

CONTROL EN ESPACIO DE ESTADOS PARA UN DRON TIPO CUADROTOR

Gustavo Roa Cano
Andruv Saim Ayala Ortíz

**Universidad Industrial de Santander
Facultad de ingeniería físico-mecánicas
Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones
Bucaramanga
2016**

CONTROL EN ESPACIO DE ESTADOS PARA UN DRON TIPO CUADROTOR

Gustavo Roa Cano
Andruv Saim Ayala Ortíz

Trabajo de Grado para optar al título de
Ingeniero Electrónico

Director
Ricardo Alzate Castaño, Ph.D.

Universidad Industrial de Santander
Facultad de ingeniería físico-mecánicas
Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones
Bucaramanga
2016

Dedicatoria

*Gracias a Dios por darme la oportunidad de obtener este logro en mi vida. A mis padres Giezid y Miryam por todas las enseñanzas, la dedicación, la confianza y el sacrificio que han hecho para cumplir mis sueños. A mi hermano Cristian por ser mi motivación de ser alguien mejor para que vea en mí un espejo a superar y luche por alcanzar sus sueños y nunca baje los brazos por más duro que sea el camino. A Sulay por ser mi apoyo incondicional y compañía durante este proceso y compartir mis tristezas y alegrías y ayudarme a ser alguien mejor. **Gustavo Roa Cano***

A: Dios, por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente, por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte, ejemplo, motivación y compañía durante todo el periodo de estudio. Mi madre Evelia Ortiz, por darme la vida y quererme mucho, por creer en mí y apoyarme incondicionalmente. Mamá gracias por tus oraciones, tus palabras de aliento las cuales me animaban día a día a superarme y no desfallecer ante las dificultades que se me presentaban. Te amo mami. Mi padre Lorenzo Ayala (QEPD) por estar siempre cuidándome y dándome una manita desde el cielo en donde te encuentras. Mis hermanas, Lizbeth Katherine y Jael Ayala, por estar conmigo y apoyarme siempre, las quiero mucho. Mi sobrino, Keyner David, que eres una de mis grandes motivaciones, mi motor, el chiquitin que me llenada de energía con cada palabra que decía en su inocencia de niño, para que veas en mí un ejemplo a seguir y el día de mañana luches por llegar más alto que tu tío. Todos mis amigos por compartir los buenos y malos momentos, rizas, lágrimas y trasnochadas.

Andruv Saim Ayala

Agradecimientos

A todas las personas que directa e indirectamente aportaron su granito de arena para la realización de este proyecto. A nuestro director Ricardo Álzate por brindarnos la oportunidad de trabajar con él y dedicarnos su tiempo y conocimiento a nuestra disposición. Agradecerle a la Universidad Industrial de Santander este proceso de formación y a todos los profesores que hicieron parte de este aprendizaje.

Tabla de Contenido

Introducción	16
0.1 Planteamiento y definición del problema	17
0.2 Objetivos	18
0.2.1 Objetivo general	18
0.2.2 Objetivos específicos	18
1 Modelado matemático del dron	19
1.1 Vehículos aereos no tripulados	19
1.1.1 Mecanismo de vuelo	20
1.1.2 Control del sistema	20
1.1.3 Sensórica	20
1.1.4 Aplicaciones	21
1.2 Coordenadas en el espacio de movimiento	21
1.3 Ecuaciones del movimiento	23
1.3.1 Movimiento de traslación	23
1.3.2 Movimiento de rotación	25
1.3.3 Simplificaciones del modelo	28
1.4 Análisis del comportamiento en lazo abierto	29
2 Cierre de lazo y control PID	36
2.1 Linealización del modelo y desacoplamiento dinámico	36
2.2 Acción de control proporcional	40
2.3 Acción de control PID	43
3 Control en el espacio de estados	50

3.1 Regulación por realimentación del vector de estados	50
3.1.1 Cálculo para ganancia de realimentación de estados	52
3.1.2 Sistema de seguimiento	53
4 Conclusiones	60
4.1 Recomendaciones	61
4.2 Trabajo futuro	62
Bibliografía	63
Bibliografía	66

Lista de Figuras

Figura1.1	Vehículo aéreo no tripulado tipo <i>dron</i> cuadrotor	20
Figura1.2	Diagrama de cuerpo libre del <i>dron</i> cuadrotor (modificado de [22]) . .	33
Figura1.3	Simulación equilibrio perturbado	34
Figura1.4	Simulación equilibrio perturbado con fricción	35
Figura2.1	Simulación equilibrio linealizado perturbado	41
Figura2.2	Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado	42
Figura2.3	Simulación control proporcional	44
Figura2.4	Simulación control PID	48
Figura3.1	Simulación control realimentación estados	54
Figura3.2	Sistema de seguimiento con integrador	55
Figura3.3	Simulación sistema seguimiento	59
Figura1	Ilustración gráfica para producto vectorial tomado de [18]	70
Figura2	Sólido rígido tomado de [18]	70
Figura3	Rotación de un punto del sólido alrededor de un eje fijo tomado de [18]	71
Figura4	Algoritmo de integración numérica en MATLAB	77
Figura5	Nivel superior de detalle para desarrollo de interfaz	78
Figura6	Primer nivel de partición para subproceso de simulación	79
Figura7	Primer nivel de partición para subproceso de animación	79
Figura8	Primer nivel de partición para desarrollo de interfaz	80
Figura9	Segundo nivel de partición para subproceso de simulación	80
Figura10	Interconexión de subsistemas en interfaz de animación	81
Figura11	Presentación final para interfaz desarrollada	82

Lista de Tablas

Tabla 1.1 Parámetros empleados para simulación del modelo 29

Tabla 2.1 Parámetros de control PID para ángulos de rotación 49

Lista de Anexos

Anexo A. Fundamentos de sólidos rígidos.....	85
Anexo B. Función <i>ode45</i> de MATLAB.....	86
Anexo C. Interfaz de animación de la dinámica del sistema.....	87

Resumen

TITULO:CONTROL EN ESPACIO DE ESTADOS PARA UN DRON TIPO CUADROTOR¹
AUTOR:ANDRUV SAIM AYALA ORTIZ, GUSTAVO ROA CANO²

Palabras Clave: Control multivariado, Control PID, Dron cuadrotor, Linealización, Servosistema.

DESCRIPCIÓN:

El presente proyecto de grado presenta el modelado y la simulación para las dinámicas de rotación de un dron tipo cuadrotor, sometidas a estrategias de control en el espacio de estados para mantener la condición de equilibrio dinámico, en presencia de perturbaciones. Partiendo de la formulación de Newton-Euler, se deduce el modelo matemático para describir la dinámica de rotación y traslación del sistema a manera de cuerpo rígido en el espacio de movimiento, siendo referenciado con respecto a un marco inercial (fijo) y otro con ejes en el cuerpo. El modelo, originalmente no lineal, es linealizado alrededor de la condición de equilibrio permitiendo obtener desacople dinámico de variables. Estrategias de control proporcional y PID de tipo SISO fueron implementadas y analizadas empleando herramientas de simulación numérica en MATLAB, permitiendo verificar la regulación del sistema alrededor de la condición de equilibrio ante perturbaciones de fuerza aplicadas en una dirección. Posteriormente, se implementó una ley multivariada en el espacio de estados a través de realimentación de estados simple y en la forma de servosistema, para eliminar errores de estado estacionario. Todas las estrategias de control implementadas fueron verificadas en una interfaz de animación que permitió emular el comportamiento del sistema real en el espacio de movimiento. Trabajos futuros incluyen el análisis de estrategias de control sobre el modelo no lineal y la exploración de algoritmos para el control de trayectorias, así como también la verificación experimental de las predicciones de simulación obtenidas.

¹Trabajo de grado

²Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.
Director: Ricardo Alzate Castaño, Ph.D.

Abstract

TITLE: CONTROL IN SPACE OF STATES FOR A DRONE QUADROTOR³

AUTHOR: ANDRUV SAIM AYALA ORTIZ, GUSTAVO ROA CANO⁴

Key Words: Multivariate control, PID control, Quadcopter drone, Linearization, Servosystem.

DESCRIPTION:

In this work the modeling and simulation of translational and rotational dynamics of a quadcopter type drone are performed, in order to accomplish the regulation of system states to the desired nominal equilibrium condition by state-space control under disturbances. The Newton-Euler formulation allows to derive the mathematical description for system dynamics as a rigid body referenced into an inertial framework and a coordinated system with axes fixed at the body. The original nonlinear model, is linearized around the equilibrium point defining the nominal operation condition, with further dynamical decoupling. Proportional and PID SISO control actions have been tested and verified by numerical simulations, showing the recovering of nominal desired conditions for the controlled system under variations of forces in one direction, suggesting a practical scenario of unexpected wind discharges. Moreover, a multivariate state-feedback law has been implemented in both a single and a servo-system configurations, the latter allowing elimination of steady-state errors. All control strategies implemented have been tested in a virtual animation environment to resemble the behavior of the real system. Ongoing work includes analysis of control techniques for the nonlinear coupled model and experimental verification of simulation predictions in a real prototype of quadcopter.

³Degree work

⁴Physico-mechanical engineering Faculty. School of Electrical Engineering. Supervisor: Ricardo Alzate Castaño, Ph.D.

Introducción

En años recientes, los vehículos aéreos no tripulados tipo *dron* han atraído gran interés de la comunidad académica y científica gracias a las ventajas que ofrecen este tipo de aeronaves en misiones que afectan la integridad humana o con requerimientos de maniobrabilidad elevada y dimensiones reducidas [15]. La aplicación para este tipo de vehículos es cada día mayor en tareas que implican alta dificultad o riesgo para vehículos convencionales tripulados por personas, como son: la detección de incendios, la identificación de manchas de petróleo en el mar, la identificación de explosivos, el seguimiento del tráfico, la inspección de líneas de tendido eléctrico, realización de estudios ecológicos, expediciones espaciales, toma de imágenes visuales o térmicas de determinada región, medición de telefonía celular, radio o cobertura de televisión a través de cualquier tipo de terreno, operación en ambientes de alta toxicidad química y radioactiva, entre otras [4]. Los *drones* son una excelente opción por su comportamiento silencioso, siendo además una alternativa ecológica y relativamente económica.

A pesar de ello, existen amplios retos tecnológicos que aún deben ser abordados y resueltos alrededor de temas como la autonomía de vuelo, la estabilidad y robustez de las aeronaves, aspectos legales y de seguridad del espacio aéreo, etc. En particular, la estabilidad de un *dron* constituye un problema de particular importancia sobre todo en artefactos con múltiples grados de libertad como pueden ser cuadrotoros, hexacópteros u octacópteros [16, 7]. No se puede pensar en un control de maniobrabilidad o trayectoria sin constituirse la base de una estabilización (equilibrio) del móvil [4]. Existen algunas soluciones comerciales basadas en unidades de medición inercial (IMU: inertial measure unit, de su sigla en Inglés) que resuelven el problema de estabilización en *drones*, sin embargo su costo es elevado y no corresponden con herramientas de libre acceso dado su carácter comercial. La más

popular de estas opciones comerciales es la tarjeta ArduPilot (<http://www.ardupilot.co.uk>).

En la literatura especializada se documentan desarrollos que permiten modelar el comportamiento dinámico de aeronaves tipo dron y a partir de ello aplicar estrategias de control, principalmente en el espacio de estados [14, 24, 17, 12, 6]. Los modelos asociados a este tipo de sistemas implican dinámicas altamente no lineales enmarcadas en formulaciones multivariadas [23]. Las bondades de los dispositivos computacionales actuales permiten desarrollar sistemas embebidos para casi cualquier tipo de aplicación y, por tanto, a través del diseño de una arquitectura computacional adecuada es posible manipular el comportamiento dinámico de un dron. El primer paso sin embargo debe ser un entendimiento teórico a través de modelos y análisis de parámetros efectuados a través de herramientas de simulación.

En Colombia, desarrollos relacionados con vehículos aéreos no tripulados destacan el trabajo realizado en [9] donde se identifica el modelo de un mini-helicóptero robot usando: algoritmos genéticos, métodos heurísticos de búsqueda tabú y métodos de optimización. En la Universidad Industrial de Santander desarrollos afines con esta temática incluyen: [8] que propone el diseño de un sistema de control de cabeceo y alabeo de un dron tipo cuadrotor; en [2] se propone el diseño de un sistema de control de posición de cola de un helicóptero de aerodelismo; en [13] se implementa el sistema de control de la cola de un helicóptero radio-controlado; y en [21] se realiza la identificación y validación experimental de los parámetros de un avión a escala de ala fija.

0.1 Planteamiento y definición del problema

En países en vía de desarrollo como Colombia, es importante no solo motivar la apropiación de tecnologías sino también el desarrollo de otras nuevas a partir del afianzamiento de herramientas conceptuales, adquiridas en procesos de formación e investigación en entidades de educación superior. Al respecto, existe una capacidad potencial en el aprovechamiento y uso de vehículos aéreos no tripulados que puede ser explotada a través del entendimiento del comportamiento dinámico en este tipo de aeronaves. Las opciones existentes en el mercado para efectuar manipulación dinámica en esta clase de aeronaves, no propician el

desarrollo de nuevas opciones tecnológicas por tratarse de tecnologías cerradas con orientación comercial. Por tanto, se requiere fomentar soluciones abiertas a partir de la utilización de conceptos avanzados de control en el espacio de estados.

Por todo lo anterior, alrededor de esta temática es válido plantearse inquietudes de investigación como las siguientes: ¿Cómo modelar las dinámicas de un *dron* tipo cuadrotor? ¿Cómo mantener la posición de equilibrio en un *dron*? ¿Cómo aplicar estrategias de control en el espacio de estados sobre un *dron* tipo cuadrotor?

El presente proyecto de grado busca realizar aportes hacia la formación de recurso humano en el uso de técnicas avanzadas de control, incrementando la capacidad potencial de la E3T y el grupo de investigación CEMOS en el área de Supervisión Experta, Automatización y Control, todo esto con base en los objetivos propuestos a continuación.

0.2 Objetivos

0.2.1 Objetivo general

- Diseñar y simular un control en el espacio de estados para mantener el equilibrio de un vehículo aéreo no tripulado de tipo *dron* cuadrotor.

0.2.2 Objetivos específicos

- Determinar un modelo matemático adecuado para describir el comportamiento dinámico de un vehículo aéreo no tripulado de tipo *dron* cuadrotor.
- Formular una estrategia de control en el espacio de estados que permita mantener la posición de equilibrio en el *dron*.
- Analizar el comportamiento del sistema controlado empleando herramientas de simulación.

Capítulo 1

Modelado matemático del dron

En el presente Capítulo se formula el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico del *dron*; es decir, su modelo matemático. Partiendo de principios físicos y trigonométricos fundamentales, se estudia el movimiento de la partícula en el espacio a partir de simulación numérica de modelos efectuada en MATLAB. Esta información del comportamiento temporal del sistema, será base para el diseño de estrategias de control abordadas en Capítulos posteriores.

1.1 Vehículos aereos no tripulados

La siguiente descripción general de vehículos aéreos no tripulados (UAV del inglés unmanned aerial vehicles) del tipo cuadrotor, es una adaptación de los contenidos reportados a manera de revisión en [5].

Los cuadricópteros o cuadrotores (ver Fig. 1.1), son un tipo único de UAV que posee la habilidad de despegue y aterrizaje vertical. Este tipo de vehículo se considera un sistema subactuado, debido a que posee menos entradas que salidas, lo cual lo hace un reto desde el punto de vista del control de su dinámica. Históricamente los UAV fueron concebidos para la industria militar. Sin embargo, actualmente el abaratamiento de costos y desarrollo de materiales han permitido masificar su uso en aplicaciones civiles con popularidad en aumento.

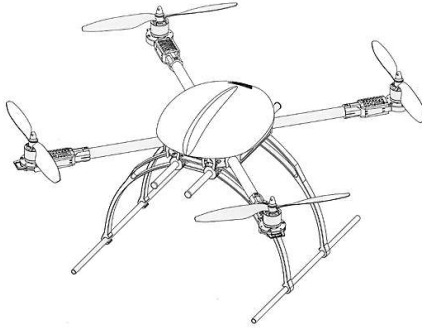


Figura 1.1: Vehículo aéreo no tripulado tipo *dron* cuadrotor

1.1.1 Mecanismo de vuelo

La mayor diferencia entre un cuadrotor y un helicóptero tradicional está en su modo de propulsión de rotor fijo, en el cual la dirección de navegación en cualquiera de sus ejes puede variar con sólo modificar la propulsión a partir de una cierta combinación de velocidad en sus motores. La distribución de los cuatro motores puede realizarse en forma de x o de $+$, teniendo cada una sus respectivas ventajas.

1.1.2 Control del sistema

Con el aumento de posibilidades de uso de vehículos UAV tipo cuadrotor, se han verificado progresos en los algoritmos orientados a una mayor maniobrabilidad y efectividad en aplicaciones cada vez más complejas. En la literatura técnica se reportan técnicas de control aplicadas en cuadrotores que van desde control PID elemental hasta controladores basados en redes neuronales. Asimismo, ha sido interesante la comparación realizada entre el comportamiento de especies de la naturaleza y este tipo de vehículo, en la búsqueda por sincronizar operación colaborativa explotando su versatilidad y velocidad de respuesta.

1.1.3 Sensórica

A nivel de tecnología, desarrollos en materiales y miniaturización electrónica han permitido dotar cuadrotores con dispositivos como sistemas microelectromecánicos (MEMs), unidades de medida inercial (IMUs) y sistemas de posicionamiento geostacionario (GPS).

Algunas aplicaciones también adicionan sistemas de visión y localización basada en radiofrecuencia. A pesar de ello, la precisión en las trayectorias del dispositivo y la estabilidad ante condiciones adversas de operación (principalmente de tipo climático) aún imponen restricciones en la operación del sistema.

1.1.4 Aplicaciones

Una aeronave tripulada está limitada por las habilidades y la fatiga del piloto. Desde ese punto de vista, la automatización de un cuadrotor permite emplearlos en aplicaciones donde sea latente el riesgo o se perjudique la integridad humana. Piense por ejemplo en una expedición al cráter de un volcán o el sobrevuelo de un área contaminada por radioactividad. El potencial para este tipo de aplicaciones depende del entendimiento de la operación del sistema a través de la formulación de modelos matemáticos adecuados, tal y como se describe a continuación.

1.2 Coordenadas en el espacio de movimiento

Formular las ecuaciones que describen el modelo dinámico del *dron* implica definir sus coordenadas en el espacio de movimiento. Cuando un objeto gira alrededor de un eje, el análisis del movimiento puede simplificarse si se considera un cuerpo rígido; es decir, formado por varias partículas puntuales que guardan distancias constantes entre si [18].

Por tanto, asumiendo que el *dron* de la Fig. 1.1 es un cuerpo rígido, su dinámica se describe en el espacio de movimiento a través de tres cantidades principales ilustradas en la Fig. 1.2, correspondientes con los ángulos de: 1) balanceo ϕ (roll), 2) cabeceo θ (pitch) y 3) guiñada ψ (yaw). Estos ángulos se miden en un sistema de referencia fijo con respecto a la tierra (o inercial), denotado como O y definido con base en los ejes coordenados $(\vec{x}_O, \vec{y}_O, \vec{z}_O)$. A su vez, se considera un sistema variante en el tiempo alineado con el cuerpo del *dron* y denotado como B en la Fig. 1.2, con centro de masa en el origen de sus ejes coordenados $(\vec{x}_B, \vec{y}_B, \vec{z}_B)$.

Para transformar las coordenadas de un punto entre el marco de referencia del cuerpo

y el marco de referencia inercial, se utiliza la expresión:

$$\begin{bmatrix} x_O \\ y_O \\ z_O \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

donde [19]:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}.$$

Asimismo, es posible definir una relación entre el vector de velocidades angulares en el marco de referencia del cuerpo:

$$\nu = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix},$$

con respecto a la variación temporal de los ángulos en el marco de referencia inercial:

$$\eta = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix},$$

a partir de la siguiente expresión:

$$\nu = \mathbf{W}\eta, \quad (1.2)$$

siendo [19]:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Las matrices de transformación de coordenadas \mathbf{R} y \mathbf{W} son ortogonales; es decir, son matrices cuadradas cuya matriz inversa coincide con su matriz transpuesta [3]. Dicha matriz transpuesta (o inversa) corresponde por tanto con la transformación inversa del sistema de coordenadas. Para el caso particular de la matriz \mathbf{W} la inversa se define sólo si

$$\theta \neq (2k - 1) \phi/2 \forall k \in \mathbb{Z} \text{ [10]}.$$

Finalmente, el movimiento traslacional puede expresarse en términos de las velocidades lineales para el marco inercial:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x}_O \\ \dot{y}_O \\ \dot{z}_O \end{bmatrix},$$

y para el marco de referencia del cuerpo:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{z}_B \end{bmatrix},$$

relacionadas entre si a través de la expresión [22]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{V}.$$

1.3 Ecuaciones del movimiento

A continuación, se determinarán las ecuaciones para la dinámica del *dron* empleando la formulación de Newton-Euler [18].

1.3.1 Movimiento de traslación

Se considera inicialmente la segunda ley de Newton aplicada al movimiento de traslación, con respecto al marco de referencia del cuerpo en el diagrama de la Fig. 1.2. A partir de ello se obtiene:

$$\sum F = m\dot{\mathbf{V}} + (\nu \times m\mathbf{V}), \quad (1.3)$$

siendo $m\dot{\mathbf{V}}$ el vector de fuerza debida a la velocidad en la dirección del movimiento y $(\nu \times m\mathbf{V})$ la fuerza centrífuga que afecta cualquier movimiento no inercial.

En la mecánica clásica, la fuerza centrífuga es una fuerza ficticia que aparece cuando se describe el movimiento de un cuerpo en un sistema de referencia en rotación, o equivalentemente la fuerza aparente que percibe un observador no inercial que se encuentra en un

sistema de referencia rotatorio [18].

La masa total del *dron* se asume concentrada en la cantidad m . Por tanto, considerando como fuerzas externas de traslación a los estímulos $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ producidos por los motores (ver Fig. 1.2) y el peso del *dron*, es posible escribir:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 f_i \end{bmatrix} - m\mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix},$$

siendo g la constante de gravitación universal, cuyo vector de fuerza afecta el eje z en el marco de referencia inercial, o equivalentemente los tres ejes del marco de referencia del cuerpo a través de la matriz de rotación \mathbf{R} .

Asimismo, la fuerza de estímulo de cada motor se asume proporcional al cuadrado de su velocidad angular Ω por un factor de amortiguamiento viscoso b , permitiendo reescribir la expresión anterior en la forma:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 b\Omega_i^2 \end{bmatrix} - m\mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}.$$

También, es posible definir un vector de fuerzas de perturbación al movimiento de traslación, correspondientes con efectos aerodinámicos debidos a fricción de aire en oposición al desplazamiento. Dichas fuerzas aerodinámicas, se consideran proporcionales a la velocidad de traslación inercial mediante coeficientes constantes, es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_d &= \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} A_x & 0 & 0 \\ 0 & A_y & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{bmatrix} \mathbf{v} \\ &= \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} A_x \dot{x}_O \\ A_y \dot{y}_O \\ A_z \dot{z}_O \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Todo lo anterior, permite obtener la siguiente expresión para la dinámica de traslación en el marco de referencia del cuerpo:

$$m\dot{\mathbf{V}} + (\boldsymbol{\nu} \times m\mathbf{V}) = \mathbf{F} - \mathbf{F}_d, \quad (1.4)$$

con correspondiente expresión equivalente en el marco de referencia inercial dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}m\dot{\mathbf{V}} &= \mathbf{R}\mathbf{F} - \mathbf{R}\mathbf{F}_d \\ \dot{\mathbf{v}} &= \frac{1}{m} (\mathbf{R}\mathbf{F} - \mathbf{R}\mathbf{F}_d) \\ \begin{bmatrix} \ddot{x}_O \\ \ddot{y}_O \\ \ddot{z}_O \end{bmatrix} &= \frac{1}{m} \mathbf{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 b\Omega_i^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} - \frac{1}{m} \begin{bmatrix} A_x \dot{x}_O \\ A_y \dot{y}_O \\ A_z \dot{z}_O \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \ddot{x}_O \\ \ddot{y}_O \\ \ddot{z}_O \end{bmatrix} &= \frac{U}{m} \begin{bmatrix} \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} - \frac{1}{m} \begin{bmatrix} A_x \dot{x}_O \\ A_y \dot{y}_O \\ A_z \dot{z}_O \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

tras anularse el efecto de la fuerza centrífuga y para

$$U = \sum_{i=1}^4 b\Omega_i^2,$$

definiendo la fuerza de empuje.

1.3.2 Movimiento de rotación

De manera equivalente, la segunda ley de Newton de rotación con respecto al marco de referencia del cuerpo en el diagrama de la Fig. 1.2 permite obtener:

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\nu}} + (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\nu}), \quad (1.6)$$

donde $\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\nu}}$ y $(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\nu})$ son respectivamente, el vector de torques debidos a la velocidad angular en la dirección del ángulo de movimiento y su fuerza centrífuga correspondiente.

Siendo el *dron* un cuerpo rígido, se asume que su momento de inercia se distribuye a través de una estructura simétrica, expresada en términos de una matriz diagonal de contribuciones de momento de inercia en cada eje:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}.$$

Como fuerzas externas de rotación, se consideran los torques $\{\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi\}$ generados por la rotación de las hélices de los motores. Por tanto, tomando como referencia la convención empleada en el sentido de giro para las velocidades angulares de la Fig 1.2, se hacen válidas las siguientes combinaciones:

$$\begin{aligned} \tau_\phi &= bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2); \\ \tau_\theta &= bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2); \\ \tau_\psi &= k_\tau(\Omega_1^2 + \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \Omega_4^2), \end{aligned} \tag{1.7}$$

siendo l la distancia del centro de masa a cada rotor y k_τ un coeficiente ponderando el par de arrastre.

A su vez, se considera un par de fuerza inercial τ_G debido al efecto giroscópico y definido en el modo siguiente:

$$\begin{aligned} \tau_G &= \nu \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_G \Omega \end{bmatrix} \\ &= J_G \Omega \begin{bmatrix} q \\ -p \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

siendo J_G el momento de inercia total de los rotores y

$$\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4$$

la velocidad de precesión. En el Anexo 4.2 se realiza una breve reflexión acerca del efecto giroscópico y las fuerzas inerciales, así como un repaso de las operaciones de producto vectorial empleadas para el cálculo presentado en (1.8).

De esta manera, es posible reescribir (1.6) como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} - \tau_G &= \mathbf{J}\dot{\nu} + \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right) \right) \\
\begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} - J_G \Omega \begin{bmatrix} q \\ -p \\ 0 \end{bmatrix} &= \mathbf{J}\dot{\nu} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx}p \\ I_{yy}q \\ I_{zz}r \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \tau_\phi - qJ_G\Omega \\ \tau_\theta + pJ_G\Omega \\ \tau_\psi \end{bmatrix} &= \mathbf{J}\dot{\nu} + \begin{bmatrix} qr(I_{zz} - I_{yy}) \\ pr(I_{xx} - I_{zz}) \\ pq(I_{yy} - I_{xx}) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \tau_\phi - qJ_G\Omega \\ \tau_\theta + pJ_G\Omega \\ \tau_\psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} qr(I_{zz} - I_{yy}) \\ pr(I_{xx} - I_{zz}) \\ pq(I_{yy} - I_{xx}) \end{bmatrix} &= \mathbf{J}\dot{\nu} \\
\dot{\nu} &= \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_\phi - qJ_G\Omega + qr(I_{yy} - I_{zz}) \\ \tau_\theta + pJ_G\Omega + pr(I_{zz} - I_{xx}) \\ \tau_\psi + pq(I_{xx} - I_{yy}) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\tau_\phi - qJ_G\Omega + qr(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} \\ \frac{\tau_\theta + pJ_G\Omega + pr(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} \\ \frac{\tau_\psi + pq(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} \end{bmatrix}, \tag{1.9}
\end{aligned}$$

representando la dinámica de los ángulos del *dron* con respecto al marco de referencia del cuerpo.

En la práctica, se obtienen medidas para esta clase de vehículos empleando sensores inerciales (o IMU de su sigla en inglés: *Inertial Measurement Unit*) y por tanto, conviene relacionar la expresión (1.9) con los ángulos (medibles) del sistema de referencia inercial,

empleando la relación dada en (1.2); es decir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} &= \frac{d}{dt} \left(\mathbf{W}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.3.3 Simplificaciones del modelo

Las expresiones (1.5) y (1.10) resumen la dinámica del sistema. Sin embargo, si se observa con detalle se puede notar que estas expresiones son altamente no lineales. Por tanto, se asume una operación para pequeños valores de los ángulos ψ , θ y ϕ cercana al punto de equilibrio (es decir, para los tres ángulos en cero).

Bajo estas condiciones:

$$\cos(\psi) = \cos(\theta) = \cos(\phi) \approx 1; \quad \text{sen}(\psi) = \text{sen}(\theta) = \text{sen}(\phi) \approx 0,$$

y así, las expresiones dinámicas en el marco de referencia inercial se reducen a lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_O \\ \ddot{y}_O \\ \ddot{z}_O \end{bmatrix} = \frac{U}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} - \frac{1}{m} \begin{bmatrix} A_x \dot{x}_O \\ A_y \dot{y}_O \\ A_z \dot{z}_O \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} &= \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.4 Análisis del comportamiento en lazo abierto

Para verificar el comportamiento del sistema constituido por las expresiones (1.11)-(1.12), se realizó integración numérica en MATLAB® empleando la función *ode45* (ver Anexo 4.2) junto con los valores de parámetro incluidos en la Tabla 1.1, tomados de [20].

Tabla 1.1: Parámetros empleados para simulación del modelo

Parámetros	Valor	Unidades
g	9.81	m/s^2
m	0.468	kg
l	0.225	m
k_τ	2.980×10^{-6}	$kg\ m^2/rad^2$
b	1.140×10^{-7}	$kg\ m/rad^2$
J_G	3.357×10^{-5}	$kg\ m^2$
I_{xx}	4.856×10^{-3}	$kg\ m^2$
I_{yy}	4.856×10^{-3}	$kg\ m^2$
I_{zz}	8.801×10^{-3}	$kg\ m^2$
A_z	0.25	kg/s

Los análisis de simulación se realizaron considerando translación únicamente en la coordenada z_O ; es decir, para $\dot{x}_O = \dot{y}_O = 0$. De esta manera (1.11) puede reducirse a lo siguiente:

$$\ddot{z}_O = \frac{U}{m} - g - \frac{1}{m} A_z \dot{z}_O. \quad (1.13)$$

Por tanto, considerando como vector de estados:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_O \\ \dot{z}_O \\ \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

la dinámica del sistema puede ser expresada como sigue:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} y_2 \\ \frac{U}{m} - g - \frac{1}{m} A_z y_2 \\ y_4 \\ \frac{\tau_\phi - y_6 J_G \Omega + y_6 y_8 (I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} \\ y_6 \\ \frac{\tau_\theta + y_4 J_G \Omega + y_4 y_8 (I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} \\ y_8 \\ \frac{\tau_\psi + y_4 y_6 (I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Para determinar los valores de equilibrio en las variables del sistema, se iguala a cero el lado izquierdo de (1.15), obteniendo:

$$\begin{aligned} \bar{y}_2 &= 0 \\ \bar{y}_4 &= 0 \\ \bar{y}_6 &= 0 \\ \bar{y}_8 &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Asimismo:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\bar{U}}{m} - g - \frac{1}{m} A_z \bar{y}_2 \\
&= \frac{\bar{U}}{m} - g \\
\bar{U} &= mg,
\end{aligned}$$

corresponde con el impulso de propulsión nominal para la condición de equilibrio.

Un razonamiento similar permite obtener:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\bar{\tau}_\phi - \bar{y}_6 J_G \Omega + \bar{y}_6 \bar{y}_8 (I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} \\
&= \frac{\bar{\tau}_\phi}{I_{xx}} \\
\bar{\tau}_\phi &= 0, \\
\\
0 &= \frac{\bar{\tau}_\theta + \bar{y}_4 J_G \Omega + \bar{y}_4 \bar{y}_8 (I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} \\
&= \frac{\bar{\tau}_\theta}{I_{xx}} \\
\bar{\tau}_\theta &= 0, \\
\\
0 &= \frac{\bar{\tau}_\psi + \bar{y}_4 \bar{y}_6 (I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} \\
&= \frac{\bar{\tau}_\psi}{I_{xx}} \\
\bar{\tau}_\psi &= 0,
\end{aligned}$$

como los valores de torque aplicado por los motores en las direcciones angulares correspondientes, durante la condición de equilibrio.

La Fig. 1.3 muestra resultados de simulación para el sistema de ecuaciones (1.15) empleando condiciones de equilibrio y despreciando los efectos de la fuerza giroscópica (es decir, para $\tau_G = [0 \ 0 \ 0]^T$).

Como se observa en la Fig. 1.3(a), la condición inicial para z tomada como 10 m es desplazada a una posición diferente hasta alcanzar un valor cercano a 12 m , debido a una

velocidad \dot{z} no nula. Como se muestra en la Fig. 1.3(b) esta velocidad posee un valor inicial de 1 m/s que se desvanece rápidamente hacia cero en alrededor de 10 s , periodo de coincide con el transitorio en z antes de alcanzar un nuevo valor constante. Con respecto a los ángulos, se observa que tanto posiciones como velocidades angulares se mantienen invariantes desde una condición inicial cero. Todo este comportamiento es consistente con las características esperadas para el sistema, pues se considera como entrada la propulsión nominal \bar{U} .

Una situación diferente se verifica a partir de $t = 30\text{ s}$, instante en el cual se aplica un desbalance en la fuerza f_4 siendo reducido su valor nominal en un 1% . Como se observa en la Fig. 1.3(a) esto ocasiona un desplazamiento lineal en la dirección z con velocidad constante negativa (ver Fig. 1.3(b)). Dicho desbalance afecta también a los ángulos ϕ y ψ (Figs. 1.3(c) y 1.3(g)) junto con sus respectivas derivadas (Figs. 1.3(d) y 1.3(h)) debido a la influencia de f_4 en τ_ϕ y τ_ψ a través de Ω_4 , según evidenciado en (1.7). La influencia sobre ψ es cuadrática (Fig. 1.3(g)) y por consiguiente el incremento de su velocidad es lineal (Fig. 1.3(h)). En el caso de ϕ (Fig. 1.3(c)) el ángulo tiende a establecerse en un cierto valor de manera altamente oscilatoria aunque amortiguada. Existe establecimiento debido a que la velocidad angular $\dot{\phi}$ oscila alrededor de cero (Fig. 1.3(d)).

La razón por la cual la dinámica de ϕ no se comporta igual a la dinámica de ψ se explica por el término de acoplamiento en (1.15), que se anula para $\dot{\psi}$ dado que $I_{xx} = I_{yy}$ (ver Tabla 1.1). Esta dinámica de acoplamiento también causa alteración en el comportamiento del ángulo θ y su derivada $\dot{\theta}$ según se aprecia en las Figs. 1.3(e) y 1.3(f), respectivamente.

De otro lado, la Fig. 1.4 permite realizar observaciones similares para el caso en que se consideran los efectos de la fuerza giroscópica τ_G , a partir de lo cual se reproduce el escenario para las dinámicas de z y ψ . Con respecto al comportamiento de ϕ y θ no es posible realizar conclusiones debido al acople dinámico mencionado.

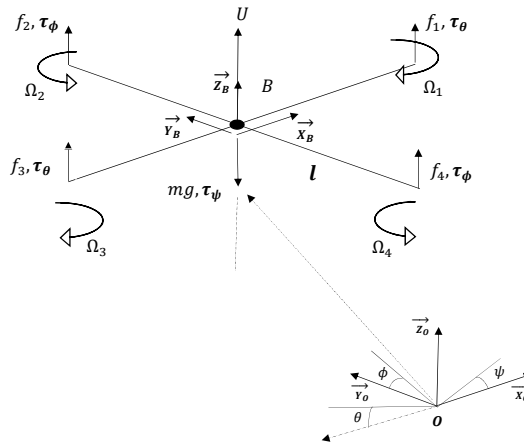


Figura 1.2: Diagrama de cuerpo libre del *dron* cuadrotor (modificado de [22])

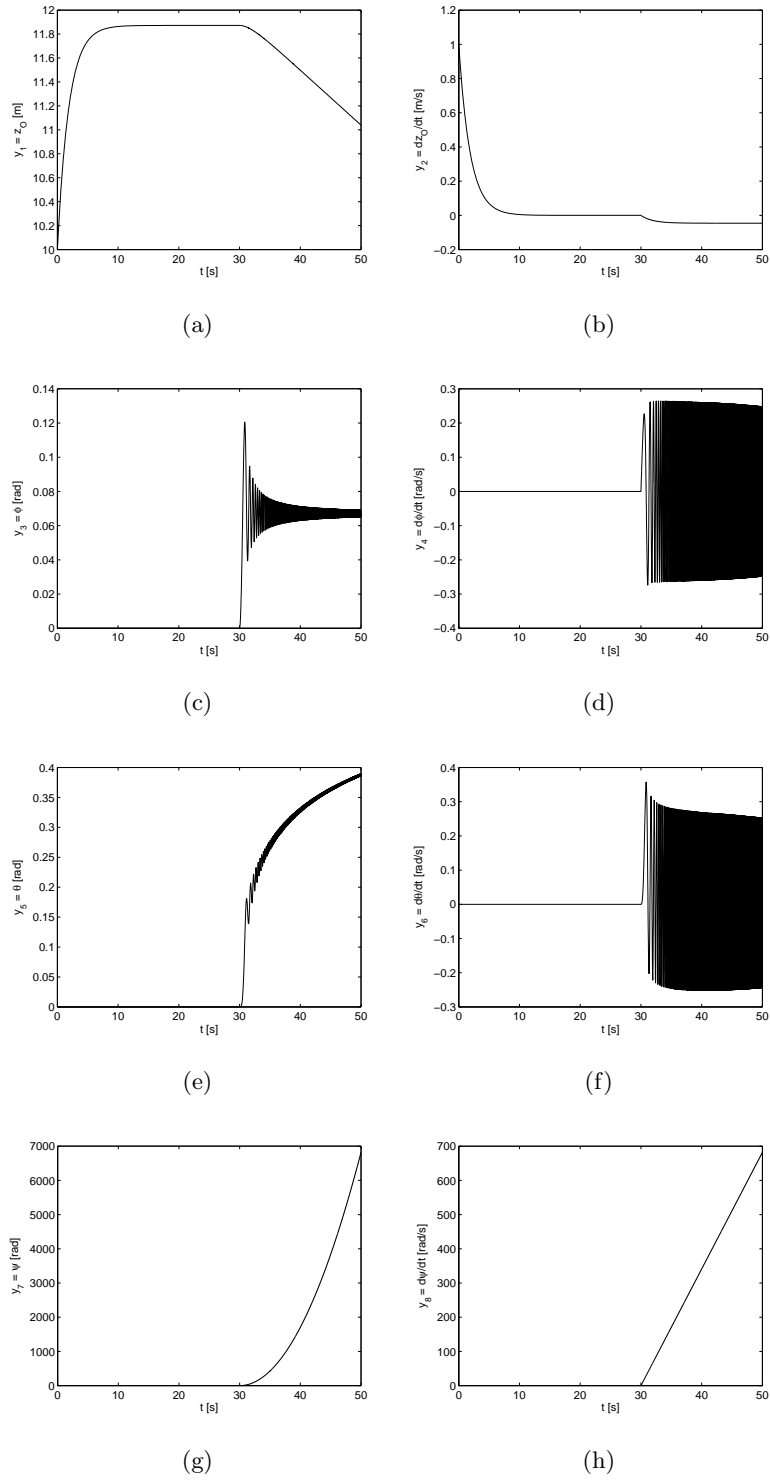
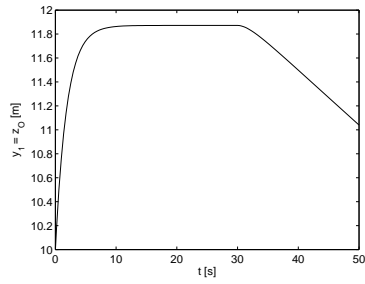
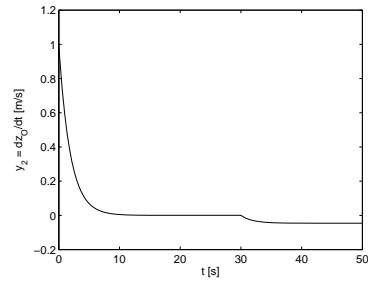


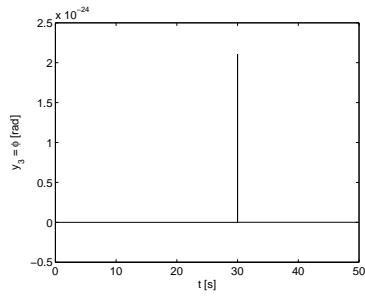
Figura 1.3: Simulación del sistema ante condiciones de equilibrio perturbado: (a) $z(t)$, (b) $\dot{z}(t)$, (c) $\phi(t)$, (d) $\dot{\phi}(t)$, (e) $\theta(t)$, (f) $\dot{\theta}(t)$, (g) $\psi(t)$ y (h) $\dot{\psi}(t)$



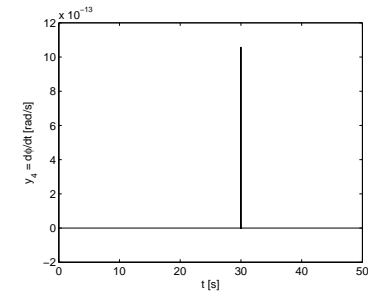
(a)



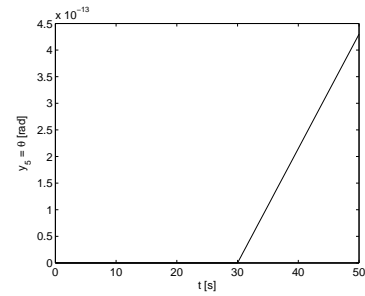
(b)



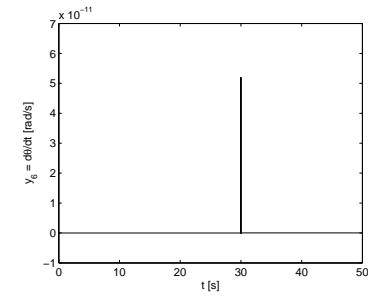
(c)



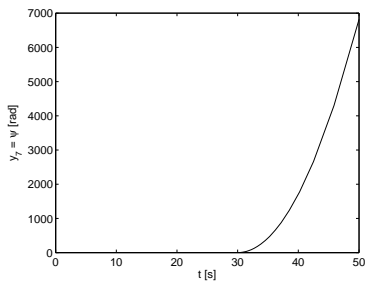
(d)



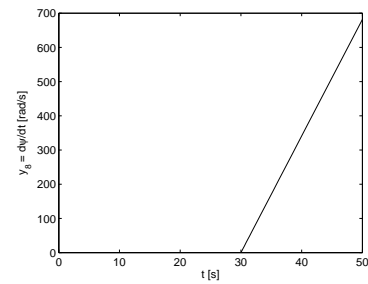
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 1.4: Simulación del sistema ante condiciones de equilibrio perturbado con efecto giroscópico: (a) $z(t)$, (b) $\dot{z}(t)$, (c) $\phi(t)$, (d) $\dot{\phi}(t)$, (e) $\theta(t)$, (f) $\dot{\theta}(t)$, (g) $\psi(t)$ y (h) $\dot{\psi}(t)$

Capítulo 2

Cierre de lazo y control PID

El modelo matemático obtenido en el Capítulo anterior permitió verificar el acoplamiento dinámico entre los ángulos de rotación del *dron*, a pesar de considerarse operación en magnitudes pequeñas para dichas variables. Este acople representa no linealidades que deben tratarse empleando metodologías de análisis y diseño que superan el alcance del presente trabajo de grado.

Por tal motivo, en este Capítulo se aborda la linealización del modelo alrededor de un punto de operación nominal, permitiendo aplicar técnicas de diseño convencional para leyes de control en el dominio de la frecuencia y el espacio de estados. En particular, se propone el diseño de un controlador de tipo PID para el sistema.

2.1 Linealización del modelo y desacoplamiento dinámico

El sistema (1.15) puede ser expresado mediante una expansión en serie de Taylor de la forma [11]:

$$\begin{aligned}\dot{y}(y, \tau, \mathbf{p}) &= \mathbf{f}(y, \tau, \mathbf{p}) \\ &= \mathbf{f}(\bar{y}, \bar{\tau}, \bar{\mathbf{p}}) + \left. \frac{d\mathbf{f}}{dy} \right|_{(\bar{y}, \bar{\tau}, \bar{\mathbf{p}})} (y - \bar{y}) + \left. \frac{d\mathbf{f}}{d\tau} \right|_{(\bar{y}, \bar{\tau}, \bar{\mathbf{p}})} (\tau - \bar{\tau}) + \\ &\quad + \left. \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{p}} \right|_{(\bar{y}, \bar{\tau}, \bar{\mathbf{p}})} (\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}) + \dots\end{aligned}\tag{2.1}$$

siendo \bar{y} los estados de equilibrio definidos en (1.16), mientras que:

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{\tau}_\phi \\ \bar{\tau}_\theta \\ \bar{\tau}_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

es el vector de forzantes de entrada en estado de equilibrio y:

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \bar{p}_z \\ \bar{\tau}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg - A_2\bar{y}_2 \\ -J_G\bar{\Omega}\bar{y}_6 \\ J_G\bar{\Omega}\bar{y}_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

representa el vector de perturbaciones en estado de equilibrio, incluyendo en \bar{p}_z los efectos gravitatorios y de fricción con el aire en el eje z .

De esta manera, efectuando los cálculos correspondientes se obtiene:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{f}}{dy} \right|_{(\bar{y}, \bar{\tau}, \bar{\mathbf{p}})} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_8 \frac{(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} & 0 & y_6 \frac{(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_8 \frac{(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 & y_4 \frac{(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_6 \frac{(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} & 0 & y_4 \frac{(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Bigg|_{(\bar{y}, \bar{\tau}, \bar{\mathbf{p}})} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\left. \frac{d\mathbf{f}}{d\boldsymbol{\tau}} \right|_{(\bar{y}, \bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{p}})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} = \mathbf{B}, \quad (2.5)$$

y

$$\left. \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{p}} \right|_{(\bar{y}, \bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{p}})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} = \mathbf{W}. \quad (2.6)$$

Así, para una operación cercana al punto de equilibrio nominal $(\bar{y}, \bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{p}})$ la expansión en serie de Taylor (2.1) puede ser truncada en los términos de primer orden y por tanto:

$$\begin{aligned} \dot{y} &\approx \mathbf{f}(\bar{y}, \bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{p}}) + \left. \frac{d\mathbf{f}}{dy} \right|_{(\bar{y}, \bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{p}})} (y - \bar{y}) + \left. \frac{d\mathbf{f}}{d\boldsymbol{\tau}} \right|_{(\bar{y}, \bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{p}})} (\boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\tau}}) + \\ &\quad + \left. \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{p}} \right|_{(\bar{y}, \bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{p}})} (\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}) \\ \dot{y} - \mathbf{f}(\bar{y}, \bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{p}}) &= \mathbf{A} (y - \bar{y}) + \mathbf{B} (\boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\tau}}) + \mathbf{W} (\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}) \\ \Delta \dot{y} &= \mathbf{A} \Delta y + \mathbf{B} \Delta \boldsymbol{\tau} + \mathbf{W} \Delta \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

siendo Δ una representación para pequeñas variaciones alrededor de los valores de equilibrio.

A partir de (2.5) y (2.6), se observa que las perturbaciones \mathbf{p} pueden considerarse un término aditivo al vector de forzantes de entrada $\boldsymbol{\tau}$; es decir:

$$\Delta \dot{y} = \mathbf{A} \Delta y + \mathbf{B} (\Delta \boldsymbol{\tau} + \Delta \mathbf{p}).$$

Ahora bien, definiendo como vector de salida para el sistema:

$$\lambda = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_5 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_O \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

variaciones alrededor de sus valores de equilibrio $\bar{\lambda}$ permiten formular la siguiente ecuación de salida:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta y \\ &= \mathbf{C}\Delta y. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Por tanto, en ausencia de perturbaciones es posible formular la siguiente matriz de transferencia para el modelo linealizado:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \Delta\lambda (\Delta\tau)^{-1} \\ &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

misma que puede resolverse a través de operaciones matriciales elementales, permitiendo obtener:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \mathbf{G}(s)\Delta\tau \\ &= \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & G_{13}(s) & G_{14}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & G_{23}(s) & G_{24}(s) \\ G_{31}(s) & G_{32}(s) & G_{33}(s) & G_{34}(s) \\ G_{41}(s) & G_{42}(s) & G_{43}(s) & G_{44}(s) \end{bmatrix} \Delta\tau \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{ms^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{xx}s^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}s^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}s^2} \end{bmatrix} \Delta\tau, \end{aligned} \quad (2.11)$$

representando un equivalente matemático para la dinámica del *dron* válido alrededor del punto de operación nominal y con evidente desacople entre las variables de rotación.

La Fig. 2.1 ilustra resultados de simulación para este nuevo modelo, en un escenario similar al presentado previamente en la Fig. 1.3. Como puede observarse, la dinámica en cada eje de rotación es independiente debido al desacople. Así, una alteración en la condición de equilibrio para la fuerza \bar{f}_4 altera ϕ y ψ pero no θ , como sugerido a partir de (2.11).

A continuación, se realizará regulación del estado del sistema hacia la posición de equilibrio dinámico, ante alteraciones nominales del entorno (por ejemplo, debidas a ráfagas aleatorias de viento).

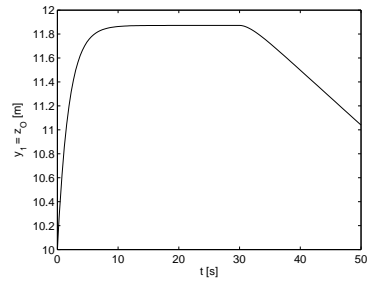
2.2 Acción de control proporcional

El cálculo para la señal de control $\Delta\tau$ que realiza la compensación del sistema, se efectúa de manera automática a partir de la configuración realimentada mostrada en la Fig. 2.2, donde $\mathbf{G}(s)$ representa la matriz de transferencia de las plantas a controlar, $\mathbf{C}(s)$ es la acción de control ejercida sobre la señal de error $\mathbf{E}(s)$ y $\Delta\mathbf{p}$ relaciona las perturbaciones adicionadas al sistema.

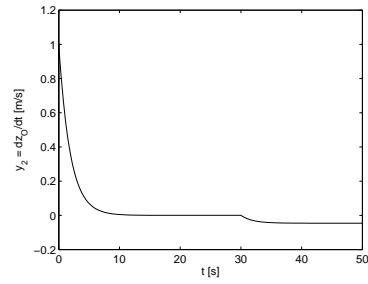
Inicialmente, se debe dejar en claro que la acción de control se estudiará sobre el efecto de las perturbaciones (representadas en una alteración del valor nominal para f_4), pues la referencia de entrada se fija en un valor constante correspondiente con:

$$\lambda_d = \begin{bmatrix} \bar{z}_O \\ \bar{\phi} \\ \bar{\theta} \\ \bar{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

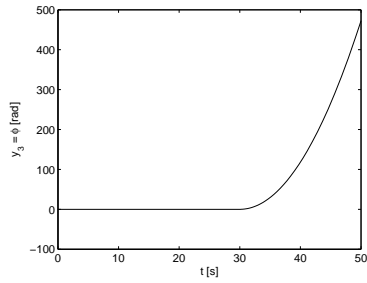
De esta manera, tomando en cuenta que la acción de control $\mathbf{C}(s)$ más simple corresponde



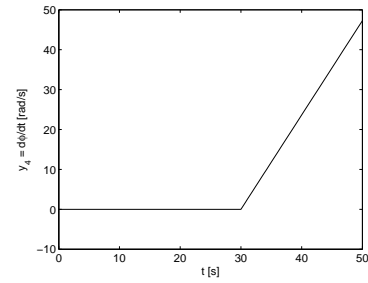
(a)



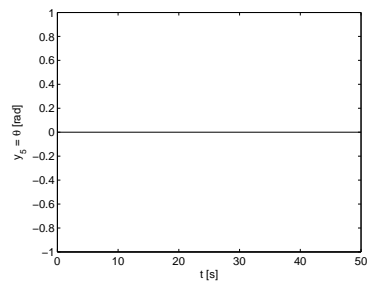
(b)



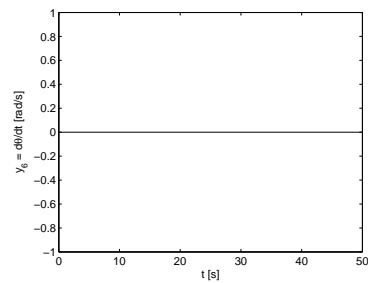
(c)



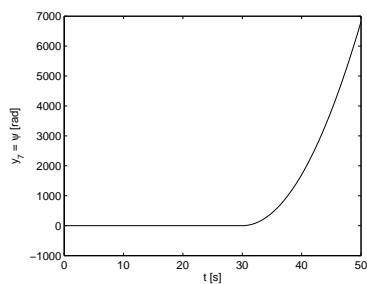
(d)



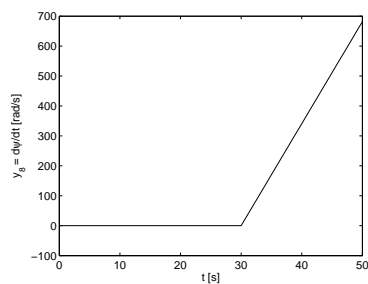
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 2.1: Simulación del sistema linealizado ante condiciones de equilibrio perturbado: (a) $z(t)$, (b) $\dot{z}(t)$, (c) $\phi(t)$, (d) $\dot{\phi}(t)$, (e) $\theta(t)$, (f) $\dot{\theta}(t)$, (g) $\psi(t)$ y (h) $\dot{\psi}(t)$

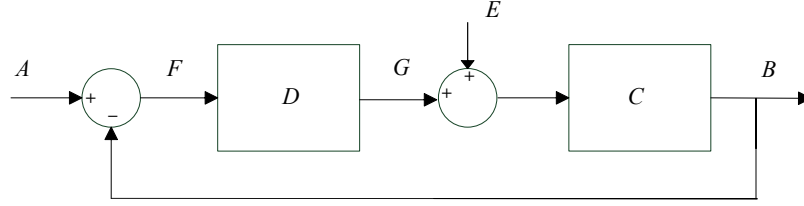


Figura 2.2: Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado

con una transformación de error del tipo ganancia proporcional; es decir:

$$\Delta \tau = \mathbf{k}_p \mathbf{E}(s) \quad (2.13)$$

$$= \begin{bmatrix} k_{pz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{p\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{p\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{p\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_O - z_O \\ \bar{\phi} - \phi \\ \bar{\theta} - \theta \\ \bar{\psi} - \psi \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

se presentan en la Fig. 2.3 las respuestas del sistema controlado al constituir el cierre del lazo en la forma de una acción proporcional unitaria (es decir, haciendo $k_{pz} = k_{p\phi} = k_{p\theta} = k_{p\psi} = 1$).

A partir de este resultado, es clara una respuesta oscilatoria alrededor de los valores deseados en las variables afectadas por la perturbación (Figs. 2.3(a), 2.3(b) y 2.3(d)). Dichas oscilaciones sostenidas son consecuencia de la forma de doble integrador presente en las cuatro funciones de transferencia para $\mathbf{G}(s)$ en (2.11), la cual como se sabe a partir del análisis del lugar geométrico de las raíces [11], genera polos imaginarios con frecuencia proporcional a la magnitud de la ganancia de lazo.

Por tal motivo, incrementar el valor de la constante proporcional no tendrá un efecto diferente al de aumentar la frecuencia de oscilación; es decir, no se realizará ningún tipo de amortiguamiento en las respuestas y por tanto, deberá adicionarse la contribución de un polo y un cero mediante una acción de control PID para poder anular el error en el estado estacionario.

Asimismo, en las Figs. 2.3(e), 2.3(f) y 2.3(h) se observan los correspondientes esfuerzos de

control proporcional, replicando las características oscilatorias de las variables de salida alrededor de los valores nominales deseados.

A manera de verificación del desacople dinámico, las Figs. 2.3(c) y 2.3(g) muestran, respectivamente, la dinámica para $\theta(t)$ y su respectiva forzante τ_θ , las cuales no son afectadas por la perturbación considerada en f_4 .

Adicionalmente, con el objetivo de ilustrar el comportamiento del sistema controlado en el espacio de movimiento, se realizó el diseño e implementación para una interfaz de animación en el entorno GUIDE (Graphical User Interface Development Environment) de MATLAB, como herramienta interactiva para facilitar al usuario la emulación del comportamiento del sistema real. El Anexo 4.2 describe la manera en que fue constituida dicha interfaz para las diferentes estrategias de control de la dinámica del *dron* abordadas en el presente trabajo de grado.

2.3 Acción de control PID

La lógica elemental indicaría que a partir de la forma de doble integrador en las funciones de transferencia del sistema, una acción proporcional-derivativa (PD) sería suficiente para constituir las tres acciones de control en la estructura del sistema controlado. Sin embargo, a partir de los resultados obtenidos con la simple acción proporcional, es claro que los integradores de la trayectoria directa incorporados en la planta no hacen cero el error de estado estacionario ante una perturbación de tipo escalón, como la considerada en las simulaciones.

Lo anterior puede deducirse fácilmente aplicando el principio de superposición, a partir del cual la salida total del sistema es la suma de contribuciones debidas a la señal de referencia y a la perturbación, siendo esta última de un valor diferente de cero en régimen permanente.

Por tanto, se hace necesario incorporar un integrador en la acción de control sugiriendo una estructura de tipo proporcional-integral (PI). Sin embargo, puede mostrarse que el sistema controlado resultante no es estable bajo esta suposición.

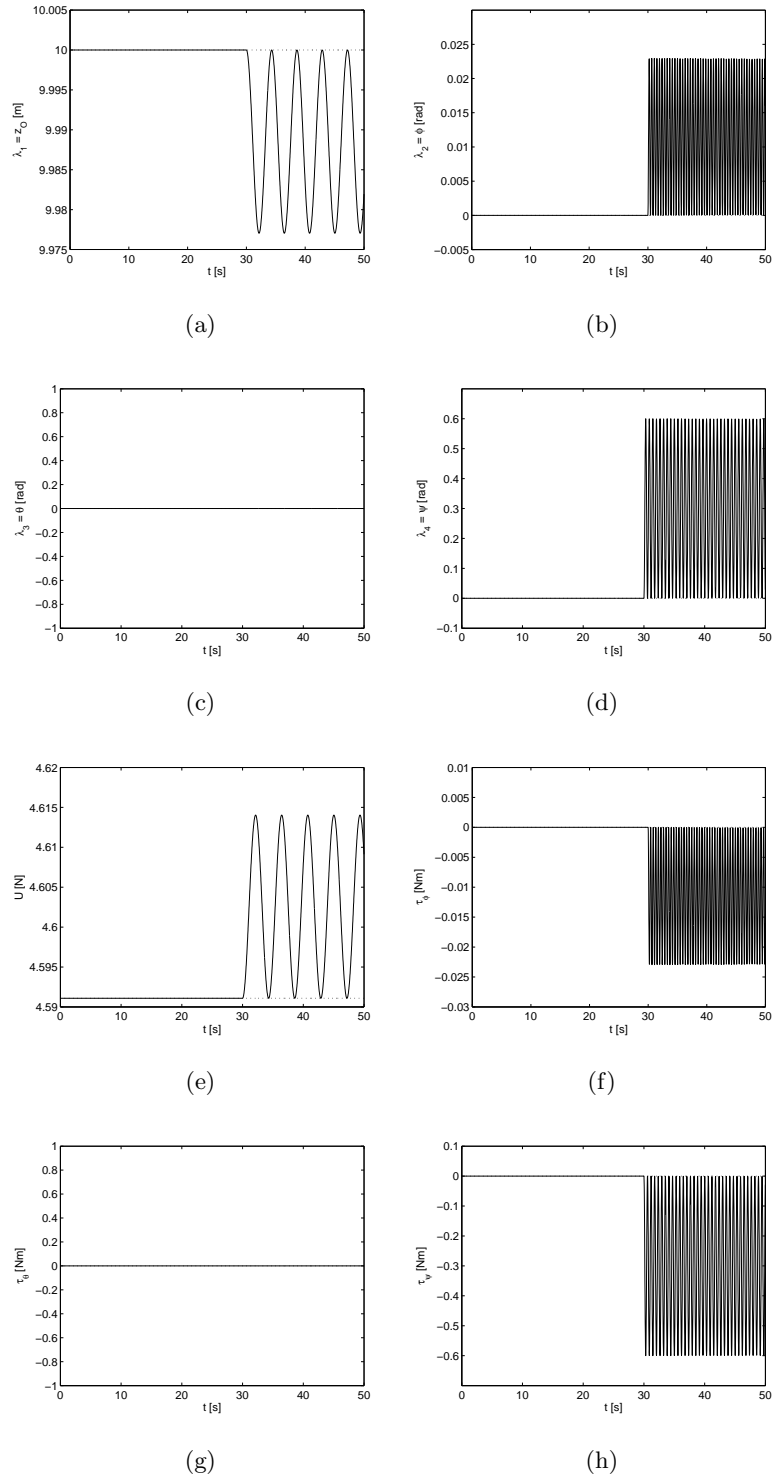


Figura 2.3: Simulación del sistema linealizado ante acción de control proporcional: (a) $z(t)$, (b) $\phi(t)$, (c) $\theta(t)$, (d) $\psi(t)$, (e) $U(t)$, (f) $\tau_\phi(t)$, (g) $\tau_\theta(t)$ y (h) $\tau_\psi(t)$

Finalmente, se concluye que la solución viable para eliminar los efectos de perturbación en el sistema es la acción de control proporcional-integral-derivativo (PID). La representación matemática para un controlador PID en su forma de realización paralela como función del tiempo, esta dada por [11]:

$$u = k_p \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right), \quad (2.15)$$

siendo k_p la ganancia proporcional, T_i el tiempo integral y T_d el tiempo derivativo. De esta manera se define un controlador de la forma:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} \quad (2.16)$$

donde

$$k_i = \frac{k_p}{T_i}$$

y

$$k_d = k_p T_d.$$

Por tanto, la acción de control PID en el sistema multivariado puede ser formulada (similar a (2.13)) en el modo siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{k}_p \mathbf{E}(s) + \frac{1}{s} \mathbf{k}_i \mathbf{E}(s) + s \mathbf{k}_d \mathbf{E}(s) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{k_{dz}s^2 + k_{pz}s + k_{iz}}{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{d\phi}s^2 + k_{p\phi}s + k_{i\phi}}{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_{d\theta}s^2 + k_{p\theta}s + k_{i\theta}}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_{d\psi}s^2 + k_{p\psi}s + k_{i\psi}}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_O - z_O \\ \bar{\phi} - \phi \\ \bar{\theta} - \theta \\ \bar{\psi} - \psi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

A continuación, se ilustrará el diseño de un controlador PID para la dinámica de traslación en z (es decir para $G_{11}(s)$ en (2.11)) por medio del método de asignación de polos [11]. Los parámetros de control para las funciones de transferencia restantes, se asumirán calculados empleando la misma metodología.

Para ello se asume el siguiente polinomio característico deseado:

$$Q_d(s) = q_0s^3 + q_1s^2 + q_2s + q_3, \quad (2.18)$$

que se iguala con el polinomio característico $Q(s)$ del sistema controlado (denominador de la función de transferencia en lazo cerrado):

$$Q(s) = s^3 + \frac{k_{dz}}{m}s^2 + \frac{k_{pz}}{m}s + \frac{k_{iz}}{m}, \quad (2.19)$$

para constituir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} q_0 &= 1 \\ q_1 &= \frac{k_{dz}}{m} \\ q_2 &= \frac{k_{pz}}{m} \\ q_3 &= \frac{k_{iz}}{m} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Así, considerando como especificaciones de diseño:

$$t_s = 2 [s]; \quad M_p = 15\%, \quad (2.21)$$

justificadas en la necesidad de eliminar de manera rápida y suficientemente amortiguada, las perturbaciones que impiden mantener la condición de equilibrio en el sistema, es posible determinar, a partir de la forma general para un sistema de segundo orden:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2, \quad (2.22)$$

aplicando las equivalencias [11]:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{(\ln M_p)^2} + 1}} \quad (2.23)$$

$$\omega_n = \frac{4}{t_s \zeta}, \quad (2.24)$$

los siguientes polos dominantes deseados:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \\ &= -2 \pm 3.312j. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ahora bien, tomando en cuenta que tanto $Q(s)$ como $Q_d(s)$ son de tercer grado, se hace necesario adicionar un tercer polo, real y remanente, que no interfiera de manera significativa en la dominancia del par complejo conjugado. Luego, siguiendo las reglas de diseño en dominio de la frecuencia [11] se asume un polo real negativo de magnitud correspondiente a diez veces la parte real del par complejo conjugado; es decir:

$$s_3 = -20$$

De esta manera, es posible reconstruir el polinomio característico deseado como:

$$Q_d(s) = s^3 + 24s^2 + 94.96s + 299.38, \quad (2.26)$$

para resolver el sistema de ecuaciones (2.20), con la información de (2.26) y los parámetros de la Tabla 1.1 como sigue:

$$\begin{aligned} k_{pz} &= mq_2 \\ &= 44.44; \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} k_{iz} &= mq_3 \\ &= 140.11; \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} k_{dz} &= mq_1 \\ &= 11.23. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Otros parámetros de control se incluyen en la Tabla 2.1.

La Fig 2.4 presenta los resultados de simulación para la acción de control PID. A partir de ellos es evidente la rapidez obtenida en las respuestas, con un esfuerzo de control poco significativo y amplia corrección de respuesta amortiguada para el efecto de perturbaciones, verificando así la efectividad del diseño y la recuperación de la condición de equilibrio por parte de la dinámica del *dron*.

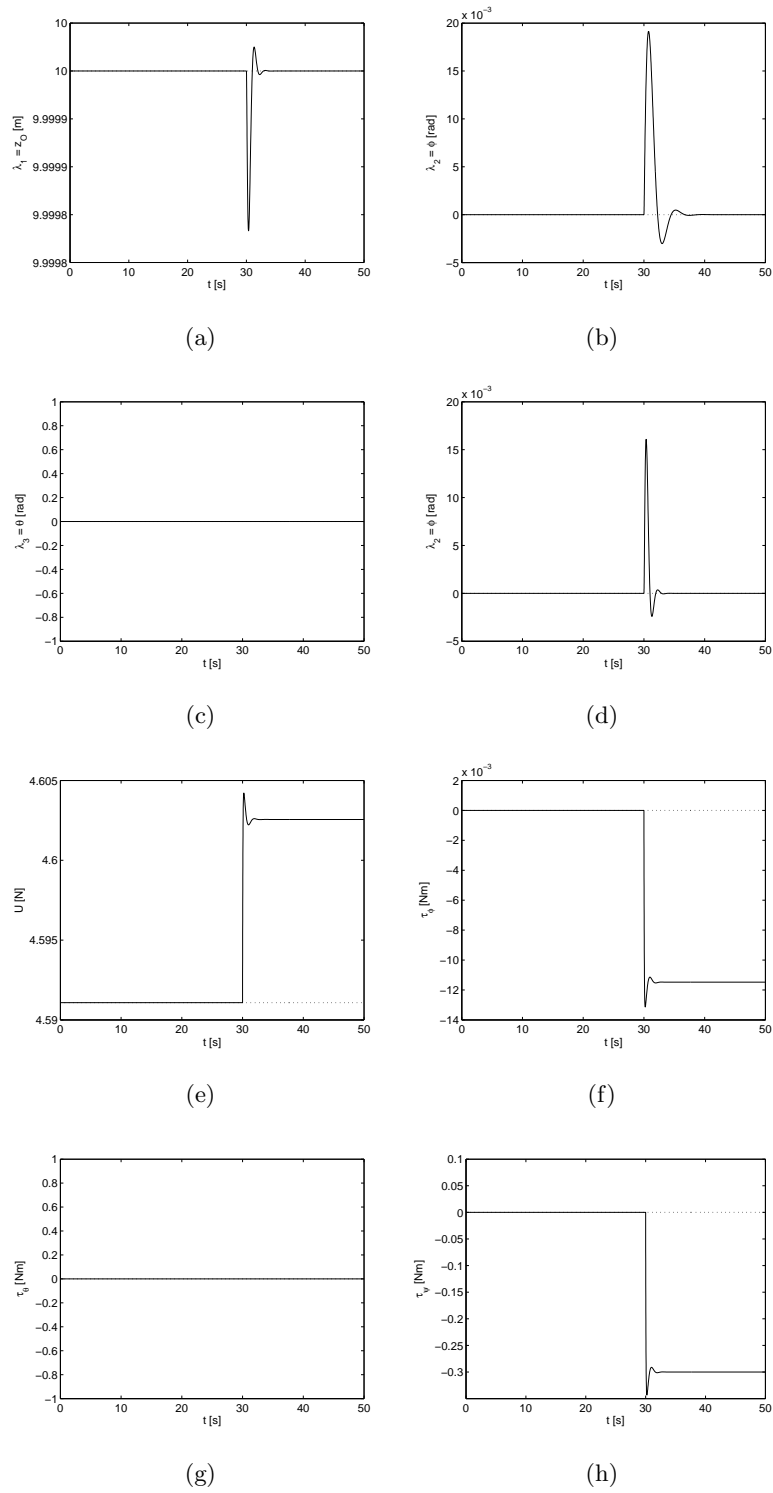


Figura 2.4: Simulación del sistema linealizado ante acción de control PID: (a) $z(t)$, (b) $\phi(t)$, (c) $\theta(t)$, (d) $\psi(t)$, (e) $U(t)$, (f) $\tau_\phi(t)$, (g) $\tau_\theta(t)$ y (h) $\tau_\psi(t)$

Tabla 2.1: Parámetros de control PID para ángulos de rotación

Parámetro	Valor
$k_{p\phi}$	0.4612
$k_{i\phi}$	1.4538
$k_{d\phi}$	0.1165
$k_{p\theta}$	0.4612
$k_{i\theta}$	1.4538
$k_{d\theta}$	0.1165
$k_{p\psi}$	0.8358
$k_{i\psi}$	2.6349
$k_{d\psi}$	0.2112

Capítulo 3

Control en el espacio de estados

El caracter multivariado del modelo matemático que describe la dinámica del *dron*, implica resolver el problema de calcular leyes de control independientes para cada subsistema (planta o relación entre cada entrada y cada salida), cuando se aborda desde una perspectiva de control clásico PID como la presentada en el Capítulo anterior.

En contraste, se desarrolla en las secciones subsiguientes el diseño de una ley de regulación para el estado del sistema hacia la condición de equilibrio, empleando la técnica de control multivariado en el espacio de estados denominada control por asignación de polos (o *pole placement* en inglés).

3.1 Regulación por realimentación del vector de estados

La teoría de control en el espacio de estados, también denominada de control moderno [11], se desarrolla en el dominio del tiempo a través de sistemas de ecuaciones diferenciales representando la dinámica del estado del sistema. Para el caso MIMO LTI (de múltiples entradas y múltiples salidas, lineal y de tiempo invariante) dichas expresiones pueden escribirse en el modo siguiente:

$$\Delta \dot{y} = \mathbf{A}\Delta y + \mathbf{B}\Delta \tau, \quad (3.1)$$

$$\Delta \lambda = \mathbf{C}\Delta y + \mathbf{D}\Delta \tau \quad (3.2)$$

donde $\Delta y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de estados, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de estado, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ es la matriz de entrada, $\Delta \tau \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ es el vector de entradas de control, $\Delta \lambda \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es el vector

de salidas, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz de salida y $D \in \mathbb{R}^{m \times r}$ es la matriz de transmisión directa.

La ecuación diferencial (3.1) se denomina *ecuación de estado* y describe la dinámica (cambio temporal) del vector de estados Δy . Asimismo, la ecuación algebraica (3.2) se denomina *ecuación de salida* y permite determinar el valor en el tiempo para el vector de salidas $\Delta \lambda$ a partir de combinaciones de las variables de estado y entrada del sistema.

Asimismo, la propiedad de *controlabilidad* de un sistema puede definirse como su capacidad para ser llevado de una condición inicial arbitraria a una condición final deseada, en un tiempo finito a través de un esfuerzo de control. Dicha propiedad se verifica en un sistema LTI a partir del rango de la matriz de controlabilidad [11]:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

siendo el sistema de *estado completamente controlable*, si el rango de \mathbf{M} es completo (equivalentemente, si su determinante es diferente de cero).

Por tanto, para un sistema LTI que verifica la propiedad de controlabilidad completa del estado es posible calcular una ley de control:

$$\Delta \tau(t) = -\mathbf{K}\Delta y \quad (3.4)$$

con $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ representando el vector de ganancias que ponderan los estados realimentados.

A partir de ello, la ecuación de estado (3.1) puede reescribirse como:

$$\Delta \dot{y} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \Delta y, \quad (3.5)$$

correspondiente con una ecuación diferencial no forzada, para la cual la dinámica queda gobernada por los valores propios de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$.

De esta manera, el problema original (3.1) forzado en términos de $\Delta \tau(t)$, queda expresado como la dinámica de un nuevo sistema sin entrada que puede ser estabilizado y más allá de eso también manipulado en su dinámica, a través de una apropiada selección para la matriz de ganancia de realimentación de estados \mathbf{K} .

3.1.1 Cálculo para ganancia de realimentación de estados

Retomando la formulación en el espacio de estados para el sistema linealizado presentada en la Sección 2.1, donde (2.7) define la ecuación de estado y (2.9) la ecuación de salida, el cálculo para \mathbf{K} se efectúa como sigue:

- 1) Se verifica la condición de controlabilidad completa del estado a partir de análisis de rango de la matriz de controlabilidad (3.3), la cual para el caso de estudio considerado se calcula empleando la instrucción:

```
>> M = ctrb(A, B)
```

en la ventana de comandos de MATLAB, generando una matriz de dimensiones $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$, para la cual es posible determinar la condición de rango ejecutando la instrucción:

```
>> rank(M)
```

obteniendo 8 como resultado, lo cual verifica la controlabilidad completa del estado del sistema, y por tanto, la existencia de una matriz \mathbf{K} para constituir la ley de control correspondiente.

- 2) Recordando que los polos del sistema controlado corresponden con los valores de s que resuelven:

$$\det |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = 0, \quad (3.6)$$

se observa que las raíces del polinomio característico deseado dadas en (2.25) representan el par dominante para una dinámica de 8° orden.

Por tanto, se definen 6 polos adicionales como remanentes en la dinámica deseada tras cumplir con la condición de que su parte real exceda en un factor de 10 la magnitud del par conjugado dominante.

Teniendo en cuenta las restricciones de la función *place(.)* de MATLAB (empleada para realizar el cálculo de \mathbf{K}) en cuanto a la multiplicidad de las raíces del polinomio característico deseado, estas se seleccionan como sigue:

$$P = \begin{bmatrix} -2 \pm 3.312j & -20 & -20 & -20 & -40 & -40 & -40 \end{bmatrix}$$

- 3) Las dimensiones del problema implican la necesidad de realizar cálculos computacionales para determinar la matriz de realimentación de estados \mathbf{K} .

Para ello se ejecuta la siguiente instrucción en la ventana de comandos de MATLAB:

```
>> K = place(A, B, P)
```

permitiendo obtener el siguiente resultado:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -56.25 & 15.49 & 46.41 & 2.91 & -105.02 & -7.36 & 0 & 0 \\ -0.14 & 4.64 \times 10^{-3} & 3.52 & 0.27 & 0.98 & 4.65 \times 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0.64 & -5.86 \times 10^{-3} & 0.95 & 4.52 \times 10^{-2} & 1.21 & 0.16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.04 & 0.52 \end{bmatrix}$$

La Fig. 3.1 presenta la simulación correspondiente ante esta estrategia de control, a partir de la cual se observa que las variables de estado del sistema convergen rápidamente y en correspondencia con la dinámica deseada hacia valores finales, que sin embargo, no corresponden con los esperados de equilibrio. En otras palabras, se experimenta un error de estado estacionario en las variables del sistema controlado (Figs. 3.1(a)-3.1(d)).

También, es posible observar la aparición de acoplamiento en la dinámica de la variable $\theta(t)$ (Fig. 3.1(c)) como consecuencia del carácter multivariado de la señal de control $\tau_\theta(t)$, la cual como se observa en la Fig. 3.1(g) es afectada transitoriamente por los valores de las variables de estado, hasta establecerse en su valor de equilibrio después de alrededor 2.5 s.

Con respecto a las demás señales de control (Figs. 3.1(e), 3.1(f) y 3.1(h)), se observa que a pesar de una evidente variación como respuesta a la perturbación en la fuerza \bar{f}_4 aplicada en $t = 30$ s, dicho esfuerzo de control no alcanza a devolver las variables del sistema a las posiciones deseadas de equilibrio, justificando la necesidad de diseñar un sistema de seguimiento según se describe a continuación.

3.1.2 Sistema de seguimiento

Sobre la base de la regulación de estado ilustrada en la Sección anterior, es posible asegurar una convergencia de la dinámica del sistema hacia un valor arbitrario de referencia.

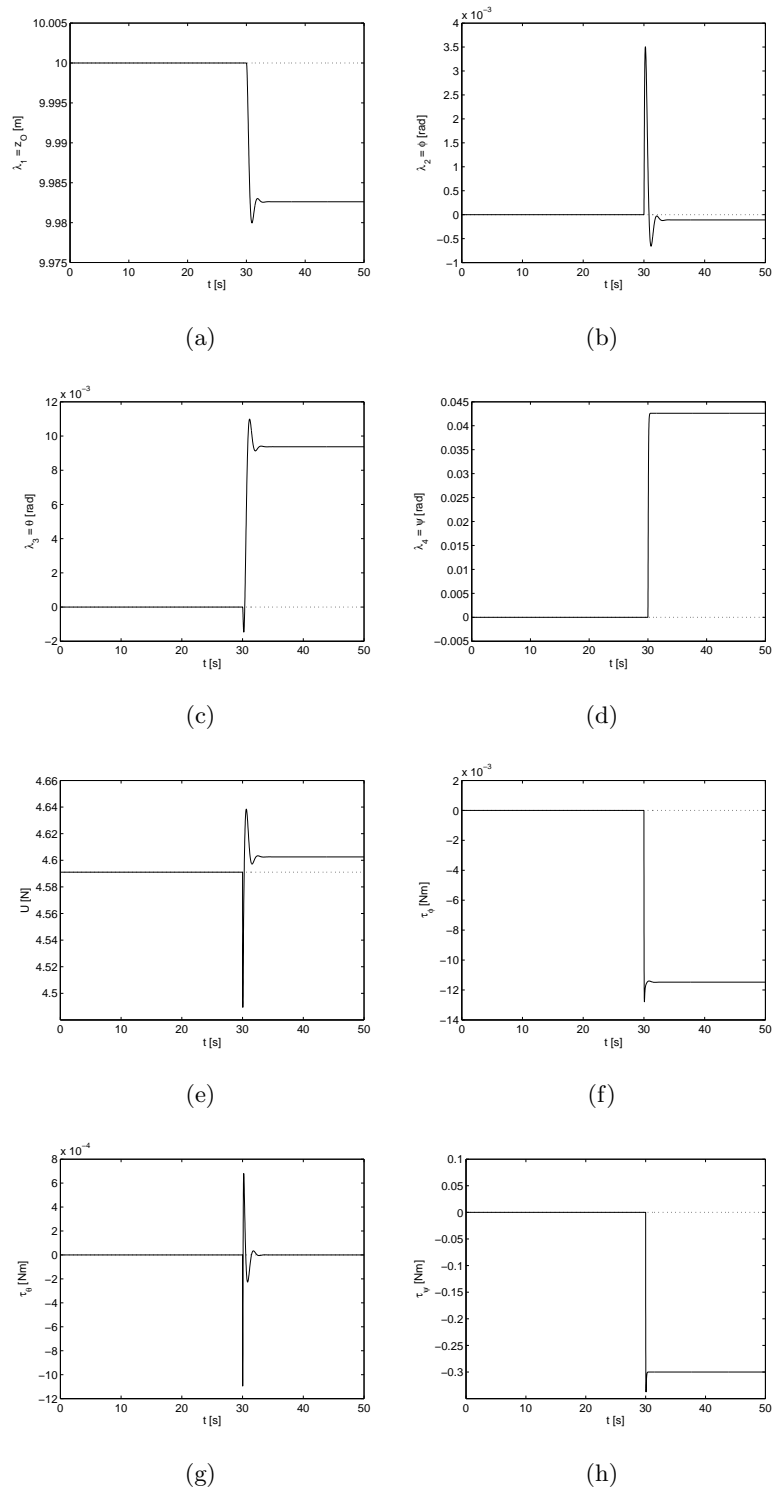


Figura 3.1: Simulación del sistema linealizado ante acción de control por realimentación de estados: (a) $z(t)$, (b) $\phi(t)$, (c) $\theta(t)$, (d) $\psi(t)$, (e) $U(t)$, (f) $\tau_\phi(t)$, (g) $\tau_\theta(t)$ y (h) $\tau_\psi(t)$

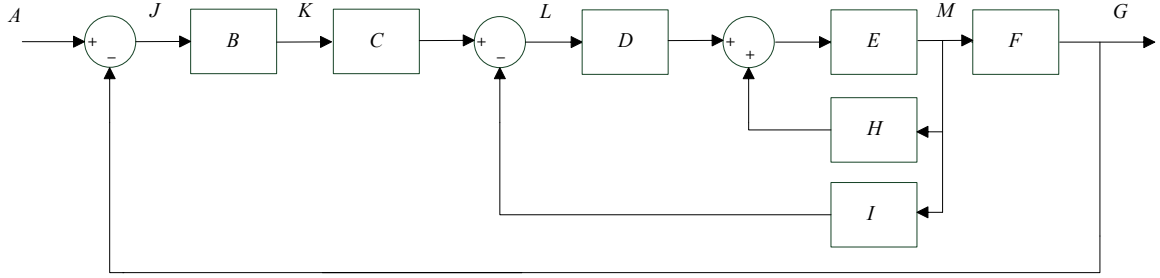


Figura 3.2: Sistema de seguimiento con integrador

Para ello se constituye el diagrama de bloques de la Fig. 3.2, en el cual se incluye un integrador (con respectiva ganancia k_I) para corregir el error de estado estacionario generado por la acción de perturbaciones.

En este caso, se estudia la dinámica del error a partir de una nueva variable $\dot{\xi} = \mathbf{E}(t)$, de manera tal que anular el error en el estado estacionario implica alcanzar un valor constante para ξ . Por tanto, se observa del diagrama que:

$$\Delta\tau(t) = -\mathbf{K}\Delta y + k_I\xi \quad (3.7)$$

$$\dot{\xi} = \Delta\lambda_d - \mathbf{C}\Delta y, \quad (3.8)$$

representando la dinámica para un vector de estado ampliado, definido como:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Delta y \\ \xi \end{bmatrix}$$

Así, combinando (3.1) con (3.8) se obtiene:

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{\Gamma}(t) + \hat{\mathbf{B}}\Delta\tau(t) + \hat{\mathbf{T}}\Delta\lambda_d(t) \quad (3.9)$$

como ecuación de estado para la dinámica del sistema ampliado, siendo:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, en el estado estacionario es posible escribir:

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}(\infty) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{\Gamma}(\infty) + \hat{\mathbf{B}}\Delta\tau(\infty) + \hat{\mathbf{T}}\Delta\lambda_d(t), \quad (3.10)$$

asumiendo una referencia de valor constante, tal que $\Delta\lambda_d(\infty) = \Delta\lambda_d(t)$. Por tanto, restando (3.10) y (3.9) resulta:

$$[\dot{\mathbf{\Gamma}}(t) - \dot{\mathbf{\Gamma}}(\infty)] = \hat{\mathbf{A}}[\mathbf{\Gamma}(t) - \mathbf{\Gamma}(\infty)] + \hat{\mathbf{B}}[\Delta\tau(t) - \Delta\tau(\infty)] \quad (3.11)$$

Así, definiendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}(t) - \mathbf{\Gamma}(\infty) &= \mathbf{\Gamma}_e(t) \\ \Delta\tau(t) - \Delta\tau(\infty) &= \Delta\tau_e(t), \end{aligned}$$

se obtiene la siguiente expresión alternativa para (3.11):

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}_e(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{\Gamma}_e(t) + \hat{\mathbf{B}}\Delta\tau_e(t) \quad (3.12)$$

donde

$$\Delta\tau_e(t) = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{\Gamma}_e(t) \quad (3.13)$$

y

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad -k_I]. \quad (3.14)$$

De esta manera, reemplazando (3.13) en (3.12) es posible constituir la siguiente expresión para la dinámica de error en el estado ampliado:

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}_e(t) = (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})\mathbf{\Gamma}_e(t). \quad (3.15)$$

Los planteamientos de regulación para el vector de estado formulados sobre el sistema (3.1), pueden ser extendidos a (3.15) en términos de la matriz $\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}$.

Por tanto, para calcular la matriz $\hat{\mathbf{K}}$:

- 1) Se verifica la condición de controlabilidad completa del estado ampliado, a partir de de la matriz de controlabilidad:

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} & \dots & \hat{\mathbf{A}}^{n-1}\hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

cuyo rango es 12, demostrando la controlabilidad completa del estado, y por tanto, la existencia de una matriz $\hat{\mathbf{K}}$ para constituir la ley de control correspondiente.

- 2) Recordando que los polos del sistema controlado corresponden con los valores de s que resuelven:

$$\det |s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}| = 0, \quad (3.17)$$

se observa que las raíces del polinomio característico deseado dadas en (2.25) representan el par dominante para una dinámica de 12° orden.

Por tanto, se definen 10 polos adicionales como remanentes en la dinámica deseada tras cumplir con la condición de que su parte real exceda en un factor de 10 la magnitud del par conjugado dominante.

Teniendo en cuenta las restricciones de la función *place(.)* de MATLAB (empleada para realizar el cálculo de $\hat{\mathbf{K}}$) en cuanto a la multiplicidad de las raíces del polinomio característico deseado ampliado, estas se seleccionan como sigue:

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} -2 \pm 3.312j & -20 & -20 & -20 & -20 & -40 & -40 & -40 & -40 & -60 & -60 \end{bmatrix}$$

- 3) Las dimensiones del problema implican la necesidad de realizar cálculos computacionales para determinar la matriz de realimentación de estados ampliada $\hat{\mathbf{K}}$.

Para ello se ejecuta la siguiente instrucción en la ventana de comandos de MATLAB:

```
>>  $\hat{K} = \text{place}(\hat{A}, \hat{B}, \hat{P})$ 
```

permitiendo obtener el siguiente resultado:

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 2033.42 & 55.73 & -77.50 & -1.29 & 32.25 & 0.53 & -184.28 & -3.07 & -22120.33 & 1033.43 & -430.02 & 2457.13 \\ -0.69 & -0.01 & 18.94 & 0.54 & -1.32 & -0.02 & -6.14 & -0.10 & 9.29 & -200.75 & 17.65 & 81.93 \\ 1.05 & 0.018 & 0.96 & 0.01 & 5.32 & 0.31 & -0.25 & -0.00424 & -13.99 & -12.80 & -19.25 & 3.39 \\ -2.78 & -0.04 & -10.46 & -0.17 & -10.58 & -0.17 & 11.41 & 0.60 & 37.09 & 139.53 & 141.15 & -58.34 \end{bmatrix}$$

La Fig. 3.3 ilustra los resultados de simulación para el sistema de seguimiento, a partir de los cuales se verifica la capacidad del sistema controlado para recuperar la condición de equilibrio a pesar de la acción de perturbaciones.

Dicha convergencia del vector de estado se realiza a expensas de un esfuerzo de control con magnitudes que no exceden características de implementabilidad práctica, lo cual sugiere viabilidad ante una potencial verificación experimental para la técnica propuesta.

Otras variantes para el cálculo del vector $\hat{\mathbf{K}}$ incluyen optimización de características dinámicas del sistema, a través de técnicas como el regulador lineal cuadrático (LQR) o el observador-controlador de Kalman (LQG) [11].

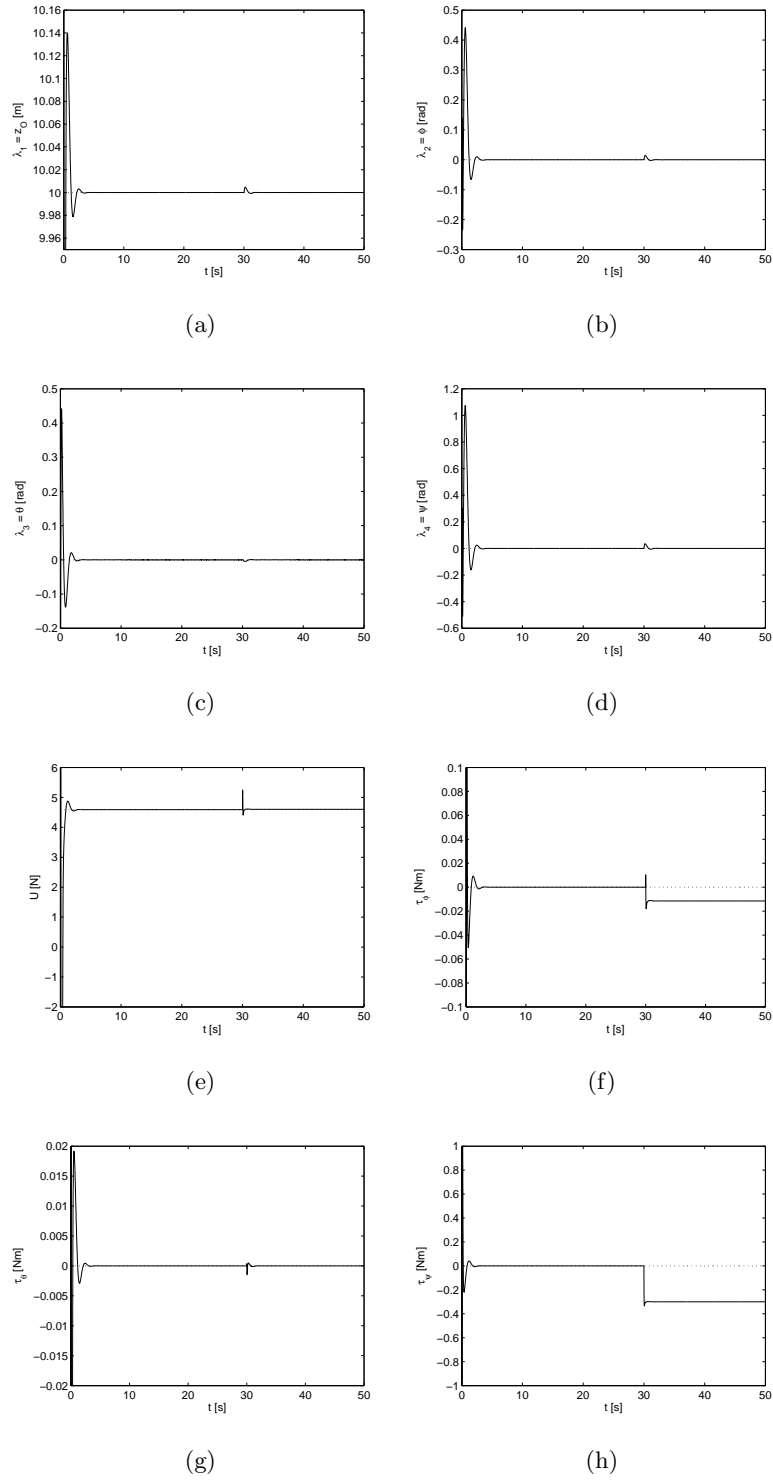


Figura 3.3: Simulación del sistema linealizado ante la acción de un sistema de seguimiento en el espacio de estados: (a) $z(t)$, (b) $\phi(t)$, (c) $\theta(t)$, (d) $\psi(t)$, (e) $U(t)$, (f) $\tau_\phi(t)$, (g) $\tau_\theta(t)$ y (h) $\tau_\psi(t)$

Capítulo 4

Conclusiones

A partir de los desarrollos presentados y los resultados obtenidos en el presente trabajo de grado, es posible enunciar la siguiente conclusión general:

- Se diseñó y simuló un control en el espacio de estados para mantener el equilibrio de un vehículo aéreo no tripulado de tipo *dron* cuadrotor. Fue posible verificar la manipulación del comportamiento dinámico del *dron* empleando herramientas de simulación numérica, permitiendo regular ante la acción de perturbaciones el estado del sistema hacia la condición nominal de equilibrio a través de estrategias de control clásico SISO y multivariado en el espacio de estados.

De manera más puntual:

- Se determinó un modelo matemático adecuado para describir el comportamiento dinámico de un vehículo aéreo no tripulado de tipo *dron* cuadrotor. Tal y como fue abordado en la Sección 1.2, empleando la formulación de Newton-Euler se realizó la deducción de las ecuaciones que describen la dinámica del *dron* en el espacio, constituyendo la superposición de los movimientos de traslación y rotación en el contexto de un sólido rígido referido a un marco de referencia fijo (inercial) y otro variante con ejes en el cuerpo del sólido. Dicho modelo, inicialmente no lineal y con dinámicas acopladas, fue linealizado alrededor de la condición de equilibrio dinámico según explicado en la Sección 2.1.

- Se formuló una estrategia de control en el espacio de estados que permitió mantener la posición de equilibrio en el *dron*. Inicialmente, se realizó asignación de parámetros y análisis de simulación para los modelos del sistema no lineal y linealizado en lazo abierto, ante condiciones nominales de equilibrio alteradas por perturbaciones de fuerza en una dirección, situación presentada y desarrollada en las Secciones 1.4 y 2.1. Posteriormente, se efectuó el cierre de lazo y el análisis de una acción de control proporcional sobre el sistema linealizado, generando un comportamiento fuertemente oscilatorio alrededor de la condición de equilibrio, según mostrado en la Sección 2.2. Este análisis fue complementado por el diseño e implementación de una estrategia de control PID sobre la matriz de transferencia del sistema, siendo necesaria una acción de control SISO PID para cada relación entrada/salida, con desarrollos ilustrados en la Sección 2.3, permitiendo obtener una rápida convergencia a valores deseados en las variables del sistema. Finalmente, se realizó implementación de estrategias de control multivariado (MIMO) en el espacio de estados a través de realimentación de estados simple (ver Sección 3.1.1) y en la forma de servosistema (con integrador, ver Sección 3.1.2), permitiendo obtener los resultados esperados de regulación del estado hacia la condición de equilibrio. La implementación del servosistema fue necesaria debido al error de estado estacionario provocado ante perturbaciones por parte de la realimentación de estado simple.
- Se analizó el comportamiento del sistema controlado empleando herramientas de simulación. Todas las estrategias de control implementadas fueron verificadas a través de un ambiente virtual correspondiente con una interfaz de animación para emular el comportamiento del sistema real (ver Anexo 4.2), con algoritmos de base desarrollados empleando el paquete de herramientas para integración numérica de ecuaciones diferenciales ODE de MATLAB. En particular, fue empleada la función *ode45(.)* según explicado en el Anexo 4.2.

4.1 Recomendaciones

Al momento de realizar las simulaciones del sistema no lineal, con dinámicas acopladas, es importante prestar atención a las tolerancias configuradas en el integrador numérico, pues puede ocurrir que la solución de las ecuaciones del sistema presente singularidades y por

tanto, no sea posible resolver el modelo ante pequeñas perturbaciones.

Ante esta situación se recomienda emplear a cambio de *ode45(.)* otro tipo de funciones más apropiadas para resolver ecuaciones rígidas (stiff), como es el caso de la función *ode23tb(.)* también incluida en el paquete de herramientas ODE de MATLAB.

4.2 Trabajo futuro

Actividades complementarias a los desarrollos presentados, incluyen el análisis de la influencia de dinámicas acopladas en el desempeño del control PID, siendo importante estudiar alternativas para separar la incidencia de señales en los modelos a través de herramientas de diagonalización típicas del control multivariado.

También podrían verificarse resultados para controladores del tipo LQR, LQG y H_∞ .

Finalmente, se propone el estudio del control de seguimiento de trayectorias y la potencial verificación de resultados de simulación en un prototipo de sistema real.

Referencias Bibliográficas

- [1] CHAPRA, S. C., AND CANALE, R. P. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Mc-Graw Hill, 2007.
- [2] D-CROZ BARÓN, D. F., AND VILLAMIZAR DELGADO, S. I. Diseño y construcción de un sistema de posición de cola de un helicóptero de aeromodelismo. Trabajo de grado (ingeniero electrónico), Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2009.
- [3] GROSSMAN, S. I. *Algebra Lineal con aplicaciones*. McGraw-Hill, 1993.
- [4] GUERRERO OCHOA, R. C., AND CORONEL ARÍZAGA, F. X. Sistema de navegación de un cuadricóptero guiado por el movimiento de las manos para operaciones de búsqueda y rescate. Trabajo de grado (ingeniero electrónico), Universidad Politécnica Salesiana, Ecuador, 2013.
- [5] GUPTE, S., MOHANDAS, P., AND CONRAD, J. M. A survey of quadrotor unmanned aerial vehicles. In *Southeastcon, 2012 Proceedings of IEEE* (2012), pp. 1–6.
- [6] HAN, J., H. WANG, C., AND X. YI, G. Cooperative control of UAV based on multi-agent system. In *2013 IEEE 8th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA)* (2013), pp. 96–101.
- [7] JARAMILLO GÓMEZ, F., AND GÓMEZ YEPES, Á. Sistema de control para la estabilidad y orientación de un helicóptero quadrotor. Trabajo de grado (ingeniero mecatrónico), Escuela de Ingeniería de Antioquia, Medellín, 2013.
- [8] JAUREGUI URIBE, A. L., AND VIANCHADA ESTEVEZ, C. A. Diseño de un sistema de control de cabeceo y alabeo de un vehículo aéreo no tripulado UAV. Trabajo de grado (ingeniero electrónico), Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2010.

- [9] LONDOÑO, Ó. M., AND VÉLEZ, C. M. Identificación del modelo de un mini helicóptero robot usando algoritmos genéticos. In *VIII Congreso de la Asociación Colombiana de Automática (ACA)* (2009).
- [10] LUUKKONEN, T. Modelling and control of quadcopter. Independent research project in applied mathematics, Aalto University, Finland, 2011.
- [11] OGATA, K. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall, 2003.
- [12] OMURLU, V. E., SAGIRLI, A., AND HASKOY, E. Nonlinear state-space representations of a quadrotor through bond-graph technique. In *2012 24th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)* (2012), pp. 620–627.
- [13] PINZÓN GÓMEZ, S. A., AND TORRES JERÉZ, R. Implementación del sistema de control de la cola de un helicóptero RC. Trabajo de grado (ingeniero electrónico), Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2010.
- [14] RAUF, A., ZAFAR, M. A., ASHRAF, Z., AND AKHTAR, H. Aerodynamic modeling and state-space model extraction of a UAV using DATCOM and simulink. In *Computer Research and Development (ICCRD), 2011 3rd International Conference on* (2011), vol. 4, pp. 88–92.
- [15] RAYMER, D. P. *Enhancing aircraft conceptual design using multidisciplinary optimization*. PhD thesis, Royal Institute of Technology, Sweden, 2002.
- [16] ROMERO PAREDES, L. E. Diseño y construcción de un módulo de control PID para la estabilización de un cuadricóptero. Trabajo de grado (ingeniero en electrónica y control), Escuela Politécnica Nacional, Ecuador, 2014.
- [17] SCHREIER, M. Modeling and adaptive control of a quadrotor. In *2012 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation* (2012), pp. 383–390.
- [18] SEARS, F. W., FORD, A. L., AND FREEDMAN, R. A. *Física universitaria: con física moderna*, vol. 2. Pearson Educación, 2005.
- [19] SPONG, M. W., AND VIDYASAGAR, M. *Robot dynamics and control*. John Wiley & Sons, 2008.

- [20] TAYEBI, A., AND MCGILVRAY, S. Attitude stabilization of a vtol quadrotor aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 14, 3 (2006), 562–571.
- [21] VERA ROZO, E. J. Validación experimental del modelo de dos ejes de un avión a escala. Trabajo de grado (ingeniero electrónico), Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2012.
- [22] VIANNA RAFFO, G. Modelado y control de un helicóptero quadrotor. Tesis de maestría (magister en automática, robótica y telemática), Universidad de Sevilla, España, 2007.
- [23] YAO, J., QI, Z., LI, F., AND GUO, T. Study on UAV flight based identification technology. In *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference* (2010), pp. 1375–1380.
- [24] ZHANG, K. K., YE, D., AND ZHAO, X. G. Fault tolerant tracking control for quadrotor helicopter via robust adaptive technique. In *Control Conference (CCC), 2014 33rd Chinese* (2014), pp. 3233–3237.

Bibliografía

Chapra, S. C., and Canale, R. P. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Mc-Graw Hill, 2007.

D-Croz Barón, D. F., and Villamizar Delgado, S. I. *Diseño y construcción de un sistema de posición de cola de un helicóptero de aeromodelismo*. Trabajo de grado (ingeniero electrónico), Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2009.

Grossman, S. I. *Algebra Lineal con aplicaciones*. McGraw-Hill, 1993.

Guerrero Ochoa, R. C., and Coronel Arízaga, F. X. *Sistema de navegación de un cuadricóptero guiado por el movimiento de las manos para operaciones de búsqueda y rescate*. Trabajo de grado (ingeniero electrónico), Universidad Politécnica Salesiana, Ecuador, 2013.

Gupte, S., Mohandas, P., and Conrad, J. M. A survey of quadrotor unmanned aerial vehicles. In *Southeastcon, 2012 Proceedings of IEEE (2012)*, pp. 1–6.

Han, J., h. Wang, C., and x. Yi, G. Cooperative control of UAV based on multi agent system. In *2013 IEEE 8th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA) (2013)*, pp. 96–101.

Jaramillo Gómez, F., and Gómez Yepes, ´ A. *Sistema de control para la estabilidad y orientación de un helicóptero quadrotor*. Trabajo de grado (ingeniero mecatrónico), Escuela de Ingeniería de Antioquia, Medellín, 2013.

Jauregui Uribe, A. L., and Vianchada Estevez, C. A. Diseño de un sistema de control de cabeceo y alabeo de un vehículo aéreo no tripulado UAV. Trabajo de grado (ingeniero electrónico), Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2010.

Londoño, Ó. M., and Vélez, C. M. Identificación del modelo de un mini helicóptero robot usando algoritmos genéticos. In VIII Congreso de la Asociación Colombiana de Automática (ACA) (2009).

Luukkonen, T. Modelling and control of quadcopter. Independent research project in applied mathematics, Aalto University, Finland, 2011.

Ogata, K. Ingeniería de Control Moderna. Prentice Hall, 2003.

Omurlu, V. E., Sagirli, A., and Haskoy, E. Nonlinear state-space representations of a quadrotor through bond-graph technique. In 2012 24th Chinese Control and Decision Conference (CCDC) (2012), pp. 620–627.

Pinzón Gómez, S. A., and Torres Jeréz, R. Implementación del sistema de control de la cola de un helicóptero RC. Trabajo de grado (ingeniero electrónico), Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2010.

Rauf, A., Zafar, M. A., Ashraf, Z., and Akhtar, H. Aerodynamic modeling and state-space model extraction of a UAV using DATCOM and simulink. In Computer Research and Development (ICCRD), 2011 3rd International Conference on (2011), vol. 4, pp. 88–92.

Raymer, D. P. Enhancing aircraft conceptual design using multidisciplinary optimization. PhD thesis, Royal Institute of Technology, Sweden, 2002.

Romero Paredes, L. E. Diseño y construcción de un módulo de control PID para la estabilización de un cuadricóptero. Trabajo de grado (ingeniero en electrónica y control), Escuela Politécnica Nacional, Ecuador, 2014.

Schreier, M. Modeling and adaptive control of a quadrotor. In 2012 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (2012), pp. 383–390.

Sears, F. W., Ford, A. L., and Freedman, R. A. Física universitaria: con física moderna, vol. 2. Pearson Educación, 2005.

Spong, M. W., and Vidyasagar, M. Robot dynamics and control. John Wiley & Sons, 2008.

Tayebi, A., and McGilvray, S. Attitude stabilization of a vtol quadrotor aircraft. IEEE Transactions on Control Systems Technology 14, 3 (2006), 562–571.

Vera Rozo, E. J. Validación experimental del modelo de dos ejes de un avión a escala. Trabajo de grado (ingeniero electrónico), Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2012.

Vianna Raffo, G. Modelado y control de un helicóptero quadrotor. Tesis de maestría (magister en automática, robótica y telemática), Universidad de Sevilla, España, 2007.

Yao, J., Qi, Z., Li, F., and Guo, T. Study on UAV light based identification technology. In Proceedings of the 29th Chinese Control Conference (2010), pp. 1375–1380.

Zhang, K. K., Ye, D., and Zhao, X. G. Fault tolerant tracking control for quad rotor helicopter via robust adaptive technique. In Control Conference (CCC), 2014 33rd Chinese (2014), pp. 3233–3237.

Fundamentos de sólidos rígidos

Un sólido rígido, es un cuerpo formado por varias partículas puntuales que guardan distancias constantes entre sí [18].

Una operación fundamental para definir cantidades en el espacio de movimiento de un sólido rígido es el producto vectorial (también denominado producto cruz [3]), el cual produce un vector perpendicular (normal) al plano formado por otros dos vectores que se multiplican.

Sean dos vectores \vec{a} y \vec{b} definidos en \mathbb{R}^3 . El producto vectorial entre \vec{a} y \vec{b} (denotado $\vec{a} \times \vec{b}$) es otro vector (digamos $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$) cuyo cálculo puede ser efectuado a través de determinantes como sigue:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_j & a_k \\ b_j & b_k \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} k \quad (1)$$

De esta manera, siendo $\vec{a} = (1, -1, 2)$ y $\vec{b} = (3, -4, 5)$ se obtiene:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} k = 3i - j - k \quad (2)$$

La Fig. 1 ilustra esta operación gráficamente en el espacio tridimensional.

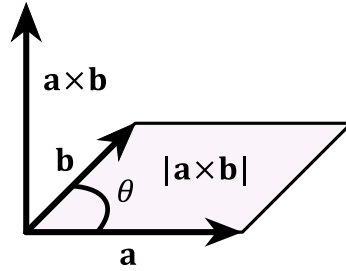


Figura 1: Ilustración gráfica para producto vectorial tomado de [18]

Condición de rigidez

Considere el sólido rígido presentado en la Fig. 2. Para cada pareja de puntos (P_i, P_j) pertenecientes al sólido, se cumple:

$$\frac{d}{dt}[|r_i - r_j|] = \frac{d}{dt}[|r_{ij}|] = 0, \quad (3)$$

lo cual significa que la distancia entre puntos de un sólido rígido se mantiene invariante. Esto último se conoce como la *condición de rigidez*.

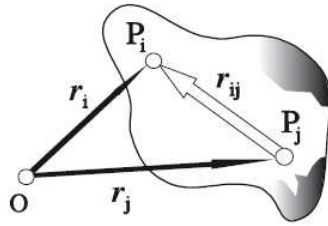


Figura 2: Sólido rígido tomado de [18]

Asimismo, a partir de (3) se obtiene:

$$\frac{d}{dt}[|r_i - r_j|] = |\dot{r}_i - \dot{r}_j| = 0, \quad (4)$$

y por tanto, sabiendo que \vec{r} es el vector velocidad \vec{v} para un punto del sólido visto desde el observador, es posible escribir:

$$|v_i| = |v_j|, \quad (5)$$

con lo cual la velocidad de traslación para cualquier punto del sólido será la misma, y así, una vez definido el movimiento de un punto cualquiera del cuerpo rígido que se traslada en el espacio, es posible definir la totalidad de su movimiento.

Movimiento de rotación

En la Fig. 3 se ilustra un punto que rota alrededor de un eje fijo, localizado en el cuerpo del sólido.

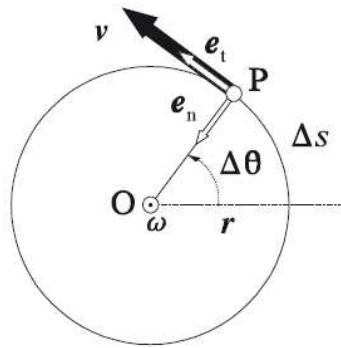


Figura 3: Rotación de un punto del sólido alrededor de un eje fijo tomado de [18]

A partir de ello, es posible definir la velocidad angular que experimenta el punto P alrededor del eje de rotación, en el modo siguiente:

$$\omega = \frac{d}{dt}\theta \quad (6)$$

También, puede escribirse del diagrama la velocidad tangencial v del punto mediante:

$$\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}, \quad (7)$$

siendo \vec{r} el vector que marca la distancia del punto P al eje de rotación O .

Por tanto, el vector de aceleración puede ser formulado como:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\vec{v} &= \frac{d}{dt}[\vec{r} \times \vec{\omega}] \\
 &= \left(\frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{\omega} \right) + \left(\vec{r} \times \frac{d}{dt}\vec{\omega} \right) \\
 \vec{a} &= \vec{r} \times \vec{\alpha},
 \end{aligned} \tag{8}$$

con \vec{a} y $\vec{\alpha}$ representando, respectivamente, los vectores de aceleración lineal y angular. Note que se asume $\frac{d}{dt}\vec{r} = 0$ debido a que el eje de rotación es fijo.

Conservación del momento angular

En un movimiento traslacional, el principio de conservación del momento lineal establece:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}m\vec{v} = 0, \tag{9}$$

a partir de lo cual el momento \vec{p} será constante en ausencia de fuerzas externas.

De manera similar, es posible definir el momento angular $\vec{\mathbf{L}}$ de una partícula de masa puntual que rota alrededor de un eje fijo, en el modo siguiente:

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{r} \times \vec{p}, \tag{10}$$

siendo \vec{r} el vector de distancia a la masa desde el centro de rotación.

Por tanto, el principio de conservación del momento angular puede establecerse como sigue:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\vec{\mathbf{L}} &= \frac{d}{dt}[\vec{r} \times \vec{p}] \\
 &= \frac{d}{dt}[\vec{r} \times m\vec{v}] \\
 &= m\frac{d}{dt}[\vec{r} \times \vec{v}] \\
 &= m\left([\vec{r} \times \frac{d}{dt}\vec{v}] + \left[\frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{v}\right]\right) \\
 &= m([\vec{r} \times \vec{a}] + [\vec{v} \times \vec{v}]) \\
 &= \vec{r} \times m\vec{a} \\
 &= \vec{r} \times \vec{F} \\
 &= \tau,
 \end{aligned}$$

siendo τ el torque neto aplicado.

Empleando (8) puede relacionarse este torque con la aceleración angular $\vec{\alpha}$, a partir de:

$$\begin{aligned}\tau &= \vec{r} \times m\vec{a} \\ &= \vec{r} \times m(\vec{r} \times \vec{\alpha}) \\ &= m(\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\alpha}))\end{aligned}$$

donde, si \vec{r} es perpendicular a $\vec{\alpha}$, entonces el producto vectorial se reduce al producto de las magnitudes:

$$\begin{aligned}\tau &= mr^2\alpha \\ &= I\alpha,\end{aligned}\tag{11}$$

siendo I el momento de inercia de las partes rotativas del cuerpo rígido.

La expresión (11) es la segunda ley de Newton de rotación, y podrá ser definida siempre que sea válido un I constante. Dicha situación no siempre es posible, principalmente si se asume que el eje de rotación puede variar en el tiempo. En tal caso, \vec{r} en la Fig. 3 no es constante y por tanto no es válida la solución propuesta para \vec{a} en (8), resultando en la siguiente definición alternativa para τ :

$$\begin{aligned}\tau &= \vec{r} \times m\vec{a} \\ &= \vec{r} \times m\left(\left(\frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{\omega}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d}{dt}\vec{\omega}\right)\right) \\ &= m\left(\left[\vec{r} \times \left(\frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{\omega}\right)\right] + [\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\alpha})]\right) \\ &= m\left(\left[\vec{r} \times \left(\frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{\omega}\right)\right]\right) + I\alpha.\end{aligned}$$

El término

$$m\left(\left[\vec{r} \times \left(\frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{\omega}\right)\right]\right),$$

representa los efectos (torques) debidos a las variaciones del eje de rotación, que evidentemente también representan variaciones del vector de momento angular \vec{L} . Dichos efectos

se denominan *fuerzas inerciales*, puesto que tienen sentido en un marco de referencia de un cuerpo en rotación. Los tipos más representativos de fuerza inercial son los efectos giroscópicos y la fuerza de Coriolis [18].

Función *ode45* de MATLAB

La función *ode45* está basada en un algoritmo de tipo Runge-Kutta, que se desarrolló a partir del método de Euler mejorado [1]. La función recibe tres parámetros esenciales: $f(t)$ dentro de un *script* en el que se define la ecuación diferencial acompañado por un símbolo @, el vector de límites de tiempo $[t_0 \ t_f]$ y el vector de condiciones iniciales y_0 . En otras palabras el prototipo básico para usar *ode45* es el siguiente:

$$[t, y] = \text{ode45}(@f(t), [t_0 \ t_f], y_0); \quad (12)$$

En este caso la solución numérica se almacenará en el vector y para cada uno de los instantes de tiempo presentes en el vector t .

La función *ode45*, resuelve ecuaciones del tipo $\dot{y} = f(t, y)$, por tanto si se desea resolver ecuaciones de orden superior estas deben escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

A manera de ejemplo, se ilustrará la forma de resolver la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (13)$$

donde $\mu > 0$ es un parámetro escalar.

Por tanto, definiendo

$$y_1 = x; \quad y_2 = \dot{x}$$

la expresión (13) puede ser reescrita como

$$\dot{y}_2 = \mu (1 - y_1^2) y_2 + y_1$$

es decir, transformando la ecuación diferencial original de segundo orden y una variable, en una ecuación diferencial equivalente de primer orden y dos variables. Así entonces, es posible construir el vector

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

cuya dinámica viene representada por

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} f_1(t, y) \\ f_2(t, y) \end{bmatrix}$$

siendo

$$f_1(t, y) = y_2; \quad f_2(t, y) = \mu (1 - y_1^2) y_2 + y_1$$

De esta manera, evaluar la expresión (12) permite obtener una matriz de salida y con filas representando los vectores solución para y_1 e y_2 como función de t .

En la Fig. 4 se ilustra el diagrama de flujo del algoritmo empleado para hallar la solución de una ecuación diferencial mediante integración numérica empleando la función *ode45* de MATLAB.

Inicialmente, se deben asignar los parámetros definidos en la ecuación (12).

Posteriormente, un bucle interno hace llamado iterativo a la función $f(t)$ evaluada para valores de tiempo entre t_0 y t_f a partir de las condiciones iniciales y_0 . Para cada ciclo la condición inicial se recalcula siendo la condición final del ciclo anterior. El tiempo se incrementa en un tamaño de paso δt de forma adaptativa, si no se especifica lo contrario. Tras alcanzarse el tiempo final t_f , el bucle interno termina y entrega como resultado el vector de puntos de la trayectoria solución $y(t)$ al igual que el vector de tiempos t .

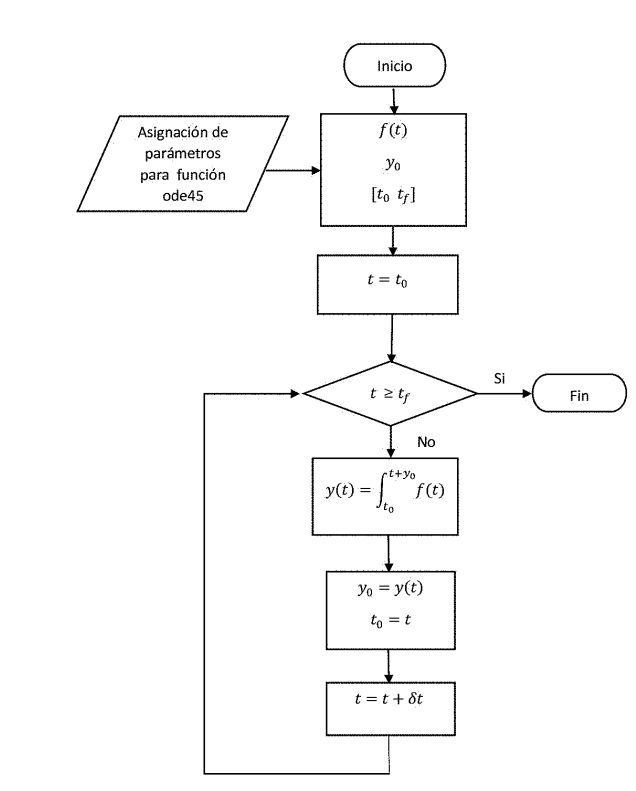


Figura 4: Diagrama de flujo para algoritmo de integración numérica de la función *ode45* de MATLAB

Interfaz de animación de la dinámica del sistema

En ausencia de un prototipo real para verificar el comportamiento dinámico del sistema controlado, se optó por construir una animación que permitiera recrear el movimiento del *dron* de una manera cercana al comportamiento físico real. A continuación se presentan las etapas importantes para este desarrollo.

Descripción general de requerimientos

Se requiere construir una interfaz de software que permita visualizar el comportamiento del dron en el espacio de movimiento, como aproximación a la operación real del sistema para diferentes condiciones de simulación (lazo abierto, lazo cerrado controlado PID y por realimentación de estados) ante la presencia de perturbaciones. La interfaz deberá permitir modificar parámetros del sistema y los parámetros de simulación, así como también entregar información de las trayectorias de variables con respecto al tiempo.

Nivel superior de detalle

Posterior a tener una descripción, en palabras, acerca de los requerimientos del sistema (interfaz) a desarrollar, el paso siguiente es crear un diagrama general de entradas y salidas a manera de nivel superior de detalle. Dicho diagrama se presenta en la Fig. 5.

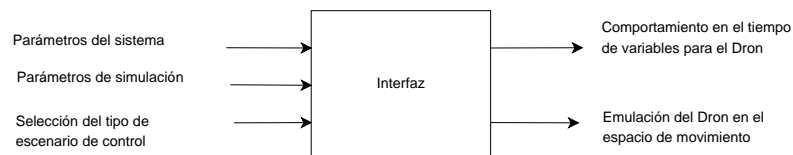


Figura 5: Representación de nivel superior de detalle para desarrollo de interfaz

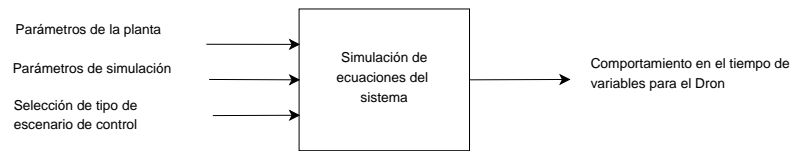


Figura 6: Representación de primer nivel de partición para subproceso de simulación

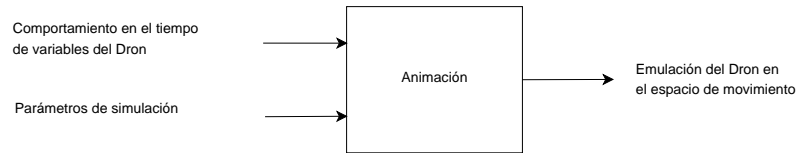


Figura 7: Representación de primer nivel de partición para subproceso de animación

Partición de primer nivel

Una primera partición se logra incorporando el bloque que realiza la solución numérica de las ecuaciones del sistema, a partir de los parámetros de entrada en el modelo y los valores que configuran la simulación, según se muestra en la Fig. 6.

Asimismo, los resultados de este simulador serán la entrada de un nuevo bloque encargado de construir una animación para emular el comportamiento del *dron* en el espacio de movimiento. Una ilustración para este segundo bloque se presenta en la Fig. 7 donde se observa también que será necesario configurar algunas opciones de simulación incorporadas como señal de entrada.

Finalmente, este primer nivel de partición se completa uniendo los dos subprocesos tal y como se ilustra en la Fig. 8.

Partición de segundo nivel

A su vez, es posible abrir el bloque correspondiente a la simulación de las ecuaciones del sistema (según se observa en la Fig. 9) para permitir incorporar la selección del escenario de control que define una configuración importante como lo es la forzante de entrada $\Delta\tau(t)$ en el modelo. De manera similar, el bloque que realiza la solución en el tiempo para las

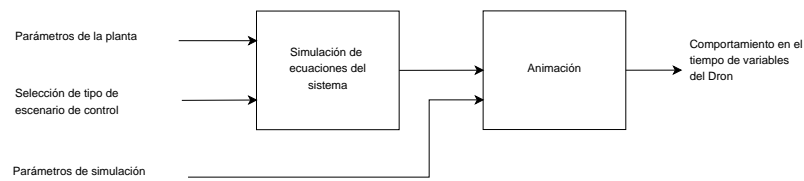


Figura 8: Representación de primer nivel de partición para desarrollo de interfaz

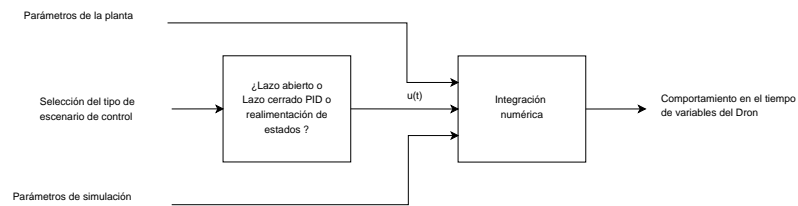


Figura 9: Representación de segundo nivel de partición para subproceso de simulación

ecuaciones del sistema es un integrador numérico.

Por tanto, en la Fig. 10 se muestra el diagrama de bloques resultante para este segundo y definitivo nivel de detalle.

Selección de herramienta para implementación

A partir del diagrama obtenido en la Fig. 10, es claro que el corazón de la interfaz a ser diseñada es el integrador numérico que resuelve las ecuaciones del sistema. Como ya ilustrado en el Anexo 4.2, este integrador numérico ha sido codificado empleando la función *ode45* de MATLAB. Por tanto, con el objetivo de facilitar la utilización de los desarrollos numéricos a disposición, se presenta a MATLAB como la primera opción para desarrollar la herramienta de software requerida.

Ahora bien, el segundo elemento importante de la interfaz es la animación que permite emular el comportamiento del *dron* en el espacio de movimiento. Por tanto, aunque no es restricción que ambas componentes de la interfaz (simulador y bloque de animación) sean desarrollados en el mismo lenguaje de programación, sí se considera conveniente esta opción por motivos ligados principalmente a la reducción en tiempos de desarrollo y a una mayor

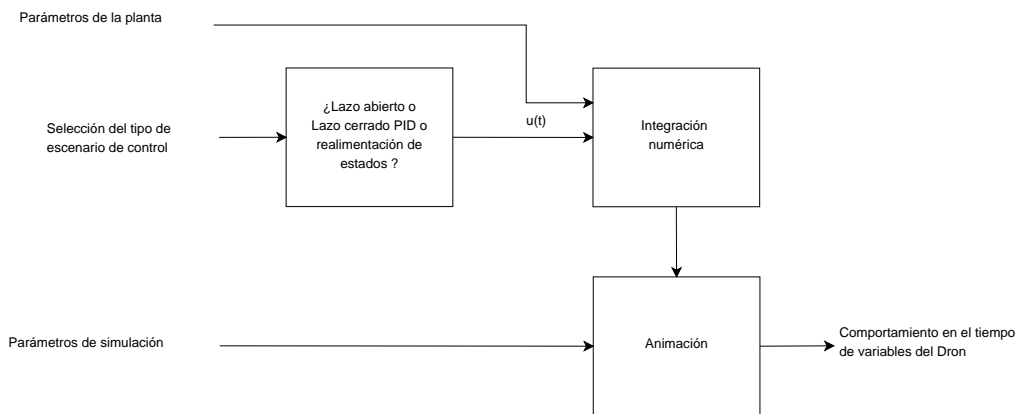


Figura 10: Diagrama de interconexión de subsistemas que conforman la interfaz de animación de la planta

compatibilidad entre componentes.

Adicional a esto, se recuerda que MATLAB posee además de la consola de comandos y el entorno de programación gráfico SIMULINK, un entorno para el desarrollo de interfaces de usuario denominado GUIDE (Graphical User Interface Development Environment).

Tomando en consideración todo lo anterior, se selecciona MATLAB *vR2014a* para construir la interfaz de usuario que satisface los requerimientos de diseño ilustrados en el diagrama de nivel de partición presentado en la Fig. 10.

Descripción de interfaz diseñada

Procediendo con el diseño, se realiza codificación en MATLAB para el diagrama de bloques de la Fig. 10, asumiendo las siguientes variables de entrada:

- Parámetros de la planta: $[g, m, l, k_\tau, b, J_G, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, A_z]$;
- Selección del tipo de escenario de control: [lazo abierto, lazo cerrado, PID, regulado espacio de estados, seguimiento espacio de estados];
- Parámetros de simulación: [tiempo de simulación, tiempo de perturbación, amplitud de perturbación],

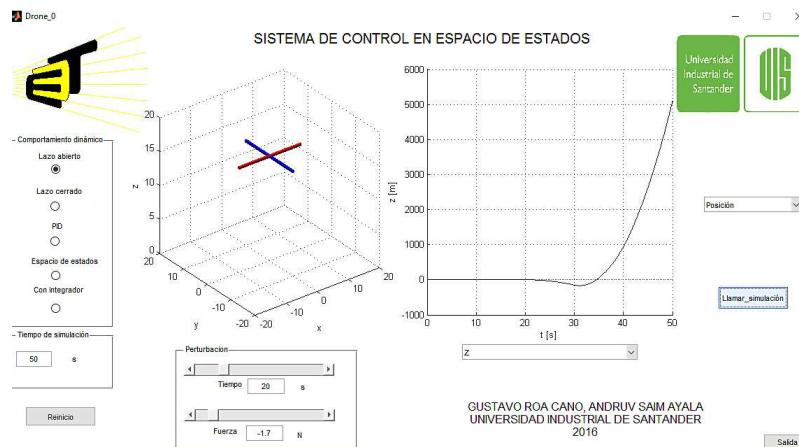


Figura 11: Presentación final para interfaz desarrollada

y de salida:

- Comportamiento en el tiempo de variables para sistema *drone*: [posición en eje z ; ángulos de balanceo ϕ , cabeceo θ y guiñada ψ ; vector de velocidades de traslación \mathbf{v} ; vector de velocidades angulares $\boldsymbol{\eta}$; vector de forzantes de control $\Delta\boldsymbol{\tau}$].

Asimismo, se requieren los comandos de control de interfaz siguientes:

- Reset: para reiniciar las variables del programa;
- Tipo de visualización: para seleccionar el gráfico de salida a visualizar;
- Simular: para llamar el inicio de una simulación;
- Salida: para terminar el programa.

Todo lo anterior fue adecuado como se presenta en la Fig. 11, ilustrando la presentación final de la interfaz desarrollada.