambiar el valor de b_2 en el ejemplo anterior, tenemos el siguiente el sistema:

$$2x + 3y = 5$$
$$4x + 6y = 12$$

Debido a que los coeficientes son iguales, nuevamente tenemos que la solución no es única, pero al encontrar los interceptos con el eje y de las dos ecuaciones, notamos que son diferentes:

$$y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x$$
$$y = 2 - \frac{2}{3}x$$

Entonces estas dos rectas son paralelas y la representación grafica del sistema es la siguiente:

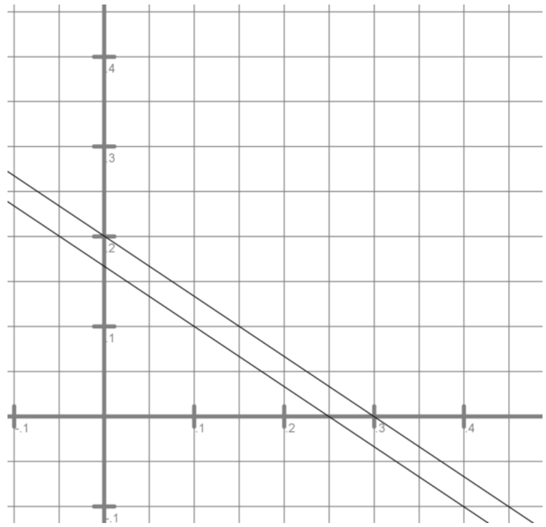


Figura 5. Representación gráfica de un sistema sin solución.

Para encontrar la solución, si es que existe, de los sistemas de ecuaciones lineales Poole (2004) se enfoca en convertir un sistema en otro que sea equivalente más fácil de resolver, para esto aplica operaciones sucesivas a las ecuaciones con el fin de ir reduciendo las variables a medida que van apareciendo cada uno de los sistemas equivalentes.

Utilizaremos este método para resolver el ejemplo 2.

$$2x + 3y = 5$$
$$4x + 6y = 12$$

Podemos multiplicar la primera ecuación por -2 y luego sumarla a la segunda ecuación,

$$-4x - 6y = -10$$
$$\underline{4x + 6y = 12}$$
$$0 = 2$$

Es decir llegamos al siguiente sistema equivalente al primero:

$$2x + 3y = 5$$
$$0 = 2$$

La igualdad final indica que no existen valores de x o y que puedan hacer verdaderas las dos ecuaciones simultáneamente.

En estos los ejemplos podemos notar que si el sistema tiene infinitas soluciones las dos ecuaciones lineales son equivalentes, es decir existe un escalar que al multiplicar una de las ecuaciones por este escalar se obtiene la otra ecuación. Si el sistema tiene infinitas soluciones entonces los interceptos con el eje y son iguales, luego $\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{b_2}{a_{21}}$ y de aquí podemos decir que $a_{12}b_2 - a_{21}b_1$. De la misma forma en el ejemplo 2, se puede identificar que el sistema no tiene solución cuando los coeficientes de una ecuación son múltiplos de los coeficientes de la otra ecuación pero no lo son los términos independientes.

Hacemos énfasis en este tipo de problemas porque cuando los estudiantes se acercan a ellos desde el pensamiento AA, presentan dificultad para interpretar la igualdad $0 = 2$ como que el sistema asociado no tiene solución, algunos señalan que el sistema tiene única solución y además esta es el punto $(0,2)$. Lo mismo sucede para el caso del ejemplo 1, donde la mayoría responde que la solución es única y que es el punto $(0,0)$. Estos errores se disminuyen cuando utilizamos el pensamiento SG, en donde se puede distinguir claramente que las rectas no se encuentran por ser paralelas o se encuentran en todos los puntos, por ser equivalentes.

Supongamos que tenemos más de dos ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$, el sistema asociado tendrá exactamente las mismas tres posibilidades para su solución, es decir, puede tener ninguna solución, infinitas soluciones o única solución. No obstante, las configuraciones gráficas son diferentes:

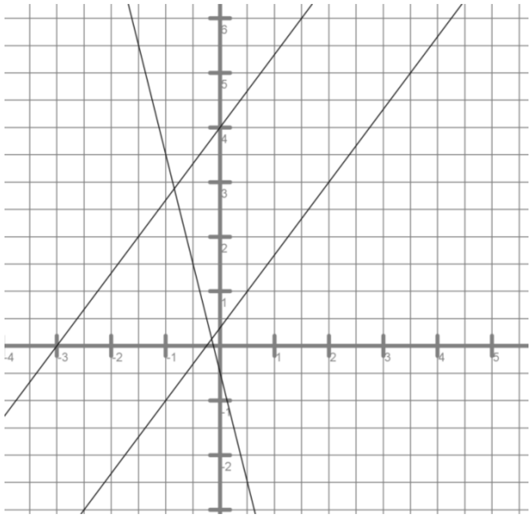


Figura 6. Representación gráfica de un un sistema 3x2 sin solución.

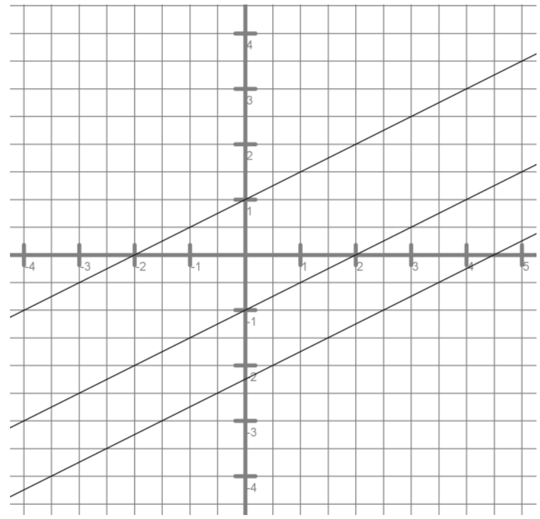


Figura 7. Representación gráfica de Sistema 3x2 sin solución.

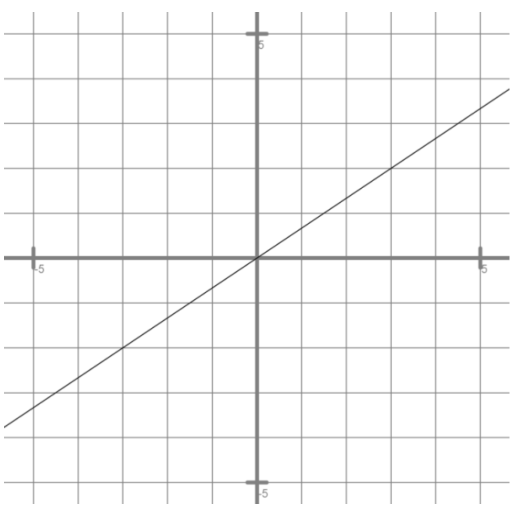


Figura 8. Representación gráfica de un Sistema 3x2 sin solución.

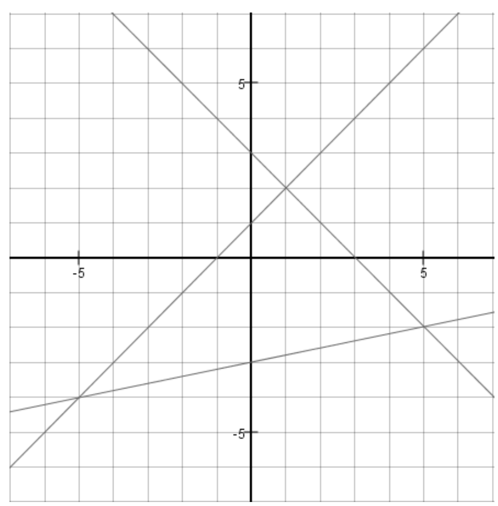


Figura 9. Representación gráfica de un sistema de infinitas soluciones.

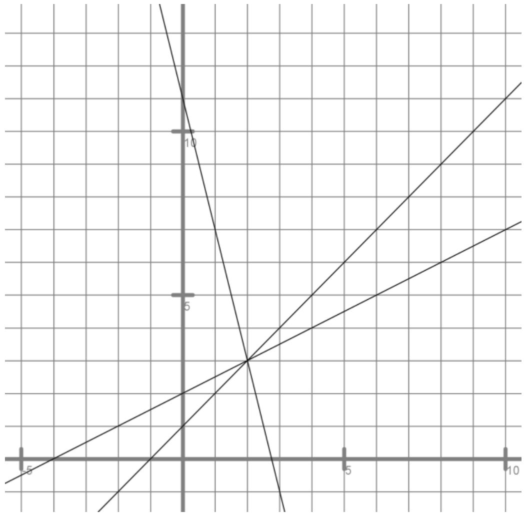


Figura 10. Representación gráfica de un sistema 3x2 con solución única.

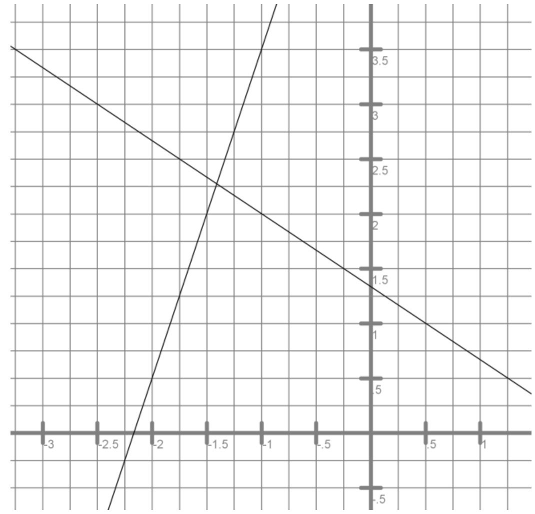


Figura 11. Representación gráfica de un sistema 3x2 con solución única.

En el método de solución propuesto en Poole (2004) se puede notar que las operaciones se efectúan sobre los coeficientes del sistema por lo que se puede trabajar con la matriz aumentada que está asociada al sistema; para resolver el sistema de la gráfica 6 determinado por las ecuaciones:

$$x - y = -1$$
$$-x + 2y = 4$$
$$4x + y = 11$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

Inicialmente trabajaremos con las ecuaciones a la par de la matriz aumentada:

a. Le sumamos la primera ecuación a la segunda:

$$x - y = -1$$
$$y = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$4x + y = 11$$

b. A la tercera ecuación le sumamos la primera:

$$x - y = -1$$
$$y = 3$$
$$5x = 10$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene como solución la pareja ordenada (2,3), algo que ya habíamos notado en la representación grafica, no obstante, el método que acabamos de aplicar nos ha ayudado a percibir que no son indispensables las tres ecuaciones para encontrar la solución del sistema, pues se puede simplificar el trabajo aplicando el método para dos de las tres ecuaciones y luego verificar la solución que se encontró en la tercera ecuación.

Algunas de las conclusiones que encontramos al analizar las soluciones de los sistemas 2x2 se pueden aplicar en los sistemas de 3x2, por ejemplo para la grafica 2 el sistema:

$$-4x + 3y = 12$$
$$-4x + 3y = 1$$
$$8x + 2y = -1$$

Se puede reconocer que dos de las ecuaciones son paralelas, por lo tanto el sistema no tendrá solución, aunque la tercera recta tiene un punto en común con cada una de las dos primeras rectas paralelas, no hay ninguno que sea común a las tres rectas.

Estos casos no son estudiados en las clases de educación básica, pero consideramos que pueden contribuir a iniciar la generalización de los sistemas de ecuaciones, la asociación entre los pensamientos AA y SG nos sirve de partida para formar en los educandos el pensamiento estructural que permite la comprensión de sistemas más complejos como 3x3.

Ejercicios

Encuentre las condiciones en los sistemas dados para que tengan solución única

1) $\begin{cases} ax + by = c \\ ax - by = c \end{cases}$

2) $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + ay = c \end{cases}$

Solución

1) Para empezar hallamos el valor de $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$$-ab - ab = -2ab \neq 0$$

Porque la solución es única, ahora sumamos las ecuaciones y obtenemos

$$2ax = 2c$$

$$x = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \qquad a \neq 0$$

Entonces si reemplazamos en la primera ecuación

$$a\left(\frac{c}{a}\right) + by = c$$

$$c + by = c \Rightarrow y = 0$$

Luego la solución $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$ y se requiere que $a \neq 0$

2) Si $a, b \neq 0$ para que la solución sea única necesitamos que $a^2 - b^2 \neq 0$ para que esto sea verdad se requiere que $a \neq b$. De otro modo el sistema tendría infinitas soluciones.

Hallaremos la solución del sistema.

$$\begin{aligned} ax + by = c \\ bx + ay = c \end{aligned}$$

Multiplicamos la primera ecuación

por b y la segunda ecuación por a

$$abx + b^2y = bc$$
$$abx + a^2y = ac$$

De la segunda ecuación restamos la primera. El sistema equivalente es:

$$abx + b^2y = bc$$
$$(a^2 - b^2)y = ac - bc$$

De la segunda ecuación encontramos el valor de y

$$y = \frac{(a-b)c}{(a^2 - b^2)} = \frac{c}{a+b}$$

Reemplazamos el valor de y en la primera ecuación y hallamos el valor de x

$$x = \frac{c}{a+b}$$

Luego la solución del sistema es la pareja ordenada $\left(\frac{c}{a+b}, \frac{c}{a+b}\right)$

5. METODOLOGÍA Y ANÁLISIS A PRIORI

5.1 Descripción geográfica

El municipio de San Vicente de Chucurí está ubicado a 87 Km de Bucaramanga, partiendo del sitio La Renta que comunica a la ciudad de Barrancabermeja. En 1881 fue fundado por el Señor Sacramento Tristancho. Su economía depende principalmente de la ganadería y el cultivo de varios productos entre los cuales se destacan el cacao, café y aguacate. Es un municipio cálido y cordial, de gente muy trabajadora y honesta.

El colegio Nuestra Señora de la Paz fue fundado el 30 de julio de 1997, es una institución que se distingue por tener un ambiente cálido, los estudiantes pueden dar sus opiniones libremente, son chicos que están dispuestos a colaborar en cada una de las actividades que se realizan en la institución. Siempre nos comprometemos con cada una de las actividades como interclases, semana de la ciencia, día del idioma, intercolegiados, olimpiadas de matemáticas, etc. Nos preocupamos por ofrecer una educación de calidad y nuestro esfuerzo ha dado en varias ocasiones buenos resultados.

En cuanto a los chicos son alegres, sinceros, cariñosos y respetuosos. Algunos cuentan con el apoyo paternal; otros lamentablemente por el transitorio aislamiento de sus padres hace que se sientan deprimidos y necesiten la guía permanente de sus profesores; por lo tanto, en el colegio procuramos brindarles un ambiente familiar de unidad, respeto y aceptación.

La mayoría son de estrato 1 o 2 que con toda seguridad se ven limitados por diferentes carencias derivadas de la situación de cada familia, por lo tanto, nos esmeramos por solicitar el apoyo de todos los padres, para que le suministren a sus hijos los útiles escolares necesarios para el debido desarrollo académico. El cuerpo docente se ve obligado a colaborar en este sentido usando ayudas educativas prácticas que estén al alcance de las clases sociales menos favorecidas. Actualmente hay 18 grupos de secundaria (3 de cada grado); en cada salón hay un promedio de 42 estudiantes, esta es una dificultad manifiesta para mantener índices de calidad y ofrecer la atención que cada estudiante merece.

5.2. Aspectos Metodológicos

5.2.1. Descripción de los estudiantes

En el grado noveno contamos con grupos muy heterogéneos en cuanto a rendimiento académico se refiere; sus edades están entre los 14 y 15 años. Durante el primer periodo académico trabajamos los siguientes temas: gráficas en el plano cartesiano, función lineal, pendiente de una recta, ecuación explicita de la recta y por último ecuación general de la recta.

En las primeras clases de este segundo periodo académico, hemos trabajado con el grado 9-3 sobre gráficas de ecuaciones lineales. Este tema se les ha dificultado mucho, algunos usan la ecuación explícita para identificar la pendiente y el intercepto para determinar la gráfica de la recta; mientras que otros utilizan una tabla de valores para determinar puntos de recta y graficarla.

A medida que estamos haciendo diferentes gráficas nos fuimos introduciendo en el concepto de sistemas de ecuaciones lineales, para esto determinamos la representación gráfica de dos o más ecuaciones lineales en el mismo plano, luego reflexionamos sobre la relación que existe entre una recta y otra. Por ejemplo, si se intersecan o no, si tienen la misma pendiente, etc. En el caso de los grados 9-1 y 9-2 vamos un poco más atrasados con respecto al otro grado, hasta el momento hemos estado haciendo ejercicios sobre el manejo algebraico de las ecuaciones, es decir, pasar una ecuación que está dada en forma general a la forma explícita o viceversa. Este manejo de las ecuaciones, es importante antes de introducir los métodos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

5.2.2. Descripción general de la metodología

Teniendo en cuenta el marco teórico y los antecedentes presentados, procedimos a diseñar 4 Actividades de Instrucción en las cuales buscamos introducir el concepto de sistema de ecuaciones lineales. También diseñamos cinco actividades que fueron parte de la entrevista con el objetivo de analizar con más detalle cómo comprender los estudiantes un sistema de ecuaciones y su conjunto solución mediante el tránsito entre los modos de pensamiento AA y SG. Igualmente las actividades pretendían evitar que los estudiantes se formaran ideas incorrectas, como las reportadas en la literatura, sobre la solución de un sistema de ecuaciones lineal. Es pertinente aclarar, que estos es sólo una introducción a la construcción de los conceptos involucrados mediante la aplicación del marco teórico planteado.

Las Actividades de Instrucción se organizaron en dos talleres, cada uno de ellos con dos actividades. Se citaron 12 estudiantes del grado noveno en contra jornada, los días martes 26 y miércoles 27 de abril de 3:00 pm a 5:00 pm. Se formaron grupos de tres estudiantes para el desarrollo de las actividades. Las actividades fueron aplicadas por la docente a cargo del área de matemáticas en el grado noveno. Se les entregaron los talleres en fotocopias, los estudiantes tenían derecho a plantear preguntas a la profesora y ella les respondía teniendo cuidado de no decirles las respuestas inmediatas a las preguntas del taller. El tiempo de duración de estos talleres fue de 2 horas cada uno.

De cada grupo se seleccionó un estudiante para trabajar en la entrevista, con el objetivo de indagar la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales después de haber sido aplicados las actividades de instrucción. Las entrevistas se aplicaron en el laboratorio de química del colegio, de manera individual. A cada estudiante se le entregó una copia con el cuestionario de las actividades, las cuales se iban contestando una a una de acuerdo al orden de estas, a medida que se iban dando las respuestas los estudiantes argumentaban con sus palabras cada uno de los pasos que realizaban. Cuando los estudiantes presentaron dificultades para resolver las actividades la entrevistadora razonó con ellos mediante preguntas, teniendo cuidado de no decirles la respuesta. Las entrevistas fueron grabadas en audio y video, esto permite una mejor captura de la información para una transcripción y un análisis más detallado. Se realizaron en contra jornada los días 5 (las dos primeras) y 10 de mayo de 2011. El promedio de la duración de estas fue de una hora. La cuarta entrevista no se pudo realizar debido a los efectos del invierno que impidieron continuar con las clases en la institución.

5.3. Análisis a priori de los instrumentos

Nuestro análisis a priori consiste fundamentalmente en un análisis hipotético sobre la manera como los estudiantes pueden transitar entre los modos de pensamiento planteados por las actividades propuestas. Para cada actividad hemos considerado posibles caminos de solución y maneras específicas como los estudiantes podrían transitar entre los modos de pensamiento. Este análisis es la base de la cual partiremos para analizar los razonamientos realizados por los estudiantes, en el desarrollo de las actividades.

A continuación aparece cada actividad tal como fue planteada en las actividades propuestas, una solución matemática de la misma y un análisis teórico hipotético basado en el tránsito entre los modos de pensamiento SG y AA.

5.3.1. Actividades

Actividad 1.

Lean con atención el siguiente problema:

1. *El hotel del parque tiene habitaciones dobles (2 camas) y sencillas (1 cama). En total tiene 35 habitaciones y 55 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?*

a. *¿Cuáles son las variables del problema?*
b. *Asígnenle una letra a cada variable que encontraste*
c. *¿Cuáles son las condiciones que nos exige el problema para hallar el número de habitaciones de cada tipo?*
d. *¿Es necesario plantear ecuaciones para resolver el problema? Si es así, ¿cuántas y cuáles?*
e. *Realicen la grafica de las ecuaciones del punto anterior en el plano cartesiano escogiendo una escala que sea conveniente.*
f. *¿Tienen algún punto en común? ¿Pueden decir cuál es?*
g. *Ahora tomen las coordenadas del punto y compárenlas con las condiciones del problema. ¿satisface las dos condiciones?*
h. *¿Cuál es la solución del problema?*

Análisis Matemático: Para resolver este problema es posible plantear el siguiente sistema de ecuaciones, en el cual la variable x representa las camas dobles, y la variable y representa las camas sencillas.

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + y = 55 \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación de la primera tenemos:

$$x = 20$$

$$2x + y = 55$$

Por lo tanto, la respuesta es 20 camas dobles y 15 camas sencillas que se obtiene de reemplazar este valor en la segunda ecuación.

Ahora, representado gráficamente el sistema tenemos:

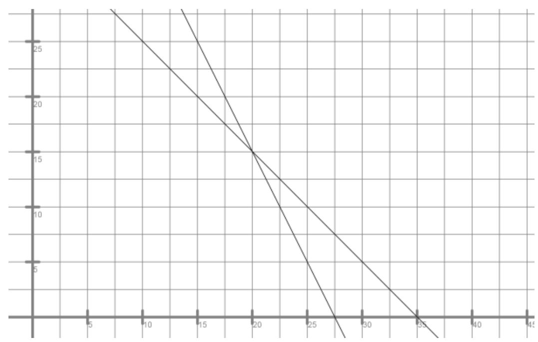


Figura 12. Respuesta gráfica al problema de Actividad 1

El punto de corte de las dos rectas es $(20,15)$; y de acuerdo a las condiciones establecidas al inicio del problema, podemos establecer que la solución es 20 camas dobles y 15 camas sencillas.

Análisis Teórico: En esta actividad estamos presentando a los estudiantes un problema, donde poco a poco los vamos guiando para que construyan las ecuaciones lineales teniendo en cuenta las condiciones dadas. Pretendemos motivar un tipo de pensamiento AA desde el momento en que le pedimos al estudiante que identifique las variables, hasta cuando construyan las ecuaciones. Para luego llevarlos a pensar de una manera SG, al pedirle los estudiantes que grafiquen los puntos que encontraron. Y nuevamente llevarlos al pensamiento AA cuando les pedimos que verifiquen que la respuesta que hallaron cumple las condiciones; realizándose el tránsito entre estos pensamientos.

Las posibles respuestas que algunos estudiantes puedan dar en el inciso son: a) Las variables son el número de habitaciones de dos camas y de una cama asignándole la letra que deseen a cada incógnita; pero algunos estudiantes no tomaran en cuenta los incisos, sino que trataran de buscar las respuestas inmediatamente sin tener en cuenta los pasos que se les da en la actividad. En el inciso c) es posible que los estudiantes digan que las condiciones son 35 habitaciones y que las camas son en total 55. Aunque también es probable que solo recuerden una de las dos condiciones, o piensen en combinarlas. Por ejemplo, sumar 35 con 55. Para responder en el inciso d) es posible que el estudiante diga que sí, es necesario plantear las ecuaciones y diga que son dos ecuaciones; pero también pueden responder que no, porque pueden hallar la solución mediante tanteo.

En vista de que los estudiantes han trabajado en funciones lineales y ecuaciones lineales con las variables x, y muy seguramente utilizaran estas mismas variables para construir las ecuaciones de este problema. Luego es posible que los estudiantes despejen y de las ecuaciones; luego les darán distintos valores a x para hallar los valores de y; y de esta forma ellos podrán hallar distintos puntos para graficar. Pero los estudiantes pueden realizar mal este despeje de y, y por ende encontrarán mal el valor de los puntos. También puede suceder que al realizar el reemplazo del valor de x lo hagan en forma equivocada.

El inciso e) es muy importante porque aquí es donde buscamos que el estudiante realice el tránsito al pensamiento SG. Ahora, no basta con graficar las rectas correspondientes al sistema para afirmar que el estudiante puede transitar de un modo de pensar a otro. Pero, ya que es la primera vez que abordan la temática, esperamos que trabajar en los dos modos de representación, les permitan ver las características de cada una de tal manera que más adelante puedan pensar sobre el sistema de manera numérica o gráfica según lo requiere una situación matemática.

Si las gráficas están bien los estudiantes encontrarán el punto de corte de las dos ecuaciones y si lo reemplazan en las ecuaciones notarán que hace verdadera la ecuación y nos dirán que éste es la solución; pero si encontraron mal el punto al reemplazarlo en la ecuación notarán que no la hace verdadera y que por lo tanto pudieron cometer algún error en el proceso y necesitaran revisar para corregir.

Actividad 2.

Dada la siguiente ecuación

$$2x + y = 6$$

a. La pareja $(2,2)$ *es una solución de esta ecuación porque si reemplazamos los valores de X y Y estos satisfacen la ecuación:* $2(2) + 2 = 4 + 2 = 6$ *¿Podrían hallar cinco parejas más que satisfagan esta misma ecuación?*

b. ¿Creen que puedan existir más de cinco parejas que hagan verdadera la ecuación? ¿Por qué?

c. Si ubicáramos estos puntos en el plano cartesiano y los uniéramos. ¿Qué forma tendría la gráfica?

Dada la siguiente ecuación:

$$4x + 2y = 12$$

d. Hallar cinco parejas de valores que la hagan verdadera.

e. Ubicar estos puntos en el mismo plano cartesiano. ¿qué observan?

f. ¿Qué pueden decir de estos puntos con respecto a la ecuación anterior?

g. Compara los puntos que acaban de encontrar con los que hallaron en b y determinar si es posible que hayan más de un punto que cumpla las dos ecuaciones.

h. ¿Qué pueden concluir sobre el conjunto de puntos que forman parte de la solución de las dos ecuaciones?

i. *Observar nuevamente las dos ecuaciones y compararlas. ¿Qué pueden decir de una con respecto a la otra?*

Análisis Matemático: Este problema consiste en presentar un sistema de ecuaciones lineales de infinitas soluciones. Al observar las ecuaciones se percibe inmediatamente que son equivalentes por lo tanto la representación gráfica es la misma línea.

$$2x + y = 6$$

$$4x + 2y = 12$$

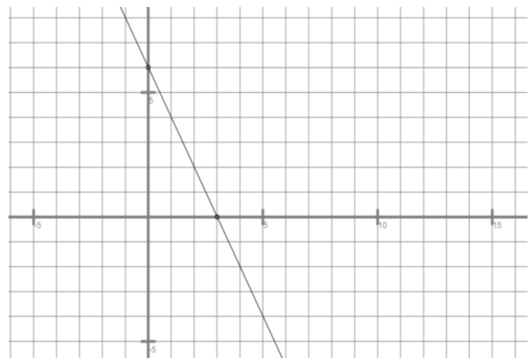


Figura 13. Representación gráfica del sistema de la actividad 2.

Análisis Teórico: En esta actividad queremos analizar junto con los estudiantes el caso donde el conjunto solución del sistema de ecuaciones es infinito. Nuestro propósito es que los estudiantes determinen que dos ecuaciones son equivalentes, es decir tienen el mismo conjunto solución, si una es múltiplo de la otra una característica propia de un pensamiento AA. Por medio de encontrar la representación gráfica de la primera ecuación y luego verificar que cada pareja hace verdadera la otra ecuación. Inicialmente estamos abordando el problema por un tipo de pensamiento AA pero buscamos generar un tránsito a un pensamiento SG, cuando les pedimos a los estudiantes realizar la representación gráfica de la ecuación, ubicamos los puntos de la otra ecuación y estos coinciden con la primera recta que representa la primera. Ahora, claramente al realizar la gráfica de las rectas los estudiantes podrían usar planos diferentes o usar diferentes escalas de tal manera que las rectas no coincidan. Es aquí donde esperaríamos que se diera el tránsito entre los modos de pensar. No sólo cuando el estudiante puede representar de uno u otra manera el sistema de ecuaciones, sino además cuando puede validar su tratamiento del problema relacionando la información que le ofrece los modos de representación. Para finalizar le pedimos que compare las ecuaciones con el fin de que identifique que una es múltiplo de la otra.

En el inciso a. y d. Es posible que los estudiantes hallen las cinco parejas despejando la variable y, y luego reemplace valores en x para así determinarlos. Pero también puede suceder que lo hagan por aproximaciones, es decir, dándole valores a x, y y hasta conseguir los valores que haga verdadera la ecuación.

Si los estudiantes tienen claro que la recta está formada por un conjunto de puntos (x, y) dirán que sí pueden existir más de cinco parejas. De lo contrario solamente se limitaran a lo que dice la actividad y dirán que no pueden existir más. Si los estudiantes tienen claro el concepto de función lineal, probablemente dirán que es una recta; pero si éste concepto no quedó claro tendrá que graficar los puntos para responder.

Posiblemente los estudiantes no podrán concluir que la solución son todos los puntos de la recta, porque están tradicionalmente condicionados a problemas cuya solución es única, un único valor de x y un único valor de y. De igual manera otros dirán que el conjunto solución es solamente los puntos comunes que encontraron a las dos ecuaciones y los que posiblemente no encuentren puntos en común dirán que no tiene solución. Cuando los estudiantes comparan las dos ecuaciones es posible que diga que una ecuación es múltiplo de la otra y pueda concluir que el conjunto solución son todos los puntos de la recta. Esto es una clara señalan del tránsito entre los modos de pensamiento, ya que de una caracterización geométrica es posible hacer una aritmética sobre la forma de las ecuaciones. Pero también puede suceder que algunos estudiantes no logren este análisis y así concluir que la representación graficas de las ecuaciones no es la misma recta. Este problema se torna interesante, ya que los estudiantes podrían ver que para cualquier valor de x es posible encontrar un valor de y analizando las ecuaciones.

Y esto ¿qué dice acerca de la solución del problema? Bueno, consideramos que el tránsito entre uno y otro modo de pensar sobre el problema puede llevar a los estudiantes a determinar que el sistema tiene infinitas soluciones.

Actividad 3.

Observar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x + y = 5$$

$$6x + 3y = 7$$

a. Hallar las pendientes de las rectas

b. ¿Qué tienen en común el par de rectas?

c. Si graficaran el par de rectas ¿cómo creen que resultaría la grafica?

d. Graficar el sistema de ecuaciones. ¿Tiene algún punto en común? Explicar su respuesta

e. Si los puntos en común de un sistema de ecuaciones son el conjunto solución. ¿Qué pueden concluir sobre la solución del sistema anterior?

f. Observar las dos ecuaciones y compararlas. ¿Qué pueden decir de una con respecto a la otra?

g. ¿Qué diferencia hay de este sistema de ecuaciones con el sistema de ecuaciones de la actividad 2?

Análisis Matemático: El sistema de ecuaciones presentado en este ejercicio no tiene solución, puesto que las rectas son paralelas. A continuación presentamos la grafica:

$$2x + y = 5$$

$$6x + 3y = 7$$

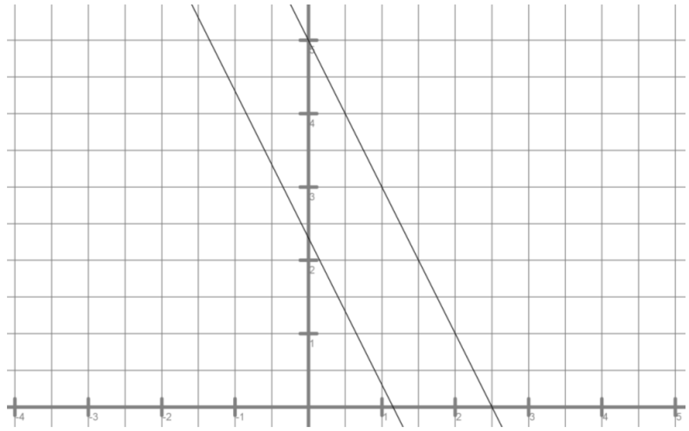


Figura 14. Representación gráfica del sistema de actividad 3.

Análisis Teórico: En esta actividad analizamos el caso donde el conjunto solución del sistema dada es vacío, el problema no tiene solución. La forma en que se presenta el problema sugiere abordarlo mediante un tipo de pensamiento AA, porque el estudiante tendrá que aplicar un método algebraico para despejar y y hallar el valor de la pendiente de cada ecuación, de tal manera que al compararlas se dé cuenta que las pendientes son iguales. Esperamos que puedan concluir que las rectas que representan el sistema son paralelas, este resultado es conocido por los estudiantes. Sin embargo, por la manera como se presenta el problema los estudiantes deben hacer el tránsito al pensamiento SG ya que no se está hablando de rectas, sino de ecuaciones. Entonces deben asignar una propiedad geométrica a un objeto representado de forma aritmética.

Después nos acercamos al problema mediante un tipo de pensamiento SG porque le pedimos a los estudiantes realicen la gráfica y observen si hay algún punto en común. Debido a que las rectas son paralelas y no tienen puntos en común, los estudiantes deberían responder que no tiene solución. Sin embargo esto no es tradicional, los estudiantes están familiarizados con problemas que típicamente sí tienen solución. Ahora ya que en el problema anterior se hace énfasis en los puntos en común como solución del sistema, esperamos que no encontrar puntos en común en este caso los lleve a reflexionar sobre qué pasa con la solución del sistema representado por las rectas. Para finalizar le pedimos que observe nuevamente las ecuaciones y nos diga que los valores de la pendiente son iguales pero los intercepto son diferentes.

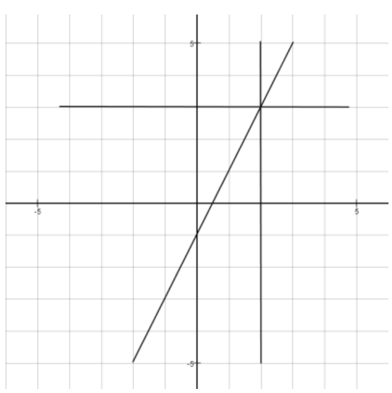
Es posible que los estudiantes hallen las pendientes y se den cuenta que es la misma para las dos ecuaciones. También es posible que despejen mal y nos les resulte la misma pendiente. Al colocarlos a graficar estamos propiciando el tránsito de un tipo de pensamiento AA a un pensamiento SG, permitiendo que al graficar las rectas representadas por las ecuaciones, los estudiantes observen que la pendiente es la misma y así volver a realizar el cálculo de hallar las pendientes. De esta manera podrá percatarse del error que cometieron durante el proceso. Al graficar también observarán que las rectas no tienen ningún punto en común y que por ser paralelas estas ecuaciones no tienen solución.

Al pedirle a los estudiantes que comparen las dos ecuaciones posiblemente al realizar la simplificación puedan observar que los coeficientes son los mismos y que los términos independientes son diferentes; y al compararlas con el sistema de ecuaciones de la actividad anterior es posible que este diga que son diferentes porque en la primera actividad la ecuaciones son iguales y que en esta actividad las ecuaciones son diferentes.

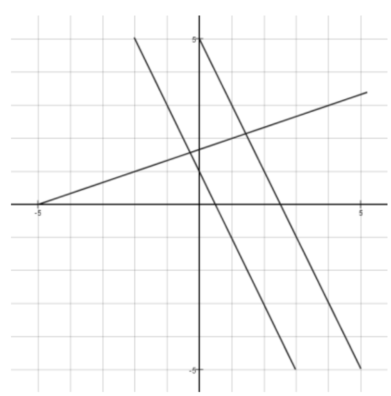
Actividad 4.

Dadas las gráficas de los siguientes tres sistemas de ecuaciones:

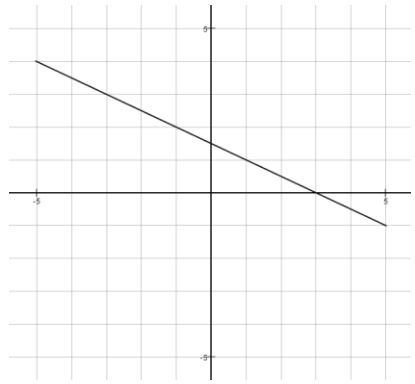
a.



b.



c.



a. Escribe las ecuaciones para cada uno de los sistemas.

b. Recuerda que el conjunto solución para un sistema de ecuaciones está formado por todas las parejas que hacen verdaderas las ecuaciones del sistema. Entonces ¿Cuál es el conjunto solución para cada uno de los tres sistemas?

Análisis Matemático:

Para el sistema a las ecuaciones son:

$$x = 2$$

$$y = 3$$

$$y = 2x - 1$$

Tiene solución única, el punto (2,3).

Un sistema de ecuaciones asociado a la grafica b es:

$$x - 3y = -5$$

$$2x + y = 5$$

$$2x + y = 1$$

Este sistema de tres ecuaciones no tiene solución.

Un sistema asociado a la grafica c es:

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$x + 2y = 3$$

Es un sistema con infinitas soluciones.

Análisis Teórico: Esta actividad está diseñada para generar el tránsito entre el pensamiento SG y el AA, ya que presentamos la representación gráfica de los sistemas y preguntamos por los sistemas de ecuaciones asociados y el tipo de solución de los mismos. Los dos primeros sistemas son de tres ecuaciones con dos incógnitas, el a de única solución, el b sin solución y el c de infinitas soluciones. Se planearon sistemas de tres ecuaciones para reforzar el concepto que un sistema de ecuaciones está formado por más de una ecuación lineal.
En posible que los estudiantes respondan en forma correcta diciendo que la gráfica de a. corresponde a un sistema con única solución, debido a que las tres rectas tienen un punto común y que es la solución del sistema; además que la gráfica b. no tiene solución porque a pesar de haber puntos común, no todos los punto son común a las tres rectas. Y en la grafica c. dirán que son todos los puntos de la recta.

Pero puede suceder que responda que en la gráfica a. existen cuatro soluciones porque confunda los puntos de corte con los ejes; de igual forma en la grafica b. es posible que diga que hay seis soluciones. Además puede suceder que el estudiante en la grafica c. responda que no tiene solución porque no hay punto en común por tratarse de una sola recta. O también que tiene dos soluciones que serian los puntos de corte con los ejes.

Como se analizó en los antecedentes de este trabajo, es común que los estudiantes realicen generalizaciones como "el número de puntos de intersección es el número de soluciones" esta idea puramente geométrica esta desligada con el sistema. Ya que incluso se considera que la intersección con los ejes son puntos solución del sistema. Por tanto, consideramos que es necesario hacer énfasis en el tránsito en esta situación ya que es posible hacer una aproximación de los puntos y generar sistemas que respondan a las condiciones dadas. Con base en la literatura analizada, consideramos que los estudiantes tendrán serias dificultades al abordar este problema. Ya que no es habitual en el contexto de aula regular transitar de un modo de pensamiento SG a uno AA; en general las “cosas” que se representan como ecuaciones se grafican en el plano. Por tanto, el análisis a posteriori nos permitirá tener más información sobre la manera como los estudiantes realizan o no este tránsito.

5.3.2 Entrevista.

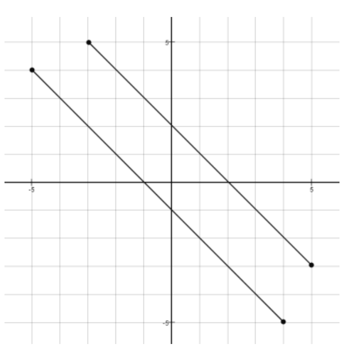
Cada uno de los grupos que respondió las actividades escogió un representante del grupo y este fue citado en contra jornada para responder las preguntas que presentamos a continuación.

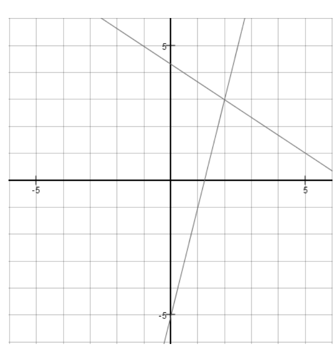
Como hemos mencionado, el objetivo de la aplicación de este instrumento es tener información más fina sobre la manera como los estudiantes comprenden los sistemas de ecuaciones lineales.

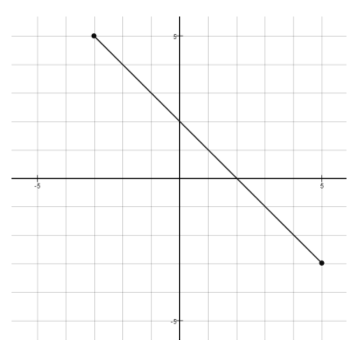
Actividad 1

1. Dada las siguientes gráficas y los sistemas de ecuaciones

a. $\begin{cases} 2x+2y=4 \\ 4x+4y=-4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x+y=\ \ 2 \\ 3x+3y=6 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 4x-y=5 \end{cases}$







a. Di qué grafica corresponde a cada sistema

b. ¿Cuál es el conjunto solución de cada sistema?

Análisis Matemático: La primera grafica está asociada al sistema a que no tiene solución, la segunda gráfica está asociada al sistema c con única solución y la tercera gráfica está asociada al sistema b de infinitas soluciones.

Análisis Teórico: En esta actividad presentamos a los estudiantes los sistemas de ecuaciones lineales, en los dos tipos de representación discutidos. Esperamos promover el tránsito entre uno y otro tipo de pensamiento, de manera más abierta. Consideramos que en esta pregunta se genera el tránsito ya que se pasa del modo AA al SG cuando se tienen los sistemas y se pasa a la representación gráfica de cada sistema. También queremos determinar si es posible que los estudiantes determinen cuál es el conjunto solución con solo observar las graficas y las ecuaciones. Si el estudiante empieza a graficar cada sistema de ecuaciones y luego compara la que realizó con la que está en el ejercicio demostraría que realiza el tránsito entre el AA al SG, pero que no se ha basado en las conclusiones que pudo construir en las actividades anteriores.

Si logra recordar que cuando las ecuaciones son múltiplos el sistema tiene infinitas soluciones y la gráfica correspondiente es una sola recta podremos afirmar que las actividades anteriores le han dado un referente para identificar este tipo de sistemas solo con ver las ecuaciones. En este caso no necesitará buscar valores para hacer la grafica, sino que establecerá la relación por la forma de las ecuaciones. De la misma manera, para el caso de los sistemas de 2x2 con infinitas soluciones tenemos aquellas rectas que tienen la misma pendiente pero diferente intercepto, es posible que los estudiantes recuerden que los coeficientes de las variables son múltiplos pero los términos independientes son diferentes. Esto será un indicador superior del tránsito entre los modos de pensamiento AA y SG. Inclusive podemos afirmar que estamos involucrando parte del AE debido a que se utilizan algunas propiedades de los sistemas 2x2. Por último puede ser que utilice el descarte para determinar la gráfica del sistema que tiene única solución. La entrevistadora estará atenta a indagar el método que utilicen para responder. Esto nos permitirá determinar la manera como se acercan al problema y si dicho acercamiento puede ir de una manera de pensar a otra. O si hay un mayor énfasis en una manera de pensar.

Actividad 2.

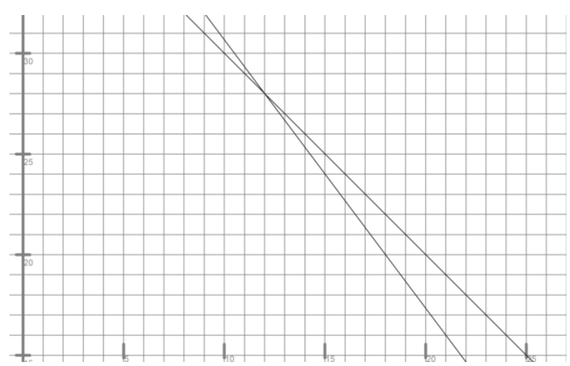
En una lucha entre moscas y arañas intervienen 40 cabezas y 264 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase? (Recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas).

Análisis Matemático: Las variables son las moscas y las arañas, podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$x + y = 40$$

$$8x + 6y = 264$$

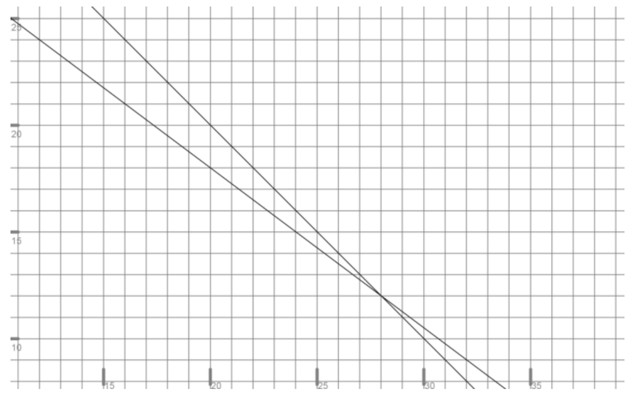
Los estudiantes resolverán el problema por el método gráfico:



El punto de corte está en (12,28). Luego la solución es 12 arañas y 28 moscas. Aunque también es posible que planteen la segunda ecuación de la siguiente manera:

$$6x + 8y = 264$$

En este caso la gráfica es:

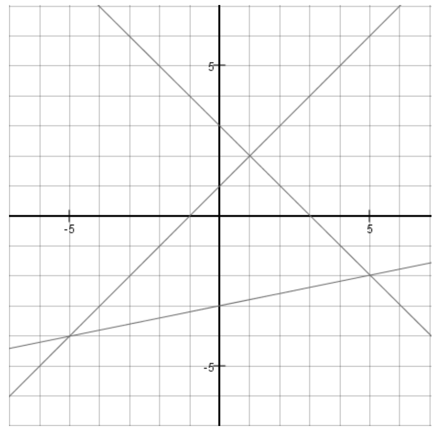


El punto solución de este sistema es (28,12) sin embargo la solución del problema es la misma.

Análisis Teórico: Nuestro objetivo es observar qué método utilizan los estudiantes para resolver el problema con mayor precisión, es posible que al dejar la pregunta abierta se les ocurra intentar un método de ensayo y error por lo tanto la entrevistadora puede preguntar si conocen algún método que los lleve a encontrar. Se les recordará el problema de la actividad 1 y los pasos que se siguieron para encontrar una solución. En este momento se espera que los estudiantes puedan plantear las ecuaciones del problema y con ayuda del método gráfico encuentren la solución. Recordemos que los estudiantes no conocen ningún método algebraico para solucionar los sistemas de ecuaciones lineales, por lo tanto solo cuentan con el método grafico. Sin embargo, podemos afirmar que en esta actividad se da el tránsito del pensamiento AA al SG debido a que esperamos que después de comprender el problema, construyan las ecuaciones (pensamiento AA), y razonen sobre la gráfica de las ecuaciones para determinar la solución (pensamiento SG). De esta forma, el tránsito entre los pensamientos es una herramienta para comprender mejor el problema.

Actividad 3.

En el siguiente plano aparece la representación gráfica de un sistema de ecuaciones:



a. ¿Cuántas ecuaciones tiene este sistema?
b. ¿Cuántos puntos crees que forman parte del conjunto solución?
c. ¿Encuentra un sistema cuya representación gráfica corresponda a la figura?

Análisis Matemático: Esta gráfica representa un sistema con 3 ecuaciones lineales que se encuentran en 3 puntos distintos. El sistema no tiene solución.

Es muy probable que los estudiantes hallen las ecuaciones explicitas de las rectas que ven en la gráfica y sea este el sistema que ellos proponen:

$$y = -x + 3$$

$$y = x + 1$$

$$y = \frac{1}{5}x - 3$$

Análisis Teórico: En la tercera pregunta queremos motivar en los estudiantes el tránsito desde el pensamiento SG hacía el pensamiento AA. Partimos de una gráfica diferente a las que él ha visto antes; si el estudiante comprendió el concepto de solución, nos va a contestar que el sistema no tiene solución. Esto está relacionado con una propiedad geométrica “puntos de intersección entre las rectas asociadas al sistema” determinan la forma del conjunto solución del sistema. De lo contrario los estudiantes caerán en el error de responder que el sistema tiene tres soluciones. Para ayudarlo a determinar si su respuesta es correcta, le pediremos que encuentre un sistema de ecuaciones asociado a la gráfica; y en vista de que los tres puntos de corte de la gráfica tienen coordenadas enteras, la entrevistadora pedirá que verifiquen si los puntos hacen verdaderas todas las ecuaciones del sistema; esto los llevará a darse cuenta de que cada punto de corte no puede ser solución debido a que verifica solo dos de las tres ecuaciones del sistema.

Actividad 4.

Para los siguientes sistemas de ecuaciones decir sin necesidad de hacer la grafica, si ellos tienen infinitas soluciones, no tienen solución, o solución única.

$a. \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases}$ $\quad b. \begin{cases} 3x + 5y = 10 \\ 6x + 10y = 20 \end{cases}$ $\quad c. \begin{cases} 5x + 10y = 3 \\ 10x - 4y = 6 \end{cases}$

a. ¿En qué te basas para argumentar tu respuesta?

b. ¿Cómo podrías demostrar que tus respuestas son correctas?

Análisis Matemático: El sistema a no tiene solución porque son dos rectas paralelas. El sistema b tiene infinitas soluciones, puesto que las dos ecuaciones son equivalentes y el sistema c tiene solución única porque el determinante de la matriz asociada al sistema es diferente de cero.

Análisis Teórico: En la cuarta pregunta nuestro objetivo es determinar si es posible que el estudiante reconozca solo mirando el sistema la forma del conjunto solución, sin la ayuda de las graficas será necesario que haga uso de las conclusiones extraídas de las actividades anteriores y de las conclusiones que ha logrado obtener a partir de las actividades que desarrollo en grupo. Se espera que los estudiantes reconozcan inicialmente el sistema que tiene infinitas soluciones, en vista de que en las actividades pudieron construir una representación grafica de este tipo de sistemas y en la primera pregunta de la entrevista pudieron recordarlo. Luego es muy probable que pasen a identificar el sistema que no tiene solución y la última la deduzcan por medio del descarte. Para demostrar si las respuestas son verdaderas, aquellos que hayan desarrollado el modo de pensamiento SG, intentaran hacer la grafica, otros harán un análisis sobre las mismas y sin necesidad de la gráfica argumentaran con base en los ejemplos conocidos o en las propiedades de las rectas.

Actividad 5.

Di con tus propias palabras

a. ¿Qué entiendes por conjunto solución de un sistema de ecuaciones?
b. ¿Qué entiendes por un sistema de ecuaciones?

Análisis Matemático: Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto finito de ecuaciones lineales, cada una con las mismas variables. La solución de este sistema de ecuaciones es un vector que *simultáneamente* es solución de cada ecuación del sistema. El conjunto solución del sistema es el conjunto de todas las soluciones del sistema.

Análisis Teórico: La quinta pregunta está orientada en determinar si los estudiantes pueden decir en sus palabras, sus ideas relacionadas con un sistema de ecuaciones y su conjunto solución. Aunque no es posible que con la corta experiencia de las actividades planteadas tengan una definición formal, esperamos la construcción del concepto sea la adecuada por la reflexión sobre las situaciones planteadas.

De manera natural, esperamos que el análisis de datos de los instrumentos propuestos nos ofrezca herramientas para determinar cómo están comprendiendo los estudiantes la construcción de los sistemas de ecuaciones lineales y su solución. De tal forma, que los datos finales del trabajo nos permitan hacer recomendaciones sobre cómo construir este concepto y cuáles son las ventajas de propiciar el tránsito entre los modos de pensamiento propuestos.

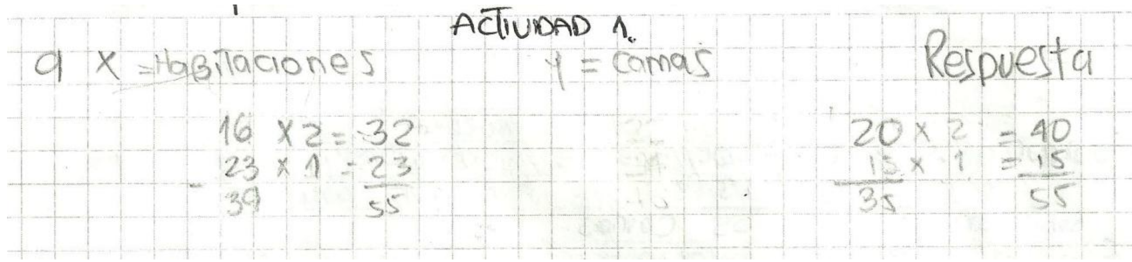
6. EVIDENCIAS EMPÍRICAS: ANÁLISIS A POSTERIORI

En este capítulo presentaremos los resultados obtenidos después de la aplicación de las actividades y de las entrevistas. Así como un análisis entre estos resultados con base en los modos de pensamiento y teniendo en cuenta los antecedentes y el análisis a priori presentado en el capítulo anterior. Para presentar este análisis hablaremos primero de las respuestas que dieron los estudiantes a las actividades propuestas, punto por punto, a medida que discernimos sobre las evidencias del tránsito en los modos de pensamiento. Luego presentaremos el análisis de las entrevistas por estudiante, teniendo en cuenta el orden en el que se desarrollaron.

6.1 Análisis a posteriori de las actividades

Actividad 1.

Después de entregar a cada grupo sus actividades, los estudiantes leyeron el problema. Inmediatamente los grupos 1, 2 y 4 empezaron a buscar la respuesta del problema sin seguir las instrucciones de la actividad, lo único que les interesaba era buscar la solución por tanteo. Este método refleja un pensamiento aritmético que en varias ocasiones es ventajoso, pero en este momento generó confusión para abordar el tema de los sistemas de ecuaciones lineales. Inicialmente consideramos que presentar a los estudiantes un problema con valores más complejos dificultaría el trabajo. Por esta razón el problema que les planteamos podía hallarse por este método del tanteo, sin embargo, encontrar la solución de forma sencilla produjo confusión en vista de no comprender la necesidad de utilizar un método más concreto. Mientras el grupo 3 fue cuidadoso, leyó atentamente la actividad y comenzó a desarrollarla en el orden que ésta decía; éste grupo no tuvo ningún problema al realizar la actividad.



Tomado de Grupo No 4

En el inciso a) los cuatro grupos primeramente pensaron que las variables eran las habitaciones y las camas. Sin embargo, después de leer el problema varias veces y debido a que trataron de encontrar la solución inmediatamente, se reflejó que entendieron lo que se quería averiguar y al empezar a responder las preguntas de la actividad dijeron que las variables consistían en saber cuántas camas dobles y cuántas sencillas hay en las habitaciones.

En el inciso b) los cuatro grupos le asignaron a y habitaciones de cama sencilla y a x habitaciones de cama doble, lo que se observa es que por lo general son las letras que más se utilizan y se encasillan en éstas. Esto puede ser debido a que anteriormente estaban trabajando con funciones lineales en los que se usan las variables x y y; además los docentes por lo general utilizamos estas letras y los estudiantes tienden a copiar lo que hace el profesor en clase.

En el inciso c) los cuatro grupos escribieron las condiciones: la suma de las habitaciones debe dar 35 y la suma de las camas debe dar 55. Los estudiantes siguen las instrucciones y no se les presentan dificultad para escribirlas en sus propias palabras.

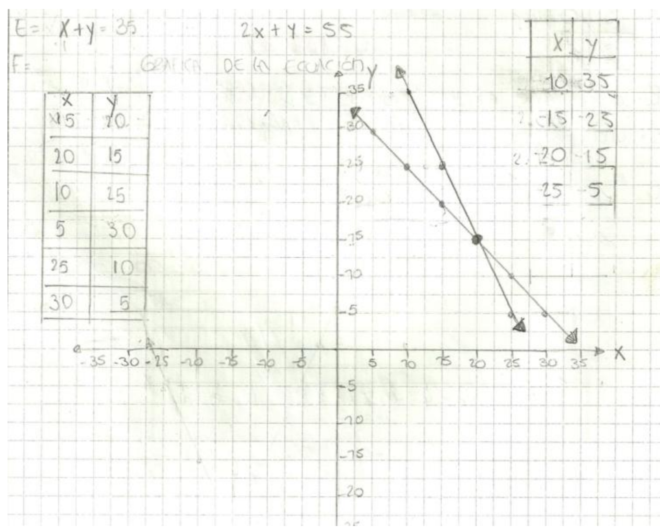
En el inciso d) La mayoría de los grupos respondieron que no las necesitaban porque ya conocían la respuesta al problema y luego decía que si se planteaban ecuaciones sería una sola. La profesora trató de orientarlos para que sacaran las ecuaciones y los grupos 1, 2 y 4 tuvieron dificultad al construirlas porque al inicio de la actividad buscaron inmediatamente la respuesta, al tenerla éstos trataban de incluirla en las ecuaciones; por ejemplo plantearon $25x + 15y = 35$. Después de las preguntas de la profesora, acerca del lugar del 55 en el problema, del procedimiento que utilizaron para encontrar la respuesta y de las condiciones del problema, los estudiantes entendieron el error que estaban cometiendo y es cuando realizan las ecuaciones. Recordemos que el tema es nuevo para ellos y esto también contribuyó a que no sacaran las ecuaciones inmediatamente.

$$2x + y = 55$$
$$x + y = 35$$

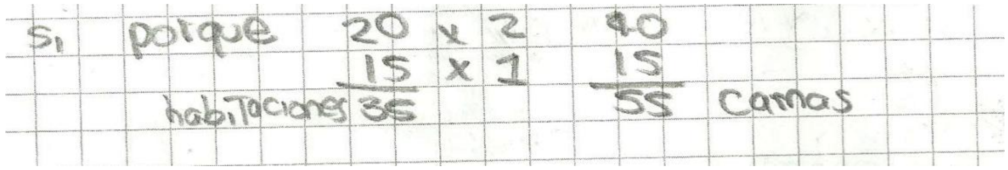
En el inciso e) se pidió a los estudiantes que realizaran la gráfica y es aquí donde se busca el transito del pensamiento AA al SG. Para realizar la gráfica, los estudiantes utilizaron las escalas que ellos consideraron convenientes, luego le dieron valores a x y hallaron los valores de y; sin despejar la variable, sino sobre la misma ecuación lineal. Después de tener varios puntos procedieron a graficar; en éste inciso los estamos llevando al pensamiento SG, porque realizaron la representación geométrica de las ecuaciones que hallaron y porque pudieron hablar en términos de las propiedades de las rectas. Por ejemplo en el grupo No 4 ellos escribieron *“las dos rectas tienen pendiente negativas, son rectas afines, se encuentran las dos rectas y en el punto donde se encuentran dan la respuesta”.* Analizamos que los estudiantes al observar las gráficas están desarrollando el pensamiento SG porque inmediatamente descubrieron que en el punto donde se encontraban las dos rectas aparecía la respuesta del problema.

En el inciso f) al preguntarles si las rectas tienen algún punto en común todos los estudiantes contestaron que sí; al observar la gráfica hallaron el punto $X = 20$, $Y = 15$. Aunque esta pregunta realmente sobra en la actividad porque desde el momento en que grafican la segunda ecuación sobre el mismo plano, descubrieron que el punto de corte de las dos rectas cumplía las condiciones del problema, lo más interesante es que todos los grupos dijeron lo mismo. Es decir, los grupos que ya conocían la respuesta por anticipado, lo notaron porque conocían los números, pero el grupo 3, que estaba siguiendo uno a uno los pasos de la actividad, también resaltó lo mismo. En este momento, se resalta el tránsito entre el pensamiento SG y AA porque encontraron intuitivamente el significado del punto en común, como el punto que cumple las dos condiciones del problema y por lo tanto es la solución.

Esta es la grafica que elaboró el grupo 3:



En el inciso g) llevamos a los estudiantes del pensamiento SG al AA porque tomaron el punto común que hallaron en la grafica, al reemplazarlo en las ecuaciones que habían realizado y al comprobar que sí cumplen las condiciones dadas, los estudiantes escriben que este punto es la solución. Podríamos decir que respondieron este punto por mera formalidad, pues ya sabían que era la respuesta, inclusive el grupo 3, comprobó la respuesta de manera mental cuando encontraron el punto en la gráfica.



Tomada del Grupo No 4

Al analizar la actividad en forma general, ninguno de los grupos tuvo dificultad al encontrar la solución del problema. Sin embargo presentaron dificultad para encontrar las ecuaciones, es decir, expresar las condiciones del problema en un sistema de ecuaciones. Este paso del lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático ya había sido mencionado como una dificultad para que exista tránsito entre los modos de pensamiento (Ardila y Montañez 2010). Desde nuestro análisis podemos decir que es necesaria una manera de pensar sobre los objetos relacionados en el problema “número de camas dobles o sencillas” como objetos matemáticos que se han llamado variables. En este caso podemos suponer que es necesario un tipo de pensamiento AA más complejo. Ya que no basta con manipular dichos objetos, sino que es necesario trasladarlos al lenguaje simbólico.

Actividad 2.

En esta actividad pretendíamos introducir un sistema de ecuaciones que tuviera infinitas soluciones, las respuestas que encontramos fueron las siguientes:

En el inciso a) los grupos hallaron las cinco parejas que les pedimos, además estas parejas fueron números enteros y positivos.

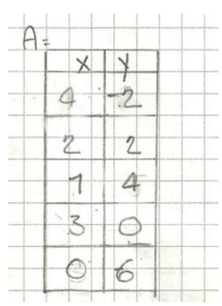


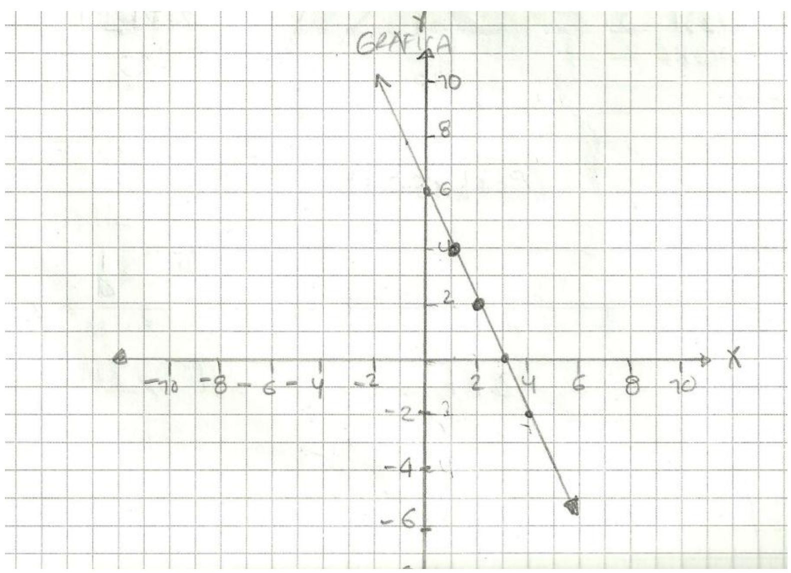
Tabla de valores Grupo No 3

En el inciso b) se les preguntó si podían encontrar más parejas y ellos contestan que sí; porque "*si la grafico van a seguir saliendo parejas que cumplan la condición*", respondió el grupo No 2, consideramos que para dar esta respuesta se apoyan en los conjuntos numéricos, saben que sobre una recta podemos ubicar muchos puntos y por eso explican que seguirán saliendo parejas que cumplan la condición.


SI PORQUE, SE SUPONE QUE SON NUMEROS PARES, POSITIVOS, NEGATIVOS, DECIMALES

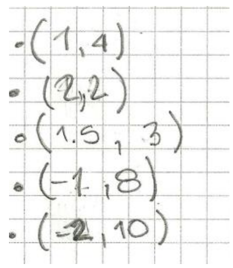
Tomado del grupo No 1

En el inciso c) se planteó la pregunta acerca de qué gráfica piensan que resultaría y todos los grupos contestaron *"una línea recta*"; en esta parte los estudiantes están realizando el tránsito del pensamiento AA al SG, porque sin necesidad de graficar tienen claro que la representación de una ecuación lineal es una recta. Ellos realizan la gráfica de acuerdo a la escala conveniente 1: 1 y a las diferentes parejas que encontraron.



Gráfica grupo No 3

En el inciso d) todos los grupos hallaron nuevamente cinco parejas. En el grupo 3 las parejas les coincidieron todas en otro orden debido a que están acostumbrados a tener en cuenta los mismos valores enteros como referencia para reemplazar. El grupo 2 tomó un valor diferente usando un número decimal, y a los demás grupos les coincidieron cuatro parejas.



Segunda Tabla de Valores Grupo 1

En el inciso e) se les pide que nuevamente ubiquen los puntos de la segunda ecuación y escriban lo que observen. El grupo 1 contesta *"se encuentran en los mismos lugares de los puntos de otra ecuación"* el grupo 2, "*que tienen los mismos puntos en común*"; el grupo 3 "*que sale la misma pendiente anterior"* y el grupo 4, "la *segunda recta pasa por los mismos puntos de la primera"*. Al parecer los grupos 1, 2 y 4 consideran que la recta está quedando encima o en el mismo lugar que la recta anterior. El grupo 3 están considerando lo mismo que los otros grupos, pero lo explican de otra forma; al hacer referencia a la pendiente demuestran un pensamiento SG, porque hablan de las propiedades de la recta.

En el inciso g) el grupo1 no respondió esta pregunta, el grupo 2 respondió *"sí es posible porque hay 4 que cumplen las dos funciones",* el grupo 4 respondió *"si porque las dos ecuaciones son múltiplos",* y el grupo 3 "*que todos los puntos cumplen las condiciones de las dos ecuaciones"*. Para que los estudiantes pudieran determinar los puntos que cumplieran las dos ecuaciones tuvieron que apoyarse en los puntos que tenían hallados en las tablas de valores y en la gráfica, esto permitió que se dieran cuenta que hay más de un solo punto que cumple las dos condiciones.

En el inciso h) el grupo 1 contesta "*lo que podemos concluir sobre el conjunto de puntos que forman las dos ecuaciones en el plano cartesiano, es que los puntos se encuentran en los mismos lugares de los puntos de la otra ecuación*", el grupo 2 "*… al ser ubicados en el plano cartesiano coincide la misma recta, y todos coinciden porque son múltiplos*", el grupo 3 "*que entre dos ecuaciones o más, puede existir el mismo resultado*", el grupo 4 *"… lo que podemos concluir de las dos actividades es que en la primera actividad se encuentran en un solo punto y en la segunda actividad se encuentran en todos los puntos".* El grupo 1 no habla sobre la solución del sistema porque responde haciendo referencia a la ubicación de los puntos. Esto demuestra que no lograron el tránsito entre un tipo de pensamiento SG y AA como esperábamos. El grupo 2 habla de que coincide la misma recta, lo cual nos muestra que lograron tránsito entre el SG y AA porque se dan cuenta que las ecuaciones están representadas por la misma recta, además empiezan a desarrollar un tipo de pensamiento AE al decir que esto sucede porque las dos ecuaciones "*son múltiplos*", es decir, son equivalente.

Sobre el grupo 3 podemos decir que cuando expresan "*que puede existir el mismo resultado*" están haciendo referencia a que todos los puntos de una recta también son solución de la otra recta. El grupo 4 presentó confusión porque comparó la cantidad de puntos de la actividad dos con la actividad 1, no obstante su respuesta nos deja ver que la solución en las dos actividades es diferente, pero hacen este análisis desde el pensamiento SG y se quedan allí.

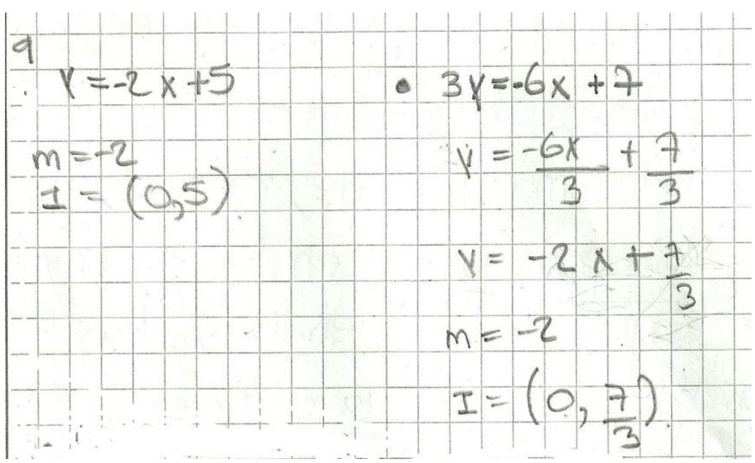
En el inciso i) el grupo 1 contesta *"lo que se puede concluir con respecto a las ecuaciones es que hacía diferentes ecuaciones los resultados son iguales a la otra ecuación, y ubicarlos en la grafica se ubican en la misma parte",* el grupo 2 dice *"siempre van a dar la misma recta"*, el grupo 3 *"son completamente diferentes, pero al realizar la solución el resultado coincide"* y el grupo 4 *"que siendo las ecuaciones diferentes nos dan respuestas iguales para formar una recta igual".*

Los cuatro grupos no llegaron a la conclusión que nosotras esperábamos porque hablaron acerca de la gráfica, pero no buscaron una relación entre las dos ecuaciones, al menos en esta pregunta, para determinar cuando un sistema tiene infinita soluciones.

Los estudiantes no alcanzan a comprender que el conjunto solución de un sistema de ecuaciones equivalente es infinito. Gracias al pensamiento SG identificaron que las dos son la misma recta pero no se dio completamente el transito del pensamiento SG al AA que los llevara a concluir a qué se debe que sean infinita soluciones. También es posible que al decir "todos los puntos" no alcancen a entender lo que esto significa.

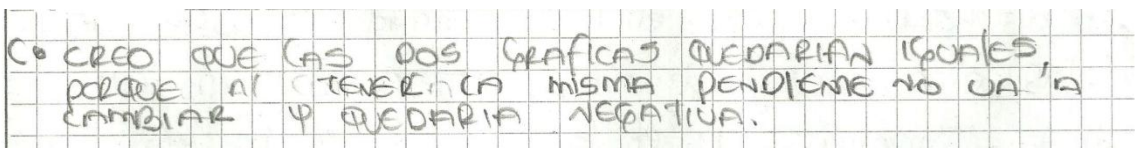
Actividad 3.

En el inciso a) y b) los estudiantes se encuentran en el pensamiento AA, porque para hallar el valor de la pendiente realizaron el despeje de y, utilizando un método algebraico; al comparar los despeje los estudiantes dijeron que tenían en común la pendiente -2.



Tomado del grupo No 1

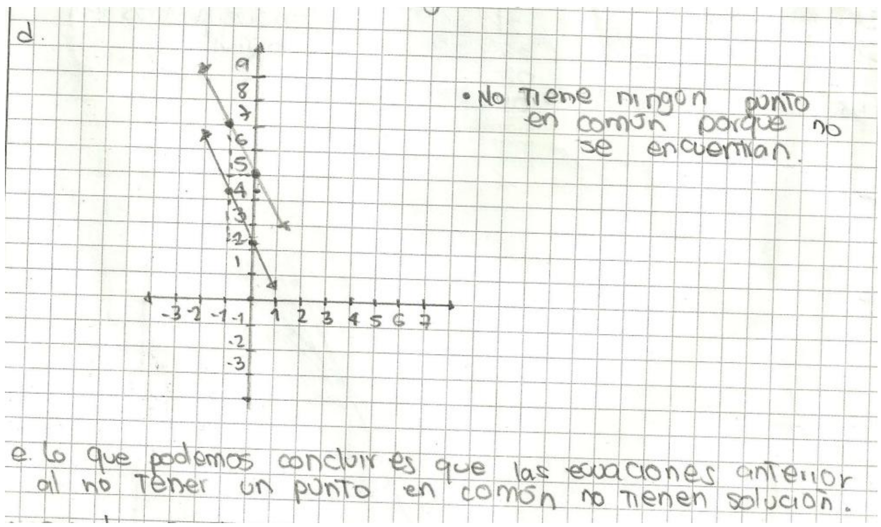
En el inciso c) Los grupos 2,3 y 4 hablaron sobre la pendiente pero no de la relación que podría existir entre las dos ecuaciones; hicieron referencia a que quedaría negativa o “ladeada”. El grupo 1 trató de sacar una conclusión en vista que las dos tenían la misma pendiente. Esta respuesta nos permite reconocer que los estudiantes del grupo 1 están haciendo un primer intento de tránsito del AA al SG, aunque no está claro lo que significa la palabra *“quedarían iguales”*, es muy posible que estén tratando de ponerle un sentido al hecho de que las dos ecuaciones tienen la misma pendiente y en cómo afecta esto al momento de hacer la gráfica. Su respuesta se muestra a continuación:


C. CREO QUE LAS DOS GRAFICAS QUEDARIAN IGUALES, PORQUE AL TENER LA MISMA PENDIENTE NO VA A CAMBIAR Y QUEDARIA NEGATIVA.

Tomado del grupo No 1

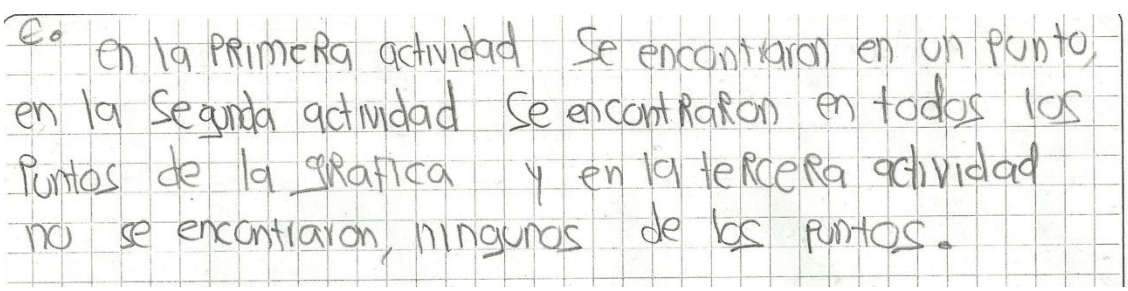
En el inciso d) los estudiantes tuvieron dificultad para realizar la gráfica de la segunda ecuación, en vista que el intercepto es racional. Para lograr terminar la gráfica hicieron una estimación decimal y la ubicaron en la gráfica de forma aproximada. Aplicaron el hecho de que tenían la misma pendiente para trasladar la misma inclinación de la primera recta con ayuda de una regla sobre el intercepto de la segunda recta. Pasaron del pensamiento AA al pensamiento SG porque aplicaron a información que les proporcionaba las ecuaciones, para aplicar esta información en las rectas. Al observarlas dicen que no tienen punto en común, porque no se encuentran.

En el inciso e) los grupos 2 y 4, concluyen “*si no tienen punto en común no tienen solución”*, mientras que el grupo 3, dice “*las pendientes son iguales y las rectas son paralelas”.* A pesar que el grupo 3, da una observación correcta no es lo que se les pedía; esto puede ser que los estudiantes no comprendieron la pregunta que les hicimos y la interpretaron de otra forma, dando una explicación de cómo son las rectas. Podemos decir que los estudiantes de los grupos 2 y 4 interpretaron que cuando dos rectas no tienen punto en común no tienen solución. Hasta el momento han extraído ésta respuesta del pensamiento SG, pues deducen de la gráfica y por la forma como la realizaron, que nunca se encontraran y por lo tanto el sistema asociado no tiene solución.



Tomado del grupo No 4

El grupo 1 en la actividad 2 no respondió la pregunta g) en la que se pedía hablar sobre los puntos que cumplían las dos condiciones y ahora en ésta pregunta nos responde parte de lo que esperábamos antes. Esto nos hace pensar que de un día a otro los estudiantes siguieron pensando en las actividades.



Tomado del Grupo 1

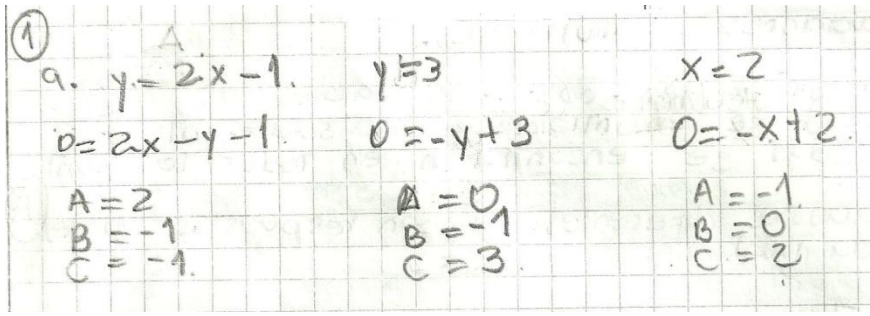
Podemos decir que los estudiantes en éstos incisos han realizado el transito del pensamiento AA al SG, porque dadas las ecuaciones realizan las gráficas y al mismo tiempo analizan que para que haya solución deben tener un punto en común.

En el inciso f) los grupos 1 y 3 respondieron que son paralelas, que tienen la misma pendiente. Lo que significa que no realizaron el tránsito nuevamente del SG al AA, se pretendía que regresaran a identificar si en las ecuaciones existe alguna relación entre los coeficientes, pero presentaron una respuesta geométrica. El grupo 2 que dice "*todos los múltiplos cumplen excepto el resultado*". Los estudiantes de ese grupo no escriben bien lo que quieren decir, pero pareciera que se refieren a que los coeficientes de las variables cumplen el que sean múltiplos, pero no sucede con el término independiente que no conserva la misma relación, de igual manera se devuelven al AA y se esfuerzan por explicar la relación que existe entre las ecuaciones. El grupo 4 no entendió la pregunta y contestó teniendo en cuenta las actividades.

En el inciso g) los grupos contestaron que en la actividad 2 todos los puntos coinciden formando una sola recta y que en la actividad 3 son rectas paralelas. Se analiza que los estudiantes hicieron la diferenciación teniendo en cuenta la cantidad de rectas de las gráficas y no el conjunto solución. Lo que revela que ven los sistemas desde el modo SG y responden teniendo en cuenta este modo de pensamiento, a pesar de que se les pregunta sobre los sistemas de ecuaciones; esto no era lo que esperábamos porque nuestra deseo era que compararan las ecuaciones de los sistemas no las representaciones gráficas de los mismos.

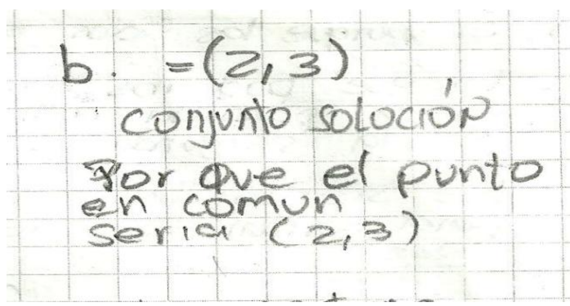
Actividad 4.

En el inciso a) los estudiantes realizaron el tránsito del pensamiento SG al AA. Los estudiantes utilizaron las gráficas para encontrar las pendientes de acuerdo como se lo había enseñado la profesora y encontraron el intercepto con el eje de las y, con esta información hallaron las tres ecuaciones de los tres sistemas.


1
a. $y = 2x - 1$ | $y = 3$ | $x = 2$
$0 = 2x - y - 1$ | $0 = -y + 3$ | $0 = -x + 2$
$A = 2$, $B = -1$, $C = -1$ | $A = 0$, $B = -1$, $C = 3$ | $A = -1$, $B = 0$, $C = 2$

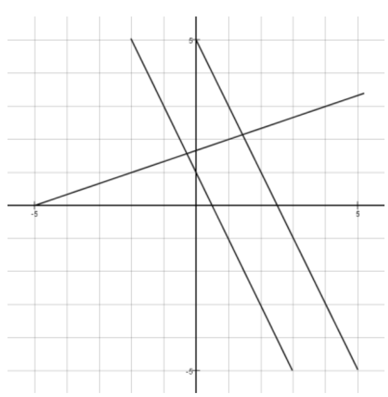
Tomado del grupo No 4

En el inciso b) los grupos 1, 2, 3 y 4 no tuvieron dificultad al decir que el conjunto solución de la primera gráfica es el punto (2,3).

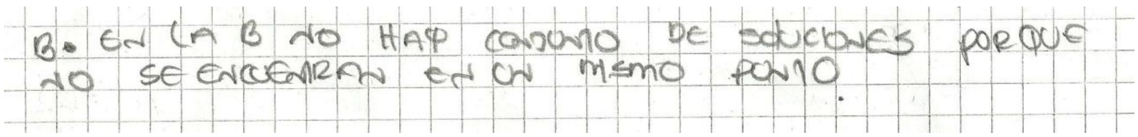

b. = (2,3)
conjunto solución
por que el punto
en comun
seria (2,3)

Tomado del Grupo No 4

Para el sistema de ecuaciones que no tiene solución los grupos 1, 3 y 4, contesta en forma correcta al decir que el sistema no tiene solución. Recordemos que la grafica es la siguiente:

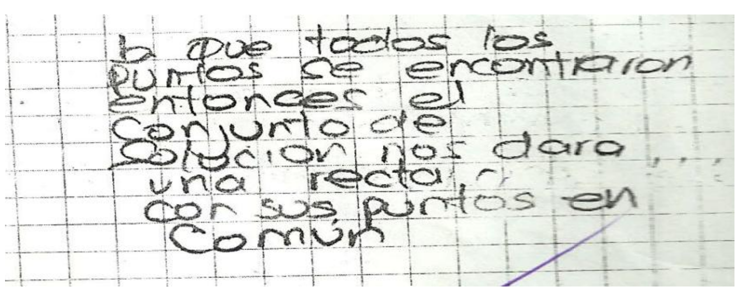


La respuesta del grupo No 1 fue la siguiente:



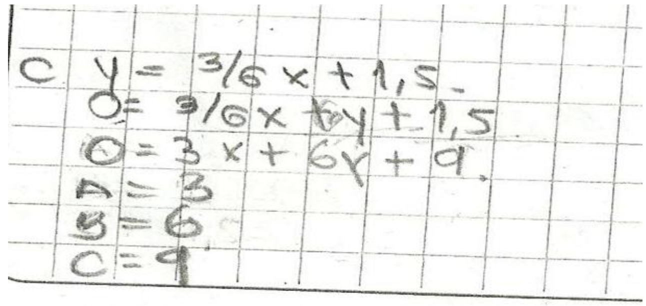
Esto pone de manifiesto que se formaron la idea correcta de que para que un punto sea solución del sistema debe ser común a todas las rectas y debido a que cada uno de los puntos de corte de estas rectas solo tiene dos, no puede ser solución del sistema. Únicamente el grupo 2 presentó dificultad ya que para ellos "*las tres rectas tienen dos puntos en común por lo tanto sí tiene solución".* Respuesta que demuestra que faltó transito del SG al AA para reconocer que la solución son aquellas que hacen verdadera todas las ecuaciones del sistema.

Para el sistema de ecuaciones de infinita solución los grupos 2, 3 y 4, no presentaron ninguna dificultad, al observar el sistema contestaron que "*son todos los puntos*". Sin embargo no utilizaron el término infinitas soluciones. Si se refieren a todos los puntos de la recta están declarando que son solución del sistema, lo que indicaría que han comprendido cuando un punto es solución de una ecuación, sin embargo están hablando desde un pensamiento SG, porque explican desde la gráfica.



Tomado del Grupo No 4

Solamente el grupo 1 presentó dificultad, al contestar "*no hay conjunto solución porque es una sola línea".*



Tomado del Grupo No 1

A este grupo no le quedo claro el concepto de solución infinita, para ellos una sola línea no tiene solución y lo demuestran al hacer las ecuaciones en el inciso anterior porque encuentran una sola ecuación, mientras los otros grupos hallaron dos ecuaciones. Y esta es una de las dificultades que se han evidenciado en los antecedentes. En el proceso que vemos a continuación se muestra como deducen la ecuación de una gráfica, a pesar de que tienen un error del signo de la pendiente podemos decir que hay transito del SG al AA. También tienen la forma de dar dos ecuaciones que sean equivalente para éste sistema, sin embargo la pasan por alto y construyen una ecuación general.

Hay que resaltar que a pesar de que transforman la ecuación $y = \frac{3}{6}x + 1{,}5$ en la siguiente ecuación $0 = 3x + 6y + 9$, no logran percibir que hay dos ecuaciones equivalentes y esto nos demuestra que hay un rechazo por los coeficientes racionales, porque la ecuación no tiene la forma que ellos acostumbran, no concluyen que puede tener muchas ecuaciones con la misma representación gráfica.

6.2. Análisis a posteriori de las entrevistas

En esta sección analizaremos las respuestas de los estudiantes a la entrevista, las presentaremos por estudiante y respetando el orden en que fueron realizadas. El análisis se realiza teniendo en cuanta el análisis a priori y nuestro marco teórico. Utilizaremos la notación S para entrevistadora, E1, E2 y E3 para los estudiantes.

6.2.1. Análisis de Entrevista de Estudiante 1

En general se esforzó por explicar cada uno de los procedimientos que estaba realizando, argumentaba sus respuestas por medio de sus propios razonamientos o intuiciones. Vamos a hacer mención de sus respuestas.

El estudiante observa las graficas y casi inmediatamente responde "el sistema b corresponde a la grafica 1", parece que la manera de identificar la gráfica es debido a que ubica un punto que cumpla las condiciones de la ecuación sobre la recta. En este caso el punto (1,1) pertenece a la primera ecuación del sistema b, por lo tanto, busca en todas las gráficas una recta que contenga este punto, por eso me indica que la primera línea de la grafica uno es la que representa el sistema de la b, como es un sistema mira la segunda ecuación que está en este mismo sistema y se da cuenta que el punto (1, 1) también forma parte de esta otra ecuación, entonces responde que las dos ecuaciones forman una misma línea. En este caso, podemos decir que se apoyó en el pensamiento AA para encontrar la representación gráfica, reconoce que los valores que hacen verdadera la ecuación lineal, son las coordenadas de los puntos que están en la grafica, y se apoya en este conocimiento para encontrar que en el sistema b, las dos ecuaciones son equivalentes; sin embargo, más adelante presenta una confusión que nos hace pensar que no tiene claro lo que es un sistema de ecuaciones lineales.

> *S: Usted me está diciendo que estas dos al graficarlas da la misma línea (indicando el sistema b)*
>
> *E1: No, no, no. (Indica con el dedo la grafica 3, permanece en silencio por un momento y luego regresa a mirar la grafica 1 y continua) es que yo pienso que está sola podría ser una (indicando una de las líneas de la grafica 1) y esta podría ser otra (indicando la otra línea de la grafica 1)*
>
> *S: El caso es que si hay dos líneas ¿cuántas ecuaciones hay?*
>
> *E1: Si estas son una, hay dos ecuaciones. Pero estas se parecen mucho y acá hay seis ecuaciones pero acá solo hay cinco. Entonces por eso yo*

pregunto que si este podría ser estas dos (indicando una línea de la parte inferior de la grafica 1 y las dos ecuaciones del sistema b) este podría ser, como no hay cinco graficas, esta uno puede representar para que las otras quepan en estas.

Esto demuestra que E1 está entendiendo la pregunta 1, no como que cada gráfica representa un sistema de ecuaciones, sino por separado, es decir, cada ecuación lineal, como son 6 ecuaciones lineales, cada ecuación puede estar en cualquiera de las tres graficas sin tener nada que ver el orden en que se han dado, parece ser que está buscando la ecuación lineal con su correspondiente línea. E1 ya se había percatado que las dos ecuaciones de b corresponden a una sola línea, pero piensa que es posible que en este ejercicio estén más de dos sistemas en la misma grafica, o la otra línea de la grafica 1, puede representar otra de las ecuaciones lineales que están en el enunciado del problema; por lo tanto, fue necesario aclarar que cada una de las graficas corresponde a cada sistema.

E1 estaba indicando la recta de abajo como si esa fuera la representación del sistema b, debido a esto fue necesario plantear preguntas para ayudarlo a encontrar la representación correcta del sistema. Esto permitió notar que a veces se puede presentar confusión al buscar las coordenadas en el plano cartesiano, sobre todo porque nosotras no colocamos los valores enteros sobre los ejes, así que el estudiante debería contar los cuadros y tener presente el sentido para identificar las coordenadas correctas. Después de las preguntas logró identificar correctamente la grafica 3, como la representación del sistema b.

S: ¿Por qué usted piensa que es la recta de abajo?¿cómo sabe que es la de abajo y no la de arriba?

E1: Porque 1 y 1; 1 +1= 2, y 3 x 1, 3 y 3x1, 3, y da 6

S: o sea que (1,1) está en esta línea y ¿dónde queda el (1,1)?

E1: (Indica nuevamente la línea de abajo) ah pero estos son negativos, ¡ah! Ya ya.

S: entonces donde queda

E1: (Indica correctamente el punto)

S: entonces ¿cuál es la línea que representa la primera ecuación?

E1: Esta (indicando correctamente la línea) ah ya, es que ésta es con signo negativo. Entonces…

S: Pero mire que hay otras graficas

E1: Eso es lo que estoy mirando, entonces también podría ser esta (indicando la grafica 3 y señalando el punto (1,1)) y esa misma podría ser esta (señalando la segunda ecuación del sistema b)

S: Exacto, entonces ya encontramos la b

Para empezar a buscar las otras dos, trató de encontrar puntos que lo ayudaran a identificar el primer sistema, pero decidió cambiar al sistema c. Empieza a buscar puntos que le ayuden a hacer verdaderas estas ecuaciones, por ejemplo al reemplazar en la grafica el valor de x por 2 y el de y por 3, se da cuenta que sirve, es decir da el término independiente, sin embargo se va a buscar en la gráfica y ubica el punto (2,-3) en la primera grafica. En este caso presentó un poco de confusión al ubicar los números en el plano cartesiano debido a que al momento de reemplazar, se le olvida que hay que tener en cuenta los signos.

Cuando ubica correctamente el punto (2,3) sobre la grafica 2, se da cuenta que este es precisamente el mismo punto de corte de las dos líneas, pregunta si eso tiene algo que ver. Debido a que está tratando de relacionar un sistema con su respectiva gráfica, entonces decide buscar un punto en la otra ecuación y si este punto queda ubicado en la misma gráfica, puede concluir que es la gráfica que representa a este sistema. No se hizo relevancia al hecho de que el punto (2,3) era el punto de corte de las ecuaciones; en este caso E1 lo utilizó para saber que formaba parte de una de las ecuaciones y de una de las líneas, luego encontró otro punto de la segunda ecuación y coincidió con la segunda línea, argumento suficiente para identificar la respuesta.

Para identificar la grafica a, podría haber utilizado el descarte, no obstante decide tratar de argumentar su respuesta, aplicando el mismo método que ha hecho hasta el momento. Nuevamente encuentra la pareja (1,1) de la primera ecuación, pero me pregunta si debe buscarlos positivos o negativos, esto nos muestra que tiene un poquito de confusión, porque a pesar de que sabe que el punto es el (1,1) trata de buscar un segmento de recta que vaya desde (-1,0) hasta (0,-1). Cuando se le pregunta dónde está el punto (1,1) normalmente, lo ubica de manera acertada. Para salir de esta confusión tratamos de hacer preguntas para aclarar la ubicación en el plano cartesiano.

E1: ¿O sea que no importa si es positivo o negativo?

S: ¿Dónde queda el punto (1,1)?

E1: (señala un fragmento de la recta que pasa desde el punto $(-1,0)\ y\ (0,-1)$)

S: Normal.

E1: Ah ¿normal? Queda acá (señalando correctamente el punto)

S: Bien, allí queda el punto (1,1) y ya, porque un punto por acá (señalando el cuarto cuadrante) por ejemplo, ubiquemos este punto, colóquele ahí un puntico. Este punto ¿qué coordenadas tiene?

E1: Tiene (2,1), no, en $y, -2$ y en $x, 1$

S: Exacto, tiene en y, -2 y en x , 1, entonces sí importa el signo, pero este (1,1) queda aquí donde lo ubicaste.

E1: Si ya, ya lo ubique pero ahora tengo que saber cómo es que sale la ecuación de acá (señalando la otra línea) y aquí sí ya sé que está grafica es de acá (escribe la letra c en la grafica 2)

Este estudiante E1, se apoyó bastante en la ubicación de puntos que sean solución entera de una ecuación lineal. Consideró que fue suficiente con ubicar puntos solución en alguna de las graficas y verificó si un punto solución de la segunda ecuación del sistema coincidía en la segunda línea de la gráfica para poder escribir la letra que correspondía. En este punto efectuó tránsito entre el pensamiento es AA al SG, porque saca los valores que están dentro de la solución de una ecuación lineal y los relaciona con las coordenadas correspondientes a estos valores en el plano cartesiano.

Pasamos al problema del segundo punto, escribe x son las cabezas y y son las patas, E1 empieza a buscar opciones, a probar cuáles posibilidades le pueden dar el resultado pedido, se queda un poco desorientado, porque no encontraba posibilidades que funcionaran fácilmente. Después de mirar los apuntes de la actividad 1, recordó que es posible resolver el problema utilizando ecuaciones lineales a partir de analizar las condiciones del problema. Saca las ecuaciones y les cambia el significado a las variables.

> *S: Será que existe una forma más fácil que no sea así probando y probando. ¿Cómo hicimos el de la actividad, el primero de la actividad? Si quiere miremos las que están aquí para que se acuerde. ¿Si recuerda qué decía ese problema? (refiriéndose a la actividad 1)*
>
> *E1: es cuántas arañas tenía….tiene que haber…..bueno algo así igual. Lo que hay que hacer es esto las patas igual a 40 ¿sí?(escribe la ecuación x+y=40)*
>
> *S: si. O sea las patas?*
>
> *E1: ¿no?*
>
> *S: ahí está bien pero usted me dice x más y igual a 40. ¿Estas son las patas? (indicando el resultado)*
>
> *E1: no, estas son las arañas (señala x) y estas son las moscas (señala y)*

Para construir la segunda ecuación él piensa que de pronto se escribe igual $x + y = 264$, así que fue necesario recordar que en el caso de las patas los dos animales no son iguales, porque las arañas tienen 8 patas y las moscas tienen 6. Se planteó el caso en el que por ejemplo, conocemos el número de arañas y el total de patas y se le pidió que analizara qué debería hacer para encontrar el número de moscas. Este problema le permitió descubrir el manejo aritmético que le hace al problema. Este es un pensamiento AA porque se establece la relación entre las dos cantidades y el total de patas, también este pensamiento le permite construir las ecuaciones lineales.

> *E1: pues entonces acá multiplico tal cantidad por las patas y me da un número y el resultante me tiene que dar un número entero que quepan de las moscas las patas…y contar de una vez.*

S: pero como escribimos eso así (señalando la ecuación) como una ecuación, ¿Cómo lo escribiríamos?

E1: espere

S: lo que usted dice si es cierto, entonces…

E1: seria así x más y más 6 y igual a 264 así (escribe la ecuación correctamente)

Para encontrar la solución del problema, nuevamente trata de probar opciones, sin embargo, se le pregunto lo que hizo en la actividad 1 para lograr resolver el problema. A raíz de las preguntas recordó que el punto donde se encuentran las rectas es la solución del problema. Se esperaba que nos dijera que este punto es el que cumple las dos condiciones pero no fueron estas sus palabras, no obstante, reconoce que es la respuesta que está buscando.

E1: ah ya espere. Aquí al encontrar la cantidad remplazo las… ¿esto cómo se llama? (señalando x, y en la ecuación) bueno los...

S: las variables, pero entonces acá, por ejemplo, ¿qué hicimos con las opciones?

E1: las representamos en la grafica

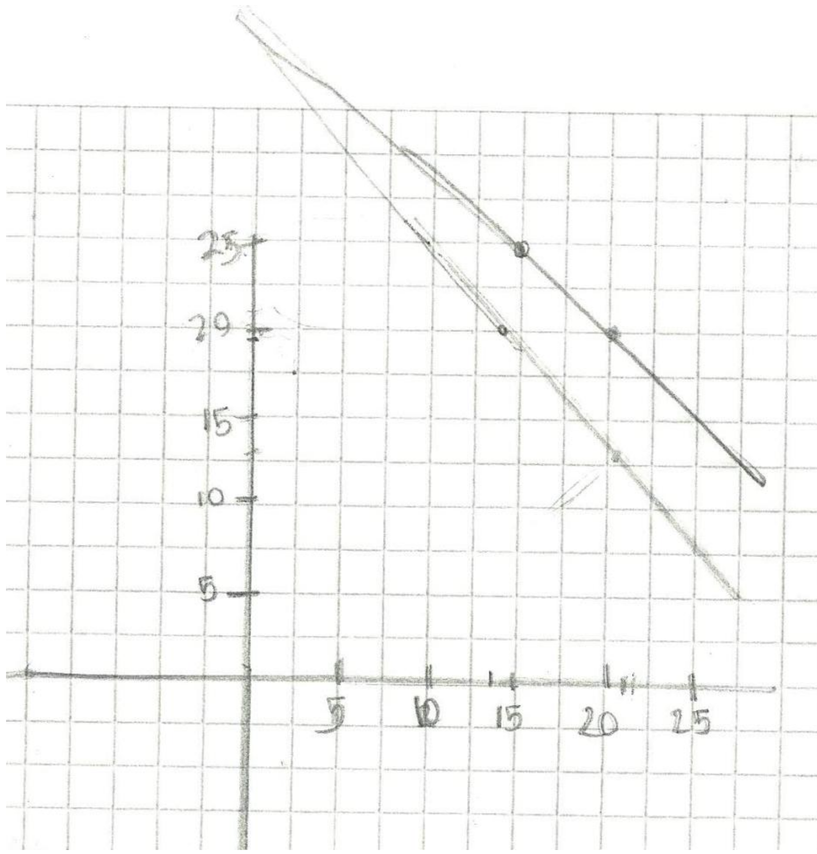
S: ah ¿y después? Las representamos y ¿qué nos salió?

E1: nos salieron un punto, un punto que une a ambas pendientes

S: entonces usted encontró una, luego encontró la otra y ¿qué pasó con este punto? (señalando la grafica)

E1: ese es el resultante de ambas, bueno de un punto que vale ambas…bueno yo sé pero no sé cómo explicarlo

E1, tuvo dificultad en el manejo de la grafica, porque al ver el número 264 piensa que el plano es muy grande y no cabrá en la hoja, así que decide utilizar una escala de cada 2:5 unidades, realiza una gráfica pero no logró identificar el punto en el que se encontraban. Por lo tanto decidimos dejarlo sin terminar. En este problema nuevamente se hace evidente el manejo del pensamiento AA, para el planteamiento de las ecuaciones y el procedimiento que aplicó para encontrar los puntos, pero lamentablemente no pudimos notar el tránsito hacía el SG debido a que no se solucionó el problema satisfactoriamente. Es posible que la razón por la que la gráfica le presentó dificultad fuera por el manejo de la escala. También se hizo notoria la falta de un método de solución diferente al método grafico que nos permitiera encontrar los puntos.



En el tercer punto, E1 responde correctamente que la gráfica presenta 3 ecuaciones, pero consideró que el sistema asociado a esta gráfica tiene 2 soluciones al señalar los puntos de corte de una de las rectas con las otras dos rectas. Al pedirle que explique qué es solución de un sistema, responde correctamente que un punto puede ser solución de un sistema si todas las ecuaciones se encuentran en este punto, por lo tanto, se hace necesario encontrar las ecuaciones lineales, para que después de tener estas ecuaciones nuevamente se evalué cuántos puntos son solución del sistema de ecuaciones. Por medio de observación deduce la pendiente y toma un punto cualquiera de la recta para construir la gráfica, esto demuestra que hay tránsito entre el pensamiento SG al pensamiento AA, pues a partir de la información presentada en la gráfica pueden construir las ecuaciones, luego el pensamiento AA le ayuda a encontrar que ninguno de los puntos que él creía son solución del sistema con 3 ecuaciones.

Hay un detalle curioso al momento de deducir las ecuaciones, E1 toma como referencia el punto de corte, encuentra la primera ecuación, y ahora toma el mismo punto para deducir la segunda ecuación, la pregunta de E1 es: ¿será que da la misma? Esta pregunta nos hace ver que cómo hasta ahora están viendo graficas con más de una recta en el mismo plano, puede ser que piense que el punto produzca una sola ecuación y se le olvide la influencia del valor de la pendiente para determinar una ecuación lineal.

Cuando ya tenía las ecuaciones, se planteó la pregunta sobre la cantidad de puntos que forman parte del conjunto solución, E1 dice las coordenadas correspondientes a esos dos puntos que considera son la solución y los reemplazamos en las tres ecuaciones que forman parte del sistema.

S: entonces este punto, aquí ¿qué pasa en este punto?

E1: en ese punto se encuentran apenas 2

S: ¿entonces sí será solución?

E1: no

S: ¿por qué?

E1: porque solo se encuentran 2 y deben pasar todas por un solo punto

S: ¿para que sea solución qué pasa?

E1: tienen que encontrarse todas

En este punto se resalta la utilidad del tránsito entre los dos pensamientos para poder comprender la solución de un sistema de ecuaciones, inicialmente en SG, E1 intuitivamente respondió que la solución del sistema eran los puntos de corte entre las rectas, es relevante que no dijo 3 como nosotras pensábamos en el análisis a priori, sino que respondió que 2 porque no contaba las rectas dos veces, es decir, se ubicó en una recta y señaló los dos puntos de corte que existían sobre esta recta. Pensó que otra posibilidad era tomar otra recta como referencia y entonces las soluciones serían los dos puntos de corte sobre esta otra recta, según este criterio siempre habría 2 soluciones, pero 3 posibilidades de decir estas dos soluciones. Al pasar al AA reemplazó los valores sobre las ecuaciones lineales de este sistema y apoyándose en que para que un punto sea solución del sistema tiene que hacer verdaderas las tres ecuaciones, pero cada punto solo hace verdaderas dos de las ecuaciones, llegó a la conclusión de que este sistema que está representado en la gráfica no tiene solución.

En el cuarto punto E1 cree que es posible imaginarse la gráfica o pensarla. Hablamos sobre el primer punto en el que los sistemas de ecuaciones tenían su correspondiente grafica, este análisis se hizo para tratar de encontrar alguna regla que nos permita identificar la solución de un sistema sin hacer la grafica. Al llegar a la gráfica 3 del primer punto E1 dice que no tiene solución, luego dice que la solución es única y por último dice que lo que pasa es que tiene varias. Esto nos muestra que E1 tiene dificultad para interpretar un sistema con infinitas soluciones, a pesar de tener la gráfica se confunde porque no logra ver a simple vista que una recta tiene infinitos puntos. Por medio de preguntas y fundándose en el enunciado de la pregunta 4, la entrevistadora lo lleva a concluir que los puntos que forman la solución son infinitos.

E1: a entonces no tiene solución

S: porque

E1: porque tiene varias

S: pero entonces tiene o no tiene?

E1: si tiene

S: pero ¿tiene?

E1: varias

S: pero ¿cómo decimos eso en matemáticas? Cuando tiene varias.

E1: que, esto solución infinita

Para que E1 pudiera responder la pregunta también se le proporcionaron las hojas de solución de las actividades anteriores, al mirar la actividad 2, regresa a la pregunta 4 y encuentra el sistema que tiene solución infinita. Su argumento es que todos los coeficientes y el término independiente están relacionados a la mitad, una ecuación es la mitad de la otra.

E1: 2x + y =6, 4x + 2y =12. Ah este tiene solución infinita

S: ¿cómo lo supo?

E1: Porque acá me aparece este, es la mitad de este y este es la mitad de este, no sé si será correcto o será machete

S: O sea que hay una relación entre las 2

E1: si

Este mismo argumento le sirve para examinar las otras ecuaciones y percatarse que en las otras ecuaciones no están relacionados todos los coeficientes, por esta razón empieza a establecer qué pasa con las pendientes. E1 afirma no saber qué hacer para determinar si se encuentran o no se encuentran, por lo tanto observa con más detalle los sistemas del primer punto y sus respectivas graficas. Este procedimiento le ayuda a identificar el sistema que no tiene solución, debido a que los términos independientes son diferentes.

S: Y dice que sin graficar, por ejemplo miremos aquí arriba, a ver que nos puede ayudar miremos la forma, por ejemplo la que ya sacamos, la infinita ¿si ve? Ya la sacamos pero acá no es la mitad (señalando la grafica 2)

E1: No pero es la tercera parte

S: ¡Ah! Bueno pero entonces busquemos otra, por ejemplo ¿qué pasó con esta? (señalando la grafica 1)

E1: Esta no nos sirvió (la ecuación 1)

S: Exacto es esta cierto, pero mire la relación que hay entre las2

E1: Ambas sí.

S: Pero entonces los números de acá, o sea ¿son el mismo o no?

E1: No son el mismo

S: Entonces no son el. mismo entonces ¿qué sucede allá?

E1: No son el mismo y se relacionan estos 2

S: Entonces ¿cuál sería ese caso?

E1: Ese no tiene solución

S: Si

E1: Y esta es de solución única (la grafica 3)

Por último, las preguntas sobre sistema de ecuaciones nos ayudaron a percibir que no quedó claro, porque para E1 “un sistema de ecuaciones es un proceso al que hay que sacarle si se encuentran o no”. La palabra proceso llamó la atención de la entrevistadora y empezó a preguntar sobre las graficas anteriores para llevarlo a una definición más cercana.

E1: Un proceso que nos ayuda a encontrar, si ¿es así?

S: Lo que usted entiende. Por ejemplo, aquí hay un sistema?

E1: Si

S: Pero porque sabe que si

E1: Porque son varias. Un sistema es donde en un plano cartesiano en donde hay varias rectas

S: ¿Y este es un sistema de ecuaciones? (la grafica 1)

E1: Si

S: Entonces las rectas se unen.

E1: Entonces es en donde un plano hay varias rectas.

S: ¿Y siempre se unen?

E1: No

S: ¿Y este? (señalando la grafica 3)

E1: Este también es un sistema porque hay 2 ecuaciones, aunque sean las mismas pero hay 2

S: Entonces ahora ¿qué es sistema? Bien. Y entonces ¿qué es solución de sistema?

E1: Es ya sí que es única y eso, si es única o no tiene solución o es infinita.

La definición de un sistema de ecuaciones para E1 es más del pensamiento SG que del pensamiento AA, porque nos habla de un sistema de ecuaciones partiendo de un plano cartesiano donde hay varias rectas. Aunque parte de la respuesta nos hace ver que también presenta pensamiento AA al decir que una recta es un sistema de ecuaciones porque hay más de una ecuación. Para decirnos qué es solución de un sistema de ecuaciones se refirió a las posibles soluciones que puede tener un sistema, a pesar de no darnos respuesta a la pregunta, recordemos que en la pregunta 3 utilizó que un punto forma parte de la solución si cumple todas las ecuaciones del sistema, esto significa que ha logrado reconocer una característica para los puntos que forman parte del conjunto solución y esta característica es que hagan verdaderas todas la ecuaciones del sistema.

De manera general podemos decir que E1, logra identificar un sistema de ecuaciones ya sea en el pensamiento AA o en el pensamiento SG. Sin embargo se presenta el tránsito porque puede pasar del sistema en modo AA, como lo vimos en la pregunta 1 y en la pregunta 3, al pensamiento SG. De esta manera logró extraer conclusiones sobre los sistemas de ecuaciones, como por ejemplo que el sistema del punto 3 no tiene solución. También vemos que logró deducir una forma para identificar si un sistema tiene infinitas soluciones o no tiene solución mediante observar los coeficientes de las variables y los términos independientes.

6.2.2. Análisis de Entrevista Estudiante 2

La entrevista con E2 fue muy interesante debido a que en varias ocasiones pudimos ver evidencia del tránsito entre los modos de pensamiento SG al AA. Este estudiante no tiene dificultad para hallar los sistemas de ecuaciones. En la primera representación gráfica tomó el punto (1,1) y lo reemplazó en la primera ecuación y dijo que tiene que ser la gráfica 1 o la gráfica 3, esto lo dijo porque la ecuación del primer sistema y la del tercer sistema son la misma, por lo tanto no puede afirmar cual sistema es inmediatamente, Después el estudiante tomó el punto (4, -3) y lo reemplazó en la segunda ecuación del primer sistema y se dio cuenta que cometió un error cuando escribió el punto, lo cambió por el punto (-4.3) y al ver que cumple la ecuación señaló la primera gráfica y la marca con la letra a).

Pasó al tercer sistema y tomó el punto (1,1) y lo reemplazó en la segunda ecuación y dijo que dio el mismo punto, diciendo que es la misma recta y marcó la tercera representación gráfica con b). Luego tomó el punto (2,3) y lo reemplazó en el segundo sistema y dice que sí cumplió, por lo tanto escribe en la segunda representación gráfica la letra c). Esto nos indica que el estudiante realiza el tránsito del pensamiento SG al AA, porque tomó el punto de corte de la gráfica y usó ésta información para reemplazarlo en las dos ecuaciones.

S: ¿Qué pasa con ese sistema?

E2: Que da la misma línea, la misma recta

S: Porque crees que da la misma recta

E2: Porque o sea todos tienen el mismo punto, entonces es la b.

(Señalando la gráfica del medio) o sea que esta es la c) pero vamos a ver. 2x2, 4, 3x3, 9 y 4+3, no mentiras, 4+9=13

(Después de mirar la gráfica) o sea que acá también sirve (2,3); 2x4, 8 menos 3.

Las dos se cruzan en el mismo punto.

S: Usted escogió este punto y ¿de casualidad le coincido con las dos ecuaciones?

E2: No fue de casualidad yo lo vi allí y lo probé yo lo saqué porque lo vi de la gráfica.

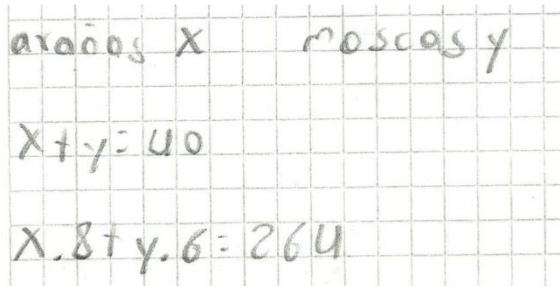
En el inciso b) de la actividad, el estudiante E2 para decir cuál es el conjunto solución comienza con el segundo sistema, diciendo que se cruzan en un mismo punto (2,3), después se va a la tercera representación y dice que las dos ecuaciones hacen la misma recta y tiene muchas soluciones. La entrevistadora le señala la primera representación gráfica contestando el estudiante que no tiene solución.

En la primera actividad en el inciso a. el estudiante E2 realiza el transito del pensamiento SG al AA porque él se vale de las representaciones gráficas para identificar los sistemas de ecuaciones correspondientes, utilizó puntos de las gráficas para comprobar si hacen verdadera la ecuación y así hallar el sistema correspondiente.

En el inciso b) el estudiante E2 está en un pensamiento SG porque para decir que tipo de solución tiene cada sistema, utiliza la representación gráfica para dar la respuesta.

> *E2: se cruzan en un mismo punto ¿La solución? (Indica el punto 2,3)*
> *S: Exacto, o sea que tiene una solución y el último*
> *E2: El último que… esto las dos ecuaciones hacen la misma recta.*
> *S: Entonces tiene ¿cuántas soluciones?*
> *E2: muchas*
> *S: si y entonces este (indicando la primera grafica) ¿cuántas soluciones tiene?*
> *E2: no tiene solución*

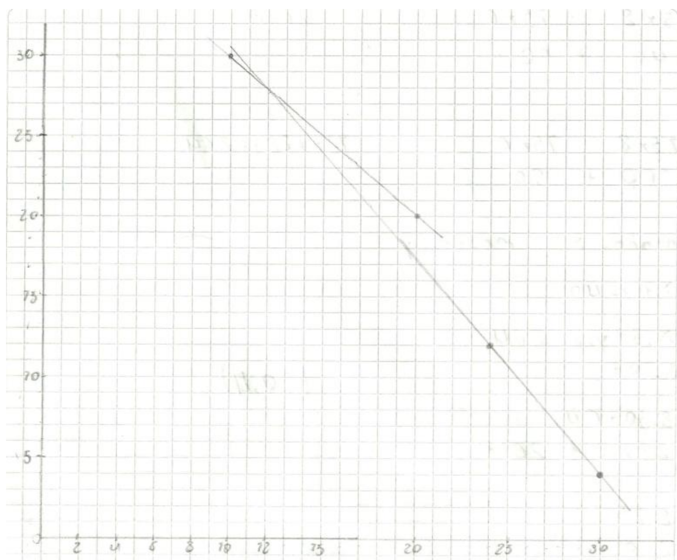
Al principio de la actividad 2 el estudiante comenzó a buscar la respuesta inmediatamente, luego cuando la entrevistadora le recordó lo que hicieron en la primera actividad planteó las dos ecuaciones, y como no conoce ningún método algebraico de resolución, buscó por medio del ensayo y error los valores para x y y, después de tener los puntos, los graficó y así halló la respuesta a éste problema. Podemos decir que E2 está en el pensamiento AA porque primero identifica las variables del problema (x arañas, y moscas) planteó las ecuaciones; luego transita al SG porque hizo la representación gráfica y tomó el punto de corte como la solución del problema. Regresando al pensamiento AA al comprobar que si era esa la respuesta, reemplazó el punto en las ecuaciones que él había planteado y verificó que si cumplían las condiciones; luego escribió (12 arañas y 28 moscas) que es la solución al problema.



E2: entonces es 40, $x + y = 40$

S: Esta es la condición de las cabezas y como escribimos entonces la otra condición.

E2: Estoy pensando, entonces sería… (Silencio) sería x por 8 + y por 6 igual a 264, sería así cierto.



E2:(Ubica los dos puntos y pinta la recta) se encontraría en… 12 x y 28 y (escribe en la hoja donde hizo las posibilidades).

S: Ahora probémosla a ver si esa es la solución.

E2: 12 por 8 + 28 por y = 264

S: Entonces ¿Cuál sería la solución?

E2: 12 y 18

S: Si pero, ¿Cuál es la pregunta del problema?

E2: ¿Cuántos hay de cada clase?

E2: 12 arañas y 28 moscas.

En la actividad 3 el estudiante inmediatamente contesta que tiene tres ecuaciones y tres soluciones. En el inciso b) responde que tiene tres soluciones presentando la dificultad mencionada en Ochoviet (2010) donde el estudiante confunde los puntos de corte con la solución del sistema. En el análisis a priori mostramos que nosotras esperábamos que se presentara esa confusión; y se realizó el inciso c), para que por medio de éste el estudiante pudiera darse cuenta del error y llegara a la respuesta correcta.

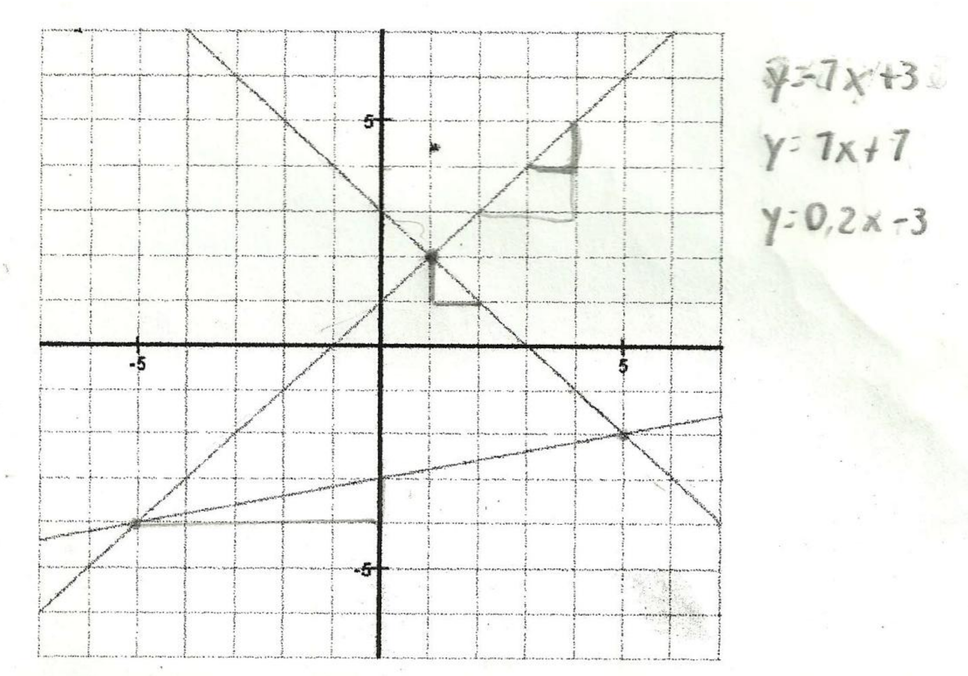
Para el inciso c) Al iniciar la actividad el estudiante no recordó como buscar las ecuaciones, luego cuando lo hace, buscó las pendientes (ubicando un triángulo en la recta y contando cuanto se mueve y hacia abajo o hacia arriba, de igual forma para x cuanto se mueve hacia la derecha o hacia la izquierda y así consigue las pendientes) y los intercepto con el eje y, hallando las ecuaciones. El estudiante pasó del pensamiento SG al AA porque a través de las representaciones gráficas halla la pendiente, el intercepto y realiza el sistema de ecuaciones.

S: y ¿cuánto tiene de pendiente esa?

E2: Entonces ahora busquemos (ubica la pendiente de otra recta) Entonces la pendiente es 1 y el intercepto es 1 también.

S: Si, y cuál nos falta

E2: Nos falta que este sería 1/5 y el intercepto… (Escribe la ecuación).



Después que el estudiante halló las ecuaciones, se le pidió que escribiera las coordenadas que pensaba era la solución. Al reemplazar las coordenadas se dio cuenta que los puntos no cumplen para todas las ecuaciones.

S: Entonces, usted me dice que tres, miremos este punto ¿Qué coordenadas tiene?

E2: Que bueno sería rectificar, 1 por 1 una y 2 por 3, seis.

S: Si usted la reemplaza acá, ¿1 por -1?

E2: -1 ¿+3? +3 es 2

S: Entonces si cumple ¿cierto?

E2: si.

S: Ahora miremos en la segunda ecuación.

E2: 1 por 1, 1 más 1 dos

S: Si cumple y ahora.

E2: 1 daría… 0,2 -3 daría -2,8

S: ¿y cuánto nos tendría que dar?

E2: dos

S: ¿o sea que este punto es solución?

E2: es que este punto es solución de estos dos solamente y ahí en la gráfica se ve.

Finalmente responde "*que no hay un punto que sea solución del sistema*". Se observa como el estudiante estando en el pensamiento SG, tomó las coordenadas de corte de las ecuaciones y transita al pensamiento AA cuando reemplazó y verificó que no cumple con todas las ecuaciones.

S: Si, pero en el sistema están las tres. ¿Hay algún punto que sea solución del sistema?

E2: No

S: ¿Pero entonces este punto?

E2: Este punto es solución de estas dos líneas

S: y este otro punto

E2: este otro punto es solución de estas dos y este es de estas dos (indicando el 3er punto y las dos líneas correspondientes).

S: ¿Pero todo el sistema?

A: No hay un punto que sea solución de todo el sistema.

Nos damos cuenta que E2 tiene un pensamiento AE, porque para dar las respuestas tiene en cuenta que al multiplicar la ecuación por un valor, las variables coinciden, también tiene en cuenta que los interceptos deben ser iguales, pero al darse cuenta que los intercepto son diferentes, contestó que el sistema no tiene solución.

E2: que esto que… el de arriba multiplicando por dos da el de abajo. Entonces este no coincide

S: Entonces ¿qué podemos decir de ese sistema?

E2: Yo digo que este no tiene solución

Inmediatamente tomó el siguiente sistema multiplicó por un valor (2) una de las ecuaciones y la compara con la otra diciendo coinciden, el estudiante descubre que la representación gráfica de las dos ecuaciones es igual porque su respuesta fue "*tiene infinita solución".*

Para el siguiente sistema hizo lo mismo, multiplicó por un valor (2) una de las ecuaciones y la compara con la otra, como las variables y no son iguales contestó tiene única solución. El estudiante sabe que al multiplicar una de las ecuaciones por algún valor y si alguna de las dos variable x o y no son iguales el sistema si tiene solución.

S: ¿y en esa que pasa?

E2: que esta si da

S: si da que

E2: si tiene solución

S: ¿y cuál es?

E2: Esto esta tiene solución infinita porque cuando multiplico todas coinciden. Cuando las pinto las dos hacen las mis recta, entonces tiene soluciones infinitas. Bueno y esta 5 x 3 y pero, entonces tendría solución única las de x coinciden, el resultado también coincide, pero las de y no. Entonces da solución única.

Para argumentar dice que lo puede hacer graficando, pero la entrevistadora le dice que no es necesario. Esta le pregunta cómo piensas que quedarían las representaciones gráficas y el estudiante para responderle se va a la primera actividad de la entrevista y señala como sería la representación gráfica de cada sistema.

Finalmente cuando le preguntan qué es un sistema de ecuaciones comienza analizando las soluciones y hace un recuento diciendo *"las de soluciones infinitas son las que hacen la misma recta, todos los puntos coinciden. Las que no tiene solución son las que las dos rectas no se encuentran en ningún punto"* termina concluyendo que sistema de ecuaciones "*es un conjunto de ecuaciones*". Por solución de sistema "*es el punto donde se encuentran las rectas"*. Estas respuestas dan muestra que el estudiante se formó una idea de sistema de ecuaciones a través del pensamiento SG porque éste llega a las definiciones a través del análisis e interpretación de las representaciones graficas de los sistemas. Sin embargo, eso era lo que nosotras esperábamos, por lo tanto el estudiante realizó el tránsito al pensamiento AE.

S: Entonces en conclusión, ¿qué entendemos por solución de un sistema?

E2: por solución de un sistema es el punto donde se encuentran las rectas

S: ¿y por sistema?

E2: es un conjunto de ecuaciones.

En forma general podemos decir que el estudiante E2, realiza el transito del pensamiento AA al SG. Porque a través de las representaciones graficas de los sistemas éste alcanza a identificar cuando un sistema tiene infinita solución, solución única y no tiene solución.

De igual forma transita del SG al AA, cuando el estudiante, toma los puntos de corte y los reemplaza y verifica que hace verdadera las ecuaciones.

También podemos ver como el estudiante llega a un pensamiento AE, cuando se vale de algunas propiedades, para decirnos cuál es el conjunto solución de los sistemas de ecuaciones.

E2: Eh tiene solución infinita, solución única y hay unas que no tienen solución.

S: aja

E2: Las de solución infinita, son las que hacen la misma recta, todos los puntos coinciden. Las que tienen una solución son las que se encuentran en un solo punto las rectas y las que no tienen solución son las que las dos rectas no se encuentran en ningún punto.

S: Pero siempre es necesario hacer la grafica

E2: No, no es necesario

De igual forma podemos decir que el estudiante E3 sí comprendió lo que era un sistema de ecuaciones y conjunto solución de un sistema, a través de las diferentes actividades y complementándose con la entrevista.

6.2.3. Análisis de Entrevista Estudiante 3

Para E3 las circunstancias no fueron muy favorables, durante dos semanas se realizaron en la institución partidos de intercolegiados y debido a que E3 pertenece al equipo de baloncesto del colegio, faltó mucho a clase y para la fecha en que realizamos la última entrevista ya habían pasado 13 días después de los talleres de instrucción. Esto influyó a que se sintiera un poco inseguro al momento de responder la entrevista, a pesar de que la entrevistadora trató de darle tranquilidad.

En la primera pregunta, empieza a responder según el orden de los sistemas, toma el primer sistema y trata de buscar parejas que sean soluciones de cada una de las ecuaciones, tiene dificultad para manejar los signos, es probable que por la inseguridad se haya confundido al momento de calcular los valores, la entrevistadora estuvo atenta a contribuir por medio de una actitud crítica, formulando preguntas que lo ayudaran a reflexionar sobre su trabajo. Al encontrar las parejas que cumplían las ecuaciones se remitió a la gráfica para detectar si efectivamente estaba representando el sistema del cuál sacó los puntos.

Después de las preguntas de la entrevistadora E3 encontró dos posibilidades para cada línea y de esta manera definir si efectivamente la primera gráfica es la representación gráfica del primer sistema. De la misma forma trabajó con el otro sistema, es decir, buscó dos parejas que fueran solución de la ecuación para reemplazarla en la gráfica.

> *E3:* $1 + 1 = 2$ *(hace el reemplazó en la hoja)*
>
> *S: ¿Y qué más podríamos hacer ahí?*
>
> *E3: 0 y 2. Ésta sale encima (señalando la gráfica 2)*
>
> *S: ¿cómo sabe?*
>
> *E3: Porque solo hay una línea*
>
> *S: ¿Y no puede ser otra? ¿Por qué sabe que es esta?*
>
> *E3: Si, porque ya la primera dio y coincide, entonces la otra va dar igual* $3x + 3y = 6$, *(reemplaza las parejas* $(1,1)$ *y* $(0,2)$ *) ¡ve y coincide entonces si hay solución!*

Para el último sistema solo reemplazó una pareja, (2,3) que fue escogida de la gráfica, para verificarlo en las dos ecuaciones y afirma que “ésta es la gráfica porque las dos posibilidades coinciden y nos da el punto en común”. Aquí vemos una evidencia de tránsito porque se basó en un dato que proporcionaba la gráfica, “el punto en común” y lo tradujo al pensamiento AA para reemplazarlo en las ecuaciones y comprobar que cumplía con las dos, hecho que le permitió argumentar que la representación gráfica del sistema c es la segunda gráfica.

Para hablar del conjunto solución de cada sistema E3 piensa inicialmente que la solución son los puntos que ha reemplazado, pero después de recordar el procedimiento que aplicó para hallar la gráfica del sistema C, responde la pregunta correctamente.

S: ¿Y qué pasa con ese punto?

E3: Que ambas líneas pasan por ahí

S: Entonces ¿cuál es la solución de ese sistema?

E3: Eh, espere (2, 3)

S: Pero entonces ahora miremos la primera, ¿qué pasa aquí?

E3: No tiene conjunto solución

S: ¿Y la b?

E3: Si tiene

S: ¿Cuál?

E3: Todos los puntos, todas las posibilidades que salgan

S: Que salgan ¿en dónde?

E3: En la línea

En cuanto al problema E3 no tuvo dificultad en deducir la ecuación $6x + 8y = 264$ y contrario a los otros dos estudiantes tuvo dificultad para la otra ecuación, debido a que no recordaba que el problema tenía dos condiciones, cuando hablamos acerca de las condiciones del problema dice: “es que tienen haber 40 cabezas y 264 patas”. Esto le ayuda a deducir la segunda ecuación, sin embargo dice que para resolver el problema se debería probar con posibilidades, pero cuando la entrevistadora le sugiere intentar empieza a hacer la gráfica. Esto significa que tal vez se mal interpreto su respuesta inicial, porque desde el principio pensaba en hacer la gráfica y cuando hablaba de posibilidades se refería a los puntos que son necesarios para hacer la representación de cada ecuación lineal. Esto también marca una diferencia con E1 y E2 quienes intentaron encontrar la respuesta del problema por ensayo y error antes de hacer la gráfica. Al hacer la gráfica encuentra un punto (26,13), pero al probarlo en las ecuaciones descubre que no es la solución del problema, así que decide hacer la gráfica de nuevo en otra hoja y ahora encuentra la solución correcta del problema. E3 ha logrado transitar del modo AA hacía el SG porque sabe que la solución del problema también puede ser interpretada como el punto en común de las dos rectas que son representación de cada una de las condiciones del problema, y se vale de esta interpretación para encontrar la solución.

En la tercera pregunta igualmente responde que el sistema asociado a ésta gráfica tiene 3 soluciones, cuando empezó a sacar las ecuaciones presentó cierta confusión, debido a que no tenía en cuenta la pendiente o dos puntos, solo tomaba un punto como referencia. Al hacer varias preguntas que le ayudaron a recordar la importancia de tener en cuenta la pendiente en la definición de una línea logró sacar las ecuaciones E3 recuerda que la solución de un sistema debería satisfacer todas las ecuaciones del sistema así que empezó a probar con los puntos que intuía eran solución del sistema y a medida de que los reemplazaba se convencía de que no estaban en la solución. Inicialmente respondió 3, luego 2 y por último 1, hasta que se le acabaron todas las opciones y se dio cuenta que el sistema no tenía solución. Se percibe el tránsito del modo SG al AA para demostrar que la intuición de los 3 puntos como solución del sistema es falsa. A continuación mostramos el momento en que descubre que el sistema no tiene solución:

E3: No da

S: Entonces ese punto ¿es parte de la solución?

E3: No. Queda este (Señalando el último punto de corte)

S: Este si será. ¿Qué debe pasar para que sea solución?

E3: Tiene que estar en las tres

S: Mirando la gráfica ¿qué podemos decir? Solo con la gráfica

E3: Si es porque aquí llega ésta y llega ésta

S: Pero ¿cuántas ecuaciones hay?

E3: Tres

S: ¿Y entonces ese punto está en la solución?

E3: No, entonces no tiene solución

S: ¿Quién no tiene solución?

E3: Ese sistema de ésta gráfica

En el cuarto punto E1 identifica casi inmediatamente el sistema que tiene solución única pero lo justifica porque los "números son más altos" haciendo referencia al 10 de las ecuaciones, dice que si los números son grandes las rectas con seguridad se van a intersecar en un punto porque darán más largas. La respuesta de E3 nos recuerda un problema que fue mencionado en Ochoviet, acerca de que los estudiantes consideran las líneas como segmentos y se les olvida que son infinitas, por lo tanto E3 considera que el coeficiente de la variable es el que influye para que la línea sea más larga. También menciona una sola línea y

recuerda que se debe mirar una relación entre los coeficientes pero no recuerda con exactitud cuál es. Después de observar por un breve instante de tiempo la gráfica del sistema b del primer punto, regresa a la cuarta pregunta y analiza lo siguiente:

E3: ¡Ésta sí! (señalando la b)

S: ¿Por qué lo sabe?

E3: Porque todas son el doble de la otra ecuación, entonces ésta va a dar una sola línea

S: Aja, o sea que va a tener ¿qué?

E3: Los puntos van a coincidir todos, los de la primera con los de la segunda, van a dar igual en una sola línea

S: Entonces qué podemos decir acerca de la solución de ese sistema

E3: Que es una solución única

S: ¿Única?

E3: No espere, infinita. Ésta es única (señalando el sistema c)

S: Aja, y la primera.

E3: No tiene solución

S: ¿por qué?

E3: Porque la respuesta no es el doble de la otra, en cambio estas (las que acompañan a x) sí y estas (las que acompañan a y) sí. Pero la respuesta no da igual

S: ¿Qué significa eso cuando uno hace la gráfica?

E3: Que van a dar dos líneas pero una más arriba

Las respuestas nos demuestran que E3 está pensando en el modo SG, porque se apoya en la representación gráfica para argumentar las respuestas, logró deducir de las graficas de la pregunta uno la forma de las ecuaciones cuando un sistema de 2x2 tiene infinitas soluciones y cuando no tiene solución. La entrevistadora quería saber si la respuesta de E3 era simple casualidad, de modo que plantea más preguntas sobre el primer sistema, para que E3 explique que lo que él llama las respuestas de las ecuaciones son las que están determinando el intercepto pero las pendientes de las dos ecuaciones son iguales.

Para la quinta y última pregunta logramos llegar a una definición muy cercana a la real en sistemas 2x2

S: Por ejemplo ¿éste es un sistema de ecuaciones?

E3: Si

S: ¿Y éste?

E3: También.

S: ¿Y acá?

E3: Sí, un sistema son varias ecuaciones, es un conjunto de varias ecuaciones

S: Aja, y ¿qué es la solución del sistema de ecuaciones?

E3: El punto en común que tienen las ecuaciones

S: Y ¿qué pasa si no tienen un punto en común?

E3: Pues no tiene conjunto solución

Para dar sus definiciones E3 se ha basado en el pensamiento SG, por ejemplo cuando tiene infinitas soluciones dice que porque coinciden las líneas, no obstante ha logrado aprender un sistema tiene infinitas soluciones cuando las ecuaciones son equivalentes y las llama como "líneas que son múltiplos".

6.2.4. Análisis General

En el análisis a priori esperábamos que hicieran la gráfica dando valores y luego las compararan o que tras recordar lo que habían hecho en las actividades, pudieran decir la respuesta sin necesidad de aplicar tablas de valores; sin embargo, nos sorprendieron porque todos utilizaron el mismo método para identificar las gráficas, además se apoyaban solo en un punto. E3 encontró dos puntos para cada recta pero porque las preguntas de la entrevistadora le hicieron recordar que para definir una recta de modo gráfico son necesarios dos puntos.

En el caso de los sistemas con infinitas soluciones los tres estudiantes dicen que la solución son todos los puntos de la recta, esto es correcto, pero es una definición muy apegada al SG en dos dimensiones. Sin embargo pudimos notar que al principio E1 y E3 respondieron que estos sistemas eran de solución única y fue necesario reflexionar sobre la gráfica del sistema con solución única, para encontrar la diferencia entre los dos. Se logró aclarar la duda, porque pudieron comprender que la solución de un sistema ecuaciones son las parejas que cumplen las dos ecuaciones y ver en el modo SG que las líneas coincidían les permitió detectar varias parejas hasta que se daban cuenta de que eran muchas, y respondían que la solución del sistema son todos los puntos de la línea. En Ramírez (2008) se mostraba que el error que más se había presentado en este caso, era que los estudiantes respondieran que no tiene solución, error que pudimos confirmar en la actividad 4 de nuestro trabajo; sin embargo, en la entrevista no sucedió de esta manera porque los estudiantes primero reemplazaron puntos sobre las ecuaciones y luego los buscaron sobre la recta, por esta razón ya sabían que los puntos de las dos ecuaciones eran los mismos y que había solución, solo que debido a que inicialmente solo tomaron unos cuántos de referencia no podían responder de una vez cuántos formaban parte del conjunto solución y el tránsito entre los pensamientos les permitió llegar a esa conclusión acertada de que el sistema tenía infinitas soluciones.

Tal como lo esperábamos, en el problema pudimos comprobar el tránsito entre el pensamiento AA al SG, no solo porque construyeron las ecuaciones, sino por la reflexión inicial que hicieron para lograr deducirlas, recordemos que E1 y E2 inicialmente trataron de resolver el problema por ensayo y error, estos estudiantes tienen un gran manejo de las operaciones aritméticas y de ser una solución más sencilla con seguridad habrían encontrado la respuesta rápidamente y no verían ninguna utilidad a plantear ecuaciones. Este hecho los obligó a reflexionar sobre un método que les permitiera encontrar la solución del problema de una forma más efectiva, así que las actividad 1 fue un referente para tomar la decisión de aplicar este método.

Como pudimos ver en Ochoviet (2010), se les había presentado una configuración muy similar a los alumnos, que respondieron que el sistema tenía tres soluciones, nosotras quisimos ahora permitirles extraer las ecuaciones de esta representación con el fin de que lograran ampliar el concepto de punto solución de un sistema. El hacer el tránsito del pensamiento SG al pensamiento AA les ayudó a encontrar la respuesta correcta sobre la solución del sistema.

En la cuarta pregunta era lógico que aún no tuvieran las conclusiones sobre la forma que debería tener un sistema para decir que tiene infinitas soluciones o no tiene solución, por consiguiente, fue necesario deducirlas en ese momento gracias a las preguntas que se formularon y al debate.

Las respuestas a la última pregunta de la entrevista nos permitieron ver la idea que formaron los estudiantes sobre los sistemas de ecuaciones y su solución, una idea que principalmente se ha fundamentado en el pensamiento SG, pero a la vez, las preguntas 3 y 4 los ayudaron a transitar entre los pensamientos e integrar el pensamiento AE, para reconocer la propiedad de que el punto solución es aquel que debe cumplir con “todas las ecuaciones”, notemos que están dando la propiedad especifica de punto solución, no como un punto de corte. Igualmente lograron definir los sistemas de ecuaciones como el conjunto de ecuaciones lineales.

Los educandos estaban un poco nerviosos por la grabación y aún así respondieron de la manera más concienzuda posible, al finalizar la entrevista los tres hicieron un gesto de descanso y fuera de la grabación afirmaron que ahora si tenían una idea más clara de los sistemas de ecuaciones, porque en las actividades no los habían entendido muy bien pero gracias a la entrevista reforzaron su aprendizaje.

7. CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos las conclusiones derivadas de la investigación realizada. Estas están encaminadas a explicar la comprensión que los estudiantes de noveno grado, que participaron en este proceso de instrucción, lograron alcanzar.

Es importante tener presente que el pensamiento sintético geométrico (SG) puede ser el punto de partida para motivar los pensamientos analítico aritmético (AA) y el analítico estructural (AE), pensamientos que predominaran cuando los sistemas de ecuaciones se hagan más complejos. Además si se proponen actividades que incentiven el tránsito entre el SG y AA, los estudiantes pueden mejorar notablemente la comprensión, estas actividades son diferentes a las que generalmente se proponen en los libros, pero enfrentan al adolescente a una situación inusual que lo obliga a reevaluar su actual definición de conjunto solución de un sistema de ecuaciones y al mismo tiempo ampliarla.

Si bien ninguna de las actividades se enfocó en desarrollar el pensamiento AE, fue clave para que los estudiantes pudieran lograr el tránsito entre los modos de pensamiento AA y SG. Por lo tanto, gracias a la deliberación de su trabajo en grupo formaron una idea estructural. Esto nos lleva a la principal conclusión que es la necesidad de reforzar el pensamiento AE, el cual está inherente a los otros dos pensamientos, funcionando como un puente entre ellos que permite el tránsito y a la vez que favorece la comprensión.

La forma en que se diseñaron las actividades logró estimular la curiosidad de los estudiantes hasta generar en ellos el deseo de seguir trabajando en tiempo extra clase alrededor de las mismas. Lo cual indica que las actividades lograron motivarlos hacia el aprendizaje del tema tratado.

Sin temor a equivocarnos, reafirmamos que los estudiantes tienen dificultad para el caso de los sistemas con infinitas soluciones; inicialmente piensan que el sistema asociado no tiene solución.

Podemos decir, que la experiencia adquirida en este trabajo nos permite ser conscientes de las dificultades de los estudiantes al afrontar la comprensión del tema tratado. Pero además, el estudio de los modos de pensamiento nos ha dado una herramienta de análisis sobre la manera de superar dichas dificultades. De tal manera, que nuestra práctica profesional en el aula de matemáticas se enriquece.

Esperamos que la información presentada en este trabajo sea la base para iniciar otros proyectos, que a largo plazo permitan dar evidencias más claras sobre la importancia de desarrollar maneras de pensar sobre los objetos matemáticos.

BIBLIOGRAFIA

Aciertos matemáticos 9 (2008). Grupo educar editores. Serie para educación básica secundaria.

Algebra elemental (1941). Dr. Aurelio Baldor.

Algebra y geometría 2. Grado 9ª (2004). Editorial Santillana S.A.

Ardila, A. y Montañez, C. (2010). Evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento geométrico, aritmético y estructural en estudiantes de secundaria y primer año de universidad: el caso de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Monografía Especialización en Educación Matemática, Universidad Industrial de Santander.

Cutz, B. (2005). Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones lineales y su solución. Tesis de Maestría no publicada, CINVESTAV- IPN, México.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (2000) The obstacle of formalism in linear algebra, in J-L. Dorier (Ed.) *On the Teaching of Linear Algebra, Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, 85 - 95.

Hipertexto 9 (2010) Editorial Santillana S.A.

Kenneth Hoffman, Ray Kunze (1973). Algebra lineal. Professor of Mathematics. Invine .Prentice Hall Hispanoamericana. S.A.

Ministerio de Educación Nacional, MEN (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden.

Oaxaca, J. De la Cruz, J y Sánchez, J. (2008). Dificultades en el tránsito del razonamiento sintético geométrico al analítico aritmético en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Ponencia. Foro Matemáticas. U.N.A.M. México.

Ochoviet, T. (2009). Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tesis de Doctorado no publicada. Instituto Politécnico Nacional, Uruguay.

Poole David (2004). Algebra lineal. Una introducción moderna. Trent University. Thomson Learning.

Ramírez, M. (2008). Concepciones de los estudiantes de nivel superior sobre sistemas de ecuaciones lineales. Tesis de Maestría no publicada. CINVESTAV, México.

Roa-Fuentes, S. (2008). Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal. Tesis de Maestría no publicada, CINVESTAV- IPN, México.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. En J. –l. Dorier (ed.), On the teaching of linear Algebra. Kluwer Academic Publishers, 209 -246.

Stanley L. Grossman S.(2007). Algebra lineal Sexta Edición. University of Montana.University College London. Mc Graw Hill. interamericada editores, S.A. de C.V.

Vinner,S.(1991). The role of definitions in teaching and learning. En D.Tall (ed) Advanced Mathematical thinking. Kluwer. Dordreth. Boston. London, 65-81.

ANEXOS

ANEXO A. ENTREVISTA ESTUDIANTE 1

S: Empezamos, di a qué gráfica corresponde esta gráfica, hay tres gráficas y tres sistemas…(lee la pregunta uno)

E1: Bueno, la b corresponde a esta gráfica, espere pienso la otra

S: Entonces escríbale ahí.

E1: Profe, esto está en orden o cada uno indica una, es decir, ¿estas dos de esta? (indicando el sistema b y una de las gráficas).

S: sí.

E1: Porque mire acá (indicando la primera ecuaciones del sistema b) pero acá miro que…espere la pienso bien.

S: Usted me está diciendo que $x + y = 2$ *es ¿cuál?*

E1: Esta (indicando la línea en la gráfica uno).

S: Entonces usted piensa que si esa ecuación es esta línea entonces la otra será la otra línea ¿qué tenemos ahí?

E1: 3x1 3 + 3x1 3 = 6 ósea pero si acá ubico no hay uno, ahí da, ahí da, pero es que si acá ubico no hay uno, aquí hay dos gráficas.

E1: Entonces pienso que es la misma línea, ¿se puede?

S: que sea la misma línea?, o sea estas dos (indicando las dos ecuaciones) sean la misma línea.

E1: Si, estas dos (indicando una línea de la gráfica) sean la misma línea (indicando las dos ecuaciones).

S: ¿Por qué crees eso?

E1: Porque ambas son exactas.

S: Entonces si las dos son la misma línea, puede ser esa gráfica, porque mire que tiene 3 graficas (indicando cada una de las otras dos graficas).

E1: Si, si, entonces acá (silencio).

S: Usted me está diciendo que estas dos al graficarlas da la misma línea (indicando el sistema b).

E1: No, no, no. (Indica con el dedo la gráfica 3, permanece en silencio por un momento y luego regresa a mirar la gráfica 1 y continua) es que yo pienso que está sola podría ser una, indicando una de las líneas de la gráfica 1) y esta podría ser otra (indicando la otra línea de la gráfica 1).

S: El caso es que si hay dos líneas ¿cuántas ecuaciones hay?

E1: Si estas son una hay dos ecuaciones. Pero estas se parecen mucho y acá hay seis ecuaciones peo acá solo hay cinco. Entonces por eso yo pregunto que si este podría ser estas dos (indicando una línea de la parte inferior de la gráfica 1 y las dos ecuaciones del sistema b) este podría ser , como no hay cinco gráficas, esta uno puede representar para que las otras quepan en estas.

S: Cada gráfica corresponde a cada sistema, entonces por ejemplo la a) corresponde a un sistema, la b) corresponde a otro sistema, la c) al otro sistema. Porque usted piensa que es la recta de abajo, como sabe que es la de abajo y no la de arriba.

E1: Porque 1 y 1, 1 +1= 2, y 3 x 1, 3 y 3x1, 3, y da 6.

S: O sea que (1,1) está en esta línea y donde queda el (1,1).

E1: (Indica nuevamente la línea de abajo) ah pero estos son negativos, ¡ah! Ya.

S: Entonces donde queda.

E1: (Indica correctamente el punto).

S: Entonces, ¿cuál es la línea que representa la primera ecuación?

E1: Esta (indicando correctamente la línea) a ya, es que esta es con signo negativo. Entonces…

S: Pero mire que hay otras graficas

E1: Eso es lo que estoy mirando, entonces también podría ser esta (indicando la gráfica 3 y señalando el punto (1,1)) y esa misma podría ser esta (señalando la segunda ecuación del sistema b)

S: Exacto, entonces ya encontramos la b.

E1: (borra la b que había puesto al principio y escribe b en la gráfica 3) Esta ya la hice (le escribe una marca al sistema b) ahora voy a buscar esta (señalando el sistema a).

E1: (Se queda por un momento en silencio y cambia al sistema c) 4x2 8 y -3 5 (empieza a contar cuadros en los planos cartesianos como buscando el punto).

S: Si quiere escríbala para que no se le olvide.

E1: (Escribe, 2 y 3 debajo de las letras x y de la segunda ecuación del sistema c, busca estas coordenadas en la gráfica 1 y no pasa la línea por el punto, entonces cambia la ubicación y busca el punto 2,-3, este punto está en la segunda línea de la gráfica uno).

S: ¿Por qué señalas este punto?

E1: Porque es negativo.

S: Pero es negativo (señalando lo que había escrito anteriormente).

E1: Si porque aquí dice restar.

S: Pero restamos el valor que estamos reemplazando en la y. Si la y la reemplazamos por un negativo que pasa aquí (señalando la ecuación)

E1: Entonces no sirve.

S: Usted reemplazo la x *por dos ¿y la* y*?*

E1: La x *por dos.*

S: ¿Y la y*?*

E1: Acá vamos convirtiendo (señalando las letras y *los reemplazos) acá es dos y acá es 3.*

S: O sea que la y *la reemplazamos por cuál.*

E1: Por 3, pero al hacer eso nos queda negativo.

S: Pero ese el menos que usted no está reemplazando, usted reemplazó la letra por 3 y ya, entonces el punto es 2 y 3

E1: Pero al ubicarlo acá hay que buscarlo negativo?

S: No porque es (2,3)

E1: ¡ah!

S: Recuerde qué es lo que estamos haciendo, ¿qué estamos buscando?

E1: Buscar… No sé

S: En el ejercicio ¿qué fue lo que nos preguntaron?

E1: Di qué gráfica corresponde a cada sistema

S: Y ya encontramos que este sistema (indicando el sistema b) corresponde a esta gráfica de acá (indicando la gráfica 3) y ahora estamos buscando estos dos, usted ya encontró algo de estos dos, el punto (2,3) este punto ¿en dónde lo ubicamos?

E1: Puede ser acá (indicando el punto de corte entre las dos rectas en la gráfica 2) y las líneas tienen que ver?

S: ¿Cómo así que si las líneas tienen que ver?

E1: O sea que si tienen que pasar por estos puntos.

S: Este punto usted lo reemplazó en ¿cuál?

E1: En esta (indicando la línea).

S: En esta fórmula, este punto forma parte de esta línea. Y ¿qué más podemos hacer con ese punto? ¿Forma parte de alguna otra línea?

E1: Espere voy a sacar esta otra, 2x5 y 3x1 aquí sirve 5 y 1 (ubica este punto en el plano cartesiano y da la otra línea). Este punto forma parte de esta (indicando el punto 5,1 y la recta a la cual corresponde) y este punto también forma parte de esta (indicando el punto 2,3 y la primera ecuación) si o no.

S: Si, entonces que gráfica sería.

E1: Ésta.

S: Esa sería ¿cuál?

E1: La gráfica, las ecuaciones del punto c, espere voy a mirar esta (señalando la gráfica 1) para saber si está bien.

S: Sí, confirmemos ese.

E1: Si acá coloco 1 y 1 ¿tiene que buscarse en lo positivo o en lo negativo?

S: Pues está ubicando, o sea el 1 reemplazo a la x *y el 1 reemplazo a la* y*, entonces va a buscar el punto (1,1).*

E1: ¿O sea que no importa si es positivo o negativo?

S: ¿Dónde queda el punto (1,1)?

E1: (señala un fragmento de la recta que pasa desde el punto $(-1{,}0)$ y $(0,-1)$*)*

S: normal.

E1: ah ¿normal? Queda acá (señalando correctamente el punto).

S: Bien, allí queda el punto (1,1) y ya, porque un punto por acá (señalando el cuarto cuadrante) por ejemplo, ubiquemos este punto, colóquele ahí un puntico. Este punto ¿qué coordenadas tiene?

E1: Tiene (2,1), en $y, -2$ *y en* $x, 1$

S: Exacto, tiene en y*,* -2 *y en* x *,* 1*, entonces sí importa el signo, pero este (1,1) queda aquí donde lo ubicaste.*

E1: Si ya, ya lo ubique pero ahora tengo que saber cómo es que sale la ecuación de acá (señalando la otra línea) y aquí sí ya sé que está gráfica es de acá (escribe la letra c en la gráfica 2) y acá es la de a), pero voy a explicar porque esta ecuación va allá (indicando la segunda línea de la gráfica 1).

(Silencio 2,5 minutos)

E1: Es que aquí siempre me va a dar 4.

S: ¿Siempre da 4? Probemos con un punto, cojamos uno a ver, usted ya tiene los punticos marcados, tomemos uno cualquiera.

E1: Aquí se supone que este es x*.*

S: Entonces ¿cuánto sería?

E1: 4x4, 16 y este es 2 entonces 4x2, 8 y 16, -8 queda 4, no espere, espere 4x3 es 12

S: Escribámosla, para que sea más fácil.

E1: Por eso 4x3 es 12 y 4x2, 8 y 12, -8 es 4.

S: jun., pero hay otro detalle 4x3. ¿Usted de dónde sacó ese 3?

E1: De acá (señalando los 3 cuadros que van bajando).

S: Mírelo bien, este punto ¿cuánto tiene? (señalando los dos cuadros del eje x*).*

E1: ¡Ah! 2, pero de todos modos da lo mismo.

S: Hagámosla bien.

E1: Acá sería (borra lo que estaba antes y escribe 2 y 3) pero de todos modos el resultado da 4.

S: Revisemos 4x2, 8 y 4x3, 12, ah no, 4x2, 8…pero es que aquí no es 3, miremos bien la gráfica. Estos 3 cuadros están hacia abajo.

E1: ¡Ah! ya (silencio).

S: Usted tiene razón en que son 3 pero vienen es hacia abajo entonces de ¿qué signo es?

E1: ¿Qué signo es? Negativo entonces sería menos 3. Pero no sigue dando la respuesta.

S: Exacto. ¿Cuánto da de respuesta?

E1. -4

S: Entonces corrijámosla ahí, ahorita que llega Héctor ya la tenemos arreglada. (17:02)

S: Segundo punto (lee el problema).

E1: Ya me acuerdo, yo por aquí tengo unos apuntes de los problemas que hicimos en clase. (Saca la calculadora y el cuaderno de apuntes de la clase).

S: Pero este es diferente ¿si ve? porque aquí le están hablando de cabezas y de patas. Si quiere trate de hacerlo en una hojita.

(Silencio)

S: ¿Usted se acuerda el problema que hicimos en la actividad uno?

E1: Qué se buscaba sacando los datos, ah ya (escribe en la hoja) las cabezas es x *y las patas es* y*. Entonces ahora ¿qué toca hacer? ¿Sacar posibilidades o no?*

S: Sacar posibilidades sería una manera, pero si quiere intente con algunas a ver si sale fácil. Sacar posibilidades sería ir probando, ir probando. La idea es saber ¿cuántas moscas y cuántas arañas hay?

E1: ¿Cuarenta cabezas?

S: Si hay cuarenta cabezas, y una araña ¿cuántas cabezas tiene?

E1: Una.

S: ¿Y una mosca?

E1: Una.

S: Pero las patas, si no, porque las moscas tienen seis patas y las arañas 8 patas. Entonces en total ¿cuántas patas hay?

E1: 264 (empieza a hacer operaciones con ayuda de la calculadora).

S: Sería bueno que escribieras las operaciones en la hoja.

E1: Una posibilidad puede ser o sea, pongamos que 20, 20 arañas (Escribe 20 arañas)

S: Bueno, supongamos 20 arañas y si son 20 arañas y en total son 40 cabezas ¿entonces qué quiere decir eso?

E1: Que entre todos hay cuarenta, pero es que lo que yo pienso es que ya se sabe que entre todos hay 40.

S: Entre todos hay 40, pero la pregunta es ¿cuántas moscas hay? ¿y cuántas arañas hay?

E1: Entonces tocaría anotar ¿20 arañas?

S: Si usted dice 20 arañas pero en total hay 40 cabezas entonces si hay 20 arañas quiere decir que ¿cuántas moscas hay?

E1: Si espere voy a echar una leidita aquí que me ayuden a hacer las cuentas (coge el cuaderno) entonces es…….

S: Será que existe una forma más fácil que no sea así probando y probando. ¿Cómo hicimos el de la actividad el primero de la actividad?

S: Si quiere miremos están aquí para que se acuerde.

S: ¿Si se acuerda qué decía ese problema?

E1: Es cuántas arañas tenía….tiene que haber…..bueno algo así igual. Lo que hay que hacer es esto las patas igual a 40 ¿sí?

S: Si. O sea las patas no.

E1: ¿no?

S: Ahí está bien pero usted me dice x más y igual a 40. ¿Estas son las patas? (indicando el resultado).

E1: No están son las arañas (señala x) y estas las moscas (señala y)

S: Exacto las arañas y las moscas deben dar?

E1: 40

S: 40 o sea que x ¿qué me está representando ahí?

E1: x me está representando, bueno digamos que x me está representando las arañas y ¿Cuáles son las otras?

S: ¿Y las moscas?

E1: x arañas, y moscas ¿entonces?

S: Entonces las arañas más las moscas deben dar 40. ¿Ahora como escribimos la otra condición? La condición de las patas como escribimos esa condición.

E1!Eh! sería igual pero a lo último por 200?

S: No sé. Porque mire que cada una tiene diferente.

S: Por ejemplo la mosca tiene 6 patas entonces cuando usted ya sabe cuántas moscas hay por ejemplo si hay 15 moscas ¿Cómo hace para saber las patas?

E1: Pues entonces acá multiplico tal cantidad por las patas y me da un número y el resultante me tiene que dar un número entero que quepan de las moscas las patas…y contar de una vez.

S: Pero como escribimos eso así (señalando la ecuación) como una ecuación, ¿Cómo lo escribiríamos?

E1: Espere…

S1: Lo que usted dice si es cierto entonces que le hace a las patas.

E1: Sería así x por 8 más y por 6 y igual a 264 así (escribe la ecuación correctamente).

S: Aja bueno entonces ya las tenemos ahora como vamos a solucionar este sistema

E1: Empezar a sacar…264

S: Ósea ¿qué vamos a sacar?

E: 9, 9 por 6 (lo escribe en la calculadora)

E: no ¿esto?

S: Bueno mire lo que usted hizo primero acá se acuerda que fue lo primero que hizo en este punto en cualquiera de estos qué fue lo primero que usted hizo (señalando las gráficas del primer ejercicio).

E1: Eh, sacar o como le digo bueno buscar unas opciones y multiplicarlas para sacar el resultado.

S: Exacto, entonces hagamos lo mismo.

S: ¿Y qué hacemos con esas opciones después?

E1: Se convierten a los restantes estos (señalando el ejercicio).

S: O sea usted encontró una opción, ¿y qué hace con esa opción?

E1: La…

S: Qué hicimos acá

E1: ¡Ah! ya espere aquí, al encontrar la cantidad remplazo las…esto como se llama (señalando x, y en la ecuación) bueno los...

S: Los números pero entonces acá por ejemplo que hicimos con las opciones.

E1: Las representamos en la gráfica.

S: ¡Ah! Y ¿después? Las representamos y ¿qué nos salió?

E1: Nos salieron un punto, un punto que une a ambas pendientes.

S: Entonces, usted encontró una luego encontró la otra y ¿qué paso con este punto? (señalando la gráfica).

E1: Ese es el restante de ambas bueno de un punto que vale ambas…bueno yo sé pero no sé cómo explicarlo.

S: Aja bueno entonces ¿qué vamos a hacer ahora para resolver este?

E1: Pues.

S: ¡Ah! pero nos tocaría pintarlo y ahí no tiene cuadritos (señalando la hoja donde se está resolviendo el ejercicio).

E1: (Realiza operaciones en la calculadora).

S: Pues tocaría de acá del cuaderno vamos a sacar una hoja cuadriculada porque lo vamos a pintar en el plano y si nos queda torcido no podemos encontrar el punto.

E1: Ya lo encontré.

S: Ya encontró ¿qué?

E1: No esto…

S: Escriba lo que encontró ¿qué encontró? ¿Pero sí encontró posibilidades?

E1: Si más o menos.

E1: Acá multipliqué este por una cantidad y me dio 160 entonces me quedaba un resultado de 104 entonces 104 lo dividí en 6 patas.

S: ¿Si?

E1: Entonces me dieron 7 pero 20, 20 y 7 da 27 me harían falta 3.

S: Pero si le sirve cuando vayamos a pintar la gráfica porque no estamos buscando la respuesta todavía, estamos buscando dos posibilidades acá y dos posibilidades para poder pintar la gráfica. Entonces bueno pero saque primero una cojámoslas en orden ¿Cuál va pintar primero?

E1: (Señala la opción 2 y empieza apuntarla) pero así no sirve quedan sobrando 3 patas

S: Bueno entonces escríbala acá $8x + 6y = 264$ *, entonces escriba allí debajo la que usted encontró.*

E1: 20 + 7 si ¿es así?

S: Entonces probémosla 20 por 8

E1: Espere 20 por 8 (hace la operación en la calculadora) 160 y 7 entonces 6 7 no entonces hace falta más 20 por 6 120 no esto no sirve la posibilidad hay que montar otra (borra el ejemplo que el izo)

S: Escríbale hay 21 a ver si sirve

E1: 264 queda 96, 96 dividido por 6 da 16 entonces quedaría en 37, hace falta todavía tres cabezas.

S: Si pero no borre esa que esa le sirve.

E1: 23 por 8 184 dividido no restado igual a 80 entonces dividido en 6 no da 0, entonces 22 por 8 = 176 menos 264 igual 88 dividido en 6 no toca cambiarlo, 25 por 8 = 200 menos 264 =64 tampoco sirve, ahora con 26, 26 por 8 =206 menos 264 tampoco…

S: Y por qué no hacemos la gráfica mejor en vez de estar probando, a ver si de pronto…

E1: Bueno esta es fue una posibilidad pero hizo falta pero sirve o no, x 21.

S: Pero esa nos sirve, no para darnos la respuesta definitiva pero, nos sirve para sacar la línea.

E1: Y el 6 (haciendo la línea) ¿si hago la línea?

S: Espere apenas tiene un punto ¿para pintar una línea que necesitamos?

E1: Dos. Entonces sigamos intentando. Intentemos con 18 bueno 18x8 =144…18 y 20 (los busca en el plano y crea la línea) una posibilidad exacta ¿a ver?

S: Pero hay ya tenemos esa ahora miremos la otra línea $x + y = 40$.

E1: Para sacar esa.

S: Lo mismo ¿para sacar la gráfica como haríamos?

E1: En esa se puede colocar cualquiera.

S: Si.

E1: 20 y 20

S: Podría ser

E1: 20 y 20 entonces darían 18 y 18

S: Busque otra que no de tan…

E1: ¡Ah! bueno que quede más lejos.

S: Porque Hay como esta tan pequeñito.

E1: 15 y 5

S: ¿15 y 5? ¿Cuánto es 15 más 5?

E1: No esto 25 y 15 es (pinta la línea)

S: Entonces, toca mirar a ver si se encuentran por aquí (señalando más arriba).

E1: Miro.

S: Si ¿cómo hace para saber?

E1: (alarga las líneas).

S: Está muy difícil para saber…

E1: están muy lejos.

S: Estoy mirando que de pronto la única que nos dio exacta es esta, de pronto hay un error en la formula, pasemos a la siguiente pasemos a la tercera. En el siguiente plano aparece la gráfica entonces hay 3, la gráfica de un sistema de ecuaciones.

E1: Cuántas ecuaciones tienen este sistema 3, ¡eh! bueno ya sabe 3 ecuaciones, ¿cuántos puntos crees que forma parte de la ecuación?

S: Se acuerda que esta mañana nosotros dijimos qué era la solución.

E1: Si el punto que tenía las 3, pero aquí hay 2, puede ser este y este o estos 2 (señalando las líneas de la gráfica).

S: Por eso entonces, ¿para que sea solución que debe cumplir?

E1: Que todos se encuentren en ese mismo punto.

S: Y allí en esa gráfica ¿qué está pasando?

E1: Solo se encuentran dos en un mismo punto.

S: ¿Entonces?

E1: En ninguna de las ocasiones se encuentra las 3 en un mismo punto.

S: Entonces, ¿cuántos puntos crees que sean parte de la solución?

E1: 3

S: Ahora la c.

E1: Encuentra un sistema cuya representación gráfica corresponda a la figura

S: Si ósea ahí le están pidiendo las formulas.

E1: ¿Las formulas?

S: Entonces hay que sacarlas.

E1: ¡Eh! Arranquemos con esta (señalando el punto donde se encuentran las 2). ¡Eh! pongamos 1 y 2. Y2 y x1 ¿sí?

S: ¿Cuál va empezar primero?

E1: Con ésta.

S: Con esa línea a bueno entonces saco un punto. ¿Que más necesita?

E1: La pendiente.

S: ¿Cuánto es la pendiente?

E1: 1.

S: Si, mire la línea, entonces usted como hizo para saber ¿cuál era la pendiente?

E1: Porque cogí este punto y este y 1 y 1 se dividen y da 1.

S: Pero entonces acuérdese que esta línea va ¿qué?

E1: Va subir.

S: Exacto, entonces ¿cuánto seria la pendiente allá?

E1: Negativo.

S: si

E1: entonces seria -1 negativo.

*E1: (empieza a resolver el ejercicio) entonces si, 2 voy a remplazar igual a -1 * 1 + y entonces quedaría igual a 2 igual a 1 – 1 ¿hay que da negativo?*

S: Allí ¿qué operación está haciendo?

E1: Una multiplicación.

S: si

E1: Entonces negativo b igual a 1 + b , b igual a 2 -1 ¿sí?

S: Si.

E1: b = a 1 da 1.

S: Entonces ¿cómo sería la solución de este?

E1: La hago con 1.

S: Ósea ¿la formula cómo quedaría?

E1: ¡Ya! Quedaría.

S: Estamos buscando una fórmula así parecida, entonces, ¿cómo sería? Si ahí va bien.

E1: Sería y.

S: y =

E1: y = +

S: Mire la formula M cuanto es M

E1: M es 1 +1.

S: Si.

E1: Por 1.

S: La fórmula, y = la de la pendiente después ¿cuál sigue?

E1: La x .

S: La x .

E1: La x es 1.

S: No la x porque en la formula mire en la formula que pasa, quedan las letras, ¿y cuanto le dio b?

E1: 3.

S: Entonces ¿qué escribe?

E1: ¡Ah! ósea los únicos que se le colocan el número son la pendiente y la b

S: b es una muestra. Ahora falta la otra son 3, bueno ya encontramos esta, entonces a es= a esta, ¿ahora cuál?

E1: Ahora vamos por esta.

S: Bueno ¡listo!

E1: Puedo utilizar el mismo punto.

S: Si.

E1: Pues da en el mismo punto...!ah! ¡No!

S: Será que da la misma fórmula si utilizamos el mismo punto.

E1: Eso es lo que estoy pensando, ¿la hago para saber?

S: Si, hagámosla para ver si al utilizar el mismo punto da la misma formula

S: Entonces saque el punto ¿cuál es el punto que va a utilizar?

E1: ¡Eh! 2 x1, pendiente daría 1 dividido en 1 = 1. Yo creo que si da igual.

S: Probémosla a ver.

E1: Entonces vamos a repasar 2 = a ¿la pendiente acá es negativa? (señalando la parte de abajo del plano).

S: Es esta línea cierto ¿Cómo va esta línea?

*E1: Positivo, a la pendiente tiene que ir desacuerdo a esta línea, bueno el 1 de la n + b que es lo que va contrariar , entonces 2 = 1 * 1 da 1 + b igual a.*

S: Entonces mírela acá, es más fácil sacándola analizándola nada más 2 ES = A 1 + B , ¿entonces cuánto vale b?

E1: Vale 1 entonces es = a 1

S: Ahora saquemos la formula, si ve que dio lo mismo.

E1: b = a 1 x + 1 ¡no! , entonces da igual que acá, entonces ahora vamos a sacar la formula b, entonces puedo coger este punto.

S: El que usted quiera

E1: Pero entonces aquí va en la x *un 5,* $y = 2$ *, sacamos la pendiente.*

S: Pero entonces cuál? 2 pilas con este…pero desde donde sale, desde aquí hacia donde ... hacia abajo cierto (señalando desde 0 en el plano) hacia arriba van los números de que signo?

E1: Positivos.

S: ¿Positivos? y estoy contando hacia abajo esos dos.

E1: a -2 ¡ah ya! y ahora bajo acá la pendiente, saquemos la pendiente más grande.

S: ¿Qué línea estamos mirando?

E1: Hay (borra la línea) ¿Cómo así profe? $x = 4$

S: Pero la pendiente, bueno listo.

E1: ¡Ah! La pendiente se divide…

S: Si pero usted me está haciendo 5 es qué? Los que conto aquí cierto lo que contó en x *(señalando la parte negativa del plano) y esta lo que conto en* y*, se acuerda ¿cómo es la pendiente?*

E1: ¡Ah ya!

S: Entonces y lo que contamos en x*, ¿va en donde en la parte de abajo o en la parte de arriba?*

E1: Arriba.

S: ¿Y esta lo que contamos en y*?*

E1: Abajo, en este punto va 0, entonces sería…

S: Sería ese la pendiente es eso.

E1: Esa es la pendiente.

S: Porque mire qué está como más acostadita

E1: ¿Y eso no se divide?

S: Pues si la divide da decimal mejor trabajémosla, ¿pues si usted la divide que le va pasar? Le va salir…

E1: Un decimal.

S: Entonces es más fácil trabajarla como lo estamos haciendo.

E1: x 2-2 = a 2 + b, 2 c= a?

S: Pero para que un 5 por 15.

E1: Hay, cómo es que se hace esto, se divide por este y se multiplica por este.

S: Si por eso.

E1: 5 dividido en 1 = 1

S: Y la calculadora para qué, no pero en la de las arañas si la necesitamos

E1: ¡Eh! Ahora.

S: Ya hicimos esta.

E1: Entonces para que de -2 tendría que ser ¿-3?

S: Si.

E1: b = a -3 dieron más, la pase acá pero negativo, ese era el punto.

S: Entonces pongámoslo ordenaditos como para que se vea o resaltados de alguna forma, porque no se ven las respuestas.

E1: Espere que no he sacado la formula, y = la x es un punto o pasa uno x + no! -3 , ahora colocamos la formula.

S: para saber que quede bien clarito, ¿está cuánto nos dio?

E1: Esa.

S: Entonces cópiela por allí.

E1: Este ejercicio es este (señalando la segunda línea).

S: ¿Cuántos puntos forman parte de la solución?

E1: 2.

S: ¿Cuáles?

E1: Este y este.

S: Coja uno cualquiera.

E1: Este.

S: Listo este es el punto que tiene x *¿cuánto?*

E1: Tiene 2.

S: Entonces si es solución ¿qué tiene que cumplir?, se acuerda ¿ qué quiere decir que sea solución? ¿Qué esta? ¿Es un punto que?

E1: ¡Ah! En la que se encuentran 2 rectas.

S: Aja pero en esta se están haciendo 3, entonces la solución deberían encontrarse ¿qué?

E1: Las 3.

S: Entonces este punto, aquí ¿qué pasa en este punto?

E1: En ese punto se encuentran apenas 2.

S: Entonces, ¿si será solución?

E1: No.

S: ¿Por qué?

E1: Porque solo se encuentran 2 y deben pasar todas por un solo punto.

S: Para que sea solución ¿qué pasa?

E1: Tienen que encontrarse todas.

S: Esta gráfica ¿cuántas soluciones tiene?

E1: 2.

S: ¿Cuáles?

E1: Esta y esta.

S: Pero esta (señalando el punto positivo) es solución ¿de quién?

S: pero hay una solución ¿qué sea de las 3?

E1: No.

S: No entonces, ¿es posible decir que hay una solución de las tres?

E1: No.

S: Entonces este sistema tiene solución o ¿no?

E1: No.

S: No tiene solución, entonces este sistema tiene 3 , ¿el sistema tiene solución?

E1: No.

S: Y si tuviéramos estas 2 o estas 2

E1: Si tendría solución.

S: Pero como tenemos tres.

E1: No hay solución porque tendrían que encontrarse las tres.

S: (Siguiente ejercicio) para los siguientes sistemas de ecuaciones decir sin necesidad de hacer la gráfica si hay infinitas soluciones no hay soluciones tiene solución.

E1: Entonces es como pensar esto.

S: Exacto pensar, o solamente mirándola, va ser parecido al anterior pero sin la gráfica hay unos que tendrán solución única otros puede ser que no tengan.

E1: Este tiene solución única (señalando la gráfica 3) este tiene solución (señalando la gráfica 2) y este no tiene solución (señalando la gráfica 1).

S: Este porque no tiene (señalando la gráfica 1).

E1: Porque no tiene.

S: Y este (señalando la gráfica 2).

E1: Porque sí.

S: Y este (señalando la gráfica 3).

E1: Porque es única, tiene una línea.

S: Pero entonces acá ¿cuántos puntos hay en esta línea sobre la línea?

E1: 2.

S: ¿Cuáles?

E1: ¡Ah! No solo tiene 1 punto.

S: Bueno, este (1, 1), y no hay más puntos.

E1: El de acá.

S: Entonces ¿cuántas tiene?

E1: ¡Ah! entonces no tiene solución.

S: ¿Por qué?

E1: Porque tiene varias.

S: Pero entonces ¿tiene o no tiene?

E1: Si tiene.

S: Pero ¿tiene?

E1: Varias.

S: Pero como decimos eso en matemáticas, ¿cuándo tiene varias?

E1: ¿Qué?, ¿esto? solución infinita.

S: Solución infinita, seria esta cierto (señalando la gráfica 3), será que esto nos sirve para contestar la de allá.

E1: ¿Para hallarla?

S1: Si.

*E1: ¡Eh! 2 * 2 = 4   ¡ah! esto es restado.*

S: Pero acuérdese que dijo que sin hacer

E1: La gráfica.

S: Sin hacer la gráfica, no vamos hacer la gráfica, vamos a buscar algo que nos sirva de guía.

E1: ¡Ah ya! Solo comparando o algo así.

S: por ejemplo comparando ellas dos hay alguna relación entre ellas, si quiere mire los apuntes del cuaderno, ¿se acuerda? Por ejemplo este, ¿qué pasaba con estas ecuaciones?

E1: Que ambas acaban en el mismo punto.

S: ¿Dónde están estas ecuaciones?, esta es la 2, ¿cómo era?

E1: $2x + y = 6$

S: $4x + 2y = 12$

E1: Este tiene solución infinita.

S: ¿Cómo supo?

E1: Porque acá me aparece este es la mitad de este y este es la mitad de este no sé si será correcto o será machete

S: Ósea que hay una relación entre las 2.

E1: Si.

S: ¿Hay relación entre todos los números?

E1: Este es infinito.

S: Muestre, miremos.

E1: Esta relación puede ser esta relación.

S: Bueno escríbale la respuesta al pie, que ya le sabemos con seguridad.

E1: Acá estos dan infinito porque allá estos se relacionan y estos también (señalando las formulas).

S: pero ¿estos?

E1: Eso es lo que estoy pensando.

S: Y por ejemplo el primero, ¿qué pasa con el primero?

E1: ¿El primero? Acá estos 2 ¿sí?

S: Bueno ya encontramos el infinito y ahora.

E1: ¡Ah ya! espere, este es infinita porque todas tienen mitades esta solo tiene 1 y esta otra tiene 2, entonces qué solución? Entonces este tendría solución única.

S: Mirémosla, que quiere decir ¿que tenga solución única?

E1: Pues de pronto que solo hay 1 punto o algo así.

S: Ósea al pintarlas solamente se van a encontrar en 1 punto.

E1: Por eso fíjese que acá hay uno.

S: ¿Qué hay?, ¿hay un punto en el que se encuentran amabas?

E1: Si, pero en esta no estoy seguro porque si se grafican no sé si se encuentren.

S: Y dice que sin graficar, por ejempló miremos aquí arriba, a ver que nos puede ayudar miremos la forma, por ejemplo la que ya sacamos, la infinita si ve , ya la sacamos pero acá no es la mitad (señalando la gráfica 2)

E1: No pero 1/3.

S: ¡Ah! , bueno pero entonces busquemos otra, por ejemplo que paso con esta (señalando la gráfica 1).

E1: Esta no nos sirvió (la ecuación 1).

S: Exacto es esta cierto, pero mire la relación que hay entre las2.

E1: Ambas sí.

S: Pero entonces los números de acá, ósea ¿son el mismo o no?

E1: No son el mismo.

S: Entonces no son el mismo, entonces ¿qué sucede allá?

E1: No son el mismo y se relacionan estos dos.

S: Entonces, ¿cuál sería ese caso?

E1: Ese no tiene solución.

S: Sí.

E1: Y ésta ¿qué es de solución única? (la gráfica 3).

S: La ultima.

E1: Decir con sus palabras ¿qué entiende por conjunto solución?

S: Por conjunto soluciona de un sistema de ecuación, ¿qué entiende usted por solución de un sistema de ecuación?

E1: Eso si para eso soy un poco malo.

S: Bueno, ¿qué entiende usted por sistema de ecuaciones? ¿Se acuerda?, ¿Qué es un sistema de ecuación?

E1: Un proceso que nos ayuda a encontrar, ¿si es así?

S: Lo que usted entiende, por ejemplo ¿aquí hay un sistema?

E1: Si.

S: Pero, ¿por qué sabe que sí?

E1: Porque son varias. Un sistema es donde en un plano cartesiano en donde hay varias rectas.

S: Y este, ¿es un sistema de ecuaciones? (la gráfica 1)

E1: Si.

S: Entonces, ¿las rectas se unen?

E1: Entonces, es en donde un plano hay varias rectas.

S: ¿Y siempre se unen?

E1: No.

S: Puede ser que se unan, ¿y este? (grafica 3)

E1: Este también porque hay dos, aunque sean las mismas pero hay dos.

S: Entonces, ahora ¿qué es sistema? bien, y entonces ¿qué es solución de sistema?

E1: Es ya sí que es única y eso, si es única o no tiene solución o es infinita.

S: Si muchas gracias.

ANEXO B. ENTREVISTA ESTUDIANTE 2

S: Entrevistador lee la pregunta 1

E2:(Piensa un momento y escribe el punto (1,1) luego ubica en el plano) tiene que ser esta (señalando la gráfica 1) o esta (señalando la gráfica 3) pero tengo que buscar otro punto de la 2da ecuación (Escribe 4, -3).

S: (4,-3) ¿sirve?

E2: (Ubica las coordenadas sobre el plano) ¿No?

S: Vamos a revisar la operación ¿Por qué crees que (4, -3) sirve?

E2: (Reemplaza este punto (4,-3) en la 2da ecuación y se da cuenta que da el valor de 4)

¡Ah pero el 4 es negativo! Sí. Entonces seria este negativo y este positivo borrador (corrige y ahora queda la pareja (-4,3); ubica esta pareja en el plano y da sobre la segunda línea) Entonces 4 y -3, entonces seria esta.

S: Bueno, entonces póngale ahí la letra.

E2: Seria la a (escribe la letra a y observa el 2do sistema) Bueno acá… el 1 y el 1 (se queda mirando las dos gráficas y dice) pero entonces cada una tiene dos ecuaciones y esta ¿por qué apenas tiene una línea? (señalando la gráfica 3).

S: Eso le pregunto yo.

E2: ¡Ah! sí ya me acordé (escribe el punto (1,1) debajo de la segunda ecuación).

Ah! Da el mismo punto ¿cierto?

S: ¿Qué pasa con ese sistema?

E2: Que da la misma línea, la misma recta.

S: Porque crees que da la misma recta.

E2: Porque o sea todos tienen el mismo punto, entonces es la b.

(Señalando la gráfica del medio) o sea que esta es la C pero vamos a ver. $2x2$, *4,* $3x3, 9$ *y* $4+3$, *no mentiras,* $4+9=13$.

(Después de mirar la gráfica) o sea que acá también sirve (2,3); 2x4, 8 menos 3.

Las dos se cruzan en el mismo punto.

S: Usted escogió este punto y ¿de casualidad le coincido con las dos ecuaciones?

E2: No fue de casualidad, yo lo vi allí y lo probé yo lo saqué porque lo vi de la gráfica.

S: Ahora como ya identificamos los sistemas ¿Cuál es la solución de cada uno?

E2: ¿Que en una las dos rectas se cruzan?

S: Empecemos con este (indicando la gráfica 2) cual sería la solución de este sistema.

E2: Se cruzan en un mismo punto.

¿La solución?.. (Indica el punto 2,3)

S: Exacto, o sea que tiene una solución y el último.

E2: El último que… esto las dos ecuaciones hacen la misma recta.

S: Entonces, ¿tiene cuántas soluciones?

E2: Muchas.

S: Sí y entonces éste (indicando la primera grafica) ¿cuántas soluciones tiene?

E2: No tiene solución.

El segundo un problema.

(Silencio leyendo el problema).

S: Las cabezas suman y las patas tanto, pero las moscas y las arañas no tienen la misma cantidad de patas.

E2: ¿Cuántas patas tiene una mosca?

S: Ahí dice.

E2: Recuerde que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas.

S: Ojo entonces que es lo que están preguntando ahí.

E2: Están preguntando ¿qué cuántas, cuántas moscas y arañas había?

S: Cómo se nos ocurre solucionar eso.

E2: (Silencio).

S: Qué se le ocurre hacer para encontrar la solución.

E2: Son 40 animales y 264 patas… yo lo sacaría de memoria.

S: ¿De memoria? ¿Ud. ya se lo sabe de memoria?

E2: ¡No! O sea sacando opciones ¿si me entiende? O sea así y mirando.

S: Mirando si funcionan, entonces probemos a ver.

E2: Entonces empecemos con 5 arañas, ¡uy! Muy poquito (escribe 5 x 8 en la hoja) pongámosle 5 arañas ahí (escribe 15 x 6) bueno 5 x 8 40 y 15 x 6, 90 pero muy poquito entonces…

S: Además las cabezas ¿Cuánto tiene que dar?

A: Las cabezas me tienen que dar… hay si (toma el borrador).

S: No borre, ya, prueba más abajo.

E2: Me confundí, pensé que las cabezas eran 20, entonces pongámosle 25 y 15 (escribe, 25 x 8 y 15 x 6, hace la multiplicación y los suma) me da 290.

S: Será que existe una forma más fácil, recuerda como resolvimos el primer ejercicio de la actividad uno (le entrega las hojas donde respondieron la actividad 1) ¿Qué era lo que preguntaban ahí?

E2: Habían…. (Silencio).

S: No recuerda el problema. Vuélvalo a mirar ahí dentro está el enunciado.

E2: Las variables y todas esas cosas.

S: Pero el problema, el problema ¿cómo era?

E2: En un hotel hay habitaciones.

S: Será que si se parece o no.

E2: ¡Hay! es que ese yo también lo saqué así, probando.

S: Probando…

E2: Aja probando.

S: Bueno probando, pero si quisiéramos resolver, ¿Cuál método será más exacto probando o haciendo la gráfica?

E2: La grafica (silencio observando la actividad 1 sería ponerle a las arañas x y a las moscas y).

E2: Entonces arañas x; moscas y; entonces $x + y = 264$ *patas*

S: x *son las arañas y las moscas, si suman.*

E2: entonces es 40, $x + y = 40$

S: Esta es la condición de las cabezas y como escribimos entonces la otra condición.

E2: Estoy pensando, entonces sería… (silencio) sería x por 8 + y por 6 igual a 264, sería así ¿cierto?.

S: Bueno y si ya tenemos las ecuaciones entonces ahora ¿Cómo hacemos?

E2: (Mira la actividad 1) sería… es que las multiplicaciones están muy grandes profesora.

S: Pues saque una calculadora, yo necesito es que usted piense lo que va hacer, la calculadora no piensa por usted.

S: Tiene que saber que va hacer.

E2: ¡Eh! 8 por, 8 por, 8 por 20, más, más eh… no me da.

S: 8 x 20, 160 y entonces y que daría

E2: Acá daría decimal.

S: Entonces pruebe con otro número.

E2: Ya se cuál sería, 8 x 30 + 6x 4 igual 264.

S: ¿Ya encontró una que sirve?

E2: Sí.

S: ¿Cuál?

E2: 30 y 4.

S: 30 y 4 bueno pero para pintar una línea ¿Cuántas necesitamos?

E2: Mínimo dos.

S: Al menos dos y ya tiene una.

E2: Toca buscar otra (silencio) 8 x 25, 200 entonces me quedaría 64 y 6 por… no.

S: Entonces no es 25, pruebe con otra.

E2: El 30 si me sirvió, entonces lo paso acá (Escribe 30 y 4 en el extremo superior derecho de la hoja).

S: 30 y 4 fue la que sirvió.

E2: Ahora 8 x 24 y 6 por (hace operaciones con la calculadora) 192 me quedarían 72 ¿cierto? 6 por, 6 por 12, 72.

S: Sume a ver si es verdad que da.

E2: Si.

S: Y ésta (indicando 30 y 4) si da, ¿Está seguro?

E2: si, 30 x 8 =240 más 6 x 4 = 24 es 264.

S: ¡Ah!

E2: La otra sería 24 y 12, pero toca hacer la recta y queda muy grande ¿Puedo usar otra hoja?

S: Si, claro.

E2: (Empieza a realizar el plano cartesiano ubica los puntos (30, 4) (24,12)).

S: Listo ya hicimos una recta ahora que nos falta.

E2: Entonces me faltaría la de las cabezas.

S: Bien, faltaría la de las cabezas pero esa es más fácil.

E2: Esa no tiene números (escribe) 20 y 20 y 10 con 30.

S: Y ya, ¡ay se nos perdió!... acá (ayudándole a encontrar la hoja donde dibujó el plano cartesiano).

E2:(Ubica los dos puntos y pinta la recta) se encontraría en… 12 x y 28 y (escribe en la hoja donde hizo las posibilidades).

S: Ahora probémosla a ver si esa es la solución.

E2: 12 por $8 + 28$ *por* $y = 264$*.*

S: Entonces ¿Cuál sería la solución?

E2: 12 y 18.

S: Si pero, ¿Cuál es la pregunta del problema?

E2: ¿Cuántos?

S: ¿Cuántos hay de cada clase?

E2: 12 arañas y 28 moscas.

S: Entonces escríbala ahí

E2: ¿En dónde la escribo?.

S: Por aquí, en alguna parte (indicando la parte al lado del enunciado del problema, si ve que probando, probando y probando es un poquito más demorado, a usted ¿Qué le parece más fácil, seguir probando o hacer la gráfica?

E2: La gráfica.

S: ¿Cuál será el más exacto entre estos dos?

E2: El de gráfica.

S: (Leemos el enunciado del tercero).

S: En esta grafica hay un sistema de ecuaciones, entonces la pregunta es ¿Cuántas ecuaciones tiene ese sistema?

E2: Tres.

S: Ahora ¿cuántos puntos cree que forman parte de la solución?

E2: Este, este y este (indicando los puntos de corte que hay entre las 3 líneas).

S: Entonces ahora recuerde que la solución ¿qué es la solución de un sistema?

E2: Eh.

S: ¿Cuál es la solución de un sistema?

E2: (silencio).

S: Ahorita los miramos, por ahora sigamos con la parte C. Encuentra un sistema cuya representación.., entonces vamos a buscar un sistema, las ecuaciones, hay que buscar las ecuaciones.

E2: Las hago por acá.

S: Si, donde usted quiera. Recuerda ¿cuántas ecuaciones tiene?

E2: Tres (empieza a escribir).

S: ¿Cuál va a buscar primero?

E2: Ésta (indicando una de las 3 líneas).

S: ¡Ah! Esa.

E2: (Escribe una ecuación) ¿esta sería una? $2x + y = 3$ *.*

S: ¿Cómo hizo para sacarla?

E2: Tomo éste punto.

S: Ese punto y si escojo este otro punto.

E2: Escribe otra ecuación diferente $(4x - y) = 3$*.*

E: Usted me está diciendo que para sacar la ecuación de una recta puedo tomar un punto cualquiera y escribir la ecuación mirando nada más este punto.

E2: Si

S: Esta es una misma línea, ¿cierto?

E2: Si es.

S: Y si es una misma línea estas dos deberían ser iguales (señalando las dos ecuaciones). Porque están representando la misma línea, pero ¿si son iguales?

E2: No.

S: Cómo hacemos para sacar una ecuación ¿si recuerda? Que es lo que miramos

E2: Pues eh…

S: Mire lo que hicimos en la actividad 4.

E2: (Toma la hoja y analiza la actividad 4).Ah se mira este punto (señalando la ecuación que sacó en la Actividad 4).

S: En la actividad 4 les pedían sacar las ecuaciones y ustedes las sacaron, ustedes recuerdan ¿cómo las sacaron?

E2: Ah sí.

S: Por ejemplo ustedes tomaron esta (señalando una de las rectas) y sacaron la ecuación.

E2: Si, ya me acordé, entonces sacaría la pendiente ¿cierto? (Dibuja un triangulo pequeño) la pendiente sería de 1 entonces sería x, la y.

S: Bueno ya sacamos que la pendiente es 1, de ¿Cuál estamos hablando?

E2: Esta, ah ya.

S: La pendiente es 1, que otra cosa hay que mirar.

E2: La y es el intercepto

S: El intercepto ahí ¿cuánto es?

E2: Eh…

S: Entonces ¿Cómo sería?

E2: $2x + y = 3$

S: Ese 2 ahí ese dos (indicando el dos que había escrito antes).

Reemplácela a ver si de verdad funciona, tome un punto y reemplácelo para saber si quedo bien.

E2: Por ejemplo este punto.

S: Por ejemplo este punto (el punto (1,2)

E2: 2x3 = 6

S: +1, 7 y usted dice que da 3.

E2: Si (empieza a borrar) entonces ¿Cómo es que se saca la ecuación?

S: Pues mire acá (indicando la actividad 4) para que recuerde.

E2: (Se queda mirando la actividad 4).

S: ¿Cómo sacaron estas ecuaciones? Estás más fácil mirar estas que las sacaron de una

Por ejemplo esta ecuación $y = -2x + 1$ *de ¿Dónde sacaron esta ecuación?*

E2: (Indica una de las rectas) ¿Esta?

S: Aquí están las 3 ecuaciones, que son estas 3 líneas esa es la primera de ¿Cuál de esas 3 líneas es?

E2: La sacamos de ésta (indicando una recta).

S: Este sistema tiene 3 líneas que son estas 3 ecuaciones ¿entonces? De esa bueno, por qué sabe que es esa.

E2: Porque tiene pendiente de 2 y el intercepto es 1

S: Tiene pendiente -2 porque mire

E2: Ah sí, y acá el intercepto es el uno.

S: Entonces así como hicimos las de acá, vamos a encontrar los de allá.

E2: (Borra lo que estaba antes y empieza a escribir $y = 2x + 3$.

S: ¿Cuál es la que está haciendo que ya se le confundió otra vez?

E2: Ésta indicando la recta.

S: Pero es -2, la que usted está haciendo mírela otra vez la que usted está haciendo.

E2: Borra el -2.

S: Pero ¿Cuál es la que está graficando en este momento?

E2: (Indica la recta).

S: Y cuánto tiene de pendiente esa.

E2: Si quitamos el 2 aquí es 1. Entonces ahora busquemos (ubica la pendiente de otra recta) Entonces la pendiente es 1 y el intercepto es 1 también.

S: Si, y cuál nos falta.

E2: Nos falta que este sería 1/5 y intercepto (Escribe la ecuación).

S: Entonces ahora volvamos sobre la segunda pregunta, la segunda pregunta es ¿Cuántos puntos cree que forman parte de la solución?

E2: Tres.

S: Entonces, usted me dice que tres, miremos este punto ¿Qué coordenadas tiene?

E2: Dos, una x y dos y .

S: Si, entonces escribámosla y mirémosla si en verdad es solución. Si es solución ¿qué debe pasar cuando uno lo reemplaza ahí?

E2: ¿Qué bueno sería rectificar?, 1 por 1 una y dos por 3, 6.

S: Si usted la reemplaza acá, ¿1 por -1?

E2: -1 ¿+3? es -2, 2.

S: Entonces si cumple ¿cierto?

E2: Si.

S: Ahora miremos en la segunda ecuación.

E2: 1 por 1, 1 más 1, dos.

S: Si cumple. ¿Y ahora?

E2: 1 daría… 0,2 -3 daría -2,8.

S: ¿Y cuánto nos tendría que dar?

E2: Dos.

S: O sea, ¿qué este punto es solución?

E2: Es que este punto es solución de estos dos solamente y ahí en la gráfica se ve.

S: O sea que este punto es solución de estas dos (mostrando las 2 primeras ecuaciones) pero en el sistema quienes están.

E2: Estas tres, es que ahora puede sacar una solución de estas dos.

(Indicando las dos últimas ecuaciones).

S: Si, pero en el sistema están las tres. ¿Hay algún punto que sea solución del sistema?

E2: No.

S: ¿Pero entonces este punto?

E2: Este punto es solución de estas dos líneas.

S: ¿Y este otro punto?

E2: Este otro punto es solución de estas dos y este es de estas dos (indicando el 3er punto y las dos líneas correspondientes).

S: ¿Pero todo el sistema?

E2: No hay un punto que sea solución de todo el sistema.

S: ¡Listo! Cuarto.

E2: (Lee la pregunta).

S: Sin necesidad de hacer las gráficas, es decir, analizando el sistema.

E2: Es con esto mismo.

S: ¿Cómo?

E2: ¿Con esto mismo? (indicando las ecuaciones del 3er punto).

S: Están en una forma se acuerda ¿cómo se llama esta forma?

E2: Esto no…

S: Bueno pero lo importante en que una forma diferente a estas; o sea el orden pero estas si estas parecidas a ¿cuál?

E2: ¿Estas?

E2: Parecidas a estas (indicando las del primer punto).

S: Ósea, la forma como están organizadas es como estas, pero todas son ecuaciones lineales ¿listo?

E2: Ósea, que yo tengo que hallar la solución.

S: Mirar si tiene única, si tiene infinitas pero sin hacer la gráfica.

E2: Entonces, podría (escribe números sobre las variables).

S: Será que el primer punto nos sirve para algo, ¿Cómo era la forma de las ecuaciones cuando tenían infinitas? ¿O cuando tienen única? ¿Cómo es la forma cuando no tiene solución?

E2: Cuando no tienen solución no se cruzan.

S: No se cruzan pero si uno hace la gráfica, pero aquí nos están diciendo que no hagamos la gráfica. Si yo veo la gráfica fácil pero sin la gráfica o sea solo mirando el sistema, solo mirando las ecuaciones.

E2: (silencio).

S: Miremos las actividades otra vez, por ejemplo en esta (muestra la actividad 7). Con esa primera que pasaba.

E2: ¿En cuál?

S: En la primera actividad, la actividad 1, ahí que pasaba con ese sistema.

E2: ¿Cuál profesora?

S: El sistema que nos salió ahí (Indica la gráfica de Actividad 1). Tiene solución única, tiene infinitas.

E2: Este tiene única.

S: En la actividad 2…

E2: En la actividad 2, muestre haber si me acuerdo, esta es la que queda la misma línea esta tiene infinitas.

S: Tiene infinitas, pero ¿cómo eran las ecuaciones cuando tiene infinitas solución? Mire la ecuación. ¿Cómo eran?

E2: Para que sean infinitas todos los puntos tienen que coincidir con las dos rectas.

S: Pero entona hay algo en las ecuaciones que nos pueda ayudar para saber si va a dar infinitas o ¿no?

E2: Ah, sí que me acorde de eso.

S: ¿de qué se acordó?

E2: Que… el de arriba multiplicando por dos da el de abajo. Entonces este no coincide

S: Entonces que podemos decir de ese sistema.

E2: Yo digo que este no tiene solución. ¿Entonces qué hago?

S: Pues escribir.

E2: (Escribe debajo del sistema). Entonces…

S: ¿Y en esa que pasa?

E2: Que esta si da.

S: ¿Si da qué?

E2: Si tiene solución.

S: ¿Y cuál es?

E2: Esto esta tiene solución infinita porque cuando multiplico todas coinciden. Cuando las pinto las dos hacen las mis recta, entonces tiene soluciones infinitas. Bueno y esta 5 x 3 y pero entonces tendría solución única las de x coincidan el resultado también coincide pero las de y no. Entonces da solución única.

S: Si queremos estar totalmente seguros, ¿qué tenemos que hacer?

E2: Hacer la gráfica.

S: ¿Sera necesario?

E2: ¿La hacemos?

S: No creo, por ejemplo esta, esta cómo saldría (indicando el primer sistema) más o menos esta ¿cómo quedaría?

E2: ¿Esta?

S: Si, ¿cómo saldría la gráfica?

E2: Quedaría como esta (señalando la grafica 1 de primer punto) dos líneas así sin encontrarse por ningún lado, está señalando el segundo sistema) quedaría como está señalando la grafica 3 del primer punto) o esta (señalando la grafica de la actividad 2) Todos los puntos iguales de las dos ecuaciones, da la misma recta y esta se encuentra en un solo punto las dos rectas.

S: Si, listo entonces, la última con sus propias palabras ¿Qué entiendes por el conjunto solución de un sistema de ecuaciones?

E2: ¿Conjunto solución? Yo diría que la solución son los puntos en donde se encuentran las dos rectas.

S: ¿Y todos los sistemas tienen dos rectas?

E2: pues eh…

S: ¿Siempre hay solo dos rectas?

E2: Si porque si tiene solo una recta no es sistema.

S: Por ejemplo ahí (señalando la actividad 2) aquí solo hay una recta.

E2: Pero, ósea como lo digo, aquí hay como una recta encima de otra.

S: Entonces, ¿si es un sistema o no es un sistema?

E2: Si es un sistema.

S: ¿Pero si solo hay una recta?

E2: Ósea, puede que de una recta que deben haber al menos dos ecuaciones.

S: Exacto, y este (señalando el 3er punto) este es un sistema.

E2: Si, es un sistema tiene tres ecuaciones.

S: Pero tiene tres, entonces ¿Qué es un sistema de ecuaciones?

E2: Un sistema de ecuaciones sería, que los puntos de las ecuaciones se encontraran, o sea que se encontraran las líneas.

S: Eso sería como la solución y si no se encuentran.

E2: Si no se encuentran no tiene solución.

S: ¿Y qué otra posibilidad es la que hay?

E2: Eh, tiene solución infinita, solución única y hay unas que no tienen solución.

S: Aja.

E2: Las de solución infinita, son las que hacen la misma recta, todos los puntos coinciden. Las que tienen una solución son las que se encuentran en un solo punto las rectas y las que no tienen solución son las que las dos rectas no se encuentran en ningún punto.

S: Pero siempre es necesario hacer la grafica.

E2: No, no es necesario siempre.

S: ¿Por qué?

E2: Porque como yo hice acá, o sea no es necesario ahí.

S: Usted que fue lo que hizo ahí en ese punto.

E2: Ósea, multiplique x dos, la ecuación de arriba para que diera la de abajo y me tenían que coincidir todas, si me coincidían todas e tenían solución infinita. Acá por ejemplo me coincidieron y fue solución infinita (señalando el 2do sistema de 4to punto) acá no coincido el resultado entonces no tiene solución (señalando el 1er sistema del 4to punto).

S: Entonces en conclusión, que entendemos por solución de un sistema.

E2: Por solución de un sistema es el punto donde se encuentran las rectas.

S: ¿Y por sistema?

E2: Es un conjunto de ecuaciones.

ANEXO C. ENTREVISTA ESTUDIANTE 3

S: Bueno la primera pregunta dice: Dadas las siguientes gráficas y los siguientes problemas de ecuaciones, entonces ahí son 3 sistemas y 3 gráficas la primera pregunta dice: ¿Qué gráfica corresponde a cada sistema?

E3: Si es ¿lineal afín o eso?

S: Qué gráficas corresponde, o sea hay 3 sistemas lineales, ¿sí los ve al principio?, $2x + 2y = 4$, $4x + 4y = -4$

E3: ¿Ésta cuál es? ¿La primera?

S: En el segundo $x + y = 2$ *, eso es otro sistema y* $3x + 3y = 3$ *, entonces a cada sistema le corresponde una gráfica*

E3: ¿Toca detallar cuál es, ponerle debajo un numerito?

S: Sí, o la letra.

E3: 2 en x *¡no, esa no es! 4 en* x *y 2 en* x *dan más (señalando la primera gráfica).*

S: ¿Cómo hace para graficar ese sistema?

E3: 4 en x *y 4 en* y *.*

S: $4x + 4y = -4$ *¿cómo graficamos esa ecuación?*

E3: $(4,4)$.

S: Remplace el $(4,4)$ *allá.*

E3: ¡Ah! es remplazar la x *para que nos de esto.*

(Silencio).

E3: Es que ese número…

S: ¿Qué quiere hacer graficar la línea o qué quiere hacer?

E3: Es que la pregunta dice di qué grafica corresponde.

S: Aja, entonces ¿cómo hacemos ahí?

E3: Que este ejercicio ¿de qué gráfica es?, toca hallar esto, entonces toca cambiar la x *y la* y *que nos de 6, buscar números que de esto. ¿Sí? 3 y 1.*

S: Escríbalo para saber.

E3: (lo escribe).

S: ¿sí funcionan 3 y 1?

E3: ¡Hay no! $4 * 2 = 8$ *y* $2 * 2 = 4$*,* $8 - 4 = 4$*.*

S: Pero es -4*.*

E3: ¿Aquí es -4*?*

S: Quiere que le de 4, entonces cuánto vale la y*.*

E3: La y *vale 4.*

S: ¿Por qué?

E3: No espere 2.

S: Bueno, vale 2 entonces remplácelo.

E3: $4 * 2 = 8 + 4$*.*

S: ¿Le da 4? No. Entonces ¿qué le hacemos?

E3: (Borra el ejercicio).

S: Pero está cerca.

E3: ¿Debe que ser negativo el número?

S: Quiere que le de 4 positivo.

E3: Por eso.

S: Entonces ¿qué hacemos?

E3: Restar, cambiar de signo.

S: Hágala aquí en la hojita para que sea más fácil, más ordenado.

E3: x *y* $y = 4$ *entonces, aquí.*

S: ¿qué está haciendo?

E3: cambiando la y*, pero 4 es positivo es que es una suma.*

S: sí, pero y *puede tener valores, y siempre es positivo o siempre es negativo ¿Qué pasa con los valores de* x *y* y*?*

*E3: 2 *1 +2 da 4.*

S: Entonces ahí ¿cuál sería entonces el punto?

E3: No hay ninguna.

S: Seguro.

E3: 1.

S: Seguro.

E3: $(1, 1)$ *muevo 1 pero no hay otra opción, todos valen 5.*

S: $(1{,}1)$ qué significa, ¿qué es? En geometría.

E3: 1 ¡claro!

S: Pero ¿qué es?¿ un número?, ¿una línea? ¿Qué quiere decir el (1,1) ¿qué usted escribió ahí?

E3: El punto.

S: Ese punto que, ¿en dónde lo buscamos?

E: En la línea por eso, espere acá (ubica el punto en el plano cartesiano).

S: ¡Ah listo!

E3: Si ya vi.

S: Bueno y listo le dio ahí ¿y qué quiere decir eso?

E3: Que esta grafica es de esto (señalando la primera ecuación con el primer grafico).

S: ¿seguro, la otra? Porque cada sistema tiene dos ecuaciones.

E3: 4 que me dé -4 , 24.

E3: (silencio) 16 negativo, sí. 3 y 12 sí.

S: Entonces ahí ¿cuál pareja es? ¿O cuál punto es?

E3: $(-4{,}3)$ (ubica el punto en la gráfica).

S: Bueno ¿qué significa eso?

E3: Que ésta es la ecuación de esta (señalando la ecuación y la línea de la gráfica) ¿sí?

S: Con ese punto ya podemos decir eso nada más ¿con un solo punto?

E3: Si.

S: Seguro.

E3: Y qué tal si hay algún otro que nos sirva.

S: Cómo hacemos para estar seguros de que esa es, sirvió con esos 2 puntos que están ahí, pero cómo hacemos para saber que hay más.

E3: 1, 2, 3, 4 no da esto, este punto no da aquí en la línea.

S: ¿Cuál punto?

E3: Es que los puntos que dan acá dan en esta porque deben quedar en esta misma línea.

S: los 2 deben quedar en la misma línea ¿en la misma línea exactamente? ¿Cuál es el requisito para que estén en la misma línea?

E: Si.

S: En la misma línea exactamente, ¿cómo son las ecuaciones para que estén en la misma línea?

E3: Deben que ser iguales, que el número de arriba sea igual al de abajo, este lo tenga este también.

S: ¿Para que tenga qué?

E3: Una solución.

S: Repasemos, usted ya encontró un punto ese $(1,1)$ *de esa línea, ¿Cuál ecuación es ese punto?*

E: De esta.

S: Ese punto es de la línea y de la ecuación, es una pareja, ¿hay algún otro punto?

E: Espere.

S: ¿Será que la gráfica no nos sirve para sacar otro punto?

E3: 0 y 2 $2 * 0 = 0$ *, y* $2 * 2 = 4$

S: Ya tenemos 2 puntos, para definir una línea ¿qué necesitamos?

E3: Que haya una conexión también en esa línea.

S: Mínimo ¿cuántos?

E3: Dos posibilidades.

S: ¿Y en la otra?

E3: 3 y 2 $4 * 3$ *,* $4 * 2$ *¡menos!*

S: ¿Cuál es la que es menos?

E3: $4 * 3 = 12$ *positivo.*

S: ¿4 por? Vuélvalas a hacer.

E3: $4 * 3$.

S: Pero ahí lo tiene bien escrito léalo bien.

E3: $4 * -3,\ -12 + 4 * 2,\ 8,\ 12 - 8 = -4$

S: ¿Hay otro punto?

E3: Si.

S: ¿Cuál es la gráfica que corresponde a este sistema?

E3: La primera.

S: Ahora la siguiente.

E3: $1 + 1 = 2$ *(hace el reemplazó en la hoja).*

S: ¿y qué más podríamos hacer ahí?

E3: 0 y 2. Ésta sale encima (señalando la gráfica 2)

S: ¿Cómo sabe?

E3: Porque solo hay una línea.

S: ¿y no puede ser otra? ¿Por qué sabe que es esta?

E3: Si, porque ya la primera dio y coincide, entonces la otra va dar igual $3x + 3y = 6$, *(reemplaza las parejas* $(1,1)$ *y* $(0,2)$ *) ¡ve y coincide entonces si hay solución!*

S: Bueno para la última.

E3: $2 * 2 + 3 * 3$, *6 y 4, 10 no.*

S: Pruebe otra vez haga la operación.

E3: ¡Ah no! 9 y 4 es 13, $x - y = 5$ $4 * 2 - 3 * 1 = 5$ *estas dos son el punto de acá, esta y esta son el punto de acá (señalando las dos ecuaciones del sistema b) necesitamos buscar otra posibilidad para esta.*

S: Será necesario sacar otra posibilidad o ya sabemos que la c representa esta gráfica.

E3: Ya con esta, porque las 2 posibilidades coinciden.

S: ¿y?

E3: Y nos da un punto en común.

S: Siguiente.

E3: ¿Cuál es el conjunto solución de cada sistema?

S: En el primero.

E3: $(1,1)$.

S: En el a).

E3: $(1,1)$ *y* $(-4, 3)$.

S: Pero mire la gráfica del a, ¿qué quiere decir solución? Solamente conteste la pregunta más fácil no escriba. La c usted me acaba de responder la c sí. En la c usted dijo que era esta gráfica la de la mitad ¿y porque era la de la mitad?

E3: Porque el punto coincide.

S:¿ Y qué pasa con ese punto?

E3: Que ambas líneas pasan por ahí.

S: Entonces ¿cuál es la solución de ese sistema?

E3: ¡Eh! espere (2, 3).

S: Pero entonces ahora miremos la primera, ¿qué pasa aquí?

E3: No tiene conjunto solución.

S: ¿Y la b?

E3: Si tiene.

S: ¿Cuál?

E3: Todos los puntos, todas las posibilidades que salgan.

S: Que salgan ¿en dónde?

E3: En la línea.

S: Porque un punto por aquí y otro por acá ¿sería parte de la solución?

E3: No.

S: Entonces, ¿cuáles son los que son solución ahí?

E3: En la b) son $(1,1),\ (0,2)\ y\ (-1,3)$.

S: ¿Y cuándo termina usted de contar todo eso?

E3·: Nunca.

S: Solamente salen los enteros o hay otras posibilidades, puede existir un punto por acá entre estos 2

E3: Si.

S: Pero ¿qué pasa con ese punto?

E3: Da decimal.

S: Pero ¿también está en la línea?

E3: Sí

S: ¿Y es solución?

E3: Sí

S: ¿Cuáles son las soluciones ahí?

E3: Todos los números racionales.

S: O sea ¿cuántas?

E3: Infinitas.

S: Listo. Segundo problema.

E3: En una lucha entre moscas y arañas intervienen 40 cabezas y 264 patas cuantos luchadores había de cada clase. (Recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña tiene 8 patas).

S: Le dicen el número de cabezas y le dicen el número de patas ¿Cómo hacemos para resolver?

E3: $6x + 8y = 264$ *patas*

S: ¿Cuántas ecuaciones pueden salir en este problema?

E3: Dos.

S: Cierto, ya escribió una y ¿la otra de donde la sacamos?

E3: ¿ $40 + x + 264 = y$ *o a un número solo?*

S: Escríbala y la analizamos

E3: $40x + 264y =$

S: ¿Igual a que?

E3: (Escribe x)

S: ¿a x?

E3: No a, para saber qué número va ahí

S: Pero cada ecuación, ¿de dónde salió la primera?

E3: De las patas

S: Cierto, o sea las patas ¿el total de patas de dónde sale? ¿Por qué escribió $6x$*? (señalando el ejercicio).*

E3: La de las moscas.

S: ¿Qué quiere decir?

E3: La cantidad de las patas de las moscas y la de las arañas da un total de 264 patas.

S: O sea que x son las moscas, ¿y y son las?

E3: Arañas.

S: Ahora ¿cómo relacionamos la otra?

E3: Lo mismo.

S: ¿Cómo?

E: 6.

S: Pero 6 ¿son las?

E3: Las patas. O sea mire las condiciones del problema, le está dando 2 condiciones, vuélvalo a leer. En una lucha entre moscas y arañas interviene 40 cabezas y 264 patas, ¿Cuántas condiciones le están dando?

E3: Es que tienen que haber 40 cabezas y 264 patas.

S: Ya hicimos la de las.

E3: La de las patas.

S: Ya escribimos que el número de patas va ser …

E3: $6x + 8y = 264$

S: ¿y ahora cómo escribimos lo demás? ¿La otra condición?

E3: $x + y = 40$

S: Bien, bueno ¿Cómo resolvemos esto?

E3: Buscar un número que al multiplicarlo por 6 y otro que al multiplicar por 8 la suma de 264.

S: ¿Y después? ¿Qué pasa con esos números?

E3: Es el número de patas de…

S: ¿Será que existe otra forma más fácil? Bueno si quiere intente.

E3: Hacer la gráfica.

S: ¡Ah!…y ¿cómo haríamos para hacer la gráfica?

E3: $6x$ *y subo* $8y$.

S: ¿Cómo hizo para revisar las gráficas anteriores?

E3: Toca buscar nuevos.

S: Buscamos mínimo ¿cuánto?

E3: Dos posibilidades.

S: ¿Y después?

E3: Hacemos la gráfica.

S: Pues entonces hágalo, porque la idea es resolver el problema.

E3: 6 toca sacar la calculadora.*

S: ¡Ah! pero si la trajo

(Silencio)

*E3: 8 **

S: Pero mire las dos condiciones.

E3: $8 * 18 = 144/264$ *entonces hay* $(20,18)$.

S: Bueno pero si quiere ya trabaje solo con la gráfica, luego si la tratamos de interpretar.

E3: $6 * 24 = 144$ *y* $8 * 15$, *264(saca una regla y pinta el plano).*

S: Desde donde empieza el plano.

E3: (Pinta solo el primer cuadrante), entonces 20 y 18, 15 y…

S: Bueno ahora ¿qué sigue?

E3: Toca sacar lo mismo, nada más nos hace esta posibilidad.

S: Esa cual sería esa línea ¿qué representa?

E3: El número de luchadores que habían.

S: ¿Y cuántos luchadores hay?

E3: entonces ¿hay?

S: Mire otra vez las ecuaciones ¿Cuántas ecuaciones tiene el problema?

E3: Dos.

S: ¿Cuántas ecuaciones acaba de graficar?

E3: Una.

S: Entonces ¿ya terminó de resolver el problema?

E3: Y ahora tengo 40.

S: Ese si es fácil de resolver.

E3: 20 +20, 40 y $30 + 10$, *24 y 15*

S: 24 +15 da 40?

E3: 30 no 10 llevo 1, 30 y 1, 40 si

S: ¿Seguro? 5 +4

E3: ¡Ah! No.

S: Pero la primera sí funciona, 20 y 20, funciona ¿para cuál? Para esa ecuación para la que está pintando.

E3: 20 acá

S: Y busque otra

E3: 30 ¡hay no!

S: Entonces otra más pequeña.

E3: 24 y 6

S: Bueno, entonces ¿qué podemos decir?

E3: Queda un punto.

S: ¿Cuál es?

E3: Está entre 20 y 21.

S: ¿20 y 21 y qué más? a ver recordemos, pongamos esto organizado ¿acá que me está representando?

E3: La que era.

S: Este eje del plano cartesiano que representa ¿para usted?

E3: Las patas de las moscas.

S: Entonces escríbale la palabra, ¿y este eje qué es?

E3: Las patas de las arañas.

S: Ahora si pongámosle sentido a este, este punto se encontró ahí, ¿tendría cuanto en x y cuanto en y?

E3: Está entre 18 y 17, y 20 y 21.

S: Mire a ver si es que no la hizo bien precisa, o saquemos los valores y los remplazamos, ¿qué pasa con ese punto donde se encuentran las líneas? ¿Qué paso le había quedado mal?

E3: Espere (borra una línea).

S: ¡Ah! Por qué usted hizo 24 y 6 ¿24 +6?

E3: 30 a si ve, era, tocaría.

S: Arréglela póngala bien 24 más ¿Qué?

E3: Mas 16

S: Ahora se le perdió el otro, trate de hacerlos bien.

E3: Acá se encuentran.

S: Ese ¿qué punto es?

E3: 27 con 13.

S: Probemos a ver si funciona, ¿Qué pasa con ese punto donde se encontraron?

E3: Que ese es el punto solución

S: ¿Solución de qué?

E3: Del problema.

S: ¿Por qué sabemos que es solución?

E3: porque ahí se encuentran las 2 líneas

S: O sea que en ese punto ¿qué pasa con las condiciones del problema?

E3: Se cumplen.

S: ¿se cumple la primera condición? Que es la de las patas ¿y se cumple?

E3: La segunda.

S: Entonces probemos a ver si es verdad.

E3: 27 y 13 = 40.

S: ¿Y la otra?

E3: Las patas, $6 * 27 = 162$ *y* $8 * 13 = 104$. *No. Da 266.*

S: ¿Y cuánto debe dar?

E3: 264

S: ¿Entonces?

E3: Entonces…

S: ¿Dónde estará el error?

E3: 26 con 13.

S: Pero si es 26 con 13 la suma, ¿qué pasa con la primera condición? Revise bien dónde cae el punto y haga bien la cuenta.

E3: 27

S: Será que no se puede encontrar aquí mismo (señalando la gráfica).

E3: 1, 2, 3, 4… 13. 27 y 13

S: Entonces ¿Cuál sería el error? ¿Dónde fallamos?

E3: Acá al hacer el otro punto.

S: Volvámosla a graficar entonces en limpio y la hacemos ordenada.

E3: No acá si cae el punto 30 y 10 da 40, entonces hay algo mal por ahí, este punto si es.

S: Entonces, al probarlo aquí debería funcionar y no está funcionando ahí, entonces hay algo mal.

E3: O acá nos quedó algo mal.

S: Volvámosla a hacer la gráfica con cuidado, cuente bien los cuadritos.

E3: 18.

S: ¿Es necesario colocarlos todos los números? ¿Y el plano porque usted no pinta los ejes primero?

E3: 24.

S: Bueno volvámosla a pintar otra vez, porque hay que encontrar la solución, por lo menos ya sabemos que este es el método.

E3: 20 y 18 24 y 15.

S: Acuérdese que estamos buscando precisión, saque la que encontró por acá la del 30.

(Al hacer la gráfica nuevamente, encontró el punto solución, el error estaba en la ubicación de los puntos en el plano cartesiano).

E3: ¿Cómo cree? Tercera pregunta.

S: entonces ahí ¿Cuántas ecuaciones tiene entonces?

E3: Tres.

S: 3 y lo sabemos ¿por qué?

E3: por las líneas.

S: Entonces ahora nos pregunta que encontremos un sistema que tenga esa representación

E3: Salen tres ecuaciones.

S: ¿Y de dónde las sacamos?

E3: De las líneas, entonces…

S: ¿Cómo empezamos?

E3: Ésta representa la x *y ésta la* y *(escribe el punto (1,2) en la hoja)*

S: Este es el punto, y ahora ¿cómo sacamos la ecuación?

E3: $x + 2 = y$

S: Esta línea que usted acaba de pintar ahí esta ecuación que tiene ahí ¿corresponde a cuál de las líneas?

(En vista de que toma el punto de corte de las líneas, pregunta a cuál de las dos corresponde, para definir la línea no tuvo en cuenta la pendiente sino solo el punto, pero por este punto están pasando dos líneas).

E3: $x + 2y = 0$

S: ¿A cuál corresponde a esta?

E3: Si, corresponde a ésta (señalando una de las tres líneas de la gráfica).

S: Si corresponde a ésta entonces este punto al remplazarlo ahí ¿qué debe pasar?

E3: $1 + 2y$

S: le debe dar ¿Cuánto?

E3: 3

S: ¿Y cuánto dijo usted que tenía que dar?

E3: 0

S: Entonces esta ecuación ¿si corresponde a esta recta? (señalando la recta en la gráfica).

E3: ah si.

S: Otra vez, entonces remplace el punto 1 y 2 a ver.

E3: $1 + 2 = 3$.

S: $1 + 2y$.

E3: ah cierto $1 + 2 * 1 = 3$

S: Entonces ¿cuál sería el punto acá?

E3: $(1,1)$.

S: ¿Y está ahí en esa línea?

E3: No.

S: ¿Cómo hacemos para sacar la ecuación de una línea?

E3: Hallar la pendiente y el intercepto.

S: ¡Ah! bueno ¿y cómo sacamos la pendiente de esa línea que tiene allí?

E3: El intercepto es 1.

S: Bueno, vamos escribiendo aquí.

E3: (0,1).

S: ¿Qué más le podemos decir de esa línea que usted ve ahí en la grafica?

E3: la pendiente es 1/1.

S: Ya tenemos intercepto y la pendiente ¿Cómo sacamos ahora la ecuación?

E3: $x + y = 3$

S: En qué se basó para colocar aquí + 3

E3: Al sumar este 1 + 2

S: Por eso volvió y lo sacó ¿de dónde?

E3: Del punto.

S: Que dijimos que de ¿dónde sacamos las ecuaciones?

E3: De la línea

S: De las líneas, ¿pero de dónde está sacando el 3?

E3: Del punto, mire $1 + 2 * 1 = 3$

S: ¿Qué punto está remplazando ahí?

E3: (1,1).

S: Y (1,1) está en esa línea.

E3: No.

S: ¿Entonces? ¿Cómo sacamos la ecuación? , pero ya tiene dos datos importantes de la recta que son el intercepto y ya tiene la pendiente.

E3: Entonces 1 +

S: Bueno 1 ¿Por qué?

E3: Por el intercepto

S: Que más, ¿recuerda que significa la pendiente?

*E3: 2*0 ¿? No.*

S: ¿Qué es la pendiente? ¿El valor que…? ¿Qué significa?

E3: El valor de la línea.

S: ¿Qué de la línea?

E3: El punto de solución ¿no es?

S: De una línea cualquiera, ¿Qué es la pendiente?

E3: Es la inclinación.

S: Exacto la inclinación, ¿de cuál línea es que estamos hablando?

E3: De esta.

S: Esa tiene entonces pendiente ¿Cuánto?

E3: De pendiente tiene 1.

S: ¡Ah! está bien, listo. Ahora ¿cómo hacemos para representar eso en la ecuación?

E3: ¡Eh!

S: Cuando tenemos una ecuación y la vamos a graficar ¿qué es lo que hacemos?

E3: Despejar.

S: ¿A quién?

E3: La y.

S: ¡Ah! bueno, aquí tenemos lo contrario, tenemos la gráfica y vamos a encontrar la ecuación y ¿cómo nos queda la ecuación cuando está despejada? ¿Sí se acuerda?

E3: y igual a x más el numero.

S: ¿ x más cuál numero?

E3: más 1.

S: Exacto y aquí x ¿Quién es?

E3: x es 1.

S: La variable ¿cierto?

E3: Si.

S: Este 1 de ¿dónde salió?

E3: del intercepto.

S: y x quedó así positiva y todo ¿Por qué?

E3: Porque la pendiente es positiva

S: ¿y es cuánto?

E3: y es (0,1), no, es 1/1-

S: Aja entonces, esta $y = x + 1$ ¿Qué significa?

E3: La ecuación de…

S: De esta línea, la primera, ¿Cómo sacamos la segunda? Y ¿Cuántas ecuaciones tenemos que sacar ahí?

E3: Tres ¿el intercepto es?

S: ¿Dónde buscamos el intercepto?

E3: Acá

S: Este qué eje es, ese es un intercepto, sí, pero un intercepto con quién?

E3: Con la x .

S: ¿Y cuál intercepto utilizamos antes?

E3: El de la y.

S: Entonces ahí cuánto es?

E3: Hay es (0,3).

S: Aja.

E3: Y la pendiente 5/5.

S: ¿Cuál es la que estamos mirando?

E3: Esta (señalando la 2)

S: ¿Cuál sería la pendiente de esta?

E3: 5/5.

S: Y 5/5 ¿Qué es?

E3: No 1.

S: Pero vuélvala a mirar, 1 ¿de qué signo es esa pendiente? Y ¿cómo va esa línea?

E3: Negativa

S: Entonces ¿cómo le ponemos a esa pendiente?

E3: -1.

S: Bueno la ecuación.

E3: $y = x - 1$

S: Ese -1 *¿Qué significa?*

E3: El negativo de la pendiente.

S: Y el intercepto ¿dónde queda incluido?

E3: Espere no -3.

S: Porque -3.

E3: Por el intercepto.

S: El intercepto ¿Cuánto es?

E3: 3.

S: Bueno y entonces ¿la pendiente donde la escribimos?

E3: No; es $-1x + 3$.

S: Si.

E3: Ahora la tercera.

S: La tercera línea.

E3: Entonces (0,1).

S: ¿Cuál es la tercera línea que vamos a pintar?

E3: Esta, pero esta tiene intercepto en x.

S: ¿En x*?*

E3: ¡Ah! en y.

S: ¿Pero qué pasa con ese intercepto?

E3: es infinita.

S: Ubíquelo ¿Cuál es?

E3: Pero $(0, -3)$.

S: ah bueno ¿Qué más tenemos que mirar?

E3: la pendiente, no tiene pendiente

S: ¿no tiene pendiente?

E3: no

S: ¿Por qué? ¿Cuál es la línea que estamos mirando? ¿Tiene pendiente o no?

E3: no

S: ¿Cómo son las líneas que no tienen pendiente?

E3: (pinta una línea vertical) así

S: ¿Qué pasa con esa?

E3: ¡Ay no! así

S: ¡Ah! Entonces tiene o no tiene pendiente.

E3: si 2, 4, 5, 5/1

S: ¿O sea la pendiente es 5?

E3: Positivo.

S: Bueno 5, pero entonces mírela acá quedó bien acostadita o quedo ¿usted que cree? Las líneas, ¿Cómo son las líneas cuando no tienen pendiente?

E3: (Pinta una línea horizontal).

S: Aquí tenemos una con pendiente uno ¿Cuál es?

E3: Esta.

S: ¿Cómo sería una que tenga pendiente 2?

E3: Más arriba.

S: ¿Y que tenga pendiente 4? Y pendiente 5?

E3: Así.

S: Bien arriba ¿cierto?

E3: Entonces no es 5. 5 y 1

S: por eso 5 y 1 ¿pero entonces que es? ¿Cómo sería una que tenga 0,8? Aquí mismo píntela por aquí mismo

E3: aquí

S: Vamos a trabajar en este pedacito de la pendiente 1, ¿Cómo sería una que tenga pendiente 0?

E3: Pues ahí.

S: Píntela.

E3: (Pinta una línea horizontal en la esquina de la línea).

S: Ahora una que tenga pendiente 2

E3: (Pinta una diagonal encima de la pendiente 0) Así.

S: Pero acá partiendo de este mismo punto, mire la cuadricula.

E3: (Pinta otra línea)

S: Retrocedámonos a mirar las de acá arriba por ejemplo estas ¿esta cuánto tiene de pendiente? (señalando la gráfica B del ejercicio 1).

E3: Esta 3.

S: ¿Cómo hizo para saber?

E3: Por esto.

S: O sea mire la ecuación ¿cuál es la pendiente de esta ecuación la segunda? Aquí mismo enfrente sáquele la pendiente ¿Cómo hacemos para sacar la pendiente?

E3: -1.

S: ¿Por qué -1?

E3: o 1.

S: Para sacar la pendiente ¿qué tenemos que tener en cuenta?

E3: Despejar la y *.*

S: y *ahí ya está despejada.*

E3: No.

S: Aquí cómo quedó esta y

E3: Sola.

S: y ¿Cómo estaba?

E3: ¡Eh! Sola.

S: Estaba sola, ¿por qué le toco despejarla si ya estaba sola?

E3: Porque tenía el negativo.

S: ¿Y aquí quedó positivo?

E3: Si. ¡Ah no!. (Borra y termina el despeje).

S: Ahora ¿Cuánto es la pendiente de esta?

E3: ¿Uno? ¿Cinco?

S: ¿Cómo sale la pendiente?

E3: Pero 1 no es la y*.*

S: Cuando la y *está despejada ¿de dónde sacamos el valor de la pendiente?*

E3: De la x*, 4.*

S: ¿Quién es la x? ¿El valor?

E3: El valor que acompaña la x .

S: Aquí en esta ecuación ¿Cuánto es la pendiente?

E3: 4

S: 4 y mírela acá en la gráfica ¿Dónde está la que tiene pendiente 4?

E3: 4

S: Ya tiene el punto, entonces es una de estas dos ¿Cuánto es el intercepto de esta?

E3: ¿No es 5?

S: Si 5 y…

E3: -5

S: ¿Cuál de las dos líneas es?

E3: Esta (señalando la de abajo).

S: Tiene intercepto -5.

E·: Esta (señalando la de abajo).

S: Y tiene pendiente 4 ¿Cómo hacemos para saber que tiene pendiente 4?

E3: Contando las líneas.

S: ¿4 y que más contó?

E3: Y uno.

S: Allá entonces ¿Cómo hacemos? Ésta de aquí que estábamos mirando ahorita.

E3: 5 y 1

S: Pero este es igual al anterior, o sea usted me está diciendo que esta tiene pendiente 4 (ejercicio anterior) esta ¿cuánto tiene de pendiente? ¿Mire la inclinación de ésta?

E3: Uno.

S: Pero esa no tiene 1, tiene razón de que contó 4 cuadritos y uno, pero la idea es encontrar en qué orden deben ir esos 2 números.

E: Un 1 y un 5.

S:¿ Por qué sabe que 1 y 5?

E3: Porque subo 1 y me da 5.

S: ¿Y acá?

E3: Es 4 y 1.

S: ¿Y acá?

E3: Sube 1 y muevo 5.

S: Entonces este es igual a este ¿Cuál es la inclinación? ¿Cuál de las 2 tiene mayor inclinación?

E: Esta.

S: La de arriba ¿cierto?, que tiene 4 ¿y esta?

E3: Menor inclinación.

S: Ahí mismo se ve la línea cierto, que va cada vez como más acostadita, bueno tenía un punto ¿y ahora? ¿Cómo hallamos la ecuación? ¿Cuánto es la pendiente?

E3: 1.

S: ¿Cuánto fue que dijo que era?

E3: 1/5.

S: Por eso.

E3: Entonces aquí va $1/5\ x + 3$.

S: Falta el intercepto de esa línea.

E3: 3.

S: ¿Seguro? Mírela acá es esta.

E3: Por eso.

S: ¿Cuánto es el intercepto de esa línea?

E3: -3

S: Bueno saquémosla en orden ahora si, el sistema, este sistema tiene 3 ecuaciones ¿Cómo queda el sistema ahora?

E3: Este sumado con este y con este (las 3 ecuaciones).

S: ¿Será necesario sumarlo? ¿Qué tenemos que escribir hay?

E3: Una sola ¿no?

S: ¿Cuántas ecuaciones son?

E3: Las 3 pues se copian las 3

S: ¡Ah! ¿Entonces?

E3: (las copia).

S: Ahora vuelve la pregunta ¿Cuántos puntos son solución de ese sistema?

E3: 2.

S: ¿Cuáles?

E3: 3 ¿no?

S: ¿Cuál punto? indíqueme uno en la gráfica.

E3: Éste.

S: Ese punto ¿qué coordenadas tiene?

E3: (1,1).

S: Bueno escríbalo allá ¿seguro?

E3: ¡Ah!, (1,2).

S: Entonces, si es solución ¿qué debe cumplir?

E3: Que éstas también las tengan.

S: O sea que ¿Qué pasa con ese punto? Tenemos el punto y ¿qué vamos a hacer con ese punto?

E3: Que estas respuestas tienen que ser iguales.

S: O sea ¿tienen que estar?

E3: Iguales a estos (señalando las 3 ecuaciones).

S: ¿Cómo hacemos para saber que si da o no da? ¿Qué tenemos que hacer ahora?

E3: Hallar este en la línea.

S: No porque ya la sacó, ¿Qué punto dice usted que es solución?

E3: Es 1 y 2.

S: Si ya tiene el punto ¿ahora qué tiene que mirar en las ecuaciones?

E3: Que esté…

S: Y ¿cómo hacemos para saber si está o no está?

E3: En la que acompaña a la x.

S: Pero ¿para saber si el punto está o no está? Usted ya lo sacó de la gráfica ahora mire las ecuaciones, para eso las sacamos, entonces usted me dice 1 y 2 ¿Cómo hacemos para saber si está en esa línea?

E3: Cambiando ésta (señala x).

S: Esa y qué más, usted me dice y me está diciendo ¿cuántos valores?

E3: 2.

S: 2 valores uno ¿para?

E3: Uno para x y uno para y.

S: Listo ¿Qué debe pasar cuando yo tomo el punto 1 y2?

E3: 1 y este vale 2 (reemplazando en la ecuación).

S: Por eso, ¿qué debe pasar cuando usted lo remplaza ahí? Se acuerda en este, mire por ejemplo este, usted me dijo que el punto (0,2) servía ¿Cómo supimos si servía o no servía?

E3: Acá.

S: Aja usted lo sacó de ahí pero no pudimos saber si servía o no servía hasta no ¿Qué?

E3: Hasta no despejar éste.

S: Pero mírela allá en la parte de atrás de la hoja ¿qué fue lo que usted hizo con ese punto?

E3: Buscamos uno que (indicando el ejercicio numero 1).

S: Después que usted saco 0 de la gráfica o el (0,2) ¿Qué le hizo a ese punto?

E3: Lo ubicamos.

S: ¿Le hizo grafica? No. Usted lo sacó de la gráfica, y ¿Qué le hizo acá?

E3: Pues ubicarlos allá.

S: Usted lo tenía en la gráfica listo y después ¿qué le hizo en la ecuación?

E3: Lo ordené

S: ¿Y qué pasaba?

E3: Y nos daba la respuesta.

S: tenía ¿que darle?

E3: La respuesta.

S: La respuesta que dice ahí, ¿Qué pasaba si daba otra respuesta?

E3: Pues estaba mal.

S: Estaba mal ¿Qué?

E3: El punto.

S: Entonces el punto ya no estaba en la línea estaba en otro lado, ahora vamos a mirar esta.

E3: Entonces…

S: Entonces listo ¿Qué va hacer?

E3: Una $x + 2$ *y igual al punto.*

S: No ya le dije que ¿Qué vamos hacer con esta grafica? Si ya tenemos las ecuaciones ¿Qué vamos a hacer en la gráfica?

E3: Buscar en…

S: ¿Buscar qué? , ósea ¿para qué utilizamos la gráfica?

E3: Para hallar las ecuaciones.

S: Si ya tenemos las ecuaciones ¿es necesario seguir mirando la gráfica?

E3: No.

S: ¿Qué le vamos a hacer a las ecuaciones?

E3: Hallar un sistema.

S: ¿Qué son las ecuaciones?

E3: El sistema.

S: ¿Ya encontramos el sistema?

E3: Ya.

S: Pero que le vamos hacer ahora ¿para qué sacamos este punto (1, 2)?

E3: Para ver si nos da la respuesta.

S: Eso es lo que vamos hacer mirar si nos da la respuesta y para saber eso ¿Qué hacemos con esta ecuación?

E3: La cambiamos.

S: ¿por qué la cambiamos?

E3: Por los números estos.

S: Bien.

E3: Espere $2y$

S: pero $2\ y$ *por qué? ¿2 cambia a quién?*

E3: A la x

S: Si pero si usted cambia ¿Qué pasa con la letra?

E3: Queda $1\ x$.

S: No, pero mire acá usted ya hizo el reemplazo si lo ve ¿qué le paso a la letra ahí?

E3: Entonces 1 un número ¿Qué?*

S: No porque ya lo tiene.

S: Listo, pero déjelo ahí, y la otra ¿cuántas ecuaciones tenemos?

E3: Entonces el punto de acá, vamos a reemplazar.

S: Bien, pero no señor, ¿cuántas hay?¿cuántas ecuaciones?

E3. Tres, tres.

S: Qué pasa con este punto, cuando uno lo reemplaza en la primera.

E3: Tiene que cumplir también la segunda.

S: ¿Y después?

E3: En la tercera.

S: ¡ah!, ya reemplazó en la primera listo, ¿ahora?

E3: Aquí hay 1 menos 1.

S: No, ésta es la primera listo, ahora ¿qué debemos mirar?

E: -1 más…da 2, si nos sirve.

S: Ahora revisemos con la última.

E3: $1 * 1 =$ *1 ¿dividido en 5?*

S: déjelo así en fracción 1/5.

E3: Da 2.

S. ¿y cómo va a dar 2?

(Si el punto forma parte de la solución debería cumplir que diera 2, debido a que está convencido de que esta es la respuesta, no hace la operación y trata de forzar el resultado)

S: ¿1 sobre?

E3: Cinco.

S: Por eso entonces ¿por qué me escribe dos?

E3: ¿Uno sobre cinco menos tres?

S: Se deja en fracción porque usted en este momento no tiene la calculadora, trabaje la operación así. ¿No recuerda cómo se hacen las operaciones de fracciones?

E3: Cinco.

S: ¿Por qué cinco?

E3: Uno.

S: No puede ser, ¿tanto baloncesto?

E3: (escribe un uno debajo del 3)

S: ¿Por qué escribió un uno ahí?

E3: Para que quede igual de fracción.

S: Listo ya empezó a recordar.

E3: 5 dividido en 5, por uno, menos… (Termina la operación y da -14/5)

S: Está bien, ¿cuánto debería darnos?

E3: Dos.

S: Funcionó o no funcionó

E3: Si.

S: ¿Nos dio 2?

E3: ¿14 dividido en 5? No

S: ¿Entonces ese punto sirve?

E3: No

S: Para que sirviera que pasaba

E3: Tenía que dar acá también, en todas tres.

S: Bien, entonces el punto (1,2) ¿de dónde lo sacamos?

E3: De acá.

S: ¿Y ese sirve?

E3: No

S: Listo, entonces táchelo o enciérrelo. Ahora viene nuevamente la pregunta. ¿Cuántos cree que sean parte de la solución?

E3: Dos

S: ¿Cuáles dos?

E3: Estos dos (señalando los dos que quedan).

S: Bueno, probemos otro a ver, ese, probemos con ese. (Señalando un punto).

E3: 5 y 2.

S: ¿5 y 2?

E3: No, 5 y -2

S: Ya, pruébelo en las ecuaciones.

E3: $-2 * 1$

S: ¿qué pasa ahí?

E3: No da.

S: Entonces, ese punto ¿es parte de la solución?

E3: No. Queda este (Señalando el último punto de corte?

S: Este si será. ¿Qué debe pasar para que sea solución?

E3: Tiene que estar en las tres.

S: Mirando la gráfica ¿qué podemos decir? Solo con la gráfica.

E3: Si es porque aquí llega esta y llega esta.

S: Pero ¿cuántas ecuaciones hay?

E3: Tres.

S: ¿Y entonces ese punto está en la solución?

E3: No, entonces no tiene solución.

S: ¿Quién no tiene solución?

E3: Ese sistema de ésta gráfica.

S: ¿Por qué?

E3: Porque no se encuentran las tres líneas.

S: Exacto, solamente tenemos ¿qué?

E3: Dos líneas.

S: Bueno, pasemos a la siguiente pregunta la cuarta. (Lee el enunciado del problema).

E3: Esa es única (señalando el c) (respuesta correcta).

S: Dice esa es única ¿por qué?

E3: porque son números altos.

S: ¿Y qué tiene que ver que sean números altos?

E3: Dan las líneas bien arriba.

S: ¿Y cuántas líneas hay?

E3: Una.

S: ¿Cuántas ecuaciones tiene este problema?

E3: Dos.

S: Entonces ¿cuántas rectas habrá?

E3: Dos.

S: Pero ¿cómo hacemos para saber? Mire el primer punto, todos tenían dos ecuaciones y ¿siempre salieron dos líneas?

E3: No.

S: ¿por qué no?

E3: Porque en una pasa por todos los puntos.

S: En ese sistema donde solamente salió una línea ¿qué pasa? Cómo es este sistema, mírelo otra vez.

E3: (silencio).

S: ¿Recuerda las actividades que hicimos en grupo? ¿Nunca se presentó este caso?

E3: En esta va a salir una sola.

S: ¿Por qué sabe que va a salir una sola?

E3: Porque 3 + 3 es 6.

S: Y eso ¿qué tiene que ver?

E3: Qué es el doble. Este es el doble del otro ejercicio (señalando las dos ecuaciones del sistema c).

S: ¿Seguro?

E3: ¿Es la mitad?

S: Solamente hablemos de un sistema, del c, mírelas bien. Usted me dice que es el doble ¿quién?

E3: La respuesta.

S: Y qué más es el doble.

E3: Estos (los que acompañan a la variable x).

S: ¿Y qué más es el doble?

E3: Nadie más.

S: ¿Y entonces?

E3: ¡Ésta sí! (señalando la b).

S: ¿Por qué lo sabe?

E3: Porque todas son el doble de la otra ecuación, entonces ésta va a dar una sola línea.

S: Aja, o sea que va a tener ¿qué?

E3: Los puntos van a coincidir todos, los de la primera con los de la segunda, van a dar igual en una sola línea.

S: Entonces, ¿qué podemos decir acerca de la solución de ese sistema?

E3: Que es una solución única.

S: ¿única?

E3: No espere, infinita. Ésta es única (señalando el sistema c).

S: Aja, y la primera.

E3: No tiene solución.

S: ¿por qué?

E3: Porque la respuesta no es el doble de la otra, en cambio estas (las que acompañan a x) sí y estas (las que acompañan a y) sí. Pero la respuesta no da igual.

S: ¿Qué significa eso cuando uno hace la gráfica?

E3: Que van a dar dos líneas pero una más arriba.

S: ¿Cómo se llaman esas líneas cuando van así?

E3: ¿solución única?

S: Espere, vayamos escribiendo lo que ya contestamos. ¿Cuál es la que dice usted que es infinita?

E3: Ésta (señalando la c).

S: ¿Seguro?

E3: No, ésta (Señalando la b).

S: Porque la ecuación primera es la mitad de la ecuación segunda.

E3: Ésta tiene es solución única.

S: ¿Qué quiere decir única?

E3: Que no más da una sola respuesta, una sola posibilidad.

S: ¿Una posibilidad que hace qué?

E3: Sirve para ambas.

S: O sea una posibilidad que…

E3: Que coinciden.

S: ¿Y el primero?

E3: El primero no tiene solución.

S: Pero ¿por qué podemos decirlo? El sistema tiene algo especial, ¿qué es lo que le permite saber, solamente con mirarla que no va a tener solución?

S: Nos dice que sin necesidad de hacer la gráfica pero nadie dijo que no se pueda despejar

E: ¿despejar la y? (Despeja y de las dos ecuaciones)

S: Ya las tenemos en forma explícita y cuando las tenemos así ¿qué miramos?

E: la x

S: no es la x lo que miramos, porque a la x qué le miramos, es x sigue siendo x

E: el número que la acompaña

S: ah! Y qué pasa con el número que la acompaña, que significa

E: es la posibilidad que coincide aquí arriba

S: No señor, ya lo utilizamos antes

E: es la pendiente

S: y que significa la pendiente

E: El conjunto solución? ¿La posibilidad?

S: cuando al pintó acá ¿qué significó la pendiente?, recuerda que pintamos varias líneas

E: La inclinación

S: está bien, entonces qué pasa con estas dos líneas

E: qué tienen la misma inclinación

S: y este punto qué es

E: el intercepto

S: qué sucede con estos interceptos

E: Que no es igual

S: tienen la misma inclinación pero los interceptos?

E: son diferentes

S: cuando las graficamos cómo nos van a quedar estas líneas, será que se van a encontrar o no se van a encontrar

E: no, no se encuentran, serán igual de acostadas pero una más arriba de la otra

S: entonces ¿cuántas soluciones puede tener ese sistema?

E: una

S: ¿cuántas soluciones?

E: solución única

S: ¿cuándo es solución única?

E: No, entonces no tiene solución porque no se encuentran

S: la última pregunta qué consiste en decir en sus palabras qué entiende por sistema de ecuaciones

E: La solución de un problema

S: sistema de ecuaciones

E: ¿sistema de ecuaciones?

S: Bueno, miremos la otra pregunta ¿qué entiende por conjunto solución?

E: Es la respuesta

S: la respuesta ¿de qué?

E: de la gráfica o del problema

S: Bueno, entonces ¿qué es el sistema de ecuaciones?

E: Es la fórmula que nos dan para poder encontrar ese conjunto

S: Pero si es un sistema, ¿qué quiere decir cuando se llama sistema?

E: el modo o la ecuación que nos dan

S: Si es un sistema cuántas ecuaciones puede tener

E: varias

S: entonces ¿qué es un sistema de ecuaciones? Dígalo completico en sus palabras, para usted ¿qué es?

E: ehh

S: por ejemplo ¿éste es un sistema de ecuaciones?

E: si

S: ¿y éste?

E: también

S: ¿y acá?

E: si, un sistema son varias ecuaciones, es un conjunto de varias ecuaciones

S: aja, y ¿qué es la solución del sistema de ecuaciones?

E: el punto en común que tienen las ecuaciones

S: y ¿qué pasa si no tienen un punto en común?

E: pues no tiene conjunto solución

S: y ¿qué otra posibilidad hay para ese conjunto solución?

E: (silencio)

S: por ejemplo es que ¿cuántos casos hemos visto para ese conjunto solución?

E: tres

S: ¿cuáles son?

E: ¿El intercepto no era?

S: del conjunto solución, el intercepto es de una línea, pero ¿del sistema de ecuaciones?

E: La solución única

S: por ejemplo que haya solución única ¿Cuándo es solución única?

E: solución única es donde coinciden ambas líneas. Que no tiene solución e infinitas soluciones

S: ¿y cuando son infinitas soluciones?

E: cuando coinciden las líneas

S: ¿cómo hacemos para saber que coinciden?

E: porque son par

S: pero no siempre son par. ¿Aquí son par?

E: no,

S: no es pero ¿por qué sirve?

E. porque la respuesta es el doble

S: ¿es el doble? mírela bien

E: al multiplicar esto con esto da 6 y 3x2 da 6

S: pero no es el doble, ¿qué es?

E: Es el triple

S: entonces ¿cómo hacemos para saber?

E: qué sea múltiplo

S: bueno gracias.

ANEXO D. ACTIVIDADES

Colegio Nuestra Señora de la Paz

Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales

Proyecto de Especialización

Docente Sulegna Ramos Jaimes

Grupo No: _________

Nombres: ____

Representante del Grupo: _________

ACTIVIDAD 1

Lean con atención el siguiente problema:

2. *El hotel del parque tiene habitaciones dobles (2 camas) y sencillas (1 cama). En total tiene 35 habitaciones y 55 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?*

i. *¿Cuáles son las variables del problema?*
j. *Asígnenle una letra a cada variable que encontraste*
k. *¿Cuáles son las condiciones que nos exige el problema para hallar el número de habitaciones de cada tipo?*
l. *¿Es necesario plantear ecuaciones para resolver el problema? Si es así, ¿cuántas y cuáles?*
m. *Realicen la grafica de las ecuaciones del punto anterior en el plano cartesiano escogiendo una escala que sea conveniente.*
n. *¿Tienen algún punto en común? ¿Pueden decir cuál es?*
o. *Ahora tomen las coordenadas del punto y compárenlas con las condiciones del problema. ¿satisface las dos condiciones?*
p. *¿Cuál es la solución del problema?*

ACTIVIDAD 2

Dada la siguiente ecuación

$$2x + y = 6$$

j. La pareja $(2,2)$ *es una solución de esta ecuación porque si reemplazamos los valores de X y Y estos satisfacen la ecuación:* $2(2) + 2 = 4 + 2 = 6$ *¿Podrían hallar cinco parejas más que satisfagan esta misma ecuación?*

k. ¿Creen que puedan existir más de cinco parejas que hagan verdadera la ecuación? ¿Por qué?

l. Si ubicáramos estos puntos en el plano cartesiano y los uniéramos. ¿Qué forma tendría la gráfica?

Dada la siguiente ecuación:

$$4x + 2y = 12$$

m. Hallar cinco parejas de valores que la hagan verdadera.

n. Ubicar estos puntos en el mismo plano cartesiano. ¿qué observan?

o. ¿Qué pueden decir de estos puntos con respecto a la ecuación anterior?

p. Compara los puntos que acaban de encontrar con los que hallaron en b y determinar si es posible que hayan más de un punto que cumpla las dos ecuaciones.

q. ¿Qué pueden concluir sobre el conjunto de puntos que forman parte de la solución de las dos ecuaciones?

r. *Observar nuevamente las dos ecuaciones y compararlas. ¿Qué pueden decir de una con respecto a la otra?*

Colegio Nuestra Señora de la Paz

Conjunto solución de un sistema de ecuaciones

Proyecto de Especialización

Docente Sulegna Ramos Jaimes

Grupo No: __________

Nombres: ____

Representante del Grupo: __________

ACTIVIDAD 3

Observar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x + y = 5$$

$$6x + 3y = 7$$

h. Hallar las pendientes de las rectas

i. ¿Qué tienen en común el par de rectas?

j. Si graficaran el par de rectas ¿cómo creen que resultaría la grafica?

k. Graficar el sistema de ecuaciones. ¿Tiene algún punto en común? Explicar su respuesta

l. Si los puntos en común de un sistema de ecuaciones son el conjunto solución. ¿Qué pueden concluir sobre la solución del sistema anterior?

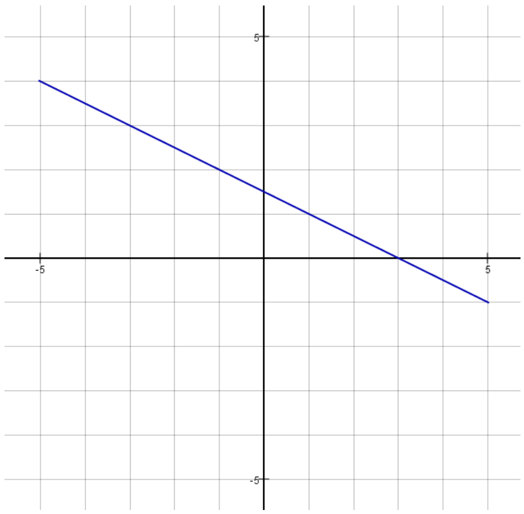
m. Observar las dos ecuaciones y compararlas. ¿Qué pueden decir de una con respecto a la otra?

n. ¿Qué diferencia hay de este sistema de ecuaciones con el sistema de ecuaciones de la actividad 2?

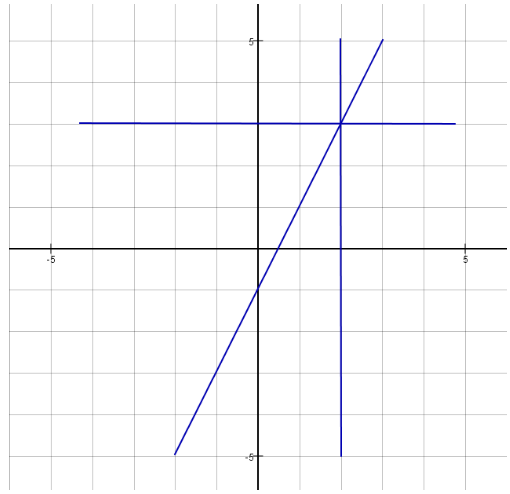
ACTIVIDAD 4

Dadas las graficas de los siguientes tres sistemas de ecuaciones:

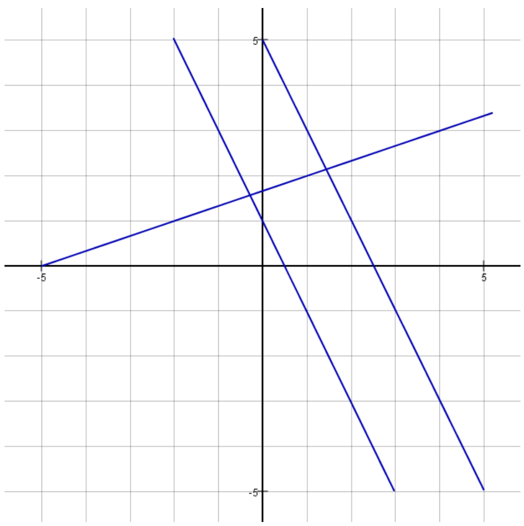
a.



b.



c.



a. Escribe las ecuaciones para cada uno de los sistemas.

b. Recuerda que el conjunto solución para un sistema de ecuaciones está formado por todas las parejas que hacen verdaderas las ecuaciones del sistema. Entonces ¿Cuál es el conjunto solución para cada uno de los tres sistemas?

ANEXO E. ENTREVISTA

Colegio Nuestra Señora de la Paz

Conjunto solución de un sistema de ecuaciones

Proyecto de Especialización

Docente Sulegna Ramos Jaimes

Nombre ____

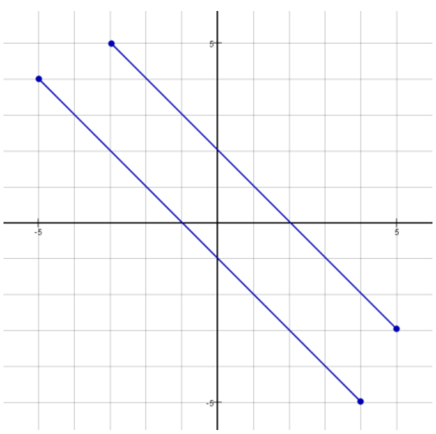
ACTIVIDADES PARA LA ENTREVISTA

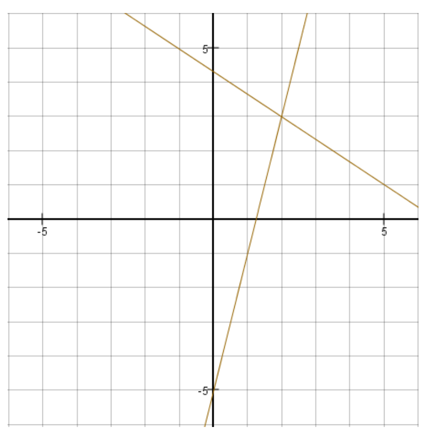
1. Dada las siguientes gráficas y los sistemas de ecuaciones

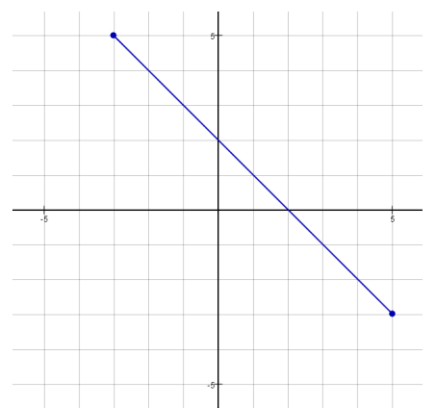
a. $2x + 2y = 4$
   $4x + 4y = -4$

b. $x + y = 2$
   $3x + 3y = 6$

c. $2x + 3y = 13$
   $4x - y = 5$



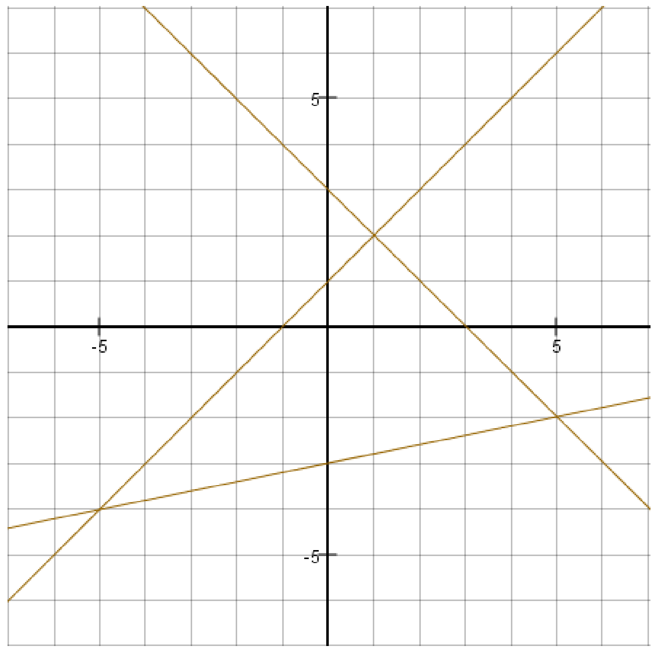




   a. Di qué grafica corresponde a cada sistema
   b. ¿Cuál es el conjunto solución de cada sistema?

2. Dado el siguiente problema:
   En una lucha entre moscas y arañas intervienen 40 cabezas y 264 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase? (Recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas).

3. En el siguiente plano aparece la representación gráfica de un sistema de ecuaciones:



a. ¿Cuántas ecuaciones tiene este sistema?
b. ¿Cuántos puntos crees que forman parte del conjunto solución?
c. ¿Encuentra un sistema cuya representación gráfica corresponda a la figura?

4. Para los siguientes sistemas de ecuaciones decir sin necesidad de hacer la grafica, si ellos tienen infinitas soluciones, no tienen solución, o solución única.

$a. \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases}$ $b. \begin{cases} 3x + 5y = 10 \\ 6x + 10y = 20 \end{cases}$ $c. \begin{cases} 5x + 10y = 3 \\ 10x - 4y = 6 \end{cases}$

   c. ¿En qué te basas para argumentar tu respuesta?
   d. ¿Cómo podrías demostrar que tus respuestas son correctas?

5. Di con tus propias palabras
   a. ¿Qué entiendes por conjunto solución de un sistema de ecuaciones?
   b. ¿Qué entiendes por un sistema de ecuaciones?