SOMBREADOS EN SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS E HIPERESPACIOS DE CONTINUOS

IOHAN DANIEL ESTUPIÑÁN VALBUENA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

SOMBREADOS EN SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS E HIPERESPACIOS DE CONTINUOS

IOHAN DANIEL ESTUPIÑÁN VALBUENA

Trabajo de Grado para optar al título de
Magíster en Matemáticas

Director
Javier Enrique Camargo García
Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

DEDICATORIA

A mis padres y a Natali, quienes me brindaron su apoyo.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

TÍTULO: SOMBREADOS EN SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS E HIPERESPACIOS DE CONTINUOS *

AUTOR: IOHAN DANIEL ESTUPIÑÁN VALBUENA **

PALABRAS CLAVE: SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS, SOMBREADO, HIPERESPACIOS, ÓRBITAS.

DESCRIPCIÓN:

Podemos afirmar que el objetivo del estudio de un sistema dinámico discreto es comprender o describir, de alguna manera, el comportamiento de todas las órbitas del sistema. De particular relevancia en este campo es la noción de sombreado. En este documento, además de revisar sistemas dinámicos específicos como (S^1, f), donde $f(z) = z^2$, y $([0,1], T)$, donde T es la función tienda, se estudiaron algunos teoremas útiles para determinar cuándo un sistema dinámico discreto presenta sombreado y cómo se preserva esta propiedad entre un sistema dinámico discreto y su sistema dinámico inducido. Para ello, nos basamos en un trabajo de Leobardo Fernández y Chris Good.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Ph.D. en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: EN MAYUSCULA *

AUTHOR: IOHAN DANIEL ESTUPIÑÁN VALBUENA **

KEYWORDS: DISCRETE DYNAMICAL SYSTEM, SHADOWING, HYPERSPACES, ORBITS.

DESCRIPTION:

We can state that the goal of studying a discrete dynamical system is to understand or describe, in some way, the behavior of all the orbits within the system. Of particular relevance in this field is the notion of shadowing. In this document, in addition to reviewing specific dynamical systems such as $((S^1, f))$, where $(f(z) = z^2)$, and $(([0,1], T))$, where (T) is the tent map, we examined some useful theorems for determining when a discrete dynamical system exhibits shadowing and how this property is preserved between a discrete dynamical system and its induced dynamical system. To this end, we relied on the work of Leobardo Fernández and Chris Good.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García, Ph.D. en Matemáticas.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años ha habido un interés creciente en el estudio de propiedades dinámicas en las funciones inducidas definidas entre hiperespacios de espacios métricos compactos, dotados con la topología de Vietoris (o métrica de Hausdorff). Esta investigación está enfocada a recopilar, estudiar, plantear y resolver preguntas relacionadas con las funciones inducidas y algunas clases de sombreado.
Un sistema dinámico discreto es un par (X, f) donde X es un espacio métrico y f una función continua de X en X. La órbita de un elemento $z \in X$, que denotaremos por $\mathcal{O}_f(z)$, surge del proceso iterativo de tomar primero a z luego aplicarle f a z, después aplicarle f a $f(z)$ y así sucesivamente; es decir

$$\mathcal{O}_f(z) = \{z, f(z), f(f(z)), \ldots\}.$$

Podemos decir que el objetivo del estudio un sistema dinámico es entender o describir, de alguna manera, el comportamiento de todas las órbitas del sistema. De particular relevancia en el estudio de un sistema dinámico es la noción de sombreado, noción en la que enfocamos esta investigación y definimos a continuación: Dado un $\delta > 0$, una δ-pseudo órbita es una sucesión de puntos $\{x_1, x_2, \ldots\}$ tal que la distancia entre $f(x_i)$ y x_{i+1} es menor que δ para cada $i \in \mathbb{N}$. Se dice que una δ-pseudo órbita está ε-sombreada, si existe una órbita cuyos puntos siguen la δ-pseudo órbita dentro de una distancia de ε; esto es, existe $z \in X$ tal que $d(f^n(z), x_n) < \varepsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$, donde f^n representa $f \circ \cdots \circ f$ n-veces. Así, diremos que el sistema dinámico discreto (X, f) tiene la propiedad de sombreado si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo órbita está ε-sombreada. El sombreado se relaciona con la estabilidad de las órbitas en un sistema dinámico bajo pequeñas perturbaciones, y ha sido estudiado por muchos autores en una variedad de contextos.

Por otra parte, dada una función continua en un espacio métrico compacto $f\colon X \to X$, 2^X representa la colección de todos los cerrados no vacíos de X que, dotado con la métrica de Hausdorff, lo llamamos hiperespacio de X y es a su vez, un espacio métrico compacto, y $2^f\colon 2^X \to 2^X$ se define como $2^f(A) = f(A)$. Es bien conocido que 2^f es una función continua. Luego, dado un sistema dinámico discreto (X, f), donde X es un espacio métrico compacto, podemos inducir un nuevo sistema $(2^X, 2^f)$, y estudiar propiedades dinámicas que puedan depender entre ellos. Además, podemos definir diferentes hiperespacios, que mostraremos más adelante en este escrito y considerar, con esta misma idea, nuevos sistemas dinámicos discretos, usando funciones inducidas.

En esta investigación, nos enfocamos en el sombreado y sus diferentes funciones inducidas.

En "Preservation of shadowing in discrete dynamical systems" [1], se hace un estudio de la preservación de distintas nociones de sombreado en el contexto de los hiperespacios 2^X y $F_n(X)$, donde X es compacto de Hausdorff (no necesariamente metrizable); además, los autores relacionan el sombreado con los límites inversos y productos, haciendo énfasis, ante la ausencia de la métrica, en uniformidades asociadas a cada espacio.

En esta investigación planteamos estudiar sombreado y h-sombreado en sistemas dinámicos discretos inducidos, siguiendo principalmente los artículos "Shadowing for induced maps of hyperspaces" de 2016, escrito por Leobardo Fernandez y Chris Good [2], y "Preservation of shadowing in discrete dynamical systems" de 2020, de autoría de Chris Good, Joel Mitchell y Joe Thomas. Adicionalmente, revisaremos

[1] MITCHELL J. GOOD C. y THOMAS J. "Preservation of shadowing in discrete dynamical systems". En: *J. Math. Anal. Appl.* 485 (2020).

[2] L. FERNANDEZ y GOOD C. "Shadowing for induced maps of hyperspaces." En: *Fund. Math.* 235 (2016), págs. 277-286.

otros artículos que citamos en las referencias. Particularmente en “Dynamic properties for the induced maps in the symmetric products”, de 2012, los autores José L. Gómez-Rueda, Alejandro Illanes y Héctor Méndez [3] muestran el hecho que el sistema dinámico discreto (X, f) tenga sombreado, implica que el sistema dinámico discreto $(F_2(X), f_2)$ también tenga sombreado ($F_n(X)$ representa el subespacio de 2^X definido como la colección de cerrados no vacíos con a lo más n puntos y $f_n = 2^f|_{F_n(X)}$). Sin embargo, esto no es cierto para cualquier n pues para el caso donde f es dada por $f(x) = x^2$ y $X = S^1$, el sistema dinámico discreto (X, f) tiene sombreado, pero al considerar $n \geq 3$ el sistema dinámico discreto $(F_n(X), f_n)$ no tiene sombreado.

Este trabajo lo dividimos en 3 capítulos. Después de los conceptos básicos, ejemplos y algunos resultados de los sistemas dinámicos discretos dados en el Capítulo 2, en el Capítulo 3 estudiamos resultados acerca de las propiedades de sombreado y h-sombreado en sistemas dinámicos discretos inducidos. Finalmente, en el Capítulo 4 estudiamos estas mismas propiedades, de manera particular, sobre $(C_n(X), C_n(f))$ para todo $n \geq 1$.

---

[3] ILLANES A. GÓMEZ J. L. y MÉNDEZ H. “Dynamic properties for the induced maps in the symmetric products”. En: *Chaos Solitons Fractals* 45 (2012), págs. 1180-1187.

2. PRELIMINARES

Este capítulo lo dividimos en dos secciones: La Sección 2.1, donde introducimos los hiperespacios y las funciones inducidas y la Sección 2.2, donde introducimos los conceptos dinámicos necesarios para abordar diferentes clases de sombreado, objeto central de nuestra investigación. También mostramos ejemplos y resultados generales de los sistemas dinámicos discretos relacionados con las propiedades de sombreado.

2.1. HIPERESPACIOS DE CONTINUOS

Un *continuo* es un espacio métrico compacto y conexo diferente del vacío. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en un espacio métrico. En esta investigación todos los espacios serán espacios métricos compactos.
En esta sección definimos algunos hiperespacios y sus funciones inducidas que estudiaremos en el trabajo.

Definición 2.1.1 Sea X un espacio métrico compacto, definimos las siguientes familia de subconjuntos de X:

1. $2^X = \{A : A$ *es un subconjunto cerrado y no vacío de* $X\}$;
2. $C(X) = \{A \in 2^X : A$ *es conexo*$\}$;
3. $C_n(X) = \{A \in 2^X : A$ *tiene a lo más* n *componentes*$\},\ n \in \mathbb{N}$;
4. $F_n(X) = \{A \in 2^X : A$ *tiene a lo más* n *elementos*$\},\ n \in \mathbb{N}$; *y*
5. $F(X) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n(X)$.

Con el propósito de presentar una métrica apropiada para 2^X, donde X es un espacio métrico compacto, damos pie a la siguiente notación.

Notación 2.1.2 *Sea X un espacio métrico compacto con métrica d. Para cualesquiera $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, escribiremos:*

$$N_d(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x,a) < \varepsilon \textit{ para algún } a \in A\}.$$

Definición 2.1.3 Sea X un espacio métrico compacto con métrica d. Para cualesquiera $A, B \in 2^X$, definimos la *métrica de Hausdorff* por:

$$H_d(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N_d(\varepsilon, B) \text{ y } B \subseteq N_d(\varepsilon, A)\}.$$

La demostración de que la métrica de Hausdorff es en efecto una métrica, la podemos encontrar en [4]. De esta manera, 2^X dotado con la métrica de Hausdorff es un espacio métrico compacto (ver [4]). Además, como $C(X), C_n(X), F_n(X)$ y $F(X)$ son subconjuntos de 2^X, los dotaremos naturalmente con la topología de subespacio. A estos conjuntos es lo que llamaremos *hiperespacios de* X.
Por otra parte, podemos considerar la topología sobre los hiperespacios que se conoce como *Topología de Vietoris*, la cual definimos a continuación.

Definición 2.1.4 Sea X un espacio topológico. Para cualesquiera abiertos $U_1, \ldots, U_n$ de X, se define

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \textit{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \textit{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Se tiene que

$$B_V = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : U_1, \cdots, U_n \textit{ abiertos de } X\}$$

es base para una topología en 2^X, llamada topología de Vietoris y denotada por T_V.

---

[4] S. NADLER. “Continuum Theory: An Introduction”. En: *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math* 158 (1992).

Observemos que $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle = \langle U_1 \cup \cdots \cup U_n\rangle \cap \langle X, U_1\rangle \cap \cdots \cap \langle X, U_n\rangle$, para cualesquiera abiertos $U_1, \ldots, U_n$ de X. Así, la colección

$$\mathcal{S} = \{\langle V\rangle : V \text{ es abierto de } X\} \cup \{\langle X, U\rangle : U \text{ es abierto de } X\},$$

es una subbase de la Topología de Vietoris.
La siguiente proposición es muy conocida en la teoría de los hiperespacios y es de gran utilidad; pues, podemos usar convenientemente la métrica de Hausdorff o la topología de Vietoris, cuando lo requiramos (ver [5]).

Proposición 2.1.5 *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, la topología de Vietoris es equivalente a la topología generada por la métrica de Hausdorff.*

Finalizamos esta sección introduciendo las funciones inducidas.

Definición 2.1.6 Sean X y Y espacios métricos compactos y $f\colon X \to Y$ una función continua. Se tiene que f induce las siguientes funciones:

1. $2^f : 2^X \to 2^Y$ dada por $2^f(A) = f(A)$;
2. $C(f) : C(X) \to C(Y)$ dada por $C(f) = 2^f\mid_{C(X)}$;
3. $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ dada por $C_n(f) = 2^f\mid_{C_n(X)},\ n \in \mathbb{N}$;
4. $f_n : F_n(X) \to F_n(Y)$ dada por $f_n = 2^f\mid_{F_n(X)},\ n \in \mathbb{N}$;
5. $f^{<\omega} : F(X) \to F(Y)$ dada por $f^{<\omega} = 2^f\mid_{F(X)}$.

A continuación mostramos que la funciones definidas anteriormente son, en efecto, funciones continuas.

---

[5] A. ILLANES y NADLER S.JR. “Hyperspaces: Fundamentals and recent advances”. En: *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math* 216 (1999).

Proposición 2.1.7 *Sean X y Y espacios métricos compactos. Si $f\colon X \to Y$ es una función continua, entonces $2^f, C(f), C_n(f), f_n$ y $f^{<\omega}$ son funciones continuas.*

Demostración 2.1.8 *Como las funciones $C(f), C_n(f), f_n$ y $f^{<\omega}$ son restricciones de la función inducida 2^f, solo debemos mostrar la continuidad de 2^f. Ya que una subbase de X es $\mathcal{S} = \{\langle V\rangle : V$ es abierto de $Y\} \cup \{\langle Y, U\rangle : U$ es abierto de $Y\}$, para probar que 2^f es continua basta probar que dado un abierto V, los conjuntos $2^{f^{-1}}(\langle V\rangle)$ y $2^{f^{-1}}(\langle V, Y\rangle)$ son abiertos. Por la continuidad de f, sabemos que $f^{-1}(V)$ es abierto de X. Probaremos que*

$$2^{f^{-1}}(\langle V\rangle) = \langle f^{-1}(V)\rangle. \tag{1}$$

Tomemos $A \in \langle f^{-1}(V)\rangle$, es decir, $A \subseteq f^{-1}(V)$. Por definición de preimagen, $f(A) \subseteq V$. Así $2^f(A) \in \langle V\rangle$, lo que es equivalente a $A \in 2^{f^{-1}}(\langle V\rangle)$. Por lo que concluimos (1).
Ahora veamos que

$$2^{f^{-1}}(\langle V, Y\rangle) = \langle f^{-1}(V), X\rangle.$$

Consideremos $A \in 2^{f^{-1}}(\langle V, Y\rangle)$. Luego, $2^f(A) \cap V \neq \emptyset$, esto es, $f(A) \cap V \neq \emptyset$. De esta manera $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, es decir, $A \in \langle f^{-1}(V), X\rangle$ como queríamos.

2.2. SISTEMA DINÁMICO DISCRETO EN ESPACIOS COMPACTOS

Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. El par (X, f) es llamado *sistema dinámico discreto*. Empezaremos enunciando algunas definiciones que nos serán útiles más adelante. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $f^n = f \circ \cdots \circ f$, n-veces.

Definición 2.2.1 Sean X un espacio métrico compacto, $x \in X$ y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces, la *órbita de x bajo f*, que denotamos por $\mathcal{O}_f(x)$, es la sucesión:

$$\mathcal{O}_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}.$$

La noción de órbita es tal vez la más importante en la teoría de los sistemas dinámicos discretos. Podría decirse que un sistema dinámico discreto (X, f) está "resuelto" si podemos describir el comportamiento de todas sus órbitas. El siguiente ejemplo lo usaremos constantemente en el desarrollo del presente trabajo.

Ejemplo 2.2.2 *Considere la función $T : [0,1] \to [0,1]$ definida de la siguiente manera:*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \textit{si } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2(1-x), & \textit{si } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Esta función se conoce como la función tienda y será denotada en este escrito como la función T. Algunos ejemplos de órbitas las describimos en la Figura 1, son:

- $\mathcal{O}_T(\frac{1}{16}) = \{\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, ...\}$;
- $\mathcal{O}_T(\frac{1}{10}) = \{\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, ...\}$.

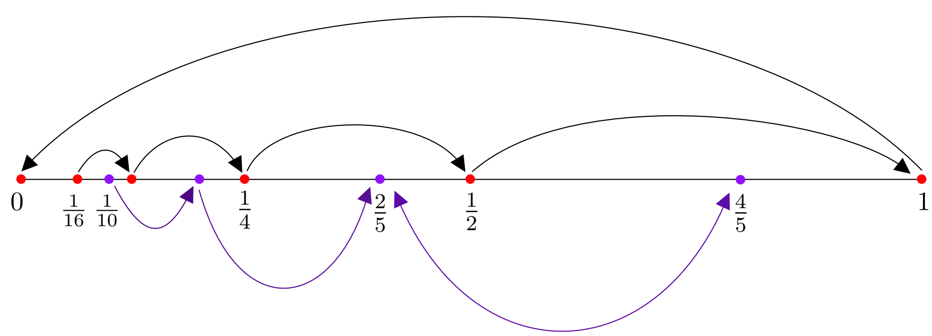

Figura 1. $\mathcal{O}_T(110)$ y $\mathcal{O}_T(116)$

Notación 2.2.3 *Sean a y b elementos de $[0, 1]$. Denotamos $\overline{ab} = \overline{ba} = [$mín$\{a, b\},$ máx$\{a, b\}]$. Esta notación la extenderemos cuando el espacio X es únicamente arcoconexo; esto es, $\overline{ab}$ será el único arco que une los puntos a y b en X.*

El siguiente lema es una propiedad del sistema dinámico discreto anterior que lo encontramos en [6].

Lema 2.2.4 *Dado $s \in [\sqrt{2}, 2]$, definimos $c = \frac{1}{2}$ y $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ así:*

$$f(x) = \begin{cases} sx, & \textit{si } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ s(1-x), & \textit{si } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Entonces:

(1) Si $z \in \overline{xy}$ y $c \notin \overline{xy}^{\circ}$, entonces $f_s(z) \in \overline{f_s(x) f_s(y)}$ y $|f_s(x) - f_s(y)| = s|x - y|$.

(2) Si $x \neq y$, entonces $c \in \overline{f_s^k(x) f_s^k(y)}^{\circ}$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Consideramos importante incluir un par de definiciones sobre la expansividad, ya que de estas se puede concluir algunas propiedades de sombreado, como es el caso de los teoremas 2.2.28 y 2.2.26.

Definición 2.2.5 Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Decimos que f es *positivamente expansiva*, si existe $b > 0$ (*constante expansiva*), tal que para cada $x, y \in X$ tenemos que:

$$\text{si } d(f^n(x), f^n(y)) < b, \text{ para cada } n \geq 0, \text{ entonces } x = y.$$

Definición 2.2.6 Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Decimos que una función continua $f\colon X \to X$ es *bola expansiva* si existen $\mu > 1$ y $v > 0$ tales que, para todo

---

6 KAN I. COVEN E.M. y YORKE J.A. “Pseudo-Orbit Shadowing in the Family of Tent Maps”. En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 308.1 (1988), 227–241.

$x \in X$ y cada $\varepsilon < v$, tenemos que:

$$B(f(x); \mu\varepsilon) \subseteq f(B(x; \varepsilon)).$$

Ejemplo 2.2.7 *La función tienda T no es positivamente expansiva, pero si es bola expansiva.*
Para verificar que no es positivamente expansiva notemos que dado cualquier $b > 0$, existen x y z en $[0, 1]$ tales que $|x - z| < b$ y $T(x) = T(z)$.
Ahora veamos que es bola expansiva. Tomemos $\mu = 2$ y $v = 1$. Probemos que

$$B(T(x); 2\varepsilon) \subseteq T(B(x; \varepsilon)) \quad \textit{para todo } x \in X \textit{ y } 0 < \varepsilon < v.$$

Sea $z \in B(T(x); 2\varepsilon)$; esto es; $d(z, T(x)) < 2\varepsilon$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Entonces $T(x) = 2x$. Note que $T\left(\frac{z}{2}\right) = z$ ya que $z \leq 1$ y por tanto, $\frac{z}{2} \leq \frac{1}{2}$. Nótese que si $d(\frac{z}{2}, x) \geq \varepsilon$, entonces $d(z, 2x) \geq 2\varepsilon$; lo que contradice que $d(z, T(x)) < 2\varepsilon$. De modo que, $d(\frac{z}{2}, x) < \varepsilon$. Por tanto, $\frac{z}{2} \in B(x; \varepsilon)$. Así, $z \in T(B(x; \varepsilon))$.
De la misma manera tenemos nuestra conclusión si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

La siguiente definición está directamente relacionada con las definiciones principales de este propuesta: el sombreado y el h-sombreado.

Definición 2.2.8 Sean (X, d) un espacio métrico y $\delta > 0$. Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X es una δ-*pseudo-órbita*, si para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta.$$

De manera similar, dado $\delta > 0,$ una δ-*pseudo-órbita finita* es una sucesión finita $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ tal que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$, para cada $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$.
Además, decimos que una órbita $\mathcal{O}_f(y) = \{f^n(y)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ε-*sombrea* a la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si $d(f^i(y), x_i) < \varepsilon$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

La siguiente proposición es consecuencia de la continuidad de la función del sistema dinámico. Esta proposición será útil para probar el sombrado en algunos sistemas dinámicos. La encontramos en [7]. Aquí ofrecemos una demostración.

Proposición 2.2.9 *Sean* (X, f) *un sistema dinámico discreto donde* X *es compacto,* $\varepsilon > 0$ *y* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces existe* $\delta > 0$ *tal que para toda* δ*-pseudo órbita* $\Gamma = \{x_0, x_1, \dots\}$ *se cumple que* $d(f^i(x_j), x_{j+i}) < \varepsilon$ *para todo* $i \in \{0, \dots, n\}$ *y* $j \in \mathbb{N}$*.*

Demostración 2.2.10 *Sea* $\varepsilon > 0$*. Por continuidad uniforme existe* $m_1 \in \mathbb{N}$ *tal que, si* $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{m_1}$*, entonces* $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$*. De la misma forma existe* $m_2 > m_1$ *tal que, si* $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{m_2}$*, entonces* $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2m_1}$*. Así, inductivamente obtenemos* $m_1 < m_2 < \cdots < m_n$ *tal que si* $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{m_j}$*, entonces* $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2m_{j-1}}$ *para cualquier* $j \in \{1, \dots, n\}$*.*

Sea $\delta = \frac{\varepsilon}{m_{n-1}}$*. Verifiquemos que tenemos la conclusión. Sean* $\Gamma = \{x_0, x_1, \dots\}$ *una* δ*-pseudo órbita,* $j \in \mathbb{N}$ *e* $i \in \{0, \dots, n\}$*.*

- $i = 1$.

$$d(f(x_j), x_{j+1}) < \delta = \frac{\varepsilon}{m_{n-1}} < \varepsilon.$$

- $i = 2$.

$$d(f^2(x_j), x_{j+2}) \leq d(f^2(x_j), f(x_{j+1})) + d(f(x_{j+1}), x_{j+2}). \tag{2}$$

  Como $d(f(x_j), x_{j+1}) < \frac{\varepsilon}{m_{n-1}}$, $d(f^2(x_j), f(x_{j+1})) < \frac{\varepsilon}{2m_{n-2}}$*. Así,*

$$d(f^2(x_j), f(x_{j+1})) + d(f(x_{j+1}), x_{j+2}) \leq \frac{\varepsilon}{2m_{n-2}} + \frac{\varepsilon}{m_{n-1}} < \frac{\varepsilon}{m_{n-2}} < \varepsilon. \tag{3}$$

---

[7] GOOD C. BARWELL A.D. y OPROCHA P. “Shadowing and expansivity in subspaces”. En: *Fund. Math.* 219 (2012), págs. 223-243.

Luego, por (2) y (3), tenemos que

$$d(f^2(x_j), x_{j+2}) \leq \varepsilon.$$

Realicemos un paso más.

- $i = 3$.

$$d(f^3(x_j), x_{j+3}) \leq d(f^3(x_j), f(x_{j-2})) + d(f(x_{j+2}), x_{j+3}). \quad (4)$$

Por (2) y (3), tenemos que $d(f^2(x_j), x_{j+2}) < \frac{\varepsilon}{m_{n-2}}$. *Así,* $d(f^3(x_j), f(x_{j+2})) < \frac{\varepsilon}{2m_{n-3}}$. *Además,* $d(f(x_{j+2}), x_{j+3}) < \frac{\varepsilon}{m_{n-1}}$. *Reemplazando en (4):*

$$d(f^3(x_j), x_{j+3}) \leq \frac{\varepsilon}{2m_{n-3}} + \frac{\varepsilon}{m_{n-1}} < \frac{\varepsilon}{m_{n-3}} < \varepsilon.$$

- *Supongamos inductivamente que para* $i = n + 1$ *tenemos que*

$$d(f^{n-1}(x_j), x_{j+n-1}) < \frac{\varepsilon}{m_1}. \quad (5)$$

Tomemos $i = n$.

$$d(f^n(x_j), x_{j+n}) \leq d(f^n(x_j), f(x_{j+n-1})) + d(f(x_{j+n-1}), x_{j+n}). \quad (6)$$

Aplicando (5), $d(f^n(x_j), f(x_{j+n-1})) < \frac{\varepsilon}{2}$ *y como* $d(f(x_{j+n-1}), x_{j+n}) < \delta$, *reemplazando en (6), concluimos que*

$$d(f^n(x_j), x_{j+n}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{m_{n-1}} < \varepsilon.$$

De lo anterior concluimos que $d(f^i(x_j), x_{j+i}) < \varepsilon$ *para todo* $i \in \{0, \ldots, n\}$ *y cada* $j \in \mathbb{N}$.

Definición 2.2.11 *Diremos que un sistema dinámico discreto* (X, f) *tiene sombrea-*

do si para cualquier $\varepsilon > 0,$ existe $\delta > 0$ tal que para toda δ-pseudo-órbita $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existe $z \in X$ tal que $\mathcal{O}_f(z)$ ε-sombrea a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por otra parte, decimos que (X,f) tiene sombreado finito si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada δ-pseudo-órbita finita $\{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$ existe $y \in X$ tal que $d(f^i(y), x_i) < \varepsilon$ para $i \in \{0,1,2,\ldots,m\}$.

El siguiente resultado es de fácil verificación. (Ver [8].)

Proposición 2.2.12 *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, (X,f) tiene sombreado si, y solo si, (X,f) tiene sombreado finito.*

Demostración 2.2.13 *Primero, supongamos que (X,f) tiene sombreado. Probemos que (X,f) tiene sombreado finito. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ dado por el sombreado de (X,f). Sea $\Gamma = \{x_0,\ldots,x_r\}$ una δ-pseudo órbita finita. Definimos $\Gamma' = \{x_0,\ldots,x_r, f(x_r), f^2(x_r)\ldots\}$. Es claro que Γ' es una δ-pseudo órbita, por tanto, existe $z \in X$ tal que $\mathcal{O}_f(z)$ ε-sombrea a Γ', así $d(f^i(z), x_i) < \varepsilon$ para cada $i \in \{0,\ldots,r\}$. Concluimos así que (X,f) tiene sombreado finito.*
Ahora, supongamos que (X,f) tiene sombreado finito. Probemos que (X,f) tiene sombreado.
Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ dado por el sombreado finito de (X,f). Sea $\Gamma = \{x_0, x_1,\ldots\}$ una δ-pseudo órbita. Como (X,f) tiene sombreado finito, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $\bigcap_{j\leq i} f^{-j}(B[x_j;\varepsilon]) \neq \emptyset$. Por tanto $F = \{f^{-j}([B(x_j;\varepsilon)])\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una familia de cerrados con la propiedad de intercepciones finitas. Así, como X es compacto, tenemos que $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} f^{-j}(B[x_j;\varepsilon]) \neq \emptyset$. Sea $z \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} f^{-j}(B[x_j;\varepsilon])$, entonces, para todo $j \in \mathbb{N}$, $d(f^j(z), x_j) < \varepsilon$. Concluimos que (X,f) tiene sombreado.

---

[8] OPROCHA P. BARWELL A. D. GOOD C. y RAINES B. E. “Characterizations of $\omega-$limit sets in topologically hyperbolic systems”. En: *Discrete Contin. Dynam. Systems* 33 (2013), págs. 1819-1833.

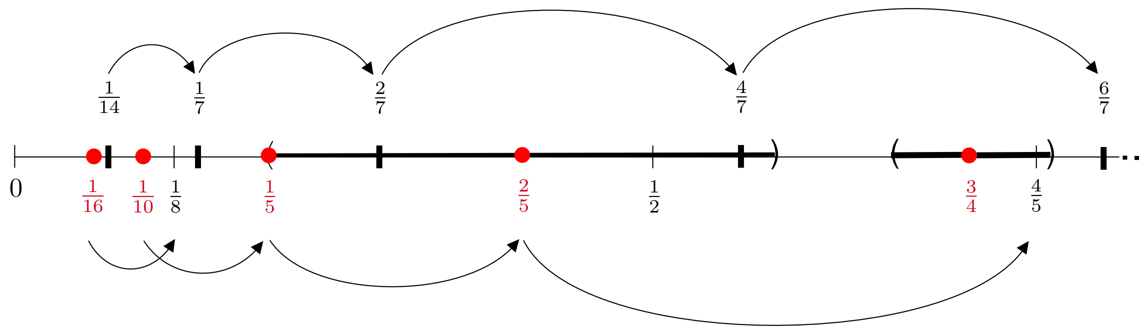

Figura 2. $\frac{1}{16}$-pseudo órbita donde $\mathcal{O}_T(\frac{1}{14})$ la $\frac{1}{5}$-sombrea.

Si X es un continuo no degenerado, entonces (X, I_X), donde I_X es la función identidad, no tiene sombreado, como se puede verificar fácilmente. Por otra parte, si $x_0 \in X$ donde X es cualquier espacio y $f\colon X \to X$ es la función constante $f(x) = x_0$ para cada $x \in X$, entonces (X, f) tiene sombreado. Para ver esto, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon$ y observar que la órbita $\{x, x_0, x_0, \ldots\}$ ε-sombrea a cualquier δ-pseudo órbita $\{x, x_1, x_2, \ldots\}$. En general, verificar directamente de la definición si un sistema dinámico discreto tiene o no sombreado, no es sencillo. Sin embargo, usando resultados adicionales, como veremos al final de esta sección, el sistema dinámico definido en el Ejemplo 2.2.2, tiene sombreado. A continuación mostramos un ejemplo de una δ-pseudo-órbita y su respectivo ε-sombreado.

Ejemplo 2.2.14 *Para la función tienda T, consideremos $\varepsilon = \frac{1}{5}$ y $\delta = \frac{1}{16}$. Si tenemos $\gamma = \left\{\frac{1}{16}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}\right\}$, es fácil verificar que γ es una δ-pseudo-órbita. Además,*

$$\{\tfrac{1}{14}, T(\tfrac{1}{14}), T^2(\tfrac{1}{14}), T^3(\tfrac{1}{14}), T^4(\tfrac{1}{14})\} = \left\{\tfrac{1}{14}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{2}{7}, \tfrac{4}{7}, \tfrac{6}{7}\right\},$$

ε-sombrea a γ. Pues, particularmente como vemos en la Figura 2, tenemos que $T(\frac{2}{5}) \in (\frac{3}{4} - \delta, \frac{3}{4} + \delta)$ y $T^3(\frac{1}{14}) \in (\frac{2}{5} - \delta, \frac{2}{5} + \delta)$.

Definición 2.2.15 Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Decimos que (X, f) tiene *h-sombreado*, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un

$\delta > 0$, tal que para cada δ-pseudo órbita finita $\{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$ existe $y \in X$ tal que $d(f^i(y), x_i) < \varepsilon$ para todo $i < m$ y $f^m(y) = x_m$.

Por la Proposición 2.2.12 es claro que si un sistema dinámico discreto tiene h-sombreado, entonces tiene sombreado. Además, el sistema dinámico donde la función es constante que, como mostramos anteriormente, tiene sombreado, éste, no tendrá h-sombreado, como se deduce del Teorema 2.2.16.
El siguiente teorema es de fácil verificación y muestra dos condiciones para que un sistema dinámico discreto no tenga h-sombreado.

Teorema 2.2.16 *Sean $f\colon X \to X$ una función continua donde X es un continuo y $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Suponga que se tiene alguna de las siguientes condiciones:*

1. *Existe un abierto U tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq \{x\}$;*
2. *Existe un abierto U tal que $x \in U$, y $\lim_{n\to\infty} f^n(z) = x$ para todo $z \in U \setminus \{x\}$ donde además $f^{-1}(x) \cap U = \{x\}$.*

Entonces, (X, f) no tiene h-sombreado.

Demostración 2.2.17 *Supongamos que se cumple la primera condición. Luego, podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $B(x;\varepsilon) \subseteq U$. Dado $\delta > 0$, definimos $\Gamma = \{x, x, z\}$ donde $z \in B(x;\delta) \cap B(x;\varepsilon)$ y $z \neq x$. Es claro que Γ es una δ-pseudo órbita. Sea $y \in B(x;\varepsilon)$, entonces $f^2(y) = x$, por tanto (X, f) no tiene h-sombreado.*
Ahora supongamos que se cumple la segunda condición. Como X es continuo, existe $z \in U$ tal que $z \neq x$. Tomamos $\varepsilon =$ mín$\{\frac{d(z,x)}{2}, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, donde $B(z;\varepsilon_1) \subseteq U$ y $B(x;\varepsilon_2) \subseteq U$. Sea $\delta > 0$. De la segunda condición existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^n(z), x) < \delta$. Así $\eta = \{z, f(z), \ldots, f^n(z), x\}$ es una δ-pseudo órbita. Sea $y \in X$. Si $y \in B(z;\varepsilon)$, entonces $f^r(y) \neq x$ para todo $r \in \mathbb{N}$.

Pregunta 2.2.18 *¿Existen un continuo X, una función continua $f\colon X \to X$ y un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$, donde: existe un abierto U tal que $x \in U$, y $\lim_{n\to\infty} f^n(z) = x$ para todo $z \in U \setminus \{x\}$ y (X, f) tenga h-sombreado?*

Otro caso en el que un sistema dinámico discreto no tiene h-sombreado es dado en la siguiente sencilla proposición.

Proposición 2.2.19 *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto donde X es un continuo. Si f no es sobreyectiva, entonces (X, f) no tiene h-sombreado.*

Demostración 2.2.20 *Fijamos $\varepsilon > 0$. Como $f(X) \neq X$ y X es conexo, dado cualquier $\delta > 0$ existen $x \in f(X)$ y $z \in X \setminus f(X)$ tales que $d(x, z) < \delta$. Consideremos $\Gamma = \{y, z\}$, donde $f(y) = x$. Entonces, Γ es una δ-pseudo órbita. Pero como $z \in X \setminus f(X)$, concluimos que (X, f) no tiene h-sombreado.*

La siguiente proposición está probada en [7]. Presentamos una prueba para comodidad del lector.

Proposición 2.2.21 *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto donde X es compacto y f es sobreyectiva. Entonces, (X, f) tiene h-sombreado, si y solo si (X, f^n) tiene h-sombreado para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración 2.2.22 *Primero vamos a suponer que (X, f^n) tiene h-sombreado para algún $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y probaremos que (X, f) tiene h-sombreado.*
Sea $\varepsilon > 0$. Por continuidad uniforme de cada f^j, donde $j \in \{0, \ldots, n\}$, existe $\alpha > 0$ tal que dados $x, y \in X$

$$\textit{si } d(x, y) < \alpha, \textit{ entonces } d(f^j(x), f^j(y)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Como f^n tiene h-sombreado, para el α dado anteriormente, existe un $0 < \lambda < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que toda λ-pseudo órbita en (X, f^n) puede ser α-sombreada.
Por la Proposición 2.2.9, existe $\delta > 0$ con $\delta < \alpha$, tal que si $E = \{y_0, \cdots, y_k\}$ es una δ-pseudo órbita en (X, f) de longitud menor o igual a $n + 1$ entonces ésta es λ-sombreada por $\mathcal{O}_f(y_0)$.

Sea $\Sigma = \{x_0, \cdots x_s\}$ una δ-pseudo órbita en (X, f), entonces,

$$d(f^i(x_j), x_{j+i}) < \lambda \text{ para } i \leq n. \tag{8}$$

Tomemos $r \in \{0, \ldots, n-1\}$ tal que $s = cn + r$ donde $c \in \mathbb{N}$. Como f es sobreyectiva podemos definir

$$\Phi = \{x_{-n+r}, x_{-n+r+1}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_s\}$$

donde $x_{-n+r+i} \in f^{-n+r+i}(x_0)$ para cualquiera $i \in \{0, \ldots, n-r-1\}$ y además $f(x_{-n+r+i}) = x_{-n+r+i+1}$. Es claro que Φ es una δ-pseudo órbita en (X, f). Así, por implicación (7), $d(f^n(x_{-n+r}), x_r) < \lambda$, $d(f^n(x_r), x_{r+n}) < \lambda$, $\ldots$ y $d(f^n(x_{r+(c-1)n}), x_s) < \lambda$. Por tanto, $\Gamma = \{x_{-n+r}, x_r, x_{r+n}, x_{r+2n} \cdots, x_s\}$ es una λ-pseudo órbita. Luego, existe $z \in X$ tal que la órbita $\mathcal{O}_{f^n}(z)$, α-sombrea a Γ y $(f^n)^{c+1}(z) = x_s$.
Probaremos que $\mathcal{O}_f(f^{n-r}(z))$ ε-sombrea a Σ. Como $d(z, x_{-n+r}) < \alpha$, tenemos nuevamente por (7) que,

$$d(f^i(z), f^i(x_{-n+r})) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } i \in \{0, \ldots, n\}. \tag{9}$$

Observemos que $f^{n-r}(x_{-n+r}) = x_0$. Luego, $f^{n-r+i}(x_{-n+r}) = f^i(x_0)$, para cualquiera $i \in \{0, \ldots, r\}$. De esta manera aseguramos que,

$$d(f^{n-r+i}(z), x_i) < \varepsilon, \text{ para cada } i \in \{0, \ldots, r\}.$$

Ya que por relación que presentamos en (9) y usando la desigualdad triangular, tenemos que para cada $i \in \{0, \ldots, r\}$, $d(f^{n-r+i}(z), x_i) \leq d(f^{n-r+i}(z), f^{n-r+i}(x_{-n+r})) + d(f^{n-r+i}(x_{-n+r}), x_i) = d(f^{n-r+i}(z), f^i(x_0)) + d(f^i(x_0), x_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \lambda < \varepsilon$. Como $\mathcal{O}_{f^n}(z)$ α-sombrea a Γ,

$$d(f^{(k+1)n}(z), x_{r+kn}) < \alpha \textit{ para todo } k \in \{0, \dots, c\}.$$

Luego, $d(f^{(k+1)n+j}(z), f^j(x_{r+kn})) < \frac{\varepsilon}{2}$*, para todo* $j \in \{0, \dots, n\}$*, por (7). Además, por la desigualdad (8),* $d(f^i(x_{r+kn}), x_{r+kn+i}) < \lambda$ *para todo* $i \in \{0, \dots n\}$*. Por tanto, tenemos que* $d(f^{(k+1)n+j}(z), x_{r+kn+j}) \leq d(f^{(k+1)n+j}(z), f^j(x_{r+kn})) + d(f^j(x_{r+kn}), x_{r+kn+j}) < \frac{\varepsilon}{2} + \lambda < \varepsilon,$ *para todo* $j \in \{0, \dots, n\}$ *y* $k \in \{0, \dots, c\}$*. Así,*

$$d(f^{(k+1)n+j}(z), x_{r+kn+j}) < \varepsilon, \textit{ para } j \in \{0, \dots, n\} \textit{ y } k \in \{0, \dots, c\}.$$

Concluimos que $\mathcal{O}_f(f^{n-r}(z))$*,* ε*-sombrea a* Σ*, donde además notemos que* $f^s(f^{n-r}(z)) = f^{cn+r}(f^{n-r}(z)) = f^{n(c+1)}(z) = (f^n)^{c+1}(z) = x_s$*. De lo anterior,* f *tiene* h*-sombrado.*

Recíprocamente, supongamos que (X, f) *tiene* h*-sombreado y probemos que* (X, f^n) *tiene* h*-sombreado para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Fijamos* $n \in \mathbf{N}$*. Sea* $\varepsilon > 0$ *y* $\delta > 0$ *dado por el* h*-sombreado de* (X, f)*. Sea* $\Gamma = \{x_0, \dots, x_k\}$ *una* δ*-pseudo órbita de* (X, f^n)*. Note que si* $i < k$*,* $\Gamma_i = \{x_i, f(x_i), \dots, f^{n-1}(x_i), x_{i+1}\}$ *es una* δ*-pseudo órbita de* (X, f)*, puesto que* Γ *es* δ*-pseudo órbita en* (X, f^n) *se tiene que* $d(f^n(x_i), x_{i+1}) < \delta$*. Considerando lo anterior afirmamos que*

$$\Gamma' = \{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0), x_1, f(x_1), \dots, f^{n-1}(x_{k-1}), x_k\},$$

es una δ*-pseudo órbita en* (X, f)*. Así existe* $z \in X$ *tal que* $f^{kn}(z) = x_k$ *y* $\mathcal{O}_f(z)$ ε*-sombrea a* Γ'*, es decir* $f^s(z) \in B(f^r(x_q); \varepsilon)$ *donde* $s = qn + r$*,* $q, r \in \mathbb{N}$ *y* $0 \leq r < n$*. De esta manera se puede afirmar que* $f^{kn}(z) = x_k$ *y* $f^{in}(z) \in B(x_i; \varepsilon)$ *para todo* $i \leq k$*.*

La prueba de las siguientes dos proposiciones son similares (ver [2]). Haremos únicamente la demostración de la primera.

Proposición 2.2.23 *Sean* (X, f) *un sistema dinámico discreto donde* X *es un espacio métrico compacto y* $Y \subseteq X$ *es denso invariante. Si* $(Y, f|_Y)$ *tiene* h*-sombreado,* *entonces (X, f) tiene h-sombreado.*

Demostración 2.2.24 *Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$ dado por el h-sombreado de $(Y, f|_Y)$ para $\frac{\varepsilon}{2}$. Sea $\Gamma = \{x_0, \ldots, x_r\}$ una $\frac{\delta}{3}$-pseudo órbita en X. Como f es continua y X es compacto, f es uniformemente continua, por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\eta_n > 0$, tal que $\eta_n < \frac{\delta}{3}$, $\eta_n < \frac{\varepsilon}{2}$, $\eta_n < \frac{1}{2^n}$ y si $d(x, z) < \eta_n$, entonces $d(f(x), f(z)) < \frac{\delta}{3}$. Para cada $i \in \{0, \ldots r\}$ tomamos $y_{n,i} \in B(x_i; \eta_n) \cap Y$, de esta manera $d(f(x_i), f(y_{n,i})) < \frac{\delta}{3}$. Note que*

$$d(f(y_{n,i}), y_{n,i+1}) \leq d(f(y_{n,i}), f(x_i)) + d(f(x_i), x_{i+1}) + d(x_{i+1}, y_{n,i+1}) < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.$$

Así, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma_n^* = \{y_{n,0}, \ldots, y_{n,r}\}$ es una δ-pseudo órbita en Y, además $d(x_i, y_{n,i}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(x_r, y_{n,r}) < \frac{1}{2^n}$. Como $(Y, f|_Y)$ tiene h-sombreado, existe $y_n \in Y$ tal que $\mathcal{O}_{f|_Y}(y_n)$ $\frac{\varepsilon}{2}$-sombrea a Γ_n^* y $f|_Y^r(y_n) = y_{n,r}$. Luego, si y es el limite en X de una subsucesión convergente de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces, por la continuidad de f, $\mathcal{O}_f(y)$ ε-sombrea a Γ y $f^r(y) = x_r$.

Proposición 2.2.25 *Sean X un compacto métrico, $f\colon X \to X$ una función continua y $Y \subseteq X$ un denso invariante. Entonces, (X, f) tiene sombreado si, y solo si, $(Y, f|_Y)$ tiene sombreado finito.*

El sombreado y la expansibilidad son estudiados conjuntamente por Andrew D. Barwell, Chris Good, y Piotr Oprocha en [7] y [8]. Los teoremas que presentamos a continuación muestran una relación entre estos dos conceptos, cuyas pruebas las tomamos de [8] y [7], respectivamente.

Teorema 2.2.26 *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua expansiva positivamente. Entonces, (X, f) tiene sombreado si, y solo si, (X, f) tiene h-sombreado.*

Demostración 2.2.27 *Sea $b > 0$ la constante expansiva de f. Supongamos que (X, f) tiene sombreado. Sean $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < b$ y $\delta > 0$ dado por el sombreado de (X, f). Sea $\Gamma = \{x_0, \ldots, x_m\}$ una δ-pseudo órbita y consideremos la siguiente δ-pseudo órbita infinita $\{x_0, \ldots, x_m, f(x_{m+1}), f(x_{m+2}), \ldots\}$. Como (X, f) tiene sombreado, existe $z \in X$ tal que $d(f^i(z), x_i) < \varepsilon$ para cada $i < m$, y $d(f^{j+m}(z), f^j(x_m)) < \varepsilon$ para todo $j \geq 0$. Por ser f expansiva positivamente, $f^m(z) = x_m$. Concluimos que (X, f) tiene h-sombreado. El recíproco es inmediato de la definición.*

Teorema 2.2.28 *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si f es bola expansiva, entonces (X, f) tiene h-sombreado.*

Demostración 2.2.29 *Sea μ, v de la definición de bola expansiva. Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\varepsilon' = min\{v, \varepsilon\}$ y $\delta = (\mu - 1)\varepsilon'$. Entonces, para cada $x \in X$*

$$B(f(x); \varepsilon') \subset B(f(x); \mu\varepsilon) \subset f(B(x; \varepsilon)). \tag{10}$$

Dado $\Gamma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una δ-pseudo-órbita, por (10) y dado que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ se tiene que

$$B(x_{i+1}; \varepsilon') \subset f(B(x_i; \varepsilon')). \tag{11}$$

Sea $J_0 = B(x_0; \varepsilon')$ y $J_i = f^{-i}(B(x_i; \varepsilon')) \cap J_{i-1}$. Afirmamos que

$$f^i(J_i) = B(x_i; \varepsilon'). \tag{12}$$

Por (12), $f^n(J_n) = B(x_n; \varepsilon')$. Luego, existe $y \in J_n$ tal que $f^n(y) = x_n$. Además, notemos que $y \in J_i$, para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ y por tanto, $f^i(y) \in B(x_i; \varepsilon')$. De lo anterior, y sombrea a Γ.
Finalmente, para completar la prueba, veamos (12). Note que $f^i(J_i) \subset B(x_i; \varepsilon')$. Mostremos que $B(x_i; \varepsilon') \subseteq f^i(J_i)$. Por (11), $B(x_i; \varepsilon') \subset f(B(x_{i-1}; \varepsilon'))$. Luego existe $A_i \subset B(x_{i-1}; \varepsilon')$ tal que $f(A_i) = B(x_i; \varepsilon')$. Ahora, como $A_i \subset B(x_{i-1}; \varepsilon') \subset f(B(x_{i-2}; \varepsilon'))$,

existe $A_{i-1} \subset B_(x_{i-2};\varepsilon')$ tal que $f(A_{i-1}) = A_i$. De manera inductiva obtenemos $A_1 \subset B(x_0;\varepsilon')$ tal que $f(A_1) = A_2 \subset B(x_1;\varepsilon')$. Luego $f^k(A_1) \subset B(x_k;\varepsilon')$ con $k \in \{0,\dots,i\}$, además $f^i(A_1) = B(x_i;\varepsilon') = A_i$, por tanto $A_1 \subset f^{-k}(B(x_k;\varepsilon'))$ para todo $k \in \{0,\dots,i\}$. Así $B(x_i;\varepsilon') = f^i(A_1) \subset f^i(J_i)$.

Corolario 2.2.30 *Sean X métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $U \subseteq X$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. *Existe $a \in (X \setminus U)^\circ$ tal que $f(X \setminus U) = \{a\}$;*

2. *$f|_U$ es bola expansiva; esto es, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\gamma > 0$, tal que $B(f(x);\varepsilon+\gamma) \subset f(B(x;\varepsilon))$, para todo $x \in U$.*

Entonces, (X, f) tiene sombreado.

Demostración 2.2.31 *Sea $r > 0$ tal que $B(a;r) \subseteq X \setminus U$. Sea $\varepsilon < r$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta_1$ entonces $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \gamma, \frac{\varepsilon}{2}\}$, donde γ es dado por la condición 2. Sea $\Gamma = \{x_0,\dots,x_n\}$ una δ-pseudo órbita. Notemos que si $\Gamma \subseteq U$, entonces el sombreado se tiene por el Teorema 2.2.28, o si $\Gamma \subseteq X \setminus U$, entonces x_0 sombrea a Γ, pues f es constante en $X \setminus U$. Así, supongamos que $\Gamma \cap U \neq \emptyset$ y $\Gamma \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Observe que si $x_l \in X \setminus U$ para algún $l \in \{0,\dots,n\}$, entonces $x_l = a$, por tanto $x_i \in X \setminus U$ para todo $i \geq l$. Así, $x_0 \in U$. Sea $j = \min\{i : x_i \in X \setminus U\}$. Como $\{x_0,\dots,x_{j-1}\}$ es una δ-pseudo órbita en U, por el Teorema 2.2.28, existe $z \in U$ tal que $\{z, f(z),\dots,f^{j-1}(z)\}$ sombrea a $\{x_0,\dots,x_{j-1}\}$ y $x_{j-1} = f^{j-1}(z)$. De lo anterior, $d(f^j(z), x_j) < \delta$, luego $d(f^{j+1}(z), a) < \frac{\varepsilon}{2}$, y por tanto $d(f^{j+1}(z), x_{j+1}) < \varepsilon$. Así, $f^{j+r}(z) = a$ siempre que $r > 1$, y z sombrea a Γ.*

A continuación mostraremos un ejemplo donde podemos aplicar las condiciones del Corolario 2.2.30.

Ejemplo 2.2.32 *Sea* $X = [0,1]$ *y* $f\colon X \to X$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 2x-1, & \textit{si } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Entonces (X, f) *satisface las hipótesis del Corolario 2.2.30.*

Sea $U = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Es claro que $f(X \setminus U) = \{0\}$ y 0 pertenece al interior de $X \setminus U$. Fijamos $x \in U$ y tomamos $z \in B(f(x); 2\varepsilon)$. Es claro que $\frac{z+1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, por tanto $f\left(\frac{z+1}{2}\right) = z$. Supongamos que $d\left(\frac{z+1}{2}, x\right) \geq \varepsilon$. Consideramos dos casos.

- Caso 1. $x < \frac{z+1}{2}$. Entonces $\frac{z+1}{2} - x \geq \varepsilon$, luego $z + 1 - 2x \geq 2\varepsilon$, por tanto $d(z, f(x)) \geq 2\varepsilon$ lo cual es una contradicción.

- Caso 2. $\frac{z+1}{2} < x$. Entonces $x - \frac{z+1}{2} \geq \varepsilon$, por tanto $2x - 1 - z \geq 2\varepsilon$, así $d(z, f(x)) \geq 2\varepsilon$, contradiciendo la elección de z.

Concluimos que $d\left(\frac{z+1}{2}, x\right) < \varepsilon$.
Note que del Teorema 2.2.28 y el Ejemplo 2.2.7 podemos afirmar que $([0,1], T)$ tiene h-sombreado y por tanto, tiene sombreado finito, así, por la Proposición 2.2.12, $([0,1], T)$ tiene sombreado.
En [6] se encuentra un estudio sobre el sombreado en la función tienda variando la pendiente de ésta. El siguiente ejemplo hace parte de la demostración del Lema 4.1 en [6].

Ejemplo 2.2.33 *Sea* $X = [0,2]$ *y* $f\colon X \to X$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}x, & \textit{si } x \in [0,1]; \\ \sqrt{2}(2-x), & \textit{si } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Entonces (X, f) *no tiene sombreado.*

Demostración 2.2.34 *Note que* $\mathcal{O}_f(1) = \{1, \sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2, 4 - 2\sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2}, \dots\}$*. Tomamos* $\varepsilon = \frac{1}{10}$ *luego*

$$|f^n(1) - 1| > \frac{1}{10} \text{ para todo } n \geq 1. \tag{13}$$

Dado $\delta > 0$*, fijamos* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{k} < \delta$ *y* $\frac{1}{k} < \frac{1}{10}$*. Definimos* $x_0 = 1, x_1 = \sqrt{2} + \frac{1}{k}$ *y* $x_m = f^{m-1}(x_1)$ *para todo* $m > 1$*. Como* $\frac{1}{k} < \delta$*, tenemos que* $d(f(x_0), x_1) < \delta$*, así* $\Gamma = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ *es una* δ*-pseudo-órbita. Sea* $y \in B(1; \varepsilon)$*. Como* $f(y) \neq x_1$ *ya que* $x_1 > \sqrt{2}$*, entonces, por (2) del Lema 2.2.4, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$1 \in \overline{f^{n_0}(y) x_{n_0}}^{\circ}. \tag{14}$$

Consideramos n_0 *el menor entero donde se cumple lo anterior, por tanto*

$$1 \notin (\overline{f^i(y) x_i})^{\circ}, \text{ para todo } i < n_0. \tag{15}$$

Como $f(1) \in \overline{f(y) x_1}$ *y* $1 \notin \overline{f(y) x_1}^{\circ}$*, entonces, por (15) y (1) del Lema 2.2.4,* $f^i(1) \in \overline{f^i(y) x_i}$ *para todo* $i \leq n_0$*. Por tanto* $f^{n_0}(1) \in \overline{f^{n_0}(y) x_{n_0}}$*. Pero por (13) y (14), afirmamos que* $|f^{n_0}(y) - x_{n_0}| > \varepsilon$*. Concluimos de esta manera que* $\mathcal{O}_f(y)$ *no* ε*-sombrea a* Γ

3. SOMBREADO EN SISTEMAS DINÁMICOS INDUCIDOS

En este capítulo incorporamos los conceptos dinámicos y las funciones inducidas. Para esto, presentamos los avances existentes relacionados con los sistemas dinámicos inducidos y las propiedades de sombreado y h-sombreado, los cuales han sido estudiados en [8], [2] y [3]. Comenzamos con los siguientes resultados tomados de [2]. En este trabajo se hace la demostración para sombreado y se afirma que para h-sombreado, la prueba es similar; por esta razón, realizamos las pruebas para h-sombreado.

Teorema 3.0.1 *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Si cualquiera de los sistemas dinámicos $(F_n(X), f_n), (C(X), C(f)), (2^X, 2^f)$ o $(F(X), f^{<\omega})$ tiene h-sombreado, entonces (X, f) tiene h-sombreado.*

Demostración 3.0.2 *Supongamos que $(2^X, 2^f)$ tiene h-sombreado. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ dados por el h-sombrado de $(2^X, 2^f)$. Sea $\Gamma = \{x_0, \dots, x_r\}$ una δ-pseudo órbita en (X, f). Entonces $\Gamma^* = \{\{x_0\}, \dots \{x_r\}\}$ es una δ-pseudo órbita en $(2^X, 2^f)$. Como $(2^X, 2^f)$ tiene h-sombreado, existe un punto $A \in 2^X$ tal que $\mathcal{O}_{2^f}(A)$ ε-sombrea a Γ^* y además $2^{f^r}(A) = \{x_r\}$. Pero note que cada punto x de A, ε-sombrea a Γ y $f^r(x) = x_r$. La demostración es equivalente para cualquier otra de las funciones inducidas presentadas en el enunciado.*

Teorema 3.0.3 *Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si alguno de los sistemas dinámicos $(F_n(X), f_n), (C(X), C(f)), (2^X, 2^f)$ o $(F(X), f^{<\omega})$ tiene sombreado, para algún $n \geq 1$, entonces (X, f) tiene sombreado.*

La prueba del siguiente resultado es similar a la prueba del Teorema 11 en [3].

Teorema 3.0.4 *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto donde X es un espacio métrico compacto. Si (X, f) tiene h-sombreado, entonces $(F_2(X), f_2)$ tiene h-sombreado.*

Demostración 3.0.5 *Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$ dado por el h-sombreado de (X, f). Sea $\Gamma = \{A_0, \ldots, A_m\}$ una δ-pseudo órbita en $F_2(X)$. Para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $A_i = \{x_i, y_i\}$ donde es posible que $x_i = y_i$. Como $H(f_2(A_{m-1}), A_m) < \delta$, tenemos que $H(\{f(x_{m-1}), f(y_{m-1})\}, \{x_m, y_m\}) < \delta$. Luego, si es necesario renombramos los puntos y_{m-1} y x_{m-1} de tal manera que $d(f(x_{m-1}), x_m) < \delta$ y $d(f(y_{m-1}), y_m) < \delta$. Repitiendo este proceso tenemos que $d(f(x_{m-2}), x_{m-1}) < \delta$ y $d(f(y_{m-2}), y_{m-2}) < \delta$. Procediendo de esta manera tenemos que $d(f(x_{i-1}), x_i) < \delta$ y $d(f(y_{i-1}), y_i) < \delta$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Así $\{x_0, \ldots, x_m\}$ y $\{y_0, \ldots, y_m\}$ son δ-pseudo órbitas en X, por tanto, existen p y q en X tal que $\mathcal{O}_f(p)$ ε-sombrea a $\{x_0, \ldots, x_m\}$, $f^m(p) = x_m$, $\mathcal{O}_f(q)$ ε-sombrea a $\{y_0, \ldots, y_m\}$ y $f^m(q) = y_m$. De esto podemos afirmar que $\mathcal{O}_{f_2}(\{p, q\})$ ε-sombra a Γ y $f_2(\{p, q\}) = A_m$.*

En [1] encontramos un resultado más general ya que trabajan con un espacio compacto y Hausdorff mientras que el espacio del teorema anterior es compacto y métrico. El siguiente resultado de esta sección está dado en [3]. Y muestra el recíproco del Teorema 3.0.3 para la función inducida f_2.

Teorema 3.0.6 *Sea (X, f) un sistema dinámico donde X es un espacio métrico compacto. Si (X, f) tiene sombreado, entonces $(F_2(X), f_2)$ tiene sombreado.*

En el siguiente ejemplo, explicado en [1], se muestra un sistema dinámico discreto (X, f) que tiene sombreado, tal que su sistema dinámico discreto inducido $(F_n(X), f_n)$ no lo tiene, para ningún $n \geq 3$. Este hecho ya había sido probado por Gómez-Rueda, Illanes y Mendez en 2012 [3].

Ejemplo 3.0.7 *Sea $([0, 1], T)$. Entonces, $(F_n([0, 1]), T_n)$ no tiene sombreado para todo $n \geq 3$.*
Fijamos $n \geq 3$, $c = \frac{2}{3}$ y $\varepsilon = \frac{1}{12}$. Sea $\delta \in (0, \frac{1}{12})$. Tomamos $y \in [0, \delta)$ para el cual existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(y) = c$ y $f^i(y) < \frac{1}{2}$ para todo $i < k$. Construiremos una δ-pseudo órbita de la siguiente manera: Para cualquier $i \in \mathbb{N}$ definimos $A_i = \{0, f^{i.mod(k)}(y), c\}$.

Es fácil verificar que $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una δ-pseudo órbita. Supongamos que $A \in F_n(X)$ ε-sombrea a $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Observemos que dado $i \in \mathbb{N}$, $A_i \subseteq [0, \frac{2}{3}]$. Por tanto $f^i(A) \subseteq [0, \frac{3}{4}]$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Observemos también que por construcción, existe $k_0 \in \{1, \ldots, k-1\}$ tal que $A_{mk+k_0} \cap (\varepsilon, 2\varepsilon] \neq \emptyset$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como A ε-sombrea a $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$,

$$\text{existe } a \in A \text{ tal que } f^{mk+k_0}(a) \in (0, 3\varepsilon). \tag{16}$$

Notemos que

$$f_n^{-1}((0,3\varepsilon)) = \left(0, \frac{3\varepsilon}{2}\right) \cup \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2}, 1\right) \subseteq \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right).$$

Sea z el menor elemento de $A \setminus \{0\}$ y sea l el menor natural tal que $f^l(z) > 3\varepsilon$. Tomamos $m \in \mathbb{N}$ ta que $mk+k_0 > l$. Por (16), existe $a \in A$ tal que $f^{mk+k_0}(a) \in (0, 3\varepsilon)$. Es claro que $a \neq 0$, ya que la preimagen de $(0, 3\varepsilon)$ es un subconjunto de $(0, \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4}, 1)$. Como f es creciente en $[0, \frac{1}{2})$ y $f_n^i(A) \cap (\frac{3}{4}, 1) = \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$, afirmamos que $a < z$, contradiciendo la minimalidad de z. Concluimos que $(F_n(X), f_n)$ no tiene sombreado.

Del anterior ejemplo observamos que la propiedad bola expansiva de funciones no se preserva en funciones inducidas.

Aunque $(F_n(X), f_n)$ con $n \geq 3$ no preserva el sombreado cuando (X, f) lo tiene, podemos decir que el sistema dinámico discreto $(F(X), f^{<\omega})$ tiene sombreado finito, cuando (X, f) tiene sombreado. Los detalles se encuentran en [2].

Teorema 3.0.8 *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto donde X es un espacio métrico compacto. Si (X, f) tiene h-sombreado, entonces $(F(X), f^{<\omega})$ tiene h-sombreado.*

Demostración 3.0.9 *Fijamos $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ dado por el h-sombreado de (X, f). Sea $\Gamma = \{A_0, \ldots, A_r\}$ una δ-pseudo órbita finita en $(F(X), f^{<\omega})$. Asumamos que $|A_i| = n_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, r\}$. Vamos a construir una familia $\{\Gamma_j \colon j \leq n\}$ de δ-pseudo* *órbitas en (X,f), para algún $n \in \mathbb{N}$, donde $\Gamma_j = \{a_0^j, \dots, a_r^j\}$ y $A_i = \{a_i^j \colon j \leq n\}$ para cada $i \leq r$. Para este fin, supongamos que $A_r = \{a_r^1, \dots, a_r^{n_r}\}$. Para cada $j \in \{1, \dots, n_r\}$ construimos una δ-pseudo órbita en (X,f) tal que su i-ésimo elemento está en A_i y su último elemento es a_r^j. Como Γ es una δ-pseudo órbita, podemos escoger $a_{r-1}^j \in A_{r-1}$ tal que $d(f(a_{r-1}), a_r^j) < \delta$. Por lo mismo, existe algún $a_{r-2}^j \in A_{r-2}$ tal que $d(f(a_{r-2}^j), a_{r-1}^j) < \delta$. Continuando de esta manera, obtenemos una δ-pseudo órbitas*

$$\Gamma = \{a_0^j, \dots, a_r^j\}$$

para cada $j \leq n_r$, tal que $A_r = \{a_r^j \colon j \leq n_r\}$ y $\{a_i^j \colon j \leq n_r\} \subseteq A_i$ para cada $i \leq r$. Sea $k =$ máx$\{i < r \colon A_i \neq \{a_i^j \colon 3j \leq n_r\}\}$ (si no existe tal k, entonces ya tenemos nuestra familia deseada) y consideramos $A_k \setminus \{a_k^j \colon j \leq n_r\} = \{a_k^j \colon n_r < j \leq n_k'\}$. Como se hizo para A_r, para cada $n_r < j \leq n_k'$, podemos construir una δ-pseudo órbita $\Gamma_j' = \{a_0^j, \dots, a_k^j\}$ tal que $a_i^j \in A_i$ para $i \leq k$. Claramente $A_k = \{a_k^j \colon j \leq n_k'\}$. Ahora, como $f(a_k^j) \in f^{<\omega}(A_k)$ y $H(f^{<\omega}(A_k), A_{k+1}) < \delta$, existe $a_{k+1}^j \in A_{k+1}$ tal que $d(f(a_k^j), a_{k+1}^j) < \delta$. Similarmente, para cada $n_r < j \leq n_k'$ y $k < i < r$ existen $a_i^j \in A_i$ tal que $d(f(a_i^j), a_{i+1}^j) < \delta$, por tanto podemos extender Γ_j' a una δ-pseudo órbita Γ_j la cual empieza en A_0 y termina en A_r. Repitiendo este proceso, podemos construir la colección $\{\Gamma_j \colon j \leq n\}$ de δ-pseudo órbitas en (X,f). Como (X,f) tiene h-sombrado, para cada Γ_j existe un punto $b_j \in X$ tal que $\mathcal{O}_f(b_j)$ ε-sombrea a Γ_j y $f^r(b_j) = a_r^j$. Sea $B = \{b_0, \dots, b_n\}$. Por la construcción, B ε-sombra a Γ y $f^{<\omega r}(B) = A_r$.

Teorema 3.0.10 *Sean X un espacio métrico compacto y $f \colon X \to X$ una función continua. Si (X,f) tiene sombreado, entonces, $(F(X), f^{<\omega})$ tiene sombreado finito.*

De los teoremas 3.0.10 y 3.0.3, tenemos que si $(F_n(X), f_n)$ tiene sombreado para algún $n \geq 1$, entonces $(F(X), f^{<\omega})$ tiene sombreado finito. Pero no necesariamente tiene sombreado como lo muestra el siguiente ejemplo. Este ejemplo lo tomamos de [2].

Ejemplo 3.0.11 *Sean $X = \{\frac{1}{2^n} : n \in \cup\{0\}\} \cup \{0\}$ y $f\colon X \to X$ dada por $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2^{n-1}}$. Entonces (X, f) tiene sombreado y $(F(X), f^{<\omega})$ no tiene sombreado.*

Veamos que (X, f) tienen sombreado. Sea $\varepsilon > 0$, tomemos k_0 tal que $\frac{1}{2^{k_0+1}} < \varepsilon \leq \frac{1}{2^{k_0}}$ y escojamos $\delta < \frac{1}{2^{k_0}} - \frac{1}{2^{k_0+1}}$. Sea $\Gamma = \{x_0, x_1, \dots\}$ una δ-pseudo órbita. Por la elección de δ, si $x_m = \frac{1}{2^{k_0}}$ para algún $m \geq 0$, entonces $\{x_m, x_{m+1}, \dots\}$ es la órbita de x_m. Notemos que $\Gamma \subseteq [0, \varepsilon)$ o $\Gamma \cap [\varepsilon, 1] \neq \emptyset$. En el primer caso $\mathcal{O}_f(0)$ ε-sombrea a Γ. Para el segundo caso, fijamos m el menor natural tal que $x_m > \varepsilon$. Luego $x_m = \frac{1}{2^{k_0}}$, por tanto $\mathcal{O}_f(\frac{1}{2^{k_0+m}})$ ε-sombrea a Γ.

Observemos que la función del ejemplo anterior es expansiva positivamente con constante expansiva $b = \frac{1}{4}$. Ya que dados x y z en X existe $r \geq 0$ tal que $d(f^r(x), f^r(z)) \geq b$. Por tanto, como (X, f) tiene sombreado, concluimos que (X, f) tiene h-sombreado.

Para ver que $(F(X), f^{<\omega})$ no tiene sombreado tomemos $\varepsilon = \frac{1}{8}$ y $\delta > 0$. Existe $N \geq 3$ tal que $\frac{1}{2^N} < \delta$. Definimos $A_0 = \{0, 1\}$, $A_1 = \{0, \frac{1}{2^N}, 1\}$, $A_2 = f^{<\omega}(A_1) = \{0, \frac{1}{2^{N-1}}, 1\}$, $A_3 = (f^{<\omega})^2(A_1) = \{0, \frac{1}{2^{N-2}}, 1\}, \dots, A_N = (f^{<\omega})^{N-1}(A_1) = \{0, \frac{1}{2^{N-(N-1)}}, 1\} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $A_{N+1} = (f^{<\omega})^N(A_1) = \{0, 1\} = A_0$. Por construcción

$$\Gamma = \{A_0, A_1, \dots, A_N, A_0, A_1, \dots\}$$

es una δ-pseudo órbita. Observemos que los conjuntos cuya órbita pueden ε-sombrear a Γ son de la forma

$$B = \left\{0, \frac{1}{2^{kN}}, \frac{1}{2^{(k-1)N}}, \frac{1}{2^{(k-2)N}}, \dots, \frac{1}{2^N}, 1\right\}.$$

El número de iteraciones para que la órbita de B ε-sombree a Γ depende de k, por tanto la órbita de un conjunto finito no puede ε-sombrear a Γ.

De los teoremas 3.0.10 y 2.2.25, es posible obtener el siguiente resultado (ver [2]).

Teorema 3.0.12 *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función* *continua. Entonces, (X, f) tiene sombreado si, y solo si, $(2^X, 2^f)$ tiene sombreado.*

El siguiente resultado está detallado en [2].

Teorema 3.0.13 *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto donde X es un espacio métrico compacto. Entonces, $(2^X, 2^f)$ tiene h-sombreado si, y solo si, $(F(X), f^{<\omega})$ tiene h-sombreado.*

Demostración 3.0.14 *Supongamos que $(2^X, 2^f)$ tiene h-sombreado. Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$ dado por el h-sombreado de $(2^X, 2^f)$ para $\frac{\varepsilon}{2}$. Sea $\Gamma = \{A_0, \ldots, A_r\}$ una δ-pseudo órbita en $F(X)$, luego Γ es una δ-pseudo órbita en 2^X, por tanto, existe $C \in 2^X$ tal que $H(f^i(C), A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $i \in \{0, \ldots, r-1\}$ y $f^r(C) = A_r$. Sea $B_r = A_r$ y digamos que $B_r = \{b_{r-1}^1, \ldots, b_r^{n_r}\}$. Como $B_r = f^r(C)$, para cada $b_r^j \in B_r$, existe $b_{r-1}^j \in f^{r-1}(C)$ tal que $f(b_{r-1}^j) = b_r^j$. Sea $B_{r-1}^* = \{b_{r-1}^1, \ldots, b_{r-1}^{n_r}\}$. Si $H(B_{r-1}^*, f^{r-1}(C)) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces tomamos $B_{r-1} = B_{r-1}^*$. En caso contrario, existen finitos puntos $b_{r-1}^{n_r+1}, \ldots, b_{r-1}^{n_r+k}$ en $f^{r-1(C)} \setminus N(B_r; \frac{\varepsilon}{2})$ tal que si $B_{r-1} = \{b_{r-1}^1, \ldots, b_{r-1}^{n_r}, b_{r-1}^{n_r+1}, \ldots, b_{r-1}^{n_r+k}\}$, entonces $H(B_{r-1}, f^{r-1}(C)) < \frac{\varepsilon}{2}$, así $H(B_{r-1}, A_{r-1}) < \varepsilon$. Renombramos los puntos de B_{r-1} de la siguiente manera: $B_{r-1} = \{b_{r-1}^1, \ldots, b_{r-1}^{n_{r-1}}\}$. Continuando este proceso obtenemos $B_0 = \{b_0^1, \ldots, b_0^{n_0}\}$ un subconjunto de C, cuya órbita bajo $f^{<\omega}$ ε-sombrea a Γ y por construcción $f^r(B_0) = A_r$. Concluimos que $(F(X), f^{<\omega})$ tiene h-sombreado. El reciproco se tiene por la Proposición 2.2.23 ya que $F(X)$ es denso invariante en 2^X bajo 2^f y $2^f|_{F(X)} = f^{<\omega}$.*

De los teoremas 3.0.8 y 3.0.13 tenemos el siguiente resultado (ver [2])

Teorema 3.0.15 *Sea (X, f) un sistema dinámico discreto donde X es un espacio métrico compacto. Entonces, (X, f) tiene h-sombreado si, y solo si, $(2^X, 2^f)$ tiene h-sombreado.*

4. SOMBREADO Y h-SOMBREADO EN $(C_n(X), C_n(f))$.

En este capítulo estudiamos el sombreado y h-sombreado en $(C(X), C(f))$ y $(C_n(X), C_n(f))$ para cualquier entero positivo n, cuando (X, f) tiene o no sombreado o h-sombreado. El siguientes resultado es consecuencia de [9] y [10].

Teorema 4.0.1 *Existe un homeomorfismo $f\colon S^1 \to S^1$ tal que (S^1, f) tiene sombreado y $(C(S^1), C(f))$ no tiene sombreado.*

Como sabemos, el h-sombreado, implica sombreado finito, y si el sistema dinámico está definido en un compacto, éste, a su vez, tiene sombreado. Con el siguiente ejemplo mostramos que el recíproco no es cierto en general.

Ejemplo 4.0.2 *Sea (S^1, f) el sistema dinámico discreto donde*

$$f(e^{\theta i}) = \begin{cases} 1, & \textit{si } \theta \leq \frac{2\pi}{3} \textit{ ó } \theta \geq \frac{4\pi}{3}; \\ e^{(-2\pi+3\theta)i}, & \textit{si } \frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}. \end{cases} \tag{17}$$

Entonces (S^1, f) tiene sombreado y no tiene h-sombreado.

Note que $f(B(1; \frac{\pi}{2})) \subseteq \{1\}$, esto lo podemos visualizar en la Figura 3, donde observamos que la imagen de cualquier punto de la franja roja es el 1, por tanto se cumple la condición *1* del Teorema 2.2.16. Concluimos que (S^1, f) no tiene h-sombreado. Para probar que (S^1, f) tiene sombreado mostraremos antes las siguientes afirmaciones.

---

9 K. YANO. “Generic homeomorphisms of S1 have the pseudo-orbit tracing property”. En: *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 3 (1987), 51–55.

10 A. ARBIETO y BOHORQUEZ J. “Shadowing, topological entropy and recurrence of induced Morse–Smale diffeomorphism”. En: *Mathematische Zeitschrift* 303 (2023).

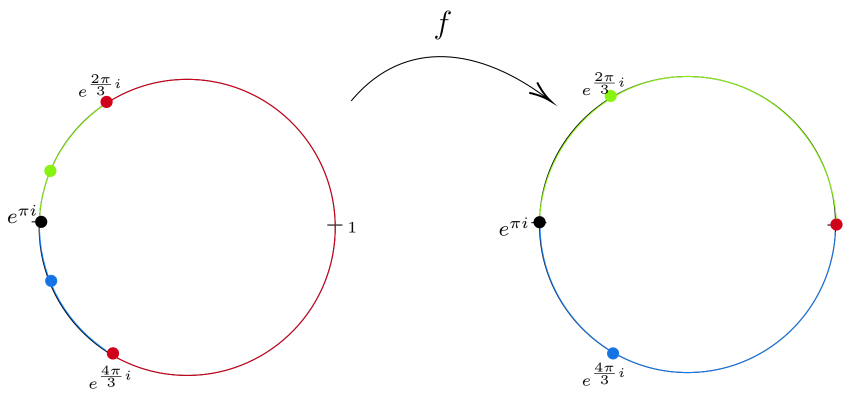

Figura 3. Diagrama de la función del Ejemplo 4.0.2

Afirmación 4.0.3 *Si $U = B(e^{\pi i}; \frac{\pi}{9})$, $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{9})$ y $x \in U$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B(f(x); \varepsilon + \delta) \subseteq f(B(x; \varepsilon))$.*

Sean $\delta = \varepsilon$ y $w \in B(f(x); 2\varepsilon)$. Escribimos $x = e^{\theta i}$ donde por la simetría de f podemos suponer que $\theta \leq \pi$. Como $f\left(e^{\frac{8\pi}{9}i}\right) = e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $f(e^{\pi i}) = e^{\pi i}$ y $\varepsilon < \frac{\pi}{9}$, tenemos que $w = e^{\beta i}$ donde $\beta < \frac{11\pi}{9}$ y $w \neq 1$. Como f es sobreyectiva y $w \neq 1$, existe $z = e^{\alpha i} \in S^1$ tal que $f(z) = w$ y $z \in B\left(e^{\pi i}; \frac{\pi}{9}\right)$. Supongamos que $d(z, x) \geq \varepsilon$. Por la regla de correspondencia de f se tiene que $d(f(x), f(z)) = |(-2\pi + 3\theta) - (-2\pi + 3\alpha)| = 3|\theta - \alpha| = 3d(x, z) \geq 3\varepsilon$, lo cual contradice que $w \in B(f(x); 2\varepsilon)$. Concluimos que $w \in f(B(x; \varepsilon))$.

Afirmación 4.0.4 *Si $\eta = \{y_0, \ldots, y_k\}$ es una α-pseudo órbita donde $y_0 \notin B(e^{\pi i}; \frac{\pi}{9})$ y $\alpha < \frac{\pi}{9}$, entonces $d(y_i, 1) < \alpha$ para $i \in \{3, \ldots, k\}$.*

Supongamos sin pérdida de generalidad que $y_0 = e^{\theta i}$ donde $\theta < \frac{8\pi}{9}$. Luego $f(y_0) = e^{\theta_1 i}$ donde $\theta_1 < \frac{2\pi}{3}$, por tanto $y_1 = e^{\theta_2 i}$ donde $\theta_2 < \frac{7\pi}{9}$. Así $f(y_1) = e^{\theta_3 i}$ donde $\theta_3 < \frac{\pi}{3}$, luego $y_2 = e^{\theta_4 i}$ donde $\theta_4 < \frac{4\pi}{9}$, por tanto $f(y_2) = 1$. Concluimos que $d(y_i, 1) < \alpha$ para todo $i \in \{3, \ldots, k\}$.

Ahora probaremos que (S^1, f) tiene sombreado. Dado $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{9})$, sea $\delta < \text{mín}\{\delta_1, \varepsilon\}$, donde δ_1 es dado por la Proposición 2.2.9 para $n = 3$. Sea $\Gamma = \{x_0, \ldots, x_r\}$ una

δ-pseudo órbita. Podría pasar que $\Gamma \subseteq B(e^{\pi i}; \frac{\pi}{9})$ o que exista $j \in \mathbb{N}$ tal que $x_j \notin B(e^{\pi i}; \frac{\pi}{9})$. Para abordar ambos casos al tiempo supongamos que $x_0 \in B(e^{\pi i}; \frac{\pi}{9})$ y $j \in \mathbb{N}$ es el menor índice donde $x_j \notin B(e^{\pi i}; \frac{\pi}{9})$. Por la Afirmación 4.0.3 y Teorema 2.2.28, tenemos que, existe $z \in S^1$ tal que $d(f^i(z), x_i) < \varepsilon$, para $i \in \{0, \ldots, j-1\}$ y $f^j(z) = x_j$. Por la Proposición 2.2.9, afirmamos que $d(f^{j+r}(z), x_{j+r}) < \varepsilon$ para $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Finalmente, por la Afirmación 4.0.4, concluimos que $d(f^i(z), x_i) < \varepsilon$ para $i > j$.

A continuación veremos que la función definida en la expresión (17) satisface también que $(C(S^1), C(f)$ no tiene sombreado.

Ejemplo 4.0.5 *Sea (S^1, f) un sistema dinámico discreto donde*

$$f(e^{\theta i}) = \begin{cases} 1, & \textit{si } \theta \leq \frac{2\pi}{3} \textit{ ó } \theta \geq \frac{4\pi}{3}; \\ e^{(-2\pi + 3\theta)i}, & \textit{si } \frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}. \end{cases}$$

Entonces $(C_n(S^1), C_n(f))$ no tiene sombreado.

Sea $n \geq 2$ un natural, tomamos $\varepsilon < \text{mín}\{\frac{\pi}{4n}, \frac{\pi}{18}\}$. Dado $\delta \in (0, \pi)$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r(e^{(\pi-\delta)i}) = 1$ y construimos $\Gamma = \{A_0, A_1 \ldots\}$ de la siguiente manera:

$A_0 = \overline{B(e^{\pi i}; \frac{\pi}{9})} \cup \{\{e^{\frac{k\pi}{2n}}\} \in C(S^1) | k \in \{0, \ldots n-2\}\}$; $A_1 = C(f)(A_0) = \overline{B(e^{\pi i}; \frac{\pi}{3})} \cup \{\{1\}\}$; $A_2 = C(f)(A_1) = S^1$; $A_3 = S^1 \setminus B(e^{\pi i}; \frac{\delta}{2})$; y en general, para cada $j \geq 4$, $A_j = C(f)^{j-3}(A_3)$.
Notemos que

$$A_{r+3} = \{1\}. \tag{18}$$

Probaremos que para todo $Z \in B_H(A_0; \varepsilon)$, $\mathcal{O}_{C_n(f)}(Z)$ no ε-sombrea a Γ. Sea $Z \in B_H(A_0; \varepsilon)$. Como A_0 tiene n componentes conexas y la distancia entre cualesquiera dos de ellas es mayor que 2ε, tenemos que $e^{\pi i} \in Z$, por tanto $e^{\pi i} \in C(f)^{r+3}(Z)$. Así por (18), afirmamos que $H(C(f)^{r+3}(Z), A_{r+3}) \geq \varepsilon$.

Observemos que la función $f\colon S^1 \to S^1$ definida en (17) es tal que (S^1, f) tiene sombreado y su sistema inducido $(C(S^1), C(f)$ no tiene.

Con el siguiente teorema mostramos una condición necesaria y suficiente para tener la equivalencia del sombreado entre los sistemas dinámicos discretos (X, f) y $(C(X), C(f))$.

Teorema 4.0.6 *Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ una función continua tal que $f^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in [0,1]$. Entonces $([0,1], f)$ tiene sombreado si, y solo si, $(C([0,1]), C(f))$ tiene sombreado.*

Demostración 4.0.7 *Supongamos primero que (X, f) tiene sombreado. Sean $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta > 0$ dado por el sombreado de (X, f) y $\Gamma = \{A_0, \ldots, A_n\}$ una δ-pseudo órbita en $(C(X), C(f))$. Denotemos por $a_i =$ mín(A_i) y $a^i =$ máx(A_i), para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$. Supongamos que f es creciente. Probemos que $\Gamma_{\text{mín}} = \{a_0, \ldots, a_n\}$ es una δ-pseudo órbita en (X, f). Como Γ es una δ-pseudo órbita tenemos que para todo $i < n$, $H(C(f)(A_i), A_{i+1}) < \delta$, por tanto, $d(f(a_i), a) < \delta$ para algún $a \in A_{i+1}$ y $d(f(y), a_{i+1}) < \delta$ para algún $y \in A_i$. Por definición de a_i y como f es creciente, obtenemos las siguientes desigualdades:*

$$a_i \leq y \; ; \; f(a_i) \leq f(y); \text{ y } \; a_{i+1} \leq a.$$

Afirmamos que $d(f(a_i), a_{i+1}) < \delta$. Puesto que si $a_{i+1} < f(a_i)$, entonces

$$a_{i+1} < f(a_i) \leq f(y),$$

y como $d(f(y), a_{i+1}) < \delta$, concluimos que $d(f(a_i), a_{i+1}) < \delta$. Ahora si suponemos que $a_{i+1} > f(a_i)$, entonces

$$a \geq a_{i+1} > f(a_i),$$

y como $d(f(a_i), a) < \delta$, concluimos que $d(f(a_i), a_{i+1}) < \delta$. Por tanto $\Gamma_{\text{mín}}$ es una δ-pseudo órbita en (X, f). De manera similar se prueba que $\Gamma_{\text{máx}} = \{a^0, \ldots, a^n\}$ es una δ-pseudo órbita en (X, f). Sean z_1 y z_2 elementos de X tales que $\mathcal{O}_f(z_1)$ ε-sombrea a $\Gamma_{\text{mín}}$ y $\mathcal{O}_f(z_2)$ ε-sombrea a $\Gamma_{\text{máx}}$. Así para todo $i \leq n$:

$$d(f^i(z_1), a_i) < \varepsilon \text{ y } d(f^i(z_2), a^i) < \varepsilon. \tag{19}$$

Probaremos que $\mathcal{O}_{C(f)}(\overline{z_1 z_2})$ ε-sombrea a Γ. Es decir $H(C(f)^i(\overline{z_1 z_2}), A_i) < \varepsilon$ para todo $i \leq n$. Sea $i \leq n$. Supongamos que existe $z \in C(f)^i(\overline{z_1 z_2}) = \overline{f^i(z_1) f^i(z_2)}$ tal que para todo $a \in A_i$, $d(a, z) \geq \varepsilon$, entonces por (19), $z \notin \overline{a_i f^i(z_1)}$ y $z \notin \overline{a^i f^i(z_2)}$. Por tanto $a_i < z < a^i$, luego $A_i \cap [0, z) \neq \emptyset$ y $A_i \cap (z, 1] \neq \emptyset$ y como $z \notin A_i$ se tiene que $A_i \subset [0, z) \cup (z, 1]$, pero esto no puede suceder porque A_i es conexo. Concluimos que

$$\overline{f^i(z_1) f^i(z_2)} \subset N(A_i; \varepsilon).$$

De manera similar si suponemos que existe $a \in A_i$ tal que para todo $z \in \overline{f^i(z_1) f^i(z_2)}$, $d(a, z) \geq \varepsilon$, entonces por (19), $a \notin \overline{a_i f^i(z_1)}$, $a \notin \overline{a^i f^i(z_2)}$ y $a \notin \overline{f^i(z_1) f^i(z_2)}$. Luego $\overline{f^i(z_1) f^i(z_2)}$ se puede separar por los abiertos $[0, a)$ y $(a, 1]$ pero esto es absurdo porque $\overline{f^i(z_1) f^i(z_2)}$ es conexo. Concluimos que

$$H(\overline{f^i(z_1), f^i(z_2)}, A_i) = H(C(f)^i(\overline{z_1 z_2}), A_i) < \varepsilon.$$

Supongamos que f es decreciente. Probaremos que $\Gamma_1 = \{a_0, a^1, a_2, a^3, \ldots\}$ es una δ-pseudo órbita. Como Γ es una δ-pseudo órbita, entonces para todo $i < n$, $H(C(f)(A_i) A_{i+1}) < \delta$, por tanto, $d(f(a_i), a) < \delta$ para algún $a \in A_{i+1}$ y $d(f(y), a^{i+1}) < \delta$ para algún $y \in A_i$.

Sea $i < n$ par. Afirmamos que $d(f(a_i), a^{i+1}) < \delta$. Ya que si $f(a_i) < a^{i+1}$, entonces por ser f decreciente $f(y) \leq f(a_i) < a^{i+1}$, así $d(f(a_i), a^{i+1}) < \delta$. Por otro lado, si $f(a_i) >$

a^{i+1}, por definición de a^{i+1}, obtenemos $f(a_i) > a^{i+1} \geq a$, luego queda probada la afirmación y por tanto, concluimos que Γ_1 es una δ-pseudo órbita. Igualmente podemos probar que $\Gamma_2 = \{a^0, a_1, a^2, \dots\}$ es una δ-pseudo órbita.

Sean b_1 y b_2 elementos de X tales que $\mathcal{O}_f(b_1)$ ε-sombrea a Γ_1 y $\mathcal{O}_f(b_2)$ ε-sombrea a Γ_2. Así para todo $i \leq n$:

$$d(f^i(b_1), a_{1i}) < \varepsilon \text{ y } d(f^i(b_2), a_{2i}) < \varepsilon \tag{20}$$

donde a_{ki} es el $i+1$-ésimo elemento de Γ_k.

Probemos que $\mathcal{O}_{C(f)}(\overline{b_1b_2})$ ε-sombrea a Γ. Es decir $H(C(f)^i(\overline{b_1b_2}), A_i) < \varepsilon$ para todo $i \leq n$. Sea $i \leq n$ impar. supongamos que existe $b \in \overline{f^i(b_1)f^i(b_2)}$ tal que para todo $a \in A_i$, $d(b, a) \geq \varepsilon$, entonces por (20), $b \notin \overline{a^i f^i(b_1)}$; $b \notin \overline{a_i f^i(b_2)}$ y $b \notin A_i$. Entonces A_i puede ser separado por los abiertos $[0, b)$ y $(b, 1]$ lo cual contradice el hecho que A_i es conexo. por tanto

$$\overline{f^i(b_1)f^i(b_2)} \subset N(A_i; \varepsilon).$$

Ahora, supongamos que existe $a \in A_i$ tal que para todo $b \in \overline{f^i(b_1)f^i(b_2)}$, $d(b, a) \geq \varepsilon$, entonces por (20), $a \notin \overline{a^i f^i(b_1)}$; $a \notin \overline{a_i f^i(b_2)}$ y $a \notin \overline{f^i(b_1)f^i(b_2)}$, luego $\overline{f^i(b_1)f^i(b_2)}$ se puede separar por los abiertos $[0, a)$ y $(a, 1]$ contradiciendo la conexidad de $\overline{f^i(b_1)f^i(b_2)}$. Concluimos que $\mathcal{O}_{C(f)}(\overline{b_1b_2})$ ε-sombrea a Γ.

Note que si (X, f) es un sistema dinámico donde f es un homeomorfismo, entonces se cumple que $|f^{-1}(y)| = 1$. Luego, por el Teoremas 4.0.1, un resultado como el del Teorema 4.0.6 no se tiene si cambiamos el espacio $[0, 1]$ por S^1.

La siguiente proposición muestra una familia de sistemas dinámicos discretos que satisfacen las hipótesis del Teorema 4.0.6, donde su sistema dinámico discreto inducido al hiperespacio de los subcontinuos no tiene h-sombreado,

Proposición 4.0.8 *Sean $X = [0, 1]$ y $f\colon X \to X$ dada por $f(x) = cx$ donde $0 < c <$*

1. *Entonces:*

a. (X, f) *tiene sombreado;*

b. (X, f) *no tiene* h*-sombreado;*

c. $(C(X), C(f))$ *tiene sombreado;*

d. $(C(X), C(f))$ *no tiene* h*-sombreado.*

Demostración 4.0.9 *Veamos que* f *satisface cada afirmación. Veamos primero que* f *tiene sombreado. Sean* $\varepsilon > 0$ *y* $\delta = \frac{1}{a+1}\varepsilon$ *con* $a \in \mathbb{N}$ *tal que* $c < \frac{a}{a+1}$*. Sea* $\Gamma = \{x_0, x_1, \dots\}$ *una* δ*-pseudo-órbita. Note que*

$$d(f(x), f(y)) = |cx - cy| = c|x - y| = cd(x, y). \tag{21}$$

Sea $y \in B(x_0; \varepsilon)$*. Por (21),* $d(f(y), f(x_0)) < c\varepsilon$*. Luego,* $d(f(y), x_1) < c\varepsilon + \frac{1}{a+1}\varepsilon < \frac{a}{a+1}\varepsilon + \frac{1}{a+1}\varepsilon = \varepsilon$*. Si* $d(f^i(y), x_i) < \varepsilon$*, entonces* $d(f^{i+1}(y), f(x_i)) < c\varepsilon$*. Por tanto,* $d(f^{i+1}(y), x_{i+1}) < c\varepsilon + \frac{1}{a+1}\varepsilon < \varepsilon$*. Así, para todo* $k \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $d(f^k(y), x_k) < \varepsilon$*. De lo anterior,* f *tiene sombreado.*

Notemos que si $\varepsilon = 1 - c$ *y* $\delta > 0$*. Definimos la* δ*-pseudo órbita* $\Gamma = \{1, c, c^2, \dots, c^n, 0\}$ *donde* $c^n < \delta$*. Note que* $f^{n+1}(z) \neq 0$ *para cada* $z \in (1 - \varepsilon, 1]$*. Así,* f *no tiene* h*-sombreado.*

Finalmente, $(C(X), C(f)$ *tiene sombreado por el Teorema 4.0.6; y* $(C(X), C(f)$ *no tiene* h*-sombreado, por la parte* b*, y el Teorema 3.0.1.*

En el Teorema 4.0.6 mostramos condiciones para que se preserve el sombreado en el sistema dinámico discreto inducido de un sistema dinámico discreto, donde el espacio es $[0, 1]$. En el siguiente teorema presentamos condiciones para que suceda lo contrario.

Teorema 4.0.10 *Sea* $([0,1], f)$ *un sistema dinámico discreto donde se cumple lo siguiente:*

1. *Sólo existen dos puntos fijos* p *y* q*,*

2. q *es punto de corte y* p *es punto de no corte,*

3. *si* $x \in [0,1] \setminus \{p,q\}$*, entonces* $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p$*.*

Entonces, $(C([0,1]), C(f))$ *no tiene sombreado.*

Demostración 4.0.11 *Supongamos sin pérdida de generalidad que* $p = 0$*. Así,* $p < q$*. Sea* $\varepsilon > 0$ *tal que* $B_H(\{p\};\varepsilon), B_H(\{q\};\varepsilon)$ *y* $B_H([p,q];\varepsilon)$ *son disjuntos dos a dos y* $1 \notin B(q;\varepsilon)$*.*
Dado $\delta > 0$*, con* $\delta < \varepsilon$*, definiremos una* δ*-pseudo órbita* $\Gamma = \{A_0, A_1 \dots\}$ *en* $(C(X), C(f))$ *de la siguiente manera:*
Sea $A_0 = \overline{B(q;\varepsilon)}$*. Tomando* $z = q + \varepsilon$ *en* $\overline{B(q;\varepsilon)}$*, por la condición* 3*, existe* $r \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^r(z) \in B(p;\delta)$*. Definamos* A_i *para cada* $i \geq 1$ *así:* $A_1 = C(f)(A_0) \setminus B(q;\frac{\delta}{2})$*; y* $A_i = C(f)^{i-1}(A_1)$*, siempre que* $i > 1$*. La Figura 4 ilustra, en el sistema dinámico discreto de la Proposición 4.0.15 (este sistema cumple las condiciones del Teorema 4.0.10), la sucesión* $\{A_0, A_1, \dots\}$*. Para mostrar que* Γ *es una* δ*-pseudo órbita, solo debemos demostrar que* A_1 *es conexo. Para esto, observe lo siguiente:*

Afirmación 4.0.12 $[0,q] = f([0,q])$ *y* $f([q,1]) \subseteq [0,q]$*.*

Como f *es continua,* $f(0) = 0$*,* $f(q) = q$ *y* $[0,q]$ *es conexo, se tiene que* $[0,q] \subseteq f([0,q])$*. Ahora mostraremos que* $f([0,q]) \subseteq [0,q]$*. Supongamos que existe* $y \in [0,q]$ *tal que* $f(y) > q$*. Entonces por el teorema del valor intermedio, existe* $c \in (0,y)$ *tal que* $f(c) = q$*, pero esto contradice la condición 3. Concluimos que* $[0,q] = f([0,q])$*.*
Para probar que $f([q,1]) \subseteq [0,q]$*, mostraremos primero que existe* $z \in [q,1]$ *tal que* $f(z) < q$*. Supongamos que para todo* $x \in (q,1]$*,* $f(x) > q$*. Luego, para todo* $x \in (q,1]$

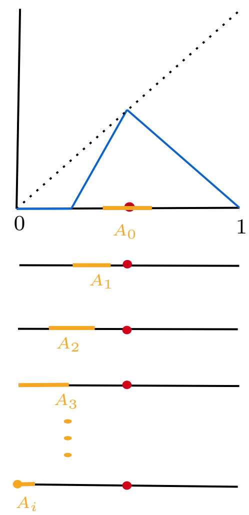

Figura 4. Representación de Γ

se tiene que $f^n(x) > q$, por tanto $\mathcal{O}_f(x)$ no tiende a p. Lo que contradice la condición 2. Así concluimos que existe $z \in [q, 1]$ tal que $f(z) < q$. Por tanto si para algún $x \in [q, 1]$ se tiene que $f(x) > q$, entonces por el teorema del valor intermedio existe $c \in \overline{xz}$ tal que $f(c) = q$, contradiciendo la condición 3. Lo que implica que para todo $x \in (q, 1]$, $f(x) < q$, es decir $f([q, 1]) \subseteq [0, q]$.

De lo anterior concluimos la prueba de la Afirmación 4.0.12. De esto, Γ es una δ-pseudo órbita.

Mostraremos algunas propiedades para argumentar que ningún punto de $C([0, 1])$ puede sombrear a Γ.

Afirmación 4.0.13 *Para todo $x \in (0, q)$, $f(x) < x$.*

Note que si existen w y z en $(0, q)$ tales que $f(w) > w$ y $f(z) < z$, entonces por el teorema del valor intermedio, existe $c \in \overline{wz}$ tal que $f(c) = c$. Por lo anterior si existe $y \in (0, q)$ tal que $f(y) > y$, entonces, para todo $x \in (0, q)$, $f(x) > x$. Así, por la afirmación 4.0.12, para todo $x \in (0, q)$, $\mathcal{O}_f(x)$ no tiende a p. Lo que contradice la condición 3. Esto concluye la prueba de la afirmación.

Afirmación 4.0.14 *Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que*

$$C(f)^k(A_1) \cap B(q;\varepsilon) = \emptyset. \tag{22}$$

Probaremos la afirmación por contradicción. Supongamos para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in A_r$ tal que $d(f^k(x_k), q) < \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad asumimos que

$$\lim_{k\to\infty} x_k = y. \tag{23}$$

Por ser f continua y la condición 3, existen $j \in \mathbb{N}$ y $\alpha > 0$ tal que $H(f^j(\overline{B(y;\alpha)}), \{p\}) < \delta$. Por (23), existe un natural $n_0 \geq j$ tal que si $k \geq n_0$, entonces $x_k \in B(y;\alpha)$. Por tanto $d(f^j(x_k), q) \geq \varepsilon$ y $d(f^k(x_k), q) < \varepsilon$, así existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $j \leq l < k$ y $f^l(x_k) < f^{l+1}(x_k)$, lo cual, por la Afirmación 4.0.13, no puede suceder. Así concluimos la prueba de la afirmación.
Ahora probaremos que Γ no se puede ε-sombrear por ningún punto de $C([0,1])$. Sea $Z \in C([0,1])$ tal que $H(Z, A_0) < \varepsilon$. Como diám$(A_0) = 2\varepsilon$, $q \in Z$. Por tanto, $q \in C(f)^n(Z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De lo anterior y (22) tenemos que $H(C(f)^k(Z), A_{k+1}) \geq \varepsilon$. Así podemos concluir que Z no ε-sombrea a Γ.

En la siguiente proposición mostramos un sistema dinámico discreto (X, f) que tiene sombreado y satisface las condiciones del teorema anterior, por tanto el sistema dinámico discreto inducido $(C(X), C(f))$ no tiene sombreado.

Proposición 4.0.15 *Existe un sistema dinámico discreto $([0,1], f)$ que tiene sombreado, pero su sistema inducido $(C([0,1]), C(f))$ no tiene sombreado.*

Demostración 4.0.16 *Sea $f\colon [0,1]\to[0,1]$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{si } x\in[0,14]; \\ 2x-\frac{1}{2}, & \textit{si } x\in[14,12]; \\ 1-x, & \textit{si } x\in[12,1]. \end{cases}$$

Nótese que por el Teorema 4.0.10, $(C([0,1],C(f))$ no tiene sombreado. Luego, mostremos que $([0,1],f)$ tiene sombreado. Como $\frac{1}{2}=\max\{f(x):x\in[0,1]\}$, la siguiente afirmación se sigue de la definición de f.

Afirmación 4.0.17 *Si $\Gamma=\{x_0,x_1,\dots\}$ es una δ-pseudo órbita en $([0,1],f)$ para algún $\delta>0$, entonces $x_i<\frac{1}{2}+\delta$ para todo $i\in\{1,2\dots\}$.*

Además, por el Ejemplo 2.2.32, tenemos lo siguiente:

Afirmación 4.0.18 $([0,\frac{1}{2}],f|_{[0,\frac{1}{2}]})$ *tiene sombreado*

Sea $\varepsilon>0$. Por la Afirmación 4.0.18, existe $\eta\in(0,\frac{\varepsilon}{2})$ tal que para toda η-pseudo órbita en $([0,\frac{1}{2}],f|_{[0,\frac{1}{2}]})$, existe $z\in[0,\frac{1}{2}]$ tal que $\mathcal{O}_{f|_{[0,\frac{1}{2}]}}(z)$ la $\frac{\varepsilon}{2}$-sombrea. Sean $\delta=\frac{\eta}{2}$ y $\Gamma=\{x_0,x_1,\dots\}$ una δ-pseudo órbita en $([0,1],f)$. Definimos:

$a.$ $\Gamma_1=\{y_0,y_1,\dots\}$*, donde*

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \textit{si } i=0 \textit{ ó } x_i\le\frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}, & \textit{si } x_i>\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$b.$ $\Gamma_2=\{y_1,y_2,\dots\}$.

Probaremos primero que Γ_2 es una η-pseudo órbita en $([0,\frac{1}{2}],f|_{[0,\frac{1}{2}]})$. Observemos que si $y_1=\frac{1}{2}$, entonces $x_1\in[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\eta)$, y como Γ es una δ-pseudo órbita, $x_2\in(\frac{1}{2}-\delta,\frac{1}{2}+\delta)$. Por definición, $y_2=\frac{1}{2}$ ó $y_2=x_2$. De cualquier manera $|y_2-f(y_1)|<\delta<\eta$.

Por otra parte, supongamos que $y_1 = x_1 < \frac{1}{2}$. Note que si $x_2 \geq \frac{1}{2}$, entonces $y_2 = \frac{1}{2}$. Por ello, es claro que

$$d(y_2, f(y_1)) = d\left(\frac{1}{2}, f(x_1)\right) \leq d(f(x_1), x_1) + d\left(x_1, \frac{1}{2}\right) < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.$$

Por el contrario, si $x_2 < \frac{1}{2}$, entonces $x_2 = y_2$, luego

$$d(y_2, f(y_1)) = d(x_2, f(x_1)) < \eta.$$

De lo anterior, concluimos que $d(f(y_1), y_2) < \eta$. De manera general, tomando cualquier $i \geq 2$, repitiendo el argumento, obtenemos que $d(f(y_i), y_{i+1}) < \eta$; es decir, Γ_2 es una η-pseudo órbita en $([0, \frac{1}{2}], f|_{[0,\frac{1}{2}]})$. Así, por la Afirmación 4.0.18, existe $z \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $\mathcal{O}_{f|_{[0,\frac{1}{2}]}(z)}$ $\frac{\varepsilon}{2}$-sombrea a Γ_2.
Note que $d(f(x_0), x_1) < \frac{\eta}{2}$. Luego si $x_1 \leq \frac{1}{2}$, entonces $y_1 = x_1$ y $d(f(y_0), y_1) < \frac{\eta}{2}$. Por otra parte, si $x_1 > \frac{1}{2}$, entonces $y_1 = \frac{1}{2}$ y por la Afirmación 4.0.17, $d(y_1, x_1) < \frac{\eta}{2}$. Luego $d(f(y_0), y_1) < \eta$. Concluimos que Γ_1 es una η-pseudo órbita en $([0,1], f)$.
Como $y_1 \leq \frac{1}{2}$, $d(f(y_0), y_1) < \eta$ y de la regla de correspondencia de f, tenemos que existe $y \in [\frac{1}{4}, 1]$ tal que $f(y) = y_1$ y $d(y, y_0) < \eta$. También existe w tal que $f(w) = z$ y $d(w, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así $d(w, y_0) < \varepsilon$. Por tanto, $\mathcal{O}_f(w)$ ε-sombrea a Γ_1.
Finalmente probaremos que $\mathcal{O}_f(w)$ ε-sombrea a Γ. Tenemos que $d(w, x_0) < \varepsilon$. Sea $i \in \mathbb{N}$. Consideramos dos casos:

1. *$x_i < \frac{1}{2}$. Por la construcción de Γ_1 y Γ_2 se tiene que $y_i = x_i$. Como $d(f^{i-1}(z), y_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $f^{i-1}(z) = f^i(w)$, entonces $d(f^i(w), x_i) < \varepsilon$.*

2. *$x_i \geq \frac{1}{2}$. Por la Afirmación 4.0.17. $d(x_i, \frac{1}{2}) < \frac{\eta}{2}$. Por la construcción de Γ_1 y Γ_2 tenemos que $y_i = \frac{1}{2}$. Así $d(x_i, y_i) < \frac{\eta}{2}$. Como $d(f^{i-1}(z), y_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $f^{i-1}(z) = f^i(w)$, entonces $d(f^i(w), x_i) \leq d(f^i(w), y_i) + d(y_i, x_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\eta}{2} < \varepsilon$.*

Buscando condiciones para que la propiedad de sombreado se preserve recordamos que cuando tenemos un sistema dinámico discreto y la función de este es bola expansiva, entonces el sistema tiene h-sombreado. En el siguiente resultado vemos que la propiedad bola expansiva no se preserva de la función f a la inducida $C(f)$.

Proposición 4.0.19 *Existe una función bola expansiva f tal que su función inducida $C(f)$ no es bola expansiva.*

Demostración 4.0.20 *Sea f la función tienda. Veamos que $C(f)$ no es bola expansiva. Para esto, basta observar que si $D = [\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon]$ entonces $C(f)(B(D;\varepsilon))$ tiene interior vacío. Pues, si $A \in B(D;\varepsilon)$, entonces $\frac{1}{2} \in A$ y por tanto, $1 \in C(f)(A)$. Todo subcontinuo de $[0,1]$ que contenga a 1, se puede aproximar por continuos que no tienen a 1. De lo anterior, es imposible que $B(C(f)(D);\mu\varepsilon) \nsubseteq C(f)(B(D;\varepsilon))$ para ningún $\mu > 1$. Así, $C(f)$ no es bola expansiva.*

Dos sistemas dinámicos que hemos presentado son (S^1, g) donde $g(z) = z^2$ para cada $z \in S^1$, y $([0,1], T)$ donde T es la función tienda. Estos dos sistemas tienen la característica de que sus funciones tienen la propiedad de ser bola expansiva. Aunque ya vimos en el anterior ejemplo que este propiedad no necesariamente se preserva a las funciones inducidas, en los siguientes resultados mostramos que sus sistemas dinámicos discretos inducidos sí tienen sombreado.

Ejemplo 4.0.21 *Sea $g\colon S^1 \to S^1$ dada por $g(z) = z^2$ para cada $z \in S^1$, entonces $(C(S^1), C(g))$ tiene sombreado.*

Para probar la veracidad del ejemplo se mostrarán las siguientes dos afirmaciones.

Afirmación 4.0.22 *Sean $U = \{A \in C(S^1) \mid$ diám$(A) < \frac{\pi}{2}\}$, $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{8})$ y $A \in U$. Entonces $B_H(C(g)(A); \varepsilon + \delta) \subseteq C(g)(B_H(A;\varepsilon))$ para algún $\delta > 0$.*

Sea $\delta = \varepsilon$. Dados $A \in U$ y $E \in B_H(C(g)(A); 2\varepsilon)$, tenemos que $E \subseteq N(C(g)(A); 2\varepsilon)$ y $C(g)(A) \subseteq N(E; 2\varepsilon)$. Como g es bola expansiva $E \subseteq g(N(A;\varepsilon))$. Note que $N(A;\varepsilon)$

es conexo y su diámetro es menor que π. Esto implica que $g|_{N(A;\varepsilon)}$ es inyectiva, por tanto, existe $D \subseteq N(A;\varepsilon)$ conexo, cerrado y tal que $g(D) = E$. Sea $x \in A$. Luego, existe $d \in D$ tal que $d(g(x), g(d)) < 2\varepsilon$; es decir, $g(x) \in B(g(d); 2\varepsilon)$ y por tanto, $g(x) \in g(B(d;\varepsilon))$. Como $\varepsilon < \frac{\pi}{8}$, $g|_{B(d;\varepsilon)}$ es inyectiva. Así, $x \in B(d;\varepsilon)$. De lo anterior, $A \subseteq N(D;\varepsilon)$ y $D \in B_H(A;\varepsilon)$.

Afirmación 4.0.23 *Si $\eta = \{E_0, \ldots, E_k\}$ es una α-pseudo órbita en $C(S^1)$ donde diám$(E_0) \geq \frac{\pi}{2}$ y $\alpha < \frac{\pi}{16}$, entonces $d(E_i, S^1) < \alpha$ para todo $i \in \{3, \ldots, k\}$.*

Como diám$(E_0) \geq \frac{\pi}{2}$, diám$(f(E_0)) \geq \pi$, y por tanto diám$(E_1) > \frac{7\pi}{8}$. Así diám$(f(E_1)) > \frac{7\pi}{4}$. Luego diám$(E_2) > \frac{13\pi}{8}$. De esta manera se tiene que $g(E_2) = S^1$. Concluimos con esto la prueba de la afirmación, pues $d(E_3, S^1) < \alpha$.

Sea $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{4})$. Tomamos $\delta <$ mín$\{\delta_1, \varepsilon\}$, donde δ_1 es dado por la Proposición 2.2.9 para $n = 3$. Sea $\Gamma = \{Y_0, \ldots, Y_k\}$ es una δ-pseudo órbita en $C(S^1)$. Observemos que tenemos tres casos: diám$(Y_i) < \frac{\pi}{2}$ para todo $i \leq k$; diám$(Y_i) \geq \frac{\pi}{2}$ para todo $i \leq k$ y la negación de los dos casos anteriores. Para exponer los argumentos que prueban los tres casos supongamos que diám$(Y_0) < \frac{\pi}{2}$ y que existe $j > 0$ el menor natural tal que diám$(Y_j) \geq \frac{\pi}{2}$. Por la Afirmación 4.0.22 y el Teorema 2.2.28, tenemos que, existe $Z \in C(S^1)$ tal que $H(C(g)^i(Z), Y_i) < \varepsilon$, para cada $i \in \{0, \ldots, j-1\}$ y $C(g)^j(Z) = Y_j$. Por la Proposición 2.2.9, podemos afirmar que $H(C(g)^{j+r}(Z), Y_{j+r}) < \varepsilon$ para todo $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Finalmente, por la Afirmación 4.0.23 , concluimos que $H(C(g)^i(Z), (Y_i)) < \varepsilon$ para los restantes i's en $\{1, \ldots, k\}$.
A continuación, en el Teorema 4.0.30, mostraremos que $([0,1], C(T))$ tiene sombreado, pero antes, mostraremos tres lemas necesarios para la demostración.

Lema 4.0.24 *Sea $([0,1], T)$ un sistema dinámico discreto donde T es la función tienda. Dados $\varepsilon > 0$ y $A \in C(X)$. Si $\frac{1}{2} \in A$ y* diám$(A) < \frac{\varepsilon}{2}$*, entonces $B_H\left(C(T)(A), \frac{3\varepsilon}{2}\right) \subseteq C(T)(B_H(A, \varepsilon))$.*

Demostración 4.0.25 *Sean $\varepsilon > 0$ y $A \in C(X)$ que satisfacen las hipótesis. Sea $D \in B_H\left(C(T)(A); \frac{3\varepsilon}{2}\right)$. Tenemos que $D \subseteq N\left(C(T)(A), \frac{3\varepsilon}{2}\right)$ y $C(T)(A) \subseteq N\left(D, \frac{3\varepsilon}{2}\right)$. Como T es bola expansiva se cumple que*

$$N\left(C(T)(A), \frac{3\varepsilon}{2}\right) \subseteq T\left(N(A, \varepsilon)\right).$$

Por tanto $D \subseteq T(N(A, \varepsilon))$. Queremos probar que $D \in C(T)(B_H(A, \varepsilon))$. Sean $d = \text{máx}(D)$, $a_0 = \text{mín}(C(T)(A))$ y $d_0 = \text{mín}(D)$. Consideremos dos casos:

- $d = 1$. *Fijemos $a \in A$ tal que $T(a) = a_0$. Note que*

$$d(a, \tfrac{1}{2}) = \textit{máx}(\{d(y, \tfrac{1}{2}) | y \in A\}). \tag{24}$$

  Sean s_1 y s_2 tales que $T(s_1) = T(s_2) = d_0$. Como $D \in B_H\left(C(T)(A); \frac{3\varepsilon}{2}\right)$, tenemos que

$$d(d_0, a_0) < \frac{3\varepsilon}{2}. \tag{25}$$

  Supongamos que s_1 está más cerca a a que s_2, entonces, $\frac{1}{2} \notin \overline{as_1}^{\circ}$. Así, por (25) y el Lema 2.2.4, $d(s_1, a) < \frac{3\varepsilon}{4}$. Por tanto, $\overline{\frac{1}{2}s_1} \subseteq N(A, \varepsilon)$. Por otro lado sea $x \in A$, luego $d(x, \frac{1}{2}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ya que diám$(A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $d(x, \frac{1}{2}) = \frac{\varepsilon}{2}$, entonces, por la ecuación (24), $x = a$. Por tanto, $x \in N(\overline{\frac{1}{2}s_1}; \varepsilon)$. Si $d(x, \frac{1}{2}) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $x \in N(\overline{\frac{1}{2}s_1}; \varepsilon)$. Concluimos que $\overline{\frac{1}{2}s_1} \in B_H(A, \varepsilon)$, además $C(T)(\overline{\frac{1}{2}s_1}) = D$.

- $d \neq 1$. *Sabemos que existen z_1 y z_2 tales que $T(z_1) = T(z_2) = d$. Supongamos sin pérdida de generalidad que*

$$\textit{diám}([\tfrac{1}{2}, 1] \cap A) \geq \textit{diám}([0, \tfrac{1}{2}] \cap A). \tag{26}$$

  Supongamos que $z_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$. Sea $Z = [z_2, d_1]$ donde $T(d_1) = d_0$. Como $d(T(d_1), a_0) < \frac{3\varepsilon}{2}$ y $d(d, 1) < \frac{3\varepsilon}{2}$, por el Lema 2.2.4, afirmamos que $d(z_2, \frac{1}{2}) < \frac{3\varepsilon}{4}$ y $d(d_1, y) < \frac{3\varepsilon}{4}$

para algún $y \in A$. Como $\frac{1}{2} \in A$, concluimos que $Z \subseteq N(A, \varepsilon)$.

Sea $a \in A$. Si $a \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces, por (26), $d(a, \frac{1}{2}) \leq \frac{\varepsilon}{4}$, luego

$$d(a, z_2) \leq d(a, \tfrac{1}{2}) + d(\tfrac{1}{2}, z_2) < d(a^1, \tfrac{1}{2}) + \tfrac{3\varepsilon}{4} \leq \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{3\varepsilon}{3}.$$

Por tanto $a \in N(Z, \varepsilon)$. Ahora supongamos que $a \in [\frac{1}{2}, 1]$, entonces $d(a, \frac{1}{2}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\{z_2, a\} \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$ y $d(z_2, \frac{1}{2}) < \frac{3\varepsilon}{4}$, tenemos que $d(z_2, a) < \varepsilon$. Concluimos que $A \subseteq N(Z, \varepsilon)$.

Así $D = C(T)(Z) \in C(T)(B_H(A, \varepsilon)$.

Lema 4.0.26 *Sea $([0,1], T)$ un sistema dinámico discreto donde T es la función tienda. Para todo $\varepsilon > 0,$ existe $\delta > 0$ tal que si $A \in \mathcal{C}([0,1])$ y $\frac{1}{2} \notin A^\circ$ entonces $B_H(C(T)(A), \varepsilon + \delta) \subseteq C(T)(B_H(A, \varepsilon))$.*

Demostración 4.0.27 *Sea $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \varepsilon$. Sea $A \in \mathcal{C}([0,1])$ tal que $\frac{1}{2} \notin A^\circ$. Sea $D \in B_H(C(T)(A); 2\varepsilon)$. Notemos que $H(D, C(f)(A)) < 2\varepsilon$. Luego,*

$$D \subseteq N(C(f)(A); 2\varepsilon) \ \text{ y } \ C(f)(A) \subseteq N(D; 2\varepsilon). \tag{27}$$

Como T es bola expansiva, $D \subseteq T(N(A; \varepsilon))$. Ahora, como $\frac{1}{2} \notin A^\circ$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A \subseteq [0, \frac{1}{2}]$. Como $C(T)$ es sobreyectiva, existen Z_1 y Z_2 en $C([0,1])$ tales que $Z_1 \subseteq [0, \frac{1}{2}]$, $Z_2 \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$ y $C(T)(Z_1) = C(T)(Z_2) = D$.
Veamos que $Z_1 \subseteq N(A; \varepsilon)$. Supongamos lo contrario, esto es $Z_1 \nsubseteq N(A; \varepsilon)$. Luego, existe $z \in Z$ tal que $d(z, a) \geq \varepsilon$ para todo $a \in A$ y como $\frac{1}{2} \notin \overline{za}^\circ$, $d(T(z), T(a)) \geq 2\varepsilon$, para todo $a \in A$. Esto contradice (27), por tanto $Z_1 \subseteq N(A; \varepsilon)$.
Supongamos que $A \nsubseteq N(Z_1; \varepsilon)$; es decir, existe $a \in A$ tal que $d(a, z) \geq \varepsilon$ para todo $z \in Z_1$. Como $\frac{1}{2} \notin \overline{za}^\circ$, entonces $d(T(z), T(a)) \geq 2\varepsilon$ para todo $z \in Z_1$. Como $T(Z_1) = D$, $C(T)(A) \nsubseteq N(D, 2\varepsilon)$. Contradecimos (27). Se concluye que $A \nsubseteq N(Z_1; \varepsilon)$, y $Z_1 \in B_H(A, \varepsilon)$.

Lema 4.0.28 *Sea $([0,1],T)$ un sistema dinámico discreto donde T es la función tienda. Sean $\varepsilon \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ y r tales que $2^{r-1}\varepsilon < \frac{1}{2} < 2^r\varepsilon$, y*

$$\delta < \text{mín}\left\{\frac{\varepsilon}{2^{r+2}+2^r+2^{r-1}+\cdots+1}, \frac{2^r\varepsilon-\frac{1}{2}}{2^{r+1}+2^r+\cdots+1}\right\}. \tag{28}$$

Si $\Gamma = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ es una δ-pseudo órbita en $(C[0,1], C(T))$ tal que diám$(A_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{2} \in A_0{}^\circ$ entonces $\mathcal{O}_{C(f)}(A_0)$ ε-sombrea a Γ.

Demostración 4.0.29 *Dados $\varepsilon \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ y r tales que $2^{r-1}\varepsilon < \frac{1}{2} < 2^r\varepsilon$. Definimos $\delta > 0$ como en (28). Consideremos $\Gamma = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ una δ-pseudo órbita en $C[0,1]$ tal que diám$(A_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{2} \in A_0^\circ$. Sean $a^i = \text{máx}\, A_i,\ a_i = \text{mín}\, A_i$, $y_0 \in A_0$ el punto que está más lejos de $\frac{1}{2}$, $y_1 = T(y_0)$ y $y_i =$ máx $T^i(A_0)$ para cada $i \geq 2$.*
Como Γ es una δ-pseudo órbita, $H(C(T)(A_0), A_1) < \delta$. De esto,

$$d(y_1, a_1) < \delta \text{ y } d(1, a^1) < \delta. \tag{29}$$

Como diám$(A_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}$, $d\left(y_0, \frac{1}{2}\right) \geq \frac{\varepsilon}{4}$. Luego $y_1 \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Así de (29) se tiene que

$$a_1 < 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \delta.$$

Además, como $d(0, f(a^1)) < 2\delta$ y $d(y_2, T(a_1)) < 2\delta$,

$$d(0, a_2) < 2\delta + \delta \text{ y } d(y_2, a^2) < 2\delta + \delta.$$

Así, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que

$$d(0, a_i) < 2^{i-1}\delta + \cdots + \delta \text{ y } d(y_i, a^i)) < 2^{i-1}\delta + \cdots + \delta. \tag{30}$$

Consideremos dos casos:

- $d\left(a_1, \frac{1}{2}\right) < \delta$, $d(y_1, \frac{1}{2}) < \delta$ *ó* $a_1 < \frac{1}{2}$. *Este caso está dividido en tres casos* *pero sus pruebas son similares. Supongamos que* $d\left(a_1, \frac{1}{2}\right) < \delta$*. Entonces* $d(T(a_1), 1) < 2\delta$*. Luego,* $d(a^2, 1) < 3\delta$*. Sabemos que* $d(a_2, 0) < 3\delta$*. Así,*

$$A_2 \in B_H([0,1]; 3\delta). \tag{31}$$

Note que $\delta < \frac{\varepsilon}{8}$*, ya que* $\delta < \frac{\varepsilon}{2^{r+2}+2^r+2^{r-1}+\cdots+1}$.

De (30) y (31), tenemos que $d(a_3, 0) < 7\delta$ *y* $d(a^3, 1) < \delta$*. Por consiguiente,*

$$A_i \in B_H([0,1], 3\delta) \text{ para todo } i \geq 4.$$

Ahora, como $d\left(a_1, \frac{1}{2}\right) < \delta$ *entonces* $d\left(y_1, \frac{1}{2}\right) < 2\delta$*. Por tanto,* $d(y_2, 1) < 4\delta$*. De ahí, concluimos que*

$$C(T)^2(A_0) \in B_H([0,1]; 4\delta). \tag{32}$$

Luego, $[0,1] = C(T)^i(A_0)$ *para todo* $i \geq 3$*. Note que de (31) y (32) se tiene que* $H(A_2, C(T)^2(A_0)) < 7\delta < \varepsilon$*. Así,*

$$C(T)^i(A_0) \in B_H(A_i, \varepsilon) \text{ para todo } i \leq n.$$

- $d\left(a_1, \frac{1}{2}\right) \geq \delta,\ d(y_1, \frac{1}{2}) \geq \delta$ *y* $a_1 \geq \frac{1}{2}$*. Como* $a_1 \geq \frac{1}{2}$ *y* $a_1 < 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \delta$ *entonces* $f(a_1) > f(1 - \frac{\varepsilon}{2} + \delta) = \varepsilon - 2\delta$*, así* $a^2 \geq \varepsilon - 2\delta - \delta$*, por tanto,*

$$a^i \geq 2^{i-2}\varepsilon - 2^{i-1}\delta - \cdots - \delta \quad \text{para todo } 0 < i \leq r+2.$$

Por lo anterior y como $\delta < \frac{2^r\varepsilon - \frac{1}{2}}{2^{r+1}+2^r+\cdots+1}$ *tenemos que*

$$a^{r+2} > 2^r\varepsilon - 2^{r+1}\delta - \cdots - \delta \geq \frac{1}{2}. \tag{33}$$

Supongamos que para todo $t \in \{2, \ldots, n\}$ *se tiene que* $a^t < \frac{1}{2}$.

Entonces, por (33),

$$n \leq r + 1 \tag{34}$$

Luego, por (34) y (30), $H(C(T)^i(A_0), A_i) < \varepsilon$.

Ahora supongamos que existe $t \in \{2, \ldots, n\}$ *tal que* $a^t \geq \frac{1}{2}$. *Consideremos que* t *es el menor con tal propiedad, entonces* $t \leq r + 2$. *Ya que si* $t > r + 2$, *entonces* $a^{r+2} \leq \frac{1}{2}$ *pero esto contradice (33). Sea* $i \leq n$.

Por (30), tenemos que

$$H(C(T)^i(A_0), A_i) < \varepsilon, \text{ para todo } i \leq r + 2, \tag{35}$$

Si $i > r + 2$, *entonces* $i > t$. *Note que por (30),* $d(0, a_t) < 2^{t-1}\delta + \cdots + \delta \leq 2^{r+1}\delta + \cdots + \delta < \varepsilon$ *y como* $a^t \geq \frac{1}{2}$, *entonces*

$$d(a_{t+1}, 0) < 2^t\delta + \cdots + \delta \;\text{ y }\; d(1, a^{t+1}) < \delta. \tag{36}$$

Y como $d(y_t, a^t) < 2^{t-1}\delta + \cdots + \delta$ *y* $a^t \geq \frac{1}{2}$, *entonces* $y_t \geq \frac{1}{2}$ *o* $d(y_t, \frac{1}{2}) < 2^{t-1}\delta + \cdots + \delta$. *Luego,* $d(y_{t+1}, 1) < 2^t\delta + \cdots + 2\delta$. *Así, por (36),* $d(y_{t+1}, a^{t+1}) < 2^t\delta + \cdots + 2\delta + \delta < \varepsilon$. *Por tanto,*

$$H(C(T)^{t+1}(A_0), A_{t+1}) < \varepsilon. \tag{37}$$

Por (36), $A_i \in B_H([0, 1]; 3\delta)$ *para cada* $i > t + 1$ *y como* $d(y_{t+1}, 1) < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $C(f)^i(A_0) = [0, 1]$ *para* $i > t + 1$. *Así*

$$H(C(T)^i(A_0), A_i) < \varepsilon \text{ para todo } i > t + 1. \tag{38}$$

Recordemos que $t \leq r + 2$, *luego si* $t = r + 2$, *entonces, por (35), (37) y (38) concluimos que* $H(C(T)^i(A_0), A_i) < \varepsilon$ *para todo* $i \in \{0, \ldots, n\}$.

De los dos casos tenemos que $\mathcal{O}_{C(f)}(A_0)$ ε-sombrea a Γ.

Teorema 4.0.30 *Sea $([0,1],T)$ un sistema dinámico discreto donde T es la función tienda. Entonces $(C([0,1]),C(T))$ tiene sombreado.*

Demostración 4.0.31 *Sea $\varepsilon \in (0,\frac{1}{2}) \setminus \mathbb{Q}$. Tomamos $r \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ como en el Lema 4.0.28. Sabemos que $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $\Gamma = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ una $\delta-$pseudo órbita. Supongamos que existe $j \leq n$ el menor natural donde diám$(A_j) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{2} \in A_j^{\circ}$. Luego, para todo $i < j$, diám$(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ ó $\frac{1}{2} \notin A_i^{\circ}$. Así, por los lemas 4.0.24 y 4.0.26, tenemos que $B_H\left(C(T)(A_i), \frac{3\varepsilon}{2}\right) \subseteq C(T)(B_H(A_i,\varepsilon))$ para todo $i < j$. Como $H(C(T)(A_{i-1}), A_i) < \delta$ para todo $i \leq j$, tenemos que $B_H(A_i;\varepsilon) \subseteq B_H(C(T)(A_{i-1}); \frac{3\varepsilon}{2})$. Por tanto*

$$B_H(A_i;\varepsilon) \subseteq C(T)(B_H(A_{i-1};\varepsilon)), \text{ para todo } i \leq j. \tag{39}$$

Teniendo en cuenta (39), de manera similar a la prueba del Teorema 2.2.28, se demuestra que existe $Z \in C([0,1])$ tal que $H(C(T)^i(Z), A_i) < \varepsilon$ para cada $i \in \{0,\ldots,j-1\}$, y $C(T)^j(Z) = A_j$. Finalmente, por el Lema 4.0.28, concluimos que $\mathcal{O}_{C(T)}(Z)$ $\varepsilon-$sombrea a Γ.

En la Proposición 4.0.19 mostramos que ser bola expansiva no se preserva, sin embargo en el Ejemplo 4.0.21 y el Teorema 4.0.30 se probó que en estos dos sistemas si se preserva el sombreado. Entonces, nos plantemos la siguiente pregunta:

Pregunta 4.0.32 *¿Si $f\colon X \to X$ es bola expansiva, entonces $(C(X),C(f))$ tiene sombreado?*

BIBLIOGRAFÍA

ARBIETO, A. y BOHORQUEZ J. “Shadowing, topological entropy and recurrence of induced Morse–Smale diffeomorphism”. En: *Mathematische Zeitschrift* 303 (2023) (vid. pág. 37).

BARWELL A. D. GOOD C., OPROCHA P. y RAINES B. E. “Characterizations of $\omega-$limit sets in topologically hyperbolic systems”. En: *Discrete Contin. Dynam. Systems* 33 (2013), págs. 1819-1833 (vid. págs. 20, 26, 31).

BARWELL A.D., GOOD C. y OPROCHA P. “Shadowing and expansivity in subspaces”. En: *Fund. Math.* 219 (2012), págs. 223-243 (vid. págs. 18, 23, 26).

COVEN E.M., KAN I. y YORKE J.A. “Pseudo-Orbit Shadowing in the Family of Tent Maps”. En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 308.1 (1988), 227–241 (vid. págs. 16, 29).

FERNANDEZ, L. y GOOD C. “Shadowing for induced maps of hyperspaces.” En: *Fund. Math.* 235 (2016), págs. 277-286 (vid. págs. 9, 25, 31, 33-36).

GOOD C., MITCHELL J. y THOMAS J. “Preservation of shadowing in discrete dynamical systems”. En: *J. Math. Anal. Appl.* 485 (2020) (vid. págs. 9, 32).

GÓMEZ J. L., ILLANES A. y MÉNDEZ H. “Dynamic properties for the induced maps in the symmetric products”. En: *Chaos Solitons Fractals* 45 (2012), págs. 1180-1187 (vid. págs. 10, 31, 32).

ILLANES, A. y NADLER S.JR. “Hyperspaces: Fundamentals and recent advances”. En: *Mono-graphs and Textbooks in Pure and Applied Math* 216 (1999) (vid. pág. 13).

NADLER, S. “Continuum Theory: An Introduction”. En: *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math* 158 (1992) (vid. pág. 12).

YANO, K. “Generic homeomorphisms of S1 have the pseudo-orbit tracing property”. En: *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 3 (1987), 51–55 (vid. pág. 37).